

**100%**

# **CONCOURS PRÉPAS**

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER  
ALAIN MANSOUX • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

## **TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE PC-PSI**

**Pour assimiler le programme, s'entraîner  
et réussir son concours**

- ▶ Rappels de cours et exercices d'assimilation
- ▶ Plus de 300 exercices dont la majorité est issue d'oraux de concours récents
- ▶ Solutions complètes et détaillées

**EdiScience**

# ***TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE PC-PSI***

Pour assimiler le programme, s'entraîner  
et réussir son concours





# ***TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE PC-PSI***

**Pour assimiler le programme, s'entraîner  
et réussir son concours**

**El-Haj Laamri**

Agrégé en mathématiques et maître de conférences à Nancy-Université

**Philippe Chateaux**

Agrégé en mathématiques et professeur en MP au Lycée Henri Poincaré à Nancy



**Gérard Eguether**

Maître de conférences à Nancy-Université

**Alain Mansoux**

Agrégé en mathématiques et professeur en PC au Lycée Henri Poincaré à Nancy

**David Rupprecht**

Agrégé de Mathématiques et professeur en PSI au Lycée Henri Loritz à Nancy

**Laurent Schwald**

Agrégé en mathématiques et professeur en BCPST au lycée Henri Poincaré à Nancy



# Consultez nos catalogues sur le Web



**www.dunod.com**

## Couverture : Claude Lieber



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2008  
ISBN 978-2-10-053964-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Présentation de la série « Tous les exercices de mathématiques »</b> . . . . . | <b>vii</b> |
| <b>Avant-propos</b> . . . . .                                                     | <b>xi</b>  |
| <b>Chapitre 1. Espaces vectoriels et Applications linéaires</b> . . . . .         | <b>1</b>   |
| 1.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation . . . . .                    | 1          |
| 1.2 Exercices d'entraînement . . . . .                                            | 21         |
| 1.3 Exercices d'approfondissement . . . . .                                       | 31         |
| <b>Chapitre 2. Matrices</b> . . . . .                                             | <b>40</b>  |
| 2.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation . . . . .                    | 40         |
| 2.2 Exercices d'entraînement . . . . .                                            | 62         |
| 2.3 Exercices d'approfondissement . . . . .                                       | 71         |
| <b>Chapitre 3. Déterminants</b> . . . . .                                         | <b>81</b>  |
| 3.1 Rappels de cours et exercices d'assimilation . . . . .                        | 81         |
| 3.2 Exercices d'entraînement . . . . .                                            | 87         |
| 3.3 Exercices d'approfondissement . . . . .                                       | 98         |
| <b>Chapitre 4. Équations linéaires</b> . . . . .                                  | <b>103</b> |
| 4.1 L'essentiel du cours . . . . .                                                | 103        |
| 4.2 Exercices . . . . .                                                           | 104        |
| <b>Chapitre 5. Réduction des endomorphismes</b> . . . . .                         | <b>112</b> |
| 5.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation . . . . .                    | 112        |
| 5.2 Exercices d'entraînement . . . . .                                            | 139        |
| 5.3 Exercices d'approfondissement . . . . .                                       | 153        |

|                                                                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chapitre 6. Espaces préhilbertiens</b> .....                                                                | <b>164</b> |
| 6.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation .....                                                     | 164        |
| 6.2 Exercices d'entraînement .....                                                                             | 178        |
| 6.3 Exercices d'approfondissement .....                                                                        | 187        |
| <b>Chapitre 7. Espaces euclidiens</b> .....                                                                    | <b>192</b> |
| 7.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation .....                                                     | 192        |
| 7.2 Exercices d'entraînement .....                                                                             | 204        |
| 7.3 Exercices d'approfondissement .....                                                                        | 215        |
| <b>Chapitre 8. Quadriques et coniques</b> .....                                                                | <b>224</b> |
| 8.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation .....                                                     | 224        |
| 8.2 Exercices d'entraînement .....                                                                             | 234        |
| 8.3 Exercices d'approfondissement .....                                                                        | 240        |
| <b>Chapitre 9. Étude affine et métrique des courbes</b> .....                                                  | <b>243</b> |
| 9.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation .....                                                     | 243        |
| 9.2 Exercices d'entraînement .....                                                                             | 264        |
| 9.3 Exercices d'approfondissement .....                                                                        | 274        |
| <b>Chapitre 10. Surfaces</b> .....                                                                             | <b>281</b> |
| 10.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation .....                                                    | 281        |
| 10.2 Exercices d'entraînement et d'approfondissement .....                                                     | 283        |
| 10.3 Surfaces usuelles  ..... | 288        |
| <b>Chapitre 11. Compléments de géométrie</b> .....                                                             | <b>297</b> |
| 11.1 Géométrie affine .....                                                                                    | 297        |
| 11.2 Géométrie affine euclidienne .....                                                                        | 300        |
| 11.3 Isométries vectorielles et affines en dimension 3 .....                                                   | 307        |
| 11.4 Lieux géométriques .....                                                                                  | 315        |
| 11.5 Extrema .....                                                                                             | 323        |

# Présentation de la série « Tous les exercices de mathématiques »

L'évolution récente de l'enseignement des disciplines scientifiques dans les C.P.G.E s'est concrétisée par la définition d'un nouveau programme de première année en 2003 et de seconde année en 2004. Un des objectifs de cette évolution a été de combler le fossé grandissant entre la classe terminale et les classes préparatoires. La progression est explicitement imposée par le nouveau programme qui prévoit notamment « un programme de début de l'année », qui exclut la présentation abstraite des concepts au profit d'une démarche fondée sur l'exemple comme point de départ de la conceptualisation, qui préconise l'approche algorithmique en complément de l'approche démonstrative et qui légitime la démarche expérimentale en mathématiques par l'utilisation des logiciels Maple ou Mathematica, logiciels systématiquement utilisés dans de nombreux concours, notamment dans le concours commun « Centrale - Supélec ». Mais les programmes des classes préparatoires ne sont pas les seuls à avoir évolué, les programmes de l'enseignement secondaire ont fait l'objet d'une évolution préalable. Enfin, l'attitude nouvelle des élèves face aux disciplines scientifiques rend inefficace l'approche axiomatique et leur appropriation grandissante de l'outil informatique nécessite d'intégrer cet outil à la pédagogie. L'ensemble de ces changements rend impérative la rédaction de nouveaux ouvrages.

On constate que c'est davantage la structure, l'ordre des thèmes abordés, l'esprit du programme qui ont évolué, le fond étant resté relativement stable. Sur ce fond, que nous n'avons pas la prétention de renouveler, il existe déjà une abondante et excellente littérature ; nous revendiquons une continuité par rapport à nos illustres prédécesseurs et nous nous sommes largement inspirés de leurs écrits pour y puiser exercices et sujets en nous efforçant de les présenter en parfaite cohérence avec l'esprit du programme actuel. Car cette nouvelle collection répond à une nécessité : entièrement rédigée après la parution des nouveaux programmes et le début de leur mise en œuvre, elle garantit une parfaite compatibilité entre la rédaction des ouvrages et les préconisations du programme... ce que n'aurait pu assurer sans risque d'anomalies une simple remise en forme d'une rédaction antérieure. Tous les ouvrages de



cette collection sont écrits trois ans après l'apparition des nouveaux programmes et en respectent scrupuleusement l'esprit.

Les rédacteurs ont enseigné et interrogé dans le cadre de l'ancien et du nouveau programme, ils perçoivent donc parfaitement l'importance de l'évolution. Leur expérience de l'enseignement en classes préparatoires et à l'Université, leur intervention régulière en « colles », leur participation aux concours comme interrogateurs à l'oral et/ou correcteurs à l'écrit permettent d'affirmer qu'il s'agit d'équipes très « professionnelles ». L'équilibre entre la pluralité des approches qui enrichit le fond et la cohérence de la forme qui renforce l'efficacité est le résultat d'un véritable travail collaboratif, d'une maîtrise d'œuvre rigoureuse et de sources d'inspiration précieuses... citons particulièrement pour les exercices d'oral la *Revue de Mathématiques Spéciales*, l'*Officiel de la Taupe* et les *Archives des Professeurs de Spé du Lycée Henri Poincaré de Nancy* en particulier celles constituées par Walter APPEL.

Cette collection a l'ambition de faire bénéficier le lecteur de l'expertise professionnelle des rédacteurs, chaque ouvrage est donc rédigé avec un souci de rigueur et de clarté au service de la pédagogie, souci qui s'exprime dans quelques principes :

- La qualité de rédaction aboutie exigée des élèves nécessite que les auteurs soient eux-mêmes exemplaires dans leur rédaction, aussi bien celle des énoncés que celle des corrigés. Un soin tout particulier est apporté à l'écriture des éléments « logiques » : précis et sans ambiguïté, le style traduit explicitement les connexions logiques, implication, nécessité, suffisance... dans un souci permanent de rendre explicite ce qui, ailleurs, reste parfois implicite.
- Les corrigés proposés sont toujours complets et commentés quand il le faut, en privilégiant les solutions méthodiques et raisonnables aux approches « astucieuses » et « miraculeuses ». L'expérience prouve en effet qu'un corrigé trop « brillant » inquiète l'élève qui se sent incapable de la même performance et ne lui apprend rien de la démarche constructive qui peut amener à une solution lorsqu'on possède une maîtrise suffisante des concepts. L'expérience montre aussi la vertu du contre-exemple... il en est fait un usage courant.
- La présence de rappels de cours synthétiques est nécessaire pour replacer les exercices dans leur contexte théorique sans avoir à quitter l'ouvrage en cours de lecture, pour fixer aussi quelques notations choisies parmi les standards. Mais ces éléments de cours ne se substituent en rien à l'enseignement magistral ou aux ouvrages de référence, ils constituent seulement un « minimum conceptuel » immédiatement disponible pour aider la compréhension des exercices qui restent la matière essentielle de l'ouvrage.
- La volonté de respecter l'esprit des nouveaux programmes privilégie la présentation de sujets récents (de 2004 à 2007) en respectant scrupuleusement la forme de leur rédaction : aucun toilettage rédactionnel ne doit en masquer l'originalité, voire la difficulté. Le respect du lecteur exige sa mise en situation réelle de concours. Toutefois ces énoncés sont commentés et expliqués pour rassurer le lecteur en lui montrant que sous des traits parfois déroutants on peut retrouver des « visages

connus ». Certains exercices proposés aux concours avant 2003 figurent également dans cette collection en raison de leur intérêt ; ils sont alors rédigés sous une forme compatible avec le programme actuel.

Si ces principes généraux sont respectés dans l'ensemble de la collection, la plus grande maturité des élèves de deuxième année justifie quelques différences entre les ouvrages de première et de deuxième année. L'élève de première année peut avoir des difficultés à choisir seul, avec discernement, des sujets d'écrits dans les annales. Les ouvrages de première année présentent donc une sélection d'extraits de problèmes d'écrits. L'élève de deuxième année, plus mûr, est capable de trouver lui-même des sujets d'écrit, les ouvrages de deuxième année n'en présentent donc pas. Cette plus grande maturité explique aussi le choix qui a été fait de présenter en deuxième année un bon tiers des exercices d'oral dans leur rédaction d'origine, sans commentaires explicatifs, pour placer l'élève au plus près de la situation réelle du concours ; bien entendu, le corrigé est toujours rédigé clairement, avec toutes les indications et tous les commentaires que nécessite leur compréhension. L'objectif essentiel est le respect des élèves que l'on met dans une situation proche de celles des concours tout en les guidant dans la correction. Il semble également que des ouvrages spécifiques suivant les programmes (MP-MP\*, PC-PC\* et PSI-PSI\*) soient justifiés en Mathématiques Spéciales alors qu'ils ne le sont pas en premier semestre de Mathématiques Supérieures. Mais, quels que soient les ouvrages, les auteurs ont réalisé un travail de sélection important parmi la multitude d'exercices disponibles pour proposer ceux qu'ils considèrent comme les plus significatifs : certains sont sélectionnés pour leur intérêt pédagogique, leur généralité, leurs déclinaisons possibles... d'autres sont présentés essentiellement pour donner une idée fidèle de « l'état de l'art actuel » des exercices d'oral et faire l'objet de commentaires au profit des futurs candidats.

On aura compris que les ouvrages de cette collection sont avant tout au service des élèves pour lesquels elle constitue un véritable outil pédagogique d'apprentissage et d'entraînement en vue des concours. Ces ouvrages devraient également convaincre les élèves de l'étendue des points abordés dans les sujets d'oral et d'écrit, qui couvrent réellement les programmes de première et de deuxième années. Mais les enseignants des C.P.G.E pourront aussi utiliser cette collection comme support de travaux dirigés et comme référence. Enfin, les examinateurs disposeront avec cette collection d'exemples de vrais sujets d'oraux donnés récemment ; les commentaires qui en sont faits pourront inspirer leur propre démarche pour une évaluation efficace et progressive des candidats.

Pour conclure cette présentation, on me pardonnera d'utiliser un ton plus personnel. Maître de conférences et agrégé en Mathématiques, j'ai souhaité partager plusieurs années d'expérience en assurant la maîtrise d'œuvre des ouvrages de cette collection. Quinze années de participation à différents concours en tant que correcteur d'écrit et examinateur d'oral, m'ont permis de bien connaître la littérature existante et de bien observer l'évolution de l'attitude des élèves qui sont soumis, toujours d'ailleurs, à des sollicitations nombreuses et diverses, sollicitations qui ne facilitent pas la concentration et peuvent, parfois, les gêner dans la maîtrise de l'ensemble des

techniques. La nécessité ressentie d'ouvrages adaptés, l'enthousiasme face à l'idée de les rédiger, l'impossibilité de réaliser seul un tel travail, m'ont conduit à réunir des équipes de rédaction et à assurer la maîtrise d'œuvre du projet tout en participant activement à l'écriture. Au-delà de l'ambition de réaliser un travail de qualité, il s'agit d'une expérience humaine inoubliable.

Trois personnes ont contribué à la réalisation de ce projet et je souhaite, au sens propre, leur donner le dernier mot : merci.

Merci à Eric d'Engenières, éditeur chez Dunod, qui m'a accordé sa confiance, a su m'encourager par la qualité de nos échanges et a pu me guider par des conseils et suggestions toujours formulés de manière chaleureuse.

Merci à Hervé Coilland, directeur de l'I.U.T Nancy-Charlemagne et Vice-Président de l'Université Nancy 2 qui a toujours trouvé le temps pour des discussions amicales au cours desquelles se précisent les objectifs, s'échangent les idées et s'affinent quelques points de rédaction.

Merci, infiniment, à Nezha, ma femme, qui accepte que beaucoup de temps soit consacré à ce projet, qui préserve autour de moi le calme nécessaire à une entreprise rédactionnelle, qui m'encourage et me conseille dans les phases les plus critiques et dont l'amour est un soutien permanent.

Nancy, le 15 février 2008  
El-Haj LAAMRI



# Avant-propos

Ce livre couvre le programme d'algèbre et de géométrie de deuxième année PC et PSI, et poursuit la démarche rédactionnelle entamée avec les ouvrages de première année. Comme pour l'ensemble de la collection, le respect du programme officiel est un principe que nous avons suivi à la lettre. Ainsi, tout exercice et tout rappel de cours faisant appel à une notion qui n'est pas commune aux programmes de PC et PSI est signalé de façon explicite. Par ailleurs, le programme prévoit la reprise et l'approfondissement en deuxième année de certains points abordés en première année : espaces vectoriels, applications linéaires, calcul matriciel, déterminants, étude affine et métrique des courbes, espaces euclidiens. Nous avons mis à profit cette possibilité pour que le présent ouvrage, tout en étant sans ambiguïté destiné aux élèves de deuxième année, présente plusieurs chapitres utilisables en première lecture dès le deuxième semestre de première année et pour les « révisions estivales » entre la première et la deuxième année.

Les premiers chapitres traitent des espaces vectoriels et des applications linéaires, puis du calcul matriciel. Les notions nouvelles de sommes directes, de trace et de matrices semblables sont illustrées par de nombreux exercices. De manière délibérée, les exercices proposés ont été sélectionnés pour clarifier et maîtriser l'articulation entre le point de vue matriciel et le point de vue vectoriel, plus géométrique. Ces chapitres permettent de réviser et d'approfondir le programme de première année tout en donnant une vue réaliste des exercices donnés à l'oral. Les systèmes linéaires et les déterminants nous ont permis, par les exercices choisis, de montrer l'efficacité d'une démarche méthodique sur des exemples simples qui s'appuient sur les acquis première année. Le passage à la dimension  $n$  supérieure à 3 justifie pleinement l'approche conceptuelle, complément impératif de l'approche technique antérieure. La réduction des endomorphismes est un point essentiel du programme de deuxième année en raison de son intérêt pour la formation de l'élève (toutes les notions d'algèbre linéaire sont sollicitées), de son intérêt pour la préparation aux concours (toutes les épreuves de concours, ou presque, abordent ces questions) et de son intérêt pour l'évolution future de l'élève-ingénieur qui rencontrera ces notions

utilisées dans de nombreux domaines scientifiques. Les espaces préhilbertiens et euclidiens réalisent une synthèse encore plus profonde entre les outils techniques et la démarche conceptuelle. Nous avons tenté de rendre compte par les rappels de cours et le choix des exercices de la richesse de ces concepts en privilégiant l'approche méthodique et en montrant à l'élève les vertus unificatrices de notions qui dépassent largement la géométrie et s'appliquent aussi bien à l'analyse qu'à l'algèbre. Dans le chapitre « quadriques et coniques », la classification et la méthode de réduction sont présentées de façon détaillée et illustrées par de nombreux exemples. Notre expérience d'examineurs d'oral nous montre que les courbes polaires et paramétrées sont souvent négligées par les élèves. Par des exercices venant de tous les concours, nous souhaitons leur montrer que cette négligence est risquée. Nous avons rédigé ce chapitre de manière progressive en y intégrant les éléments de programme de première année pour construire un ensemble complet et autonome. Le chapitre suivant traite des surfaces définies par un paramétrage ou par une équation cartésienne. C'est sous l'éclairage de ce double point de vue que sont abordées les notions fondamentales de vecteur normal et de plan tangent en un point régulier. Un choix judicieux et progressif d'exercices de concours permet aux étudiants de se familiariser avec les surfaces usuelles. Le dernier chapitre intitulé « compléments de géométrie » regroupe des exercices de tous les concours abordant les questions de géométrie (affine, euclidienne, isométries affines et vectorielles, lieux géométriques, calcul d'extrema). Absentes des programmes de deuxième année, ces notions ne sont pas absentes des concours. Enfin, nous avons apporté un soin tout particulier aux figures qui illustrent ces derniers chapitres.

Les premiers chapitres, par leur contenu et leur structure, marquent la transition entre les principes rédactionnels et pédagogiques propres aux ouvrages de première année et ceux utilisés pour les ouvrages de deuxième année. En première année, nous avons choisi de présenter et d'illustrer de façon linéaire chaque nouvelle notion l'une après l'autre. Nous nous adressons alors à des lecteurs sortant des classes terminales et encore peu autonomes dans leur approche. En deuxième année, nous avons choisi de présenter globalement l'essentiel des notions d'un chapitre puis de progresser par étapes vers une compréhension et une maîtrise de plus en plus approfondies. Chaque chapitre est donc constitué de trois parties :

- une présentation synthétique de l'essentiel du cours suivie d'exercices d'assimilation immédiate, dans lesquels chaque nouvelle notion est testée, sans complication inutile à ce niveau, dans un contexte qui permet d'identifier clairement une et une seule difficulté et de la résoudre, en respectant une sorte de « règle des trois unités » : un exercice, une difficulté, une solution ;
- des exercices d'entraînement dont la rédaction progressive et le découpage en questions ont pour objectif d'amener le lecteur à la compréhension en le confrontant de façon progressive aux difficultés propres à la notion étudiée ;
- des exercices d'approfondissement destinés à mettre l'élève en situation de concours, avec la nécessité pour lui de faire preuve de compréhension, d'initiative, d'intuition et de maîtrise technique.

La lecture d'un tel chapitre n'est donc plus nécessairement linéaire. La structure est parfaitement adaptée à des lecteurs de niveaux variés qui pourront éventuellement passer directement à une forme d'auto-évaluation en se concentrant sur les exercices d'approfondissements ou, au contraire, progresser pas à pas avec les exercices d'assimilation.

Si les élèves de deuxième année ont pu gagner en autonomie, il n'en reste pas moins que leurs niveaux de compétence et de compréhension restent très hétérogènes. Ainsi, entre des « 3/2 » qui découvrent le programme pour la première fois et n'ont encore été confrontés à aucun concours, des « 5/2 » qui ont déjà étudié le programme mais ont échoué à leur première expérience et des « 5/2 » déjà admis à des concours mais dont l'ambition les amène à viser encore plus haut, les différences sont très fortes. Ce sont ces différences, constatées en particulier lors des séances de « colles », qui nous ont amenés à cette rédaction permettant plusieurs niveaux de lecture et d'utilisation de l'ouvrage.

Entre les chapitres eux-mêmes, le programme de deuxième année n'impose pas d'ordre ni de découpage, contrairement au programme de première année. Cette liberté nous a permis de choisir une progression qui nous semblait la plus adaptée et la plus équilibrée. Chaque étape présente un nombre de notions nouvelles acceptable pour une perception d'ensemble compatible avec la structure des chapitres. Il n'y a pas que la hauteur des étages qui fait la difficulté d'un escalier : la hauteur acceptable des marches et leur régularité peut faciliter l'ascension... Nous avons donc retenu une progression qui nous semble adaptée, sans affirmer pour autant que d'autres progressions sont à rejeter. Notre diversité d'expérience, avantage de la rédaction collective, nous amène d'ailleurs à utiliser différentes progressions dans nos pratiques d'enseignement. Il reste ensuite le choix le plus difficile : face à l'infinité d'exercices possibles et au temps fini dont disposent les élèves pour préparer les concours, que proposer ? Quelques principes ont guidé notre sélection :

- respecter le parti-pris de progressivité en donnant des exercices qui permettent d'assimiler, puis de s'entraîner et enfin d'approfondir ;
- donner une vue précise et réaliste d'exercices qui « tombent à l'oral » en s'appuyant en particulier sur une veille attentive des sujets donnés à l'oral dans plusieurs concours depuis plusieurs années ;
- privilégier les exercices « génériques » dont la maîtrise donne les clefs de nombreux exercices (comme il avait déjà été annoncé en avant-propos des ouvrages de première année : habituer les élèves à reconnaître les « visages connus » sous leurs différentes apparences) ;
- profiter du « nomadisme » des exercices constaté entre des concours différents et ne pas hésiter à proposer un sujet de MP si son intérêt pédagogique le justifie, sachant que ce même sujet peut apparaître plus tard en PC ou PSI... ;
- convaincre les élèves que les oraux couvrent tout le programme des deux années.

Pour éviter l'arbitraire des préférences personnelles lors d'une rédaction collective, une référence incontestable et « objective » est nécessaire : nous avons choisi pour

référence la réalité des exercices donnés à l'oral, principalement depuis 2004, date d'application du nouveau programme. Mais ces exercices ont pour objectif le « classement » des élèves et non leur formation. Dans un ouvrage d'apprentissage quotidien, certaines retouches se sont avérées nécessaires : lorsqu'ils utilisent ce livre, les élèves sont en cours de formation et pas encore en concours ! Notre expérience d'enseignants d'abord, de « colleurs » ensuite, d'examinateurs enfin, nous a permis d'observer en situation réelle, dans différentes classes, les élèves face à ces exercices... ce qui nous a convaincus de la nécessité d'en faire évoluer la rédaction pour qu'ils passent du statut d'exercice d'oral au statut d'exercice pédagogique. Notre expérience nous a permis cette adaptation sans, en aucune manière, dénaturer ces exercices. La rédaction retouchée de certains exercices répond à la fois à un objectif pédagogique et psychologique. Objectif pédagogique de guider l'élève par une rédaction détaillée qui fasse apparaître de façon explicite les difficultés et les techniques à maîtriser. Objectif psychologique de rassurer l'élève en l'amenant à résoudre seul une majorité de questions en favorisant ainsi le développement de son autonomie. Si un sujet a été donné à plusieurs concours, nous avons toujours choisi la version qui nous semblait la plus pédagogique, la plus détaillée. Nous avons également regroupé certains énoncés d'oral qui nous semblaient complémentaires ou permettaient de donner un aperçu des sujets régulièrement abordés à l'écrit. Quant aux éléments de cours, chacun sait que ce qui est élégamment écrit dans un cours à la rédaction parfaite n'est pas toujours aussi clair dans l'esprit des élèves... et nous n'avons pas hésité, parfois, à sacrifier l'élégance de la rédaction à la redondance lorsque cette dernière nous permettait de rendre explicites des notions souvent restées implicites.

C'est en premier lieu aux élèves des classes préparatoires MP, MP\*, PC1, PC2 et PC\* du Lycée Henri Poincaré et PSI et PSI\* du Lycée Henri Loritz de Nancy que nous adressons, collectivement, nos remerciements. Ils ont en effet largement contribué par leurs réactions, leurs questions, leurs erreurs et leur compréhension à guider nos efforts de présentation des exercices, de clarification des questions, de simplification des corrigés.

Toujours aussi enthousiasmante cette aventure rédactionnelle est aussi une aventure humaine dans laquelle nous avons été aidés.

Aidés matériellement par l'Institut Elie Cartan de Nancy qui nous a permis d'utiliser ses moyens informatiques et ses ressources documentaires.

Aidés par l'IREM qui nous a donné un accès privilégié à ses ressources documentaires, ainsi que par l'I.U.T Nancy-Charlemagne dont la bibliothèque nous a toujours reçus avec sourire et efficacité.

Aidés également par le Lycée Henri Poincaré de Nancy qui nous a accueillis chaque samedi matin, de septembre à mars, dans une salle équipée de moyens informatiques. Aidés enfin par trois collègues du Lycée Henri Poincaré, Gilles Demeusois, Michel Eguether et Edouard Lebeau qui nous ont lus en détail et dont les remarques ont sensiblement amélioré le présent ouvrage.

Que tous soient sincèrement remerciés.



Notre collègue de l'Institut Elie Cartan de Nancy, Françoise Géandier, a relu une partie du manuscrit... et a du supporter dans notre bureau commun la présence de l'ensemble de l'équipe. Nous la remercions et nous lui demandons de nous excuser pour le désordre conséquent.

Il est inévitable que certaines erreurs aient échappé à la vigilance de tous ceux qui ont lu cet ouvrage. Nous en assumons seuls la responsabilité et nous espérons que ceux qui en découvriront voudront bien nous faire part de leurs remarques à l'adresse suivante [Elhaj.laamri@iecn.u-nancy.fr](mailto:Elhaj.laamri@iecn.u-nancy.fr).

Enfin, si dans cette aventure humaine certaines personnes nous ont aidés, il en est sans qui rien n'aurait été possible. Nos compagnes, par leur infinie patience, leur soutien sans faille et leur attentive présence ont joué un rôle essentiel dans l'aboutissement de ce projet. Au moment de mettre un point final à cet ouvrage c'est vers elles que nos pensées se tournent.

Nancy le 15 avril 2008

El-Haj Laamri, Philippe Chateaux, Gérard Eguether, Alain Mansoux,  
David Rupprecht, Laurent Schwald

Les exercices qui nous ont semblé les plus difficiles sont signalés par un ou deux symboles ☹.







# Espaces vectoriels et applications linéaires

1

Les exercices de ce chapitre portent sur une partie du cours qui pour son essentiel a été vue en première année. Les notions de famille génératrice, famille libre et base sont simplement étendues au cas des familles infinies. La notion plus nouvelle de somme directe est détaillée dans les rappels de cours et fait l'objet de plusieurs exercices. Les exercices d'assimilation et d'entraînement sont dans leur grande majorité abordables dès le second semestre de la première année. Ce chapitre constituera également un excellent support pour les révisions estivales. Les exercices d'approfondissement seront très utiles lors de la reprise de ce chapitre en deuxième année.

## 1.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  est le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



### 1.1.1 Familles libres, familles génératrices, bases

#### Ce qu'il faut savoir

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $I$  un ensemble (éventuellement infini) et  $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$ .
  - On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **libre** lorsque pour toute partie **finie**  $J$  de  $I$  et pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in J}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on a :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in J, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

- On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **génératrice** de  $E$  lorsque pour tout  $x$  élément de  $E$  il existe une partie **finie**  $J$  de  $I$  et une famille  $(\lambda_i)_{i \in J}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , telles que :

$$x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i.$$

- On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est une **base** de  $E$  lorsque c'est une famille libre et génératrice.

- **Espace vectoriel de dimension finie**

- On dit que  $E$  est de dimension finie lorsque  $E$  admet une famille génératrice **finie**.
  - Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors

- 1)  $E$  admet une base ;
- 2) toutes les bases de  $E$  ont même cardinal appelé **dimension** de  $E$  ;
- 3) toute famille libre peut être complétée en une base de  $E$  (théorème de la base incomplète).

○ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  éléments de  $E$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $E$  ;
- 2)  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  ;
- 3)  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

### • Exemples

Soient  $n$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  est de dimension  $n$ .
- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$  est de dimension  $n + 1$ .
- Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ , le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est de dimension finie  $np$ .
- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est de dimension  $np$ .
- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$  n'est **pas** de dimension finie.
- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k(I)$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, sont des espaces vectoriels qui ne sont **pas** de dimension finie.

### Exercice 1.1

On considère une suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  telle que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a  $\deg P_k = k$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- 2) Montrer que  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

- 1) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dans  $\mathbb{K}^n$  tel que (1)  $\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k = 0$ . Raisonnons par l'absurde

et supposons que les  $\lambda_k$  ne sont pas tous nuls. Soit alors  $p$  le plus grand des entiers  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_k$  est non nul. Puisque pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a  $\deg P_k = k$ , on en déduit que  $\deg(\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k) = p$  et par conséquent ce polynôme est non nul.

Ce qui contredit (1). La famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre et de cardinal  $n + 1$  dans un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

- 2) • Montrons que la famille  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre.

Soit  $J$  une partie **finie** de  $\mathbb{N}$ . Montrons que la famille  $(P_j)_{j \in J}$  est libre. Comme

$J$  est finie, il existe  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $J \subset \llbracket 0, n \rrbracket$  et par conséquent, la famille  $(P_j)_{j \in J}$  est une sous-famille de  $(P_0, \dots, P_n)$ . Comme on a déjà montré que cette dernière famille est libre et qu'une sous-famille d'une famille libre est libre, on en déduit que la famille  $(P_j)_{j \in J}$  est libre.

Le résultat est vrai pour toute partie  $J$  finie de  $\mathbb{N}$ . On en conclut que la famille  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre.

• Montrons que la famille  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est génératrice.

Soit  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . Soit  $n$  le degré de  $P$ . Le polynôme  $P$  est dans  $\mathbb{K}_n[X]$  et s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille  $(P_0, \dots, P_n)$ , puisque d'après le résultat précédent la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Il s'écrit donc comme une combinaison linéaire finie de la famille  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

On a ainsi montré que la famille  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Exemples de bases de  $\mathbb{K}[X]$  :** Soit  $a \in \mathbb{K}$ , les familles  $((X - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\frac{(X - a)^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des bases de  $\mathbb{K}[X]$  qui rendent souvent de bons services dans les exercices.

## Exercice 1.2

### CCP PC 2006

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et soit  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $a \neq b$ .

1) Justifier que la famille  $\mathcal{B} = ((X - a)^k)_{0 \leq k \leq 2n}$  est une base de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .

2) Déterminer les coordonnées de  $(X - a)^n(X - b)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Indication de la rédaction :* remarquer que  $X - b = X - a + (a - b)$ .

1) On déduit de l'exercice 1.1 page 2 que la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ . On peut également utiliser la formule de Taylor : tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k. \text{ Ceci montre que la famille } \mathcal{B} \text{ est génératrice. Comme}$$

elle est de plus de cardinal  $2n + 1$  dans un espace de dimension  $2n + 1$ , on en déduit que c'est une base de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .

2) On peut essayer d'utiliser la formule de Taylor mais les calculs ne sont pas commodes. Comme  $X - b = X - a + (a - b)$ , on a d'après la formule du binôme de

$$\text{Newton } (X - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X - a)^k (a - b)^{n-k}. \text{ On en déduit que}$$

$$(X - a)^n (X - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X - a)^{n+k} (a - b)^{n-k}.$$

Le changement d'indice  $i = n + k$  montre alors que

$$(X - a)^n (X - b)^n = \sum_{i=n}^{2n} \binom{n}{i-n} (X - a)^i (a - b)^{2n-i}.$$

On obtient alors les coordonnées  $\lambda_0, \dots, \lambda_{2n}$  de  $(X - a)^n (X - b)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ \binom{n}{k-n} (a - b)^{2n-k} & \text{si } k \in \llbracket n, 2n \rrbracket \end{cases}$$

### Exercice 1.3

Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et soit  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f_a$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f_a(x) = e^{ax}$ . Montrer que la famille  $\mathcal{L} = (f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est une famille libre de  $E$ .

Montrons que toute sous-famille finie de  $\mathcal{L}$  est libre. Pour cela, on va procéder par récurrence sur le cardinal des sous-familles finies de  $\mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{L}_1$  une sous-famille  $\mathcal{L}$  de cardinal 1. Cette famille contient une seule fonction  $f_a$ , cette famille est libre puisque cette fonction n'est pas nulle. Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. On suppose que toute sous-famille  $\mathcal{L}_{n-1}$  de  $\mathcal{L}$  de cardinal  $n-1$  est libre. Soit alors  $\mathcal{L} = (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$  une sous-famille de  $\mathcal{L}$ . Quitte à réindexer la famille  $(a_1, \dots, a_n)$  et comme tous les  $a_i$  sont distincts on peut supposer que  $a_n$  est strictement plus grand que tous les autres

$a_i$ . Soit alors  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{a_i} = 0$ . Cette somme de fonctions

admet pour limite 0 en  $+\infty$  puisque elle est constamment nulle. Pour la même raison,

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-a_n x} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{a_i}(x) = 0$  et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{(a_i - a_n)x} = 0$ . Or

chacun des termes de cette somme tend vers 0 sauf le  $n$ -ième qui tend vers  $\alpha_n$ . On

en déduit que  $\alpha_n = 0$ . On a alors  $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{a_i} = 0$  et comme la famille  $(f_{a_1}, \dots, f_{a_{n-1}})$

est de cardinal  $n-1$ , par hypothèse de récurrence, elle est libre. On en déduit que finalement pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\alpha_k = 0$ . On a montré par récurrence que toute sous-famille finie de  $\mathcal{B}$  est libre, ce qui montre que la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

### 1.1.2 Sous-espaces vectoriels

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $F$  une partie de  $E$ .

#### Sous-espaces vectoriels

• On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  lorsque

(i) la partie  $F$  est non vide,

- (ii) pour tout  $(x, y) \in F^2$ ,  $x + y \in F$ , (stabilité pour la loi +),  
 (iii) pour tout  $x \in F$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda x \in F$  (stabilité pour la loi externe).  
 • Pour que  $F$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ , il suffit que  $F$  vérifie l'une des propriétés suivantes :
- (i) la partie  $F$  est non vide et pour tout  $(x, y) \in F^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x + \lambda y \in F$  ;  
 (ii) il existe une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs de  $E$  telle que
- $$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) ;$$
- (iii) la partie  $F$  est le noyau ou l'image d'une application linéaire ;  
 (iv) la partie  $F$  est une somme ou une intersection de sous-espaces vectoriels connus.

### Dimension d'un sous-espace vectoriel

- Si  $E$  est de dimension finie, alors tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  sont de dimension finie.
- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  avec  $G$  de dimension finie. Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .
- **Formule de Grassmann** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie, alors le sous-espace vectoriel  $F + G$  est de dimension finie et on a  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

### Exercice 1.4

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $H$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $E$  tels que  $P(1) = P'(1) = 0$ .

- 1) Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - 2) Montrer que  $P$  appartient à  $H$  si et seulement si  $(X - 1)^2$  divise  $P$ .
  - 3) Donner une base de  $H$  et déterminer sa dimension.
- 1) L'ensemble  $H$  est une partie non vide de  $E$  car elle contient le polynôme nul. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $H$ , soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $R$  le polynôme égal à  $P + \lambda Q$ . On a  $R(1) = P(1) + \lambda Q(1) = 0$  et de la même façon  $R'(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0$ . On a bien montré que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 2) Soit  $P$  dans  $E$ . Le polynôme  $P$  est dans  $H$  si et seulement si 1 est racine double de  $P$ , ce qui signifie exactement que  $P$  appartient à  $H$  si et seulement si  $(X - 1)^2$  divise  $P$ .
- 3) Soit  $P$  dans  $H$ , il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 2$  tel que  $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$ . Plus précisément, il existe  $(a_0, \dots, a_{n-2})$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  tel que  $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i$ , ce qui montre que  $P(X) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i (X - 1)^2$  et donc la famille  $\mathcal{F} = ((X - 1)^2, X(X - 1)^2, \dots, X^{n-2}(X - 1)^2)$  est génératrice de  $H$ . En outre, la famille  $\mathcal{F}$  est échelonnée en degré, elle est donc libre. La famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $H$  et  $\dim H = n - 1$ .

## Exercice 1.5

## CCP MP 2006

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $L$ ,  $M$  et  $N$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- 1) Montrer que  $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$ .
  - 2) Montrer qu'on n'a pas toujours l'égalité  $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N)$ .
- 1) Soit  $x$  dans  $(L \cap M) + (L \cap N)$ . Il existe alors  $x_1$  dans  $(L \cap M)$  et  $x_2$  dans  $(L \cap N)$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $L$  qui est un sous-espace vectoriel, on en déduit que  $x$  est dans  $L$ . Par ailleurs  $(x_1, x_2)$  est dans  $M \times N$ , donc  $x$  appartient à  $M + N$ . Ainsi  $x$  appartient à  $L \cap (M + N)$ , d'où l'inclusion  $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$ .
  - 2) Il suffit de considérer trois droites vectorielles  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  deux à deux distinctes dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . En effet,  $(D_2 + D_3) = \mathbb{R}^2$ , et  $D_1 \cap (D_2 + D_3) = D_1$ , tandis que  $D_1 \cap D_2$  et  $D_1 \cap D_3$  sont réduits au vecteur nul.

## 1.1.3 Applications linéaires

## Ce qu'il faut savoir



Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

• On dit qu'une application  $u$  de  $E$  dans  $F$  est **linéaire** lorsque pour tout  $(x, y) \in E^2$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$ .

**Notation** On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

• **Noyau et image d'une application linéaire** Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .

◦ L'ensemble  $\{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qu'on appelle noyau de  $u$  et qu'on note  $\text{Ker } u$ .

◦ L'ensemble  $\{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } u(x) = y\}$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  qu'on appelle image de  $u$  et qu'on note  $\text{Im } u$ .

• **Construction d'applications linéaires** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque d'éléments de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i$  dans  $I$  on a  $u(e_i) = f_i$ .

• **Application linéaire injective, surjective, bijective** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

◦ L'application  $u$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } u = \{0_E\}$ .

◦ L'application  $u$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } u = F$ .

• **Isomorphisme**

◦ On dit que l'application linéaire  $u$  est un isomorphisme lorsque  $u$  est bijective.

◦ On dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ .

- L'application  $u$  est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de  $E$  par  $u$  est une base de  $F$ .
- Tout supplémentaire du noyau de  $u$  est isomorphe à l'image de  $u$ .

**Cas de la dimension finie** On suppose que  $E$  est de dimension finie.

- **Théorème du rang** : Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . L'image de  $u$  est de dimension finie, on appelle rang de  $u$  la dimension de  $\text{Im } u$  que l'on note  $\text{rg } u$  et on a

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim E.$$

- On suppose que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.
- Si  $\dim E = \dim F$ , alors  $u$  est bijective  $\Leftrightarrow u$  est injective  $\Leftrightarrow u$  est surjective.

**Mise en garde** : Ce résultat est faux si  $\dim E \neq \dim F$  ou si les deux espaces ne sont pas de dimension finie.

- Soit  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ . L'application linéaire  $u$  est bijective si et seulement si la matrice  $M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u)$  est inversible et on a alors  $M_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u))^{-1}$ .

Le dernier résultat permet de ramener la question de la bijectivité d'une application linéaire à l'étude de l'inversibilité d'une matrice. On peut alors utiliser les techniques rappelées page 46.



### Exercice 1.6

Soit  $E = \mathbb{K}[X]$ . Soient les applications linéaires  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur  $E$  par  $\varphi(P) = P'$  et  $\psi(P) = XP$ .

Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- Il est clair que  $\text{Ker } \varphi$  est l'ensemble des polynômes constants. L'application  $\varphi$  n'est pas injective. En revanche, elle est surjective puisque tout polynôme admet une primitive polynômiale. Finalement,  $\varphi$  n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.
- Pour tout polynôme non nul  $P$ , on a  $\deg(\psi(P)) = \deg(P) + 1$ , on en déduit que le polynôme 1 n'est pas dans  $\text{Im } \psi$ . Ceci montre que l'application  $\psi$  n'est pas surjective. La même relation sur le degré montre que le noyau de  $\psi$  est réduit au polynôme nul. L'application  $\psi$  est injective. Puisque  $\psi$  n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

### Remarque

Les deux exemples ci-dessus montrent bien que si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , la chaîne d'équivalence : «  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow f$  est injective  $\Leftrightarrow f$  est surjective », n'est vraie que si  $E$  est de dimension finie.



## Exercice 1.7

## CCP PSI 2006

Soient  $n \geq 2$  et  $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$  qui à  $P$  associe  $f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$ . Montrer que  $f$  est linéaire et trouver  $\dim \text{Ker } f$  et  $\dim \text{Im } f$ .

- Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P + \beta Q)(1) + (X^2 - 4)(\alpha P + \beta Q)(0) \\ &= X(\alpha P(1) + \beta Q(1)) + (X^2 - 4)(\alpha P(0) + \beta Q(0)) \\ &= \alpha(XP(1) + (X^2 - 4)P(0)) + \beta(XQ(1) + (X^2 - 4)Q(0)) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

On a ainsi montré que  $f$  est linéaire.

- Déterminons le noyau de  $f$ . Comme un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls,  $f(P) = 0$  si et seulement si  $P(1) = P(0) = 0$ , ce qui équivaut à  $X(X - 1)$  divise  $P$ . Comme  $n$  est supérieur ou égal à 2, il existe alors  $Q$  dans  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$  tel que  $P(X) = Q(X)X(X - 1)$ . On en déduit l'existence de

$(a_0, \dots, a_{n-2})$  dans  $\mathbb{R}^{n-2}$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k X(X - 1)$ . Ceci montre que la

famille  $(X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$  est une famille génératrice de  $\text{Ker } f$ . Comme elle est étagée en degré, elle est libre et c'est donc finalement une base de  $\text{Ker } f$ . On en déduit que la dimension de  $\text{Ker } f$  est  $n - 1$ . Par le théorème du rang, on a  $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } f = 2$ . On en déduit (même si la question n'est pas posée) que  $\text{Im } f = \text{Vect}(X, X^2 - 4)$ .

## Exercice 1.8

## TPE MP 2006

Soit  $a$  dans  $\mathbb{K}$  et soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  défini par :  $\phi(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$ . Déterminer le noyau et l'image de  $\phi$ .

Remarquons que si  $a$  est racine double de  $P$ , l'expression de  $\phi(P)$  se simplifie grandement. Il est donc assez naturel de se placer dans une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée de polynômes admettant  $a$  pour racine. La formule de Taylor pour les polynômes assure

que la base  $(e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  où  $e_k = \frac{(X - a)^k}{k!}$  est particulièrement adaptée. En effet pour tout entier  $k \geq 2$ , on a :

$$\phi\left(\frac{(X - a)^k}{k!}\right) = (X - a)\frac{(X - a)^{k-1}}{(k-1)!} - 2\frac{(X - a)^k}{k!} = (k-2)\frac{(X - a)^k}{k!}.$$

Par ailleurs :  $\phi(X - a) = -2(X - a)$ , et  $\phi(1) = 0$ . On a donc (pour  $n \geq 3$ ) :

$$\text{Im } \phi = \text{Vect}(\phi(e_0), \dots, \phi(e_n)) = \text{Vect}((X - a), (X - a)^3, \dots, (X - a)^n)$$

La famille  $((X - a), (X - a)^3, \dots, (X - a)^n)$  est étagée en degré, elle est donc libre et par conséquent c'est une base de  $\text{Im } \phi$ . On en déduit en particulier que  $\dim \text{Im } \phi = n - 1$ . Le théorème du rang montre alors que  $\dim \text{Ker } \phi = 2$ , comme on connaît deux polynômes non liés dans le noyau de  $\phi$ , on en déduit que ces deux polynômes forment une base de  $\text{Ker } \phi$ . La famille  $(1, (X - a)^2)$  est une base de  $\text{Ker } \phi$ .

### Remarque

Ceux qui parmi nos lecteurs ont déjà pratiqué la réduction remarqueront qu'on a en fait obtenu une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée de vecteurs propres de  $\phi$ .

### Ce qu'il faut retenir

Comme le montre l'exercice 1.8, l'étude d'une application linéaire est grandement facilitée par le choix d'une base adaptée.

### Exercice 1.9

#### Mines-Ponts PSI 2005, CCP et Mines-Ponts MP 2006

Soit  $f$  l'application définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  par  $f(P) = P - P'$ .

1) Montrer de deux façons différentes que l'application  $f$  est bijective.

2) Pour  $Q$  dans  $E$ , trouver  $P$  tel que  $Q = P - P'$ .

*Indication de l'examinateur du CCP : on pourra s'intéresser à  $Q^{(n+1)}$ .*

Il est clair que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

1) *Première méthode* : On étudie le noyau de  $f$ . Soit  $P$  un polynôme non nul. On a alors  $\deg(P') < \deg(P)$ . On en déduit que  $\deg(f(P)) = \deg(P)$  ce qui montre que  $f(P)$  est non nul. Le noyau de  $f$  est ainsi réduit au polynôme nul, ce qui montre que  $f$  est injective. Comme  $f$  est un endomorphisme dans un espace de dimension finie, on en déduit que  $f$  est bijective.

*Deuxième méthode* : On va examiner l'image par  $f$  de la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On a  $f(1) = 1$  et pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$ . On constate que la famille  $(f(X^k))_{0 \leq k \leq n}$  est échelonnée en degré (voir exercice 1.1), cette famille est donc libre. En outre, elle est de cardinal  $n + 1$  dans un espace de dimension  $n + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme l'image par  $f$  d'une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , l'application  $f$  est bijective.

2) Soit  $Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . D'après le résultat précédent, il existe  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $Q = P - P'$ . Pour trouver  $P$  on peut essayer d'inverser la matrice obtenue à la question précédente. On peut aussi, comme le suggère l'énoncé, calculer les dérivées successives de  $Q$ . On obtient  $Q = P - P'$ ,  $Q' = P' - P''$ ,

$Q'' = P'' - P^{(3)}, \dots, Q^{(n)} = P^{(n)} - P^{(n+1)}$ . Comme  $P$  est de degré  $n$ , le polynôme  $P^{(n+1)}$  est nul, et en sommant les égalités précédentes on obtient :  $\sum_{k=0}^n Q^{(k)} = P$ .

### Remarque

Pour montrer que  $f$  est bijective, on peut aussi examiner sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Cette matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, elle est donc inversible. On verra plus loin dans l'exercice 1.19 une autre façon de retrouver ces résultats.

### Exercice 1.10

#### Centrale PSI 2005, Mines-Ponts PC 2006

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ .
  - 2) On suppose  $u + v$  bijectif et  $u \circ v = 0$ . Montrer que  $\text{rg } u + \text{rg } v = \dim E$ .
  - 3) *Question de la rédaction* : Montrer que  $\text{Im } v = \text{Ker } u$ .
- 1) Soit  $y$  dans  $E$ . Si  $y$  appartient à  $\text{Im}(u + v)$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x) + v(x)$ . Il en résulte que  $y$  appartient à  $\text{Im } u + \text{Im } v$ , donc  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$  et par conséquent  $\dim \text{Im}(u + v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v)$ .  
On déduit alors de la formule de Grassmann que
- $$\dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \dim \text{Im } u + \dim \text{Im } v.$$
- Finalement  $\dim \text{Im}(u + v) \leq \dim \text{Im } u + \dim \text{Im } v$ , ce qui est exactement  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ .
- 2) On sait déjà grâce à la première question que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ . Or  $u + v$  est bijectif, on a donc  $\text{rg}(u + v) = \dim E$ , et part suite  $\dim E \leq \text{rg } u + \text{rg } v$  (1).  
Par ailleurs la condition  $u \circ v = 0$  est équivalente à  $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$  et on a par conséquent  $\dim \text{Im } v \leq \dim \text{Ker } u$ . En appliquant le théorème du rang à  $u$ , on obtient  $\dim \text{Im } v \leq \dim E - \dim \text{Im } u$ , c'est-à-dire  $\text{rg } u + \text{rg } v \leq \dim E$  (2). De (1) et (2), on obtient le résultat demandé.
- 3) On a déjà dit que  $u \circ v = 0$  entraîne  $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$ . Le théorème du rang nous dit que  $\dim \text{Ker } u = \dim E - \text{rg } u$  et la relation obtenue à la question précédente montre alors que  $\dim \text{Ker } u = \text{rg } v$ . On a ainsi montré que  $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$  et que ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension. On en déduit que  $\text{Im } v = \text{Ker } u$ .

### Exercice 1.11

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Existe-t-il un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $\text{Im } u = F$  et  $\text{Ker } u = G$  ?

D'après le théorème du rang, une condition nécessaire d'existence de  $u$  est que  $\dim F + \dim G = n$ . Supposons donc cette condition réalisée. Soit  $(g_1, \dots, g_p)$  une base du noyau, que l'on complète en une base  $(g_1, \dots, g_n)$  de  $E$ . Soit  $(f_{p+1}, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . Un endomorphisme  $u$  est défini par sa valeur sur les vecteurs de base.

$$\text{Posons } u(g_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ f_j & \text{si } p+1 \leq j \leq n \end{cases}.$$

Alors  $G \subset \text{Ker } u$  et  $F \subset \text{Im } u$ , donc  $\dim G \leq p$  et  $\dim \text{Im } u \leq n - p$ , mais puisque  $\dim G + \dim F = n$ , on a  $\dim G = p$  et  $\dim \text{Im } u = n - p$ , d'où l'on déduit que  $G = \text{Ker } u$  et  $F = \text{Im } u$ .

### 1.1.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

#### • Sous-espaces vectoriels supplémentaires

○ On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** et on note  $E = F \oplus G$ , lorsque pour tout  $x$  dans  $E$  il existe un unique couple  $(u, v)$  dans  $F \times G$  tel que  $x = u + v$ .

**Exemple :** Dans l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

○ Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** si et seulement si  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ .

#### • Cas de la dimension finie

○ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension **finie**, les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si :

$$\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}.$$

○ Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une base de  $F$  et soit  $(v_1, \dots, v_q)$  une base de  $G$ . Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** si et seulement si la famille  $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$  est une base de  $E$ .

#### • Hyperplans

○ On dit qu'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est un hyperplan de  $E$ , lorsque  $H$  admet une droite vectorielle pour supplémentaire ; on montre qu'alors pour tout  $a$  dans  $E \setminus H$  on a  $E = H \oplus \mathbb{K}a$ .

○ Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle dont  $H$  est le noyau.

#### Exercice 1.12

##### Centrale PC 2007, CCP PC 2007

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans d'un espace vectoriel de dimension  $n$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2. Quelle est la dimension de  $H_1 \cap H_2$  ?

La formule de Grassmann donne  $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$ . Comme  $H_1 + H_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ , on sait que sa dimension est inférieure ou égale à  $n$ . Par ailleurs, on sait que  $\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$ , donc  $\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2(n - 1) - n = n - 2$ . En outre,  $H_1 \cap H_2$  est un sous-espace vectoriel de  $H_1$  (et de  $H_2$ ), donc sa dimension est inférieure ou égale à  $n - 1$ . On a finalement  $n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1$ . On en déduit que  $\dim(H_1 \cap H_2)$  vaut  $n - 1$  ou  $n - 2$ . L'examen de deux droites vectorielles dans le plan, montre très rapidement que (pour  $n \geq 2$ ) ces deux situations peuvent se produire. On peut en fait même préciser que  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$  si et seulement si  $H_1 = H_2$ . En effet si  $H_1 = H_2$ , le résultat est immédiat. Si  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$ , alors on a  $H_1 \cap H_2 \subset H_1$  et  $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1$ , on en déduit  $H_1 \cap H_2 = H_1$ , ce qui montre que  $H_1 \subset H_2$ , et de nouveau, en vertu de l'égalité des dimensions de ces sous-espaces vectoriels (ou parce que  $H_1$  et  $H_2$  jouant des rôles symétriques l'inclusion réciproque est aussi vraie), on a finalement  $H_1 = H_2$ .

*Conclusion :* Si  $H_1 = H_2$  alors  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$ , si  $H_1$  et  $H_2$  sont distincts alors  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ .

### Remarque

Étant donnés  $k$  hyperplans  $H_1, \dots, H_k$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . On peut montrer par récurrence sur  $k$  que  $\dim(\cap_{i=1}^k H_i) \geq n - k$ .

## 1.1.5 Projecteurs



### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $p$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

- On dit que  $p$  est un **projecteur** lorsque  $p \circ p = p$ .
- Soit  $p$  un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$ , alors  $y \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(y) = y$ ,
- Projecteurs et sous-espaces supplémentaires
  - Soit  $p$  un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$ . On a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ ,
  - Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ . Il existe un unique projecteur  $p$  de  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Im } p = F$  et  $\text{Ker } p = G$  ; on dit alors que  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

### Exercice 1.13

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}^n$  muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . On note  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  d'équation cartésienne  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . On note  $u$  le vecteur défini par  $u = e_1 + \dots + e_n$ .

- 1) Montrer que  $E = H \oplus D$ .
- 2) Soit  $x$  dans  $E$ . Donner la décomposition de  $x$  dans  $H \oplus D$ .
- 3) Donner la projection  $p$  sur  $H$  parallèlement à  $D$  et la projection  $q$  sur  $D$  parallèlement à  $H$ .

- 1) Soit  $\varphi$  l'application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$  associe le réel  $x_1 + \cdots + x_n$ . Le sous-espace vectoriel  $H$  est le noyau de  $\varphi$ . Comme de plus  $\varphi$  est non nulle, le sous-espace  $H$  est un hyperplan de  $E$ . Le vecteur  $u$  n'est pas dans  $H$ , on a donc  $E = H \oplus D$ .
- 2) Soit  $x$  dans  $E$ , d'après le résultat précédent il existe  $y$  dans  $H$  et  $z$  dans  $D$  tels que  $x = y + z$ . Puisque  $z$  est dans  $D$ , il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $z = \alpha u$ . On a alors  $\varphi(x) = \varphi(y) + \alpha \varphi(u) = n\alpha$ . On en déduit que  $z = \frac{\varphi(x)}{n} u$  et par conséquent  $y = x - z = x - \frac{\varphi(x)}{n} u$ . En coordonnées dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  on obtient successivement  $z = (\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n})(e_1 + \cdots + e_n)$ , puis  $y = (x_1 - (\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}))e_1 + \cdots + (x_n - (\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}))e_n$ .
- 3) Les résultats précédents montrent que pour tout  $x$  dans  $E$ , on a

$$p(x) = x - \frac{1}{n} \varphi(x)(e_1 + \cdots + e_n) \text{ et } q(x) = \frac{1}{n} \varphi(x)(e_1 + \cdots + e_n).$$

On retrouve en particulier que  $p + q = \text{Id}_E$ .

### Exercice 1.14

**Mines-Ponts PC 2007, Mines-Ponts MP 2007**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$  et  $p$  dans  $\mathcal{L}(E)$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Montrer que  $q = \text{Id}_E - p$  est un projecteur. Déterminer l'image et le noyau de  $q$ .
  - 2) Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p_2 \circ p_1 = 0$ . On pose  $f = p_1 + p_2 - p_1 \circ p_2$ . Montrer que  $f$  est un projecteur.
  - 3) Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .
- 1) Pour montrer que  $q$  est un projecteur, on montre que  $q \circ q = q$ . Calculons  $(\text{Id}_E - p)^2$ . On a  $(\text{Id}_E - p)^2 = \text{Id}_E - 2p + p^2 = \text{Id}_E - p$  (car  $p^2 = p$ ). On a ainsi montré que  $q$  est un projecteur. On sait alors que  $x$  appartient à  $\text{Im } q$  si et seulement si  $q(x) = x$ . Cette dernière condition est équivalente à  $(\text{Id}_E - p)(x) = x$ , c'est à dire  $p(x) = 0_E$ . On en déduit que  $\text{Im } q = \text{Ker } p = G$ . De la même manière, pour  $x$  dans  $E$ , on a  $q(x) = 0_E$  si et seulement si  $p(x) = x$ , on en déduit que  $\text{Ker } q = \text{Im } p = F$ .
  - 2) Pour montrer que  $f$  est un projecteur, on montre que  $f \circ f = f$ . On peut mener les calculs directement en utilisant la relation  $p_2 \circ p_1 = 0$ . On peut simplifier ces calculs en constatant que  $f = p_1 \circ (\text{Id}_E - p_2) + p_2$  : on sait que  $q_2 = \text{Id}_E - p_2$  est la projection sur  $\text{Ker } p_2$  parallèlement à  $\text{Im } p_2$  et on a en particulier  $q_2 \circ p_2 = p_2 \circ q_2 = 0$  tandis que la relation  $p_2 \circ p_1 = 0$  entraîne  $q_2 \circ p_1 = p_1$ .

Ainsi :

$$f^2 = (p_1 \circ q_2 + p_2) \circ (p_1 \circ q_2 + p_2) = p_1 \circ q_2 \circ p_1 \circ q_2 + p_2 = f.$$

On a bien montré que  $f$  est un projecteur.

- 3) On constate sans peine que si  $x$  est dans  $\text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$  on a  $f(x) = 0$ . Il est donc naturel d'examiner si l'inclusion  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$  est vraie.

Soit  $x$  dans  $\text{Ker } f$ . On a  $p_1(x) + p_2(x) = p_1 \circ p_2(x)$ . En appliquant  $p_1$  aux deux membres de cette égalité, on obtient  $p_1(x) = 0$ , en appliquant  $p_2$ , on obtient que  $p_2(x) = 0$ . on a montré que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ . Finalement  $\text{Ker } f = \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ .

L'écriture  $f = p_2 + p_1 \circ (\text{Id}_E - p_2)$  montre que  $\text{Im } f \subset \text{Im } p_1 + \text{Im } p_2$ . Comme  $f$  est un projecteur, pour montrer qu'un vecteur  $x$  est dans  $\text{Im } f$  il suffit de montrer que  $f(x) = x$ . Soit alors  $x$  dans  $\text{Im } p_1 + \text{Im } p_2$ , il existe  $y_1$  dans  $\text{Im } p_1$  et  $y_2$  dans  $\text{Im } p_2$  tels que  $x = y_1 + y_2$ . Des relations  $p_1(y_1) = y_1$ ,  $p_2(y_2) = y_2$  et  $p_2(y_1) = 0_E$ , on déduit que

$$f(x) = f(y_1 + y_2) = p_2(y_1 + y_2) + p_1 \circ (\text{Id}_E - p_2)(y_1 + y_2) = y_2 + p_1(y_1 + y_2 - y_2) = x.$$

On a ainsi montré que  $(\text{Im } p_1 + \text{Im } p_2) \subset \text{Im } f$ . On a finalement  $\text{Im } f = \text{Im } p_1 + \text{Im } p_2$ .

On peut préciser ce résultat : puisque  $\text{Im } p_1 \subset \text{Ker } p_2$  et  $\text{Ker } p_2 \cap \text{Im } p_2 = \{0_E\}$ , on a  $\text{Im } p_2 \cap \text{Im } p_1 = \{0_E\}$ . On en déduit que la somme de  $\text{Im } p_1$  et  $\text{Im } p_2$  est directe. On a donc montré que  $\text{Im } f = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2$ .



### 1.1.6 Somme directe

#### Ce qu'il faut savoir

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $n$  un entier naturel non nul et  $E_1, \dots, E_n$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- On dit que la somme  $\sum_{i=1}^n E_i$  est directe et on écrit alors  $\sum_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ ,

lorsque  $\forall x \in \sum_{i=1}^n E_i, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ .

- Voici un critère très pratique, voir exercice 1.15

La somme  $\sum_{i=1}^n E_i$  est directe si et seulement si pour tout  $(x_1, \dots, x_n)$  dans

$E_1 \times \dots \times E_n$ , l'égalité  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  entraîne  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0_E$ .

#### • Somme directe en dimension finie

On suppose  $E$  de dimension finie. Alors

$$\sum_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n E_i \Leftrightarrow \dim \left( \sum_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i).$$

- Par ailleurs, soit pour  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , une base  $(x_{i1}, \dots, x_{iq_i})$  de  $E_i$ , où  $q_i$  est la dimension de  $E_i$

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \Leftrightarrow (x_{11}, \dots, x_{1q_1}, x_{21}, \dots, x_{2q_2}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nq_n}) \text{ est une base de } E.$$

### • Somme directe et projecteurs

Soit  $(E_1, \dots, E_n)$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$

si et seulement si il existe une (unique) famille  $(p_1, \dots, p_n)$  de projecteurs de  $E$  tels que :

- 1)  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im } p_i = E_i.$
- 2)  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$
- 3)  $\sum_{i=1}^n p_i = \text{Id}_E.$

### • Construction d'applications linéaires

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$  et  $F$  un

$\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  une application linéaire  $u_i$  dans  $\mathcal{L}(E_i, F)$ . Il existe une unique application linéaire  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la restriction  $u|_{E_i}$  de  $u$  à  $E_i$  soit égale à  $u_i$ .

#### Exercice 1.15

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  quatre sous-espaces vectoriels tels que  $(E_1 + E_2) + (E_3 + E_4) = (E_1 + E_2) \oplus (E_3 + E_4)$  et  $(E_1 + E_3) + (E_2 + E_4) = (E_1 + E_3) \oplus (E_2 + E_4)$ . Montrer que la somme  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$  est directe.

Soit  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  dans  $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$  tel que  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0_E$ . Le vecteur  $x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4)$  est dans  $(E_1 + E_2) \cap (E_3 + E_4)$  il est donc nul. De même le vecteur  $x_1 + x_3 = -(x_2 + x_4)$  est dans  $(E_1 + E_3) \cap (E_2 + E_4)$  il est donc nul. On en déduit  $x_1 = -x_2 = -x_3 = x_4$ , ce qui montre que  $x_1$  est dans  $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$ . Comme on a  $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \subset (E_1 + E_2) \cap (E_3 + E_4)$ , on en déduit que  $x_1$  est nul et par suite  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0_E$ . On a montré que la somme des sous-espaces  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  est directe.

#### Exercice 1.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $H_1, \dots, H_n$  des sous-espaces vectoriels tels que leur somme est directe. Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $F_i \subset H_i$ .



- 1) Montrer que la somme des  $F_i$  est directe.
  - 2) Montrer que si  $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ , alors pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $F_i = H_i$ .
- 1) Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $F_1 \times \cdots \times F_n$  tel que  $x_1 + \cdots + x_n = 0_E$ . Comme pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $F_i \subset H_i$ , on en déduit que  $(x_1, \dots, x_n)$  appartient à  $H_1 \times \cdots \times H_n$  et comme la somme des  $H_1, \dots, H_n$  est directe, on en déduit que pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $x_i = 0_E$ .
  - 2) Soit  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On a déjà  $F_i \subset H_i$ . Soit  $y_i$  dans  $H_i$ . Le vecteur  $y_i$  est dans  $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ , par hypothèse il est donc également dans  $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ . Il existe ainsi  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $F_1 \times \cdots \times F_n$  tel que  $x_1 + \cdots + x_n = y_i$ . Soit alors les vecteurs  $z_1, \dots, z_n$  définis par : pour  $k \neq i$ ,  $z_k = x_k$  et  $z_i = x_i - y_i$ . Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  le vecteur  $z_k$  est dans  $H_k$  et on a  $z_1 + \cdots + z_n = 0_E$ . Comme  $H_1, \dots, H_n$  sont des sous-espaces vectoriels qui sont en somme directe, on en déduit que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $z_k = 0_E$ . En particulier  $z_i = 0_E$  ce qui entraîne  $y_i = x_i$ . On peut aussi obtenir ce résultat en invoquant l'unicité de l'écriture de  $y_i$  dans la somme directe  $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ . On en déduit que  $y_i$  est dans  $F_i$ . On a montré ainsi que  $H_i \subset F_i$ .

### Exercice 1.17

#### ENSEA PC 2006



Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Soient  $G$  et  $H$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- 1) Montrer que  $f(G + H) = f(G) + f(H)$ .
- 2) Montrer que si  $f$  est injective et si la somme  $G + H$  est directe, alors  $f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H)$ .

1) Soit  $y \in E$ , on a :

$$\begin{aligned}
 y \in f(G + H) &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in G \times H \text{ tel que } f(x_1 + x_2) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in G \times H \text{ tel que } f(x_1) + f(x_2) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists (y_1, y_2) \in f(G) \times f(H) \text{ tel que } y = y_1 + y_2 \\
 &\Leftrightarrow y \in f(G) + f(H).
 \end{aligned}$$

On a donc ainsi montré que  $f(G + H) = f(G) + f(H)$ .

2) D'après la question précédente on sait que  $f(G \oplus H) = f(G) + f(H)$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $f(G) + f(H) = f(G) \oplus f(H)$ . Soient  $y_1$  dans  $f(F)$  et  $y_2$  dans  $f(G)$  tels que  $y_1 + y_2 = 0_F$ . Il existe  $x_1$  dans  $G$  et  $x_2$  dans  $H$  tel que  $f(x_1) = y_1$  et  $f(x_2) = y_2$ . On a donc  $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) = 0_F$ . Comme  $f$  est injective, on en déduit que  $x_1 + x_2 = 0_E$ . Et puisque la somme  $F + G$  est directe, on en déduit que  $x_1 = x_2 = 0_E$  ce qui entraîne  $y_1 = y_2 = 0_F$ . On a bien montré que la somme  $f(F) + f(G)$  est directe.

### 1.1.7 Endomorphismes nilpotents

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est un endomorphisme nilpotent lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p$  est l'endomorphisme nul sur  $E$ . On utilisera l'abus de notation  $f^p = 0$ .

Si  $f$  un endomorphisme nilpotent sur  $E$ , alors il existe un unique entier  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ . On appelle cet entier **indice de nilpotence** de  $f$ .

**Exemple :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La dérivation sur  $\mathbb{R}_n[X]$  est un endomorphisme nilpotent d'indice  $n + 1$ .

#### Exercice 1.18

##### CCP PSI 2005 majoration de l'indice de nilpotence

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe  $p$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ . Montrer que  $f^n = 0$ .

*Indication de la rédaction :*

On pourra s'intéresser à la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  où  $x$  est tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$ .



Remarquons que si  $p$  est inférieur ou égal à  $n$ , on a  $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$  et le résultat est acquis. On va montrer qu'on a toujours  $p$  inférieur à  $n$ .

Par hypothèse, il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$ . On va montrer que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.

Soit  $(a_0, \dots, a_{p-1})$  dans  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x) = 0$  (1).

En composant cette égalité par  $f^{p-1}$  et sachant que  $f^p = 0$ , on obtient :  $a_0 f^{p-1}(x) = 0$ . Comme  $f^{p-1}(x) \neq 0$  on en déduit  $a_0 = 0$ . L'égalité (1) se

simplifie en  $\sum_{i=1}^{p-1} a_i f^i(x) = 0$ . En composant cette fois par  $f^{p-2}$ , on montre que  $a_1$

est nul, puis en réitérant ce procédé on montre que tous les  $a_i$  sont nuls. On a ainsi montré que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre. Son cardinal est donc plus petit que la dimension de  $E$ , ce qui montre que  $p \leq n$ .

#### Ce qu'il faut savoir

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ .

- L'entier  $p$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$  est appelé indice de nilpotence de  $f$ .

- Soit  $p$  l'indice de nilpotence de  $f$ . Soit  $x$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ , la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.
- L'indice de nilpotence de  $f$  est inférieur ou égal à  $n$ .

### Exercice 1.19

#### D'après CCP MP 2006

- 1) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que si  $f$  est nilpotent d'indice de nilpotence  $p \geq 1$ , alors  $\text{Id}_E - f$  est bijective et a pour réciproque

$$f^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f^i.$$

- 2) Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  définie par :  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ . Montrer que  $f$  est inversible et calculer son inverse.

- 1) Un simple calcul montre que  $(f - \text{Id}_E) \circ \sum_{i=0}^{p-1} f^i = \sum_{i=0}^{p-1} (f^i - f^{i+1}) = \text{Id}_E - f^p = \text{Id}_E$ .

On en déduit que  $f$  est bijective de réciproque  $f^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f^i$ .

- 2) Soit  $g$  l'application définie pour tout  $P \in E$  par  $g(P) = P'$ . On a  $f = \text{Id}_E - g$  et  $g^{n+1} = 0$ . Le résultat précédent montre que  $f$  est bijective et a pour réciproque  $f^{-1} = \text{Id}_E + \sum_{i=0}^n g^i$ . Ainsi,  $f^{-1}$  est définie pour tout  $P \in E$  par

$$f^{-1}(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}, \text{ où } P^{(k)} \text{ désigne la } k\text{-ième dérivée du polynôme } P.$$

#### Remarque

On a déjà traité la deuxième question avec deux autres points de vue dans l'exercice 1.9 page 9.

### 1.1.8 Dualité PSI

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle **dual** de  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$  et on le note  $E^*$ .

• **Dualité en dimension finie** On suppose  $E$  de dimension  $n$ .

◦ Le dual de  $E$  est de dimension finie et  $\dim E^* = \dim E$ .

◦ **Base duale** : soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Il existe une unique base de  $E^*$ , appelée **base duale** de  $\mathcal{B}$ , notée  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

◦ **Base anté-duale** : Soit  $\mathcal{L}$  une base de  $E^*$ , il existe une unique base  $\mathcal{B}$  de  $E$  appelée **base anté-duale** de  $\mathcal{L}$  telle que  $\mathcal{L}$  soit la base duale de  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 1.20

#### ENSEA MP 2006

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les polynômes  $Q_k = (X - a)^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , forment une base de  $E$ . Quelle en est la base duale ?

La famille proposée est une famille de polynômes échelonnés en degré, elle est donc libre. Par ailleurs, elle est de cardinal  $n + 1$  dans un espace de dimension  $n + 1$  ; c'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On aurait pu également montrer qu'elle est génératrice en utilisant la formule de Taylor :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

C'est d'ailleurs cette formule qui va nous permettre de trouver la base duale de la famille proposée. Soit, pour  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , l'application linéaire  $\varphi_k$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$

$$\text{par } \varphi_k(P) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

Soit alors  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $j < k$  alors  $\varphi_k(Q_j) = 0$  car la dérivée  $k$ -ième d'un polynôme de degré  $j$  est nulle. Si  $j > k$  alors  $\varphi_k(Q_j) = 0$  car  $a$  est racine d'ordre  $j$  de  $Q_j$ . On constate de plus que  $\varphi_k(Q_k) = 1$ . On a bien montré que la famille  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est la base duale de  $(Q_0, \dots, Q_n)$ .

### Exercice 1.21

#### TPE MP 2005

Soient  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  les formes linéaires définies sur  $E = \mathbb{R}^3$  par

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, z) = y + z \\ \phi_2(x, y, z) = x + z \\ \phi_3(x, y, z) = x + y \end{cases}.$$

Montrer que  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est une base de  $E^*$ . Déterminer sa base anté-duale.

• Comme  $E^*$  est de dimension 3, pour montrer que  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est une base de  $E^*$ , il suffit de montrer que cette famille est libre. Soient  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , tels

que  $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0_{E^*}$ . L'égalité précédente signifie que pour tout  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on a  $\lambda_1\phi_1(x, y, z) + \lambda_2\phi_2(x, y, z) + \lambda_3\phi_3(x, y, z) = 0_E$ . On en déduit que pour tout  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$  on a  $\lambda_1(y + z) + \lambda_2(z + x) + \lambda_3(y + x) = 0_E$ . En évaluant cette dernière égalité en  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ , puis  $(x, y, z) = (0, 1, 0)$  et enfin  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ , on obtient un système linéaire en  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , dont la résolution mène à  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ . On en déduit que cette famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base de  $E^*$ .

• Déterminons  $(e_1, e_2, e_3)$  la base anté-duale de  $\phi_1, \phi_2$ . Cette base  $(e_1, e_2, e_3)$  est définie par les conditions : pour tout  $(i, j)$  dans  $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$  on a  $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$ . En notant  $(x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées de  $e_i$  dans la base canonique, déterminer  $(e_1, e_2, e_3)$  revient à résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = 1 \\ x_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + z_2 = 1 \\ x_2 + y_2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 + z_3 = 1 \\ x_3 + z_3 = 0 \\ x_3 + y_3 = 0. \end{cases}$$

Résoudre chacun de ces systèmes est équivalent à inverser la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On obtient  $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . On remarquera que  $M$  est la matrice des

coordonnées de la famille  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  dans la base duale canonique de  $(\mathbb{R}^3)^*$ . Son inversibilité nous indique que cette famille est libre, ce qui nous permet de retrouver le fait que c'est une base de  $E^*$ .

On en déduit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De la même manière on obtient  $(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et  $(x_3, y_3, z_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

### Exercice 1.22

#### TPE MP 2005

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe une et une seule forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{K}_n[X]$  qui envoie 1 sur 0,  $X$  sur 1 et qui est nulle pour tout polynôme s'annulant en 0 et 1.

Considérons la famille de polynômes  $(P_0, \dots, P_n)$  définie par :  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et pour  $k$  dans  $\llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $P_k = X^{k-1}(1 - X)$ . Cette famille est échelonnée en degré et de cardinal  $n + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Dire que  $P(1) = P(0) = 0$  signifie qu'il existe  $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$  tel que  $P = X(1 - X)Q$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^{k+1} (1 - X) = \sum_{k=2}^n a_{k-2} P_k$$

et finalement que  $P$  appartient à  $\text{Vect}(P_2, \dots, P_n)$ .

On en déduit que la condition «  $\varphi$  est nulle pour tout polynôme s'annulant en 0 et 1 » est équivalente à la condition «  $\varphi$  est nulle sur  $P_2, \dots, P_n$  ».

On sait qu'alors il existe une unique forme linéaire  $\varphi$  telle que  $\varphi(P_1) = 1$  et telle que, pour tout  $k$  dans  $\llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\varphi(P_k) = \varphi(P_0) = 0$ .

## 1.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### Exercice 1.23

#### Mines-Ponts PSI 2007

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\dim \text{Ker } u \leq \dim \text{Ker } u^2 \leq 2 \dim \text{Ker } u$ .

La première inégalité vient de  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$ .

Soit  $v$  l'endomorphisme de  $\text{Im } u$  défini, pour tout  $x \in \text{Im } v$  par  $v(x) = u(x)$ . Le théorème du rang donne donc  $\dim \text{Im } u = \text{rg } u = \dim \text{Ker } v + \text{rg } v$ . Mais  $\text{Im } v = \text{Im } u^2$  et  $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap \text{Im } v$ . On en déduit que  $\text{rg } v = \text{rg } u^2$  et  $\dim \text{Ker } v \leq \dim \text{Ker } u$ . Alors  $\text{rg } u = \dim \text{Ker } v + \text{rg } v \leq \dim \text{Ker } u + \text{rg } u^2$ . Ou encore  $\dim E - \dim \text{Ker } u \leq \dim \text{Ker } u + \dim E - \dim \text{Ker } u^2$ , d'où l'on déduit  $\dim \text{Ker } u^2 \leq 2 \dim \text{Ker } u$ .

### Exercice 1.24

#### CCP PSI 2006

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

- 1) Vérifier que pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , on a  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$  et  $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$ .  
Montrer que les suites  $(\text{Ker } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\text{Im } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont stationnaires à partir d'un certain rang.
- 2) Montrer que pour  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ , si  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$  alors pour tout  $q$  dans  $\mathbb{N}$  on a  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+q}$ .
- 3) Soit  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :  
(1)  $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ , (2)  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ , (3)  $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$ .
- 4) Donner des exemples d'endomorphismes  $f$  pour lesquels  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

1) Soit  $x$  dans  $E$ . L'égalité  $f^p(x) = 0$  entraîne  $f(f^p(x)) = f^{p+1}(x) = 0$ , d'où  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$ .

Soit  $y$  dans  $E$ . Si  $y$  appartient à  $\text{Im } f^{p+1}$  alors il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $y = f^{p+1}(x)$ . Ainsi  $y = f^p(f(x))$ , ce qui montre que  $y$  appartient à  $\text{Im } f^p$ .

De la relation  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$ , on déduit que la suite d'entiers  $(\dim \text{Ker } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est croissante, elle est par ailleurs majorée par  $\dim E$ . Cette suite est donc convergente, et comme c'est une suite d'entiers elle est stationnaire à partir d'un certain rang : il existe  $q$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $p \geq q$  entraîne  $\dim \text{Ker } f^p = \dim \text{Ker } f^q$ . Comme on a de plus  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$ , on en déduit que  $p \geq q$  entraîne  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ . Le théorème du rang appliqué à  $f^p$  et  $f^{p+1}$  et la relation  $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$  montre que, pour  $p \geq q$ , on a également  $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ .

2) Soit  $p$  tel que  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ . Soit  $q$  dans  $\mathbb{N}$ , soit  $H_q$  la proposition :  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+q}$ .  $H_1$  est vraie par hypothèse.

Soit  $q$  dans  $\mathbb{N}$ , supposons  $H_q$  vraie. Soit  $x$  dans  $\text{Ker } f^{p+q+2}$ , alors

$$f^{p+q+2}(x) = f^{p+q+1}(f(x)) = 0.$$

Ainsi  $f(x)$  appartient à  $\text{Ker } f^{p+q+1}$  et, d'après  $H_q$ , il en résulte que  $f(x)$  appartient à  $\text{Ker } f^{p+q}$ . On en déduit  $f^{p+q+1}(x) = 0$  ce qui montre que  $x$  est dans  $\text{Ker } f^{p+q+1}$ . L'inclusion réciproque ne pose pas de difficulté. On a donc montré que  $H_{q+1}$  est vraie.

Par principe de récurrence on a  $H_q$  est vraie pour tout  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$ . On a montré que si  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$  alors pour tout  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$  on a  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+q}$ .

3) D'après la relation précédente on a  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$  et  $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$ . Le théorème du rang appliqué à  $f^p$  et  $f^{p+1}$  montre que

$$\dim \text{Ker } f^p = \dim \text{Ker } f^q \Leftrightarrow \dim \text{Im } f^p = \dim \text{Im } f^q.$$

On en déduit que (1)  $\Leftrightarrow$  (2).

Montrons que (2) entraîne (3). Le théorème du rang appliqué à  $f^p$  montre qu'on a  $\dim E = \dim \text{Im } f^p + \dim \text{Ker } f^p$ . Il reste à montrer que  $\text{Im } f^p \cap \text{Ker } f^p = \{0\}$ . Soit  $z$  dans  $\text{Im } f^p \cap \text{Ker } f^p$ . Il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $z = f^p(x)$  et  $f^p(z) = 0$ . On en déduit que  $f^{2p}(x) = 0$ . Or  $p \geq 1$  on a donc, d'après le résultat précédent,  $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{2p}$ . On en déduit que  $f^p(x) = 0$ , ce qui montre que  $z = 0$ . On en déduit que  $\text{Im } f^p \cap \text{Ker } f^p = \{0\}$ . Finalement on a bien  $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$ .

Montrons que (3) entraîne (1).

Soit  $y$  dans  $\text{Im } f^p$ . Il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $y = f^p(x)$ . Comme on a par hypothèse  $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$ , il existe  $(x', z)$  dans  $\text{Ker } f^p \times E$  tel que  $x = x' + f^p(z)$ . On a ainsi  $y = f^p(x) = f^p(x' + f^p(z)) = f^{2p}(z) = f^{p+1}(f^{p-1}(z))$ . ( $p \geq 1$ ). On en déduit que  $y$  appartient à  $\text{Im } f^{p+1}$ . L'inclusion réciproque étant acquise on a bien  $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ .

4) La relation proposée est par exemple vérifiée par les projecteurs puisque pour tout projecteur  $p$ , on a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ .

## Exercice 1.25

Centrale MP 2007 ☕

Soient  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}$ .

- 1) Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  et en donner la dimension.
- 2) Donner une base de  $A$

- 1) Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $P$  associe  $\sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)$ . L'application  $\varphi$  est linéaire et  $A$  est le noyau de  $\varphi$ , par conséquent  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle, par exemple  $\varphi(1) = 1$ , le sous-espace vectoriel  $A$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$  et on a donc  $\dim A = n$ .
- 2) Au vu de l'expression de  $\varphi$ , il est naturel d'examiner les valeurs que prend en les  $Q_p = (X - 1)^p$  pour  $p$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme 1 est racine multiple d'ordre  $p$  de  $Q$  et que  $k > p$  entraîne  $Q^{(k)} = 0$ , on a  $\varphi((X - 1)^k) = Q_p^{(p)}(1) = p!$ . On peut alors construire une famille de polynômes échelonnée en degré dont chacun des éléments est dans le noyau de  $\varphi$  : pour  $p$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on choisit  $H_p(X) = Q_p(X) - p! = (X - 1)^p - p!$ . La famille  $(H_1, \dots, H_n)$  est libre et de cardinal  $n$  dans un sous-espace vectoriel de dimension  $n$ , c'est donc une base de  $A$ .

## Exercice 1.26

D'après Centrale PSI 2006

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives si et seulement si  $g \circ f$  et  $f \circ g$  le sont.
- 2) Montrer que, si  $f$  et  $g$  commutent, alors le noyau et l'image de l'une sont stables par l'autre.
- 3) Montrer que  $\text{Id}_E - f \circ g \in \text{GL}(E)$  implique  $\text{Id}_E - g \circ f \in \text{GL}(E)$ .

- 1) • Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bijectives.  
 • Si  $g \circ f$  est bijective, alors  $f$  est injective et si  $f \circ g$  est bijective, alors  $f$  est surjective. Ainsi  $f$  est bijective puis  $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$  est bijective comme composée d'applications bijectives.
- 2) • Soit  $x \in \text{Ker } f$ . On a  $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = 0_E$  et donc  $g(x) \in \text{Ker } f$ . Par conséquent  $\text{Ker } f$  est stable par  $g$ . La stabilité de  $\text{Ker } g$  par  $f$  est analogue.  
 • Soit  $y \in \text{Im } f$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Alors  $g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x)$  et donc  $g(y) = f(g(x))$  appartient à  $\text{Im } f$ . Ce qui prouve la stabilité de  $\text{Im } f$  par  $g$ .



3) Posons  $h = (\text{Id}_E - f \circ g)^{-1}$ . On a  $(\text{Id}_E - f \circ g) \circ h = \text{Id}_E$  donc  $f \circ g \circ h = h - \text{Id}_E$ . De même  $h \circ (\text{Id}_E - f \circ g) = \text{Id}_E$  implique  $h \circ f \circ g = h - \text{Id}_E$ . Calculons alors  $u = (\text{Id}_E - g \circ f) \circ (\text{Id}_E + g \circ h \circ f)$ . On obtient

$$\begin{aligned} u &= \text{Id}_E - g \circ f + g \circ h \circ f - g \circ f \circ g \circ h \circ f \\ &= \text{Id}_E - g \circ f + g \circ h \circ f - g \circ (h - \text{Id}_E) \circ f = \text{Id}_E. \end{aligned}$$

On vérifie de même que  $(\text{Id}_E + g \circ h \circ f) \circ (\text{Id}_E - g \circ f) = \text{Id}_E$ . Il en résulte que  $\text{Id}_E - g \circ f$  est inversible et a pour inverse  $\text{Id}_E + g \circ h \circ f$ .

### Exercice 1.27

#### CCP PC 2007

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $f$  et  $g$  deux applications linéaires respectivement de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $E$  telles que  $f \circ g \circ f = f$  et  $g \circ f \circ g = g$ .

- 1) Montrer que  $\text{Im } g \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$  et que  $\text{Im } g \oplus \text{Ker } f = E$ .
- 2) On suppose que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie. Comparer  $\text{rg } f$  et  $\text{rg } g$ .
- 3) On suppose que  $\dim E = \dim F = \text{rg } f = n$  ; montrer que  $g \circ f = \text{Id}_E$ .
- 4) On prend  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Soient les applications linéaires  $f$  et

$g$  définies respectivement sur  $E$  et  $F$  par  $f(P) = P'$  et  $g(P) = \int_0^x P(t) dt$ .

Montrer que ces fonctions vérifient  $f \circ g \circ f = f$  et  $g \circ f \circ g = g$ .

1) • Montrons que  $\text{Im } g \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ .

Soit  $y \in \text{Im } g \cap \text{Ker } f$ . On a  $f(y) = 0_F$  et il existe  $x$  dans  $F$  tel que  $y = g(x)$ . Alors  $f(y) = f \circ g(x) = 0_F$ , puis  $0_F = g(f(y)) = g \circ f \circ g(x) = g(x) = y$ . On en déduit que  $\text{Im } g \cap \text{Ker } f \subset \{0_E\}$  et, comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on a l'égalité.

• Montrons que  $\text{Im } g + \text{Ker } f = E$ .

Soit  $z$  dans  $E$ . On cherche  $x$  dans  $\text{Ker } f$  et  $y$  dans  $\text{Im } g$  tels que  $z = x + y$ . Il existe  $u$  dans  $F$  tel que  $y = g(u)$ . On a alors  $z = x + g(u)$ . Puisque  $x$  est dans  $\text{Ker } f$ , on a  $f(x) = 0_F$ , et on en déduit que  $f(z) = f(x) + f \circ g(u) = f \circ g(u)$ , puis  $g \circ f(z) = g \circ f \circ g(u) = g(u) = y$ . Il en résulte que, si  $x$  et  $y$  existent, on a  $x = z - g \circ f(z)$ , et  $y = g \circ f(z)$ .

Il reste à vérifier que ces vecteurs conviennent. On a bien  $x + y = z$ , et  $y = g(f(z))$  appartient à  $\text{Im } g$ . Par ailleurs  $f(x) = f(z) - f \circ g \circ f(z) = f(z) - f(z) = 0$ , donc  $z$  appartient à  $\text{Ker } f$ . On a donc bien  $\text{Im } g + \text{Ker } f = E$ , et puisque  $\text{Im } g \cap \text{Ker } f = \{0\}$ , on en déduit que  $\text{Im } g \oplus \text{Ker } f = E$ .

2) Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, il résulte de la somme directe  $\text{Im } g \oplus \text{Ker } f = E$  que  $\text{rg } g + \dim \text{Ker } f = \dim E$ , et du théorème du rang que  $\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$ . On en déduit que  $\text{rg } f = \text{rg } g$ .

3) Comme  $\text{rg } f = \dim F = \dim E$ , l'application  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ . On en déduit qu  $\text{Id}_E = f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ f \circ g \circ f = g \circ f$ , et donc  $f^{-1} = g$ .

4) Pour tout  $P \in F$ , on a  $f \circ g(P) = P$ , donc  $g \circ f \circ g = g$ . D'autre part, pour tout  $P$  de  $E$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $g \circ f(P)(x) = \int_0^x P'(t) dt = P(x) - P(0)$ . En dérivant, on obtient alors  $f \circ g \circ f(P)(x) = P'(x) = f'(P)(x)$ , d'où  $f \circ g \circ f = f$ .

### Exercice 1.28

#### CCP PC 2007

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $u^n = \text{Id}_E$ . Soit  $V$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$  et  $p$  un projecteur d'image

$$V. \text{ Soit } q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

- 1) Montrer que  $\text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ .
- 2) Montrer que  $q \circ u = u \circ q$ , que  $\text{Im } q \subset V$ , puis que  $p \circ q = q$ .
- 3) Montrer que  $q$  est un projecteur.

1) L'égalité  $\text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$  est une propriété des projecteurs. Si  $x$  appartient à  $\text{Im } p$ , alors  $x = p(y)$ , donc  $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ , et  $x$  appartient à  $\{x \in E \mid p(x) = x\}$ . Réciproquement, si  $x = p(x)$ , alors  $x$  appartient à  $\text{Im } p$ , d'où l'égalité.

2) • On a  $q \circ u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k+1}$ . En faisant le changement d'indice de sommation  $\ell = k - 1$ , on obtient

$$q \circ u = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} u^{\ell+1} \circ p \circ u^{n-\ell} = u \circ \left( \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} u^{\ell} \circ p \circ u^{n-\ell} \right).$$

Mais, puisque  $u^n = \text{Id}_E$ , on a  $u^0 \circ p \circ u^n = p = u^n \circ p \circ u^0$ , et donc  $q \circ u = u \circ \left( \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n u^{\ell} \circ p \circ u^{n-\ell} \right) = u \circ q$ .

- Montrons que  $\text{Im } q \subset V$ . Soit  $x$  dans  $E$ . Alors, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , le vecteur  $p(u^{n-k}(x))$  appartient à  $\text{Im } p = V$ , et puisque  $V$  est stable par  $u$ , le vecteur  $u^k(p \circ u^{n-k}(x))$  est aussi dans  $V$ . Il en résulte que  $q(x)$  est dans  $V$  et donc  $\text{Im } q \subset V$ .
- Soit  $x$  dans  $E$ . Alors  $q(x)$  appartient à  $\text{Im } q$  et donc à  $V = \text{Im } p$ . On en déduit que, pour tout  $x \in E$ , on a  $p(q(x)) = q(x)$ , d'où  $p \circ q = q$ .

3) Puisque  $q \circ u = u \circ q$ , on montre par récurrence que pour tout entier  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a l'égalité  $q \circ u^k = u^k \circ q$ . Ainsi  $q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ q \circ u^{n-k}$ .

Puis, en utilisant la relation  $p \circ q = q$ , on obtient  $q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ q \circ u^{n-k}$ . En utilisant de nouveau le fait que  $q$  et  $u^k$  commutent, on a  $q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q \circ u^k \circ u^{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q \circ u^n$ .

Enfin, puisque  $u^n = \text{Id}_E$ , on obtient  $q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q = q$ . La relation  $q^2 = q$  montre que  $q$  est un projecteur.

*L'exercice suivant fait la synthèse de deux exercices d'oraux.*

### Exercice 1.29

#### Mines-Ponts PC 2006 et CCP MP 2006

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On pose  $f^2 = f \circ f$ .

1) Montrer que

$$1.a \quad (\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)) \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}.$$

$$1.b \quad (\text{Im } f = \text{Im}(f^2)) \iff \text{Im } f + \text{Ker } f = E.$$

2) On suppose que  $E$  est de dimension finie, montrer que

$$(\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)) \iff (\text{Im } f = \text{Im}(f^2)) \iff \text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E.$$

3) Soient  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  qui à tout polynôme  $P$  associe son polynôme dérivé  $P'$ .

Comparer  $\text{Im } f$  et  $\text{Im}(f^2)$  puis  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f^2)$ . Conclusion ?

1.a • Supposons que  $\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)$  et montrons qu'alors  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$ . Soit  $y \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . On a  $f(y) = 0$  et il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Alors  $f^2(x) = f(y) = 0$  et donc  $x$  appartient à  $\text{Ker}(f^2)$ . Il en résulte que  $x$  est dans  $\text{Ker } f$ , d'où  $f(x) = y = 0_E$ , ce qui montre que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \subset \{0_E\}$ . Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on a bien égalité.

• Supposons que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$ . Soit  $x \in \text{Ker}(f^2)$ , alors  $f(x)$  appartient à la fois à  $\text{Ker } f$  et à  $\text{Im } f$ . Il en résulte que  $f(x) = 0_E$ , et donc  $x$  appartient à  $\text{Ker } f$ , d'où l'inclusion  $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker } f$ . Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on a bien l'égalité.

1.b • Supposons que  $\text{Im } f = \text{Im}(f^2)$ . Soit  $z \in E$ . Alors  $f(z)$  appartient à  $\text{Im } f$ , donc à  $\text{Im}(f^2)$ . Il existe  $u \in E$  tel que  $f^2(u) = f(z)$ . Alors on peut écrire  $z = (z - f(u)) + f(u)$ . On a  $f(z - f(u)) = f(z) - f^2(u) = 0_E$ , donc  $z - f(u)$  appartient à  $\text{Ker } f$ . D'autre part  $f(u)$  appartient à  $\text{Im } f$ . On a donc démontré que  $E \subset \text{Ker } f + \text{Im } f$ . Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on a bien égalité.

• Supposons que  $\text{Im } f + \text{Ker } f = E$ . Soit  $y \in \text{Im } f$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Mais  $x$  s'écrit sous la forme  $u + v$ , où  $u$  appartient à  $\text{Ker } f$  et  $v$  à  $\text{Im } f$ . Comme  $v$  est dans  $\text{Im } f$ , il existe  $z \in E$  tel que  $v = f(z)$ . On en déduit que

$y = f(x) = f(u + f(z)) = f^2(z)$ , donc  $y$  appartient à  $\text{Im}(f^2)$ , et l'on a l'inclusion  $\text{Im } f \subset \text{Im}(f^2)$ . Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on a bien l'égalité.

2) Lorsque  $E$  est de dimension finie, on a alors, par le théorème du rang,  $\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \text{rg}(f^2) + \dim \text{Ker}(f^2) = \dim E$ .

- Supposons que  $\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)$ , alors  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker}(f^2)$  et donc  $\text{rg } f = \text{rg}(f^2)$ . Mais comme on a l'inclusion  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im } f$ , on en déduit que  $\text{Im } f = \text{Im}(f^2)$ .

- Supposons que  $\text{Im } f = \text{Im}(f^2)$ . Alors  $\text{rg } f = \text{rg}(f^2)$ , d'où l'on déduit que  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker}(f^2)$ . Mais comme on a l'inclusion  $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(f^2)$ , on en déduit que  $\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)$ .

- Si une des deux égalités  $\text{Ker } f = \text{Ker}(f^2)$  ou  $\text{Im } f = \text{Im}(f^2)$  est vraie, les deux sont vraies en même temps ce qui, d'après la question 1), est équivalent à  $\text{Im } f + \text{Ker } f = E$  et  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$  donc à  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$ .

3) De manière évidente  $\text{Im } f = \text{Im}(f^2) = \mathbb{R}[X]$ . Par contre  $\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X]$  et  $\text{Ker}(f^2) = \mathbb{R}_1[X]$ , donc  $\text{Ker } f \neq \text{Ker}(f^2)$ .

### Exercice 1.30

#### Navale PSI 2006 ☕

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 4 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = 0$ ,  $f^2 \neq 0$ .

1) Montrer que  $\text{rg } f = 2$ .

2) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$

dans la base  $\mathcal{B}$  soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1) L'endomorphisme  $f$  est nilpotent et non nul, donc  $1 \leq \text{rg } f \leq 3$ .

- Supposons  $\text{rg } f = 3$  alors d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker } f = 1$ . Avec  $\text{Im } f^2 = f(f(E)) = \text{Im}(f|_{\text{Im } f})$  on obtient  $\text{rg } f^2 = \text{rg } f - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f)$  puis

$$0 \leq \text{rg } f - \text{rg } f^2 \leq \dim \text{Ker } f. \quad (1)$$

De même, puisque  $\text{Im } f^3 = f(f^2(E)) = \text{Im}(f|_{\text{Im } f^2})$ , nous avons (en appliquant le théorème du rang)  $\text{rg } f^3 = \text{rg } f^2 - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f^2)$  d'où

$$0 \leq \text{rg } f^2 - \text{rg } f^3 \leq \dim \text{Ker } f. \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit  $0 \leq \text{rg } f - \text{rg } f^3 \leq 2 \dim \text{Ker } f$  donc  $\text{rg } f^3 \geq 1$  ce qui est contradictoire avec  $f^3 = 0$ .

- Supposons maintenant  $\text{rg } f = 1$  alors  $\dim \text{Ker } f = 3$  et deux cas sont possibles : soit  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ , soit  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ .
- Si  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ , alors  $f|_{\text{Im } f}$  induit un isomorphisme de  $\text{Im } f$  sur  $\text{Im } f^2$  et par conséquent  $\text{rg } f = \text{rg } f^2$  puis de même  $\text{rg } f^2 = \text{rg } f^3$ . Ainsi  $\text{rg } f^3 = 1$  ce qui est contradictoire avec  $f^3 = 0$ .
- si  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ , alors on a  $f^2 = 0$  ce qui est encore une contradiction.

Pour démontrer que  $\text{rg } f \geq 2$ , on peut aussi procéder de la manière suivante : il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $f^2(x) \neq 0_E$ , la famille  $(x, f(x), f^2(x))$  est alors libre (voir exercice 1.18, page 17), on en déduit que l'image de  $f$  contient deux vecteurs libres, ce qui montre que  $\text{rg } f \geq 2$ .

- En conclusion, s'il existe de tels endomorphismes, on a nécessairement  $\text{rg } f = 2$ .

On peut remarquer que la matrice  $A$  de la question 2) vérifie  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et  $A^3 = 0$ . Il existe donc bien des endomorphismes  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ .

2) **Analyse** : S'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $M_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

celle-ci vérifie les conditions  $\begin{cases} e_2 = f(e_1), e_3 = f(e_2) = f^2(e_1) \\ (e_2, e_3) \text{ est une base de } \text{Im } f \\ (e_3, e_4) \text{ est une base de } \text{Ker } f \\ \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \mathbb{K}e_3 \end{cases}$ .

**Synthèse** : l'endomorphisme  $f^2$  est non nul donc il existe  $e_1 \in E$  tel que  $f^2(e_1) \neq 0$ . On pose  $e_2 = f(e_1)$  et  $e_3 = f^2(e_1)$ . L'égalité  $f^3 = 0$  donne  $\text{Im } f^2 \subset \text{Ker } f$  donc  $e_3 \in \text{Ker } f$  et  $\text{Ker } f$  étant de dimension 2, on peut trouver  $e_4$  tel que  $(e_3, e_4)$  soit une base de  $\text{Ker } f$ . Montrons alors que  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base de  $E$ . Soit

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{K}^4$  tel que  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i = 0$ . Appliquons  $f^2$  à cette égalité, il vient

$\alpha_1 e_3 = 0$  donc  $\alpha_1 = 0$ , puis appliquons  $f$ , il vient  $\alpha_2 e_3 = 0$  donc  $\alpha_2 = 0$ . Il reste  $\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$  ce qui donne  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  car  $(e_3, e_4)$  est libre. Par construction de

la base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ , on a  $M_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 1.31

## CCP PSI 2005

Soient  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $n$  nombres complexes  $a_1, \dots, a_n$  deux à deux distincts.

- 1) Montrer qu'il existe une base  $(L_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  telle que pour tout couple  $(k, j)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a  $L_k(a_j) = \delta_{kj}$ .
- 2) (PSI) On choisit  $a_j = e^{2i\pi/j}$  et on note  $(L_k^*)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la base duale de  $(L_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ ; calculer  $L_k^*(1 + X + \dots + X^{n-1})$ .

1) On reconnaît les conditions qui définissent les polynômes interpolateurs de Lagrange. On choisit ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

On peut aussi procéder en considérant l'application  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

Cette application est linéaire, les espaces d'arrivée et de départ sont de même dimension. Montrons qu'elle est injective. Un polynôme de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  qui s'annule en tous les  $a_i$  est un polynôme de degré  $n-1$  qui s'annule en  $n$  points distincts, c'est donc le polynôme nul. Par conséquent le noyau de  $\varphi$  est réduit au vecteur nul. On en déduit que  $\varphi$  est bijective grâce au théorème du rang. Par conséquent pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  il existe un polynôme  $L_k$  tel que :

$$\varphi(L_k) = (0, \dots, 0, \underset{\text{position } k}{1}, 0, \dots, 0).$$

Le polynôme  $L_k$  vérifie alors les conditions de l'énoncé.

- 2) Soit  $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la famille de formes linéaires définies par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \varphi_{a_i} : \mathbb{C}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C} \\ P \longmapsto P(a_i)$$

On constate que, par définition de la famille  $(L_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , on a pour tout  $(i, k)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  :  $\varphi_{a_i}(L_k) = L_k(a_i) = \delta_{ik}$ . Ceci montre que la famille  $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est la base duale de  $(L_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . On a en particulier, en notant  $P(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$  :

$$L_k^*(P) = \varphi_{a_k}(P) = P(a_k) = 1 + e^{2i\pi/k} + \dots + e^{2i\pi(n-1)/k},$$

$$\text{donc } L_k^*(P) = \begin{cases} n & \text{si } k = 1 \\ \frac{1 - e^{2in\pi/k}}{1 - e^{2i\pi/k}} & \text{si } k \neq 1 \end{cases}.$$

## Exercice 1.32

## Centrale PSI 2006

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soient  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  des réels distincts et  $\Phi_i$  la forme linéaire définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $\Phi_i(P) = P(\alpha_i)$ . Montrer que  $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$  est libre.

Devant ce genre d'énoncé, il faut avoir le réflexe de penser qu'à un moment ou un autre les polynômes de Lagrange pourront être utiles.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que  $\lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_n \Phi_n = 0$ . L'égalité précédente signifie que pour tout  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\lambda_1 \Phi_1(P) + \dots + \lambda_n \Phi_n(P) = 0$ , ce qui s'écrit encore : pour tout  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\lambda_1 P(\alpha_1) + \dots + \lambda_n P(\alpha_n) = 0$  (1). On veut montrer que chacun des coefficients  $\lambda_i$  est nul, il suffit d'évaluer l'égalité (1) en des polynômes bien choisis pour obtenir un système linéaire qui avec un peu de chance sera facile à résoudre. C'est bien entendu à ce moment que les polynômes de Lagrange vont intervenir. Soit  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $P_i$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  vérifiant : pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $i \neq j$  on a  $P_i(\alpha_j) = 0$ , et par ailleurs  $P_i(\alpha_i) = 1$ . L'égalité (1) évaluée en  $P_i$  montre que pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\lambda_i = 0$ . On en déduit que la famille  $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$  est libre.

## Exercice 1.33

## CCP PC 2007



Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3. Pour  $k$  dans  $\llbracket 0, 3 \rrbracket$  On note  $L_k$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui laissent stables tous les sous espaces vectoriels de  $E$  qui sont de dimension  $k$ . On se donne  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $u$  dans  $L_1$ .

- 1) Déterminer  $L_0$  et  $L_3$ .
  - 2) Montrer que pour  $i$  dans  $\{1, 2, 3\}$  il existe  $\lambda_i$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ .
  - 3) Montrer qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$  tel que pour tout  $x$  dans  $E$  on ait  $u(x) = \lambda x$ . En déduire que  $L_1$  est l'ensemble des homothéties.
  - 4) Montrer que  $L_2 \subset L_1$ . En déduire  $L_2$ .
- 1) Le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 de  $E$  est  $\{0_E\}$ . Comme tout endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifie  $u(0_E) = 0_E$ , on en déduit que  $L_0 = \mathcal{L}(E)$ . Comme  $E$  est de dimension 3, Le seul sous-espace de dimension 3 de  $E$  est  $E$  lui même. On en déduit que  $L_3 = \mathcal{L}(E)$ .
  - 2) Pour  $i$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , notons  $F_i$  la droite vectorielle engendrée par  $e_i$ . On a  $u(F_i) \subset F_i$ . En particulier  $u(e_i)$  appartient à  $F_i$ , ce qui signifie exactement qu'il existe  $\lambda_i$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ .
  - 3) Par le même raisonnement que précédemment il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$  tel que

$$u(e_1 + e_2 + e_3) = \lambda(e_1 + e_2 + e_3).$$

Par linéarité de  $u$  on a alors  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \lambda(e_1 + e_2 + e_3)$  et comme la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre, on en déduit que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . Soit alors  $x$  dans  $E$ . Il existe  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tels que  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ . On en déduit  $u(x) = u(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 \lambda e_1 + \alpha_2 \lambda e_2 + \alpha_3 \lambda e_3 = \lambda x$ . On a montré que si  $u$  est dans  $L_1$ , alors  $u$  est une homothétie. Réciproquement toute homothétie est dans  $L_1$ . On a ainsi montré que  $L_1$  est l'ensemble des homothéties de  $E$ .

- 4) On va montrer que si un endomorphisme laisse stable les plans vectoriels de  $E$ , alors il laisse stable les droites vectorielles de  $E$ . Soit  $u$  dans  $L_2$  et  $D$  une droite vectorielle de  $E$ . Il existe  $f_1$  un vecteur non nul de  $E$  tel que  $D = \text{Vect}(f_1)$ . D'après le théorème de la base incomplète il existe  $f_2$  et  $f_3$  tels que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$ . Soient  $P_1 = \text{Vect}(f_1, f_2)$  et  $P_2 = \text{Vect}(f_1, f_3)$ . Par construction  $P_1$  et  $P_2$  sont des plans vectoriels de  $E$  et ils sont donc stables par  $u$ , leur intersection est donc également stable par  $u$ . Or  $P_1 \cap P_2 = D$  et on a donc montré que la droite  $D$  est stable par  $u$ . On a ainsi montré que  $L_2 \subset L_1$ . Comme par ailleurs toute homothétie de  $E$  laisse stable tous les plans vectoriels de  $E$ , on en déduit que  $L_2$  est lui aussi égal à l'ensemble des homothéties de  $E$ .

## 1.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### Exercice 1.34

#### Centrale PC 2006 ☕



Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels distincts non nuls. Pour  $1 \leq i \leq n$ , on note  $L_i$  la forme linéaire définie sur  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  par :

$$\forall P \in E, L_i(P) = \int_0^{a_i} P(t) dt.$$

Montrer que  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  est une famille libre.

Remarquons tout d'abord que pour  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  la fonction  $F_P$  qui à  $x$  associe  $\int_0^x P(t) dt$  est la primitive de  $P$  qui s'annule en 0.

On a ainsi :  $\forall P \in E, L_k(P) = F_P(a_k)$ .

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k = 0$ . Ceci signifie que pour tout poly-

nômes  $P$  de  $E$  on a  $\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k F_P(a_k) = 0$ .



Il est alors naturel de chercher des polynômes particuliers qui permettront de faire apparaître des égalités menant à la nullité de tous les  $\alpha_k$ . On va proposer des polynômes qui devraient vous rappeler les polynômes interpolateurs de Lagrange. Soit,

pour  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , le polynôme  $Q_i$  défini par :  $Q_i(X) = X \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \left( \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$ .

Soit  $P_i$  le polynôme dérivé de  $Q_i$ . Par construction  $Q_i$  est la primitive de  $P_i$  qui s'annule en 0.

Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $L_k(P_i) = Q_i(a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$ .

Ainsi, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k(Q_i) = \alpha_i = 0$ .

On en déduit que la famille  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  est libre.

### Remarque pour les élèves de PSI

On vient de montrer que  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  est une base de  $E^*$  et on en a donné la base anté-duale.

### Exercice 1.35

#### Centrale PSI 2006

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $E = F \oplus G$  et on note  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $q$  le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $q \circ f \circ p = 0$ .

Supposons que  $F$  est stable par  $f$ . Soit  $x$  dans  $E$ . Le vecteur  $p(x)$  appartient à  $F$  car  $\text{Im } p = F$ , d'où  $f(p(x))$  appartient à  $F$  par stabilité de  $F$  sous l'action de  $f$ . Comme  $F = \text{Ker } q$ , on a finalement  $q(f(p(x))) = 0$ . On a ainsi montré que  $q \circ f \circ p = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $q \circ f \circ p = 0$ . Soit  $x$  dans  $F$ . Comme  $p$  est un projecteur d'image  $F$ , on a  $p(x) = x$ . On en déduit  $f(p(x)) = f(x)$ . De plus, comme  $q \circ f \circ p = 0$ , on a  $q(f(p(x))) = 0$ , ce qui montre que  $f(p(x))$  appartient au  $\text{Ker } q$ . Ainsi  $f(x)$  appartient à  $\text{Ker } q$  c'est-à-dire à  $F$ . On a montré que pour  $x$  dans  $F$ ,  $f(x)$  est dans  $F$ . Le sous-espace vectoriel  $F$  est donc stable par  $f$ .

### Exercice 1.36

#### Mines-Ponts PC 2007

Soient des entiers  $n$  et  $p$  tels que  $0 < p < n$  et soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et soit  $v$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$  telles que  $u \circ v = \text{Id}_F$ . Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur. Donner son rang, son image et son noyau.

On a  $(v \circ u)^2 = v \circ u \circ v \circ u = v \circ u$  et l'application  $v \circ u$  est donc un projecteur.

L'application  $u \circ v = \text{Id}_F$  est bijective. On en déduit que  $u$  est surjective et que  $v$  est injective. Le fait que  $u$  est surjective entraîne  $\text{Im } v \circ u = \text{Im } v$  (1). Comme  $v$  est injective d'après le théorème du rang :  $\text{rg } v = p$ . On en déduit  $\text{rg } v \circ u = p$ .

Comme  $v$  est injective  $v \circ u(x) = 0$  si et seulement si  $u(x) = 0$  et on a donc  $\text{Ker } v \circ u = \text{Ker } u$  (2). De (1) et (2) on peut préciser :  $v \circ u$  est le projecteur sur  $\text{Im } v$ , parallèlement à  $\text{Ker } u$ .

### Exercice 1.37

#### Centrale PSI 2005

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie  $n$  et  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .

1) Montrer que  $u$  est un isomorphisme si et seulement si :

$$\forall v \in \mathcal{L}(F, E), u \circ v \circ u = 0 \Rightarrow v = 0.$$

2) On suppose  $\text{rg } u = p < n$ .

$$\text{Calculer la dimension de } \{v \in \mathcal{L}(F, E) \mid u \circ v \circ u = 0\}.$$

1) Si  $u$  est un isomorphisme alors  $u^{-1}$  existe et en composant à gauche et à droite par  $u^{-1}$  l'égalité  $u \circ v \circ u = 0$ , on obtient  $v = 0$ .

Pour la réciproque, on va procéder par contraposition. Supposons que  $u$  ne soit pas un isomorphisme et montrons qu'il existe  $v$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$ , avec  $u \circ v \circ u = 0$  et  $v \neq 0$ .

Comme  $u$  n'est pas un isomorphisme, son noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Soit  $e_1$  un vecteur non nul de  $\text{Ker } u$ , soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$  ( $F$  est de dimension finie), soit  $v$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$  définie par :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(f_i) = e_1$ . L'application linéaire  $v$  est non nulle et comme son image est incluse dans  $\text{Ker } u$  on a  $u \circ v \circ u = 0$ .

2) Soit  $G = \{v \in \mathcal{L}(F, E), u \circ v \circ u = 0\}$ . On montre sans difficulté que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(F, E)$ . On va montrer que :

$$G = \{v \in \mathcal{L}(F, E) \mid v(\text{Im } u) \subset \text{Ker } u\}.$$

Soit  $v$  dans  $\{v \in \mathcal{L}(F, E) \mid v(\text{Im } u) \subset \text{Ker } u\}$ . Pour tout  $x$  dans  $E$ , le vecteur  $u(x)$  est dans  $\text{Im } u$  et par conséquent  $v(u(x))$  est dans  $\text{Ker } u$ . On en déduit  $u \circ v \circ u(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $E$ . On a donc montré que  $v$  est dans  $G$ .

Soit  $v$  dans  $G$ . Soit  $y$  dans  $\text{Im } u$ , il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $u(x) = y$ . On a ainsi  $v(y) = v(u(x))$ , et comme  $u \circ v \circ u(x) = 0$ , on en déduit  $u(v(y)) = 0$ , c'est-à-dire  $v(y)$  appartient à  $\text{Ker } u$ . On a bien montré  $v(\text{Im } u) \subset \text{Ker } u$ .

Soient  $F_1$  un supplémentaire de  $\text{Im } u$  dans  $F$  et  $E_1$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$  (leur existence vient du fait que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie). Soit  $\mathcal{B}_F$  une base adaptée à la décomposition  $F = \text{Im } u \oplus F_1$  (c'est-à-dire  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$  avec  $(f_1, \dots, f_p)$  base de  $\text{Im } u$  et  $(f_{p+1}, \dots, f_n)$  base de  $F_1$ ). Soit  $\mathcal{B}_E$  une base adaptée à

la décomposition  $E = \text{Ker } u \oplus E_1$ . Soit  $V$  la matrice de  $v$  dans les bases  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_E$ . On a  $v(\text{Im } u) \subset \text{Ker } u$  si et seulement si  $V$  est de la forme :

$$\left( \begin{array}{c|c} \text{Im } u & F_1 \\ \hline A & B \\ 0 & C \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Ker } u \\ E_1 \end{array}.$$

La taille du bloc nul est  $p^2$ , car d'après le théorème du rang  $\dim E_1 = p$ . On en déduit que  $\dim G = n^2 - p^2$ .

### Exercice 1.38

#### Centrale PSI 2005

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , un sous-espace  $V$  de  $E$  de dimension  $p$  et  $J(V) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } u \subset V\}$ .

- 1) Montrer que  $J(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , donner sa dimension.
- 2) Soit  $\pi$  un projecteur d'image  $V$ . Montrer que :  $J(V) = \{\pi \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$ .

1) l'application nulle est dans  $J(V)$ . Soient  $f$  et  $g$  dans  $J(V)$ , soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $h = \alpha f + \beta g$ . Soit  $y$  dans l'image de  $h$ . Il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $y = h(x) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ . Comme  $f$  et  $g$  sont dans  $J(V)$ , les vecteurs  $f(x)$  et  $g(x)$  sont dans  $V$ . Comme  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , le vecteur  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  est encore dans  $V$ . On a ainsi montré que tout vecteur de l'image de  $h$  est dans  $V$ , ce qui montre que  $h$  est dans  $J(V)$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $V$  que l'on complète en  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Un endomorphisme  $f$  est dans  $J(V)$  si et seulement si sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} e_1 & \cdots & e_p & e_{p+1} & \cdots & e_n \\ \hline & A & & & B & \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

On en déduit que  $J(V)$  est de dimension  $np$ .

- 2) Notons  $K_\pi$  l'ensemble  $\{\pi \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$ .

Soit  $h$  dans  $K_\pi$ . Il existe  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  telle que  $h = \pi \circ f$ . Comme  $\pi$  est d'image  $V$  on en déduit que l'image de  $h$  est incluse dans  $V$ , ce qui montre que  $h$  est dans  $J(V)$ . On a ainsi montré que  $K_\pi \subset J(V)$ .

Soit  $f$  dans  $J(V)$ . Comme  $\pi$  est un projecteur d'image  $V$ , pour tout  $y$  dans  $V$  on a  $\pi(y) = y$ . Soit alors  $x$  dans  $E$ . Comme  $f$  est dans  $J(V)$ , le vecteur  $f(x)$  est dans  $V$  et on a donc  $\pi(f(x)) = f(x)$ . On en déduit que :  $\forall x \in E, f(x) = \pi(f(x))$ , ce qui montre que  $f = \pi \circ f$ , et que  $f$  est dans  $K_\pi$ .

On a bien montré que  $J(V) = \{\pi \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$ .

### Exercice 1.39

#### TPE PSI 2006

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $G$  un sous-espace de  $E$ . On pose  $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker } u\}$ .

Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Montrons que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

L'ensemble  $A$  est une partie non vide de  $\mathcal{L}(E, F)$  car l'application linéaire nulle de  $E$  vers  $F$  est dans  $A$ .

Soient  $u$  et  $v$  dans  $A$ , soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $x$  dans  $G$ , on a  $u(x) = v(x) = 0$ , ce qui montre que  $(\alpha u + \beta v)(x) = 0$ . Par conséquent  $\alpha u + \beta v$  est dans  $A$ .

Cherchons la dimension de  $A$ . On note  $n$  la dimension de  $E$ ,  $p$  la dimension de  $F$  et  $q$  la dimension de  $G$ . Soit  $(e_1, \dots, e_q)$  une base de  $G$  complétée en une base  $(e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $M(u)$  la matrice de  $u$  dans les bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$ .

L'application linéaire  $u$  appartient à  $A$  si et seulement si la matrice  $M(u)$  est de la forme :

$$M(u) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_q) & u(e_{q+1}) & \cdots & u(e_n) \\ \hline & & 0 & & & M' \end{array} \right) \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_p \end{array},$$

où  $M'$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{p, n-q}(\mathbb{K})$ . On en déduit que  $A$  est de dimension  $p(n-q)$ .

Pour déterminer la dimension de  $A$ , on peut également considérer l'application  $\psi$  définie par :  $\psi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow F^q$   
 $u \longmapsto (u(e_1), \dots, u(e_q))$ . On montre que la dimension

de l'image de cette application linéaire est  $pq$  (cela vient du fait que l'application  $\psi$  est surjective car quels que soient  $(s_1, \dots, s_q) \in F^q$ , il existe  $u$  telle que  $u(e_i) = s_i$  pour  $1 \leq i \leq q$  et  $\dim F^q = pq$ ) et que  $u \in A$  si et seulement si  $u \in \text{Ker } \psi$ . On conclut en utilisant le théorème du rang.

## Exercice 1.40

## Centrale PC 2007

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$  nilpotent et de rang  $n - 1$ .

- 1) Montrer que si  $F$  est un sous-espace différent de  $\{0_E\}$  stable par  $u$ , alors  $\dim(u(F)) = \dim F - 1$ .
  - 2) Déterminer la dimension de  $\text{Im}(u^k)$  pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ .
  - 3) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.
- 1) Soit  $F$  un sous-espace différent de  $\{0_E\}$  stable par  $u$ . Notons  $u_F$  l'endomorphisme de  $F$  qui à tout  $x$  de  $F$  associe  $u_F(x) = u(x)$ . On a  $\text{Im } u_F = u(F)$ . Par ailleurs comme  $u$  est nilpotente, l'application linéaire  $u_F$  est également nilpotente. Comme  $F$  est différent de  $\{0_E\}$ , on en déduit que  $u_F$  n'est pas bijective et, puisqu'on est en dimension finie,  $u_F$  n'est pas injective. On a donc  $\dim \text{Ker } u_F \geq 1$ . On a de plus  $\text{Ker } u_F \subset \text{Ker } u$ , et comme  $u$  est de rang  $n - 1$ , on en déduit  $\dim \text{Ker } u_F \leq 1$ . Finalement  $\dim \text{Ker } u_F = 1$ , et le théorème du rang nous permet d'en déduire que  $\dim(u(F)) = \dim F - 1$ .
- 2) Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrons que  $\text{Im}(u^k)$  est un sous-espace stable par  $u$ . Soit  $y$  dans  $\text{Im}(u^k)$ . Il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $y = u^k(x)$ . Alors  $u(y) = u^{k+1}(x) = u^k(u(x))$ , ce qui montre que  $y$  appartient à  $\text{Im}(u^k)$ .  
On montre alors par récurrence (finie) que pour  $k \leq n - 1$ , on a  $\dim \text{Im}(u^k) = n - k$ . Pour  $k = 1$ , la propriété est vraie par hypothèse.  
Soit  $k \leq n - 2$  (dans le cas  $n \geq 2$ ). Supposons que  $\dim \text{Im}(u^k) = n - k$ . Alors  $\text{Im}(u^k)$  est un sous-espace vectoriel différent de  $\{0_E\}$  stable par  $u$ . Le résultat établi à la première question montre alors que  $\dim \text{Im}(u^{k+1}) = n - k - 1$ . La propriété est héréditaire.  
On a finalement montré que pour  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\dim \text{Im}(u^{k+1}) = n - k - 1$ , pour  $k \geq n$  on a  $\dim \text{Im}(u^{k+1}) = 0$ .
- 3) Le résultat précédent montre que  $\dim(\text{Im } u^{n-1}) = 1$ . Ainsi il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $u^{n-1}(x) \neq 0$ . On montre alors comme dans l'exercice 1.18 page 17, que la famille  $(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$  est une famille libre de  $E$ . Comme elle est de cardinal  $n$  dans un espace de dimension  $n$ , c'est en fait une base de  $E$ . Dans cette

base, la matrice de  $u$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 1.41

## Polytechnique PC 2005

Soit  $\Delta$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

- 1) Montrer que  $\Delta$  est linéaire, que  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$  et que  $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}[X]$ .
- 2) Montrer qu'il existe une unique base  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  telle que  $H_0 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(H_n) = H_{n-1}, H_n(0) = 0$ .
- 3) Montrer que tout polynôme  $P$  peut s'écrire  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta^n(P)(0) H_n$ .

1) • Soit  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha P + \beta Q)(X) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) - \alpha P(X) - \beta Q(X) \\ &= \alpha \Delta(P)(X) + \beta \Delta(Q)(X). \end{aligned}$$

L'application  $\Delta$  est donc linéaire.

• Soit  $P$  un polynôme dans  $\text{Ker } \Delta$ . On a alors  $P(X+1) = P(X)$ . On en déduit que  $P$ , en tant que fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , est une fonction périodique de période 1. C'est donc une fonction bornée. Mais une fonction polynôme qui est bornée est nécessairement constante. On en déduit que  $P$  est constant. Réciproquement les polynômes constants sont dans  $\text{Ker } \Delta$ . On a donc ainsi montré que  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ .

• Montrons que si  $\deg P \geq 1$ , alors  $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ . On va d'abord établir ce résultat pour les monômes.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \Delta(X^n) = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k,$$

ce qui montre que  $\Delta(X^n)$  est de degré  $n-1$ . De plus l'image d'un polynôme constant par  $\Delta$  est le polynôme nul. Soit alors  $P$  un polynôme. Il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}$

et  $(a_0, \dots, a_p)$  dans  $\mathbb{R}^{p+1}$ , où  $a_p \neq 0$ , tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ . Par linéarité de

$\Delta$ , on a  $\Delta(P)(X) = \sum_{k=0}^p a_k \Delta(X^k)$ . Comme on connaît dans cette somme le degré

de chacun des termes, que le degré du  $p$ -ème terme est strictement plus grand que celui des autres termes, on en déduit que  $\deg \Delta(P)(X) = \deg P - 1$  et donc que  $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Considérons alors l'application linéaire  $\Delta_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  définie par  $\Delta_n(P) = \Delta(P)$ . On a  $\text{Im } \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . De plus  $\text{Ker } \Delta_n = \mathbb{R}_0[X]$ , le théorème du rang montre alors que  $\text{Im } \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

On peut en déduire maintenant que  $\Delta$  est surjective.

Soit  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $n = \deg(Q) + 1$ . Alors  $Q$  est dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , et, puisque  $\text{Im } \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , il existe  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\Delta_n(P) = Q$ . Comme par définition  $\Delta_n(P) = \Delta(P)$ , on a donc trouvé un élément  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $\Delta(P) = Q$ . On a ainsi montré que  $\Delta$  est surjective. De plus, si  $\deg P \geq 1$ , alors  $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ .

2) On montre par récurrence l'existence des polynômes  $H_n$ , vérifiant les conditions demandées, avec de plus  $\deg H_n = n$ . On part de  $H_0 = 1$ . Supposons construits les polynômes  $H_0, \dots, H_n$ . Puisque  $\text{Ker } \Delta$  est de dimension 1, l'ensemble des solutions de l'équation  $\Delta(P) = H_n$  est une droite affine. Si  $P$  est une solution les autres sont de la forme  $P + K$  où  $K$  est un polynôme constant. Il existe alors une solution  $P + K$  et une seule telle que  $P(0) + K = 0$ . Notons  $H_{n+1}$  cette solution. On a bien  $\Delta(H_{n+1}) = H_n$ , et  $H_{n+1}(0) = 0$ . De plus, puisque  $\deg \Delta(H_{n+1}) = \deg H_{n+1} - 1 = n$ , on a  $\deg H_{n+1} = n + 1$ . La famille  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors une famille de polynômes échelonnés en degré. C'est une base de  $\mathbb{R}[X]$ , et c'est la seule vérifiant les conditions demandées.

3) Soit  $P$  un polynôme de degré  $p$ . Il se décompose dans la base  $(H_0, H_1, \dots, H_p)$  sous la forme  $P = \sum_{n=0}^p \alpha_n H_n$ . En appliquant  $\Delta$ , on obtient  $\Delta(P) = \sum_{n=0}^p \alpha_n \Delta(H_n)$ , et puisque  $\Delta(H_0) = 0$  et  $\Delta(H_n) = H_{n-1}$  pour  $n \in \{1, \dots, p\}$ , on obtient



$$\Delta(P) = \sum_{n=1}^p \alpha_n H_{n-1}.$$

Alors  $\Delta(P)(0) = \sum_{n=1}^p \alpha_n H_{n-1}(0)$ . Mais dans cette somme tous les termes sont nuls sauf celui correspondant à  $n = 1$  qui vaut  $\alpha_1$ . On obtient donc  $\alpha_1 = \Delta(P)(0)$ . En calculant  $\Delta^r(P)$  on obtiendra de même  $\Delta^r(P) = \sum_{n=r}^p \alpha_n H_{n-r}$ , et en prenant la valeur en 0, on trouve  $\Delta^r(P)(0) = \alpha_r$ . On en déduit  $P = \sum_{n=0}^p \Delta^n(P)(0) H_n$ . Enfin, si  $n \geq p$ , on a  $\Delta^n(P) = 0$ , ce qui permet d'écrire

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta^n(P)(0) H_n.$$

### Exercice 1.42

#### Centrale PSI 2007

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$  de même dimension  $p$ . Montrer qu'il existe un sous-espace  $H$  de  $E$  tel que  $H$  soit un supplémentaire à la fois de  $F$  et de  $G$ .

Soit  $F_1$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$  et  $G_1$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $G$ , on a alors  $F_1 \cap G_1 = \{0\}$ . La somme  $(F \cap G) + F_1 + G_1$  est donc directe. Soit  $H_1$  un supplémentaire de cette somme dans  $E$ . Il existe alors une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_r)$  soit une base de  $F \cap G$ ,  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$  soit une base de  $F_1$ ,  $(e_{p+1}, \dots, e_{2p-r})$  soit une base de  $G_1$  et  $(e_{2p-r+1}, \dots, e_n)$  soit une base de  $H_1$ . Pour  $j \in \{r+1, \dots, p\}$ , posons  $\alpha_j = e_j + e_{j+p-r}$ , et considérons le sous-espace  $H = \text{Vect}(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_p, e_{2p-r+1}, \dots, e_n)$ .

Soit  $x \in F \cap H$ . En décomposant  $x$  dans les bases de  $F$  et  $H$ , on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = \sum_{j=r+1}^p \mu_j (e_j + e_{j+p-r}) + \sum_{j=2p-r+1}^n \nu_j e_j,$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i - \sum_{j=r+1}^p \mu_j e_j = \sum_{j=r+1}^p \mu_j e_{j+p-r} + \sum_{j=2p-r+1}^n \nu_j e_j.$$

Mais le membre de gauche est dans  $F$  et celui de droite dans  $G_1 + H_1$ . Comme  $F$  et  $G_1 + H_1$  sont supplémentaires ce vecteur est nul. Il en résulte que tous les coefficients  $\lambda_i$  sont nuls, ce qui donne  $x = 0$ . Ainsi  $F \cap H = \{0\}$  et par conséquent  $F$  et  $H$  sont supplémentaires. Le même raisonnement montre que  $G$  et  $H$  sont supplémentaires.





Ce chapitre reprend le cours de première année sur les matrices et le complète avec la notion de trace. Tous les exercices de la partie assimilation et entraînement, hormis ceux utilisant la trace qui peuvent être laissés de côté dans une première lecture, sont abordables dès la première année. On peut ainsi utiliser ce chapitre dès le second semestre de la première année et il constituera également un excellent support pour les révisions estivales. Les exercices d'approfondissement seront très utiles lors de la reprise de ce chapitre en deuxième année.

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 2.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 2.1.1 Calcul dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Ce qu'il faut savoir



#### Matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Soient  $n$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel de dimension finie égale à  $np$ .

On définit pour  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$  la matrice  $E_{ij}$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de coefficient général  $a_{\ell k}$  défini par :  $a_{\ell k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La famille  $(E_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  appelée base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- Soient  $A = (a_{ij})$  une matrice dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij})$  une matrice dans  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , la matrice  $C = AB$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  dont le coefficient général  $(c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q}$  est défini par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

#### Matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Lorsque  $p = n$ , on a la règle de multiplication :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4 : E_{ij} E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell},$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

### • Matrices carrées symétriques et antisymétriques

- L'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qu'on note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de dimension égale à  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . La famille  $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ .
- L'ensemble des matrices antisymétriques qu'on note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de dimension égale à  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . La famille  $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .
- On a  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . De manière explicite, toute matrice  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'écrit sous la forme  $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

### Calcul dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

- L'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  muni de  $+$  et  $\times$  est un anneau. Il est **non commutatif** : pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on n'a pas toujours  $AB = BA$ .
- L'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas **intègre** : pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'égalité  $AB = 0$  n'entraîne pas  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
- **Algèbre  $\mathbb{K}[A]$**  Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on définit  $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ . Muni des trois lois  $+$ ,  $\times$  et  $\cdot$ , l'ensemble  $\mathbb{K}[A]$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- **Deux identités remarquables très utiles** : soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui **commutent**, c'est-à-dire telles que  $AB = BA$  et soit  $N$  dans  $\mathbb{N}$ .

○ Formule du binôme de Newton :  $(A + B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$ .

○  $A^N - B^N = (A - B) \sum_{k=1}^N B^{k-1} A^{N-k}$ .

En particulier on a  $(I_n - A) \sum_{k=0}^N A^k = I_n - A^{N+1}$ .

#### Remarque

Pour tout  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a par convention  $A^0 = I_n$ .

### • Quelques méthodes de calcul de $A^p$

Soient  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$ . Lorsqu'on veut calculer  $A^p$  :

- on teste une formule vraisemblable qu'on valide ensuite par récurrence ;
- on décompose  $A$  en somme de deux matrices qui commutent et dont les puissances sont faciles à calculer ;

- on met en évidence un polynôme  $P$  de degré le plus petit possible tel que  $P(A) = 0$ . Soit  $R_p$  le reste de la division euclidienne de  $X^p$  par  $P$ , alors  $A^p = R_p(A)$ ;
- on diagonalise  $A$  si c'est possible (voir chapitre « Réduction »).

### Exercice 2.1

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , et soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

On constate sans peine que  $A^2 = nA$ , puis que  $A^3 = n^2A$ . On va donc montrer par récurrence que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $A^k = n^{k-1}A$ .

La formule a été vérifiée au rang 1.

Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , tel que  $A^k = n^kA$ .

On a alors  $A^{k+1} = AA^k = n^{k-1}A^2 = n^{k-1}nA = n^kA$ , ce qui montre que la propriété est héréditaire.

On a ainsi montré par récurrence que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $A^k = n^{k-1}A$ .

### Exercice 2.2

#### CCP PSI 2005

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  où  $a_{ij} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{ii} = 0$ . Calculer  $A^p$  pour  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ .



On a  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On peut alors choisir d'écrire  $A$  sous la forme

$A = B - I_n$  où  $B$  est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme  $B$  et  $I_n$  commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer  $A^p$ . D'après l'exercice précédent, pour tout  $k \geq 1$  :  $B^k = n^{k-1}B$ , (attention : le fait que la formule n'est pas vraie pour  $k = 0$  a son importance). On a alors, pour tout  $p \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
 A^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k (-I_n)^{p-k} = (-1)^p I_n + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} n^{k-1} (-1)^{p-k} B \\
 &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} n^k (-1)^{p-k} \right) B \\
 &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k (-1)^{p-k} - (-1)^p \right) B \\
 &= (-1)^p I_n + \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} B.
 \end{aligned}$$

## Exercice 2.3

CCP MP 2007

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$ , pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

*Indication de la rédaction :* on cherchera un polynôme annulateur de  $A$  de degré 2.

Commençons par calculer  $A^2$ . On obtient  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$ . On remarque alors que  $A^2 = 5A - 6I_n$ . Le polynôme  $P(X) = X^2 - 5X + 6$  est donc un polynôme annulateur de  $A$ .

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Il existe un unique  $(a_n, b_n)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et un unique  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $X^n = Q(X)P(X) + a_nX + b_n$  (division euclidienne de  $X^n$  par  $P$ ). En remarquant que  $P(2) = P(3) = 0$ , on détermine  $a_n$  et  $b_n$  :

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases}.$$

On en déduit  $a_n = 3^n - 2^n$  et  $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ . Ainsi, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on a :

$$A^n = Q(A)P(A) + a_nA + b_nI_n = a_nA + b_nI_n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_n.$$

On en déduit  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$ .

## 2.1.2 Matrices nilpotentes

## Ce qu'il faut savoir

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $A$  est nilpotente lorsqu'il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .

*Exemple :* Les matrices triangulaires strictement supérieures, ou strictement inférieures, sont nilpotentes.

**Indice de nilpotence :** on appelle indice de nilpotence de  $A$  le plus petit entier  $p$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ .

- Soit  $A$  une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , son indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $n$ . Voir exercice 1.18 page 17 pour la démonstration de ce résultat.

## Exercice 2.4

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer que  $A$  est nilpotente d'indice 3.

- 2) Montrer qu'il n'existe pas  $X$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X^2 = A$ .
- 1) Un simple calcul montre que  $A^2 \neq 0$  et  $A^3 = 0$ .
- 2) Supposons qu'il existe une matrice  $X$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X^2 = A$ . On a alors  $X^6 = 0$ , ce qui montre que  $X$  est nilpotente. On sait alors que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à 3. On a donc  $X^3 = 0$  et par suite  $X^4 = X^3 X = 0$ , ce qui contredit  $X^4 = A^2 \neq 0$ . On en déduit que l'équation matricielle  $X^2 = A$  n'a pas de solution.

### 2.1.3 Matrices et applications linéaires

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

- Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ . Soient  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un unique élément

$(m_{i1}, \dots, m_{ip})$  dans  $\mathbb{K}^p$  tel que  $u(e_i) = \sum_{j=1}^p m_{ij} f_j$ .

- On appelle alors matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  la matrice  $M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u)$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  définie par :

$$M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

- On retiendra que les colonnes de la matrice de  $u$  (dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ ), sont données par les coordonnées des vecteurs  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .
- Lorsque  $F = E$  et  $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ , on note  $M_{\mathcal{B}_E}(u)$  la matrice  $M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u)$ .
- Soit  $(x, y)$  dans  $E \times F$ , il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et il

existe  $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$  tel que  $y = \sum_{i=1}^p y_i f_i$ . Posons  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = {}^t(y_1, \dots, y_p)$ .

On a  $y = u(x) \Leftrightarrow Y = M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(u)X$ .

- Soit  $\mathcal{B}_E$  une base fixée de  $E$ .

L'application de  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  dans  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$  qui, à  $u$  associe  $M_{\mathcal{B}_E}(u)$ , est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, pour tout  $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ ,

on a

$$M_{B_E}(g \circ f) = M_{B_E}(g) \times M_{B_E}(f).$$

**Application linéaire canoniquement associé à une matrice** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On appelle application linéaire canoniquement associé à  $A$ , l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  vers  $\mathbb{K}^p$  qui, à tout  $X \in \mathbb{K}^n$ , considéré comme vecteur colonne, associe  $AX$ .

### Exercice 2.5

#### D'après Centrale PC 2006

Soient  $A = X^4 + 1$  et  $B = X^4 + X$ , soit  $f$  l'application qui à  $P$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

- 1) Montrer que  $f$  est linéaire
  - 2) Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique.
  - 3) Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .
- 1) Soient  $P_1$  et  $P_2$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $R_1$  et  $Q_1$  respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de  $AP_1$  par  $B$ . Soit  $R_2$  et  $Q_2$  respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de  $AP_2$  par  $B$ . On a  $A(\alpha P_1 + \beta P_2) = (Q_1 + Q_2)(\alpha P_1 + \beta P_2) + \alpha R_1 + \beta R_2$ . Comme  $\deg(\alpha R_1 + \beta R_2) \leq \min(\deg(R_1), \deg(R_2))$ , on a  $\deg(\alpha R_1 + \beta R_2) < 4$ , ce qui par unicité du reste de la division euclidienne montre que  $\alpha R_1 + \beta R_2$  est le reste de la division euclidienne de  $A(\alpha P_1 + \beta P_2)$  par  $B$ . On a donc  $f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha R_1 + \beta R_2 = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2)$ . On a ainsi montré que  $f$  est linéaire.
- 2) On calcule les images par  $f$  des vecteurs de la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ . À partir des divisions euclidiennes :  $(X^4 + 1) = (X^4 + X) + (-X + 1)$ ,  $X(X^4 + 1) = X(X^4 + X) + (-X^2 + X)$ ,  $X^2(X^4 + 1) = X^2(X^4 + X) + (-X^3 + X^2)$ ,  $X^3(X^4 + 1) = (X^3 - 1)(X^4 + X) + (X^3 + X)$ , on obtient  $f(1) = 1 - X$ ,  $f(X) = X - X^2$ ,  $f(X^2) = X^2 - X^3$ ,  $f(X^3) = X^3 + X$ . On en déduit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3) Soit  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Le vecteur  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est dans le noyau de  $f$  si et seulement si  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

En additionnant toutes ces équations, on trouve  $2x_4 = 0$ . On en déduit que  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  ce qui montre que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . le théorème du rang montre ensuite que  $\text{Im } f = \mathbb{R}_3[X]$ .

### Remarque

On peut aussi calculer le déterminant de  $\mathcal{M}_B(f)$  et constater qu'il n'est pas nul (il vaut 2).

### Exercice 2.6

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $f^2(x_0) \neq 0$ . Soit  $\mathcal{B} = (f^2(x_0), f(x_0), x_0)$ . Montrons que cette famille est libre.

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$ . En appliquant  $f^2$  à cette relation, compte tenu du fait que  $f^3 = 0$ , on obtient  $\alpha f^2(x_0) = 0$ . On en déduit  $\alpha = 0$ . En appliquant cette fois  $f$  à la relation  $\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$  on obtient  $\beta = 0$ , et finalement  $\gamma = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est libre et de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de  $E$ . Dans cette base la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} f^3(x) & f^2(x) & f(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f^2(x) \\ f(x) \\ x \end{matrix}.$$

## 2.1.4 Matrices inversibles et calcul de l'inverse

### Ce qu'il faut savoir

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée.

- On dit que  $A$  est inversible lorsqu'il existe une matrice  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .

Dans ce cas  $B$  est unique et on l'appelle l'inverse de  $A$  et on la note  $A^{-1}$ .

**Notation** On note  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  et inversibles.

- Soit  $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$ , la matrice  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Si  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible, alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , la matrice  $A^k$  est inversible et  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ , la matrice  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

## Différentes caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- il existe  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $BA = I_n$  ;
- il existe  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$  ;
- le noyau de  $A$  est réduit à 0, c'est-à-dire la seule solution de l'équation  $AX = 0$  pour  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , est la matrice colonne  $X = 0$  ;
- elle est la matrice dans une certaine base d'un endomorphisme bijectif ;
- son rang est égal à  $n$  ;
- son déterminant est non nul (voir chapitre « Déterminants »).

## Quelques méthodes pour déterminer l'éventuel inverse d'une matrice $A$

- Exhiber une matrice  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$ .
- Rechercher un polynôme  $P$  tel que  $P(A) = 0$  et  $P(0) \neq 0$ . En effet, soit  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_kX^k$  un tel polynôme, alors

$$-a_0I_n = a_1A + \dots + a_kA^k = A(a_1I_n + \dots + a_kA^{k-1}),$$

et par conséquent  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_1I_n + \dots + a_kA^{k-1})$ .

- Résoudre le système linéaire  $AX = Y$ , on obtient alors  $X = A^{-1}Y$  (Voir chapitre « Equations linéaires ») ;
- Calculer la transposée de la comatrice<sup>1</sup>.

### Remarque

Les méthodes de détermination permettent en général d'assurer l'inversibilité.

### Exercice 2.7

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  telles que  $A + B = AB$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible.

En l'absence d'indications supplémentaires sur  $A$  et  $B$  on ne peut qu'essayer de deviner l'éventuel inverse de  $I_n - A$ . Remarquons que la relation proposée est symétrique en  $A$  et  $B$ , la matrice  $I_n - B$  doit elle aussi être inversible. En effectuant le produit

1. En dehors des cas  $n = 2$  et  $n = 3$ , cette dernière méthode, donnant lieu en général à des calculs très lourds, doit être considérée comme théorique.



$(I_n - A)(I_n - B)$ , on obtient  $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$ . La matrice  $I_n - A$  est donc inversible et son inverse est  $I_n - B$ .

### Remarque

L'inverse à gauche de  $I_n - A$  étant aussi son inverse à droite, on peut déduire du résultat précédent que  $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$ . En développant le terme de gauche on obtient  $A + B = BA$ , ce qui reporté dans la relation de départ montre que  $AB = BA$ . On a ainsi montré que  $A + B = AB$  entraîne que  $A$  et  $B$  commutent.

### Exercice 2.8

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

On va chercher un polynôme annulateur de  $A$ . On calcule  $A^2$  et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On constate alors que  $A^2 = 2A + 3I_4$ . On déduit de cette égalité la relation  $A \left( \frac{1}{3}(A - 2I_4) \right) = I_4$ . Ceci montre que  $A$  est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2.9

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

1) Soit  $N$  une matrice nilpotente dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que les matrices  $I_n - N$  et  $I_n + N$  sont inversibles.

2) On note  $A$  la matrice définie par  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que

$I_n + A$  est inversible et déterminer son inverse.

1) Il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $N^p = 0$ . On a ainsi  $(I_n - N) \left( \sum_{i=0}^{p-1} N^i \right) = I_n - N^p = I_n$ .

La matrice  $I_n - N$  est donc inversible et a pour matrice inverse  $\sum_{i=0}^{p-1} N^i$ . Si  $N$  est nilpotente alors  $-N$  est également nilpotente de même indice de nilpotence et donc  $I_n + N$  est inversible et a pour matrice inverse  $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i N^i$ .

2) On peut expliciter la matrice  $I_n + A$  et l'inverser par des manipulations sur les lignes. On peut aussi utiliser le résultat précédent en remarquant que la matrice  $A$  est nilpotente d'indice de nilpotence  $n$ . De plus, on calcule sans difficulté ses puissances : pour  $k$  dans  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , tous les coefficients  $(a_{ij})$  de  $A$  sont nuls sauf ceux dont les indices vérifient  $j - i = k$  qui sont égaux à 1. En d'autres termes, pour  $k$  dans  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{\substack{k+1\text{-ème} \\ \text{colonne}}}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & \leftarrow (n-k)\text{-ième ligne} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $I_n + A$  est inversible et a pour matrice inverse  $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A^i$ . Ce qui, de façon plus explicite, donne :

$$(I_n + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2.10

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{2}{n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $M$  est inversible et donner son inverse.

Cette matrice est triangulaire supérieure et aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul, elle est donc de rang  $n + 1$  et par conséquent elle est inversible. La matrice se prête mal à des manipulations sur les lignes. Les coefficients binomiaux font penser à la formule du binôme de Newton et on va interpréter  $M$  comme la matrice de l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  dans lui-même qui à  $P$  associe  $f(P) = P(X+1)$ . On constate qu'en notant  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ , on a  $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ . L'application linéaire  $f$  est bijective puisque  $M$  est inversible et sa réciproque  $g$  est l'application linéaire qui à  $P$  dans  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  associe le polynôme  $P(X-1)$ . On a donc  $M^{-1} = M_{\mathcal{B}}(g)$ . On obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{2}{n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

## 2.1.5 Matrices de passage

## Ce qu'il faut savoir

Soient  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

- La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $P$  de la famille  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  : sa  $j$ -ème colonne est constituée des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  du  $j$ -ème vecteur de la base  $\mathcal{B}'$ .
- La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est égale à la matrice  $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ .

### • Formules de changement de bases

On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  à la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ .

○ Soit  $x$  dans  $E$ . Il existe  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $(x'_1, \dots, x'_n)$

dans  $\mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ . Soit  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  et soit  $X' = {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$ .

On a alors  $X = P X'$ .

○ Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et de matrice  $M'$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a  $M' = P^{-1} M P$ .

### Exercice 2.11

#### Centrale PC 2006

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

On note  $\mathcal{B}' = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ , où  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ .

1) Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

2) Donner les matrices de passages de la base canonique vers  $\mathcal{B}'$  et de  $\mathcal{B}'$  vers la base canonique.

*Indication de l'examinateur :* on remarquera que  $1 = X + (1 - X)$ .

1) Montrons que la famille  $\mathcal{B}'$  est libre. Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k P_k = 0. \quad (*)$$

Remarquons que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , le réel 0 est racine d'ordre  $k$  de  $P_k$  alors qu'il n'est pas racine de  $P_0$ . En évaluant l'égalité  $(*)$  en 0, on obtient donc  $\alpha_0 = 0$ . En dérivant  $(*)$  puis en évaluant à nouveau en 0, on obtient cette fois  $\alpha_1 = 0$ . En réitérant ce procédé, on obtient que, pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\alpha_k$  est nul. La famille  $\mathcal{B}'$  est libre et de cardinal égal à la dimension de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ .

2) • Notons  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ , la matrice de passage<sup>2</sup> de la base canonique  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}' = (P_0, \dots, P_n)$ . Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on obtient sans difficulté les coordonnées du polynôme  $P_k$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . En effet, on a pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$P_j(X) = X^j(1 - X)^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^i X^{i+j} = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

2. Attention au décalage d'indice :  $a_{ij}$  est le coefficient de  $P_{j-1}$  sur  $X^{i-1}$

On en déduit :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, a_{ij} = \begin{cases} \binom{n+1-j}{i-j} (-1)^{i-j} & \text{pour } j \leq i \leq n+1, \\ 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq j-1 \end{cases}.$$

• Déterminons la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ . Pour cela exprimons chaque  $X^j$  en fonction des vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$ . On déduit de la relation

$$1 = X + (1 - X), \text{ que pour tout } p \text{ entier on a } 1^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} X^k (1 - X)^{p-k}. \text{ D'où :}$$

$$\begin{aligned} X^{n-p} &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} X^{n-p+k} (1 - X)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} P_{n-p+k}(X) \\ &= \sum_{i=n-p}^n \binom{p}{i+p-n} P_i(X) \quad (i = n - p + k). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $X^j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} P_i(X)$ . En notant

$b_{ij}$  le coefficient général de la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  vers  $\mathcal{B}$ , on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, b_{ij} = \begin{cases} \binom{n+1-j}{i-j} & \text{pour } j \leq i \leq n+1 \\ 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq j-1 \end{cases}.$$

### Exercice 2.12

#### TPE PC 2005, CCP MP 2006

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3 et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soient  $H$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D$  la droite  $x = y/2 = z/3$ .

1) Montrer que  $H \oplus D = E$ .

2) Trouver la matrice de la projection sur  $H$  parallèlement à  $D$ .

1) Un vecteur  $xe_1 + ye_2 + ze_3$  appartient à  $H \cap D$  si et seulement si ses coordonnées

$$x, y \text{ et } z \text{ sont solution du système linéaire : } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x = y \\ 3x = z. \end{cases} \text{ Il en résulte que}$$

$H \cap D = \{0_E\}$ . En outre,  $\dim H + \dim D = \dim E$ , d'où  $H \oplus D = E$ .

2) Notons  $p$  le projecteur sur  $H$  parallèlement à  $D$  et  $M$  sa matrice dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $(e'_1, e'_2)$  une base de  $H$  et  $e'_3$  un vecteur directeur de  $D$ . La relation  $H \oplus D = E$  assure que  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ . Par ailleurs la matrice  $M'$  de  $p$  dans cette

nouvelle base est donnée par :  $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On sait également que, en notant  $P$  la matrice de passage de  $(e_1, e_2, e_3)$  à  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  que l'on a :  $M' = P^{-1}MP$ .

En choisissant par exemple  $e'_1 = e_1 - e_3$ ,  $e'_2 = e_2 - e_3$  et  $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ , on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit  $M = PM'P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

### Remarque

Pour déterminer la matrice de  $P$ , on aurait pu procéder comme dans l'exercice 1.13, page 12.

## 2.1.6 Rang d'une matrice



### Ce qu'il faut savoir

Soient  $(n, p)$  dans  $\mathbb{N}^2$  et  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- On appelle rang de  $M$  le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  de base  $\mathcal{B}_E$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  de base  $\mathcal{B}_F$ . Si  $u$  est une application linéaire de  $E$  vers  $F$  telle que  $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ , alors on a  $\text{rg}(u) = \text{rg}(M)$ .
- On a  $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tM)$ . c'est-à-dire que le rang de  $M$  est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes
- Si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{rg}(PM) = \text{rg}(M)$ . Si  $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ , alors  $\text{rg}(MQ) = \text{rg}(M)$ .

### Exercice 2.13

#### CCP MP 2006 et 2007

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , soient  $u$  et  $v$  les applications linéaires définies sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1).$$

- 1) Déterminer le rang de  $f = u - v$  à partir de sa matrice.
- 2) Retrouver ce résultat par une autre méthode.

- 1) Cherchons l'image par  $f = u - v$  des vecteurs de  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$f(X^k) = (X+1)^k - (X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1 - (-1)^i) X^{k-i}.$$

On constate en particulier que, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \geq i$  on a  $a_{ij} = 0$  et pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a  $a_{i,i+1} = 2i$ . On en déduit que la matrice de  $f$  dans la base canonique est de la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & 0 & 4 & a_{2,4} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & & & & \ddots & 2n \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le rang de  $f$  est  $n$ .

- 2) On peut étudier le noyau de  $f$  puis utiliser le théorème du rang. Soit  $P$  un polynôme tel que  $f(P) = 0$ . Alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on a  $P(x+1) = P(x-1)$ , ou encore, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on a  $P(x+2) = P(x)$ . Le polynôme  $P$  est donc périodique de période 2. On montre alors que  $P$  est constant (il est de degré inférieur ou égal à  $n$  et il prend  $n+1$  fois la valeur  $P(0)$ ). On en déduit que  $\text{Ker}(P) = \text{Vect}(1)$ , le théorème du rang montre alors que  $\text{rg}(f) = n+1-1 = n$ .

### Exercice 2.14

Étudier en fonction de  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  le rang de la matrice  $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ .

On ne modifie pas le rang d'une matrice en ajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes. On essaie ainsi par manipulations sur les colonnes de transformer  $A_\lambda$  en une matrice triangulaire. On effectue successivement les opérations :  $c_4 \leftarrow c_4 - c_2$ , puis  $c_3 \leftarrow c_3 - c_1$  et enfin  $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$  ; on a alors obtenu une matrice dont les deux premières lignes ont la forme souhaitée ; l'opération  $c_4 \leftarrow c_4 - c_3$  permet d'obtenir ensuite une matrice triangulaire inférieure :

$$\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & c_4 - c_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 & -\lambda - 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 - c_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 & -2\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si  $\lambda = -1$ , alors le rang de  $A_\lambda$  est 3, si  $\lambda \neq -1$ , alors le rang de  $A_\lambda$  est 4.

## 2.1.7 Matrices semblables

### Ce qu'il faut savoir

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

• On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables lorsqu'il existe  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = P^{-1}BP$ .

• **Caractérisation** : les matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables si et seulement si il existe un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , deux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  de  $E$ , un endomorphisme  $f$  de  $E$  tels que  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f)$  et  $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(f)$ .

#### • Propriétés

◦ Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même rang, même déterminant et même trace. La réciproque est fausse.

◦ Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables. Si de plus  $A$  est inversible, alors  $B$  est inversible et pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables.

#### Remarque

En pratique, pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, on utilise la contraposée de l'une de ces implications.

### Exercice 2.15

#### Navale MP 2006

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

2) Montrer que  $A$  et  $C$  sont semblables.

*Indication de la rédaction* : on cherchera la matrice de l'endomorphisme associé à  $C$  dans une nouvelle base obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique.

1) Les matrices  $A$  et  $B$  n'ont pas même trace, elles ne sont donc pas semblables.

2) Soient  $c$  et  $a$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^4$  de matrices respectives  $C$  et  $A$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$ . On a alors :

$$\begin{array}{llll} c(e_1) = 0, & c(e_2) = e_1, & c(e_3) = 0, & c(e_4) = e_3. \\ a(e_1) = 0, & a(e_2) = 0, & a(e_3) = e_1, & a(e_4) = e_2. \end{array}$$



On constate ainsi que dans la nouvelle base  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  définie par :

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_3, \quad e'_3 = e_2, \quad e'_4 = e_4,$$

l'endomorphisme  $c$  a pour matrice  $A$ . Ceci montre que  $A$  et  $C$  sont semblables.

### Exercice 2.16

#### CCP PSI 2005

Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables ?

Remarquons que ces deux matrices ont même rang, même trace et même déterminant, ce qui ne permet pas de trancher. Comme  $A$  et  $B$  sont particulièrement simples, il est naturel de s'intéresser à leur carré. On constate que  $A^2 \neq 0$  mais que  $B^2 = 0$ . Or s'il existait  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ , on aurait alors  $A^2 = P^{-1}BP P^{-1}BP = P^{-1}B^2P = 0$ . Il en résulte que  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

#### Remarque

Plus généralement, on montre que si deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, alors les polynômes  $P$  tels que  $P(A) = 0$  vérifient également  $P(B) = 0$ .

### Exercice 2.17

Soient  $A$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  sont semblables.

On veut trouver une matrice  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $BA = P^{-1}ABP$ . La matrice  $A$  étant inversible, il est naturel de voir si l'on peut exprimer une telle matrice  $P$  au moyen de  $A$ . On constate en fait que  $P = A$  convient car  $A^{-1}ABA = BA$ . On a ainsi montré que  $AB$  et  $BA$  sont semblables.

## 2.1.8 Trace d'une matrice carrée

### Ce qu'il faut savoir

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On appelle trace de  $A$  le réel noté  $\text{tr}(A)$  défini par  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .
- **Propriétés :** soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{K}^2$ .

- 1)  $\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr} A + \beta \text{tr} B$  ;
- 2)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  ;
- 3)  $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$  ;
- 4) pour  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  on a  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ .

### • Trace d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Le réel  $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$  : on l'appelle trace de  $f$  et on le note  $\text{tr}(f)$ .

### Exercice 2.18

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Déterminer la trace des endomorphismes suivants :

- 1) une homothétie  $h$  de rapport  $\lambda$ ,
- 2) un projecteur  $p$ ,
- 3) une symétrie  $s$ .

- 1) Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . La matrice de  $h$  dans  $\mathcal{B}$  est  $\lambda I_n$ . On en déduit que  $\text{tr}(h) = n\lambda$ .
- 2) On sait que  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ . Soit alors  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im } p$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\text{Ker } p$ . La famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Comme pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $p(e_i) = e_i$  et pour tout  $i$  dans  $\llbracket r+1, n \rrbracket$ ,  $p(e_i) = 0_E$ , la matrice de  $p$  est de la forme  $M_{\mathcal{B}}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ . On en déduit que  $\text{tr}(p) = r = \text{rg}(p)$ .
- 3) On sait que  $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - s) \oplus \text{Ker}(\text{Id}_E + s)$ . Soit alors  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Ker}(\text{Id}_E - s)$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\text{Ker}(\text{Id}_E + s)$ . La famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Comme pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $s(e_i) = e_i$  et pour tout  $i$  dans  $\llbracket r+1, n \rrbracket$ ,  $s(e_i) = -e_i$ , la matrice de  $p$  est de la forme  $M_{\mathcal{B}}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array} \right)$ .  
On en déduit que  $\text{tr}(s) = \dim(\text{Ker}(\text{Id}_E - s)) - \dim(\text{Ker}(\text{Id}_E + s)) = 2r - n$ .

### Ce qu'il faut savoir

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

## Exercice 2.19

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1) Montrer que l'ensemble  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(M) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et en déterminer la dimension.
- 2) Donner une base de  $H$ .
- 3) Soit  $\phi$  l'application, qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , associe

$$\phi(M) = \operatorname{tr}(M)I_n - M.$$

Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et déterminer sa trace.

- 4) Etablir que  $\phi \circ \phi = (n - 2)\phi + (n - 1)\operatorname{Id}$ . En déduire que pour  $n \geq 2$ , l'application  $\phi$  est inversible et déterminer son inverse.
- 1) La trace est une application linéaire et l'ensemble  $H$  est par définition son noyau, donc  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Comme la trace est une forme linéaire non nulle, le sous-espace vectoriel  $H$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , donc  $\dim H = n^2 - 1$ .
  - 2) Pour trouver une base de  $H$ , il est naturel de commencer par examiner quels sont les éléments de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont dans  $H$  : ce sont toutes les  $E_{ij}$  à diagonales nulles (c'est-à-dire telles que  $i \neq j$ ). On a déjà ainsi une famille libre de cardinal  $n^2 - n$  qui est dans  $H$ . On peut compléter cette famille par les matrices de la forme  $E_{11} - E_{ii}$  avec  $i$  dans  $\llbracket 2, n \rrbracket$ . On obtient alors une famille  $\mathcal{B}_H$  d'éléments de  $H$  qui est libre et de cardinal  $n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ , c'est donc une base de  $H$ .
  - 3) L'application  $\phi$  est à image dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La linéarité de la trace entraîne la linéarité de  $\phi$ . Pour calculer la trace de  $\phi$ , on cherche une base adaptée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On constate que si  $M$  est dans  $H$ , alors  $\phi(M) = -M$ . En particulier pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{B}_H$  on a  $\phi(M) = -M$ . Comme  $I_n$  n'est pas dans  $H$  et  $H$  est un hyperplan, la famille  $\mathcal{B}$  obtenue en complétant  $\mathcal{B}_H$  par  $I_n$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \left( \begin{array}{ccc|c} & \mathcal{B}_H & & I_n \\ \hline -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & n-1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathcal{B}_H \\ I_n \end{array}$$

et on en déduit que  $\operatorname{tr} \phi = (-1)(n^2 - 1) + n - 1 = n - n^2$ .

- 4) Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi(M) &= \phi(\operatorname{tr}(M)I_n - M) = \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(M)I_n - M)I_n - (\operatorname{tr}(M)I_n - M) \\ &= (n - 2)\operatorname{tr}(M)I_n + M = (n - 2)\phi(M) + (n - 1)M. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\phi \circ \phi = (n-2)\phi + (n-1)\text{Id}$ . On peut encore écrire cette relation sous la forme  $\phi \circ (\phi - (n-2)\text{Id}) = (n-1)\text{Id}$ . L'application  $\phi$  est donc bijective, d'application réciproque  $\frac{1}{n-1}(\phi - (n-2)\text{Id})$ .

### Remarque

Pour déterminer  $\phi^{-1}$  on a utilisé un polynôme annulateur de  $\phi$ . On peut aussi obtenir  $\phi^{-1}$  directement en résolvant pour  $N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  donnée, l'équation  $(E) \text{tr}(M)I_n - M = N$ . Remarquons que pour résoudre  $(E)$ , il suffit de déterminer la trace de la matrice  $M$ . Pour cela, on commence par appliquer la trace à  $(E)$ . On obtient  $\text{tr}(M)n - \text{tr}(M) = \text{tr}(N)$ , d'où  $\text{tr}(M) = \frac{\text{tr}(N)}{n-1}$ . On en déduit alors que  $M = \frac{\text{tr}(N)}{n-1}I_n - N$ .

## 2.1.9 Matrices par blocs

### Ce qu'il faut savoir

Soient  $(n, p)$  dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  et  $(n_1, n_2, p_1, p_2)$  dans  $(\mathbb{N}^*)^4$  tels que  $n_1 + n_2 = n$  et  $p_1 + p_2 = p$ .

• Soient  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n_1, p_1}(\mathbb{K})$ ,  $B$  dans  $\mathcal{M}_{n_1, p_2}(\mathbb{K})$ ,  $C$  dans  $\mathcal{M}_{n_2, p_1}(\mathbb{K})$  et  $D$  dans  $\mathcal{M}_{n_2, p_2}(\mathbb{K})$ . Soit  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$  définie par

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

on dit que  $M$  est définie par blocs.

• Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matrices pour lesquelles on dispose d'écriture par blocs de **tailles compatibles** pour que tous les produits aient un sens :

$$M_1 = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) \quad M_2 = \left( \begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right)$$

Alors on sait donner une écriture par blocs du produit  $M_1 M_2$  et on obtient :

$$M_1 M_2 = \left( \begin{array}{c|c} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ \hline C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{array} \right).$$

• **Exemple** Soit  $r$  un entier tel que  $r \leq \min(n, p)$ , on note  $J_{npr}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par :

$$J_{npr} = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

• **Caractérisation du rang à partir des matrices  $J_{npr}$ .** Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ . La matrice  $M$  est de rang  $r$  si et seulement si il existe  $U$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $V$  dans  $\text{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $M = U J_{npr} V$

**Remarque**

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes lorsqu'il existe  $P$  dans  $\text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q$  dans  $\text{GL}_q(\mathbb{K})$  tels que :  $A = PBQ$ . La propriété précédente s'énonce alors :  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est de rang  $r$  si et seulement si  $M$  est équivalente à  $J_{nr}$ .

**Exercice 2.20**

Soient  $A$  dans  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $B$  dans  $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$  et  $C$  dans  $\mathcal{M}_{mq}(\mathbb{R})$ . On note  $r$  le rang de  $A$  et  $s$  le rang de  $B$ .

1) Montrer que le rang de la matrice  $M_1 = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$  est égal à  $r+s = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

2) Comparer le rang de la matrice  $M_2 = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$  avec  $r+s$ .

3) On suppose que  $B$  est inversible. Montrer qu'alors le rang de la matrice  $M_2 = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$  est encore égal à  $r+s = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

1) Nous allons donner deux méthodes.

• Première méthode, on travaille sur les colonnes de  $M_1$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $u_j$  le  $j$ -ième vecteur colonne de  $A$  et  $U_j = \begin{pmatrix} u_j \\ 0 \end{pmatrix}$  le  $j$ -ième vecteur colonne de  $M_1$ . Pour  $k \in \{1, \dots, q\}$ , notons  $v_k$  le  $k$ -ième vecteur colonne de  $B$  et  $V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ v_k \end{pmatrix}$  le  $k$ -ième vecteur colonne de  $M_1$ .

Les vecteurs colonnes de  $M_1$  sont donc  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_q$ .

Soit  $(u_{j_1}, \dots, u_{j_r})$  une famille libre extraite de  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_{k_1}, \dots, v_{k_s})$  une famille libre extraite de  $(v_1, \dots, v_q)$ .

Montrons que la famille  $(U_{j_1}, \dots, U_{j_r}, V_{k_1}, \dots, V_{k_s})$  est une famille libre. Si

l'on a  $\sum_{k=1}^r \lambda_k U_{j_k} + \sum_{k=1}^s \mu_k V_{j_k} = 0$ , on obtient  $\sum_{k=1}^r \lambda_k U_{j_k} = -\sum_{k=1}^s \mu_k V_{j_k}$ . En

prenant les  $p$  dernières coordonnées, on a alors  $0 = -\sum_{k=1}^s \mu_k v_{j_k}$ . Par ailleurs,

la famille  $(v_{k_1}, \dots, v_{k_s})$  est libre, il en résulte que les  $\mu_k$  sont nuls. On en déduit

alors  $\sum_{k=1}^r \lambda_k U_{j_k} = 0$ , d'où  $\sum_{k=1}^r \lambda_k u_{j_k} = 0$ . Or, la famille  $(u_{j_1}, \dots, u_{j_r})$  est libre,

les  $\lambda_k$  sont donc nuls. Ainsi, la famille  $(U_{j_1}, \dots, U_{j_r}, V_{k_1}, \dots, V_{k_s})$  est libre et par conséquent  $\text{rg } M \geq r+s = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

Soit maintenant une famille  $\mathcal{F}$  de  $r + s + 1$  vecteurs colonnes de  $M_1$ . Elle contient nécessairement au moins  $r + 1$  vecteurs colonnes dans la matrice  $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$  ou au moins  $s + 1$  vecteurs colonnes dans  $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ . Dans le premier cas, il y a au moins  $r + 1$  vecteurs colonnes de  $A$  et la famille  $\mathcal{F}$  est liée car elle contient une famille liée. Dans le deuxième cas, il y a au moins  $s + 1$  vecteurs colonnes de  $B$  et la famille  $\mathcal{F}$  est liée.

Finalement  $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

• **Deuxième méthode** : on se ramène à une matrice triangulaire par blocs.

La matrice  $A$  est de rang  $r$ , il existe donc  $P_A$  dans  $\text{GL}_m(\mathbb{R})$  et  $Q_A$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $P_A A Q_A = J_{mnr}$ . La matrice  $B$  est de rang  $s$ , il existe donc  $P_B$  dans  $\text{GL}_p(\mathbb{R})$  et  $Q_B$  dans  $\text{GL}_q(\mathbb{R})$  telles que  $P_B B Q_B = J_{pqs}$ . Soit alors les matrices

$P = \left( \begin{array}{c|c} P_A & 0 \\ \hline 0 & P_B \end{array} \right)$  et  $Q = \left( \begin{array}{c|c} Q_A & 0 \\ \hline 0 & Q_B \end{array} \right)$ . Ces matrices sont inversibles :  
 $P^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} P_A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_B^{-1} \end{array} \right)$  et  $Q^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} Q_A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q_B^{-1} \end{array} \right)$ , et de plus :

$$\left( \begin{array}{c|c} P_A & 0 \\ \hline 0 & P_B \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} Q_A & 0 \\ \hline 0 & Q_B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} J_{mnr} & 0 \\ \hline 0 & J_{pqs} \end{array} \right).$$

On en déduit que  $M_1$  est équivalente à une matrice de rang  $r + s$ . On a donc  $\text{rg } M_1 = r + s$ .

- 2) Là aussi on peut utiliser les deux méthodes précédentes, nous allons vous présenter le travail sur les colonnes.

Pour  $k \in \{1, \dots, q\}$ , notons  $w_k$  le  $k$ -ième vecteur colonne de  $C$ . On peut refaire la première partie du raisonnement précédent en notant cette fois  $V_k = \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}$ .

On obtient encore  $\text{rg } M \geq r + s = \text{rg } A + \text{rg } B$ . L'inégalité peut être stricte il suffit de prendre  $A = 0$ ,  $B = 0$  et  $C \neq 0$ .

- 3) Supposons que  $B$  est inversible. On a donc  $p = q = s$ . Soit une famille de  $r + s + 1$  vecteurs colonnes de  $M$ . Comme on peut prendre au plus  $s$  vecteurs dans  $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ , il y a au moins  $r + 1$  vecteurs de cette famille dans la matrice  $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors il y a au moins  $r + 1$  vecteurs dans  $A$  et la famille est liée. Finalement  $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

### Remarque

On peut aussi se ramener plus directement à la question précédente en remarquant que

$$\left( \begin{array}{c|c} I_m & -CB^{-1} \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

Comme la matrice  $\left(\begin{array}{c|c} I_m & -CB^{-1} \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$  est inversible  $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$  et  $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$  ont même rang.

### Exercice 2.21

#### CCP MP 2006

Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$  décomposée par blocs :  $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$  avec  $A$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$ .

Remarquons tout d'abord que comme  $A$  est dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , la proposition à démontrer est équivalente à :  $\text{rg}(M) = n \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$ .

On va essayer de multiplier  $M$  par des matrices inversibles jusqu'à obtenir une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont assez simples.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline CA^{-1} & D \end{array}\right).$$

On a ensuite :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline CA^{-1} & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0 & -I_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline CA^{-1} & CA^{-1}B - D \end{array}\right).$$

Comme toutes les matrices par lesquelles on a multiplié  $M$  sont inversibles, le rang de  $M$  est égal au rang de  $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline CA^{-1} & CA^{-1}B - D \end{array}\right) = \text{rg } I_n + \text{rg}(CA^{-1}B - D)$ . On en déduit  $\text{rg}(M) = n \Leftrightarrow \text{rg}(CA^{-1}B - D) = 0 \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$ .

## 2.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### Exercice 2.22

#### CCP MP 2006

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n > 1$ .

- 1) Montrer que  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , de rang 1, n'est pas forcément un projecteur.
- 2) Montrer que  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.
- 3) Trouver une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constituée de projecteurs.

- 1) On choisit  $E = \mathbb{R}^2$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  ayant pour matrice  $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dans la base canonique. Il est clair que  $\text{rg } f = 1$ . Mais  $f^2 = 0 \neq f$ , ce qui montre que  $f$  n'est pas un projecteur.

- 2) Soit  $f$  de rang 1 et de trace 1. Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $\text{Ker } f$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur  $e_n$  de  $E$  tel que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Soit  $M'_f$  la matrice de  $f$  dans cette base. La matrice  $M'_f$  est de la forme :

$$M'_f = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \\ 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}.$$

Comme la trace de  $f$  est égale à 1, on a  $a_n = 1$ . Un simple calcul matriciel montre alors que grâce à la condition  $a_n = 1$ , on a  $(M'_f)^2 = M'_f$ , ce qui montre que  $f^2 = f$ . On a ainsi montré que  $f$  est un projecteur.

- 3) Les matrices  $E_{11}, \dots, E_{nn}$  et  $E_{ij} + E_{jj}$  avec  $i \neq j$  sont de rang 1 et de trace 1, elles sont des matrices de projecteurs. En outre, elles forment une famille libre de  $n^2$  matrices, donc une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 2.23



#### Matrices de rang 1

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . On considère  $2n$  nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  et la matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $(i, j)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$   $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$ .

- 1) Déterminer le rang de  $A$ .
  - 2) Montrer que  $A^2 = (\text{tr } A)A$  et en déduire que si  $\text{tr } A \neq 0$ , il existe un projecteur  $p$  et une homothétie  $h$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tels que  $A$  soit la matrice de  $p \circ h$  dans une certaine base.
  - 3) Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang égal à 1. Montrer qu'il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tels que  $M = XY$ .
  - 4) Déduire des résultats précédents l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = 0$ .
- 1) Pour  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $C_j$  la  $j$ -ème colonne de  $A$ . On a par définition de  $A$  :

$$C_j = \beta_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$



On en déduit que toutes les colonnes de  $A$  sont proportionnelles, ce qui montre que  $\text{rg } A \leq 1$ . S'il existe  $(i, j)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $\alpha_i \beta_j \neq 0$  alors  $\text{rg } A = 1$ , sinon  $A = 0$  et  $\text{rg } A = 0$ .

2) Soit  $c_{ij}$  le coefficient général de la matrice  $A^2$ . Pour tout  $(i, j)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \alpha_i \beta_k \alpha_k \beta_j = \left( \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k \right) a_{ij} = \text{tr } A \cdot a_{ij}.$$

$$A^2 = (\text{tr } A)A.$$

Supposons  $\text{tr } A \neq 0$  et considérons la matrice  $B = \frac{1}{\text{tr } A} A$ . On a alors

$$B^2 = \frac{1}{(\text{tr } A)^2} A^2 = \frac{1}{\text{tr } A} A = B. \text{ Ainsi } B \text{ est la matrice d'un projecteur } p.$$

Soit alors  $h$  l'homothétie de rapport  $\text{tr } A$ . Dans toute base la matrice de  $h$  est  $(\text{tr } A) I_n$ . Alors la matrice  $A = B((\text{tr } A) I_n)$  est la matrice de  $p \circ h$ .

3) Comme  $M$  est de rang 1, l'une de ses colonnes est non nulle. On note  $X$  cette colonne. Toujours parce que  $M$  est de rang 1, toutes les autres colonnes de  $M$  sont proportionnelles à  $X$ . Pour  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , en notant  $C_j$  la  $j$ -ième colonne de  $M$ , il existe  $y_j$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $C_j = y_j X$ . Si on note  $Y$  le vecteur ligne  $(y_1, \dots, y_n)$  on a alors  $M = XY$ . Comme  $M$  est non nulle,  $Y$  est non nulle et on a bien obtenu l'écriture proposée.

4) Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $M$  est la matrice dans la base canonique. On a  $g^2 = 0$  ce qui entraîne  $\text{Im } g \subset \text{Ker } g$ . On en déduit que  $\dim \text{Im } g \leq \dim \text{Ker } g$  et le théorème du rang montre alors que  $\text{rg } g = 0$  ou  $\text{rg } g = 1$ .

• Si  $\text{rg } g = 0$ , alors  $g = 0$  et par conséquent  $M = 0$ .

• Si  $\text{rg } g = 1$ , alors  $\text{rg } M = 1$ , et le résultat de la question 3) montre qu'il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tels que  $M = XY$ . On a alors, puisque  $YX$  s'identifie à un nombre,

$$M^2 = 0 \Rightarrow XYXY = 0 \Rightarrow X(YX)Y = (YX)(XY) = (YX)M = 0.$$

Comme  $M$  est non nulle on en déduit que c'est le scalaire  $YX$  qui est nul. On peut remarquer que ce scalaire est en fait la trace de  $M$ , ce qui est cohérent avec le résultat du 1).

### Exercice 2.24

#### Centrale PSI 2005

1) Montrer que  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice d'une similitude dont on précisera les éléments.

2) Calculer  $B_n = A_n^n$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$ .

La matrice  $A_n$  a pour déterminant  $1 + \alpha^2/n^2$ . On peut donc l'écrire

$$A_n = \sqrt{1 + \alpha^2/n^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}} & -\frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}} \\ \frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}} \end{pmatrix}, \text{ et c'est la matrice d'une}$$

similitude de rapport  $r_n = \sqrt{1 + \alpha^2/n^2}$  et d'angle  $\theta_n$  défini par  $\cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}}$

$$\text{et } \sin \theta_n = \frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}}.$$

2) Alors  $B_n$  est une similitude de rapport  $r_n^n$  et d'angle  $n\theta_n$ . On obtient donc

$$B_n = A_n^n = (1 + \alpha^2/n^2)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}. \text{ Mais } \frac{n \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)}{2} \sim \frac{\alpha^2}{2n}.$$

Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \frac{n \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)}{2} = 1$ . D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{Arcsin} \frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \alpha^2/n^2}} = \alpha. \text{ Donc la suite } (B_n) \text{ converge}$$

$$\text{vers } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$



### Exercice 2.25

#### CCP PSI 2005

$$\text{Soient } N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = \sum_{i=1}^n a_i \neq 0 \text{ et } M = (b_{ij}) \text{ la matrice}$$

$$\text{définie par : } i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 2a_i \text{ et } b_{ii} = a_i - \sum_{j \neq i} a_j.$$

1) Calculer  $N^2$ .

2) Montrer que  $M$  est inversible et déterminer son inverse.

1) On vérifie sans difficulté que  $N^2 = \alpha N$ .

2) On va encore une fois chercher un polynôme annulateur de  $M$ . Pour essayer d'utiliser la relation précédente, on écrit  $M = 2N - \alpha I_n$ . On a alors

$$M^2 = (2N - \alpha I_n)^2 = 4N^2 - 4\alpha N + \alpha^2 I_n = \alpha^2 I_n.$$

Comme  $\alpha$  est non nul on en déduit que  $M$  est inversible et son inverse est donnée

$$\text{par la relation } M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} M.$$

## Exercice 2.26

## CCP PSI 2005

Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et soit  $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$ .

1) Montrer que  $C(J)$  est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

L'ensemble  $C(J)$  est appelé *commutant* de  $J$ .

2) Existe-t-il une inclusion entre  $C(J)$  et  $D(J) = \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$ ?  
Trouver  $D(J)$ .

1) On va montrer que  $C(J)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

La matrice nulle est dans  $C(J)$  donc  $C(J)$  est non vide.

Soient  $A$  et  $B$  dans  $C(J)$ , soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(\alpha A + \beta B)J = \alpha AJ + \beta BJ = \alpha JA + \beta JB = J(\alpha A + \beta B).$$

On a donc montré que  $C(J)$  est une partie non vide de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  stable par combinaison linéaire. On en déduit que  $C(J)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

La matrice  $J$  étant très simple on va pour une fois traduire la condition d'appartenance au commutant en relations coefficient à coefficient.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  appartient à  $C(J)$  si et seule-

ment si  $JA = AJ$ , ce qui s'écrit  $\begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$ .

On en déduit que  $A$  appartient à  $C(J)$  si et seulement si  $\begin{cases} a = e = i \\ b = f = g \\ c = d = h \end{cases}$ .

On reconnaît alors que  $A$  s'écrit sous la forme  $aI_n + bJ^2 + cJ$ . On vient de montrer que  $C(J) \subset \text{Vect}(I_n, J, J^2)$ , l'inclusion réciproque est immédiate et comme la famille  $(I_n, J, J^2)$  est libre, cette famille est finalement une base de  $\text{Vect}(I_n, J, J^2) = C(J)$ .

2) On va montrer que  $D(J) \subset C(J)$ .

Soit  $Y$  dans  $D(J)$ . On a alors  $YJ = YY^2 = Y^2Y = JY$ , ce qui montre que  $Y$  est dans  $C(J)$ . On a bien montré que  $D(J) \subset C(J)$ . Le résultat précédent montre alors que, pour  $Y$  dans  $D(J)$ , il existe  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $Y = aI_n + bJ + cJ^2$ . La condition  $Y^2 = J$  s'écrit alors :  $(aI_n + bJ + cJ^2)(aI_n + bJ + cJ^2) = J^2$ , ce qui, en développant et en remarquant que  $J^3 = I_n$  devient

$$(a^2 + 2bc)I_n + (c^2 + 2ab)J + (b^2 + 2ac)J^2 = J.$$

Comme la famille  $(I_n, J, J^2)$  est libre, on en déduit que le système :

$$(S) \begin{cases} a^2 + 2bc = 0 \\ c^2 + 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases}.$$

En multipliant la première ligne et la troisième ligne de  $(S)$  par respectivement  $a$  et  $b$ , on constate que  $(S)$  entraîne  $a^3 - b^3 = 0$ . Comme la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $x$  associe  $x^3$  est bijective, on en déduit que  $a = b$ . Le système  $(S)$  se simplifie alors en

$$(S') \begin{cases} a^2 + 2ac = 0 \\ c^2 + 2a^2 = 1 \end{cases}.$$

On en déduit que  $a = 0$  ou  $a = -2c$ , ce qui mène respectivement à  $a = b = 0, c = \pm 1$  ou  $a = b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}$  ou  $a = b = -\frac{2}{3}, c = \frac{1}{3}$ . on vérifie sans difficulté que ces solutions conviennent effectivement, et on en déduit :

$$D(J) = \left\{ \pm J^2, \pm \frac{1}{3} (2I_n + 2J - J^2) \right\}.$$

### Remarque

Voir chapitre « Réduction » pour des méthodes plus générales de recherche d'un commutant.



### Exercice 2.27

#### Cachan PT 2007

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice non nulle. On définit l'application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(X) = -X + (\text{tr } X) A.$$

- 1) Montrer que  $f$  est linéaire.
- 2) Montrer que si  $\text{tr } A \neq 1$ , alors  $f$  est bijective.
- 3) On suppose que  $\text{tr } A = 1$ . Montrer que  $f$  est le projecteur sur l'espace des matrices de trace nulle parallèlement à  $\text{Vect}(A)$ .
- 4) Soit  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Résoudre l'équation  $F(X) = B$ , d'inconnue  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Soient  $X_1$  et  $X_2$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . On a

$$f(\alpha X_1 + \beta X_2) = -\alpha X_1 - \beta X_2 + \text{tr}(\alpha X_1 + \beta X_2)A = \alpha f(X_1) + \beta f(X_2)$$

par linéarité de la trace. On en déduit que  $f$  est linéaire.

2) Soit  $X$  dans le noyau de  $f$ . On a  $X = (\text{tr } X)A$ . En appliquant la trace aux deux membres de cette égalité on obtient  $\text{tr } X(1 - \text{tr } A) = 0$ . On en déduit que si  $\text{tr } A \neq 1$  alors l'appartenance de  $X$  au noyau de  $f$  entraîne que  $X = 0$ . Ainsi  $\text{tr } A \neq 1$  entraîne que  $f$  est injective ce qui entraîne  $f$  bijective car  $f$  est un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie.

3) On suppose  $\text{tr } A = 1$ . On a

$$f \circ f(X) = f(-X + (\text{tr } X)A) = X - (\text{tr } X)A - (1 - \text{tr}(A))(\text{tr } X)A = f(X).$$

On en déduit que  $f$  est un projecteur. Nous allons déterminer son noyau et son image.

Soit  $X$  dans le noyau de  $f$ . On a  $X = (\text{tr } X)A$ . On en déduit  $\text{Ker } f \subset \text{Vect}(A)$ . Par ailleurs  $f(A) = -A + (\text{tr } A)A = -A + A = 0$ , et par conséquent  $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker } f$ . On a montré que  $\text{Ker } A = \text{Vect}(A)$ .

Comme  $A$  est non nulle on déduit du résultat précédent que  $\dim \text{Ker } f = 1$ . Le théorème du rang montre alors que  $\text{rg } f = n^2 - 1$ .

Par ailleurs on constate que si  $N$  est dans  $\text{Im } f$ , alors il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $N = -X + (\text{tr } X)A$  et en appliquant la trace aux deux membres de cette égalité on obtient :  $\text{tr } N = -\text{tr } X + \text{tr } A \text{tr } X = 0$ . On en déduit que  $\text{Im } f \subset \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr } X = 0\}$  et comme ces deux sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ont même dimension on en déduit :  $\text{Im } f = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr } X = 0\}$ .

On a montré que  $f$  est le projecteur sur l'espace des matrices de trace nulle parallèlement à  $\text{Vect}(A)$ .

4) Les résultats précédents montrent qu'il faut distinguer deux cas suivant la valeur de  $\text{tr } A$ .

• Premier cas :  $\text{tr } A \neq 1$ .

Dans ce cas l'endomorphisme  $f$  est bijectif et l'équation admet donc une et une seule solution. Soit  $X_0$  cette solution on a  $B = -X_0 + (\text{tr } X_0)A$ . Toujours en appliquant la trace aux deux membres de cette égalité on obtient  $\text{tr } B = (\text{tr } A - 1) \text{tr } X_0$ , et comme  $\text{tr } A \neq 1$ , ceci montre, en reportant cette relation dans l'égalité de départ, que

$$X_0 = -B + \frac{\text{tr } B}{\text{tr } A - 1} A.$$

• Deuxième cas :  $\text{tr } A = 1$ .

Dans ce cas le résultat de la question 3) montre que si  $\text{tr } B \neq 0$ , alors  $B$  n'appartient pas à  $\text{Im } f$  et par conséquent l'équation proposée n'a pas de solution. Au contraire si  $\text{tr } B = 0$ , l'équation proposée admet une infinité de solutions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'un élément du noyau. On constate que  $-B$  est justement une solution particulière de l'équation. L'ensemble des solutions de l'équation  $f(X) = B$  est donc la droite affine  $-B + \text{Ker } f = -B + \text{Vect}(A)$ .

## Exercice 2.28

## Saint-Cyr PSI 2006

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  tel que  ${}^tA = P^{-1}AP$ .

Si  $A$  est symétrique  $P = I_2$  convient. Si  $A$  n'est pas symétrique, on a  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $b \neq c$ . L'égalité est équivalent à  $P^tA = AP$ . Cherchons  $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ . On obtient successivement  $AP = \begin{pmatrix} ax + cy & az + ct \\ bx + dy & bz + dt \end{pmatrix}$  et  $P^tA = \begin{pmatrix} ax + cz & bx + dz \\ ay + ct & by + dt \end{pmatrix}$ .

L'égalité  $P^tA = AP$  équivaut donc au système  $\begin{cases} cy = cz \\ by = bz \\ az + ct = bx + dz \\ ay + ct = bx + dy \end{cases}$ . Comme

$b \neq c$ , un des deux nombres n'est pas nul et on a  $y = z$ . Le système devient  $\begin{cases} y = z \\ (a - d)y + ct - bx = 0 \end{cases}$ . Si  $b \neq 0$ , on obtient alors  $P = \begin{pmatrix} \frac{(a - d)y + ct}{b} & y \\ y & t \end{pmatrix}$ .

Le déterminant de  $P$  vaut  $((a - d)ty + ct^2 - by^2)/b$ . C'est un polynôme des deux variables  $y, t$  qui n'est pas le polynôme nul. Il existe donc des valeurs de  $y$  et  $t$  pour lesquelles  $P$  est inversible. Résultat analogue si  $c \neq 0$ .

**Remarque pour les élèves de PC qui ont déjà abordé la réduction :** dans le cas de  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on peut commencer par dire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$ , et établir le résultat proposé pour  $T$ , ce qui rend les calculs plus agréables.

## Exercice 2.29

## CCP PC 2006, Centrale PC 2006, Centrale PSI 2006

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  celui des matrices symétriques. Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note

$$D_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tM + M = (\text{tr } M)A\}.$$

- 1) Montrer que  $D_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  contenant  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .
- 2) Montrer que si  $\text{tr } A \neq 2$  alors  $D_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .
- 3) Soit  $A$  une matrice non symétrique telle que  $\text{tr } A = 2$ . Déterminer  $D_A$ .
- 4) Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ .
- 5) Soit  $A$  une matrice symétrique telle que  $\text{tr } A = 2$ . Déterminer  $D_A$  et donner sa dimension.

1) Montrons que  $D_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- La matrice nulle appartient à  $D_A$ , ce qui montre que  $A$  est non vide.
- Soient  $M_1$  et  $M_2$  dans  $D_A$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) + (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) &= \alpha_1 ({}^t M_1 + M_1) + \alpha_2 ({}^t M_2 + M_2) \\ &= \alpha_1 (\text{tr } M_1) A + \alpha_2 (\text{tr } M_2) A \\ &= \text{tr}(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) A \end{aligned}$$

On a ainsi montré que  $D_A$  est stable par combinaison linéaire.

On en déduit que  $D_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $M$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . On a  ${}^t M = -M$  et par conséquent tous les coefficients diagonaux de  $M$  sont nuls, d'où  $\text{tr } M = 0$ . Les égalités  ${}^t M + M = 0$  et  $(\text{tr } M)A = 0$  montrent que  $M$  appartient à  $D_A$ . On a ainsi montré que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \subset D_A$ .

2) Soit  $M$  dans  $D_A$ . En appliquant la trace à chacun des membres de l'égalité  ${}^t M + M = (\text{tr } M)A$  on obtient :  $2 \text{tr } M = (\text{tr } M) \text{tr } A$ . On en déduit  $\text{tr } M(\text{tr } A - 2) = 0$ . Si  $\text{tr } A \neq 2$ , alors  $\text{tr } M = 0$ . L'égalité  ${}^t M + M = (\text{tr } M)A$  entraîne alors  ${}^t M + M = 0$ , ce qui montre que  $M$  est dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . On a ainsi montré que  $D_A \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . L'inclusion réciproque a été montrée à la question précédente. Ainsi  $\text{tr } A \neq 2$  entraîne  $D_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

3) Soit  $M$  dans  $D_A$ . En appliquant la transposition à chacun des membres de l'égalité  ${}^t M + M = (\text{tr } M)A$  on obtient :  $M + {}^t M = (\text{tr } M){}^t A$ . On en déduit que la matrice  $(\text{tr } M)A$  est symétrique. Comme  $A$  n'est pas symétrique on en déduit  $\text{tr } M = 0$ . Le même raisonnement que dans la question précédente montre alors que  $D_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

4) Montrons que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$  (1).

Soit  $M$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ . On a à la fois  ${}^t M = M$  et  ${}^t M = -M$ , on en déduit  $M = 0$ .

Montrons que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a  $M = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M)$  et on a donc écrit  $M$  comme somme de deux matrices, la première étant symétrique et la deuxième antisymétrique. On a bien montré que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  (2).

De (1) et (2) on déduit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ .

### Remarque

On aurait aussi pu montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$  et utiliser le fait que

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ce qui entraîne}$$

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

La méthode choisie nous a permis de rappeler la décomposition explicite de  $M$ , décomposition qu'il est utile de bien connaître.

5) Soit  $M$  dans  $D_A$ . D'après la question précédente il existe  $(M_a, M_s)$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  tel que  $M = M_a + M_s$ . On a alors  $M + {}^t M = 2M_s$  et

$\text{tr } M = \text{tr } M_s$ . On en déduit que  $2M_s = (\text{tr } M_s)A$ . On a ainsi montré qu'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $M_s = \alpha A$ , ce qui revient à dire que  $M = M_a + \alpha A$  est dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) + \text{Vect}(A)$ . Remarquons que comme  $A$  est symétrique non nulle on a en fait  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) + \text{Vect}(A) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \text{Vect}(A)$ .

On a ainsi montré que  $D_A \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \text{Vect}(A)$ . Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $M$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \text{Vect}(A)$ . La matrice  $M$  s'écrit sous la forme  $M = M_a + \alpha A$ , où  $M_a$  est dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  et  $\alpha$  est un réel.

On a alors  $M + {}^t M = 2\alpha A$  et  $(\text{tr } M)A = (\alpha \text{tr } A)A = 2\alpha A$  (car  $\text{tr } A = 2$ ) et on en déduit que  $M$  est dans  $D_A$ .

**Conclusion :**  $\text{tr } A = 2$  et  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow D_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \text{Vect}(A)$ .

On a alors  $\dim D_A = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ .

## 2.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### Exercice 2.30

#### Centrale PSI 2005

Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables ?

Les matrices  $A$  et  $B$  ont même trace et même déterminant, ce qui ne permet pas de trancher. Remarquons qu'en notant  $N$  la matrice définie par  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a  $A = I_n + N$  et  $B = I_n - N$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ . Cette dernière égalité s'écrit  $I_n + N = P^{-1}(I_n + N)P = I_n - P^{-1}NP$  et équivaut à  $N = P^{-1}(-N)P$ . Donc  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si  $N$  et  $-N$  sont semblables.

#### Remarque

Si  $n$  est impair une matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ne peut pas être semblable à  $-C$ , à cause du déterminant (voir chapitre déterminant).

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à  $N$ , dans une base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . On a  $f(e_1) = 0$ ,  $f(e_2) = e_1$ ,  $f(e_3) = e_2$ ,  $f(e_4) = e_3$ . Ce que l'on peut aussi écrire :  $f(e_1) = 0$ ,  $f(-e_2) = -e_1$ ,  $f(e_3) = -(-e_2)$ ,  $f(-e_4) = -e_3$ . Ceci montre que dans la base  $(e_1, -e_2, e_3, -e_4)$ , l'endomorphisme  $f$  a pour matrice  $-N$ .



On a donc montré que  $N$  et  $-N$  sont semblables et on en déduit que  $A$  et  $B$  sont semblables.

### Remarque

Le passage par la matrice  $N$ , n'est pas indispensable, la proposition de nouvelle base peut se faire directement en considérant l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

### Exercice 2.31

#### Mines-Ponts PC 2006

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , soient  $(e_1, \dots, e_{2n+1})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à l'endomorphisme  $a$ , vérifiant  $a(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$  et  $a(e_i) = e_{i-1} + e_i$  pour  $i$  dans  $\llbracket 2, 2n+1 \rrbracket$ . Vérifier que  $A$  est inversible et écrire  $A^{-1}$  comme un polynôme en  $A$ .

En écrivant les conditions de l'énoncé on obtient :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$



On constate alors que  $A = I_{2n+1} + B$  avec  $B$  définie par  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$

Or on sait que  $B^{2n+1} = I_{2n+1}$  (si vous ne le saviez pas, c'est le moment de le retenir). On en déduit que  $(A - I_{2n+1})^{2n+1} = I_{2n+1}$ . Cette relation fournit un polynôme annulateur de  $A$ . Comme  $A$  commute avec la matrice unité, on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} A^k \\ &= -I_{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k A^k \\ &= -I_{2n+1} + A \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k A^{k-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $A \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k A^{k-1} = 2I_{2n+1}.$

Ceci montre que  $A$  est inversible et que de plus

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{k+1} A^k.$$

### Exercice 2.32

#### Mines-Ponts PC 2007

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A \neq 0$ . Montrer que  $A^2 = 0$  si et seulement si  $A$  est semblable

à  $M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  avec  $2r \leq n$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans une base  $\mathcal{B}$ . On a donc  $f^2 = 0$  et il en résulte que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$ . Alors la restriction de  $f$  à  $G$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $\text{Im } f$ . Donc si  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $G$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est une base de  $\text{Im } f$ . C'est aussi une famille libre de  $\text{Ker } f$  et d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base  $(f(e_1), \dots, f(e_r), u_1, \dots, u_s)$  de  $\text{Ker } f$ . Alors  $(f(e_1), \dots, f(e_r), u_1, \dots, u_s, e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $E$ . On a en particulier  $s + 2r = n$ , donc  $2r \leq n$ , et dans cette base la matrice de  $f$  est  $M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ .

Donc  $A$  est semblable à  $M$ .

Réciproquement, si  $A$  est semblable à  $M$ , il existe  $P$  inversible telle que  $A = P^{-1}MP$ . Alors  $A^2 = P^{-1}M^2P$ , et comme  $M^2 = 0$  on en déduit que  $A^2 = 0$ .

### Exercice 2.33

#### Centrale PSI 2006

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)$ .

- 1) Déterminer le rang de  $M$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
- 2) Calculer  $M^{-1}$  quand elle existe.

- 1) Par manipulation sur les lignes et les colonnes de  $M$ , on trouve :

$$\text{rg } M = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right).$$

On en déduit, voir exercice 2.20, que  $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } (B - A)$ .

- 2) Puisque  $\text{rg } A \leq n$  et  $\text{rg } (B - A) \leq n$ , on a  $\text{rg } M = 2n$  si et seulement si  $\text{rg } A = \text{rg } (B - A) = n$ . Il en résulte que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B - A$  sont inversibles. Supposons que les matrices  $A$  et  $A - B$  sont inversibles et déterminons l'inverse de la matrice  $M$ . On vous propose deux méthodes pour déterminer l'inverse de  $M$ .

- *Première méthode* : les manipulations précédentes peuvent être traduites en termes de produits par des matrices inversibles :

$$\left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right).$$

En s'inspirant de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on vérifie  $\left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right)$  et  $\left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)^{-1} &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B - A \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (B - A)^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} + (B - A)^{-1} & -(B - A)^{-1} \\ \hline -(B - A)^{-1} & (B - A)^{-1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

- *Deuxième méthode* : Étant donnés  $X$  et  $Y$  deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{C}^n$ , résolvons le système d'équations  $M \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , d'inconnues  $U$  et  $V$  où  $U$  et  $V$  sont deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{C}^n$ . Ce système est équivalent au système  $\begin{cases} AU + AV = X \\ AU + BV = Y \end{cases}$  qui équivaut successivement aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} A(U + V) = X \\ A(U + V) + (B - A)V = Y \end{cases}, \quad \text{puis} \quad \begin{cases} A(U + V) = X \\ (B - A)V = Y - X \end{cases},$$

$$\text{ou encore} \begin{cases} U + V = A^{-1}X \\ V = (B - A)^{-1}(Y - X) \end{cases} \quad \text{et enfin} \begin{cases} U = A^{-1}X - (B - A)^{-1}(Y - X) \\ V = (B - A)^{-1}(Y - X) \end{cases}.$$

Comme le système  $M \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est équivalent à  $M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ , on en déduit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B - A)^{-1} & -(B - A)^{-1} \\ -(B - A)^{-1} & (B - A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2.34

Mines-Ponts PC 2007 ☕☕

Soient  $A$  dans  $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  telles que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $AB$  est la matrice d'un projecteur.

2) Montrer que  $BA = I_2$ .

*Indication de la rédaction :* on pourra commencer par montrer que  $BA$  est inversible.

1) Un simple calcul montre que  $(AB)^2 = AB$ , on en déduit que  $AB$  est la matrice d'un projecteur.

2) Pour montrer que  $BA$  est inversible, on va montrer que son rang est 2. On va pour cela utiliser le fait que, pour toutes applications linéaires  $u$  et  $v$  telles que  $u \circ v$  ait un sens, on a  $\text{rg}(u \circ v) \leq \min\{\text{rg } u, \text{rg } v\}$ . Cette inégalité est équivalente à  $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg } v$  et  $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg } u$ . Comme on a  $\text{Im}(u \circ v) \subset \text{Im } u$  on a  $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg } u$ . Par ailleurs on a  $\text{Ker } v \subset \text{Ker}(u \circ v)$ . On en déduit  $\dim(\text{Ker } v) \leq \dim(\text{Ker}(u \circ v))$ . Le théorème du rang montre alors que  $n - \text{rg } v \leq n - \text{rg}(u \circ v)$ . On en déduit l'inégalité souhaitée.

Remarquons que  $AB$  est de rang 2. On a ainsi

$$\text{rg}(AB) = \text{rg}(ABAB) = \text{rg}(A(BAB)) \leq \text{rg}(BAB) \leq \text{rg}(BA).$$

Le rang de  $BA$  est donc supérieur ou égal à 2. Par ailleurs  $BA$  est une matrice carrée d'ordre 2, donc  $\text{rg}(BA) = 2$  et par conséquent, cette matrice est inversible. La relation  $ABAB = AB$  entraîne  $A(BA - I_2)B = 0$ , et en multipliant cette relation à gauche par  $B$  et à droite par  $A$ , on obtient  $BA(BA - I_2)BA = 0$ . Comme  $BA$  est inversible on en déduit que  $BA = I_2$ .

## Exercice 2.35

Centrale PC 2005, PSI 2006, MP 2007 ☕☕

1) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que, pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée. Montrer que  $u$  est une homothétie.

2) Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

*Indication de la rédaction :* on pourra raisonner par récurrence sur  $n$ .

3) Soient  $d_1, \dots, d_n$  dans  $\mathbb{K}$  deux à deux distincts, et  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  qui à  $M$  associe  $DM - MD$ . Déterminer le noyau et l'image de  $\varphi$ .

4) Étant donnée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , établir l'équivalence des propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i)  $\text{tr } A = 0$  , (ii)  $\exists (X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  tel que  $XY - YX = A$ .

1) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $\gamma_i \in \mathbb{K}$  tel que  $u(e_i) = \gamma_i e_i$ . Il existe aussi  $\gamma \in \mathbb{K}$  tel que  $u\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \gamma \sum_{i=1}^n e_i$ . on obtient alors en vertu de la linéarité de  $u$  que  $\gamma \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$ , et comme  $\mathcal{B}$  est une base, on en déduit  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \gamma$ . Ainsi  $u = \gamma \text{Id}_E$ , ce qui signifie que  $u$  est une homothétie.

2) On va montrer ce résultat par récurrence sur la taille  $n$  de  $A$ .

Pour  $n = 1$  le résultat est immédiat car une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  de trace nulle est nulle. Supposons le résultat acquis au rang  $n - 1$  et montrons le au rang  $n$ .

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \geq 2$  et de trace nulle. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ . On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est à diagonale nulle.

Commençons par montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{K}^n$  dans laquelle la matrice  $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = (a'_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  est telle que  $a'_{11} = 0$ . Il suffit pour cela de trouver une base dont le premier vecteur  $e_1$  est tel que  $f(e_1)$  n'a pas de composante sur  $e_1$ . Or, pour que cette condition soit vérifiée, il suffit de trouver  $x$  dans  $\mathbb{K}^n$  tel que la famille  $(x, f(x))$  soit libre et de choisir alors  $e_1 = x$  et  $e_2 = f(x)$  comme premiers vecteurs d'une base de  $\mathbb{K}^n$ . Or, d'après la première question, les endomorphismes  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $(x, f(x))$  est liée pour tout  $x$  de  $E$  sont les homothéties de  $E$ . Si  $f$  est une homothétie, comme elle est de trace nulle, c'est l'application nulle et le résultat est acquis. Sinon il existe  $x$  dans  $\mathbb{K}^n$  tel que la famille  $(x, f(x))$  soit libre, on complète donc la famille  $(e_1, e_2) = (x, f(x))$  en une base  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$  de

$$\mathbb{K}^n. \text{ On a alors } A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

La matrice  $B$  est carrée d'ordre  $n$  et on a de plus  $\text{tr } f = \text{tr } A' = \text{tr } B = 0$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}BP$  soit à diagonale

$$\text{nulle. Soit alors } Q \text{ la matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ définie par : } Q = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

$$\text{La matrice } Q \text{ est inversible et son inverse est donné par } Q^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 Q^{-1}A'Q &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & (a'_{12}, \dots, a'_{1n})P \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & BP & \\ \vdots & & & \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & (a'_{12}, \dots, a'_{1n})P \\ \hline P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} & & P^{-1}BP & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Comme la matrice  $P^{-1}BP$  est à diagonale nulle, la matrice  $Q^{-1}A'Q$  est aussi à diagonale nulle. Or, par construction  $A$  est semblable à  $A'$  qui est semblable à  $Q^{-1}A'Q$  qui est à diagonale nulle, on a bien montré que  $A$  est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3) Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On vérifie que

$$\varphi(M) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{où} \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ (d_i - d_j)m_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

• Déterminons  $\text{Ker } \varphi$ . Une matrice  $M$  appartient à  $\text{Ker } \varphi$  si et seulement si pour tout couple  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $(d_i - d_j)m_{ij} = 0$ . Comme les  $d_i$  sont deux à deux distincts, on en déduit  $m_{ij} = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi$  est l'ensemble des matrices diagonales que l'on note  $\mathcal{D}$ .

• Déterminons  $\text{Im } \varphi$ . Le sous-espace vectoriel  $\text{Im } \varphi$  est inclus dans le sous-espace  $\mathcal{N}$  des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls. D'autre part, d'après le théorème du rang,  $\dim \text{Im } \varphi = n^2 - \dim \text{Ker } \varphi = n^2 - n$ . Comme on a également  $\dim \mathcal{N} = n^2 - n$ , on en déduit que  $\text{Im } \varphi = \mathcal{N}$ .

4)• Supposons que (ii) est vraie. Il existe  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  tel que  $XY - YX = A$ . On a alors  $\text{tr}(A) = \text{tr}(XY - YX)$ . Or la trace est linéaire et  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ , donc  $\text{tr}(A) = 0$ . Ainsi (ii)  $\Rightarrow$  (i).

• Supposons que (i) est vraie. D'après la question 2), la matrice  $A$  est semblable à une matrice  $B$  dont les coefficients diagonaux sont nuls. Il existe donc  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $B = P^{-1}AP$ . Or,  $B$  appartient à  $\mathcal{N} = \text{Im } \varphi$ . Il existe donc  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel

que  $B = \varphi(C) = DC - CD$ . Ainsi  $P^{-1}AP = DC - CD$ . On en déduit alors que

$$\begin{aligned} A &= PDCP^{-1} - PCDP^{-1} \\ &= (PDP^{-1})(PCP^{-1}) - (PCP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= XY - YX, \end{aligned}$$

où  $X = PDP^{-1}$  et  $Y = PCP^{-1}$

### Exercice 2.36

#### Centrale PC 2005

On note  $\mathcal{N}$  l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que  $A + B$  et  $AB$  sont nilpotentes.

2) Soient  $i$  et  $j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $E_{ij}$  et  $E_{ii} - E_{jj}$ , appartiennent à  $\mathcal{N}$ .

3) Prouver que  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des matrices de traces nulle.

*Indication de la rédaction :* on admet qu'une matrice nilpotente est de trace nulle. Voir exercice 5.53 page 159.

1) Soit  $p_1$  l'indice de nilpotence de  $A$  et  $p_2$  l'indice de nilpotence de  $B$ . Comme

$A$  et  $B$  commutent on pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$ . Soit

$p \geq p_1 + p_2$ , on a pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, p \rrbracket$  soit  $p-k \geq p_1$  soit  $k \geq p_2$ . On en déduit que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, p \rrbracket$  on a  $A^{p-k} B^k = 0$ . On a ainsi montré que  $(A+B)^p = 0$ , ce qui signifie que  $A+B$  est nilpotente.

Comme  $A$  et  $B$  commutent, on a  $(AB)^p = A^p B^p$ . Soit alors  $p = \max(p_1, p_2)$ . On a  $(AB)^p = A^p B^p = 0$ , ce qui montre que  $AB$  est nilpotente.

2) Pour  $i$  et  $j$  distincts dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , la matrice  $E_{ij}$  est strictement triangulaire, on en déduit que  $E_{ij}$  est nilpotente et par conséquent elle est dans  $\mathcal{N}$ . Par contre, la matrice  $E_{ii} - E_{jj}$  n'est pas nilpotente ; pour montrer qu'elle est dans  $\mathcal{N}$ , on va l'écrire comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. On peut commencer par essayer, pour  $n = 2$ , de compléter une matrice de la forme

$E_{ii} - E_{jj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  en une matrice nilpotente. On obtient par exemple que la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

est nilpotente.

Suivant cet exemple, on peut définir la matrice  $N_{ij} = E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji}$ . On constate qu'effectivement  $N_{ij}^2 = 0$  et on peut alors écrire la matrice sous la forme d'une somme de matrices nilpotentes  $E_{ii} - E_{jj} = N_{ij} + E_{ij} - E_{ji}$ . On a ainsi montré que  $E_{ii} - E_{jj}$  est dans  $\mathcal{N}$ .

- 3) Soit  $H$  l'ensemble des matrices de trace nulle. On sait que toute matrice nilpotente est de trace nulle donc appartient à  $H$ . Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes est encore dans  $H$ . On en déduit que  $\mathcal{N} \subset H$ . La trace est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $H$ , qui est le noyau de cette forme linéaire est de dimension  $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$ . On va montrer que  $\dim \mathcal{N} \geq n^2 - 1$ . Pour cela on va chercher une famille libre de  $n^2 - 1$  matrices appartenant à  $\mathcal{N}$ . Il est naturel de se tourner vers les éléments qu'on a trouvés dans la question précédente. Remarquons que la famille  $(E_{ii} - E_{jj})_{1 \leq i < j \leq n}$  n'est pas libre, par exemple  $(E_{11} - E_{22}) + (E_{22} - E_{33}) = E_{11} - E_{33}$ . Par contre, la famille  $(E_{11} - E_{jj})_{2 \leq j \leq n}$  est libre et en la complétant avec la famille des  $(E_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$  on obtient une famille libre de  $(n-1) + (n^2 - n) = n^2 - 1$  matrices de  $\mathcal{N}$ . On en déduit que  $\dim \mathcal{N} \geq n^2 - 1$ . On a montré que  $\mathcal{N} \subset H$  et  $\dim \mathcal{N} \geq \dim H$ , et il en résulte que  $\mathcal{N} = H$ .

### Remarque

On a montré que le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est le noyau de la trace.

### Exercice 2.37



### Centrale PSI 2006 ☕

Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme  $\Phi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi(M) = P^{-1}MP$ .

Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Considérons, de manière générale, l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\Phi_{QP} : M \mapsto QMP$ .

Utilisons la base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formée des matrices  $E_{ij}$  rangées dans l'ordre suivant :  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn})$ . On cherche l'image par  $\Phi$  des vecteurs de base. Posons  $Q = \sum_{i,j} q_{ij} E_{ij}$  et  $P = \sum_{i,j} p_{ij} E_{ij}$  (tous les indices

de sommation décrivant l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ). Alors  $QE_{k\ell} = \sum_{i,j} q_{ij} E_{ij} E_{k,\ell}$ .

Mais d'après la règle du produit des matrices  $E_{ij}$ , les seuls termes non nuls de cette somme sont obtenus lorsque  $j = k$ , et donc  $QE_{k\ell} = \sum_i q_{ik} E_{i\ell}$ . Alors

$$QE_{k\ell}P = \left( \sum_i q_{ik} E_{i\ell} \right) \left( \sum_{r,j} p_{rj} E_{rj} \right) = \sum_{i,r,j} q_{ik} p_{rj} E_{i\ell} E_{rj}.$$

De nouveau les seuls termes non nuls de la somme sont obtenus lorsque  $r = \ell$ , et donc  $QE_{k\ell}P = \sum_{i,j} q_{ik} p_{\ell j} E_{ij}$ . Si l'on range en colonne les images des vecteurs de base,



on obtient la matrice  $A_{QP}$  de l'application linéaire  $\Phi_{QP}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On peut

l'écrire sous forme de matrice blocs :  $A_{QP} = \begin{pmatrix} q_{11} {}^t P & q_{12} {}^t P & \cdots & q_{1n} {}^t P \\ q_{21} {}^t P & q_{22} {}^t P & \cdots & q_{2n} {}^t P \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} {}^t P & q_{n2} {}^t P & \cdots & q_{nn} {}^t P \end{pmatrix}.$

- Calcul de la trace. On obtient alors  $\text{tr}(A_{QP}) = \sum_i q_{ii} \text{tr}({}^t P)$  et, puisque

$$\text{tr}(P) = \text{tr}({}^t P), \text{ on trouve } \text{tr}(\Phi_{QP}) = \text{tr}(A_{QP}) = \text{tr}(P) \sum_i q_{ii} = \text{tr}(Q) \text{tr}(P).$$

- Calcul du déterminant. On peut écrire  $\Phi_{QP} = \Phi_{QI_n} \circ \Phi_{I_n P}$ . D'autre part introduisons l'automorphisme  $\theta$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\theta(M) = {}^t M$ , qui est tel que  $\theta^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ . Puisque  ${}^t({}^t M {}^t Q) = QM$ , on a aussi  $\Phi_{QI_n} = \theta \circ \Phi_{I_n {}^t Q} \circ \theta$ . Il en résulte que  $\Phi_{QP} = \theta \circ \Phi_{I_n {}^t Q} \circ \theta \circ \Phi_{I_n P}$ , et donc  $\det \Phi_{QP} = \det \Phi_{I_n {}^t Q} \det \Phi_{I_n P}$ , puisque

$$(\det \theta)^2 = \det(\theta^2) = 1. \text{ Mais, } A_{I_n P} = \begin{pmatrix} {}^t P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^t P & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}^t P \end{pmatrix}, \text{ et donc, puisque}$$

$\det({}^t P) = \det P$ , on a  $\det A_{I_n P} = (\det P)^n$ . De même  $\det A_{I_n {}^t Q} = (\det Q)^n$ . Finalement  $\det A_{QP} = (\det P)^n (\det Q)^n$ , et lorsque  $Q = P^{-1}$  on obtient  $\det A_{QP} = 1$ .



## 3.1 RAPPELS DE COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 3.1.1 Déterminant d'ordre 3 : un exercice de révision

Nous avons étudié en première année les déterminants d'ordre 3. Pour rafraîchir vos connaissances je vous propose l'exercice suivant :

#### Exercice 3.1

Calculer le déterminant  $D = \begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix}$ .

Vous pouvez tenter votre chance avec la règle de Sarrus, mais l'utilisation des opérations élémentaires conduit à des calculs beaucoup plus simples !

On a en effet  $D = \begin{vmatrix} 12^2 & 11^2 & 10^2 \\ 3 \times 12 & 3 \times 11 & 3 \times 10 \\ 8 \times 12 & 9 \times 11 & 9 \times 10 \end{vmatrix} = 12 \times 11 \times 10 \times 3 \begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}$

car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes et par rapport à chacune de ses lignes. En retranchant la première colonne aux deux suivantes, on

obtient  $D = 12 \times 11 \times 10 \times 3 \begin{vmatrix} 12 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ . En développant alors par rapport à la

deuxième ligne on obtient

$$D = -12 \times 11 \times 10 \times 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \times 11 \times 10 \times 3 \times 1 = -3960.$$

Pour une application des déterminants d'ordre 3 à la géométrie, vous pouvez étudier maintenant l'exercice 3.17

### 3.1.2 Déterminants d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

#### Ce qu'il faut savoir

##### Méthodes de calcul

- Utilisation des opérations élémentaires (cf. exercices 3.4, 3.7, ...) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

- On ne modifie pas le déterminant de  $A$  en ajoutant à une colonne de  $A$  une combinaison linéaire des autres colonnes.
- Si on multiplie l'une des colonnes de  $A$  par un scalaire  $\lambda$ , alors le déterminant de  $A$  est multiplié par  $\lambda$  :

$$\det(C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_n).$$

- Si  $A$  a deux colonnes identiques, alors  $\det(A) = 0$ . Si on échange deux colonnes de  $A$ , alors son déterminant est changé en son opposé.
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det({}^t A) = \det(A)$ . Il en résulte que les règles de calculs concernant les colonnes de  $A$  s'appliquent aussi aux lignes.

• **Déterminant d'une matrice triangulaire** : soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire par blocs, où  $A$  et  $C$  sont des matrices carrées d'ordre respectif  $p$  et  $q$ . On a alors  $\det(M) = \det(A) \det(C)$ . (cf. exercices 3.4 et 3.12).

Il en résulte que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. (cf. exercice 3.7).

### Propriétés des déterminants

- Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  (cf. exercice 3.12).
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(A) = 0$  si et seulement si le rang de  $A$  est strictement inférieur à  $n$ . Lorsque  $A$  est inversible,  $\det(A)$  est non nul et dans ce cas  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$  (cf. exercice 3.14).

• **Développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne** (cf. exercice 3.14) :

– Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On note  $\Delta_{ij}$  le mineur relatif au coefficient  $a_{ij}$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne d'indice  $i$  et la colonne d'indice  $j$ . Alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{pour tout indice de ligne } i \text{ et}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{pour tout indice de colonne } j.$$

- Le coefficient  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  est appelé le **cofacteur** du coefficient  $a_{ij}$ .
- La matrice  $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est appelée la **comatrice** de  $A$ .
- La matrice  ${}^t \text{Com}(A)$  vérifie la relation  $A {}^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$ . Il en résulte que si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)$ .

### Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- Le déterminant d'un système de  $n$  vecteurs  $S = (x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est égal au déterminant de la matrice  $P$  du système dans la base  $\mathcal{B}$ . On le note  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

Pour que  $S$  soit une base de  $E$ , il faut et il suffit que ce déterminant soit non nul.

L'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur l'espace vectoriel  $E$ . Pour toute forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  définie sur  $E$ , il existe un scalaire  $\lambda$  tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \text{ (cf. exercice 3.22)}$$

- Lorsque  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , le déterminant de  $f$  est égal au déterminant de la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ce déterminant ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ . (cf. exercice 3.10).

### Exercice 3.2

#### Mines-Ponts PC 2005

Calculer le déterminant  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ .

Les lignes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  du déterminant vérifient la relation de dépendance linéaire  $L_2 + L_3 = (a + b + c)L_1$ . On a donc  $D = 0$ .

### Exercice 3.3

#### CCP PC 2005

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois nombres complexes. Calculer le déterminant

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix}.$$

Posons  $X = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$  et  $Z = \begin{pmatrix} z \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= \det(X + Y, Y + Z, Z + X) \\ &= \det(X, Y, Z) + \det(Y, Z, X) \\ &= 2 \det(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $D(x, y, z) = 2xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  et en retranchant la première colonne aux deux suivantes,  $D(x, y, z) = 2xyz \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$ . En développant par rapport à la première ligne, on obtient  $D(x, y, z) = 2xyz((y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2)) = 2xyz(y-x)(z-x)(z-y)$ .

### Remarque

Le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  est un déterminant de Vandermonde. Ces déterminants sont étudiés en détail dans l'exercice 3.20

### Exercice 3.4

#### CCP PSI 2005

Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}$$

*Indication de la rédaction :* On pourra décomposer  $M$  en blocs :  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

où  $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$  puis, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de  $M$ , se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

À l'aide des opérations élémentaires  $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$  puis  $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ ,

on obtient :  $\det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{vmatrix}$ .

Les opérations élémentaires  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  puis  $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$  donnent alors

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{vmatrix} = \det(A-B) \det(A+B)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \det(M) &= ((a+c)^2 - (b-d)^2)((c-a)^2 - (b+d)^2) \\ &= -(a+b+c-d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)(a+b-c+d). \end{aligned}$$

**Exercice 3.5****CCP PC 2006**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^t A = -A$ . Montrer que si  $n$  est impair, alors  $A$  n'est pas inversible. À l'aide d'exemples, montrer qu'on ne peut pas conclure lorsque  $n$  est pair et supérieur ou égal à 4.

On a  $\det(A) = \det({}^t A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ . Il en résulte que  $\det(A) = 0$  lorsque l'entier  $n$  est impair et donc la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Dans le cas où  $n$  est pair la relation précédente ne permet pas de conclure. Par

exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible (son déterminant est

égal à  $-1$ ), tandis que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible (son

déterminant est égal à 0).

À partir de ces exemples, il est facile de construire des matrices carrées d'ordre pair  $n > 4$  vérifiant les mêmes propriétés.

**Exercice 3.6****Centrale PC 2006**

Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 2 et soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels. Calculer le déterminant de  $A = (\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Soit  $A_i$  la  $i$ -ième ligne de  $A$  et soient  $S = (\sin(a_1) \ \sin(a_2) \ \dots \ \sin(a_n))$  et  $C = (\cos(a_1) \ \cos(a_2) \ \dots \ \cos(a_n))$ .

On a  $A_i = \sin(a_i)C + \cos(a_i)S$  et donc le rang du système des lignes de  $A$  est inférieur ou égal à 2. Il en résulte que  $\det(A) = 0$ .

**Exercice 3.7****Centrale PC 2005**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . On pose  $D(a, b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a \end{vmatrix}$  et  $\psi(x) = D(a+x, b+x)$ .

Calculer  $D(a, b)$ .

Nous supposons que  $D(a, b)$  est un déterminant d'ordre  $n \geq 2$ . Lorsque  $a = b$  on a  $D(a, b) = 0$ . Dans la suite nous supposons  $a \neq b$ .

Considérons l'application  $x \mapsto \psi(x) = D(a+x, b+x)$ . En retranchant la première ligne de  $D(a+x, b+x)$  à chacune des suivantes, puis en développant par rapport à cette première ligne, on voit que  $\psi$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. Il existe donc  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{C}$ ,  $\psi(x) = \alpha x + \beta$ .

Lorsque  $x = -b$ ,  $\psi(-b) = D(a-b, 0)$  est le déterminant d'une matrice triangulaire. On a donc  $\psi(-b) = (a-b)^n$ . On calcule de même  $\psi(-a) = 0$ . On en déduit aisément  $\alpha$  et  $\beta$  :  $\alpha = (a-b)^{n-1}$  et  $\beta = a(a-b)^{n-1}$  ; finalement  $D(a, b) = \psi(0) = \beta = a(a-b)^{n-1}$ .

### Exercice 3.8

#### TPE PSI 2005

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  dont les coefficients sont dans  $\{-1, 1\}$ . Montrer que  $\det(A)$  est divisible par  $2^{n-1}$ .

Nous utilisons ici le fait que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.

Dans le déterminant de  $A$ , ajoutons la première colonne à chacune des  $(n-1)$  autres colonnes. Les coefficients des colonnes ainsi modifiées sont dans  $\{-2, 0, 2\}$  et on peut donc mettre 2 en facteur dans chacune de ces  $(n-1)$  colonnes. Le déterminant de  $A$  est donc égal à  $2^{n-1}$  multiplié par le déterminant d'une matrice carrée à coefficients entiers. Il est donc divisible par  $2^{n-1}$ .

### Exercice 3.9

#### Centrale PSI 2006

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $M$  est inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\det(M) = \pm 1$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  une matrice inversible dont l'inverse appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . On a alors  $\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$  et donc  $\det(M)$  est un entier dont l'inverse appartient à  $\mathbb{Z}$ . Il en résulte que  $\det(M) = \pm 1$ .

Réciproquement supposons le déterminant de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  égal à  $\pm 1$ .

L'expression de la matrice inverse à l'aide de la comatrice (cf. exercice 3.14) :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\text{Com}(M),$$

montre que l'inverse de  $M$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

**Exercice 3.10****D'après Centrale PC 2005**

On munit l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de sa base canonique

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{nn}).$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $E$  défini par :  $\forall M \in E, \quad f(M) = AM$ .

Rappelons que  $E_{ij}$  est la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont nuls, excepté le coefficient situé à l'intersection de la ligne d'indice  $i$  et de la colonne d'indice  $j$  qui est égal à 1.

Si  $A = (a_{ij})$ , alors les coefficients  $a_{ij}$  sont les coordonnées de  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On

a donc  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$  et, pour  $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$AE_{k\ell} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i=1}^n a_{ik} E_{i\ell}.$$

La matrice de l'endomorphisme  $f: M \mapsto AM$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice carrée d'ordre  $n^2$ . Elle se présente sous la forme d'une matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} A & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & A & & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_n & \dots & \dots & A \end{pmatrix} \quad \text{où } 0_n \text{ désigne la matrice nulle dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}). \text{ On a donc}$$

$$\text{tr}(f) = n \text{tr}(A) \text{ et } \det(f) = (\det(A))^n.$$

**3.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT****Exercice 3.11****Mines-Ponts PC 2007**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $A_1, \dots, A_n$  les colonnes

de  $A$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $B_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_j$  et  $B = (B_1, \dots, B_n)$ .

Calculer  $\det(B)$  en fonction de  $\det(A)$ .

On observe que  $B_1 + \dots + B_n = (n-1)(A_1 + \dots + A_n)$ . À l'aide de l'opération élémentaire  $B_n \leftarrow B_n + B_1 + \dots + B_{n-1}$  on obtient donc

$$\det(B) = (n-1) \det(B_1, \dots, B_{n-1}, A_1 + \dots + A_n).$$



Retranchons ensuite la dernière colonne aux  $(n - 1)$  premières colonnes. On obtient  $\det(B) = (n - 1) \det(-A_1, \dots, -A_{n-1}, A_1 + \dots + A_n)$ . Dans ce dernier déterminant ajoutons les  $(n - 1)$  premières colonnes à la dernière. On obtient  $\det(B) = (n - 1) \det(-A_1, \dots, -A_{n-1}, A_n)$  et finalement

$$\det(B) = (-1)^{n-1} (n - 1) \det(A).$$

### Exercice 3.12

#### CCP PC 2005, Mines-Ponts PSI 2006

Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$ . Montrer que

$$\det(I_q - BA) = \det(I_p - AB)$$

*Indication de la rédaction :* on pourra effectuer les produits par blocs.

$$\begin{pmatrix} I_p - AB & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q - BA \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_p - AB & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\det(I_p - AB) \cdot \det(I_q) = \det(I_p) \cdot \det(I_q - BA)$  et donc  $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$ .



### Exercice 3.13

#### Mines-Ponts PC 2005

Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $CD = DC$ .

Montrer que :  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ .

*Indication de la rédaction :* on pourra calculer le produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Utilisons l'indication :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On déduit de la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire par bloc que  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ .

### Exercice 3.14

#### Comatrice — Centrale PSI 2006

On désigne par  $\text{Com}(A)$  la comatrice de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1) Expliquer brièvement pourquoi  ${}^t\text{Com}(A)A = A{}^t\text{Com}(A) = \det(A)I_n$ .
- 2) Étudier le rang de la comatrice de  $A$  en fonction du rang de  $A$ .

- 1) Désignons par  $c_{i,j}$  le cofacteur de  $a_{i,j}$ . Rappelons que  $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ , où  $\Delta_{i,j}$  est le mineur relatif au coefficient  $a_{i,j}$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice carrée d'ordre  $n - 1$  obtenue en supprimant la ligne d'indice  $i$  et la colonne d'indice  $j$ .

On sait que  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} c_{i,k} = \det(A)$  (développement du déterminant par rapport à sa  $i$ -ième ligne).

Soit alors  $j$  un indice différent de  $i$  et soit  $A_j$  la matrice obtenue en remplaçant la  $i$ -ième ligne de  $A$  par la  $j$ -ième ligne. Comme  $A_j$  a deux lignes égales, on a  $\det(A_j) = 0$ . En développant le déterminant de  $A_j$  par rapport à sa  $i$ -ième ligne,

on obtient  $\sum_{k=1}^n a_{j,k} c_{i,k} = \det(A_j) = 0$ .

On a donc  $\sum_{k=1}^n a_{j,k} c_{i,k} = \begin{cases} \det A & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

Il en résulte que  $A{}^t\text{Com}(A) = \det(A)I_n$ .

On obtient de la même manière la relation  ${}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$ , en développant le déterminant par rapport aux colonnes de  $A$ .

- 2) Désignons par  $C$  la comatrice de  $A$ .

- Si  $\text{rang}(A) = n$ , alors  ${}^tC = \frac{1}{\det(A)} A^{-1}$  est inversible et donc  $\text{rang}(C) = \text{rang}({}^tC) = n$ .
- Si  $\text{rang}(A) < n - 1$ , alors toute matrice  $U$  obtenue en supprimant une colonne de  $A$  est de rang  $< n - 1$  et toute matrice  $V$  obtenue en supprimant une ligne de  $U$ , est, elle aussi, de rang  $< n - 1$ . Ainsi tous les mineurs de la matrice  $A$  sont nuls. On a donc  $C = 0$  et son rang est égal à 0.
- Si  $\text{rang}(A) = n - 1$ , alors on peut extraire du système des vecteurs-colonnes de  $A$  un sous-système libre formé de  $n - 1$  vecteurs. En d'autres termes, il existe une matrice  $U$ , obtenue en supprimant une colonne de  $A$ , dont le rang est égal à  $n - 1$ . Comme  $n - 1$  est aussi le rang du système des vecteurs-lignes de  $U$ , il existe une matrice  $V$ , obtenue en supprimant une ligne à  $U$ , dont le rang est égal à  $n - 1$ . Le déterminant de  $V$  est non nul et donc la matrice  $C$  possède au moins un coefficient non nul ; on a donc  $\text{rang}(C) \geq 1$ .  
Par ailleurs la relation  $A{}^tC = 0$  montre que l'image de  ${}^tC$  est incluse dans le noyau de  $A$ . On a donc  $\text{rang}({}^tC) \leq 1$  et donc  $\text{rang}(C) = \text{rang}({}^tC) = 1$ .

**Récapitulons :**

- Si  $\text{rang}(A) = n$ , alors  $\text{rang}(C) = n$ .
- Si  $\text{rang}(A) = n - 1$ , alors  $\text{rang}(C) = 1$ .
- Si  $\text{rang}(A) < n - 1$ , alors  $\text{rang}(C) = 0$ .

**Exercice 3.15****Centrale PC 2007**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  où :  $a_{i,i} = z + \frac{1}{z}$ ,  $a_{i,j} = 1$  si  $j = i - 1$  ou  $j = i + 1$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon. Calculer  $\Delta_n = \det(A_n)$ .

*Indication de la rédaction :* on cherchera une relation de récurrence linéaire entre  $\Delta_n$ ,  $\Delta_{n-1}$  et  $\Delta_{n-2}$ .

On a  $\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} z + \frac{1}{z} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z + \frac{1}{z} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & z + \frac{1}{z} \end{vmatrix}.$

Pour  $n \geq 3$ , développons ce déterminant par rapport à la première colonne. On obtient

$$\Delta_n = \left(z + \frac{1}{z}\right) \Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z + \frac{1}{z} & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & z + \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient la relation  $\forall n \geq 3, \Delta_n = \left(z + \frac{1}{z}\right) \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} (*)$ .

On calcule directement  $\Delta_1 = z + \frac{1}{z}$  et  $\Delta_2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1$ . (On observe que la relation  $(*)$  est aussi vérifiée pour  $n = 2$ , si on convient que  $\Delta_0 = 1$ ).

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire du second ordre. L'équation caractéristique associée est  $(E) : r^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right)r + 1 = 0$ .

- Si  $z \neq \pm 1$ , alors l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes :  $z$  et  $\frac{1}{z}$ . Il existe donc deux constantes complexes  $A$  et  $B$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta_n = Az^n + \frac{B}{z^n}$ . Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales  $\Delta_0 = 1 = A + B$  et  $\Delta_1 = z + \frac{1}{z} = Az + \frac{B}{z}$ . On en déduit alors  $A = \frac{z^2}{z^2 - 1}$  et  $B = -\frac{1}{z^2 - 1}$  et donc  $\Delta_n = \frac{z^{n+2}}{z^2 - 1} - \frac{1}{z^n(z^2 - 1)} = \frac{z^{2n+2} - 1}{z^n(z^2 - 1)}$ .
- Si  $z = 1$ , alors l'équation (E) admet une unique racine  $r = 1$  et il existe deux constantes complexes  $A$  et  $B$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta_n = A + Bn$ . On déduit des conditions initiales  $\Delta_0 = 1$  et  $\Delta_1 = 2$  que  $\Delta_n = n + 1$ .
- Si  $z = -1$ , alors l'équation (E) admet une unique racine  $r = -1$  et il existe deux constantes complexes  $A$  et  $B$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta_n = (-1)^n(A + Bn)$ . Les conditions initiales  $\Delta_0 = 1$  et  $\Delta_1 = -2$  donnent alors  $\Delta_n = (-1)^n(1 + n)$ .

### Exercice 3.16

#### TPE PC 2006

Calculer le déterminant de :

$$A_n = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 \dots & 0 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

*Indication de l'examineur :* On pourra commencer par le calcul du déterminant d'ordre  $n$  :

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Commençons par le calcul de  $D_n$ .

La suite des opérations élémentaires

$$[L_1 \leftarrow L_1 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n]$$

donne

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} n-2 \\ n-2 \end{pmatrix} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \dots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première colonne, on obtient  $D_n = (-1)^{n-1} D_{n-1}$ .

Comme  $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ , on en déduit que

$$D_n = (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)^2 (-1) = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Posons alors  $\Delta_n = \det(A_n)$ . En développant par rapport à la dernière colonne on obtient  $\Delta_n = a_n D_n + (-1)^n \Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n + (-1)^n \Delta_{n-1}$ . On en déduit que

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots)$$

(somme alternée des  $a_k$ , pour  $k$  décroissant de  $n$  à 0)

### Exercice 3.17

#### Condition d'alignement de trois points dans le plan

##### Mines-Ponts PSI 2005

Soient  $M$ ,  $M'$  et  $M''$  trois points du plan d'affixes respectives  $z$ ,  $z'$  et  $z''$ .

1) Montrer que  $M$ ,  $M'$  et  $M''$  sont alignés si et seulement si  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} = 0$ .

2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z$ ,  $z^2$  et  $z^4$  soient alignés.

1) On sait que trois points  $M = (x, y)$ ,  $M' = (x', y')$  et  $M'' = (x'', y'')$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{MM'}$  et  $\overrightarrow{MM''}$  sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si  $D = \begin{vmatrix} x' - x & x'' - x \\ y' - y & y'' - y \end{vmatrix} = 0$ . On vérifie facilement que l'on a aussi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix}. \text{ On remarque alors que}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+iy & x'+iy' & x''+iy'' \\ x-iy & x'-iy' & x''-iy'' \end{vmatrix} \quad [L_2 \leftarrow L_2 + L_3] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x' & 2x'' \\ x-iy & x'-iy' & x''-iy'' \end{vmatrix} \quad [L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x' & 2x'' \\ -iy & -iy' & -iy'' \end{vmatrix} = -2i D \end{aligned}$$

et donc la condition d'alignement s'écrit  $\Delta = 0$

2) Posons  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z^2 & z^4 \\ \bar{z} & \bar{z}^2 & \bar{z}^4 \end{vmatrix}$ . En retranchant la deuxième colonne à la première, puis à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z - z^2 & z^2 & z^4 - z^2 \\ \bar{z} - \bar{z}^2 & \bar{z}^2 & \bar{z}^4 - \bar{z}^2 \end{vmatrix} \\ &= -(z - z^2)(\bar{z}^4 - \bar{z}^2) + (z^4 - z^2)(\bar{z} - \bar{z}^2) \\ &= -z\bar{z}(z - 1)(\bar{z} - 1)(z + \bar{z} + 1)(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

La condition d'alignement des points de la question précédente s'écrit  $\Delta = 0$ .

L'ensemble cherché est donc la réunion de la droite d'équation  $y = 0$  ( $z = \bar{z}$ ) et

de la droite d'équation  $x = \frac{-1}{2}$  ( $z + \bar{z} = -1$ ). Les points  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  ( $z = 0$  et  $z = 1$ ) sont situés sur la droite d'équation  $y = 0$ .

### Exercice 3.18

#### Centrale PSI 2005

On considère la matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $A = (a_{ij})$ , avec  $a_{ij} = 1+2+\dots+\min(i, j)$ . Calculer  $\det(A)$ .

**Première méthode :** Soient  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $A$ . Pour tout  $j > 1$

on a  $C_j - C_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ j \\ \vdots \\ j \end{pmatrix}$  (les  $j-1$  premiers coefficients sont nuls et les suivants sont

égaux à  $j$ ). La suite d'opérations élémentaires  $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

transforme donc  $A$  en la matrice triangulaire  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ . On a donc

$$\det(A) = n!.$$

**Deuxième méthode :** On remarque qu'on peut écrire  $A$  comme le produit de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi  $\det(A) = n!$ .

### Exercice 3.19

#### Centrale PC 2007

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1) On pose  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\det(M) \geq 0$ .

2) Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et soit  $\overline{C}$  la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $C$ . Montrer que  $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$ .

3) On suppose que  $A$  et  $B$  vérifient  $AB = BA$ . Montrer que  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ . Qu'en est-il si  $A$  et  $B$  ne commutent pas ?

1) Pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ , échangeons la colonne d'indice  $j$  et la colonne d'indice  $n+j$  dans la matrice  $M$ . Chaque échange multiplie le déterminant par  $-1$  et on obtient donc  $\det(M) = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ 0 & -B \end{vmatrix}$ . Il en résulte que  $\det(M) = (-1)^n \det(B) \det(-B) = \det(B)^2 \geq 0$ .

2) Nous démontrons la propriété  $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . La propriété est évidente si  $n = 1$ . Supposons la propriété vérifiée à l'ordre  $n - 1$  et soit  $C = (c_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . En développant le déterminant de  $\overline{C}$  par rapport à sa première ligne, on obtient

$$\det(\overline{C}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \overline{c_{1j}} \det(\overline{C_{1j}})$$

où  $C_{1j}$  désigne le mineur relatif au coefficient  $c_{1j}$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $\det(\overline{C_{1j}})$ , on obtient bien la relation  $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$ .

2) Appliquant le résultat de la question précédente à la matrice  $C = A + iB$ , on obtient

$$\begin{aligned} \det(A^2 + B^2) &= \det((A + iB)(A - iB)) \\ &= \det(A + iB) \det(A - iB) \\ &= \det(A + iB) \overline{\det(A + iB)} \\ &= |\det(A + iB)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Avec  $n = 2$ , prenons par exemple les matrices  $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a alors  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  et  $B^2 = -I_2$ , d'où  $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$  et  $\det(A^2 + B^2) = -1/2$ .

Nous poursuivons avec une question de cours classique (par exemple Mines-Ponts MP et PC 2007) :

### Exercice 3.20

#### Déterminant de Vandermonde

On se propose de calculer le déterminant d'ordre  $n$

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ .

1) Calculez  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ . Pouvez-vous faire une conjecture concernant  $\Delta_n$  ?

2) On considère le polynôme  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})$ . Montrez qu'il existe  $(b_0, b_1, \dots, b_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$  tel que :

$$P(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0.$$



3) Soient  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$  les colonnes de  $W_n$ . Quel déterminant obtenez-vous en remplaçant la colonne  $C_{n-1}$  par  $C_{n-1} + b_{n-2}C_{n-2} + \dots + b_0C_0$ .

En déduire une relation de récurrence entre  $W_n$  et  $W_{n-1}$ .

4) En déduire  $W_n$ .

1) On calcule facilement  $\Delta_2 = a_2 - a_1$  et  $\Delta_3 = (a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$ .

On peut alors conjecturer que  $W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ .

2)  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})$  est un polynôme unitaire de degré  $n - 1$ .

Il existe donc  $(b_0, b_1, \dots, b_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$  tel que :

$$P(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0.$$

$$3) C_{n-1} + b_{n-2}C_{n-2} + \dots + b_0C_0 = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

On a donc  $W_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}$

4) En développant par rapport à la dernière colonne on obtient la relation de récurrence

$$W_n = P(a_n)W_{n-1} = (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \dots (a_n - a_1) W_{n-1}.$$

5) Une démonstration évidente par récurrence sur  $n \geq 2$  donne alors la relation

$$W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

### Exercice 3.21

#### Déterminant de Vandermonde (suite) ☕

1) Soient  $P_0 = 1, P_1, \dots, P_{n-1}$  des polynômes unitaires, avec  $\deg(P_k) = k$ . Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} P_0(a_1) & P_1(a_1) & P_2(a_1) & \dots & P_{n-1}(a_1) \\ P_0(a_2) & P_1(a_2) & P_2(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & P_2(a_n) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$ .

2) Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \dots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \dots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & \cos(2x_n) & \dots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des nombres réels.

1) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et pour tout  $x \in \mathbb{C}$ , posons

$$P_k(x) = x^k + b_{k,k-1}x^{k-1} + \dots + b_{k,1}x + b_{k,0}.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} P_0(a_1) & P_1(a_1) & P_2(a_1) & \dots & P_{n-1}(a_1) \\ P_0(a_2) & P_1(a_2) & P_2(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & P_2(a_n) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{pmatrix}$$

est alors égale au produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_{1,0} & & & b_{n,0} \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & b_{n,n-1} \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $D_n$  est égal au déterminant de Vandermonde :

$$W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

2) On utilise ici un résultat très classique : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $T_n$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Démontrons par récurrence sur l'entier  $n \in \mathbb{N}$  la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists T_n \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{tel que} \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \quad (P_n)$$

$P_0$  est vérifiée pour  $n = 0$  avec  $T_0 = 1$  et  $P_1$  est également vérifiée avec  $T_1(X) = X$ .

Supposons la propriété vérifiée jusqu'à l'ordre  $n \geq 1$ . La relation

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos(x) \cos(nx)$$

donne alors

$$\begin{aligned} \cos((n+1)x) &= 2 \cos(x) \cos(nx) - \cos((n-1)x) \\ &= 2 \cos(x) T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) \end{aligned}$$

On a donc bien  $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos(x))$ , avec  $T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X)$ .

Cette dernière relation permet à son tour de vérifier (démonstration par récurrence sur  $n$ ) que  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient dominant (pour  $n \geq 1$ ) est  $2^{n-1}$ .

Posons alors  $P_0 = T_0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{pmatrix} T_0(\cos(x_1)) & T_1(\cos(x_1)) & \dots & T_{n-1}(\cos(x_1)) \\ T_0(\cos(x_2)) & T_1(\cos(x_2)) & \dots & T_{n-1}(\cos(x_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(\cos(x_n)) & T_1(\cos(x_n)) & \dots & T_{n-1}(\cos(x_n)) \end{pmatrix} \\ &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \right) \begin{pmatrix} P_0(\cos(x_1)) & P_1(\cos(x_1)) & \dots & P_{n-1}(\cos(x_1)) \\ P_0(\cos(x_2)) & P_1(\cos(x_2)) & \dots & P_{n-1}(\cos(x_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(\cos(x_n)) & P_1(\cos(x_n)) & \dots & P_{n-1}(\cos(x_n)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(x_j) - \cos(x_i)) \end{aligned}$$

### 3.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

#### Exercice 3.22



Centrale PC, MP 2005

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On considère l'application  $f$  définie par :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

1) On suppose qu'il existe  $i \neq j$  tel que  $x_i = x_j$ . Montrer que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

2) Montrer que  $f(x_1, \dots, x_n) = \text{tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

1) Supposons qu'il existe  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i < j$  et  $x_i = x_j$ . Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  distinct de  $i$  et de  $j$  on a  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$ , puisque la famille  $(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$  comporte deux fois le même vecteur.

Il reste donc

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Le second déterminant est obtenu à partir du premier par échange des vecteurs situés à la  $i$ -ième et la  $j$ -ième places. Leur somme est donc égale à 0 et on a bien  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

- 2) L'application  $f$  est la somme de  $n$  formes  $n$ -linéaires. C'est donc une forme  $n$ -linéaire et nous avons démontré dans la question précédente qu'elle est alternée.

On sait d'après le cours qu'il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier pour  $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$  on obtient

$$f(e_1, \dots, e_n) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda.$$

Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a alors

$$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n)$$

et

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1k} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & a_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{kk} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nk} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à sa  $k$ -ième ligne on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n) = a_{kk}, \text{ d'où } \lambda = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr}(u) \text{ et}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

### Exercice 3.23

#### Mines-Ponts PC et PSI 2007 ☕

Soient  $a, b$  et  $c_1, \dots, c_n$  des nombres réels. On se propose de calculer le déterminant de  $A =$

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \dots & a \\ b & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c_n \end{pmatrix}.$$

On introduit pour cela  $\Delta(x) = \det(A - xJ)$  où  $J$  est la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 et on pose :

$$f(x) = (c_1 - x)(c_2 - x) \dots (c_n - x).$$

- 1) On suppose  $a \neq b$ . Exprimer  $\Delta(x)$  à l'aide de  $f(a)$  et de  $f(b)$  et en déduire  $\det(A)$ .

- 2) En déduire enfin  $\det(A)$  lorsque  $a = b$ .

1) En retranchant la première colonne du déterminant  $\Delta(x)$  à chacune des colonnes suivantes et en développant le déterminant obtenu par rapport à sa première colonne, on voit que  $\Delta(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré inférieur ou égal à 1. Il existe donc deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = \alpha x + \beta$ .

Pour  $x = a$  on obtient  $\Delta(a) = (c_1 - a) \dots (c_n - a) = f(a)$  (c'est le déterminant d'une matrice triangulaire). De même pour  $x = b$ , on obtient  $\Delta(b) = f(b)$ . Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors déterminés par les relations  $\alpha a + \beta = f(a)$  et  $\alpha b + \beta = f(b)$ . On en déduit que  $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  et  $\beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$ , d'où  $\det(A) = \Delta(0) = \beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$ .

2) Posons  $D(a, b) = \det(A) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$ . Pour  $a$  fixé dans  $\mathbb{R}$  il s'agit d'une fonction polynomiale et donc d'une fonction continue de la variable  $b$ . On en déduit que  $D(a, a) = \lim_{\substack{b \rightarrow a \\ b \neq a}} D(a, b)$ .

Partons du développement limité à l'ordre 1 de  $f$  au point  $a$  :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + o(b - a).$$

On en déduit que  $bf(a) - af(b) = (b - a)f(a) - a(b - a)f'(a) + o(b - a)$  et  $D(a, b) = f(a) - af'(a) + o(1)$ . On obtient donc  $D(a, a) = f(a) - af'(a)$ .



### Exercice 3.24

#### TPE PSI et PC 2006

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Calculer, lorsque  $k < n - 1$ ,

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \dots & \dots & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

En développant  $\Delta(x)$  par rapport à sa première colonne, on observe qu'il s'agit d'un polynôme (de la variable  $x$ ), dont le degré est strictement inférieur à  $n - 1$ . On a par ailleurs  $\Delta(1) = \Delta(2) = \dots = \Delta(n - 1) = 0$  puisqu'il s'agit à chaque fois du déterminant d'une matrice qui a deux colonnes identiques. Le nombre de racines du polynôme  $\Delta$  est strictement supérieur à son degré. C'est donc le polynôme nul.

### Exercice 3.25

#### École Polytechnique PC 2005 ☕ ☕

Montrer que deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  le sont dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $M$  et  $M'$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Cela signifie qu'il existe une matrice  $Q \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M' = Q^{-1}MQ$ , c'est-à-dire telle que  
(1)  $QM' = MQ$ .

La matrice  $Q = (q_{jk})$  est à coefficients complexes ; on peut écrire  $q_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$  avec  $(a_{jk}, b_{jk}) \in \mathbb{R}^2$ , et donc  $Q = A + iB$ , avec  $A = (a_{jk})$  et  $B = (b_{jk})$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont à coefficients réels et la relation (1) s'écrit  $AM' + iBM' = MA + iMB$ . En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient  $AM' = MA$  et  $BM' = MB$ .

On a donc aussi  $(A + xB)M' = M(A + xB)$  pour tout nombre réel  $x$ .

Posons alors  $P(x) = \det(A + xB)$ . Il s'agit d'un polynôme à coefficients réels et ce polynôme n'est pas le polynôme nul puisque  $P(i) = \det(Q) \neq 0$ . Il existe donc un nombre réel  $x_0$  tel que  $P(x_0) \neq 0$ .

La matrice  $Q_0 = A + x_0B$  est donc inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et vérifie  $Q_0M' = MQ_0$ . On a donc  $M' = Q_0^{-1}MQ_0$ , ce qui montre que  $M$  et  $M'$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 3.26

#### Mines-Ponts PC 2006 ☞

1) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que si  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + X) = \det(X)$ , alors  $C = 0$ .

2) Soient  $A$  et  $B$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(B + X).$$

Montrer que  $A = B$ .

1) En prenant en particulier  $X = -C$ , on obtient  $(-1)^n \det(C) = 0$  et donc  $\det(C) = 0$ . Le rang  $r$  de  $C$  est donc strictement inférieur à  $n$ . On sait que dans ces conditions, il existe des matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $C = PJ_rQ$ , avec  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Introduisons la matrice  $J'_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$  et posons

$$D = PJ'_rQ.$$

On a alors  $C + D = P(J_r + J'_r)Q = PI_nQ = PQ$ , d'où

$\det(C + D) = \det(D) = \det(PQ) \neq 0$ . Il en résulte que  $D$  est inversible et puisque  $\text{rang}(D) = \text{rang}(J'_r) = n - r$ , on a  $r = 0$  et donc  $C = 0$ .

2) Si  $\det(A + X) = \det(B + X)$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors on a aussi

$$\det(A - B + X) = \det(B - B + X) = \det(X)$$

pour toute matrice  $X$  et donc  $A - B = 0$  d'après la question précédente.

## Exercice 3.27

**Mines-Ponts PSI 2006** ☕

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$  et  $A^{-1} = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Soit  $B$  la matrice dont le terme général est  $b_{i,j} = a_{i,j} - 1$ .

Montrer que  $\det(B) = \det(A) \left( 1 - \sum_{1 \leq i,j \leq n} a'_{i,j} \right)$

Soit  $U$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a  $B = A - U$ , d'où

$$\det(B) = \det(A(I_n - A^{-1}U)) = \det(A) \det(I_n - A^{-1}U).$$

La matrice  $C = I_n - A^{-1}U$  est de la forme  $C = \begin{pmatrix} 1 + A_1 & A_1 & \dots & A_1 \\ A_1 & 1 + A_2 & \dots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & A_n & \dots & 1 + A_n \end{pmatrix}$ ,

avec  $A_i = -\sum_{j=1}^n a'_{i,j}$ .

En retranchant la dernière colonne à chacune des précédentes on obtient

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & A_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & A_{n-1} \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 + A_n \end{vmatrix}$$

L'opération élémentaire  $L_n \leftarrow L_n + L_1 + \dots + L_{n-1}$  donne alors

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & A_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & A_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + \sum_{i=1}^n A_i \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n A_i.$$

On a donc bien  $\det(B) = \det(A) \left( 1 - \sum_{1 \leq i,j \leq n} a'_{i,j} \right)$ .

## 4.1 L'ESSENTIEL DU COURS

### Ce qu'il faut savoir

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $b$  un élément de  $F$ . On considère l'équation linéaire  $(\mathcal{E}) : f(x) = b$  où l'inconnue  $x$  est un élément de  $E$ .

L'équation  $f(x) = 0_F$  est appelée l'équation homogène associée.

### Description de l'ensemble des solutions

- L'ensemble  $(S_H)$  de solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de  $E$  (le noyau de l'application linéaire  $f$ ).
- Supposons l'équation linéaire  $f(x) = b$  compatible et soit  $x_0$  une de ses solutions. Alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  de ses solutions est le sous-espace affine

$$\mathcal{S} = x_0 + S_H$$

dont la direction est le sous-espace vectoriel  $S_H = \text{Ker}(f)$  des solutions de l'équation homogène associée.

- Cas où  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies :

Notons  $r$  le rang de l'application linéaire  $f$  et  $n$  la dimension de  $E$ .

- L'ensemble  $S_H = \text{Ker}(f)$  des solutions de l'équation linéaire homogène  $f(x) = 0_F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - r$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}$  de l'équation linéaire  $f(x) = b$  est ou bien l'ensemble vide (lorsque l'équation est incompatible), ou bien un sous-espace affine de  $E$  de dimension  $n - r$ .

### Système de Cramer

- Il s'agit d'un système linéaire de la forme  $AX = B$  où on donne une matrice inversible  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et où l'inconnue,  $X$ , appartient à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Un tel système admet une unique solution :  $X = A^{-1}B$ .

- Les formules de Cramer

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  l'unique solution du système de Cramer  $AX = B$ . Désignons

par  $\Delta$  le déterminant de  $A$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , par  $\Delta_i$  le déterminant de



la matrice obtenue en remplaçant la  $i$ -ième colonne de  $A$  par le second membre

$B$ . On a alors  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ .

## 4.2 EXERCICES

### Exercice 4.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que l'ensemble des endomorphismes  $f$  de  $E$  tels que  $f \circ p = p$  est un sous-espace affine de  $E$  et donner sa dimension.

L'application  $\Phi: f \mapsto f \circ p$  est une application linéaire de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-même. L'exercice consiste à résoudre l'équation linéaire

$$\Phi(f) = p \quad (*)$$

On dispose d'une solution particulière évidente :  $f = p$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  de ses solutions est donc le sous-espace affine  $p + S_H$  de  $\mathcal{L}(E)$  où  $S_H = \text{Ker}(\Phi)$  est l'ensemble des endomorphismes  $f$  de  $E$  tels que  $f \circ p = 0$ .

C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ . Pour déterminer sa dimension, observons d'abord que la relation  $f \circ p = 0$  équivaut à l'inclusion de  $\text{Im}(p)$  dans le noyau  $K$  de  $f$ . Introduisons alors une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  de  $E$  où  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $\text{Im}(p)$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\text{Ker}(p)$ . Pour que l'image de  $p$  soit inclus dans le noyau de  $f$ , il faut et il suffit que  $f(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Cette condition est caractérisée par le fait que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M_1 \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{0}$  désigne la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $M_1$  une matrice arbitraire dans  $\mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{K})$ .

Comme l'application qui à  $f \in \mathcal{L}(E)$  associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est un isomorphisme, la dimension de  $\text{Ker}(\Phi)$  est égale à celle de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire  $n(n-p)$ .

### Exercice 4.2

#### Mines-Ponts PSI 2006

Soient  $a, b$  et  $c$  les racines du polynôme  $X^3 - X + 1$ . Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = -3 \end{cases}$$

Remarquons que les racines du polynôme  $P = X^3 - X + 1$  sont deux à deux distinctes, puisque les racines du polynôme dérivé  $P' = 3X^2 - 1$ ,  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  ne sont pas racines de  $P$ . Le déterminant  $D$  du système est un déterminant de Vandermonde :  $D = (c - a)(c - b)(b - a)$ . Il est non nul et le système est donc de Cramer : il admet une unique solution  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ .

Les relations usuelles entre les coefficients et les racines de  $P$  montrent que  $a+b+c = 0$ ,  $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = -2$  et  $a^3+b^3+c^3 = a+b+c-3 = -3$ . Donc  $(a, b, c)$  est l'unique solution du système.

### Exercice 4.3

#### Centrale PSI 2006

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

Soit  $D$  déterminant du système. On calcule

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\ &= (\lambda + 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_1 \end{aligned} \\ &= (\lambda + 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

• Premier cas : Supposons  $\lambda \neq -3$  et  $\lambda \neq 1$ . Le système est de Cramer. Il admet une unique solution.

En sommant les quatre équations on obtient

$$(\lambda + 3)(x + y + z + t) = 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 \quad \text{d'où} \quad x + y + z + t = \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3}.$$

En retranchant la première équation on obtient  $x(1 - \lambda) = \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3} - 1$ , d'où

$$x = \frac{1}{\lambda - 1} \left( 1 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3} \right)$$

On obtient de la même façon  $y = \frac{1}{\lambda - 1} \left( \mu - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3} \right)$ ,

$$z = \frac{1}{\lambda - 1} \left( \mu^2 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3} \right) \text{ et } t = \frac{1}{\lambda - 1} \left( \mu^3 - \frac{1 + \mu + \mu^2 + \mu^3}{\lambda + 3} \right).$$

• Deuxième cas : Supposons  $\lambda = 1$ . Le système s'écrit  $x + y + z + t = 1 = \mu = \mu^2 = \mu^3$ . Il est compatible si et seulement si  $\mu = 1$  et l'ensemble des solutions est l'hyperplan affine d'équation  $x + y + z + t = 1$ .

• Troisième cas : supposons enfin  $\lambda = -3$ . L'opération élémentaire  $[L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2 + L_3]$  montre que le système équivaut à

$$\begin{cases} -3x + y + z + t = & 1 \\ x - 3y + z + t = & \mu \\ x + y - 3z + t = & \mu^2 \\ 0 = & 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si  $1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\mu \in \{-1, i, -i\}$ .

On peut choisir  $t$  arbitrairement dans  $\mathbb{C}$  et pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $(x, y, z)$  est la solution du système de Cramer

$$\begin{cases} -3x + y + z = & 1 - t \\ x - 3y + z = & \mu - t \\ x + y - 3z = & \mu^2 - t \end{cases}$$

En sommant les trois équations, il vient  $-x - y - z = 1 + \mu + \mu^2 - 3t$ , d'où  $-4x = 2 + \mu + \mu^2 - 4t$  et  $x = -\frac{1}{4}(2 + \mu + \mu^2) + t$ . On trouve de même  $y = -\frac{1}{2}(1 + 2\mu + \mu^2) + t$  et  $z = \frac{1}{2}(1 + \mu + 2\mu^2) + t$ . L'ensemble des solutions est la droite affine passant par  $-\frac{1}{4}(2 + \mu + \mu^2, 1 + 2\mu + \mu^2, 1 + \mu + 2\mu^2, 0)$  et dirigée par le vecteur  $(1, 1, 1, 1)$ .

#### Exercice 4.4

**Mines-Ponts MP 2005, Ecole polytechnique PSI 2006 ☕ ☕**

1) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  formant une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ .

2) Réciproque ?

1) On fait une démonstration par récurrence sur l'entier  $n$ .

La propriété est évidente pour  $n = 1$  : si  $f_1$  est non nulle, alors il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $f_1(x_1) \neq 0$ .

Pour  $n \geq 2$ , supposons la propriété vérifiée à l'ordre  $n-1$  et soient  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  formant une famille libre. La famille  $f_1, \dots, f_{n-1}$  est elle aussi libre et l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  tel que

$$\Delta_n = \det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0.$$

Considérons alors l'application  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, on voit qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \lambda f_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + \lambda_n f_n(x).$$

c'est-à-dire  $\varphi = \lambda f_1 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \lambda_n f_n$ , avec  $\lambda_n = \Delta_n \neq 0$ .

Comme la famille  $f_1, \dots, f_n$  est libre,  $\varphi$  est non nulle. Il existe donc  $x_n \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(x_n) \neq 0$ , ce qui démontre que la propriété est vérifiée à l'ordre  $n$ .

2) Supposons maintenant qu'il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

Démontrons que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre. Soient pour cela  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des nombres réels tels que  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ . On a alors

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x_1) + \dots + \lambda_n f_n(x_1) = 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \dots + \lambda_n f_n(x_2) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \dots + \lambda_n f_n(x_n) = 0 \end{cases}$$

Le  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  apparaît alors comme solution d'un système linéaire homogène de Cramer. On a donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , ce qui démontre bien que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

### Exercice 4.5

TPE MP 2005 ☕

Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ . Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 &= ax_n + b \\ x_2 &= ax_1 + b \\ \vdots & \\ x_n &= ax_{n-1} + b \end{cases}$$

Désignons par  $u$  le point fixe de l'application affine  $x \mapsto ax + b$ , c'est-à-dire  $u = \frac{b}{1-a}$  et posons  $x'_i = x_i - u$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Le système s'écrit 
$$\begin{cases} x'_1 = ax'_n \\ x'_2 = ax'_1 \\ \vdots \\ x'_n = ax'_{n-1} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène : il admet donc au moins la solution nulle. Les  $n - 1$  dernières équations permettent d'exprimer  $x'_2, \dots, x'_n$  à l'aide de  $x'_1$  :

$$x'_2 = ax'_1, \dots, x'_n = a^{n-1}x'_1.$$

La première équation s'écrit alors  $x'_1 = a^n x'_1$ . Si  $a^n = 1$ , c'est-à-dire si  $a$  est une racine  $n$ -ième de l'unité distincte de 1, alors les solutions sont de la forme  $x'_1(1, a, \dots, a^{n-1})$  où  $x'_1$  est un nombre complexe arbitraire, tandis que si  $a$  n'est pas une racine de l'unité, le système admet la seule solution nulle.

En conclusion : si  $a$  est une racine  $n$ -ième de l'unité distincte de 1, alors les solutions sont de la forme  $A(1, a, \dots, a^{n-1}) + u(1, 1, \dots, 1)$  où  $A$  est une constante complexe arbitraire. Sinon, le système admet la seule solution constante :  $u = (1, \dots, 1)$ .

#### Exercice 4.6

Centrale MP, PC 2006



Soit  $k \in \mathbb{C}^*$  et  $(S)$  le système

$$\begin{cases} (1+k^2)x_1 + kx_2 = 0 \\ \dots \\ kx_{i-1} + (1+k^2)x_i + kx_{i+1} = 0 \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ \dots \\ kx_{n-1} + (1+k^2)x_n = 0 \end{cases}$$

Résoudre  $(S)$  en utilisant une suite  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  solution de la récurrence

$$ku_{i-1} + (1+k^2)u_i + ku_{i+1} = 0.$$

Commençons par déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  solutions de la relation de récurrence linéaire  $ku_{i-1} + (1+k^2)u_i + ku_{i+1} = 0$ . Le discriminant de l'équation caractéristique  $kr^2 + (1+k^2)r + k = 0$  est  $\Delta = (1+k^2)^2 - 4k^2 = (1-k^2)^2$ . Si  $k \neq \pm 1$ , alors l'équation admet deux racines complexes distinctes  $r_1 = -k$  et  $r_2 = -\frac{1}{k}$  et les éléments de  $\mathcal{S}$  sont les combinaisons linéaires des suites géométriques de raisons respectives  $-k$  et  $-\frac{1}{k}$ .

Si  $k = 1$  ou  $k = -1$ , alors l'équation caractéristique admet la racine double  $-k$  les éléments de  $\mathcal{S}$  sont les suites de la forme  $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = (a + bi)(-k)^i$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes complexes arbitraires.

On sait de plus qu'une telle suite est déterminée par ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ . De façon précise, pour tout  $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$  il existe une unique suite  $(u_i) \in \mathcal{S}$  telle que  $u_0 = x_0$  et  $u_1 = x_1$ .

Soit alors  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite appartenant à  $\mathcal{S}$ . Si  $u_0 = u_{n+1} = 0$ , alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est solution du système  $(S)$ . Réciproquement si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une solution de  $S$ , alors la suite  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$  définie par ses deux premiers termes  $u_0 = 0$  et  $u_1 = x_1$  vérifie  $u_{n+1} = 0$ .

Supposons d'abord  $k \neq \pm 1$ . Les relations  $u_0 = u_{n+1} = 0$  s'écrivent

$$(S') \quad \begin{cases} a + b &= 0 \\ ak^{n+1} + b \frac{1}{k^{n+1}} &= 0 \end{cases}$$

Lorsque  $k^{2n+2} \neq 1$ , il s'agit d'un système de Cramer. On a  $a = b = 0$ , d'où  $u_i = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $(S)$  admet la seule solution  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ . (C'est un système de Cramer).

Lorsque  $k^{2n+2} = 1$   $(S')$  est un système de rang 1. Ses solutions sont les couples de la forme  $(a, -a)$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et les suites  $u_n$  sont de la forme  $u_i = a(-1)^i \left( k^i - \frac{1}{k^i} \right)$ .

Les solutions de  $(S)$  sont de la forme  $a \left( - \left( k - \frac{1}{k} \right), \dots, (-1)^n \left( k^n - \frac{1}{k^n} \right) \right)$ . (Il s'agit donc d'un système dont le rang est égal à  $n-1$ ).

Dans le cas où  $k = \pm 1$ , les relations  $u_0 = u_{n+1} = 0$  s'écrivent

$$(S') \quad \begin{cases} a &= 0 \\ a + b(n+1) &= 0 \end{cases}$$

On obtient donc  $a = b = 0$  et le système  $(S)$  admet l'unique solution nulle (c'est un système de Cramer).

### Exercice 4.7

#### Mines-Ponts MP 2007

1) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Donner une condition nécessaire et

suffisante sur  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  pour que  $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$  soit inversible dans

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2) Calculer  $A^{-1}$  dans ce cas.

*Indication de la rédaction :* pour la question 2) on pourra chercher à résoudre le système linéaire  $Y = AX$ , avec  $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$  et  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ .

1) Calculons le déterminant de  $A$ . En ajoutant les  $n - 1$  dernières colonnes à la première colonne de  $A$ , on fait apparaître le facteur  $a + (n - 1)b$  et on a donc

$$\det(A) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne au suivantes, on obtient  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 0 & a - b & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a - b \end{vmatrix}$  et en développant par rapport à

la première colonne, on obtient  $\det(A) = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}$ . Il en résulte que  $A$  est inversible si et seulement si  $a \neq b$  et  $a \neq (1 - n)b$ .

2) Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et cherchons à résoudre le

système de Cramer 
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \dots + bx_n = y_1 \\ bx_1 + ax_2 + \dots + bx_n = y_2 \\ \dots \\ bx_1 + bx_2 + \dots + ax_n = y_n \end{cases}$$

à l'aide d'opérations élémentaires sur les équations. En les additionnant, on obtient

$$(a + (n - 1)b)(x_1 + \dots + x_n) = y_1 + \dots + y_n,$$

d'où (1)  $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{a + (n - 1)b} (y_1 + \dots + y_n)$ , puis

$$b(x_1 + \dots + x_n) = \frac{b}{a + (n - 1)b} (y_1 + \dots + y_n).$$

En retranchant cette équation à chacune des équations du système, on obtient

$$\begin{cases} (a - b)x_1 = y_1 - \frac{b}{a + (n - 1)b} (y_1 + \dots + y_n) \\ (a - b)x_2 = y_2 - \frac{b}{a + (n - 1)b} (y_1 + \dots + y_n) \\ \dots \dots \dots \\ (a - b)x_n = y_n - \frac{b}{a + (n - 1)b} (y_1 + \dots + y_n) \end{cases}$$

On en déduit  $x_i = \frac{1}{b-a} y_i - \frac{b}{(b-a)(a+(n-1)b)} (y_1 + \cdots + y_n)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a donc aussi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$x_i = \frac{-by_1 - \cdots - by_{i-1} + (a+(n-2)b)y_i - by_{i+1} - \cdots - by_n}{(a-b)(a+(n-1)b)}.$$

On en déduit finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \cdots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \cdots & -b & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$





# Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 5.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 5.1.1 Valeurs et vecteurs propres

#### Ce qu'il faut savoir

#### Éléments propres d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  lorsqu'il existe un vecteur  $x \neq 0_E$  de  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . Ce vecteur  $x$  est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .

#### Remarque

Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de  $u$ .

- L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé le **spectre** de  $u$ , on le note  $\text{Sp}(u)$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ . Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , alors  $E_\lambda(u)$  est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de valeur propre  $\lambda$ . On l'appelle **sous-espace propre associé à  $\lambda$** . Si  $\lambda \notin \text{Sp}(u)$ , alors  $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ .
- Le scalaire  $\lambda$  appartient à  $\text{Sp}(u)$  si et seulement si  $u - \lambda \text{Id}_E$  est non injectif. En particulier 0 est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $u$  est non injectif.
- Les vecteurs propres et les valeurs propres sont souvent appelés les **éléments propres de  $u$** .
- **Propriété importante** : si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont  $p$  valeurs propres distinctes de  $u$ , alors la somme  $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$  est directe. Ainsi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, dans un espace de dimension  $n$ , il ne peut y avoir plus de  $n$  valeurs propres distinctes.
- Une droite est stable par  $u$  si et seulement si cette droite est incluse dans un sous-espace propre, ou encore, ce qui revient au même, un vecteur directeur de cette droite est un vecteur propre.

## Éléments propres d'une matrice

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $M$  lorsqu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ . Ce vecteur  $X$  est appelé vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ . Les valeurs propres de  $u$  et de  $M$  sont identiques, et  $x$  est vecteur propre de  $u$  pour la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si  $X = \text{Mat}(x, \mathcal{B})$  est vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre  $\lambda$ . On peut donc appliquer à la matrice  $M$  les définitions et les propriétés concernant l'endomorphisme  $u$ .
- Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors on peut la considérer comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Un complexe  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $M$  si et seulement si il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $MX = \lambda X$ . On distingue donc le spectre réel,  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$  et le spectre complexe,  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  qui le contient.
- Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $M$ , alors  $\bar{\lambda}$  est également une valeur propre de  $M$ , et  $E_{\bar{\lambda}}(M) = \overline{E_{\lambda}(M)} = \{\bar{X} \mid X \in E_{\lambda}(M)\}$ .

### Exercice 5.1

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{cases}.$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche les fonctions non nulles  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $f'' = \lambda f$ .

Si  $\lambda > 0$ ,  $E_{\lambda}(\psi) = \text{Vect} \left( t \mapsto \text{ch}(\sqrt{\lambda}t), t \mapsto \text{sh}(\sqrt{\lambda}t) \right)$ .

Si  $\lambda < 0$ ,  $E_{\lambda}(\psi) = \text{Vect} \left( t \mapsto \cos(\sqrt{-\lambda}t), t \mapsto \sin(\sqrt{-\lambda}t) \right)$ .

Si  $\lambda = 0$ , il s'agit de  $\text{Vect}(t \mapsto t, t \mapsto 1) = \{t \mapsto at + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Ainsi,  $\text{Sp}(\psi) = \mathbb{R}$ .

### Exercice 5.2

Soit  $\Phi$  l'endomorphisme qui a pour matrice dans la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la définition, montrer que  $i$  et  $-i$  sont des valeurs propres de  $\Phi$  et déterminer les vecteurs propres associés. En déduire tous les sous-espaces propres de  $A$ .

Cherchons  $V = (x, y, z, t)$  tel que  $AV = iV$ . Cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -z = ix \\ -t = iy \\ x = iz \\ y = it \end{cases} \iff \begin{cases} x = iz \\ y = it \end{cases}.$$

Ainsi  $V \in \text{Ker}(A - iI_4)$  si et seulement si il existe  $(z, t) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $V = \begin{pmatrix} iz \\ it \\ z \\ t \end{pmatrix}$ .

Finalement  $\text{Ker}(A - iI_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . En résolvant le système  $AV = -iV$ ,

on vérifie de la même façon que  $\text{Ker}(A + iI_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Comme la

somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^4$ , il n'y pas d'autre sous-espace propre.

### Remarques

- On aurait pu remarquer que  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et utiliser que  $AV = iV \iff A\bar{V} = -i\bar{V}$ .
- On aurait pu également effectuer une résolution à l'aide d'une écriture par blocs

$$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ où } X \text{ et } Y \text{ sont dans } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}).$$

### Exercice 5.3

#### CCP PSI 2007, Centrale PSI 2007

Soit  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $\Phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ . Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ .

*Indication de la rédaction :* on remarquera que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \neq \pm 1$ ,

$$\text{on a } \frac{2x + 1 - \lambda}{x^2 - 1} = \frac{1 + \lambda}{2(x + 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x - 1)}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\lambda \in \mathbb{R}$  soit valeur propre de  $f$  est qu'il existe un polynôme  $P$  distinct du polynôme nul tel que  $(R) : \Phi(P) = \lambda P$ . La relation  $(R)$  s'écrit  $(X^2 - 1)P' - (2X + 1 - \lambda)P = 0$ . Le polynôme  $P$  est de la forme  $P = a_n X^n + \dots + a_0$ , où  $n$  est le degré de  $P$ , et où  $a_n$  est un réel non nul. Le coefficient de  $X^{n+1}$  dans le polynôme  $Q = (X^2 - 1)P' - (2X + 1 - \lambda)P$  est alors égal à  $(n - 2)a_n$ , et puisque  $Q$  est le polynôme nul, on a nécessairement  $n = 2$  : le polynôme  $P$  est de degré 2.

Pour qu'un polynôme  $P$  vérifie la relation  $(R)$ , il faut et il suffit que la fonction polynomiale associée vérifie sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle linéaire

$$(E) \quad (x^2 - 1)y' - (2x + 1 - \lambda)y = 0.$$

Lorsque  $y$  est une fonction polynomiale, l'équation  $(E)$  est vérifiée sur  $\mathbb{R}$  dès qu'elle est vérifiée sur  $]1, +\infty[$ . Résolvons donc cette équation sur  $]1, +\infty[$ .

Elle s'écrit  $y' = \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}y$ . Notons  $f$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$

par  $f(x) = \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}$ . Elle se décompose en éléments simples sous la

forme  $f(x) = \frac{1+\lambda}{2(x+1)} + \frac{3-\lambda}{2(x-1)}$  et, sur  $]1, +\infty[$ , admet comme primitive

$F : x \mapsto \frac{1+\lambda}{2} \ln(x+1) + \frac{3-\lambda}{2} \ln(x-1)$ . Les solutions de l'équation différentielle

sont donc  $y = Ce^F$ , où  $C$  est une constante, ce qui donne  $y = C(x+1)^{\frac{1+\lambda}{2}}(x-1)^{\frac{3-\lambda}{2}}$ .

Il reste à chercher pour quelles valeurs de  $\lambda$  cette solution est une fonction polynomiale de degré 2. Il y a trois possibilités :

- $\frac{1+\lambda}{2} = 2$  et  $\frac{3-\lambda}{2} = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda = 3$ . Ainsi  $\lambda = 3$  est une valeur propre de  $\Phi$  associé au sous-espace propre  $E_3 = \text{Vect}((X+1)^2)$ .

- $\frac{1+\lambda}{2} = 1$  et  $\frac{3-\lambda}{2} = 1$ , c'est-à-dire  $\lambda = 1$ . Ainsi  $\lambda = 1$  est une valeur propre de  $\Phi$  associé au sous-espace propre  $E_1 = \text{Vect}(X-1)(X+1)$ .

- $\frac{1+\lambda}{2} = 0$  et  $\frac{3-\lambda}{2} = 2$ , c'est-à-dire  $\lambda = -1$ . Ainsi  $\lambda = -1$  est une valeur propre de  $\Phi$  associé au sous-espace propre  $E_{-1} = \text{Vect}((X-1)^2)$ .

### Exercice 5.4

#### CCP PC 2006

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ .

1) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $(x, f(x), f^2(x))$  soit une base de  $E$ .

2) Montrer que la seule droite de  $E$  stable par  $f$  est  $\mathbb{R}f^2(x)$ .

3) Montrer que le seul plan de  $E$  stable par  $f$  est  $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$ .

1) Puisque  $f^2 \neq 0$ , il existe un  $x \in E$  tel que  $f^2(x) \neq 0$ . On vérifie aisément que la famille  $(x, f(x), f^2(x))$  est libre (voir exercice 1.18, page 17), donc il s'agit d'une base de  $E$ .

2) L'endomorphisme  $f$  est nilpotent donc son spectre est réduit à  $\{0\}$ . Soit  $\mathcal{D}$  une droite stable par  $f$  et soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$  tel que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}x$ . Il existe

$\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda x$  et  $x$  est donc un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a nécessairement  $\lambda = 0$  et donc  $x \in \text{Ker } f$ . Ainsi,  $\mathcal{D} \subset \text{Ker } f$ .

Déterminons le noyau de  $f$ . On sait que  $\dim \text{Ker } f = 3 - \text{rg } f$ . Dans la

base  $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x))$ , la matrice représentant  $f$  s'écrit  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Cette matrice est de rang 2 donc  $f$  est également de rang 2 et  $\text{Ker } f$  est une droite. On a donc  $\mathcal{D} = \text{Ker } f$ . En regardant la matrice, on se rend compte que  $\text{Ker } f = \mathbb{R}f^2(x)$ .

Réciproquement,  $\text{Ker } f = \mathbb{R}f^2(x)$  est bien une droite stable et c'est la seule.

- 3) Soit  $\mathcal{P}$  un plan stable par  $f$ . L'endomorphisme  $f|_{\mathcal{P}}$  induit par  $f$  sur  $\mathcal{P}$  est encore un endomorphisme nilpotent. Comme  $\dim \mathcal{P} = 2$ , on sait que l'indice de nilpotence de  $f|_{\mathcal{P}}$  est inférieur ou égal à 2. On a donc  $f|_{\mathcal{P}}^2 = 0$  et donc  $\mathcal{P} \subset \text{Ker } f^2$ .

Déterminons maintenant le noyau de  $f^2$ . On sait que  $\dim \text{Ker } f^2 = 3 - \text{rg } f^2$

et on a  $\text{Mat}(f^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit que  $\text{rg } f^2 = 1$  et que

$\text{Ker } f^2$  est un plan. On a donc  $\mathcal{P} = \text{Ker } f^2$  et on voit sur la matrice que  $\text{Ker } f^2 = \mathbb{R}f(x) \oplus \mathbb{R}f^2(x)$ .

Réciproquement,  $\text{Ker } f^2 = \mathbb{R}f(x) \oplus \mathbb{R}f^2(x)$  est bien un plan stable par  $f$  et c'est le seul.

### 5.1.2 Polynôme caractéristique

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**  $n$ .

- La fonction  $\chi_M : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(M - \lambda I_n) \end{cases}$  est polynomiale. Son polynôme associé, que l'on notera également  $\chi_M$ , est appelé le **polynôme caractéristique** de  $M$ . Il est de degré  $n$  et s'écrit

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr } M) X^{n-1} + \dots + \det M.$$

- Les racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme caractéristique  $\chi_M$  sont exactement les valeurs propres de  $M$ .

#### Remarque

une matrice à coefficients **complexes** admet au moins une valeur propre dans  $\mathbb{C}$  et une matrice à coefficients réels **d'ordre impair** admet au moins une valeur propre dans  $\mathbb{R}$ .

- Lorsque le polynôme  $\chi_M$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pour racines,

$$\text{on a } \det M = \prod_{k=1}^n \lambda_k \text{ et } \text{tr } M = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

- On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre  $\lambda$  de  $M$ , et on note  $m(\lambda)$ , l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda$  du polynôme  $\chi_M$ .

### Remarque pratique

Si  $\lambda$  est une valeur propre complexe d'une matrice réelle, alors  $\bar{\lambda}$  est aussi valeur propre de même ordre de multiplicité que  $\lambda$ .

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.
- La fonction  $\chi_u : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(u - \lambda \text{Id}_E) \end{cases}$  est polynomiale. Son polynôme associé, que l'on notera également  $\chi_u$ , est appelé le **polynôme caractéristique** de  $u$ .
- Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$  alors  $\chi_M = \chi_u$ . Ceci permet d'appliquer les définitions et propriétés précédentes à l'endomorphisme  $u$ .
- **Propriétés**
  - Si  $F$  est un sous-espace stable de  $u$ , alors  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ .
  - Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$ .

### Exercice 5.5



Quel est le spectre (réel) de la matrice réelle  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ?

Donner son polynôme caractéristique puis ses valeurs propres complexes.

La matrice  $R$  est la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure canonique d'espace euclidien.

En général, le spectre réel de  $R$  est l'ensemble vide car si la matrice possède une valeur propre réelle, alors il existe une droite stable par la rotation d'angle  $\theta$ , ce qui n'est le cas que si  $\theta = \pi$  ( $2\pi$ ) (et alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{-1\}$ ) ou si  $\theta = 0$  ( $2\pi$ ) (et alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{1\}$ ).

Calculons le polynôme caractéristique de  $R$ .

$$\begin{aligned} \chi_R(X) &= \begin{vmatrix} \cos \theta - X & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - X \end{vmatrix} = (\cos \theta - X)^2 + \sin^2 \theta \\ &= (\cos \theta - X + i \sin \theta)(\cos \theta - X - i \sin \theta) = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

Les valeurs propres complexes de  $R$  sont  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  (elles sont bien sûr conjuguées car  $\chi_R$  est un polynôme à coefficients réels).

Pour  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ , on retrouve que la matrice  $R$  n'a pas de valeur propre réelle. En revanche, elle a deux valeurs propres complexes simples et conjuguées.

**Exercice 5.6**

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Exprimer le polynôme caractéristique de  $A^{-1}$  en fonction de celui de  $A$ .

Puisque  $A$  est inversible, toute valeur propre de  $A$  est non nulle. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(A^{-1} - \lambda I_n) = \det\left(-\lambda A^{-1} \left(-\frac{1}{\lambda} I_n + A\right)\right) \\ &= (-\lambda)^n \frac{1}{\det A} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} I_n\right) = (-\lambda)^n \frac{1}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

*Conclusion :*  $\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ . On peut remarquer que le polynôme  $X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$  a ses coefficients écrits dans l'ordre inverse de ceux du polynôme  $\chi_A(X)$ .

**Exercice 5.7****Mines-Ponts PC 2007 et MP 2006**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On se propose de démontrer que  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.

- 1) Démontrer le résultat lorsque la matrice  $A$  est inversible.
- 2) On se place maintenant dans le cas général. Soit  $\lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Etablir que

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}.$$

En déduire que  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.

- 1) Lorsque  $A$  est inversible, on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I_n) = \det(A) \det(B - \lambda A^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda A^{-1}) \det(A) = \det(BA - \lambda I_n) = \chi_{BA}(\lambda).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ .

- 2) On vérifie aisément que les deux produits par blocs sont égaux à  $\begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$ .

En prenant les déterminants, on obtient

$$\det(\lambda I_n - BA) \det(\lambda I_n) = \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_n - AB),$$

c'est-à-dire,  $\lambda^n \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$ . On en déduit que  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.

### 5.1.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie** et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

- L'endomorphisme  $u$  est dit **diagonalisable** lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ ,
  - on a  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$ .
- **Caractérisation des endomorphismes diagonalisables** : l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :
  - $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim E$ ,
  - le polynôme  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour toute valeur propre  $\lambda$ , on a  $\dim E_{\lambda}(u) = m(\lambda)$ .
- **Cas particulier important** : si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et à racines simples, alors l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.



#### Remarque pratique

pour déterminer  $\dim E_{\lambda}(u)$ , on étudie suivant les cas  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  (système linéaire) ou bien  $\text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)$  car, d'après le théorème du rang, on a  $\dim E_{\lambda}(u) = \dim E - \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

- **Exemples d'endomorphismes diagonalisables** : les homothéties sont les endomorphismes diagonalisables possédant une seule valeur propre, les projecteurs (resp. les symétries) sont les endomorphismes diagonalisables dont le spectre est inclus dans  $\{0, 1\}$  (resp. dans  $\{-1, 1\}$ ).

#### Remarque

Lorsque  $u$  est diagonalisable, on a  $\text{tr } u = \sum_{\lambda \in \text{Sp } u} m(\lambda)\lambda$  et  $\det u = \prod_{\lambda \in \text{Sp } u} \lambda^{m(\lambda)}$ .

- On dit qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. Cela équivaut à l'existence d'une matrice  $P$  inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de  $M$ , telle que  $P^{-1}MP$  est diagonale.



## Exercice 5.8

Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux réels tels que  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- 2) Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $a_1 a_2 > 0$ .
- 3) Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  si et seulement si  $a_1 a_2 \neq 0$ .

1) On a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_1 \\ a_2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1 a_2$ .

- 2) • Si  $a_1 a_2 > 0$ , alors le polynôme  $\chi_A$  a deux racines réelles distinctes. Il est donc scindé à racines simples. Par conséquent  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , admet deux valeurs propres distinctes et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- Si  $a_1 a_2 < 0$ , alors le polynôme  $\chi_A$  n'admet pas de racine réelle (donc il n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ ). Par conséquent,  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Si  $a_1 a_2 = 0$ , alors  $\chi_A$  admet 0 pour seule racine et cette racine est double. Si  $A$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale de diagonale nulle, donc la matrice nulle. Ainsi  $A$  serait la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent,  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

*Conclusion :* la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $a_1 a_2 > 0$ .

- 3) • Si  $a_1 a_2 \neq 0$ , alors le polynôme  $\chi_A$  a deux racines distinctes (réelles lorsque  $a_1 a_2 > 0$ , complexes conjuguées lorsque  $a_1 a_2 < 0$ ). Il est donc scindé à racines simples. Par conséquent  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , admet deux valeurs propres distinctes et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- Si  $a_1 a_2 = 0$ , alors le raisonnement de la question précédente est encore valable.

*Conclusion :* la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  si et seulement si  $a_1 a_2 \neq 0$ .

## Exercice 5.9

## TPE PC 2006

Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  pour que 2 soit valeur propre de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$ .

Montrer alors que  $A$  est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

- On vérifie facilement que  $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 6X - 2 - 2a$ . Le réel 2 est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\chi_A(2) = 0$ , c'est-à-dire  $a = -1$ . Dans ce cas, on a  $\chi_A = (X - 2)X(X - 3)$ .

- Déterminons les sous-espaces propres de  $A$ .

On cherche l'espace propre  $E_0(A)$ . Le vecteur  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est dans le sous-espace propre  $E_0(A)$  si, et seulement si, il vérifie  $AX = 0X$ . Or

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \iff x = y \text{ et } z = 0.$$

On en déduit que  $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ .

On vérifie de la même façon que  $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  et

$E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ .

- On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la base formée par les vecteurs propres de  $A$ . On a alors  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  et donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Remarque

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour  $P^{-1}AP$ . En effet, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans la nouvelle base formée des vecteurs propres. Les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice de passage  $P$ .

### Exercice 5.10

#### TPE MP 2007

Soient  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$  qui, à toute matrice  $M$ , associe  $u(M) = aM + b^t M$ .

- 1) Montrer que  $u$  est diagonalisable.
- 2) Déterminer  $\text{tr}(u)$  et  $\det(u)$ .

- 1) Pour  $S$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on a  $u(S) = (a + b)S$ . Pour  $A$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , on a  $u(A) = (a - b)A$ . Il en résulte  $a + b$  et  $a - b$  sont des valeurs propres de  $u$ , que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est inclus dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $a + b$  de  $u$  et que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est inclus dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $a - b$ . Comme de plus  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , on peut trouver une base de  $E$  formée de vecteurs propres et l'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable.
- 2) La trace de  $u$  est donnée par

$$\text{tr}(u) = (a+b) \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + (a-b) \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b).$$

Le déterminant de  $u$  est donné par

$$\det(u) = (a+b)^{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))} (a-b)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))} = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

### Exercice 5.11

#### CCP PSI 2006

Soit  $J_n$  la matrice réelle d'ordre  $n$ , où  $n \geq 2$ , dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer le rang, le polynôme caractéristique de  $A$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

- Il est immédiat que  $\text{rg } A = 1$ .
- Puisque  $\text{rg } A = \text{rg } (A - 0I_n) = 1$ , le réel 0 est valeur propre de  $A$  et, par le théorème du rang,  $\dim E_0(A) = n - 1$ . Il en résulte que 0 est racine d'ordre de multiplicité au moins  $n - 1$  de  $\chi_A$ . Le polynôme  $\chi_A$  s'écrit donc sous la forme  $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - a) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} a X^{n-1}$  où  $a$  est un nombre réel. L'expression générale du polynôme caractéristique donne  $a = \text{tr } A = n$ . En conclusion  $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - n)$ .
- Le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé et possède deux racines distinctes 0 et  $n$ , d'ordre de multiplicité respectif  $n - 1$  et 1. La question précédente donne  $\dim E_0(A) = n - 1$ . Comme la racine  $n$  est simple, on a  $\dim E_n(A) = 1$ . Le polynôme caractéristique est scindé et, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. Par conséquent  $A$  est diagonalisable.
- Déterminons les sous-espaces propres de  $A$ .  
Pour déterminer  $E_0(A)$ , on résout le système  $AX = 0$  où  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ . Il équivaut à  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . On a alors

$$E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour déterminer  $E_0(A)$ , on résout le système  $AX = nX$ . Il est équivalent à

$$x_1 + \cdots + x_n = nx_1 = nx_2 = \cdots = nx_n.$$

On obtient alors

$$E_n(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

*L'exercice suivant est un classique qu'on trouve chaque année dans plusieurs concours.*

### Exercice 5.12

#### Plusieurs concours et plusieurs années

Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice réelle  $M$  dont les éléments diagonaux valent  $a$  et les autres valent  $b$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit inversible.

Dans le cas où  $b = 0$ , la matrice est diagonale. On suppose désormais que  $b \neq 0$ .

On pourrait calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $M$  (on obtient  $\chi_M = (-1)^n(X - (a + (n-1)b))(X - (a-b))^{n-1}$ , voir exercice 4.7, page 109) et déterminer ensuite les éléments propres de  $M$ .

On propose ici une autre méthode en remarquant que  $M$  s'écrit  $M = (a-b)I_n + bJ_n$  où  $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice de l'exercice précédent.

La matrice  $J_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}J_nP$  est la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, n)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= (a-b)P^{-1}I_nP + bP^{-1}J_nP = (a-b)I_n + bD \\ &= \text{diag}(\underbrace{a-b, \dots, a-b}_{n-1 \text{ fois}}, a + (n-1)b). \end{aligned}$$

Ainsi,  $M$  est diagonalisable dans la même base que  $J_n$ . Plus précisément, les deux valeurs propres (distinctes car  $b \neq 0$ ) sont  $a-b$  et  $a + (n-1)b$ , et les sous-espaces propres sont  $E_{a-b}(M) = E_0(J_n)$ , hyperplan (voir exercice précédent) et

$$E_{a+(n-1)b}(M) = \text{Vect}\left({}^t(1, 1, \dots, 1)\right).$$

La matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $0 \notin \text{Sp}(M)$  c'est-à-dire  $a \neq b$  et  $a \neq (1-n)b$ . On peut retrouver cette condition par un calcul de déterminant (voir exercice 4.7, page 109).

## Exercice 5.13

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 2, et soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

Remarquons que  $A$  est de rang 1 (car toutes les lignes sont identiques) donc  $E_0(A)$  est de dimension  $n - 1$ . La multiplicité de la valeur propre 0 est donc supérieure ou égale à  $n - 1$ , le polynôme caractéristique  $\chi_A$  s'écrit alors  $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - a)$  où  $a$  est un nombre réel. L'expression générale du polynôme caractéristique donne  $a = \text{tr } A = 0$ . En conclusion  $\chi_A = (-1)^n X^n$ . Si  $A$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, et donc elle serait égale à la matrice nulle. Ce n'est pas le cas et donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

## Ce qu'il faut retenir

Si le rang d'une matrice est petit, alors son noyau a une grande dimension et 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à  $\dim \text{Ker } u$ . De nombreux exercices portent sur des matrices de rang 1 ou 2.

En particulier, si  $M$  est de rang 1, alors  $\chi_M = (-1)^n X^{n-1}(X - \text{tr } M)$ . Il en résulte que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr } M \neq 0$ . Voir les exercices 5.33 page 142, 5.46 page 154.

## 5.1.4 Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs

## Ce qu'il faut savoir

## Polynômes d'endomorphismes

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- À tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on associe l'endomorphisme de  $E$ ,

$$P(u) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k \text{ (avec la convention } u^0 = \text{Id}_E \text{)}.$$

- L'application  $\varphi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{cases}$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbre. On retiendra en particulier :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

**Attention**

- Lorsque  $P = 1$ , on a  $P(u) = \text{Id}_E$ . Lorsque  $P = X$ , on a  $P(u) = u$ .
- Si  $x \in E$ , alors  $P(u)(x)$  a un sens (c'est l'image du vecteur  $x$  par l'endomorphisme  $P(u)$ ). En revanche,  $P(u(x))$  n'a en général pas de sens.

**Remarque**

On note  $\mathbb{K}[u] = \text{Im } \varphi_u$ . C'est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ .

- **Lien avec la stabilité** : soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
  - Les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } P(u)$  et  $\text{Im } P(u)$  sont stables par  $u$ .
  - Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F$  est stable par  $P(u)$  et  $P(u)_F = P(u_F)$ .
- Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ , alors  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(u)$ .

**Polynômes annulateurs**

- On dit que le polynôme  $P$  est un **polynôme annulateur** de  $u$  lorsque  $P(u)$  est l'endomorphisme nul de  $E$ , ce qu'on notera abusivement  $P(u) = 0$  dans la suite de ce chapitre.
- Si  $P(u) = 0$ , alors toute valeur propre de  $u$  est un zéro de  $P$  ; autrement dit  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subset P^{-1}(0)$ .
- Lorsque  $E$  est de dimension finie, tout endomorphisme  $u$  de  $E$  admet au moins un polynôme annulateur. Ce n'est pas vrai lorsque  $E$  n'est pas de dimension finie (voir exercice 5.18 page 127).
- **Résultat important** : si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ . La réciproque est fausse.

**Résultats spécifiques à la filière PSI** : soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- **Théorème de Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ .
- L'ensemble  $\mathcal{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  appelé idéal annulateur de  $u$ . Il est principal et il existe un polynôme non nul de degré minimal  $\pi_u$  (que l'on pourra choisir unitaire) tel que  $\mathcal{I}_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$ .

**Remarque**

- On appelle **polynôme minimal** de  $u$ , l'unique polynôme unitaire de degré minimal qui annule  $u$ .
- Les racines de  $\pi_u$  sont **exactement** les valeurs propres de  $u$ .
- Le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est un multiple de  $\pi_u$ . Par conséquent, on a  $\deg(\pi_u) \leq \dim E$ .

**Exercice 5.14****Centrale MP 2006**

Montrer qu'une matrice de rang 1 est annulée par un polynôme de degré au plus deux.

On a montré dans l'exercice 2.23, page 63 que toute matrice  $A$  de rang 1 vérifie  $A^2 = (\text{tr } A)A$ . Il en résulte que le polynôme  $X^2 - (\text{tr } A)X$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$ .

**Exercice 5.15****Mines-Ponts PC 2007**

Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  

$$\text{tr}(M) = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = 0.$$

Le polynôme  $P = X^3 - 4X^2 + 4X$  est un polynôme annulateur de  $M$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  est inclus dans  $\{0, 2\}$  qui est l'ensemble des zéros de  $P$ . Pour tout nombre réel  $\lambda$ , soit  $m(\lambda)$  l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique de  $M$ . On a alors  $\text{tr}(M) = 0 \times m(0) + 2 \times m(2)$ , et comme  $\text{tr}(M) = 0$ , on en déduit que  $m(2) = 0$ , donc 2 n'est pas valeur propre de  $M$ . Il en résulte que  $M - 2I_n$  est inversible et par conséquent  $(M - 2I_n)^2$  l'est aussi. Ainsi  $M^3 - 4M^2 + 4M = M(M - 2I_n)^2 = 0$  implique  $M = 0$ . Réciproquement la matrice  $M = 0$  convient de manière évidente.

**Exercice 5.16****ENSEA PC 2007**

Soit  $n \geq 2$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A \text{ et } \text{tr } A = 0\}$ .

Observons d'abord que  $\mathcal{A}$  contient la matrice nulle. Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{A}$ . Le polynôme  $P = X^2 - X$  est un polynôme annulateur de  $A$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  est inclus dans  $\{0, 1\}$  qui est l'ensemble des zéros de  $P$ . Pour tout nombre réel  $\lambda$  soit  $m(\lambda)$  l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique de  $A$ . On a alors  $\text{tr}(A) = 0 \times m(0) + 1 \times m(1)$ , et comme  $\text{tr}(M) = 0$ , on en déduit que  $m(1) = 0$ , donc 1 n'est pas valeur propre de  $A$ . Il en résulte que  $A - I_n$  est inversible. Ainsi  $A^2 - A = A(A - I_n) = 0$  implique  $A = 0$ . On a donc  $\mathcal{A} = \{0\}$ .

**Exercice 5.17****CCP PSI 2006, Centrale MP 2007, diverses écoles MP 2005**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On suppose que  $A$  est inversible, montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $A^{-1} = P(A)$

On va vous proposer trois méthodes dont une est spécifique aux élèves de la filière PSI.

• Première méthode

Puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n^2$ , la famille de matrices  $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$  est liée. Il existe donc  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2})$  dans  $\mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

tel que  $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = 0$ .

Si  $\alpha_0 \neq 0$ , alors on a  $A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n^2} \alpha_k A^{k-1}$ .

Si  $\alpha_0 = 0$ , puisque  $P$  est non nul, il existe  $p$  dans  $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k = 0 = X^p Q(X)$  où  $Q(0) \neq 0$ . On a alors  $A^k Q(A) = 0$ , et puisque  $A$  est

inversible on en déduit que  $Q(A) = 0$ . On est ainsi ramené à la situation précédente.

• Deuxième méthode PSI

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que  $\chi_A(A) = 0$ . En outre  $\chi_A(0) = \det A$  n'est pas nul puisque  $A$  est inversible. On conclut comme dans le premier cas de la méthode précédente.

• Troisième méthode



On peut considérer l'endomorphisme  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[A] & \longrightarrow \mathbb{K}[A] \\ N & \longmapsto NA \end{cases}$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[A]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il est donc de dimension finie. Comme  $A$  est inversible,  $\varphi$  est injective, et comme  $\mathbb{K}[A]$  est de dimension finie elle est bijective. La matrice  $I_n$  a donc un antécédent  $N \in \mathbb{K}[A]$  tel que  $NA = I_n$ , c'est l'inverse de  $A$ . Par ailleurs,  $N \in \mathbb{K}[A]$ , il existe donc  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $N = P(A)$ , d'où  $A^{-1} = P(A)$ .

### Exercice 5.18

Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles et soit  $\varphi$  l'endomorphisme qui, à toute suite  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , associe  $\varphi(U) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  n'a pas de polynôme annulateur autre que le polynôme nul.

Soit  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $P(\varphi) = 0$ . Pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}^*$ , la suite  $U_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est telle que  $\varphi(U_\lambda) = \lambda U_\lambda$ . Comme la suite  $U_\lambda$  n'est pas la suite nulle,  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$ . Ainsi  $\mathbb{R}^* \subset \text{Sp}(\varphi)$ . Par ailleurs, toute valeur propre de  $\varphi$  est une racine de  $P$ . Par conséquent, le polynôme  $P$  admet une infinité de racines et c'est donc le polynôme nul.



## 5.1.5 Diagonalisation et polynôme annulateur

## Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- **Critère de diagonalisation** : l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $u$  admet un polynôme annulateur **non nul, scindé et à racines simples**.
- Si  $u$  est diagonalisable et  $F$  est un sous-espace stable par  $u$ , alors  $u_F$  est diagonalisable.
- **PSI** L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp } u} (X - \lambda)$  annule  $u$ .

## Exercice 5.19

Navale PSI 2006, Mines-Ponts MP 2006 et 2007

Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable et

déterminer  $\text{Sp } A$  sans calculer  $\chi_A$ .

*Indication de la rédaction* : on pourra calculer  $A^2$  et en déduire un polynôme annulateur de  $A$ .

On vérifie que  $A^2 = A + 2I_3$ . Le polynôme  $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$  est un polynôme annulateur de  $A$ , scindé sur  $\mathbb{R}$  et à racines simples. La matrice  $A$  est donc diagonalisable. De plus  $\text{Sp } A \subset \{-1, 2\}$ . Si l'une des racines de  $P$  n'était pas valeur propre, la matrice  $A$  serait diagonalisable avec une seule valeur propre et serait donc une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas. Ainsi  $\text{Sp } A = \{-1, 2\}$ .

## Remarque

Bien entendu, le polynôme annulateur donne un critère de diagonalisation et les valeurs propres éventuelles, mais ne donne pas les sous-espaces propres.

Par exemple, pour déterminer les sous-espaces propres de  $A$ , on résout le système  $AX = \lambda X$ . Ainsi, en résolvant le système  $AX = -X$ , on obtient  $E_{-1}(A) = \text{Vect}(V_1, V_2)$  où  $V_1 = {}^t(-a, 1, 0)$  et  $V_2 = {}^t(-a^2, 0, 1)$ . De même, en résolvant le système  $AX = 2X$ , on obtient  $E_2(A) = \text{Vect}(V_3)$  où  $V_3 = {}^t(a^2, a, 1)$ .

## Exercice 5.20

CCP PSI 2007 **PSI**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $(u - \text{Id}_E)^3 \circ (u + 2 \text{Id}_E) = 0$  et  $(u - \text{Id}_E)^2 \circ (u + 2 \text{Id}_E) \neq 0$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

Le polynôme  $(X-1)^3(X+2)$  est un polynôme annulateur de  $u$ , donc  $\text{Sp}(u) \subset \{1, -2\}$ .

Si  $u$  était diagonalisable, alors  $(X-1)(X+2)$  serait un polynôme annulateur de  $u$  donc a fortiori le polynôme  $(X-1)^2(X+2)$ , ce qui n'est pas le cas par hypothèse. En conclusion,  $u$  n'est pas diagonalisable.

### Exercice 5.21

**Mines-Ponts PSI 2007, CCP PC 2006**

Soit  $\phi$  définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  par  $\phi(P)(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

- 1) Montrer que l'application  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - 2) Calculer  $\phi \circ \phi$ . En déduire que  $\phi$  est diagonalisable et déterminer son spectre.
- 1) Montrons que  $\phi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n \in E$ . On a  $\phi(P)(X) = \alpha_0 X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \dots + \alpha_n$  (cela revient à écrire les coefficients du polynôme dans l'ordre inverse), donc  $\phi(P) \in E$ .  
On prouve facilement la linéarité de  $\phi$ , et par conséquent  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 2) Soient  $P \in E$  et  $Q = \phi(P)$ . On a  $\phi(Q) = X^n Q\left(\frac{1}{X}\right)$  avec  $Q\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X^n} P(X)$ , ce qui donne  $\phi(Q) = P = (\phi \circ \phi)(P)$ . Par conséquent,  $\phi^2 = \text{Id}_E$ . On aurait pu également remarquer qu'appliquer  $\phi$  deux fois à  $P$  rétablit l'ordre des coefficients. Finalement le polynôme  $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$  est un polynôme annulateur scindé à racines simples de  $\phi$  et  $\phi$  est diagonalisable (en fait  $\phi$  est une symétrie). Puisque  $\phi \neq \pm \text{Id}_E$ , on vérifie comme dans l'exercice précédent que  $\text{Sp } \phi = \{-1, 1\}$ .

### Exercice 5.22

**TPE MP 2006, Centrale PC 2007**

Soit  $n \geq 2$  et soit  $\phi$  l'endomorphisme qui à toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associe  $\text{tr}(M)I_n - M$  où  $I_n$  désigne la matrice identité.

- 1) Calculer  $\phi^2$  et en déduire que  $\phi$  est diagonalisable.
- 2) Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de  $\phi$ .
- 3) Calculer la trace et le déterminant de  $\phi$ .
- 4) Calculer le polynôme caractéristique de  $\phi$ .

1) Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\begin{aligned}(\phi \circ \phi)(M) &= \text{tr}(\phi(M))I_n - \phi(M) = (n-1)\text{tr}(M)I_n - (\text{tr}(M)I_n - M) \\ &= (n-2)(\text{tr}(M)I_n - M) + (n-1)M = (n-2)\phi(M) + (n-1)M.\end{aligned}$$

Le polynôme  $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-n+1)$  est un polynôme annulateur pour  $\phi$ . Comme il est scindé à racines simples,  $\phi$  est diagonalisable et  $\text{Sp } \Phi \subset \{-1, n-1\}$ .

### Remarque

On fera attention de bien calculer  $(\phi \circ \phi)(M)$  et pas  $\phi(M) \cdot \phi(M)$ .

2) Pour  $n \geq 2$ ,  $\phi$  n'est visiblement pas une homothétie donc  $\phi$  admet pour valeurs propres  $-1$  et  $n-1$ . Déterminons les sous-espaces propres de  $\phi$ . On a  $M \in E_{-1}(\phi)$  si et seulement si  $\text{tr}(M)I_n = 0$  donc

$$E_{-1}(M) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Il s'agit d'un hyperplan (dimension  $n^2 - 1$ ).

On a  $M \in E_{n-1}(\phi)$  lorsque  $-M + (\text{tr } M)I_n = (n-1)M$ , c'est-à-dire

$$M = \frac{\text{tr } M}{n} I_n; \text{ donc } M \in \text{Vect}(I_n). \text{ On vérifie aisément que } \phi(I_n) = (n-1)I_n \text{ donc } E_{n-1}(M) = \text{Vect}(I_n).$$

3) La trace de  $\phi$  est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. On a donc  $\text{tr } \phi = (n^2 - 1) \times (-1) + (n-1) = -n(n-1)$ . De même, le déterminant de  $\phi$  est égal au produit des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Par conséquent,  $\det \phi = (-1)^{n^2-1} \times (n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)$  ( $n^2$  a même parité que  $n$ ).

4) Le polynôme caractéristique est donc  $\chi_\phi(X) = (-1)^{n^2}(X+1)^{n^2-1}(X-(n-1))$ .

### Remarque

Le polynôme annulateur obtenu nous a permis de montrer que  $\phi$  est diagonalisable et de déterminer ses valeurs propres. Ceci nous a permis de déterminer les sous-espaces propres et d'en déduire polynôme caractéristique, trace et déterminant, alors que le calcul direct du polynôme caractéristique n'est pas du tout immédiat.

## 5.1.6 Synthèse sur la diagonalisation

### Ce qu'il faut savoir

#### Recherche des éléments propres

On donne une synthèse non exhaustive des méthodes permettant de déterminer les valeurs propres ou les sous-espaces propres d'une matrice ou d'un endomorphisme. Il n'y a pas de méthode plus efficace dans l'absolu. La structure de la matrice ou la façon dont est défini l'endomorphisme peut rendre l'une des méthodes beaucoup plus simple qu'une autre.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Les valeurs propres sont **exactement** les racines, dans  $\mathbb{K}$ , du polynôme caractéristique de  $A$ . Le calcul de ce polynôme donne exactement les racines.
- Les valeurs propres sont **parmi** les racines d'un polynôme annulateur. La recherche d'un polynôme annulateur de petit degré (rarement plus que 2 ou 3) permet de donner des candidats pour les valeurs propres.
- Les valeurs propres sont les scalaires pour lesquels le système  $AX = \lambda X$  admet des solutions non nulles. Lorsque la résolution du système est facile, cette méthode peut s'avérer efficace.
- Lorsque  $\lambda$  est un scalaire pour lequel la matrice  $A - \lambda I_n$  n'est visiblement pas inversible, le rang de  $A - \lambda I_n$  permet d'obtenir la dimension du sous-espace propre (si son calcul est immédiat).

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

- Les valeurs propres sont **parmi** les racines d'un polynôme annulateur. La recherche d'un polynôme annulateur de petit degré (rarement plus que 2 ou 3) permet de donner des candidats pour les valeurs propres.
- Les valeurs propres sont les scalaires pour lesquels l'équation  $u(x) = \lambda x$  admet des solutions non nulles. Pour résoudre cette équation, on a parfois recours à des méthodes d'analyse (équations différentielles par exemple).
- En dimension finie, une fois une base  $\mathcal{B}$  choisie, les éléments propres de  $u$  sont en bijection avec ceux de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ . On se ramène alors aux méthodes précédentes. Même si cette méthode a l'avantage de se ramener à des méthodes plus concrètes (calcul matriciel), elle n'est pas toujours à privilégier.

## Critères de diagonalisation

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  et  $\chi_u$  son polynôme caractéristique. L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée

- l'espace  $E$  est somme directe de sous-espaces propres
- on a  $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$ .
- le polynôme  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour chaque racine  $\lambda$  de  $\chi_u$ , le sous-espace propre est de dimension  $m_\lambda$ , ordre multiplicité de  $\lambda$  dans  $\chi_u$ .
- il admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

Ces résultats s'adaptent pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## 5.1.7 Endomorphismes trigonalisables

## Ce qu'il faut savoir

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension finie** et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
  - On dit que  $u$  est trigonalisable lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.
  - **PC** l'endomorphisme  $u$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .
- Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  - On dit que  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
  - **PC** la matrice  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .
- On retiendra notamment :
  - si la matrice  $M$  est trigonalisable alors

$$\operatorname{tr} M = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} m(\lambda) \lambda \text{ et } \det M = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \lambda^{m(\lambda)}.$$

- **PC** toute matrice réelle ou complexe est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

## Exercice 5.23

## CCP PSI 2007

Soit  $a$  un réel strictement positif. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et en déduire que  $A$  n'est pas diagonalisable.
- 2) Déterminer trois matrices colonnes  $V_1, V_2, V_3$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} AV_1 = -V_1 \\ AV_2 = V_1 - V_2 \\ AV_3 = V_1 + V_2 - V_3 \end{cases}$$

- 3) Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- 4) Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & a & -a \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$ . En ajoutant la troisième colonne à la deuxième, on obtient  $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -a \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$ . On peut alors mettre  $-1-\lambda$  en facteur et on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} & C_1 \longrightarrow C_1 + C_2 \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

On a donc  $\chi_A(X) = -(X+1)^3$ . Il en résulte que  $A$  admet une seule valeur propre :  $-1$ . Si  $A$  était diagonalisable elle serait semblable à la matrice  $-I_3$ , et elle serait donc égale à la matrice  $-I_3$ . Par conséquent, elle n'est pas diagonalisable.

2) Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$ . La matrice

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2 et donc le sous-espace propre est de dimension 1. Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Cherchons maintenant un vecteur  $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $AV_2 = V_1 - V_2$ , c'est-à-dire

$(A + I_3)V_2 = V_1$ . Nous avons alors  $ay - az = 0$ ,  $x = 1$ , et on peut donc prendre

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons enfin un vecteur  $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $(A + I_3)V_3 = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On

peut prendre  $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ .

3) Soit  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice de la famille  $(V_1, V_2, V_3)$  dans la base canonique

de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\det(P) = \frac{1}{a}$ . Il en résulte que  $(V_1, V_2, V_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et que  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(V_1, V_2, V_3)$ . Si on désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A$ , la matrice de  $f$  dans la base  $(V_1, V_2, V_3)$  est alors  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont donc

semblables et on a  $B = P^{-1}AP$ . On calcule facilement  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ .

4) Supposons d'abord que  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ . On peut écrire  $B = I_3 + N$ , avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $N$  est nilpotente. En effet on a  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^3 = 0$ . Comme elle commute avec  $I_3$  on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer  $B^n$  et on a

$$B^n = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} n N + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

Comme  $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$ , on obtient après calculs,

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}an & (-1)^nan \\ (-1)^{n+1}n & (-1)^n \left(1 + a \frac{n(n-1)}{2}\right) & (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)a}{2} \\ (-1)^{n+1}n & (-1)^n \frac{n(n-1)a}{2} & (-1)^n \left(1 - a \frac{n(n-1)}{2}\right) \end{pmatrix}$$

On peut alors conjecturer que la formule précédente est encore vérifiée pour  $n < 0$  et on est conduit à vérifier que le produit de la matrice précédente avec la matrice obtenue en remplaçant  $n$  par  $-n$  est égal à  $I_3$ .

### Exercice 5.24

PC

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$ . Établir que

$$\chi_{Q(M)} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (Q(\lambda) - X)^{m(\lambda)}.$$

Le polynôme  $\chi_M$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  donc  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe alors une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$M = PTP^{-1}$$

avec  $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (*) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . On a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$M^k = PT^kP^{-1}$$

avec  $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (*) \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ . On en déduit que

$$Q(M) = PQ(T)P^{-1}$$

avec  $Q(T) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & & (*) \\ & Q(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix}$ .

**Conclusion :** comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique,

on a alors  $\chi_{Q(M)} = \chi_{Q(T)} \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (Q(\lambda) - X)^{m(\lambda)}$ .

## 5.1.8 Applications de la réduction des matrices

### Ce qu'il faut savoir

- **Calcul des puissances itérées de  $A$  :** soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

- Lorsque  $A$  est diagonalisable, il existe  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $D$  diagonale telles que  $P^{-1}AP = D$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $P^{-1}A^nP = D^n$  et donc  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
- Lorsque  $A$  n'est que trigonalisable, on essaie d'écrire  $A = PTP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ ,  $T$  triangulaire supérieure telle que  $T = D + N$  avec  $D$  diagonale,  $N$  triangulaire strictement supérieure et  $DN = ND$ . Ainsi on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on obtient

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k}, \quad N \text{ étant nilpotente, le calcul est alors plus simple (voir exercice 5.23, page 132).}$$



- **Étude des suites récurrences linéaires** : par exemple, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a la relation 
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ où } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}), \text{ alors, pour tout } n \in \mathbb{N},$$
 on a 
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$
 d'où une expression des suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .
- **Résolution d'équations matricielles** : par exemple  $M^3 - 2M = A$  avec  $M$  pour inconnue, on cherche à diagonaliser ou à trigonaliser  $A$  et on utilise le fait qu'une solution éventuelle  $M$  commute nécessairement avec  $A$ , voir exercice 5.26 p.136.
- **Étude des systèmes différentiels du type  $Y' = AY$  (ou  $Y' = AY + B(t)$ )**.  
On cherche  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale ou triangulaire en déterminant les éléments propres de la matrice. En posant  $Z = P^{-1}Y$ , le système différentiel se réécrit  $Z' = (P^{-1}AP)Z + P^{-1}B(t)$  que l'on sait résoudre. On termine en revenant à  $Y = PZ$  (remarquons que le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas nécessaire si  $B(t) = 0$ ). Nous renvoyons le lecteur au chapitre sur les équations différentielles linéaires dans le tome d'analyse.

## Exercice 5.25



## CCP PC 2006

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$ .

Le polynôme caractéristique  $\chi_A = (X - 2)(X - 3)$  est scindé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable.

On vérifie que  $P^{-1}AP = \text{diag}(2, 3)$  avec, par exemple,  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Il en résulte que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = P \text{diag}(2^n, 3^n) P^{-1}$ . Sachant que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient après calculs,  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \times 3^n - 2^{n+1} & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix}$ .

## Exercice 5.26

## CCP PC 2006, TPE MP 2006

Soient  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ .

1) Déterminer les racines réelles de  $X^3 - 2X + 1$  et de  $X^3 - 2X - 4$ .

2) Trouver les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $D$ .

3) Résoudre  $M^3 - 2M = D$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

4) Résoudre  $M^3 - 2M = A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1) le réel 1 est racine évidente de  $X^3 - 2X + 1$  donc

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1) = (X - 1) \left( X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

De même,  $X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X + 1 + i)(X + 1 - i)$ .

2) Montrons que les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $D$  sont les matrices diagonales. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . La relation  $MD = DM$  est équivalente à

$$\begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}. \text{ Cela donne } b = c = 0.$$

3) Supposons que  $M^3 - 2M = D$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Puisque la matrice  $M$  commute avec  $M^3 - 2M$ , elle commute alors avec  $D$ . La question précédente montre alors que  $M$  une matrice diagonale  $M = \text{diag}(\alpha, \beta)$ . En reportant dans l'équation matricielle, il vient que  $M$  est solution si et seulement si  $M = \text{diag}(\alpha, \beta)$  avec

$$\alpha \in \left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\} \text{ et } \beta \in \{2\} \text{ (}\beta \text{ racine réelle de } X^3 - 2X - 4\text{)}.$$

L'équation a donc trois solutions.

4) Pour résoudre l'équation  $M^3 - 2M = A$ , on commence par réduire  $A$ . Comme le polynôme caractéristique  $\chi_A$  vaut  $(X + 1)(X - 4)$ , la matrice  $A$  est diagonalisable et semblable à  $D$ . Il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  tel que  $P^{-1}AP = D$ . Soit  $M' = P^{-1}MP$  alors  $M^3 - 2M = A$  équivaut à  $M'^3 - 2M' = D$ . Cette équation

est équivalente à  $M' = \text{diag}(\alpha, 2)$  avec  $\alpha \in \left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$ . On

retrouve  $M$  en écrivant que  $M = PM'P^{-1}$ .

On vérifie que  $E_{-1}(M) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$  et  $E_4(M) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . On

peut donc prendre  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , puis on calcule  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Conclusion :** les solutions de  $M^3 - 2M = A$  sont  $P \text{diag}(\alpha, 2) P^{-1}$  avec

$$\alpha \in \left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

## Exercice 5.27

## CCP TSI 2007

On définit les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ w_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n. \end{cases}$$

On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ,  $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $A$  telle que  $X_{n+1} = AX_n$ .

Calculer  $AC_1$ ,  $AC_2$  et  $AC_3$ , puis donner les propriétés de  $A$ .

Justifier l'existence de  $a, b, c$  réels tels que  $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$  puis montrer que  $X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$  (d'où les expressions des termes  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ ).



Le système peut s'écrire  $X_{n+1} = AX_n$  avec  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ ,

d'où  $X_n = A^n X_0$ .

On vérifie que

$$AC_1 = \frac{5}{2}C_1, \quad AC_2 = C_2, \quad AC_3 = \frac{1}{3}C_3$$

donc  $\left\{\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{3}\right\}$  sont des valeurs propres de  $A$ , et comme  $A$  est une matrice carrée d'ordre 3,  $(C_1, C_2, C_3)$  est une base de vecteurs propres de  $A$ . C'est en particulier une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et il existe des réels  $a, b$  et  $c$  telles que

$$X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3.$$

Il vient alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X_n = A^n X_0 = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3.$$

## Exercice 5.28

## Centrale PC 2007

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = B$ .

1) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $AB^k - B^kA = kB^k$ .

2) En déduire que  $B$  est nilpotente.

*Indication de la rédaction* utiliser l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\Phi(M) = AM - MA$ .

1) On démontre la propriété par récurrence. Elle est vraie pour  $k = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie pour un entier  $k \geq 1$ . En multipliant à droite par  $B$  la relation  $AB^k = B^kA + kB^k$ , on obtient

$$AB^{k+1} = B^kAB + kB^{k+1} = B^k(BA + B) + kB^{k+1} = B^{k+1}A + (k+1)B^{k+1}.$$

D'où  $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$ . On obtient donc la relation au rang  $k+1$ . Elle sera donc vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

2) L'application  $\Phi : M \mapsto AM - MA$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a alors  $\Phi(B^k) = kB^k$ . Si  $B$  n'est pas nilpotente, alors  $B^k$  n'est pas nulle et  $B^k$  est un vecteur propre de  $\Phi$  associé à la valeur propre  $k$ . Dans ce cas,  $\Phi$  a une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie. La matrice  $B$  est donc nilpotente.

## 5.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## Exercice 5.29

## CCP PC 2006, Air PC 2006

Soit  $f$  l'endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{C}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ , où  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont des nombres complexes,  $a_1$  et  $a_2$  n'étant pas tous les deux nuls.

1) Déterminer le noyau de  $f$ .

2) Établir que  $A$  a pour polynôme caractéristique

$$P_A(X) = -X [X^2 - a_3X - (a_1^2 + a_2^2)].$$

3) Montrer que si  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) \neq 0$  et  $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ , alors  $A$  est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres.

4) Montrer que si  $a_1^2 + a_2^2 = 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

5) Montrer que si  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) = 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

- 1) Un vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{C}^3$  appartient à  $\text{Ker } f$  si, et seulement si, il vérifie le système

$$(S) \begin{cases} a_1 x_3 = 0 \\ a_2 x_3 = 0 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

Comme  $a_1$  et  $a_2$  ne sont pas nuls simultanément, le système (S) est équivalent à

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

Ainsi,  $\text{Ker } f$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $U = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- 2) En appliquant par exemple la règle de Sarrus, on vérifie que le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$P_A(X) = -X [X^2 - a_3 X - (a_1^2 + a_2^2)].$$

- 3) Si  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) \neq 0$ , le polynôme  $X^2 - a_3 X - (a_1^2 + a_2^2)$  admet deux racines distinctes qu'on note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{C}$ . Si, en outre,  $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ , aucune des racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  n'est nulle,  $P_A$  admet donc trois racines distinctes. Par conséquent,  $A$

est diagonalisable. On vérifie que  $A$  a pour vecteurs propres  $U = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$  et  $W = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  associés respectivement aux valeurs propres 0,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

- 4) Si  $a_1^2 + a_2^2 = 0$ , alors  $P_A(X) = -X^2(X - a_3)$ . Dans ce cas, 0 est au moins valeur propre double de  $f$  avec un sous-espace propre correspondant ( $= \text{Ker } f$ ) de dimension 1. Par conséquent  $f$  n'est pas diagonalisable.

- 5) Si  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) = 0$ , alors  $P_A(X) = -X \left( X - \frac{a_3}{2} \right)^2$ .

- Si  $a_3 \neq 0$ , alors  $\frac{a_3}{2}$  est valeur propre double de  $f$ . Mais, le sous-espace propre

associé à la valeur propre  $\frac{a_3}{2}$  est la droite vectorielle engendrée par  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \frac{a_3}{2} \end{pmatrix}$ .

L'endomorphisme  $f$  n'est donc pas diagonalisable.

- Si  $a_3 = 0$ , seul  $\text{Ker } f$  est sous-espace propre et donc  $f$  n'est pas diagonalisable.  
Conclusion : si  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) = 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

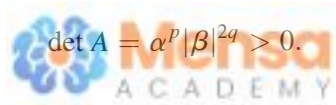
**Remarque**

Si  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ , alors  $a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2) > 0$  et  $a_1^2 + a_2^2 > 0$  et donc  $A$  est toujours diagonalisable.

**Exercice 5.30****CCP PSI 2006**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . En déduire que  $\det A > 0$ .

Le polynôme  $P = X^3 - X - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ . Une étude des variations de la fonction  $x \mapsto x^3 - x - 1$  montre que le polynôme  $P$  possède un unique racine réelle  $\alpha > 0$ . Il possède donc également deux racines complexes non réelles conjuguées  $\beta$  et  $\bar{\beta}$ . Le polynôme  $P$  est donc scindé à racines simples, par conséquent  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . La matrice  $A$  admet pour valeurs propres éventuelles  $\alpha$  de multiplicité  $p$  ( $p$  peut être nul), ainsi que  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  d'ordre de multiplicité commun  $q$  ( $q$  peut être nul). Ainsi



$$\det A = \alpha^p |\beta|^{2q} > 0.$$

**Exercice 5.31****Mines-Ponts PC 2006**

Soit  $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  vérifie  $A^3 = A^2 - 2A$ , alors elle n'est pas inversible.

Le polynôme  $X^3 - X^2 + 2X = X \underbrace{(X^2 - X + 2)}_{\Delta < 0}$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et ses valeurs propres sont parmi 0 et  $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ . Ses éventuelles valeurs propres complexes sont conjuguées et de même ordre de multiplicité. Comme la somme des ordres de multiplicités est impaire ( $= 5$ ), il y a forcément une valeur propre réelle qui ne peut être que 0. Ainsi  $0 \in \text{Sp}(A)$  et  $A$  n'est donc pas inversible.

**Exercice 5.32****TPE MP, PSI 2006**

Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + {}^t M = I_n$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?  
Indication de la rédaction : on pourra chercher un polynôme annulateur de  $M$ .

Cherchons un polynôme annulateur. On a  ${}^tM = I_n - M^2$ , donc

$$M = I_n - {}^t(M^2) = I_n - (I_n - M^2)^2 = 2M^2 - M^4.$$

On a donc  $M^4 - 2M^2 + M = 0$ .

Comme  $M$  est inversible, on a  $M^3 - 2M + I_n = 0$ . Par ailleurs, on a

$$P(X) = X^3 - 2X + 1 = (X - 1) \left( X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Le polynôme  $P$  est donc scindé et à racines réelles simples. Par conséquent,  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 5.33

**CCP PSI 2007, TPE MP 2006, Centrale PC 2005**

- 1) Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si sa trace est non nulle.
- 2) Montrer que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficient  $a_{ij} = \frac{i}{j}$  est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

1) Soit  $A$  une matrice de rang 1. On a  $\dim E_0(A) = n - 1 \leq m(0)$  donc le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme  $\chi_A = (-1)^n X^{n-1} (X - \text{tr } A)$ . Si  $\text{tr } A = 0$ ,  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  mais  $E_0(A) \neq E$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable et si  $\text{tr } A \neq 0$ ,  $E_{\text{tr } A}(A)$  est une droite, et  $A$  est diagonalisable.

2) On suppose  $A = (i/j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ . Toutes les colonnes de  $A$  sont proportionnelles à la première (qui est non nulle) donc  $\text{rg } A = 1$ . De plus,  $\text{tr } A = n \neq 0$  donc  $A$  est diagonalisable. Soit  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ . L'équation  $AX = nX$  donne

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{j} = n \frac{x_1}{1} = \dots = n \frac{x_n}{n}. \text{ On voit ainsi que } {}^t(1, 2, \dots, n) \text{ est vecteur propre de}$$

valeur propre  $n$ . Enfin  $\text{Ker } A = E_0(A)$  est l'hyperplan d'équation  $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} = 0$ .

### Exercice 5.34

**Mines-Ponts PC 2006, CCP PSI 2006**

Soient  $n \geq 2$  et  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 0$ . On considère l'endomorphisme  $\Phi$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  qui à toute matrice  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associe  $\Phi(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$ .

- 1) Déterminer le noyau et l'image de  $\Phi$ .
- 2) Montrer que  $\Phi$  est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

- 1) Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Comme  $\text{tr}(A) \neq 0$ , la matrice  $M$  est dans  $\text{Ker } \Phi$  si et seulement si  $M = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(A)}A$ . On en déduit que  $M \in \text{Ker } \Phi$  entraîne  $M \in \text{Vect}(A)$ . Or un simple calcul montre que pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  on a  $\Phi(\lambda A) = 0$ . il en résulte que  $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(A)$ .

La linéarité de la trace entraîne que pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\text{tr}(\Phi(M)) = \text{tr}(M)\text{tr}(A) - \text{tr}(M)\text{tr}(A) = 0.$$

En notant  $H$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  constitué des matrices de trace nulle, le calcul précédent montre que  $\text{Im}(\Phi) \subset H$ . Par ailleurs, en vertu du théorème du rang, on a  $\dim(\text{Im}(\Phi)) = n^2 - 1 = \dim H$ . On en déduit que finalement  $\text{Im}(\Phi) = H$ .

## 2) • Première méthode

Le résultat précédent montre que 0 est valeur propre de  $\Phi$  et le sous-espace propre associé est  $\text{Vect}(A)$ . Les vecteurs propres de  $\Phi$  appartiennent à l'image de  $\Phi$  donc à  $H$ . Or si la trace de  $M$  est nulle on a  $\Phi(M) = \text{tr}(A)M$ , et par conséquent, le réel  $\text{tr}(A)$  est valeur propre de  $\phi$  de sous-espace propre associé  $H$ . Comme  $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(A)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ , il en résulte que  $\Phi$  est diagonalisable et qu'on connaît ses éléments propres. Le spectre de  $\Phi$  est  $\{0, \text{tr}(A)\}$ , de plus  $E_0 = \text{Vect}(A)$  et  $E_{\text{tr}(A)} = H$ .

## • Deuxième méthode

On cherche un polynôme annulateur de  $\Phi$ . Comme pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on a  $\text{tr}(\Phi(M)) = 0$ , le calcul de  $\Phi \circ \Phi$  donne

$$\Phi \circ \Phi(M) = \text{tr}(A)\Phi(M) - \text{tr}(\Phi(M))A = \text{tr}(A)\Phi(M).$$

Comme  $\text{tr}(A) \neq 0$ , le polynôme  $P(X) = X(X - \text{tr}(A))$  est un polynôme scindé à racines simples qui annule  $\Phi$ , on en déduit que  $\Phi$  est diagonalisable et que son spectre est  $\{0, \text{tr}(A)\}$ . On connaît  $E_0$ , c'est le noyau de  $\Phi$  et en résolvant ensuite l'équation  $\Phi(M) = \text{tr}(A)M$ , on retrouve le sous-espace propre  $E_{\text{tr}(A)} = H$ .

### Exercice 5.35

#### Centrale MP 2006

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  par

$$u(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP.$$

- 1) Montrer que  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ .
  - 2) Déterminer les sous-espaces propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
- 1) Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$  de degré  $d \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ . Montrons que  $u(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$ .
- Supposons que  $d = 0$ . Le polynôme  $P$  est alors constant,  $u(P) = -2nXP$  est un polynôme de degré 1 et est donc dans  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  ( $n \geq 1$ ).



- Supposons que  $d \geq 1$ .

Le polynôme s'écrit  $P = a_d X^d + \dots$  et  $(X^2 - 1)P' = da_d X^{d+1} + \dots$  d'où

$$u(P) = da_d X^{d+1} + \dots - 2na_d X^{d+1} + \dots = a_d (d - 2n) X^{d+1} + \dots$$

Si  $d < 2n$ , on a  $\deg u(P) = d + 1 \leq 2n$  et si  $d = 2n$ , le coefficient de  $X^{d+1}$  s'annule et donc  $\deg P \leq 2n$ .

L'application  $u$  est donc bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ . Il est immédiat que  $u$  est linéaire,  $u$  est donc bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .

- 2) Cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ , c'est-à-dire les réels  $\lambda$  et les polynômes  $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  non nuls tels que  $(X^2 - 1)P' - 2nXP = \lambda P$ . Soit  $P$  un tel polynôme. La fonction polynomiale associée à  $P$  sur  $\mathbb{R}$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(x^2 - 1)y' - (2nx + \lambda)y = 0$ . Lorsque  $y$  est une fonction polynomiale, elle vérifie cette équation différentielle dès qu'elle la vérifie sur  $]1, +\infty[$ . La solution générale de cette équation différentielle sur  $]1, +\infty[$  est  $y : x \mapsto C \exp\left(\int \frac{2nx + \lambda}{(x-1)(x+1)} dx\right)$ . La recherche de  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\frac{nX + \lambda}{(X-1)(X+1)} = \frac{\alpha}{(X-1)} + \frac{\beta}{(X+1)}$  donne  $\alpha = n + \frac{\lambda}{2}$  et  $\beta = n - \frac{\lambda}{2}$ . Ainsi  $y$  est la fonction

$$x \mapsto C \exp\left(\frac{2n + \lambda}{2} \ln(x-1) + \frac{2n - \lambda}{2} \ln(x+1)\right) = C (x-1)^{\frac{2n+\lambda}{2}} (x+1)^{\frac{2n-\lambda}{2}}.$$

Pour que l'expression précédente soit polynomiale, il suffit que  $\frac{2n + \lambda}{2}$  et  $\frac{2n - \lambda}{2}$  soient des entiers naturels. On remarque que  $\frac{2n + \lambda}{2} + \frac{2n - \lambda}{2} = 2n$ . L'expression est donc polynomiale lorsque il existe  $k \in [0, 2n]$  tel que  $\frac{2n + \lambda}{2} = k$ , c'est-à-dire  $\lambda = 2k - 2n$ .

Nous obtenons ainsi  $2n + 1$  valeurs distinctes de  $\lambda$ ,  $\lambda_k = 2(k - n)$  lorsque  $k$  décrit  $[0, 2n]$  qui sont valeurs propres de vecteurs propres  $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{2n-k}$ . Comme la dimension de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  est égale à  $2n + 1$ , l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable car on a trouvé  $2n + 1$  valeurs propres distinctes.

### Exercice 5.36

#### ENSAM PSI 2005

Soient  $A$  et  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 + M + I_n = 0$  et  $A^2 = M$ .

- 1) Montrer que  $M$  est inversible.
- 2) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ? dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
- 3) Montrer que  $n$  est pair.
- 4) Calculer les valeurs propres de  $M$ ,  $\text{tr}(M)$  et  $\det(M)$ .
- 5) Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

6) Montrer que si  $\frac{n}{2}$  est impair, alors  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}^*$ .

- 1) On a  $M(-M - I_n) = I_n$ , donc  $M$  est inversible d'inverse  $-M - I_n$ .
- 2) Le polynôme  $X^2 + X + 1$  est annulateur de  $M$ . Comme il est scindé à racines simples ( $j = e^{2i\pi/3}$  et  $\bar{j}$ ) dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ses valeurs propres sont parmi  $j$  et  $\bar{j}$ , donc  $M$  n'a pas de valeur propre réelle, et par conséquent  $M$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 3) Le polynôme caractéristique de  $M$  est réel et n'a que deux racines complexes conjuguées  $j$  et  $\bar{j}$ , de même ordre de multiplicité  $m$ . De plus  $m + m = n$  le degré du polynôme  $\chi_M$ . Par conséquent  $n$  est pair et  $\chi_M = (X^2 + X + 1)^m$ .
- 4) La matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\text{Sp}(M) = \{j, \bar{j}\}$ . Puisque chacune des deux valeurs propres est d'ordre de multiplicité  $m$ , on a donc

$$\text{tr}(M) = mj + m\bar{j} = 2m \text{Re}(j) = -m = -\frac{n}{2} \text{ et } \det M = j^m \bar{j}^m = |j|^{2m} = 1.$$

- 5) Soit  $P = X^2 + X + 1$ . Le polynôme  $Q = P(X^2)$  est un polynôme annulateur de  $A$ . De plus

$$Q = (X^2 - j)(X^2 - \bar{j}) = (X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X + e^{-i\pi/3}).$$

Il est donc scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ . Par conséquent, la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- 6) Notons  $m_1$  l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de  $e^{i\pi/3}$  dans le polynôme caractéristique de  $A$ , de même, associons  $m_2$  à  $-e^{i\pi/3}$ ,  $m_3$  à  $e^{-i\pi/3}$ ,  $m_4$  à  $-e^{-i\pi/3}$ . En étudiant la relation  $A^2 = M$  dans une base de diagonalisation de  $A$ , il vient  $m_1 + m_2 = m$  ( $e^{i\pi/3}$  et  $-e^{i\pi/3}$  sont les racines carrées de  $j$ ) ainsi que  $m_3 + m_4 = m$  (pour les racines de  $\bar{j}$ ). De plus  $e^{-i\pi/3}$  est le conjugué de  $e^{i\pi/3}$ , donc  $m_1 = m_3$ . De la même manière, on obtient  $m_2 = m_4$ . Finalement

$$\text{tr}(A) = m_1 e^{i\pi/3} - m_2 e^{i\pi/3} + m_1 e^{-i\pi/3} - m_2 e^{-i\pi/3} = m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Si  $\text{tr}(A) = 0$ , alors  $m_1 = m_2$  donc  $m = \frac{n}{2} = 2m_1$  est pair, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}^*$ .

(Voir aussi l'exercice 5.50 page 156).

### Exercice 5.37

#### CCP PC 2006, Centrale MP 2006 (Matrices circulantes)

$$\text{Soient } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

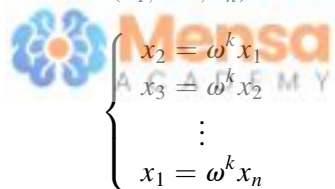
- 1) Expliciter  $J^k$  pour  $1 \leq k \leq n-1$  et  $J^n$ .

*Indication de la rédaction :* on pourra calculer  $Je_p$  pour  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

- 2) Montrer que la matrice  $J$  est diagonalisable et déterminer une base  $\mathcal{B}$  de vecteurs propres de la matrice  $J$ .
- 3) Montrer que  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{B}$ .
- 4) *Question de la rédaction :* en déduire  $\det(A)$ .

- 1) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On remarque que  $Je_p = e_{p-1}$  pour  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et  $Je_1 = e_n$ . Ce phénomène cyclique permet de calculer  $J^k e_p$  avec  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si  $p > k$ ,  $J^k e_p = e_{p-k}$  et si  $p \leq k$ ,  $J^k e_p = J^{k-(p-1)} e_1 = J^{k-p} e_n = e_{n-k+p}$  d'où l'allure des matrices  $J^k$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$  et de plus,  $J^n = I_n$ .

- 2) La matrice  $J$  vérifie  $J^n = I_n$  donc le polynôme  $X^n - 1$  annule  $J$ . Ce polynôme, dont les racines sont les racines  $n$ -ièmes de l'unité, est scindé à racines simples, donc  $J$  est diagonalisable. On a  $\text{Sp}(J) \subset \{\omega^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$  avec  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . On résout  $JX = \omega^k X$  avec  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ . On obtient



$$\begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases}$$

et on s'aperçoit que toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont bien valeurs propres d'ordre de multiplicité 1. Les sous-espaces propres de  $J$  sont les droites

$$D_k = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^k \\ \vdots \\ \varepsilon^{k(n-1)} \end{pmatrix} \right) \text{ associées aux valeurs propres } (e^{i\frac{2\pi}{n}k} = \omega^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}.$$

Il en résulte que la matrice  $M$  est semblable à la matrice diagonale de coefficients  $(P(e^{i\frac{2\pi}{n}k}))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ . Notons que la matrice de passage est une matrice de Vandermonde.

- 3) La matrice  $M$  peut s'écrire  $P(J)$  avec  $P = \alpha_1 + \alpha_2 X + \dots + \alpha_n X^{n-1}$ . Comme  $J$  est diagonalisable,  $M$  l'est également, au moyen de la même matrice de passage.

- 4) Le déterminant de  $M$  est le produit des valeurs propres donc  $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(e^{i\frac{2\pi}{n}k})$ .

## Exercice 5.38

## Mines-Ponts MP 2007

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  un polynôme unitaire

$$P = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0.$$

On définit la matrice dite compagnon de  $P$

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de  $M_P$ .
- 2) Décrire l'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P = \chi_M\}$ .
- 3) Quelle est la dimension d'un éventuel sous-espace propre de  $M_P$  ?
- 4) A quelle condition  $M_P$  est-elle diagonalisable ?

- 1) Le plus simple (pour éviter une récurrence un peu fastidieuse) est d'effectuer l'opération élémentaire  $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=2}^n X^{k-1}L_k$  sur  $M_P - XI_n$  pour calculer son déterminant. On obtient :

$$\det(M_P - XI_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -(X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0) \\ 1 & -X & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & -X & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -X - \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

puis en développant suivant la première ligne, on obtient :

$$\chi_{M_P} = (-1)^{n+1} \times (-P) \times \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n P.$$

Ainsi,  $\chi_{M_P} = (-1)^n P$ .

- 2) Tout polynôme caractéristique d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-1)^n$ . Réciproquement, tout polynôme  $Q$  de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-1)^n$  peut s'écrire

$$Q = (-1)^n \underbrace{(X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0)}_{=P}$$

donc est le polynôme caractéristique de  $M_P$  avec  $P = (-1)^n Q$ .

*Conclusion* : l'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P = \chi_M\}$  est l'ensemble

des polynômes de la forme  $(-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

- 3) Remarquons que  $\text{rg}(M - \lambda I_n) \geq n - 1$  car les  $n - 1$  premières colonnes de la matrice  $M_P - \lambda I_n$  sont linéairement indépendantes donc les sous-espaces propres sont de dimension au plus 1. Les sous-espaces propres éventuels sont des droites vectorielles.
- 4) La matrice  $M_P$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres (qui, ici, sont des droites) est égale à  $n$ , donc si et seulement si  $P$  possède  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{K}$ .

### Exercice 5.39



#### CCP PC 2005

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$ . On dit que  $u$  est cyclique lorsqu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

- 1) Montrer que si un endomorphisme a ses  $n$  valeurs propres distinctes, alors il est cyclique.

*Indication de la rédaction* : utiliser le vecteur  $\sum_{k=1}^n e_k$  où  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une base de vecteurs propres.

- 2) On note  ${}^t(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  les coordonnées de  $u^n(x_0)$  dans  $\mathcal{B}$ . Montrer que les  $\alpha_i$  ne dépendent pas du choix de  $x_0$  (qui n'est pas unique).

*Indication de la rédaction* : étudier  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

- 1) On sait qu'il existe une base  $\mathcal{B}_0 = (e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes  $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . Posons  $x_0 = \sum_{k=1}^n e_k$ .

La matrice  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est une matrice de Vandermonde, plus précisément  $M = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , ce qui montre que  $M$  est inversible (voir exercice 3.20, page 95) donc  $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .

2) Dans cette base  $\mathcal{B}$ ,  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ . Il s'agit d'une

matrice compagne dont le calcul du polynôme caractéristique est classique, voir exercice 5.38 p.147, on trouve

$$\chi_u = (-1)^n (X^n - \alpha_{n-1}X^{n-1} - \dots - \alpha_1X - \alpha_0).$$

Ces coefficients ne dépendent donc pas de  $x_0$ , et sont au signe près les coefficients du polynôme caractéristique de  $u$ .

### Exercice 5.40

#### CCP PC 2006

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , vérifiant  $\det A = 1$  et il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = I_2$ .

1) Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2) On note  $\alpha$  et  $\beta$  ses valeurs propres. Montrer que  $|\alpha| = 1$ ,  $\beta = \bar{\alpha}$ ,  $|\text{Re}(\alpha)| \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  et que  $A^{12} = I_2$ .

3) On pose  $G = \{A^n, n \in \mathbb{N}\}$ . Montrer que  $G$  est un groupe de cardinal au plus 12.

1) Le polynôme  $X^p - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , et c'est un polynôme annulateur de  $A$ . La matrice  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Les valeurs propres de  $A$  sont parmi les racines de ce polynôme donc sont des racines de l'unité.

2) La matrice  $A$  étant réelle d'ordre 2, ses valeurs propres sont soit toutes les deux réelles, soit complexes et conjuguées.

- Dans le premier cas,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels qui appartiennent à  $\{-1, 1\}$ , et le produit  $\alpha\beta$  est égal à 1. On a donc  $\alpha = \beta = 1$ , ou  $\alpha = \beta = -1$ . Par conséquent 1 ou  $-1$  est racine double. En conclusion,  $A$  est semblable et donc égale à  $\pm I_2$  et on a bien  $A^{12} = I_2$ .

- Dans le second cas, on a  $|\alpha| = 1$ , ainsi que  $\beta = \bar{\alpha}$ . Remarquons que  $\text{tr } A = \alpha + \bar{\alpha} = 2\text{Re}(\alpha) \in \mathbb{Z} \cap ]-2, 2[$  donc  $|\text{Re}(\alpha)| \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ . On vérifie que  $\alpha \in \{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} (= j), e^{-\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, i, -i\}$ . Dans tous les cas  $\alpha^{12} = \bar{\alpha}^{12} = 1$ , donc  $A^{12}$  est semblable à  $I_2$  et finalement égale à  $I_2$ .

3) Puisque  $\det A = 1$ , la matrice  $A$  est inversible et donc  $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Montrons alors que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Il est non vide car  $A^0 = I_2 \in G$ . Soient  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{Z}$ . On a  $(A^p)^{-1}(A^q) = A^{q-p} \in G$ . Par conséquent  $G$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Soit  $p \in \mathbb{Z}$ , d'après le théorème de la division euclidienne, il existe  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que  $p = 12q + r$  et  $0 \leq r < 12$ . On en déduit que  $A^p = (A^{12})^q A^r = A^r$ . Ainsi  $G \subset \{A^r \mid 0 \leq r \leq 11\}$ . L'autre inclusion est immédiate par définition de  $G$ , ainsi  $G = \{A^r \mid 0 \leq r \leq 11\}$ .

**Conclusion :**  $G$  est un groupe de cardinal au plus 12 (les éléments de  $\{A^r \mid 0 \leq r \leq 11\}$  ne sont pas forcément distincts).

### Exercice 5.41

#### Mines-Ponts MP 2007

On considère trois suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n$ ,  $v_{n+1} = u_n - v_n + w_n$ ,  $w_{n+1} = u_n + v_n - w_n$ . Exprimer  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$  et trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $(u_0, v_0, w_0)$  pour que ces trois suites convergent.

Posons  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Le système peut s'écrire  $X_{n+1} = AX_n$

avec  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , d'où  $X_n = A^n X_0$ . On détermine les éléments

propres (voir exercice 5.12 page 123), on trouve que  $E_1(A) = \mathrm{Vect} \left( C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et  $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect} \left( C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Il en résulte que  $(C_1, C_2, C_3)$

est une base de vecteurs propres de  $A$ , et il existe des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$ . Il vient  $X_n = A^n X_0 = aC_1 + b2^n C_2 + c2^n C_3$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a - 2^n b - 2^n c$ ,  $v_n = a + 2^n b$  et  $w_n = a + 2^n c$ .

On voit que les trois suites convergent si et seulement si  $b = c = 0$ . Puisque  $u_0 = a - b - c$ ,  $v_0 = a + b$  et  $w_0 = a + c$ , ces conditions sont équivalentes à  $u_0 = v_0 = w_0$ .

### Exercice 5.42

#### Centrale PC 2006 (produit tensoriel particulier)

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable et soit  $B = \begin{pmatrix} 3A & A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$ . La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?

*Indication de la rédaction :* on pourra commencer par étudier la réduction de la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  puis construire une matrice-bloc de passage.

Étudions la matrice  $2 \times 2$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est  $\chi_C = X^2 - 6X + 7$ . Ce polynôme admet deux racines  $3 + \sqrt{2}$  et  $3 - \sqrt{2}$ , donc  $C$  est diagonalisable. Il existe  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $P^{-1}CP = \text{diag}(3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$ .

Notons  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Posons  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$  et  $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$ .

Les opérations sur les matrices blocs nous permettent de remarquer que

$$\bullet \tilde{P}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} (a\alpha + b\gamma)I_n & (a\beta + b\delta)I_n \\ (c\alpha + d\gamma)I_n & (c\beta + d\delta)I_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } PP^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Il en résulte que

$$\tilde{P}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}. \text{ Ainsi } \tilde{P} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \text{ et } \tilde{P}^{-1} = \tilde{Q}.$$

• Calculons  $\tilde{P}^{-1}B\tilde{P}$  en utilisant le calcul matriciel suivant

$$\begin{aligned} PCP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3\alpha + \gamma) & (3\beta + \delta) \\ (2\alpha + 3\gamma) & (2\beta + 3\delta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(3\alpha + \gamma) + b(2\alpha + 3\gamma) & a(3\beta + \delta) + b(2\beta + 3\delta) \\ c(3\alpha + \gamma) + d(2\alpha + 3\gamma) & c(3\beta + \delta) + d(2\beta + 3\delta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{-1}B\tilde{P} &= \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3A & A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [a(3\alpha + \gamma) + b(2\alpha + 3\gamma)]A & [a(3\beta + \delta) + b(2\beta + 3\delta)]A \\ [c(3\alpha + \gamma) + d(2\alpha + 3\gamma)]A & [c(3\beta + \delta) + d(2\beta + 3\delta)]A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 + \sqrt{2})A & 0 \\ 0 & (3 - \sqrt{2})A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• Il est maintenant facile de conclure : la matrice  $A$  est diagonalisable.



Soit  $R$  une matrice inversible telle que la matrice  $D = R^{-1}AR$  soit diagonale, et cherchons à diagonaliser la matrice  $\begin{pmatrix} (3+\sqrt{2})A & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{2})A \end{pmatrix}$ . Considérons pour cela la matrice  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ .

La matrice  $\tilde{R}$  est inversible, et on a  $\tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (3+\sqrt{2})A & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{2})A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3+\sqrt{2})A & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{2})A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda R^{-1}AR & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+\sqrt{2})D & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{2})D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement,  $(\tilde{P}\tilde{R})^{-1}B(\tilde{P}\tilde{R}) = \begin{pmatrix} (3+\sqrt{2})D & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{2})D \end{pmatrix}$

avec  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ \sqrt{2}I_n & -\sqrt{2}I_n \end{pmatrix}$  et  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ .

*L'exercice suivant est un entraînement sur la même idée.*

### Exercice 5.43

#### Polytechnique PC 2006

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$ .

La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?

On montre facilement que  $A$  est diagonalisable, et qu'il en est de même de la matrice

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (voir exercice 5.11 p.122) donc  $B$  est diagonalisable en reprenant les idées de l'exercice précédent. Plus précisément  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q^{-1}JQ = \text{diag}(0, 0, 3)$  avec  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . La

matrice de passage  $R = \begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$  diagonalise  $B$  en

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(0, 0, 3) & 0 \\ 0 & 3 \text{diag}(0, 0, 3) \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 0, 3, 0, 0, 9)$$

et on lit les vecteurs propres sur les colonnes de  $R$ .

#### Exercice 5.44

##### Mines-Ponts PC 2007 ☕

Soit  $D$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $1, 2, \dots, n$ .

Combien y a-t-il de matrices semblables à  $D$  commutant avec  $D$  ?

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a alors  $DA = (ia_{ij})$  et  $AD = (ja_{ij})$ . L'égalité  $AD = DA$  a lieu si et seulement si  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ , c'est-à-dire si  $A$  est aussi diagonale. Comme les valeurs propres de  $D$  sont distinctes,  $A$  et  $D$  sont semblables si et seulement elles ont les mêmes valeurs propres, et donc les éléments diagonaux de  $A$  sont les nombres  $1, 2, \dots, n$  rangés dans un ordre quelconque. Il y a donc autant de matrices semblables à  $D$  commutant avec  $D$  que de permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$  c'est-à-dire  $n!$ .

## 5.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

#### Exercice 5.45

##### Mines-Ponts PC 2005

Montrer que deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel de dimension finie admettent une base commune de vecteurs propres si et seulement s'ils commutent.

Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  admettent une base commune de vecteurs propres alors dans cette base, ces endomorphismes se représentent par deux matrices diagonales qui commutent de manière évidente.

Réciproquement, soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent et qui sont diagonalisables. Puisque  $u$  est diagonalisable, on a  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ . Par ailleurs,

puisque  $u$  et  $v$  commutent, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , le sous-espace  $E_\lambda(u)$  est stable par  $v$  donc  $v|_{E_\lambda(u)}$  est diagonalisable.

Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , choisissons alors une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de vecteurs propres de  $v_{E_\lambda(u)}$  dans  $E_\lambda(u)$ . La base de  $E$  obtenue en regroupant les bases  $\mathcal{B}_\lambda$  est une base de vecteurs propres commune à  $v$  et à  $u$ .

### Exercice 5.46

#### CCP PSI 2006

Soit  $A$  une matrice complexe carrée d'ordre  $n \geq 3$ , de rang 2, de trace nulle et telle que  $A^n \neq 0$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner son spectre.

D'après le théorème du rang, le sous-espace propre  $E_0(A) = \text{Ker } A$  est de dimension  $n - 2$  donc  $\chi_A$  est de la forme  $X^{n-2}Q$  avec  $Q$  de degré 2. Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé, donc  $Q$  admet deux racines notées  $\lambda$  et  $\mu$ . Comme la trace de  $A$  est égal à la somme des racines de  $\chi_A$ , on obtient  $\text{tr } A = \lambda + \mu$ . Par hypothèse  $\text{tr } A = 0$ , il vient  $\lambda = -\mu$ . Comme  $A^n \neq 0$ ,  $A$  n'est pas nilpotente et elle admet une valeur propre non nulle (voir l'exercice 5.53). Ainsi les deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nuls et distincts, et par conséquent sont des valeurs propres non nulles de  $A$ , chacune d'ordre de multiplicité 1.

La matrice  $A$  admet trois valeurs propres distinctes 0,  $\lambda$  et  $\mu$  et la somme des dimensions des espaces propres associés est égale à  $n$ . Par conséquent  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ .



### Exercice 5.47

#### Mines-Ponts PC 2005

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable par  $u$  admet un supplémentaire stable par  $u$ .

- Supposons que  $u$  est diagonalisable et soit  $\mathcal{B}$  une base de vecteurs propres. Soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$  et soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ . Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter  $\mathcal{B}_F$  en une base de  $E$  à l'aide de vecteurs choisis dans la base  $\mathcal{B}$ . Le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs propres est un supplémentaire stable par  $u$ .
- Supposons que tout sous-espace stable par  $u$  admet un supplémentaire stable par  $u$ . L'endomorphisme  $u$  admet au moins une valeur propre car son polynôme caractéristique admet au moins une racine complexe. Par conséquent le sous-espace

$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  et il contient tous les vecteurs propres de  $u$ .

Considérons un supplémentaire  $G$  de  $F$ , stable par  $u$ . Si  $G \neq \{0\}$ , l'endomorphisme induit  $u|_G$  admet au moins un vecteur propre. Ce vecteur est aussi un vecteur propre

de  $u$ , ce qui est contradictoire. On a donc  $G = \{0\}$ ,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  et donc  $u$  est diagonalisable.

### Exercice 5.48

#### Commutant d'un endomorphisme diagonalisable, très classique ☕

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n \geq 2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note,  $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ .

- 1) Montrer que  $C(u)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  contenant  $\mathbb{K}[u]$ .
- 2) Démontrer que si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors on a l'égalité  $C(u) = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ .
- 3) On suppose que  $u$  est diagonalisable. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres deux à deux distinctes d'ordres de multiplicité respectifs  $m_1, \dots, m_p$ , et de sous-espaces propres respectifs  $E_1, \dots, E_p$ .  
Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que  $v \in C(u)$  si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $E_k$  est stable par  $v$ . En déduire  $\dim C(u)$ .

- 1) On a  $u \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ u = u$  donc  $\text{Id}_E \in C(u)$ . Si  $(v, w) \in C(u)^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors  $u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w = \lambda v \circ u + \mu w \circ u = (\lambda v + \mu w) \circ u$ , et donc  $(\lambda v + \mu w) \in C(u)$ . Enfin si  $(v, w) \in C(u)^2$ , alors  $u \circ v \circ w = v \circ u \circ w = v \circ w \circ u$  et  $v \circ w \in C(u)$ . Il en résulte que  $C(u)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

De plus, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  on a  $u \circ P(u) = P(u) \circ u$  et donc  $\mathbb{K}[u] \subset C(u)$ .

- 2) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$ . On a  $E = \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(u)$  et les  $E_{\lambda_k}(u)$

sont des droites engendrées par des vecteurs propres  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  qui forment une base. Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  commutant avec  $u$ . Alors les droites  $E_{\lambda_k}(u)$  sont stables par  $v$  donc les vecteurs  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont des vecteurs propres de  $v$  également. Ainsi la famille  $\mathcal{B} = (x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base formée de vecteurs propres de  $u$  et de  $v$ .

Montrons maintenant que  $v$  est un polynôme en  $u$  (de degré  $\leq n-1$ ). Soient  $D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (resp.  $D' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ ) la matrice de  $u$  (resp.  $v$ ) dans la base  $\mathcal{B}$ . Comme les  $\lambda_i$  sont distincts, il existe un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n-1$  tel que  $P(\lambda_i) = \lambda'_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (polynôme d'interpolation de Lagrange). On a alors  $D' = P(D)$ , et donc  $v = P(u)$ .

- 3) Traitons maintenant le cas général. On sait que si  $v \in C(u)$ , alors les sous-espaces propres  $E_k$  sont stables par  $v$ . Réciproquement supposons les sous-espaces  $E_k$  stables par  $v$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  soit  $\mathcal{B}_k$  une base du sous-espace propre  $E_k$ . Soit  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  la base de  $E$  obtenue par juxtaposition. La matrice de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice diagonale par blocs de la forme  
(1)  $V = (M_1, \dots, M_k)$  où  $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ . La matrice  $u$  dans cette même base

est de la forme  $U = (\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_p I_{m_k})$ . Les matrices  $U$  et  $V$  commutent, et il en résulte que  $u$  et  $v$  commutent.

Enfin l'application de l'espace vectoriel  $C(u)$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , qui à  $v \in C(u)$  associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ , est un isomorphisme de  $C(u)$  sur le sous-espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  formé des matrices de la forme (1). Il en résulte que :

$$\dim(C(u)) = \dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbb{K})) = \sum_{k=1}^p m_k^2.$$

### Exercice 5.49

#### Mines-Ponts PC 2007

Déterminer toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{tr}(M) = n$  et  $M^5 = M^2$ .

Le polynôme  $P = X^5 - X^2$  est un polynôme annulateur de  $M$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  est inclus dans l'ensemble des zéros de  $P$ . Or on peut factoriser  $P$  sous la forme  $P(X) = X^2(X^3 - 1) = X^2(X - 1)(X - j)(X - j^2)$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}$ . Pour tout nombre complexe  $\lambda$  soit  $m(\lambda)$  l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique de  $M$ . On a alors  $\text{tr}(M) = 0 \times m(0) + 1 \times m(1) + j \times m(j) + j^2 \times m(j^2)$ . Comme le polynôme caractéristique de  $M$  est à coefficients réels, les racines  $j$  et  $j^2$  ont le même ordre de multiplicité. On a donc  $\text{tr}(M) = 0 \times m(0) + 1 \times m(1) + (j + j^2) \times m(j) = n$ . Alors, puisque  $j + j^2 = -1$ , on obtient la relation (1)  $m(1) - m(j) = n$ . D'autre part, le polynôme caractéristique de  $M$  est de degré  $n$  donc on a aussi (2)  $m(0) + m(1) + 2m(j) = 0$ , et (2) - (1) donne  $m(0) + 3m(j) = 0$ . Comme  $m(0)$  et  $m(j)$  sont des entiers naturels, on en déduit que  $m(0) = m(j) = 0$ . Ainsi 0,  $j$  et  $j^2$  ne sont pas valeurs propres de  $M$ , et donc les matrices  $M$ ,  $M - jI_n$  et  $M - j^2I_n$  sont inversibles. Comme  $M^5 - M^2 = (M - I_n)M^2(M - jI_n)(M - j^2I_n) = 0$ , on a alors  $M - I_n = 0$ , donc  $M = I_n$ . Réciproquement la matrice  $M = I_n$  convient de manière évidente.

### Exercice 5.50

#### ENSAM PSI 2006

Donner une condition nécessaire sur  $n \in \mathbb{N}^*$  pour qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + M + I_n = 0$ . Cette condition est-elle suffisante ?

Le polynôme  $X^2 + X + 1$  est scindé et à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$  donc  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Les valeurs propres sont  $j$  et  $\bar{j}$  avec le même ordre de multiplicité (le polynôme caractéristique est réel) donc  $n$  est pair.

Réciproquement, construisons une matrice solution lorsque  $n = 2$ , puis diagonale par blocs dans le cas général.

Pour  $n = 2$ , la matrice  $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $M_2^2 + M_2 + I_2 = 0$ . Plus généralement, lorsque  $n = 2p$ , la matrice  $M_{2p} = \text{diag}(M_2, \dots, M_2)$  convient. La condition  $n$  pair est donc suffisante.

### Exercice 5.51

#### Centrale PC 2007

Soient  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array} \right)$ . Montrer que si  $A$  est diagonalisable, alors  $M$  est diagonalisable.

• Première méthode : on essaie de « fabriquer » une base de  $\mathbb{C}^{2n}$  constitués de vecteurs propres de  $M$  à partir des vecteurs propres de  $A$ .

Comme  $A$  est diagonalisable, l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  admet une base  $X_1, \dots, X_n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ . On constate que si  $X_i$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , alors

$$\left( \begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} = (\lambda_i + 1) \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} \text{ et } \left( \begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_i \\ -X_i \end{pmatrix} = (\lambda_i - 1) \begin{pmatrix} X_i \\ -X_i \end{pmatrix}.$$

Soit alors  $\phi$ , l'application linéaire de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  vers  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$  qui à  $X$  associe  $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$  et soit  $\psi$  l'application linéaire de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  vers  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$  qui à  $X$  associe  $\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ .

Ces applications linéaires sont injectives. Par conséquent, la famille image par  $\phi$  de la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$  et de même l'image par  $\psi$  de la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ . Montrons de plus que la somme  $\text{Im } \phi + \text{Im } \psi$  est directe. Soit  $Y$  dans  $\text{Im } \phi \cap \text{Im } \psi$ . Il existe  $X_1$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

et  $X_2$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_2 \end{pmatrix}$ . On en déduit  $X_1 = X_2 = 0$  et par suite  $Y = 0$ . La somme  $\text{Im } \phi + \text{Im } \psi$  est donc directe et il en résulte que la famille obtenue par juxtaposition des familles  $(\phi(X_1), \dots, \phi(X_n))$  et  $(\psi(X_1), \dots, \psi(X_n))$  est une famille libre. Comme elle est de cardinal  $2n$  c'est en fait une base de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$  qui est constituée de vecteurs propres de  $M$ . On en déduit que  $M$  est diagonalisable.

• Deuxième méthode : on essaie de montrer que  $M$  est semblable à une matrice diagonale, en faisant des produits par blocs et en s'inspirant du cas  $n = 1$ . L'examen du cas  $n = 1$ , montre que pour tout  $a$  dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  est diagonalisable

et en notant  $P$  la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , on a  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

On essaie alors de s'inspirer des résultats obtenus pour traiter le cas  $n \geq 1$ . Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonalisable. il existe  $P$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $D$  une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP = D$ . On considère alors la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  définie par  $Q = \left( \begin{array}{c|c} P & P \\ \hline P & -P \end{array} \right)$ . La matrice  $Q$  est inversible et son inverse est  $Q^{-1} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} P^{-1} & P^{-1} \\ \hline -P^{-1} & P^{-1} \end{array} \right)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} Q^{-1}MQ &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} P^{-1} & P^{-1} \\ \hline -P^{-1} & P^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} P & P \\ \hline P & -P \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} P^{-1}(A + I_n) & P^{-1}(A + I_n) \\ \hline P^{-1}(A - I_n) & -P^{-1}(I_n - A) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} P & P \\ \hline P & -P \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} D + I_n & 0 \\ \hline 0 & D - I_n \end{array} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice  $M$  est semblable à une matrice diagonale, ce qui signifie exactement que  $M$  est diagonalisable.

### Exercice 5.52

**Polytechnique PC 2006**



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Donner les éléments propres de  $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$  en fonction de ceux de  $A$ . Montrer que  $B$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .

Soient  $X_1$  et  $X_2$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a pour tout  $\lambda$  réel,

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases}.$$

Il en résulte que  $\lambda$  est valeur propre de  $B$  si et seulement si  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A$ . Dans ce cas,  $E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}, X \in E_{\lambda^2}(A) \right\}$  et on a alors  $\text{Sp}(B) = \{\pm\sqrt{\alpha}, \alpha \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^+\}$ . Remarquons que  $\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A))$ .

Sachant que  $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , si  $B$  est diagonalisable alors  $A$  l'est également ( $B^2$  est diagonalisable et  $A$  est la matrice représentant l'endomorphisme diagonalisable  $X \mapsto B^2X$  restreint au sous-espace stable

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\} \text{ dans sa base canonique.}$$

Si  $A$  est diagonalisable, alors  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \text{Sp}(A)} E_{\alpha}(A)$ . Étudions

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(B)} E_{\lambda}(B) = E_0(B) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^{++}} E_{\sqrt{\alpha}}(B) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^{++}} E_{-\sqrt{\alpha}}(B).$$

En passant aux dimensions, il vient :

$$\dim(F) = \dim(E_0(A)) + 2 \sum_{\alpha \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^{++}} \dim E_{\alpha}(A)$$

Comme  $\sum_{\alpha \in \text{Sp}(A)} \dim E_{\alpha}(A) = n$ ,  $\dim F = 2n$  (c'est-à-dire  $B$  est diagonalisable) si et

seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives.

**Conclusion :** la matrice  $B$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

### Exercice 5.53

#### Centrale PC 2007

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- i) l'endomorphisme  $f$  est nilpotent;
- ii) le spectre de  $f$  est  $\{0\}$ ;
- iii) il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure et à diagonale nulle;
- iv)  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{tr}(f^k) = 0$ .

*Afin de rester dans la conformité des programmes, certaines démonstrations sont spécifiques aux filières PC ou PSI.*

i)  $\Rightarrow$  ii) Si  $f$  est nilpotent il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $f^p = 0$ . Il en résulte que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , alors  $\lambda^p = 0$  et donc  $\lambda = 0$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii)

• **PC** Puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$  l'endomorphisme  $f$  est trigonalisable. Il existe donc une base de  $E$  dans laquelle la matrice  $A$  de  $f$  est triangulaire supérieure, et les éléments diagonaux de  $A$  sont les valeurs propres de  $f$ . La diagonale de  $A$  est donc nulle.

• **PSI** On effectue une démonstration par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ . Si  $\dim E = 1$  et si le spectre de  $f$  est égal  $\{0\}$ , alors  $f$  est l'endomorphisme nul, et la matrice de  $f$  dans n'importe quelle base de  $E$  est nulle. La propriété est donc vérifiée à l'ordre 1. Pour  $n > 1$ , supposons la propriété vérifiée à l'ordre  $n - 1$ . Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  avec  $\dim E = n$  et si  $\text{sp}(f) = \{0\}$ , alors choisissons un vecteur  $e_1$  non nul appartenant à  $\text{Ker } f$  et un supplémentaire  $F$  de  $\mathbb{C}e_1$ . Désignons par  $p_F$  la



matrice de  $f$  est alors de la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n-1} & B \end{pmatrix}$  où  $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$  et où  $0_{n-1}$

$$iii) \Rightarrow i)$$

- **PSI** S'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure, à diagonale nulle, alors le polynôme caractéristique de  $f$  est  $(-1)^n X^n$  et c'est un polynôme annulateur de  $f$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On a donc  $f^n = 0$ .

$i) \Rightarrow iv)$  C'est évident.

*iv*)  $\Rightarrow$  *i*) Supposons que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on ait  $\text{tr}(f^k) = 0$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $f$  admette  $p \geq 1$  valeurs propres distinctes non nulles  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . En notant  $m(\lambda_\ell)$  l'ordre de multiplicité ( $> 0$ ) de la valeur propre  $\lambda_\ell$  pour l'endomorphisme  $f$ , on aura alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  la relation

$\text{tr}(f^k) = \sum_{\ell=1}^p m(\lambda_\ell) \lambda_\ell^k = 0$ . Le  $p$ -uplet  $(m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_p))$  est alors solution du système linéaire homogène

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(\lambda_1)\lambda_1 + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p = 0 \\ m(\lambda_1)\lambda_1^2 + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p^2 = 0 \\ \cdots \\ m(\lambda_1)\lambda_1^p + \cdots + m(\lambda_p)\lambda_p^p = 0 \end{array} \right.$$

La calcul du déterminant  $\Delta$  de ce système se ramène au calcul d'un déterminant de Vandermonde. On obtient  $\Delta = \lambda_1 \cdots \lambda_p \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i)$ . Ce déterminant n'est pas

nul et  $(S)$  un système de Cramer. On obtient donc  $m(\lambda_1) = \dots = m(\lambda_p) = 0$ , ce qui est absurde, puisque les nombres  $m(\lambda_i)$  sont supposés non nuls.

## Exercice 5.54

**Centrale PC 2006 et 2005, ENSTIM MP 2005** 🍷

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et soit  $g$  un endomorphisme de  $E$ .

1) Montrer que l'application  $T$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $T(f) = f \circ g - g \circ f$  est un endomorphisme.

2) Montrer que si  $g$  est nilpotent, alors  $T$  l'est aussi.

*Indication de la rédaction :* on pourra remarquer que  $T = G - D$  avec  $G(f) = f \circ g$  et  $D(f) = g \circ f$  et que  $G \circ D = D \circ G$ .

3) La réciproque est-elle vraie ?

4) Montrer que si  $g$  est diagonalisable, alors  $T$  l'est aussi.

*Indication de la rédaction :* on pourra à nouveau étudier  $G$  et  $D$  et montrer qu'ils sont diagonalisables.

1) Montrons  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(f, h) \in (\mathcal{L}(E))^2$ ,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu h) &= (\lambda f + \mu h) \circ g - g \circ (\lambda f + \mu h) \\ &= \lambda(f \circ g - g \circ f) + \mu(h \circ g - g \circ h) = \lambda T(f) + \mu T(h). \end{aligned}$$

2) Considérons les endomorphismes de  $\mathcal{L}(E)$  définis par  $G(f) = f \circ g$  et  $D(f) = g \circ f$ . Remarquons qu'on a bien  $T = G - D$ ,  $G \circ D = D \circ G$ ,  $G^p(f) = f \circ g^p$  et  $D^p(f) = g^p \circ f$  pour  $p \in \mathbb{N}$ . Il en résulte que si  $g$  est nilpotent avec  $g^p = 0$ , alors  $G^p = 0$  et  $D^p = 0$ . Comme  $G$  et  $D$  commutent, pour

tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on a,  $T^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k D^k G^{m-k}$ . En choisissant  $m = 2p - 1$ , on

remarque que pour tout  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ ,  $k \geq p$  ou  $m - k \geq p$  et donc  $D^k G^{m-k} = 0$ . On en déduit alors que  $T^m = 0$ . Par conséquent,  $T$  est bien un endomorphisme nilpotent.

3) La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :  $g = \text{Id}_E$ ,  $T = 0$  est nilpotente (au sens large) mais pas  $g$ .

4) On va donner deux méthodes. La première est courte mais ne donne pas les éléments propres, alors que la deuxième est plus constructive.

*Première méthode* Puisque  $g$  est diagonalisable, il existe un polynôme  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(g) = 0$ . Remarquons qu'alors  $P(G)(f) = f \circ P(g) = 0$ , de même pour  $D$ . Donc  $G$  et  $D$  sont diagonalisables et comme ils commutent, ils admettent une base commune de vecteurs propres qui est aussi une base de vecteurs propres de  $T$ .

*Deuxième méthode* Puisque  $g$  est diagonalisable, il existe une base  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$  et  $n$  scalaires  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$  tel que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $g(e_k) = \lambda_k e_k$ . Pour

$(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , on considère l'endomorphisme défini par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad f_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

Montrons que chaque  $f_{i,j}$  est un vecteur propre de  $T$ . Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Puisque  $g(e_k) = \lambda_k e_k$ , on a pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$\begin{aligned} (T(f_{i,j}))(e_k) &= (f_{i,j} \circ g)(e_k) - (g \circ f_{i,j})(e_k) \\ &= f_{i,j}(g(e_k)) - g(f_{i,j}(e_k)) \\ &= \lambda_k f_{i,j}(e_k) - g(f_{i,j}(e_k)). \end{aligned}$$

Ainsi  $(T(f_{i,j}))(e_k) = 0$  si  $k \neq i$  et  $(T(f_{i,j}))(e_i) = (\lambda_i - \lambda_j)e_i$ . On en déduit alors que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(T(f_{i,j}))(e_k) = (\lambda_i - \lambda_j)f_{i,j}(e_k)$ , d'où

$$T(f_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)f_{i,j}.$$

L'endomorphisme  $T$  de  $\mathcal{L}(E)$  admet pour vecteurs propres les  $n^2$  endomorphismes  $f_{i,j}$  de  $E$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i - \lambda_j$ . Comme  $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$ ,  $T$  est diagonalisable.

### Remarque

On peut voir que famille  $(f_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{L}(E)$  directement. En effet, les matrices associées aux  $f_{i,j}$  dans la base  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont les matrices de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .



### Exercice 5.55

#### TPE MP 2006, Polytechnique PC 2006

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f$  et  $g$  commutent et  $g$  est nilpotent.

- 1) Montrer que  $f$  est inversible si et seulement si  $f + g$  est inversible.
- 2) On suppose que l'espace vectoriel  $E$  est de dimension finie. Donner une relation entre  $\det(f)$  et  $\det(f + g)$ .

*Indication de la rédaction :* utiliser la propriété qu'un endomorphisme nilpotent est trigonalisable et n'a que 0 pour valeur propre (cf. exercice 5.53).

- 1) Puisque  $g$  est nilpotent, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g^p = 0$ .

- Si  $f$  est inversible, alors  $f + g = f \circ (\text{Id}_E + f^{-1} \circ g)$ . Posons  $u = f^{-1} \circ g$  et remarquons que  $u$  est nilpotent car  $f$  et donc  $f^{-1}$  commutent avec  $g$ . Par conséquent  $(f^{-1} \circ g)^p = (f^{-1})^p \circ g^p = 0$

Démontrons que  $\text{Id}_E + u$  est inversible. Nous avons

$$\begin{aligned} (\text{Id}_E + u) \circ (\text{Id}_E - u + \dots + (-1)^{p-1} u^{p-1}) \\ = (\text{Id}_E - u + \dots + (-1)^{p-1} u^{p-1}) \circ (\text{Id}_E + u) \\ = \text{Id}_E + (-1)^{p-1} u^p = \text{Id}_E \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Id}_E + u$  est inversible et par conséquent  $f + g$  aussi.

- Réciproquement, si  $f + g$  est inversible alors  $f = (f + g) - g$  et comme  $-g$  est nilpotente,  $f$  est inversible d'après ce qui précède.

2) D'après la question précédente, si  $f$  n'est pas inversible, alors  $f + g$  non plus et donc  $\det(f) = \det(f + g) = 0$ .

Si  $f$  est inversible,  $f + g = f \circ (\text{Id}_E + f^{-1} \circ g) = f \circ (\text{Id}_E + u)$ . Comme l'endomorphisme  $u$  est nilpotent, il est donc trigonalisable en une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale. L'endomorphisme  $\text{Id}_E + u$  est donc trigonalisable en une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ainsi  $\det(\text{Id}_E + u) = 1$  et donc  $\det(f + g) = \det(f) \det(\text{Id}_E + u) = \det f$ .



## 6.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 6.1.1 Produit scalaire

#### Ce qu'il faut savoir

#### Forme bilinéaire symétrique PSI

Soit  $E$  un espace vectoriel réel.

##### • Forme bilinéaire symétrique

- On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur  $E$  toute application  $\varphi$  définie sur  $E \times E$  à valeurs réelles telle que :
  - pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire (linéarité à droite)
  - pour tout  $y \in E$ , l'application  $x \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire (linéarité à gauche)
  - pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  (symétrie).
- L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- On dit que la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  est **positive** lorsque, pour tout  $x \in E$ , on a  $\varphi(x, x) \geq 0$ . On dit qu'elle est **définie positive**, lorsque de plus, l'égalité  $\varphi(x, x) = 0$  implique  $x = 0_E$  (la réciproque étant toujours vraie).

##### • Forme quadratique

- Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique associée à  $\varphi$ , l'application  $q$  définie sur  $E$  à valeurs réelles, telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) = \varphi(x, x)$ . On dit qu'elle est **positive** lorsque, pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) \geq 0$ , et **définie positive** lorsque, pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $q(x) > 0$ .
- **Formules de polarisation** : si  $q$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$ , alors pour tout  $(x, y) \in E \times E$ , on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y)).$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique positive et si  $q$  est sa forme quadratique associée, alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $(\varphi(x, y))^2 \leq q(x)q(y)$ .

## Ce qu'il est bon de savoir : matrice d'une forme bilinéaire symétrique

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On pose  $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$  pour  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ . La matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  (ou de sa forme quadratique associée  $q$ ) dans la base  $\mathcal{B}$ . Cette matrice est symétrique.

Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , on note  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$

les vecteurs colonnes des coordonnées de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors

$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i y_j = {}^t X A Y$ . En particulier, on a :

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = {}^t X A X.$$

### Exercice 6.1

Soient  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $B$  l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$B(P, Q) = P(0)Q(1) + P(1)Q(0).$$

Montrer que  $B$  est une forme bilinéaire symétrique. Est-elle positive ?

On vérifie facilement que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, B(P, Q) = B(Q, P)$$

et que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3, B(\alpha P + Q, R) = \alpha B(P, R) + B(Q, R),$$

donc  $B$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

On a  $B(P, P) = 2P(0)P(1)$ . En particulier  $B(X - 1/2, X - 1/2) = -1/2 < 0$ , donc  $B$  n'est pas positive.

### Exercice 6.2

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Soit  $Q$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $Q(M) = (\text{tr } M)^2$ . Montrer que  $Q$  est une forme quadratique positive sur  $E$ . Expliciter la forme bilinéaire symétrique associée.
- 2) Soit  $Q'$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $Q'(M) = \text{tr}(M^2)$ . Montrer que  $Q'$  est une forme quadratique sur  $E$ . Montrer que sa restriction au sous-espace  $\mathcal{S}_n$  des matrices symétriques est définie positive, et que sa restriction au sous-espace  $\mathcal{A}_n$  des matrices antisymétriques est négative.

- 1) Pour tout  $(M, N) \in E \times E$ , on pose  $f(M, N) = \text{tr}(M) \text{tr}(N)$ . Par linéarité de la trace,  $f$  est une forme bilinéaire symétrique et  $Q(M) = f(M, M) \geq 0$ , donc  $Q$  est une forme quadratique positive de forme polaire  $f$ .
- 2) On pose  $f'(M, N) = \text{tr}(MN)$ . L'application  $f'$  est clairement bilinéaire et on a  $Q'(M) = f'(M, M)$ . On sait que pour tout couple  $(M, N)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ ,  $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ , donc  $f'$  est symétrique, et  $Q'$  est la forme quadratique associée à  $f'$ . Soit  $M = (m_{ij}) \in E$ , le  $i^{\text{ème}}$  coefficient diagonal de  $M^2$  est égal à  $\sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ji}$ , donc  $Q'(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij} m_{ji}$ .

- Si  $M$  est symétrique, alors  $Q'(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2$ ; c'est la somme des carrés de tous les coefficients de  $M$ , donc  $Q'(M) \geq 0$  et  $Q'(M) = 0 \iff M = 0$ , donc  $Q'$  restreinte à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est définie positive.
- Si  $M$  est antisymétrique, alors  $Q'(M) = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2$ . On obtient l'opposé du terme précédent, donc  $Q'$  restreinte à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est définie négative.

### Ce qu'il faut savoir

#### Produit scalaire



Soit  $E$  un espace vectoriel réel.

- On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute application  $\varphi$  définie sur  $E \times E$  à valeurs réelles telle que :
  - pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire (linéarité à droite),
  - pour tout  $y \in E$ , l'application  $x \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire (linéarité à gauche),
  - pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  (symétrie),
  - pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) \geq 0$  (positivité),
  - si  $x \in E$  vérifie  $\varphi(x, x) = 0$ , alors  $x = 0$  (définitive).

Le produit scalaire  $\varphi(\cdot, \cdot)$  est noté en général  $(\cdot | \cdot)$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

#### Remarques

- la symétrie et la linéarité à droite ou à gauche impliquent la bilinéarité.
- Les deux dernières propriétés ( $\varphi$  est définie positive) sont équivalentes à, pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $\varphi(x, x) > 0$ .

- On appelle **espace préhilbertien réel** un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- L'application  $x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$  définit une norme sur  $E$ , appelée norme associée au produit scalaire (on dit qu'une norme est une **norme euclidienne** si elle est

associée à un produit scalaire). On la note  $\|\cdot\|$ . Si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ , on a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ .

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** pour tout  $(x, y) \in E \times E$ , on a  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  avec égalité si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont liés.

- **Produits scalaires usuels :**

- Si  $E = \mathbb{R}^n$ , on définit le produit scalaire canonique  $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

- Si  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , on définit le produit scalaire  $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$ .

### Exercice 6.3

Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ . Pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , on pose :

$$\phi(f, g) = - \int_0^1 (f(x)g''(x) + f''(x)g(x)) dx.$$

Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

La fonction  $fg'' + f''g$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $\phi(f, g)$  existe pour tout  $(f, g) \in E^2$ . Il est immédiat que  $\phi$  est symétrique. Si  $f_1, f_2, g$  sont dans  $E$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors, en utilisant la linéarité de la dérivation et de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(f_1 + \lambda f_2, g) &= - \int_0^1 ((f_1 + \lambda f_2)(x)g''(x) + (f_1 + \lambda f_2)''(x)g(x)) dx \\ &= - \int_0^1 (f_1(x) + \lambda f_2(x))g''(x) + (f_1''(x) + \lambda f_2''(x))g(x) dx \\ &= \phi(f_1, g) + \lambda \phi(f_2, g). \end{aligned}$$

L'application  $\phi$  est symétrique et linéaire à gauche. Elle est par conséquent bilinéaire. Montrons qu'elle est définie et positive. Soit  $f \in E$ , une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \phi(f, f) &= -2 \int_0^1 f(x)f''(x) dx = -2 \left( [f(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 (f'(x))^2 dx \right) \\ &= 0 + 2 \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Par positivité de l'intégrale, pour tout  $f \in E$ , on a  $\phi(f, f) \geq 0$ . Soit  $f \in E$  telle que  $\phi(f, f) = 0$ . La fonction  $f'^2$  est continue, positive sur  $[0, 1]$  et  $\int_0^1 f'^2(x) dx = 0$ ,



ainsi  $f'^2$  et  $f'$  sont nulles sur  $[0, 1]$ . La fonction  $f$  est constante sur  $[0, 1]$ , et comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est la fonction nulle. En conclusion,  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

### Exercice 6.4

Montrer que pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Une comparaison entre le carré d'une somme et la somme de carrés nous fait penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On utilise le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ . On note  $v$  le vecteur de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $u$  celui dont toutes les coordonnées valent 1.

On a  $\|u\|^2 = n$  et  $(v|u) = \sum_{i=1}^n x_i$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz  $(v|u)^2 \leq \|v\|^2 \|u\|^2$  donne exactement l'inégalité demandée.

### Exercice 6.5

**D'après CCP PSI 2006, Mines-Ponts PC 2007**

- 1) Montrer que l'application  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 2) Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\text{tr}({}^tAA) \geq 0$  et  $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n \text{tr}({}^tAA)}$ .
- 3) A-t-on  $\text{tr}(A^2) \geq 0$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

- 1) La linéarité de la trace et de la transposition donne, pour  $(A_1, A_2, B) \in E^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 + \lambda A_2, B) &= \text{tr}({}^t(A_1 + \lambda A_2)B) = \text{tr}({}^tA_1B) + \lambda \text{tr}({}^tA_2B) \\ &= \varphi(A_1, B) + \lambda \varphi(A_2, B). \end{aligned}$$

L'application  $\varphi$  est donc linéaire à gauche. Soit  $(A, B) \in E^2$ , on a :

$$\varphi(B, A) = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tBA)) = \text{tr}({}^tA({}^tB)) = \text{tr}({}^tAB) = \varphi(A, B).$$

L'application  $\varphi$  est donc symétrique. Pour montrer que  $\varphi$  est positive et définie, on exprime  $\varphi(A, A)$  en fonction des coefficients de  $A = (a_{ij})$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on

$$({}^tAA)_{ii} = \sum_{j=1}^n ({}^tA)_{ij} A_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ji}^2, \text{ d'où } \varphi(A, A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2. \text{ Il est clair que}$$

sous cette forme  $\varphi(A) \geq 0$  pour tout  $A \in E$ , et que  $\varphi(A, A) = 0$  si et seulement si  $A = 0$ .

**Remarque**

un calcul semblable à celui de  $\varphi(A, A)$  donne, pour tout  $(A, B) \in E^2$ ,  

$$\varphi(A, B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij},$$
 ce qui correspond au produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^{n^2}$   
 (voir encart suivant).

- 2) La première relation a été montrée dans la question précédente (positivité du produit scalaire). La seconde correspond à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux matrices  $A$  et  $I_n$ . On a en effet  $\varphi(I_n, I_n) = n$  et  $|\varphi(I_n, A)| \leq \sqrt{n\varphi(A, A)}$ , c'est-à-dire l'inégalité demandée.
- 3) Il n'y a aucune raison pour que cette trace soit positive. Prenons par exemple le cas  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $A^2 = -I_2$  et  $\text{tr}(A^2) = -2$ .

**Ce qu'il faut retenir****Produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$** 

En utilisant la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on identifie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}^{n^2}$ . On peut donc considérer le produit scalaire usuel  $(A|B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$ . Ce produit scalaire est exactement celui de l'exercice précédent, à savoir  $(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$ . Il est très fréquemment utilisé sous cette forme.

**6.1.2 Orthogonalité****Ce qu'il faut savoir**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot|\cdot)$ .

- On dit que
  - deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux lorsque  $(x|y) = 0$ .
  - un vecteur  $x \in E$  est orthogonal à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  lorsque, pour tout  $y \in F$ , on a  $(x|y) = 0$ .
  - deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont orthogonaux lorsque pour tout  $(x, y) \in F \times G$ , on a  $(x|y) = 0$ .

**Remarque importante**

Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, alors  $F \cap G = \{0_E\}$  et, par conséquent, la somme  $F + G$  est directe.

- Soit  $A$  est une partie non vide de  $E$ . On définit le sous-espace vectoriel  $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, (x|y) = 0\}$ . On l'appelle **orthogonal** de  $A$ . On a notamment  $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$ .

**Remarque**

Lorsque  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , les sous-espaces  $F$  et  $F^\perp$  sont orthogonaux, et donc en somme directe. On a notamment  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ .

- On dit qu'une famille de vecteurs est orthogonale (resp. orthonormale) lorsque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux (resp. deux à deux orthogonaux et unitaires).
- **Résultat important :** une famille de vecteurs orthogonaux **ne contenant pas le vecteur nul** est libre.
- **Théorème de Pythagore :** les vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .  
Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale, alors

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

La réciproque est fausse si  $n \geq 3$ .

- Si les sous-espaces  $F_1, \dots, F_n$  sont deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe, et elle est notée  $F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_n$ .

Lorsque  $F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_n = E$ , on dit que les sous-espaces  $F_1, \dots, F_n$  sont des **supplémentaires orthogonaux**.

**Remarque**

Contrairement au cas des sommes directes, il n'y a pas de différence entre « deux à deux orthogonaux » et « chacun est orthogonal à la somme des autres ».

- Lorsque les sous-espaces  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires, on appelle **projection orthogonale sur  $F$** , la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ . Elle est notée  $p_F$ .

**Exercice 6.6****CCP PSI 2005**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel de dimension  $n$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Montrer que, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , il existe un unique vecteur  $v \in E$  tel que  $(v|v_i) = x_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Le résultat souhaité correspond à une notion de bijectivité, l'inconnu étant le vecteur  $v$ . On cherche des conditions sur les  $n$  produits scalaires  $(v|v_i)$ . On considère alors l'application  $\varphi$  suivante :

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto ((v|v_1), \dots, (v|v_n)) \end{cases}$$

On montre assez facilement que cette application est linéaire (par la linéarité à gauche du produit scalaire). Les espaces  $E$  et  $\mathbb{R}^n$  sont de même dimension  $n$ , il suffit donc

de prouver l'injectivité de  $\varphi$  pour avoir sa bijectivité. Soit  $v \in \text{Ker } \varphi$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(v|v_i) = 0$ . Le vecteur  $v$  est donc orthogonal à  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$ , d'où  $v = 0$ . Ainsi l'application  $\varphi$  est injective. Elle est donc bijective. Si on se donne  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors il existe un unique vecteur  $v$  de  $E$  tel que  $\varphi(v) = x$ , ce qui répond à la question posée.

### Exercice 6.7

#### CCP PSI 2006, ENSEA MP 2007

Soit  $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

- 1) Montrer que l'application  $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
  - 2) Soient  $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$  et  $G = \{g \in E \mid g'' = g\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.
- 1) L'existence de  $\varphi(f, g)$  est immédiate puisque la fonction  $fg + f'g'$  est continue sur  $[0, 1]$ . On montre facilement que  $\varphi$  est bilinéaire et symétrique. Si  $f \in E$ , on a  $\varphi(f, f) = \int_0^1 (f^2(t) + f'(t)^2) dt$ , si bien que  $\varphi(f, f) \geq 0$ . Soit  $f \in E$  telle que  $\varphi(f, f) = 0$ . Puisque la fonction  $f^2 + f'^2$  est continue et positive sur  $[0, 1]$  et que  $\int_0^1 (f^2 + f'^2)(t) dt = 0$ , la fonction est nulle sur  $[0, 1]$ . Les fonctions sont à valeurs réelles donc  $f$  est nulle sur  $[0, 1]$ . L'application  $\varphi$  est bien un produit scalaire sur  $E$ . On le notera  $(\cdot | \cdot)$  dans la suite.
- 2) On commence par montrer que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux (ce qui entraîne que la somme  $F + G$  est directe). Soient  $f \in F$  et  $g \in G$ . Une intégration par parties de  $\int_0^1 f'(t)g'(t) dt$  donne :
- $$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt + [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t) dt = 0,$$
- car  $f(0) = f(1) = 0$  et  $g'' - g = 0$ . Les deux sous-espaces  $F$  et  $G$  sont orthogonaux. Il reste à montrer qu'ils sont supplémentaires. On procède, comme souvent, par analyse-synthèse. Soit  $h \in E$ . On suppose qu'il existe  $f \in F$  et  $g \in G$  telles que  $h = f + g$ . On cherche à déterminer ces fonctions. Le sous-espace le plus simple est  $G$  puisque  $G = \text{Vect}(\text{sh}, \text{ch})$ , alors que  $F$  est de dimension infinie. On écrit  $g = A \text{ch} + B \text{sh}$ . Les valeurs en 0 et 1 donnent  $h(0) = A$  et  $h(1) = A \text{ch } 1 + B \text{sh } 1$ , c'est-à-dire  $B = \frac{h(1) - h(0) \text{ch } 1}{\text{sh } 1}$ . La fonction  $g$  est donc entièrement déterminée. On écrit alors  $f = h - g$ , ce qui définit  $f$ . On passe à la partie synthèse. Soit  $g = A \text{ch} + B \text{sh}$  où  $A$  et  $B$  sont les constantes déterminées ci-dessus, et  $f = h - g$ . Il est immédiat que  $g \in G$  et  $f + g = h$ .

Il reste à prouver que  $f \in E$ . On a  $f(0) = h(0) - g(0) = h(0) - A = 0$  et  $f(1) = h(1) - g(1) = h(1) - (h(0) \operatorname{ch} 1 + h(1) - h(0) \operatorname{ch} 1) = 0$ . Ainsi  $h$  se décompose en  $h = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ . Les sous-espaces  $F$  et  $G$  sont donc des supplémentaires orthogonaux.

### 6.1.3 Bases orthonormales, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

#### Ce qu'il faut savoir

- On appelle **espace euclidien**, tout espace préhilbertien réel de **dimension finie**.
- Si  $E$  est un espace euclidien, alors il admet une base orthonormale. Si  $\mathcal{F}$  est une famille orthonormale de vecteurs de  $E$ , alors on peut la compléter en une base orthonormale de  $E$ .
- Soit  $E$  un espace euclidien. Si  $f$  est une forme linéaire sur  $E$ , alors il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que, pour tout  $x \in E$ , on a  $f(x) = (a|x)$ .

**Filière PSI :** Pour  $a \in E$ , on note  $\varphi_a$  la forme linéaire sur  $E$  qui à tout  $x \in E$  associe  $\varphi_a(x) = (a|x)$ . L'application  $a \mapsto \varphi_a$  est un isomorphisme entre les espaces vectoriels  $E$  et  $E^*$ .

- **Calculs dans une base orthonormale**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale d'un espace euclidien  $E$ . Soient

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \text{ deux vecteurs de } E.$$

$$\circ \text{ On a } (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$\circ \text{ En posant } X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \text{ et } Y = {}^t(y_1, \dots, y_n), \text{ on a } (x|y) = {}^tXY \text{ et } \|x\|^2 = {}^tXX.$$

- **Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie**

Soit  $E$  un **espace préhilbertien réel** et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de **dimension finie**.

- On a  $F \oplus F^\perp = E$ .
- Si, de plus,  $E$  est de dimension finie, alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$  et  $F^{\perp\perp} = F$ .
- Pour  $x \in E$ , on note  $d(x, F) = \min_{z \in F} \|x - z\|$ . Ce minimum est atteint en un unique vecteur, le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ . On a  $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x)\|^2$ .
- Soit  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_m)$  une base orthonormale de  $F$ . Pour tout  $x \in E$ , on a

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^m (e_i|x) e_i, \quad \sum_{i=1}^m (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{inégalité de Bessel}).$$

- **Orthonormalisation de Gram-Schmidt** : soit  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_m)$  une base de  $F$ , il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}'_F = (f_1, \dots, f_m)$  de  $F$  telle que, pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ . On peut l'obtenir de proche en proche par les relations  $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,

$$f_{k+1} = \frac{e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1})}{\|e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1})\|} = \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_i | e_{k+1}) f_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_i | e_{k+1}) f_i\|}.$$

### Exercice 6.8

#### CCP PSI 2007

- 1) Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 2) On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(I_3, A)$  est une famille orthogonale de  $E$ .

- 3) Déterminer le projeté orthogonal de  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sur  $\text{Vect}(I_3, A)$ .

- 1) Voir exercice 6.5, page 168.

- 2) On le montre directement avec

$$(I_3 | A) = \text{tr}(I_3 A) = \text{tr}(A) = 0.$$

- 3) La famille  $(I_3, A)$  est une base orthogonale de  $F = \text{Vect}(I_3, A)$ . On la normalise afin d'obtenir une base orthonormale de  $F$ . On a  $\|I_3\|^2 = \|A\|^2 = 3$ . En posant

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} I_3 \text{ et } A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} A, \text{ la famille } (A_1, A_2) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

La formule du projeté orthogonal donne :

$$\begin{aligned} p_F(B) &= (A_1 | B) A_1 + (A_2 | B) A_2 = \frac{1}{3} \underbrace{(I_3 | B)}_1 I_3 + \frac{1}{3} \underbrace{(A | B)}_1 A \\ &= \frac{1}{3} (I_3 + A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Exercice 6.9

## CCP PC 2007

1) Montrer que l'application  $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2) Pour  $n = 2$ , construire une base orthonormale à partir de la base  $(1, X, X^2)$ .

1) La bilinéarité, la symétrie et la positivité se prouvent de façon simple. Soit  $P \in E$  tel que  $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^2(k) = 0$ . Puisque  $P^2$  est à valeurs réelles, cela donne  $P(k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le polynôme  $P$  admet donc au moins  $n+1$  racines. Or il est de degré au plus  $n$ , il est donc nul. L'application  $\varphi$  est bien un produit scalaire.

2) On applique la méthode de Gram-Schmidt à la base de  $\mathbb{R}_2[X]$  formée par les polynômes  $P_0 = 1, P_1 = X$  et  $P_2 = X^2$ .

• On a  $Q_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$  avec  $\|P_0\|^2 = \sum_{k=0}^2 P_0^2(k) = 3$ , d'où  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (le polynôme  $P_0$  est le polynôme constant 1, mais il n'est pas normé pour le produit scalaire considéré).

• On obtient ensuite :

$$Q_1 = \frac{P'_1}{\|P'_1\|} \quad \text{où} \quad P'_1 = P_1 - (Q_0|P_1)Q_0 = X - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|X\right)\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On a  $(1|X) = 1.0 + 1.1 + 1.2 = 3$ , si bien que  $P'_1 = X - 1$ . On calcule enfin

$$\|P'_1\|^2 = (0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 2, \quad \text{ce qui donne} \quad Q_1 = \frac{X-1}{\sqrt{2}}.$$

• On a enfin :

$$Q_2 = \frac{P'_2}{\|P'_2\|} \quad \text{où} \quad P'_2 = P_2 - (Q_0|P_2)Q_0 - (Q_1|P_2)Q_1.$$

On obtient :

$$P'_2 = X^2 - 2X + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \|P'_2\|^2 = \frac{2}{3}.$$

La famille  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \left( X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right) \right)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour le produit scalaire considéré.

**Exercice 6.10****Mines-Ponts PSI 2007**

Calculer  $m = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt$ .

*Indication de la rédaction :* On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ .

On interprète ce minimum comme une distance entre un vecteur fixe et un sous-espace vectoriel, pour un bon produit scalaire. Considérons, sur l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$ , l'application  $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$ . Cette application est

bien définie car  $h : t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

La fonction  $h$  est donc intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , ce qui garantit l'existence de  $\varphi(f, g)$ . La bilinéarité et la symétrie sont immédiates, la positivité également. Si  $f \in E$

vérifie  $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt = 0$ , alors, puisque  $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$  est continue et posi-

tive sur  $\mathbb{R}^+$ , pour tout  $t \geq 0$ , on a  $f^2(t)e^{-t} = 0$ . La fonction polynomiale  $f$  est donc nulle sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $f = 0$ . Ainsi  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $E$ , que l'on notera  $(\cdot | \cdot)$ . On pose alors  $P_0 = X^3$  et  $F = \mathbb{R}_2[X]$ . On peut interpréter  $m$  comme  $m = \min_{P \in F} \|P_0 - P\|^2 = d(P_0, F)^2$ . Cette distance est atteinte pour le projeté ortho-

gonal  $Q$  de  $P_0$  sur  $F$ . Pour déterminer ce projeté orthogonal, on peut déterminer une base orthonormale de  $F$  et utiliser la formule donnant le projeté orthogonal. Plus rapidement, on écrit les conditions que doit vérifier le polynôme  $Q$ , c'est-à-dire  $Q \in F$  et  $P_0 - Q \perp F$ . La première condition se traduit par l'existence d'un triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $Q = aX^2 + bX + c$ . Pour la seconde condition, il suffit que  $P_0 - Q$  soit orthogonal à une base de  $F$ , par exemple aux polynômes 1,  $X$  et  $X^2$ , ce qui donne trois conditions  $(P_0 - Q | X^i) = 0$  pour  $i = 0, 1$  et  $2$ , qui se réécrivent en  $(Q | X^i) = (X^3 | X^i)$ . On obtient finalement le système

$$\begin{cases} 2!a + 1!b + 0!c = 3! \\ 3!a + 2!b + 1!c = 4! \\ 4!a + 3!b + 2!c = 5! \end{cases},$$

ce qui donne  $a = 9$ ,  $b = -18$  et  $c = 6$ , c'est-à-dire  $Q = 9X^2 - 18X + 6$ . On calcule enfin  $\|Q - P_0\|^2 = 36$  qui est le minimum recherché.

**Exercice 6.11****Centrale PC 2006, TPE-EIVP PC 2007**

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur l'hyperplan  $H$  d'équation  $x - y + z - t = 0$ .



On détermine facilement l'image d'un vecteur  $u$  de  $E = \mathbb{R}^4$  par une projection orthogonale sur un sous-espace  $F$  lorsqu'on dispose d'une base orthonormale de  $F$ . Ici le sous-espace est de dimension 3. Il est donc plus facile de déterminer la matrice de la projection associée, c'est-à-dire la projection orthogonale sur  $D = H^\perp$ . Cette droite admet pour vecteur directeur le vecteur  $(1, -1, 1, -1)$  ou plutôt le vecteur normé  $e = (1/2, -1/2, 1/2, -1/2)$ . Si  $u = (x, y, z, t)$  est un vecteur de  $E$ , alors son image par la projection  $p_D$  est  $p_D(u) = (e|u)e$ . On détermine alors facilement l'image de la base canonique, et la matrice de  $p_D$  dans la base canonique est

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors la matrice  $A$  de la projection orthogonale  $p_H$  dans la base canonique par  $A = I_4 - B$ .

### 6.1.4 Espaces préhilbertiens complexes

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. On ne donne ici que les différences par rapport au cas réel.

- On appelle **produit scalaire hermitien** sur  $E$  toute application  $\varphi$  définie sur  $E \times E$  à valeurs complexes telle que :

- l'application  $\varphi$  est linéaire à droite,
- l'application  $\varphi$  est semi-linéaire à gauche, c'est-à-dire que pour tout  $y \in E$  et pour tout  $(x, x', \lambda) \in E \times E \times \mathbb{C}$ , on a  $\varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x', y)$ ,
- pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$  ( $\varphi$  est hermitienne),
- pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) \geq 0$  (positivité),
- si  $x \in E$  vérifie  $\varphi(x, x) = 0$ , alors  $x = 0_E$  (définie).

- Si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ , on a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x|y)$ .

- On appelle **espace hermitien** tout espace vectoriel préhilbertien complexe de **dimension finie**. Si  $F$  est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe, muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_m)$ , on a

$$E = F \oplus F^\perp, \text{ et si } x \in E, \text{ alors on a } p_F(x) = \sum_{i=1}^m (e_i|x) e_i \text{ (la formule ne}$$

change pas mais on fera très attention au sens du produit scalaire qui n'est plus symétrique).

- Les expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

$$\text{deviennent } (x|y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

## Exercice 6.12

## TPE MP 2005

- 1) Montrer que l'application  $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}g$  définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel  $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid |f|^2 \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\}$ .
- 2) Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $f_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \left( \frac{1+ix}{1-ix} \right)^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $f_n$  est dans  $E$ . Montrer qu'il existe une unique famille  $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels strictement positifs tels que  $(k_n f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une famille orthonormale de  $E$ .

- 1) Même si cela n'est pas explicitement demandé, on commence par montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . L'ensemble est non vide. Soient  $f \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il est immédiat que  $\lambda f$  est encore continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $|\lambda f|^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à prouver la stabilité par somme. Soient  $f$  et  $g$  dans  $E$ . On a  $|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{f}g)$ . Il faut donc prouver l'intégrabilité de  $2\operatorname{Re}(\overline{f}g)$ . On utilise les inégalités  $|\operatorname{Re}(\overline{f}g)| \leq |\overline{f}g|$  et  $|\overline{f}| \cdot |g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ . Cela donne finalement, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f(t) + g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ . On a donc prouvé que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Il faut maintenant justifier l'existence du produit scalaire. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $E$ , alors on a  $|\overline{f}g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ , ce qui prouve l'intégrabilité de  $\overline{f}g$  sur  $\mathbb{R}$ . La linéarité à droite est immédiate. Si  $(f, g) \in E^2$ , alors on a  $(g|f) = \int_{\mathbb{R}} \overline{g}f = \int_{\mathbb{R}} \overline{g\overline{f}} = \int_{\mathbb{R}} \overline{g} \overline{f} = \overline{(f|g)}$ , l'application est hermitienne. Si  $f \in E$ , alors  $(f|f) = \int_{\mathbb{R}} |f|^2$  est un réel positif ou nul et, puisque  $|f|^2$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$ , on a  $(f|f) = 0$  si et seulement si  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . L'application donnée est un produit scalaire hermitien.

- 2) Chacune des fonctions  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|1+ix| = |1-ix|$  et  $|f_n(x)|^2 = \frac{1}{1+x^2}$ . La fonction  $|f_n|^2$  est donc intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $f_n \in E$ . Pour justifier l'existence de cette suite  $(k_n)$ , il suffit de prouver que la famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale. Comme aucune des fonctions  $f_n$  est nulle, on pourra choisir  $k_n = \frac{1}{\|f_n\|}$ . Soient  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  et distincts. On calcule le produit scalaire  $(f_n|f_m)$  qui vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right)^n \left( \frac{1+ix}{1-ix} \right)^m \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1+ix}{1-ix} \right)^{m-n} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

On effectue le changement de variable  $x = \tan t$  (possible car on a l'intégrale d'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $t \mapsto \tan t$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $] -\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}$ ). On obtient

$$\begin{aligned}(f_n | f_m) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1 + i \tan t}{1 - i \tan t} \right)^{m-n} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{\cos t + i \sin t}{\cos t - i \sin t} \right)^{m-n} dt \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i(m-n)t} dt = \left[ \frac{e^{2i(m-n)t}}{2i(m-n)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\&= \frac{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}}{2i(m-n)} = \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} = 0.\end{aligned}$$

La famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est donc orthogonale. Un calcul semblable dans le cas où  $m = n$  donne  $\|f_n\|^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$ . On peut donc prendre  $k_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 6.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### Exercice 6.13

#### Centrale PC 2007

Soient  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien,  $a$  un vecteur unitaire de  $E$  et  $k \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $\Phi : (x, y) \mapsto (x | y) + k(x | a)(y | a)$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  soit un produit scalaire sur  $E$ .

On suppose que  $k \neq 0$  et que le vecteur  $a$  est non nul (sinon  $\Phi$  est le produit scalaire donné sur  $E$ ). L'application  $\Phi$  est bilinéaire par la bilinéarité du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ . La symétrie est également immédiate puisque, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $\Phi(y, x) = (y | x) + k(y | a)(x | a) = \Phi(x, y)$ .

Soit  $x \in E$ . On a  $\Phi(x, x) = \|x\|^2 + k(x | a)^2$ . Si  $k \geq 0$ , alors  $\Phi(x, x) \geq \|x\|^2$  et  $\Phi$  est positive et définie. On suppose maintenant que  $k < 0$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne  $|(x | a)|^2 \leq \|a\|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2$  avec égalité lorsque  $x$  est colinéaire à  $a$ . Cela donne  $\Phi(x, x) \geq \|x\|^2 + k\|x\|^2 = (1 + k)\|x\|^2$  avec égalité lorsque  $x = a$  (par exemple). Pour que  $\Phi(x, x)$  soit strictement positif pour tout  $x \neq 0_E$ , il faut que  $1 + k > 0$  (en prenant  $x = a$ ) et cette condition est suffisante.

*Conclusion :* l'application  $\Phi$  est un produit scalaire si et seulement si  $k > -1$ .

### Exercice 6.14

#### D'après Mines-Ponts PC 2007

Soit  $E = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$ .

1) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- 2) Soient  $u$  et  $v$  dans  $E$ . Montrer que la série  $\sum u_n v_n$  converge.
- 3) Montrer que l'application  $\varphi : (u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- 4) Soit  $F$  le sous-espace de  $E$  formé par les suites nulles à partir d'un certain rang. Déterminer  $F^\perp$ .

On rappelle que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

- 1) La suite nulle est dans  $E$ . Soient  $u$  et  $v$  deux suites de  $E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(u_n + v_n)^2 \leq 2(u_n^2 + v_n^2)$ . Ainsi  $E$  est stable pour l'addition. Il est immédiat que si  $u \in E$ , alors  $\lambda u \in E$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par conséquent  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ .
- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ . La série  $\sum u_n v_n$  est absolument convergente, donc convergente.
- 3) La question précédente justifie l'existence de  $\varphi(u, v)$ . La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Soit  $u \in E$ , on a  $\varphi(u, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ . Ainsi  $\varphi(u, u)$  est positif pour tout  $u \in E$  et est nul seulement pour la suite nulle (s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \neq 0$  alors  $\varphi(u, u) \geq u_{n_0}^2 > 0$ ). L'application  $\varphi$  définit bien un produit scalaire.
- 4) Soit  $v \in F^\perp$ . La suite  $v$  doit être orthogonale à toute suite nulle à partir d'un certain rang. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On considère la suite  $u$  telle que  $u_m = v_m$  et  $u_n = 0$  sinon. Cette suite est dans  $F$ . On a  $\varphi(u, v) = v_m^2 = 0$ . Ainsi, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $v_m = 0$ . Finalement  $F^\perp = \{0\}$ .

### Exercice 6.15

#### CCP PC 2007

Soit  $E$  un espace préhilbertien muni du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

- 1) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs unitaires, alors  $(u + v | u - v) = 0$ .
- 2) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $(x | y) = 0$  implique  $(f(x) | f(y)) = 0$ .
- Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs unitaires, alors  $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ .
  - En déduire qu'il existe un réel  $k$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = k\|x\|$ .
  - Montrer alors que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $(f(x) | f(y)) = k^2(x | y)$ .

1) On a

$$(u + v | u - v) = \|u\|^2 + (v | u) - (u | v) - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

- 2) • Si  $u$  et  $v$  sont unitaires, alors, d'après la question précédente, les vecteurs  $u + v$  et  $u - v$  sont orthogonaux. On a donc :
- $$(f(u + v) | f(u - v)) = 0 = (f(u) + f(v) | f(u) - f(v)) = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2.$$
- Ainsi, si  $u$  et  $v$  sont unitaires, on a  $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ .
- La question précédente montre que la quantité  $\|f(x)\|$  est constante sur l'ensemble des vecteurs unitaires  $x$ . Notons  $k$  cette constante. Pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ , le vecteur  $\frac{x}{\|x\|}$  est unitaire donc  $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = k$ , c'est-à-dire  $\|f(x)\| = k\|x\|$ . Cette dernière relation est valable également lorsque  $x = 0$ .
- En utilisant les formules de polarisation, on a pour  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} (f(x) | f(y)) &= \frac{1}{4} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (k^2\|x + y\|^2 - k^2\|x - y\|^2) = k^2(x | y). \end{aligned}$$

### Exercice 6.16

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ , et  $H$  l'hyperplan de  $E$  d'équation  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ . Déterminer une base orthonormale de  $H$ .

#### • Méthode 1

On essaie de construire une famille orthogonale de  $E$  relativement simple. Pour cela, on la construit échelonnée. Si  $f_k$  est un vecteur de  $H$  avec les  $k + 1$  premières coordonnées de somme nulle et les  $n - k - 1$  dernières composantes nulles, on remarque que tout vecteur dont les  $k + 1$  premières composantes sont égales à 1 est orthogonal à  $f_k$  (cela revient à écrire que  $f_k \in H$ ). On s'inspire de cette idée pour construire les vecteurs  $f_k$  pour  $k = 1, \dots, n - 1$  : on le choisit de sorte que ses  $k$  premières composantes soient égales à 1, la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  égale à  $-k$  et les autres nulles. Ainsi  $f_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{-k, 0, \dots, 0}_{n-k-1})$ . Chaque vecteur est non nul, dans  $H$  et

les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. On a donc une famille libre à  $n - 1$  vecteurs de l'hyperplan  $H$  de dimension  $n - 1$ . C'est donc une base orthogonale de  $H$ . On normalise le vecteur  $f_k$  en divisant par sa norme  $\sqrt{k^2 + k}$ .

#### • Méthode 2

Une base immédiate de  $H$  est la famille de vecteurs  $(e_i)_{i=1, \dots, n-1}$  où  $e_i$  est le vecteur  $(1, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{\text{position } i+1}, 0, \dots, 0)$ . On applique la méthode de Gram-Schmidt à

cette famille de vecteurs pour construire une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  de  $H$ . On trouve d'abord  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$ . Soit  $f'_2 = e_2 - (f_1 | e_2)f_1$ . On

trouve  $f'_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -2, 0, \dots, 0)$  puis  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0, \dots, 0)$ . On continue

avec  $f'_3 = e_3 - (f_1|e_3)f_1 - (f_2|e_3)f_2$ . Après calcul,  $f'_3 = \frac{1}{3}(1, 1, 1, -3, 0, \dots, 0)$

et  $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3+3^2}}(1, 1, 1, -3, 0, \dots, 0)$ . La méthode se généralise assez bien,

et on montre par récurrence que  $f_k$  est le vecteur  $f_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}u_k$  où  $u_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{-k, 0, \dots, 0}_{n-k-1})$ . Si  $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ , on calcule d'abord le vecteur

$$f'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{p=1}^k (f_p|e_{k+1})f_p. \text{ On a } (f_p|e_{k+1})f_p = \frac{1}{p(p+1)}u_p = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)u_p.$$

La première coordonnée de  $f'_{k+1}$  est  $1 - \sum_{p=1}^k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - (1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$ .

La coordonnée  $k+2$  est  $-1$ , les coordonnées suivantes sont nulles. Pour  $i \in \llbracket 2, k+1 \rrbracket$ , la  $i$ ème coordonnée est :

$$- \underbrace{\left(-\frac{i-1}{i(i-1)}\right)}_{\text{vient de } f_{i-1}} - \sum_{p=i}^k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i} + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

On obtient finalement  $f'_{k+1} = \frac{1}{k+1}u_{k+1}$ , puis la valeur souhaitée pour  $f_{k+1}$ .

### Exercice 6.17

Soit  $E$  euclidien de dimension  $n$ , muni d'une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,

et soit  $e = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  un vecteur unitaire de  $E$ .

Déterminer la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale sur la droite  $D = \mathbb{R}e$ , puis de la projection orthogonale sur  $H = (\mathbb{R}e)^\perp$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base orthonormale  $\mathcal{B}$ . Le vecteur  $e$  forme une base orthonormale de la droite  $D$ , et la formule du projeté orthogonal donne, dans la base orthonormale  $\mathcal{B}$ ,  $p_D(x) = (e|x)e = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)e$ .

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient  $p_D(e_j) = a_j e = \sum_{i=1}^n (a_i a_j) e_i$ . La matrice de la projection orthogonale sur  $D$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc

$$A = \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_2 a_1 & \cdots & a_n a_1 \\ a_1 a_2 & a_2 a_2 & & a_n a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & \cdots & \cdots & a_n a_n \end{pmatrix}.$$

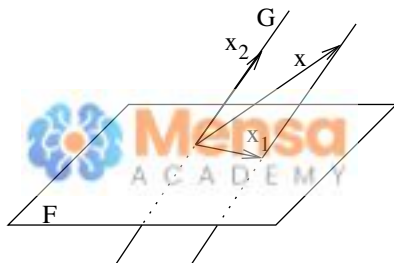
La projection orthogonale sur  $H$  est la projection associée à  $p_D$ . On a donc  $p_H = \text{Id}_E - p_D$ , et si  $B$  désigne la matrice de  $p_H$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors  $B = I_n - A$ .

### Exercice 6.18

#### Centrale PSI 2006

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $p$  un projecteur de  $E$ . Démontrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

- Supposons que  $p$  soit un projecteur orthogonal sur  $F$ . Soit  $x \in E$  et  $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$  tel que  $x = x_1 + x_2$ . La formule de Pythagore donne  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2$ . Or  $p(x) = x_1$ , si bien que  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .
- Soit  $p$  un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ . Soit  $(x_1, x_2) \in F \times G$ . Si on écrit  $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  avec  $x = x_1 + x_2$ , on obtient seulement  $\|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + 2(x_1|x_2) + \|x_2\|^2$ , ce qui ne donne rien de particulier. Considérons alors le vecteur  $x = x_1 + \lambda x_2$  où  $\lambda$  est un réel :



La relation  $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  devient  $\|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + 2\lambda(x_1|x_2) + \lambda^2\|x_2\|^2$ , c'est-à-dire  $2\lambda(x_1|x_2) + \lambda^2\|x_2\|^2 \geq 0$ , valable pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $(x_1|x_2) \neq 0$ , la fonction  $\lambda \mapsto 2\lambda(x_1|x_2) + \lambda^2\|x_2\|^2$  est du premier ou du second degré et n'est pas toujours positive ou nulle (sur le dessin, lorsque  $x$  est « un peu en dessous » de  $x_1$ , on a  $\|p(x)\| > \|x\|$ ). Ainsi  $(x_1|x_2) = 0$  pour tout  $(x_1, x_2) \in F \times G$ . Les espaces  $F$  et  $G$  sont orthogonaux et  $p$  est donc le projecteur orthogonal sur  $F$ .

### Exercice 6.19

#### CCP PSI 2005

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonale de  $E$  et  $p$  un projecteur orthogonal de rang  $q$ .

1) Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\|^2 = (p(x)|x)$ .

2) Montrer que  $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = q$ .

1) Soit  $x \in E$ , on a

$$\|p(x)\|^2 - (p(x)|x) = (p(x)|p(x)) - (p(x)|x) = (p(x)|p(x) - x) = 0,$$

car  $x - p(x)$  est orthogonal à  $p(x)$ .

2) Soit  $A$  la matrice de  $p$  dans la base orthonormale  $\mathcal{B}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\|p(e_i)\|^2 = (p(e_i)|e_i)$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormale, ce terme est la coordonnée sur le vecteur  $e_i$  du vecteur  $p(e_i)$ , c'est-à-dire le terme  $a_{ii}$  de la matrice  $A$ .

Ainsi,  $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$ . Or pour une matrice de projection, on a  $\text{tr } A = \text{rg } A = \text{rg } p = q$  (voir exercice 2.18, page 57).

### Exercice 6.20

#### CCP PC 2006

Étant donnés  $A$  et  $B \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $(A | B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$ .

1) Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et que  $(X^k | 1) = k!$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $Q$  le projeté orthogonal de 1 sur  $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$ .

a) Justifier l'existence de réels  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  tels que  $Q = - \sum_{k=1}^n a_k X^k$ .

b) On note  $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2) \dots (X+k)$ . Calculer  $(Q-1 | X^k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , puis établir que  $P(k) = 0$  pour ces mêmes valeurs de  $k$ . En déduire  $P$  et  $a_n$ .

3) On note  $I = \inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt \right)$ . Montrer que  $I = \frac{1}{n+1}$ .

1) On a étudié ce produit scalaire dans l'exercice 6.10, page 175. Soient  $M > 0$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^M t^k e^{-t} dt = -M^k e^{-M} + k \int_0^M t^{k-1} e^{-t} dt,$$

ce qui donne, lorsque  $M$  tend vers  $+\infty$ , la relation  $(X^k | 1) = k(X^{k-1} | 1)$ . Puisque  $(1 | 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ , une récurrence simple donne  $(X^k | 1) = k!$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .



2) 2a. Le polynôme  $Q$  appartient à  $F$  ce qui donne l'existence de réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

tels que  $Q = \sum_{l=1}^n \alpha_l X^l$ . Avec  $a_l = -\alpha_l$ , on obtient le résultat.

2.b. Le polynôme  $Q$  est le projeté orthogonal de 1 sur  $F$  donc  $1 - Q \perp F$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(1 - Q | X^k) = 0$ . On explicite cette égalité. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$(1 - Q | X^k) = \int_0^{+\infty} \left( 1 + \sum_{\ell=1}^n a_\ell t^\ell \right) t^k e^{-t} dt = k! + \sum_{\ell=1}^n a_\ell (k + \ell)! = 0.$$

Or pour un tel entier  $k$ , on a  $P(k) = 1 + \sum_{\ell=1}^n a_\ell (k + 1) \dots (k + \ell) = 1 + \sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{(k + \ell)!}{k!}$

et  $k!P(k) = (1 - Q | X^k) = 0$ . Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $P(k) = 0$ .

2.c. Le polynôme  $P$  est de degré  $n$ , de coefficient dominant  $a_n$  et admet  $1, 2, \dots, n$  pour racine. Ainsi  $P = a_n(X - 1)(X - 2) \dots (X - n)$ . Il reste à déterminer le coefficient dominant  $a_n$ . Pour cela on calcule  $P(-1)$  (car  $-1$  est racine de tous les polynômes  $(X + 1) \dots (X + k)$ ). Cela donne  $P(-1) = 1 = a_n(-1)^n(n + 1)!$ . On obtient finalement :

$$P = \frac{(-1)^n}{(n + 1)!} \prod_{k=1}^n (X - k).$$

3) En remplaçant  $\alpha_k$  par  $-\beta_k$ , on montre que  $I = \min_{R \in F} \|1 - R\|^2$ . Ce minimum est

atteint lorsque  $R$  est le projeté orthogonal de 1 sur  $F$ , c'est-à-dire  $Q$ . On a donc  $I = \|1 - Q\|^2 = (1 - Q | 1 - Q) = (1 - Q | 1) - (1 - Q | Q)$ . Or  $Q \in F$  et  $1 - Q \in F^\perp$  donc  $I = (1 - Q | 1)$ . En reprenant le calcul de la question 2.b, on

trouve  $(1 - Q | 1) = 1 + \sum_{\ell=1}^n a_\ell \ell! = P(0)$ . Puisque  $P(0) = \frac{(-1)^n}{(n + 1)!} ((-1)^n n!)$ , on

obtient  $I = \frac{1}{n + 1}$ .

### Exercice 6.21

#### D'après CCP PSI 2005

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de vecteurs non nuls de  $E$  telle que :

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2 = \|x\|^2. \quad (*)$$

1) Montrer que la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $E$ .

2) Montrer que  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormale de  $E$ .

- 1) Soit  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $x$  un vecteur de  $F^\perp$ . La formule (\*) appliquée à ce vecteur donne  $\sum_{k=1}^n 0 = \|x\|^2$ . Ainsi  $x = 0_E$  et  $F^\perp = \{0_E\}$ . Puisque  $E$  est de dimension finie, on a  $F = (F^\perp)^\perp = E$  et la famille est génératrice.
- 2) La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice et contient  $n$  vecteurs, c'est donc une base de  $E$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Appliquons la formule (\*) au vecteur  $e_i$ . Cela donne

$$(e_i|e_i)^2 + \sum_{j \neq i} (e_i|e_j)^2 = \|e_i\|^2 \quad (**)$$

et donc  $(e_i|e_i)^2 = \|e_i\|^4 \leq \|e_i\|^2$ , d'où  $\|e_i\| \leq 1$ . Considérons alors  $x$  un vecteur non nul orthogonal aux vecteurs  $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$  (c'est possible car ces vecteurs engendrent un espace de dimension  $n-1$ ). La formule (\*) appliquée à  $x$  donne  $\|x\|^2 = (x|e_i)^2$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne  $(x|e_i)^2 \leq \|x\|^2 \|e_i\|^2$ . En combinant ces deux relations, on obtient  $\|e_i\|^2 \geq 1$ . Finalement, on a  $\|e_i\| = 1$ . En reportant cela dans (\*\*), on obtient alors  $\sum_{j \neq i} (e_i|e_j)^2 = 0$  et, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $j \neq i$ , on a  $(e_j|e_i) = 0$ . Par conséquent, la famille  $\mathcal{F}$  est une base orthonormale de  $E$ .

### Exercice 6.22



#### CCP PC 2007

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire canonique  $\phi(M, N) = \text{tr}({}^tMN)$ .

- 1) Soit  $G = \mathbb{R}I_n$ . Déterminer l'orthogonal de  $G$ . Si  $A \in E$ , déterminer la projection orthogonale de  $A$  sur  $G$  et sur  $G^\perp$ .
- 2) On désigne par  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  les sous-espaces formés des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Vérifier que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires et orthogonaux.
  - Étant donnée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , déterminer la borne inférieure de  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$  lorsque  $M = (m_{i,j})$  décrit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , puis lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- 1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est orthogonale à  $G$  si et seulement si elle est orthogonale à une base de  $G$ , donc si  $(I_n|A) = \text{tr } A = 0$ . On a donc  $G^\perp = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr } A = 0\}$ . La matrice  $I_n$  est une base de  $G$  et  $\|I_n\| = \sqrt{n}$ . Ainsi  $I' = \frac{1}{\sqrt{n}}I_n$  est une base orthonormale de  $G$ . Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors
- $$p_G(A) = (I'|A)I' = \frac{1}{n}(I_n|A)I_n = \frac{\text{tr } A}{n}I_n.$$
- On obtient alors :
- $$p_{G^\perp}(A) = A - p_G(A) = A - \frac{\text{tr } A}{n}I_n.$$

- 2) • Le fait que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  soient supplémentaires est un résultat usuel sur les matrices (on peut le faire par le calcul des dimensions, respectivement  $\frac{n(n+1)}{2}$  et  $\frac{n(n-1)}{2}$ ), ou bien en montrant que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose dans la somme directe  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , en  $M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$ . Soient  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . On a  $(S|A) = \text{tr}({}^tSA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$  mais aussi, par symétrie,  $(S|A) = (A|S) = \text{tr}({}^tAS) = \text{tr}(-AS)$ . Ainsi  $(S|A) = -(S|A)$  et par conséquent  $(S|A) = 0$ . Les deux sous-espaces vectoriels sont donc orthogonaux.
- On remarque que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \|A - M\|^2$ . La norme  $\|A - M\|^2$  est minimale lorsque  $M$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On a  $p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A + {}^tA}{2}$  (c'est la composante sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de la décomposition de  $A$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) et  $\|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\|^2 = \|\frac{A - {}^tA}{2}\|^2$ . De même, lorsque  $M$  décrit l'ensemble des matrices antisymétriques, le minimum est atteint pour  $M = \frac{A - {}^tA}{2}$  et vaut  $\|\frac{A - {}^tA}{2}\|^2$ .

## Exercice 6.23



## Mines-Ponts PSI 2007

Montrer que l'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $f(M) = \text{tr}({}^tMM) + (\text{tr}(M))^2$  est une forme quadratique. Est-elle positive ? Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à  $f$ .

Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour trouver la forme bilinéaire symétrique candidate associée à  $f$ , on calcule :

$$\begin{aligned}
 & f(M+N) - f(M) - f(N) \\
 &= \text{tr}({}^t(M+N)(M+N)) + (\text{tr } M + \text{tr } N)^2 - (\text{tr}({}^tMM) + (\text{tr}(M))^2) \\
 &\quad - (\text{tr}({}^tNN) + (\text{tr}(N))^2) \\
 &= \text{tr}({}^tMN) + \text{tr}({}^tNM) + 2 \text{tr } M \text{ tr } N = 2 \text{tr}({}^tMN) + 2 \text{tr } M \text{ tr } N.
 \end{aligned}$$

Considérons l'application  $\varphi : (M, N) \mapsto \text{tr}({}^tMN) + \text{tr}(M) \text{tr}(N)$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . On a  $\varphi(M, M) = f(M)$ . La linéarité de la trace et celle de la transposition entraînent la bilinéarité de  $\varphi$ . En fait, en utilisant le produit scalaire usuel sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\varphi(M, N) = (M|N) + \text{tr}(M) \text{tr}(N)$ . Cela montre que  $\varphi$  est symétrique. Par conséquent  $f$  est une forme quadratique dont la forme bilinéaire symétrique associée est  $\varphi$ . Si  $M \neq 0$  alors  $f(M) = \|M\|^2 + (\text{tr } M)^2 \geq \|M\|^2 > 0$ . Finalement  $f$  est définie positive.

**Exercice 6.24****Centrale PSI 2006**

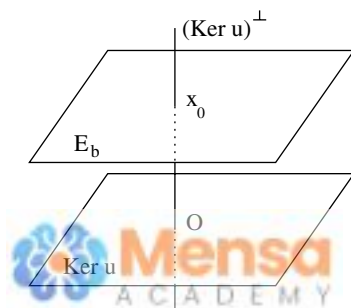
- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'application  $f : (P, Q) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt$  définit un produit scalaire hermitien sur  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- 2) Montrer que  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- 3) Soit  $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ . On note  $M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$ . Calculer  $\|Q\|^2$  et en déduire que  $M \geq 1$ . Montrer que  $M = 1$  si et seulement si  $Q = X^n$ .
- 1) On vérifie facilement que  $f$  est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite, et que pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{C}_n[X]^2$ , on a  $f(Q, P) = \overline{f(P, Q)}$ . En outre, pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on a  $f(P, P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt \geq 0$ . Si  $f(P, P) = 0$ , comme  $t \mapsto |P(e^{it})|^2$  est continue et positive, alors  $P$  s'annule sur le cercle unité donc admet une infinité de racines, donc  $P = 0$ . On a bien montré que  $f$  est un produit scalaire hermitien sur  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- 2) Si  $j \neq k$ , alors  $f(X^j | X^k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t} dt = 0$ , et  $f(X^k | X^k) = 1$ , donc  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- 3) Comme la base canonique est orthonormale, on a  $\|Q\|^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2$ . De plus, on a  $\|Q\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 dt = M^2$ , d'où  $M \geq 1$ . Si  $M = 1$ , alors  $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2 = 0$ , donc tous les  $b_k$  sont nuls et  $Q = X^n$ . Réciproquement, si  $Q = X^n$ , on a bien  $Q(e^{it}) = e^{int}$ , d'où  $M = 1$ .

**6.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT****Exercice 6.25****Centrale PC 2005 et 2006, problème des moindres carrés ☕**

Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  sont munis de leurs produits scalaires canoniques. Soient  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $b \in \mathbb{R}^p$ .

- 1) Démontrer que l'ensemble  $\{\|u(x) - b\| \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  admet un minimum. On appelle pseudo-solution de l'équation  $u(x) = b$  tout vecteur  $x$  de  $E$  minimisant  $\|u(x) - b\|$ .

- 2) Montrer qu'il existe une unique pseudo-solution de norme minimale. On la notera  $f(b)$ .
- 3) Montrer que  $f$  est linéaire. Déterminer  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$ .
- 1) L'ensemble considéré est un ensemble non vide de réels positifs, il admet donc une borne inférieure mais rien ne garantit qu'elle est atteinte. Lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}^n$ , le vecteur  $u(x)$  décrit  $\text{Im } u$ . Ainsi  $\{\|u(x) - b\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{\|y - b\| \mid y \in \text{Im } u\}$ . On peut alors conclure que l'ensemble admet un minimum et que ce minimum est la distance de  $b$  à  $\text{Im } u$ .
- 2) On note  $p_u$  la projection orthogonale sur  $\text{Im } u$ . La question précédente nous montre que l'ensemble des pseudo-solutions est  $E_b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) = p_u(b)\}$ . C'est un sous-espace affine de direction  $\text{Ker } u$ . Un dessin permet de mieux comprendre l'existence d'un élément de norme minimale.



Puisque  $E = \mathbb{R}^n$  est de dimension finie, on a  $E = \text{Ker } u \oplus (\text{Ker } u)^\perp$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de  $E_b$  qui se décomposent en  $x = x_1 + x_2$  et  $y = y_1 + y_2$  avec  $(x_1, x_2) \in \text{Ker } u \times (\text{Ker } u)^\perp$  et  $(y_1, y_2) \in \text{Ker } u \times (\text{Ker } u)^\perp$ , alors  $u(x) = u(y) = p_u(b)$  devient  $u(x_2 - y_2) = 0_{\mathbb{R}^p}$  donc  $x_2 - y_2 \in \text{Ker } u$ . On a par construction  $x_2 - y_2 \in (\text{Ker } u)^\perp$  d'où finalement  $x_2 - y_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$  et  $x_2 = y_2$ . Finalement, il existe un unique vecteur  $x_0 \in (\text{Ker } u)^\perp$  tel que  $E_b = x_0 + \text{Ker } u$ . Montrons que ce vecteur est celui de norme minimale. Si  $x \in E_b$ , on peut écrire  $x = \underbrace{(x - x_0)}_{\in \text{Ker } u} + \underbrace{x_0}_{\in (\text{Ker } u)^\perp}$ . Par le théorème de Pythagore,  $\|x\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2$

est minimale si et seulement si  $x = x_0$ . Il existe donc une unique pseudo-solution de norme minimale.

- 3) Soit  $b \in E$ . La première étape (projection) consiste à décomposer  $b$  en  $b = p_u(b) + b'$  avec  $b' \in (\text{Im } u)^\perp$ . La seconde consiste à écrire  $p_u(b) = u(x_0)$  avec  $x_0$  dans  $(\text{Ker } u)^\perp$ . On montre alors que tout vecteur  $b \in E$  se décompose de façon unique en  $b = u(x_0) + b'$  avec  $(x_0, b') \in (\text{Ker } u)^\perp \times (\text{Im } u)^\perp$ . On a prouvé l'existence. Si on dispose de deux décompositions  $b = u(x_1) + b'' = u(x_0) + b'$ , alors  $u(x_1 - x_0) = b' - b''$ . Ce vecteur est à la fois dans  $\text{Im } u$  et dans  $(\text{Im } u)^\perp$  donc est nul. Ainsi  $b' = b''$  et  $u(x_1 - x_0) = 0$ . Le vecteur  $x_1 - x_0$  est à la fois dans  $\text{Ker } u$  et dans son orthogonal. On obtient  $x_0 = x_1$  et ainsi l'unicité de la décomposition. Finalement  $f$  est l'application  $f : b \mapsto x_0$  où  $x_0$  est

l'unique vecteur ci-dessus. On prouve ainsi facilement que  $f$  est linéaire. Soient  $(b_1, b_2, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$  ainsi que les décompositions  $b_1 = u(x_1) + b'_1$  et  $b_2 = u(x_2) + b'_2$ . On a  $b_1 + \lambda b_2 = u(x_1 + \lambda x_2) + (b'_1 + \lambda b'_2)$  avec  $x_1 + \lambda x_2 \in (\text{Ker } u)^\perp$  et  $b'_1 + \lambda b'_2 \in (\text{Im } u)^\perp$ . Ainsi  $f(b_1 + \lambda b_2) = x_1 + \lambda x_2 = f(b_1) + \lambda f(b_2)$ . L'application  $f$  est linéaire.

Par construction,  $\text{Im } f \subset (\text{Ker } u)^\perp$ . Réciproquement, si  $x_0 \in (\text{Ker } u)^\perp$ , posons  $b = u(x_0)$ , alors  $f(b) = x_0$ . On a donc  $\text{Im } f = (\text{Ker } u)^\perp$ .

Le vecteur  $b$  est dans  $\text{Ker } f$  si et seulement si  $b$  s'écrit  $b = u(0) + b'$  où  $b' \in (\text{Im } u)^\perp$  donc  $\text{Ker } f = (\text{Im } u)^\perp$ .

### Remarque

L'application  $f$  est linéaire de  $\mathbb{R}^p$  vers  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . On vérifie le théorème du rang sur  $f$  :

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } f + \text{rg } f &= \dim((\text{Im } u)^\perp) + \dim((\text{Ker } u)^\perp) \\ &= (p - \text{rg } u) + (n - \dim \text{Ker } u) = p + n - (\dim \text{Ker } u + \text{rg } u) \\ &= p + n - n = p. \end{aligned}$$

### Exercice 6.26

Air MP 2006 ☕



Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ . On considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [0, \frac{1}{2}], f(t) = 0\}$$

$$G = \{f \in E \mid \forall t \in [\frac{1}{2}, 1], f(t) = 0\}$$

$$H = \{f \in E \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}.$$

Montrer que  $H = F \oplus G$  et  $G = F^\perp$ . Que peut-on dire de  $F \oplus F^\perp$  ?

- Tout d'abord, chacun des 3 ensembles est un sous-espace vectoriel de  $E$  : la fonction nulle est dans les 3 ensembles, une combinaison linéaire de fonctions nulles sur  $[0, 1/2]$  (par exemple) reste nulle sur  $[0, 1/2]$ . Ensuite, on a bien  $F \subset H$  et  $G \subset H$ . Si  $f \in F \cap G$ , alors  $f = 0$ , donc la somme  $F + G$  est directe. Il reste à prouver que toute fonction  $h \in H$  s'écrit  $h = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ . On voit assez facilement que la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1/2]$  et telle que  $f(x) = h(x)$  si  $x \in ]0, 1/2]$  est continue sur  $[0, 1]$  (car  $h(1/2) = 0$ ). De même, on construit la fonction continue  $g$  nulle sur  $[1/2, 1]$  et qui coïncide avec  $h$  sur  $[0, 1/2]$ . Alors  $f \in F$ ,  $g \in G$  et  $f + g = h$ . On a bien  $H = F \oplus G$ .

- Soit  $G_1 = F^\perp$ . Intuitivement, une fonction  $g$  va être orthogonale à toutes les fonctions nulles sur  $[0, 1/2]$  si  $g$  est quelconque sur  $[0, 1/2]$  et nulle sur  $]1/2, 1]$ . Par continuité, une telle fonction va être nulle en  $1/2$ . On va donc montrer que  $G = G_1$ . Soit  $g \in G$ . Alors pour tout  $f \in F$ , la fonction  $fg$  est nulle sur  $[0, 1]$  donc  $\int_0^1 f(t)g(t) dt = 0$  et  $(f|g) = 0$ . Ainsi  $g \in G_1$ . On a prouvé l'inclusion  $G \subset G_1$ . Prouvons l'inclusion  $G_1 \subset G$ . Soit  $g \in G_1$ , on va montrer que  $g$  est nulle sur  $]1/2, 1]$ . Par continuité, elle le sera aussi en  $1/2$  et en  $1$  (on exclut ces bornes afin de ne pas être embêté par les bords). Supposons que cela ne soit pas le cas et qu'il existe  $a \in ]1/2, 1[$  tel que  $g(a) \neq 0$ . Quitte à prendre  $-g$ , on peut supposer  $g(a) > 0$ . Il existe un intervalle  $]a - \alpha, a + \alpha[ \subset ]1/2, 1[$  (avec  $\alpha > 0$ ) sur lequel  $g$  reste supérieure à  $g(a)/2$ . Considérons la fonction  $f$  nulle en dehors de  $]a - \alpha, a + \alpha[$ , qui vaut 1 en  $a$  et affine sur  $[a - \alpha, a]$  et  $[a, a + \alpha]$ . On a  $(f|g) = \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} f(t)g(t) dt \geq \frac{g(a)}{2} \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} f(t) dt > 0$  d'où une contradiction.

### Remarque

On peut également considérer la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $f_n$  est nulle sur  $[0, 1/2]$ , coïncide avec  $g$  sur  $[1/2 + 1/n, 1]$  et est affine sur  $[1/2, 1/2 + 1/n]$ , puis

montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n|g) = \int_{1/2}^1 g^2(t) dt = 0$ .

- On a  $F \oplus F^\perp = F \oplus G = H$  différent de  $E$ . Ce résultat n'est pas en contradiction avec le cours car  $F$  est de dimension infinie.

### Exercice 6.27

#### Polytechnique PC 2007 ☞

On munit  $E = \mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique. Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ , on a  $(v_i|v_j) < 0$ .

- 1) Soient  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ ,  $x = \sum_{i=1}^p x_i v_i$  et  $y = \sum_{i=1}^p |x_i| v_i$ . Comparer  $\|x\|$  et  $\|y\|$ .
- 2) Si  $x = 0$ , montrer que les réels  $x_i$  sont tous nuls ou tous non nuls.
- 3) Montrer que  $p - 1$  vecteurs de  $\mathcal{F}$  forment une famille libre. En déduire que  $p \leq n + 1$ .
- 4) Trouver dans  $\mathbb{R}^2$  trois vecteurs unitaires  $(v_1, v_2, v_3)$  satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
- 5) Construire une famille de  $n + 1$  vecteurs  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant les conditions de l'énoncé.

1) On a :

$$\begin{cases} \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j (v_i | v_j) \\ \|y\|^2 = \sum_{i=1}^p |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} |x_i x_j| (v_i | v_j). \end{cases}$$

On a donc :

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \underbrace{(x_i x_j - |x_i x_j|)}_{\leq 0} \underbrace{(v_i | v_j)}_{< 0},$$

ce qui donne  $\|x\| \geq \|y\|$ .

2) Puisque  $\|y\| \leq \|x\|$ , on a  $y = 0$ . Supposons que  $x_{i_0}$  est nul. On calcule alors

$(y | v_{i_0})$ . D'une part ce produit scalaire est nul, d'autre part, il vaut  $\sum_{i=1}^p |x_i| (v_i | v_{i_0})$

et, puisque  $x_{i_0} = 0$ , on obtient  $\sum_{i \neq i_0} |x_i| (v_i | v_{i_0}) = 0$ . Or pour tout  $i \neq i_0$ , on a

$|x_i| (v_i | v_{i_0}) \leq 0$ , donc pour tout  $i \neq i_0$ , on a  $|x_i| (v_i | v_{i_0}) = 0$ . Puisque  $(v_i | v_{i_0}) < 0$  lorsque  $i \neq i_0$ , on a, pour tout  $i \neq i_0$ ,  $x_i = 0$ . Dès que l'un des  $x_i$  est nul, ils sont tous nuls.

3) Montrons que la famille  $(v_1, \dots, v_{p-1})$  est libre. Soit  $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$  telle

que  $\sum_{i=1}^{p-1} x_i v_i = 0$ . On a alors  $x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i v_i + 0 v_p = 0$ . D'après la question

précédente, tous les coefficients  $x_i$  pour  $i = 1, \dots, p-1$  sont nuls et la famille  $v_1, \dots, v_{p-1}$  est libre. Par permutation, toute famille de  $p-1$  vecteurs est libre. On en déduit que  $p-1 \leq n$ , c'est-à-dire  $p \leq n+1$ .

4) On prend trois vecteurs unitaires faisant deux à deux un angle de  $2\pi/3$ .

5) On construit cette famille par récurrence. Supposons avoir une famille de vecteurs  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  vérifiant les conditions de l'énoncé. On considère alors les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  dont les  $n-1$  premières coordonnées sont les coordonnées respectivement des vecteurs  $w_1, \dots, w_n$  et la dernière coordonnées est  $-\lambda$  où  $\lambda > 0$ . On considère  $v_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  (cela revient à partir d'une famille de l'hyperplan d'équation  $x_n = 0$  et à « descendre » ces vecteurs sous l'hyperplan). Alors pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(v_i | v_{n+1}) = -\lambda < 0$ . Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(v_i | v_j) = (w_i | w_j) + \lambda^2$ . En choisissant  $\lambda$  de sorte que tous ces produits scalaires soient strictement négatifs, on obtient la famille souhaitée (cela revient à ne pas trop les descendre pour que les produits scalaires restent négatifs). Pour cela on considère  $m = \sup_{i \neq j} (w_i | w_j)$ . Ce réel est strictement négatif. On peut

alors choisir  $\lambda = \sqrt{-m/2}$ , ce qui donnera, pour  $i \neq j$  (toujours dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ),  $(v_i | v_j) = (w_i | w_j) - \frac{m}{2} \leq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} < 0$ .



## 7.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont des **espaces euclidiens**.

### 7.1.1 Adjoint d'un endomorphisme PSI

#### Ce qu'il faut savoir

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme de  $E$  noté  $u^*$  et appelé **adjoint de  $u$**  tel que, pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$ .
- L'application  $u \mapsto u^*$  est un endomorphisme de  $\text{GL}(E)$ . Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ , on a  $u^{**} = u$  et  $(uv)^* = v^*u^*$ .
- Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $E$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , alors la matrice de  $u^*$  dans  $\mathcal{B}$  est la matrice  ${}^tA$ .
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$  et  $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$ .

#### Exercice 7.1

##### CCP PSI 2007

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire  $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $u(P) = P'$ . Déterminer  $u^*(P)$  lorsque  $P = aX^2 + bX + c$ .

Soit  $u^*(P) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ . Par définition, pour tout  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , on a  $(u^*(P)|Q) = (P|u(Q)) = (P|Q')$ . Plutôt que d'écrire cette relation pour tout  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , il suffit de l'écrire pour une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Ainsi  $u^*(P)$  est déterminé par  $(u^*(P)|1) = 0$ ,  $(u^*(P)|X) = (P|1)$  et  $(u^*(P)|X^2) = (P|2X)$ . Sachant que  $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$  si  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \\ \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{3}\gamma = \frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + c \end{cases}$$

Après résolution, on obtient  $\alpha = 30(a+b)$ ,  $\beta = -26a - 24b + 12c$  et  $\gamma = 3a + 2b - 6c$ .

## Exercice 7.2

## CCP MP 2006

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $(u(x)|x) = 0$ . Montrer que  $u^* = -u$ , puis que  $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$ .

- Pour montrer que  $u^* = -u$ , on va montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $(x|u^*(y)) = (x|-u(y))$ . Pour cela développons  $(u(x+y)|x+y)$ . On a  $0 = (u(x) + u(y)|x+y) = (u(x)|x) + (u(x)|y) + (u(y)|x) + (u(y)|y)$ . Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$(u(x)|y) + (u(y)|x) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x|u^*(y)) = -(u(y)|x) = (x|-u(y)).$$

Ainsi  $u^* = -u$ .

- On a  $\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp = \text{Im}(-u)^\perp$  et  $\text{Im } u = \text{Im}(-u)$ . Finalement  $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$ .

## Ce qu'il faut retenir

- Pour montrer qu'un vecteur  $x$  est nul, on peut montrer que pour tout  $y \in E$ ,  $(x|y) = 0$ .
- Pour montrer que deux endomorphismes  $u$  et  $v$  sont égaux, on peut montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(u(x)|y) = (v(x)|y)$ . Cette méthode est fréquemment utilisée lorsqu'on utilise l'adjoint.
- Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , si pour tout  $X$  et tout  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  ${}^tXAY = {}^tXBY$ , alors  $A = B$ .

## 7.1.2 Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

## Ce qu'il faut savoir

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est **orthogonal** lorsqu'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
  - (i) il conserve le produit scalaire : pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
  - (ii) il conserve la norme : pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \|x\|$ .
  - (iii) il transforme une (ou toute) base orthonormale en une base orthonormale.
  - (iv) **PSI** on a  $uu^* = u^*u = \text{Id}_E$ .
- Un endomorphisme orthogonal est également appelé **isométrie** de  $E$ . L'ensemble des endomorphismes orthogonaux est noté  $O(E)$ . Muni de la loi de composition, il a une structure de groupe. On l'appelle **groupe orthogonal** de  $E$ . Si  $u$  est orthogonal, alors  $\det u = \pm 1$  (la réciproque est fausse). On appelle groupe spécial orthogonal le sous-groupe de  $O(E)$  constitué des endomorphismes de déterminant 1. Il est noté  $SO(E)$  ou  $O^+(E)$ .

- Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale lorsque l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé est orthogonal. Cela est équivalent à l'une des propositions suivantes :
  - (i) les colonnes de  $M$  forment une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  ;
  - (ii) la matrice vérifie la relation  ${}^tMM = M{}^tM = I_n$ .
 L'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathbb{R}^n$  est noté  $O(n)$ . C'est un groupe multiplicatif, appelé **groupe orthogonal**.
- **Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux** : l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de  $E$  est orthogonale.
- **Changement de bases orthonormales** : si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases orthonormales de  $E$ , alors la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est une matrice orthogonale.
- **Endomorphismes orthogonaux particuliers** :
  - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On appelle :
    - ★ **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$ , la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $F^\perp$ .
    - ★ **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (son déterminant vaut alors  $-1$ ).
  - Lorsque  $\dim E = 2$ , une rotation de  $E$  est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. Sa matrice dans toute base orthonormale s'écrit  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ .
  - Lorsque  $\dim E = 3$ , une rotation de  $E$  est un endomorphisme orthogonal  $u$  de déterminant 1. Dans une base orthonormale dont le premier vecteur est dans  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ , sa matrice s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 7.3

#### Centrale PC 2006

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & cb - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Déterminer une condition sur  $(a, b, c)$  pour que  $A$  soit une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- 2) Dans ce cas, caractériser  $u$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

On peut s'aider d'un logiciel de calcul formel pour effectuer les calculs.

- 1) On écrit les conditions pour que les colonnes de  $A$  forment une famille orthonormale. Pour que les produits scalaires soient nuls, on obtient la condition suivante :

$$ab(a^2 + b^2 + c^2 - 1) = ac(a^2 + b^2 + c^2 - 1) = bc(a^2 + b^2 + c^2 - 1) = 0,$$

et pour que les vecteurs soient unitaires, les conditions  $a^2(a^2 + b^2 + c^2) + b^2 + c^2 = 1$ ,  $a^2 + b^2(a^2 + b^2 + c^2) + c^2 = 1$  et  $a^2 + b^2 + c^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$ . Si l'un des coefficients, par exemple  $a$ , est nul, il reste  $bc(b^2 + c^2 - 1) = 0$ , puis  $b^2 + c^2 = 1 = a^2 + b^2 + c^2$  (première norme). Les dernières conditions donnent de nouveau  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Si aucun des coefficients n'est nul, la condition  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  est nécessaire et suffisante. Dans tous les cas,  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

- 2) On vérifie que  $\det A = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ , donc  $\det A = 1$  et  $A$  est la matrice d'une rotation. On a  $\text{tr } A = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . L'angle de la rotation vérifie  $1 + 2 \cos \theta = 1$  donc  $\theta = \pi/2 \pmod{\pi}$ . Un calcul simple donne  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}((a, b, c))$ , et donc  $u$  est une rotation d'angle  $\pi/2$  et d'axe  $\text{Vect}((a, b, c))$ .

### Remarque

On peut retrouver la transformation d'une autre manière. On se place dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Appelons  $v$  le vecteur  ${}^t(a, b, c)$ . On décompose

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \text{ La première matrice est égale au pro-}$$

duit  $v {}^t v$ . La seconde matrice est la matrice de l'application  $w \mapsto v \wedge w$ . Soit  $w$  un vecteur de coordonnées  $(x, y, z)$ . Alors  $Aw = v {}^t v w + v \wedge w = (v | w)v + v \wedge w$ . Considérons une base orthonormale directe  $(v, v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors  $u(v) = (v | v)v = v$ , le vecteur  $v$  est invariant, ainsi que  $u(v_1) = 0 + v \wedge v_1 = v_2$  et  $u(v_2) = v \wedge v_2 = -v_1$ . On retrouve la rotation d'angle  $+\pi/2$  d'axe dirigé par  $v$ .

### Exercice 7.4

Soient  $e$  un vecteur unitaire de  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\rho$  la rotation vectorielle d'axe dirigé par  $e$  et d'angle  $\theta$ . Montrer que :

$$\forall V \in E, \rho(V) = (\cos \theta)V + (\sin \theta)e \wedge V + (1 - \cos \theta)(e | V)e.$$

Considérons l'application  $\varphi : V \mapsto (\cos \theta)V + (\sin \theta)e \wedge V + (1 - \cos \theta)(e | V)e$ . On veut montrer que  $\rho = \varphi$ .

- *Première méthode* : il suffit de le vérifier sur une base de  $E$ , de préférence une base adaptée dans laquelle les calculs sont faciles, c'est-à-dire une base orthonormale

dont le premier vecteur est  $e$ . On note cette base  $(e, e_1, e_2)$ . Alors, on a :

$$\varphi(e) = (\cos \theta)e + (\sin \theta)e \wedge e + (1 - \cos \theta)(e | e)e$$

$$= (\cos \theta)e + (1 - \cos \theta)e = e = \rho(e)$$

$$\varphi(e_1) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e \wedge e_1 + 0 = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 = \rho(e_1)$$

$$\varphi(e_2) = (\cos \theta)e_2 + (\sin \theta)e \wedge e_2 + 0 = (\cos \theta)e_2 + (\sin \theta)(-e_1) = \rho(e_2).$$

Comme  $\rho$  et  $\varphi$  coïncident sur une base, elles sont donc égales.

- **Deuxième méthode :** on note  $D = \text{Vect}(e)$  et  $P$  le plan orthogonal à  $D$ . Soit  $V \in E$ . On écrit  $V = \underbrace{(e|V)e}_{\text{sur } D} + \underbrace{(V - (e|V)e)}_{\text{sur } P}$ . On note  $w = V - (e|V)e$  la composante sur

$P$ . On remarque que  $e \wedge w = e \wedge V - 0$ . Ce vecteur est orthogonal à  $e$  et à  $w$ . Comme  $e$  et  $w$  sont orthogonaux, il est de même norme que  $w$  ( $e$  est unitaire). La base  $(e, w, e \wedge w)$  est directe et  $\rho(V) = (e|V)e + (\cos \theta w + \sin \theta e \wedge w)$ . En remplaçant  $e \wedge w$  par  $e \wedge V$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(V) &= (e|V)e + \cos \theta(V - (e|V)e) + \sin \theta e \wedge V \\ &= (\cos \theta)V + (\sin \theta)e \wedge V + (1 - \cos \theta)(e|V)e. \end{aligned}$$

### Remarque

Comme on l'a vu dans les deux exercices précédents, il est souvent plus simple de faire un raisonnement géométrique.



### Exercice 7.5

#### CCP PC,PSI 2007

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice orthogonale. Démontrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n \quad , \quad \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n \quad \text{et} \quad n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

*Indication de la rédaction :* pour la seconde majoration, on exprimera la somme comme un produit scalaire faisant intervenir les colonnes de  $A$  et un vecteur fixe.

- 1) La matrice  $A$  est orthogonale. Chaque colonne de cette matrice est donc de norme

$$\text{égale à 1. Ainsi } \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right) = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

- 2) Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ , et  $U$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées valent 1. On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire usuel. On a, pour

$$\text{tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (C_j | U) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}. \text{ Ainsi, on a } \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \left( \sum_{j=1}^n C_j | U \right).$$

$$\text{Soit } V = \sum_{j=1}^n C_j. \text{ L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne } |(V|U)| \leq \|V\| \|U\|.$$

Or  $\|U\| = \sqrt{n}$  et  $\|V\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|C_j\|^2$  par le théorème de Pythagore

(les colonnes sont deux à deux orthogonales). Ainsi  $\|V\|^2 = n$ . On obtient bien la majoration

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right|^2 \leq n^2, \quad \text{d'où} \quad \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n.$$

- 3) Puisque  $|a_{i,j}| \leq 1$ , on a  $|a_{i,j}| \geq a_{i,j}^2$  et la somme est supérieure à celle de la première question. La seconde inégalité se montre à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a

$$\left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 \cdot |a_{i,j}| \right)^2 \leq \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1^2 \right) \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right) = n^2 n = n^3.$$

On en déduit la formule en prenant la racine carrée.

### Exercice 7.6

#### CCP PSI 2006

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases orthonormales de  $E$ . On note  $A$  et  $B$  les matrices de  $u$  respectivement dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

1) Montrer que  $\text{tr}({}^tAA) = \text{tr}({}^tBB)$ .

2) En déduire que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_j)|e_i)^2$  ne dépend que de  $u$  mais pas de la base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ .

- 1) Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Cette matrice est orthogonale car les deux bases sont orthogonales. On a  $B = {}^tPAP$ , ce qui donne  ${}^tBB = ({}^tPAP)({}^tPAP) = {}^tP({}^tAA)P$  car  $P^tP = I_n$ . En passant à la trace, on obtient  $\text{tr}({}^tBB) = \text{tr}({}^tP({}^tAA)P) = \text{tr}({}^tAA P^tP) = \text{tr}({}^tAA)$ .
- 2) Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Le coefficient  $a_{ij}$  est égal à  $(u(e_j)|e_i)$ . On en déduit alors :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_j)|e_i)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{tr}({}^tAA).$$

La somme est donc indépendante du choix de la base orthonormale d'après la question précédente.

### 7.1.3 Endomorphismes symétriques et réduction

#### Ce qu'il faut savoir

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est symétrique lorsque, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $(u(x)|y) = (x|u(y))$ . On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $E$ . Il constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
- **PSI** un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique si et seulement si  $u^* = u$ . On dit également que  $u$  est **autoadjoint**.
- **Théorème fondamental** : si  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ , alors  $u$  est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux (on dit que  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormale). Ce théorème est parfois appelé **théorème spectral**.
- **Théorème fondamental version matricielle** : si  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , alors il existe une matrice orthogonale  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $P^{-1}AP = {}^tPAP$  est diagonale.
- **Caractérisation des projecteurs orthogonaux** : un endomorphisme  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $p$  est symétrique et vérifie  $p \circ p = p$ .
- Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres et  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormale de vecteurs propres associés. Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , alors on a :

$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

#### Exercice 7.7

##### CCP PSI 2006

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice symétrique réelle de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Prouver que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^2.$$

On utilise, comme souvent, la relation  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(A^2)$  (car  $A$  est symétrique). La matrice  $A$  est symétrique et réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1}AP = D$  où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On a alors  $A = PDP^{-1}$  et  $A^2 = PD^2P^{-1}$ . En passant à la trace, on obtient :

$$\text{tr}(A^2) = \text{tr}(PD^2P^{-1}) = \text{tr}(D^2P^{-1}P) = \text{tr}(D^2), \quad \text{d'où} \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^2.$$

## Exercice 7.8

PSI Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$

- 1) Montrer que  $v = u^* \circ u$  est autoadjoint.
  - 2) Comparer  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker } v$ .
  - 3) Quel est le signe de  $(u^* \circ u)(x)|x)$  pour tout  $x \in E$  ?
  - 4) À quelle condition l'application  $\varphi : (x, y) \mapsto ((u^* \circ u)(x)|y)$  est-elle un produit scalaire sur  $E$  ?
- 1) On a  $v^* = (u^* \circ u)^* = u^* \circ u^{**} = u^* \circ u = v$ . L'endomorphisme  $v$  est donc autoadjoint.
  - 2) Soit  $x \in E$ . Si  $u(x) = 0$ , alors on a immédiatement  $v(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$ . Soit  $x \in \text{Ker } v$ , c'est-à-dire tel que  $(u^* \circ u)(x) = 0$ . On considère le produit scalaire  $((u^* \circ u)(x)|x) = 0 = (u(x)|u(x)) = \|u(x)\|^2$ . On a donc  $u(x) = 0$  et  $x \in \text{Ker } u$ . Finalement  $\text{Ker } u = \text{Ker } v$ .
  - 3) D'après la question précédente,  $(u^* \circ u)(x)|x) = \|u(x)\|^2$  est positif ou nul pour tout  $x \in E$ .
  - 4) L'application est linéaire à droite par bilinéarité du produit scalaire. Elle est linéaire à gauche par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de  $v$ . Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a  $\varphi(x, y) = (u^* \circ u)(x)|y) = (u(x)|u(y)) = (u(y)|u(x)) = \varphi(y, x)$ . L'application  $\varphi$  est donc bilinéaire et symétrique. Pour tout  $x \in E$ , on a  $\varphi(x, x) \geq 0$  d'après la question précédente. De plus,  $\varphi(x, x) = 0$  lorsque  $u(x) = 0$ . L'application  $\varphi$  est donc un produit scalaire si et seulement si  $u$  est injective (et donc bijective).

## Exercice 7.9

## Mines-Ponts PC 2006

Soit  $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ .

Soit  $u \in E$  tel que  $u(0) = u(1) = 0$ . On définit l'application  $T$  sur  $E$  par  $T(f) = u'f' + uf''$ . Montrer que  $T$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .

Montrons que pour tout  $(f, g) \in E$ , on a  $(T(f)|g) = (f|T(g))$ . En effet :

$$\begin{aligned}
 (T(f)|g) &= \int_0^1 T(f)(t)g(t) dt = \int_0^1 (u'(t)f'(t) + u(t)f''(t))g(t) dt \\
 &= \int_0^1 (uf')'(t)g(t) dt = [u(t)f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)f'(t)g'(t) dt \\
 &= - \int_0^1 u(t)f'(t)g'(t) dt.
 \end{aligned}$$



Sous cette écriture, symétrique par rapport aux fonctions  $f$  et  $g$ , il est immédiat que

$$(T(f)|g) = (T(g)|f) = (f|T(g)).$$

L'endomorphisme  $T$  est donc symétrique.

### Exercice 7.10

#### D'après CCP PSI 2006

Soit  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

- 1) Montrer l'existence d'une matrice orthogonale  $P_n$  telle  $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$  où  $D_n$  est la matrice diagonale  $\text{diag}(0, \dots, 0, n)$ .
  - 2) Trouver  $P_2$  et  $P_3$ . Déterminer  $P_n$ .
- 1) La matrice  $J_n$  est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et il existe une matrice orthogonale  $P_n$  telle que  $P_n^{-1} J_n P_n$  est diagonale. La matrice  $J_n$  est de rang 1 donc 0 est valeur propre et l'espace propre associé est l'hyperplan  $H$  d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . On peut trouver la dernière valeur propre de deux façons. En utilisant  $\text{tr}(J_n) = n$ , somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, la dernière valeur propre est  $n$ . En utilisant le fait que les sous-espaces propres sont orthogonaux, le second espace propre est donc  $D = \text{Vect}(e)$  où  $e = (1, \dots, 1)$ . Puisque  $J_n e = n e$  la valeur propre manquante est  $n$ . En prenant pour  $P_n$  la matrice de passage de la base canonique vers la base formée d'une base orthonormale de  $H$  et d'une base orthonormale de  $D$ , la matrice  $D_n$  est celle de l'énoncé.
- 2) En utilisant l'exercice 6.16, page 180, on détermine  $P_n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , la colonne  $k$  est le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} u_k \quad \text{où} \quad u_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, -k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-1}).$$

La dernière colonne est constituée du vecteur  $\frac{1}{\sqrt{n}} (1, \dots, 1)$ .

### Exercice 7.11

#### CCP PSI 2006

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Montrer que  $A = 0$ .

La matrice  $A$  est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Le polynôme  $P = X^3 + X^2 + X$  est un polynôme annulateur de  $A$ , donc les valeurs propres de  $A$  sont des racines de ce polynôme. Or  $P = X(X^2 + X + 1)$  n'admet que 0 comme racine réelle. La matrice  $A$  est diagonalisable et admet 0 pour unique valeur propre. Elle est semblable à la matrice nulle, elle est donc nulle.

## Exercice 7.12

## CCP PSI 2007

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire  $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

- 1) Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  défini sur  $E$  par  $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$  est symétrique.
- 2) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

- 1) On se retrouve dans une situation semblable à celle de l'exercice 7.9. On a  $\varphi(P) = ((1 - X^2)P')'$  et une intégration par parties conduit à :

$$(\varphi(P) | Q) = [(1 - t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q'(t) dt = 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q'(t) dt.$$

Il est alors immédiat que  $\varphi$  est un endomorphisme symétrique.

- 2) L'endomorphisme  $\varphi$  est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel réel, il est donc diagonalisable. On a  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(X) = -2X$ , et si  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , alors

$$\varphi(X^k) = (1 - X^2)(k(k-1)X^{k-2}) - 2kX^k = -(k^2 + k)X^k + k(k-1)X^{k-2}.$$

La matrice de  $\varphi$  dans la base canonique est triangulaire supérieure. On trouve les valeurs propres sur la diagonale, et donc  $\text{Sp}(\varphi) = \{-k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .

**Remarque**

L'endomorphisme  $\varphi$  est symétrique et sa matrice dans la base canonique n'est pas symétrique parce que la base canonique n'est pas orthonormale pour le produit scalaire utilisé.

### 7.1.4 Compléments : endomorphismes et matrices symétriques positifs

Les définitions et résultats qui suivent ne sont pas explicitement au programme. Cependant, beaucoup d'exercices de concours les utilisent. Il est donc recommandé de les connaître.

#### Ce qu'il faut savoir

Soient  $u$  un endomorphisme symétrique de  $\mathcal{L}(E)$  et  $A$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- On dit que  $u$  est **symétrique positif** lorsque, pour tout  $x \in E$ , on a  $(u(x)|x) \geq 0$ .  
On dit que  $u$  est **symétrique défini positif** lorsque, pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ , on a  $(u(x)|x) > 0$ .

- On dit que  $A$  est **symétrique positive** lorsque, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  ${}^tXAX \geq 0$ . On dit que  $A$  est **symétrique définie positive** lorsque, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul, on a  ${}^tXAX > 0$ . On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

### Exercice 7.13

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ .

- 1) Montrer que  $u$  est symétrique positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
  - 2) Montrer que  $u$  est symétrique défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
- 1) Soient  $u$  un endomorphisme symétrique positif,  $\lambda \in \text{Sp } u$  et  $x$  un vecteur propre associé. On a alors  $(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$  et puisque  $(u(x)|x) \geq 0$  et que  $\|x\|^2 > 0$ , on en déduit que  $\lambda \geq 0$ . Supposons maintenant que toutes les valeurs propres sont positives. On les note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et on considère  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de vecteurs propres associés. Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , alors
- $$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \text{ et } (u(x)|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$
- Cette somme de termes positifs est donc positive et  $u$  est symétrique positif.
- 2) De même, lorsque  $u$  est symétrique défini positif, si  $\lambda \in \text{Sp } u$ , on obtient  $\lambda > 0$ . Si les valeurs propres sont strictement positives, le calcul précédent (avec les mêmes notations) donne de nouveau,  $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ . Cette quantité est positive et ne peut être nulle que si chacun des  $x_i$  est nul (car  $\lambda_i > 0$ ).

### Exercice 7.14

- 1) Montrer l'équivalence entre
  - (i) la matrice  $A$  est symétrique, réelle et positive ;
  - (ii) il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tPP$ .
- 2) Montrer l'équivalence entre
  - (i) la matrice  $A$  est symétrique, réelle et définie positive ;
  - (ii) il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tPP$ .

1) Soit  $A$  symétrique, réelle et positive. Il existe  $Q$  orthogonale telle que  $A = {}^tQ D Q$

où  $D$  est une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_i \geq 0$  pour tout

$i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (voir exercice précédent). Soit  $C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ . On a

$D = C^2 = {}^tC C$  et  $A = {}^tQ {}^tC C Q = {}^tP P$  avec  $P = C Q$ . Réciproquement, si  $A$  s'écrit  ${}^tP P$  pour une certaine matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  ${}^tA = {}^tP P = A$ . La matrice  $A$  est donc symétrique réelle. De plus, si  $X$  est un vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  ${}^tX A X = {}^t(P X) P X = \|P X\|^2$  (la norme désigne la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ). Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tX A X \geq 0$  et  $A$  est symétrique réelle positive.

2) On peut reprendre le même raisonnement en tenant compte du caractère défini. La matrice  $C$  est alors inversible et  $P = C Q$  également. Dans la réciproque, la quantité  ${}^tX A X = \|P X\|^2$  est positive et ne peut être nulle que si  $P X = 0$ , c'est-à-dire seulement pour  $X = 0$  (car  $P$  est inversible).

### Exercice 7.15

#### CCP MP 2007

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , symétrique définie positive. Montrer qu'il existe  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $A = ((v_i | v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $C$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ . La matrice  ${}^tC C$  est la matrice dont le terme en position  $(i, j)$  est le réel  $(v_i | v_j)$ . L'existence de la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  telle que  $A = ((v_i | v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  équivaut à l'existence d'une matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tC C$ . Cette matrice existe d'après l'exercice précédent.

### Exercice 7.16

#### Racine carrée

Soit  $v$  un endomorphisme symétrique, défini positif d'un espace euclidien  $E$ .

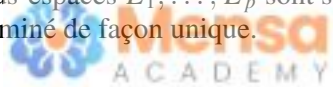
1) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique, défini positif  $w$  de  $E$  tel que  $w^2 = v$ .

2) ☕ Montrer que cet endomorphisme  $w$  est unique.

1) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $v$  (toutes positives ou nulles) associées à la base orthonormale de vecteurs propres  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

on a  $v(e_i) = \lambda_i e_i$ . Définissons l'endomorphisme  $w$  par  $w(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La matrice de  $w$  dans la base orthonormale  $\mathcal{B}$  est diagonale donc symétrique. Ainsi  $w$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ . De plus, les valeurs propres de  $w$  sont positives ou nulles donc  $w$  est symétrique réel positif. Enfin pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $w^2(e_i) = (\sqrt{\lambda_i})^2 e_i = \lambda_i e_i = v(e_i)$ . Les endomorphismes  $w^2$  et  $v$  coïncident sur une base de  $E$ , ils sont donc égaux. On a prouvé l'existence d'un endomorphisme symétrique, défini positif  $w$  de  $E$  tel que  $w^2 = v$ .

- 2) Soit  $w$  symétrique défini positif tel que  $w^2 = u$ . Notons  $\text{Sp } u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et  $E_1, \dots, E_p$  les espaces propres de  $u$  associés respectivement à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Puisque  $w^2 = u$ , les endomorphismes  $u$  et  $w$  commutent ( $w \circ u = w^3 = u \circ w$ ). Les sous-espaces propres  $E_i$  sont donc stables par  $w$ . Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Considérons l'endomorphisme induit  $w_i = w|_{E_i}$ . Cet endomorphisme est un endomorphisme symétrique défini positif de  $E_i$  (on a  $(w_i(x)|y) = (x|w_i(y))$  pour  $(x, y) \in E_i^2$  et  $(w_i(x)|x) > 0$  pour tout  $x \in E_i \setminus \{0\}$  car ces relations sont vraies sur  $E$ ). L'endomorphisme  $w_i$  est donc diagonalisable sur  $E_i$  à valeurs propres strictement positives. De plus  $w_i^2 = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $w_i$  et  $x$  un vecteur propre associé, alors  $w_i(x) = \lambda x$  et  $w_i^2(x) = \lambda^2 x = \lambda_i x$ . Cela donne  $\lambda^2 = \lambda_i$  avec  $\lambda > 0$ , et par conséquent  $\lambda = \sqrt{\lambda_i}$ . La seule valeur propre de  $w_i$  est  $\sqrt{\lambda_i}$  donc  $w_i = \sqrt{\lambda_i} \text{Id}_{E_i}$ . L'endomorphisme  $w$  est entièrement déterminé sur chaque sous-espace  $E_i$  et les sous-espaces  $E_1, \dots, E_p$  sont supplémentaires. L'endomorphisme  $w$  est donc déterminé de façon unique.



## 7.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### Exercice 7.17

CCP PSI 2006 PSI

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^* \circ u = u \circ u^*$ .

- 1) Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ . En déduire que  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$ .
  - 2) Montrer que  $u$  et  $u^*$  ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes espaces propres.
  - 3) Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes de  $u$ . Montrer que les espaces propres associés sont orthogonaux.
- 1) Pour tout  $x \in E$ , on a  $\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (u^* \circ u(x)|x) = (u \circ u^*(x)|x)$  donc  $\|u(x)\|^2 = (u^*(x)|u^*(x)) = \|u^*(x)\|^2$ . Cela donne  $u(x) = 0$  si et seulement si  $u^*(x) = 0$  et donc l'égalité des deux noyaux.
  - 2) Si  $u$  et  $u^*$  commutent, il en est de même pour  $u - \lambda \text{Id}_E$  et  $(u - \lambda \text{Id}_E)^* = u^* - \lambda \text{Id}_E$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(u^* - \lambda \text{Id}_E)$ . Les espaces propres sont donc égaux, et par conséquent les valeurs propres sont égales.

- 3) Soient  $x$  et  $y$  des vecteurs propres de  $u$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ . D'après la question précédente, ce sont des vecteurs propres associés aux mêmes valeurs propres pour  $u^*$ . On a alors  $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$  c'est-à-dire  $\lambda(x|y) = \mu(x|y)$ . Puisque  $\lambda \neq \mu$ , on a  $(x|y) = 0$ . Les espaces propres sont donc orthogonaux.

### Exercice 7.18

#### CCP PC 2006

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(x, y, z) = \left( \frac{-3x + y + z\sqrt{6}}{4}, \frac{x - 3y + z\sqrt{6}}{4}, \frac{x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z}{4} \right).$$

- 1) Déterminer  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $\det(f)$ .
- 2) Prouver que  $f$  est un endomorphisme orthogonal et donner ses caractéristiques géométriques. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

On note  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique (orthonormale pour le produit

scalaire usuel). On a  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Le vecteur  $u = (x, y, z)$  est dans  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  si et seulement si  $f(u) = u$ . On obtient le système

$$\begin{cases} -3x + y + z\sqrt{6} = 4x \\ x - 3y + z\sqrt{6} = 4y \\ x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z = 4z \end{cases}$$

dont les solutions sont les vecteurs de la droite vectorielle dirigée par  $(1, 1, \sqrt{6})$ . On vérifie également que  $\det A = 1$ .

- 2) On peut vérifier que  ${}^tA \cdot A = I_3$ , ou simplement vérifier que les colonnes de  $A$  forment une famille orthonormale. C'est le cas puisque les produits scalaires entre 2 colonnes quelconques sont nuls et puisque  $(3^2 + 1^2 + (\sqrt{6})^2)/16 = 1$  et  $((\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 + 2^2)/16 = 1$ . La matrice  $A$  est à la fois orthogonale et symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont dans  $\{-1, 1\}$ . C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 1, \sqrt{6}))$  (ou une rotation d'angle  $\pi$  autour de cet axe).

## Exercice 7.19

## extrait de Centrale PC 2005

Soient  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  une base orthonormale directe de  $E$ ,  $u$  la rotation d'axe  $U = i + j$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et  $v$  la rotation d'axe  $V = j + k$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Donner les matrices de  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{B}$ .

On cherche une base orthonormale dont le premier vecteur est colinéaire à  $i + j$ .

La base  $(\frac{i+j}{\sqrt{2}}, \frac{-i+j}{\sqrt{2}}, k)$  est orthonormale et directe (on fera attention à prendre une base directe afin de ne pas changer le signe de l'angle). La matrice  $A'$  de  $u$  dans cette nouvelle base et la matrice de passage  $P$ , orthogonale, sont respective-

ment  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  de  $u$

dans la base  $\mathcal{B}$  vaut  $PA'P$ . Un calcul donne  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

Une autre méthode consiste à utiliser l'exercice 7.4, page 195 qui donne directement l'image d'un vecteur. On utilise le vecteur  $e$  de coordonnées  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . L'image

du vecteur  $w$  est alors  $u(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}w + \frac{1}{\sqrt{2}}e \wedge w + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(e|w)e$ . On a

$$u(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{2}(i+j) \wedge i + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(i+j) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)j - \frac{1}{2}k.$$

On obtient de même

$$u(j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)i + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)j + \frac{1}{2}k \quad \text{et} \quad u(k) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k.$$

On retrouve la matrice obtenue précédemment.

Un calcul semblable donne  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  comme matrice

de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'exercice suivant est à traiter après avoir étudié les espaces vectoriels normés

### Exercice 7.20

CCP PC 2005

Soit  $M$  la matrice donnée par  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$

- 1) Démontrer que la suite de matrices  $(M^n)$  converge et calculer sa limite  $N$ .
- 2) Caractériser géométriquement  $N$ .

- 3) Soit  $(X_n)$  la suite de vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$  et  $X_{n+1} = MX_n$ . Montrer que la suite  $(X_n)$  converge et expliciter sa limite en fonction de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ .

- 1) La matrice  $M$  est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale. En calculant le polynôme caractéristique de  $M$ , ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient  $\text{Sp } M = \{1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}\}$ , ainsi que les espaces propres  $E_1 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ ,  $E_{1/4} = \text{Vect}((-2, 1, 1))$  et  $E_{-1/12} = \text{Vect}((0, -1, 1))$ . On peut normaliser les vecteurs précédents afin d'avoir une matrice de changement

de bases orthogonale  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ . On a alors  ${}^t P M P = D$

où  $D$  est la matrice diagonale de diagonale  $1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on

a  $M^n = P(D^n){}^t P$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$  et l'application

$A \mapsto P A {}^t P$  est continue sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  (application linéaire sur un espace de dimension finie), la suite  $(M^n)$  converge et a pour limite  $P C {}^t P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 2) La matrice  $N$  est symétrique et est semblable à la matrice  $C$ . C'est donc la matrice de la projection orthogonale sur  $E_1$ .

- 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $X_n = M^n X_0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = N X_0 = \frac{u_0 + v_0 + w_0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



## Exercice 7.21

## Mines-Ponts PSI 2006

Soient  $u$  un vecteur colonne unitaire de  $\mathbb{R}^n$  et  $A = I_n - 2u^t u$ . Montrer que  $A$  est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

La matrice  $A$  est symétrique car  ${}^t A = I_n - 2({}^t u^t u) = A$ . On a donc  ${}^t A A = A^2$ . Par ailleurs, on a :

$$A^2 = (I_n - 2u^t u)^2 = I_n - 4u^t u + 4u^t u u^t u.$$

Or  ${}^t u u = 1$ , si bien que  $u^t u u^t u = u({}^t u u){}^t u = u^t u$ . Finalement  ${}^t A A = I_n$ . La matrice  $A$  est donc orthogonale, mais également symétrique. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Il reste à déterminer les vecteurs invariants par  $A$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A X = X$ . Cela équivaut à l'équation (E) :  $2u^t u X = 0$ . Si  $u$  est le vecteur  ${}^t(u_1, \dots, u_n)$  et  $S$  le vecteur  ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ , l'équation (E) est équivalente à  $\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i\right) u = 0$ . Comme le vecteur  $u$  est non nul, l'espace invariant est l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$ . La matrice  $A$  est donc la matrice de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur  $u$ .

## Exercice 7.22

## CCP PSI 2006

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Montrer que  ${}^t A A = 0$  si et seulement si  $A = 0$ .
- 2) Montrer que  $A^t A A = A$  implique  $({}^t A A)^2 = {}^t A A$ . Montrer la réciproque, en simplifiant  ${}^t B B$  où  $B = A^t A A - A$ .
- 1) Si  $A = 0$ , alors on a directement  ${}^t A A = 0$ . Supposons que  ${}^t A A = 0$ . Considérons un vecteur  $X$  quelconque dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Afin de faire apparaître une norme, on calcule  ${}^t X^t A A X = ({}^t A X)(A X) = \|A X\|^2 = 0$ . Ainsi, pour tout vecteur colonne  $X$ , on a  $A X = 0$  et la matrice  $A$  est donc nulle.
- 2) Pour le sens direct, on a  $({}^t A A)^2 = {}^t A (A^t A A) = {}^t A A$ . Pour la réciproque, on calcule comme demandé  ${}^t B B$  et on obtient :

$${}^t B B = ({}^t A A^t A - {}^t A)(A^t A A - A) = ({}^t A A^t A A^t A A) - 2{}^t A A^t A A + {}^t A A = 0,$$

en utilisant  $({}^t A A)^2 = {}^t A A$ . La matrice  $C = {}^t B B$  est nulle. D'après la question précédente, cela implique que  $B$  est nulle. On a donc l'équivalence entre  $A^t A A = A$  et  $({}^t A A)^2 = {}^t A A$ .

**Exercice 7.23****Mines-Ponts PC 2005**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $B = A^t A - {}^t A A$  ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que  $B = 0$ .

Comme  ${}^t B = A^t A - {}^t A A = B$ , la matrice  $B$  est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale avec, d'après l'énoncé, des valeurs propres toutes positives. Or  $\text{tr } B = \text{tr}(A^t A) - \text{tr}({}^t A A) = 0$  d'une part, et d'autre part  $\text{tr } B$  est la somme des valeurs propres de  $B$ . Les valeurs propres sont donc toutes nulles et  $B$  est semblable à la matrice nulle donc  $B$  est nulle.

**Exercice 7.24****CCP PSI 2006**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B = A^3$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $A = P(B)$ .

La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Il existe  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $Q^{-1} A Q$  soit la matrice diagonale  $D$ , de diagonale les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On a  $B = A^3 = Q D^3 Q^{-1}$  et si  $P \in \mathbb{R}[X]$  alors  $P(B) = Q P(D^3) Q^{-1}$ . La question revient à chercher un polynôme  $P$  tel que  $P(D^3) = D$ , c'est-à-dire tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(\lambda_i^3) = \lambda_i$ . Notons  $\mu_1, \dots, \mu_m$  les valeurs propres distinctes de  $A$ . On cherche donc un polynôme  $P$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $P(\mu_i^3) = \mu_i$ . Les réels  $\mu_1, \dots, \mu_m$  sont deux à deux distincts, donc les réels  $\mu_1^3, \dots, \mu_m^3$  le sont également ( $x \mapsto x^3$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ ). On peut alors considérer les polynômes interpolateurs de Lagrange aux points  $\mu_1^3, \dots, \mu_m^3$ . Il existe un unique polynôme  $P$  de degré au plus  $m - 1$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $P(\mu_i^3) = \mu_i$ . Ce polynôme donne alors  $P(B) = A$ .

**Exercice 7.25****Mines-Ponts PC 2006**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire  $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

1) Montrer que l'application  $u$  définie sur  $E$  par  $u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$  définit un endomorphisme symétrique de  $E$ . En déduire qu'il existe une base orthonormale  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

2) On note  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées aux polynômes  $(P_0, \dots, P_n)$ .

Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$ .

3) En déduire  $\text{tr } u$ .

$$1) \text{ Pour tout } P \in E, u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \int_0^1 t^{n-k} P(t) dt \right) X^k$$

et donc  $u(P) \in E$ . La linéarité est immédiate et donc  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrons que  $u$  est symétrique. Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $E$ . En appliquant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} (u(P)|Q) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (y+x)^n P(x) dx \right) Q(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)^n P(x) Q(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (x+y)^n Q(y) dy \right) P(x) dx = (u(Q)|P) = (P|u(Q)). \end{aligned}$$

L'endomorphisme  $u$  est donc symétrique. Par conséquent, il est diagonalisable dans une base orthonormale. Ainsi il existe une famille orthonormale de vecteurs propres  $P_0, \dots, P_n$  pour  $u$ .

2) Tout polynôme  $P \in E$  se décompose en  $P = \sum_{k=0}^n (P_k|P) P_k$ . Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Considérons le polynôme  $P = (X+y)^n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a :

$$(P_k|P) = \int_0^1 (t+y)^n P_k(t) dt = (u(P_k))(y) = \lambda_k P_k(y).$$

Cela donne  $(X+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(y) P_k$  et, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on obtient

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

3) On doit calculer  $\text{tr } u = \sum_{k=0}^n \lambda_k$ . Le polynôme  $P_k$  est unitaire, on a donc

$$\|P_k\|^2 = 1 = \int_0^1 P_k(t)^2 dt. \text{ Or, pour tout } t \in [0, 1], \text{ on a } (t+t)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(t)^2.$$

En intégrant cette relation sur  $[0, 1]$ , on obtient  $\int_0^1 (2t)^n dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_0^1 P_k(t)^2 dt$ ,

$$\text{c'est-à-dire, } \text{tr } u = \frac{2^n}{n+1}.$$

### Exercice 7.26

#### Centrale PC 2005

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

- 1) Trouver les vecteurs  $x \in E$  tels que  $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$ .
- 2) On suppose qu'il existe une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  dans laquelle la matrice de  $u$  a tous ses coefficients positifs. Montrer que, si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un vecteur propre de  $u$  pour la valeur propre  $\lambda_n$ , il en est de même de  $y = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$ . Montrer également que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $0 \leq |\lambda_i| \leq \lambda_n$ .

- 1) Puisque  $u$  est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, il existe  $(e_1, \dots, e_n)$  base orthonormale de vecteurs propres associées aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , alors  $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$  et  $(x|u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ . On remarque notamment (cela servira par la suite), que pour tout  $x \in E$ , on a  $(x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$ . Enfin on a  $(x|u(x)) - \lambda_n \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_n) x_i^2$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(\lambda_i - \lambda_n) x_i^2 \leq 0$ . La somme précédente est une somme de termes négatifs. Elle est nulle seulement lorsque, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(\lambda_i - \lambda_n) x_i^2 = 0$ . Lorsque  $\lambda_i < \lambda_n$ , cela donne  $x_i = 0$  et il ne reste plus que des coefficients sur les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_n$ . Si  $x$  vérifie  $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$ , alors  $x \in \text{Ker}(u - \lambda_n \text{Id}_E)$ . La réciproque est immédiate (et peut se faire en même temps que le sens direct).

- 2) D'après la question précédente, le vecteur  $x$  est un vecteur propre de  $u$  pour la valeur propre  $\lambda_n$  si et seulement si  $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$ . Notons  $a_{ij}$  les coefficients de la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $(x|u(x)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (e_i | u(e_j))$  et puisque la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale, on a  $(e_i | u(e_j)) = a_{ij}$ . Ainsi

$$(x|u(x)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

De même, on a  $(y|u(y)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j|$ . Or tous les coefficients  $a_{ij}$  sont positifs, et on a  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j| \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \lambda_n \|x\|^2$ . On a également

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|^2. \text{ Par conséquent, on obtient } (y|u(y)) \geq \lambda_n \|y\|^2. \text{ Puisque}$$

$\lambda_n$  est la plus grande des valeurs propres, on a, pour tout  $z \in E$ ,  $(z|u(z)) \leq \lambda_n \|z\|^2$  (voir au début). On a donc à la fois  $(y|u(y)) \geq \lambda_n \|y\|^2$  et  $(y|u(y)) \leq \lambda_n \|y\|^2$ . D'où

$(y|u(y)) = \lambda_n \|y\|^2$ , et, d'après la première question, cela équivaut à  $y$  vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda_n$ .

Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . On a de nouveau

$$(u(x)|x) = \lambda_k \|x\|^2 = \sum_{i \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j. \text{ On obtient alors :}$$

$$|\lambda_k| \|x\|^2 = \left| \sum_{i \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_i x_j| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j|,$$

puisque les coefficients  $a_{ij}$  sont positifs. Soit  $y = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$ . On a d'une part

$$(u(y)|y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j| \geq |\lambda_k| \|x\|^2, \text{ et d'autre part, } (u(y)|y) \leq \lambda_n \|y\|^2. \text{ On}$$

a également  $\|y\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ . On obtient alors :

$$|\lambda_k| \|x\|^2 \leq (u(y)|y) \leq \lambda_n \|x\|^2 \quad \text{et finalement} \quad |\lambda_k| \leq \lambda_n.$$

### Exercice 7.27

#### Centrale PC 2006



Soit  $A$  la matrice  $\left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- 1) En remarquant que  $a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j} dt$ , montrer que  $A$  est définie positive.
- 2) En déduire qu'il existe une matrice  $P$  inversible et de déterminant positif telle que  $A = {}^t P P$ .

- 1) Considérons le produit scalaire  $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$  sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . On définit la fonction  $f_i$  sur  $[0, 1]$  par  $f_i(t) = t^i$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a  $a_{i,j} = (f_i|f_j)$ . Soit  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$${}^t X A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (f_i|f_j) x_i x_j = \left( \sum_{i=1}^n x_i f_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right).$$

En posant  $u = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ , on a  ${}^t X A X = (u|u) = \|u\|^2$ . Comme la famille

$(f_1, \dots, f_n)$  est libre, le vecteur  $u$  est non nul lorsque  $X \neq 0$  et alors  ${}^t X A X > 0$  si  $X \neq 0$ . La matrice  $A$  est donc symétrique réelle définie positive.

- 2) On reprend la méthode de l'exercice 7.14, page 202. Avec  $C$  la matrice diagonale de diagonale les racines des valeurs propres, et  $Q$  la matrice orthogonale de passage de l'exercice 7.14, on peut écrire  $A = {}^t(CQ)(CQ)$ . On a  $\det C > 0$  mais  $\det Q$  peut être égal à  $-1$ . On écrit alors  $A = {}^tQ'CCQ = {}^tQ'C \underbrace{Q'Q}_{I_n}CQ = {}^tPP$

avec  $P = {}^tQCCQ$ . Alors  $\det P = \det C > 0$ .

### Exercice 7.28

#### Centrale PSI 2005

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X$  et  $Y$  deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $\langle X, Y \rangle_A = {}^tXAY$ .

- 1) A quelle condition  $\langle, \rangle_A$  est-il un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  ?
  - 2) On suppose que c'est le cas. Soient  $b$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $c$  une base de  $\mathbb{R}^n$  orthonormale pour  $\langle, \rangle_A$ , et  $P$  la matrice de passage de  $b$  à  $c$ . Que dire de  $B = {}^tPAP$  ?
- 1) Notons  $\varphi : (X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_A$ . Il est immédiat que  $\varphi$  est bilinéaire. Pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on a  $\langle Y, X \rangle_A = {}^tYAX$ . Ce nombre est une matrice de taille 1 identifiée à un réel. On a donc  ${}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX'AY$ . Pour avoir la symétrie de  $\varphi$ , il faut et il suffit que pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  ${}^tX'AY = {}^tXAY$ . Cela équivaut à  $A = {}^tA$  (on prend pour  $X$  et  $Y$  les vecteurs  $E_i$  et  $E_j$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et  ${}^tE_iAE_j = A_{ij}$ ). La matrice  $A$  doit être symétrique réelle. Enfin, il faut que pour tout  $X \neq 0$ , on ait  $\langle X, X \rangle_A = {}^tXAX > 0$ . Cela revient à dire que  $A$  est en plus définie et positive. En conclusion, la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  permet de définir le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle_A = {}^tXAY$  si et seulement si  $A$  est une matrice symétrique définie positive.
- 2) Soient  $b = (E_1, \dots, E_n)$  et  $c = (F_1, \dots, F_n)$  avec  $PE_i = F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors pour  $i$  et  $j$  entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  ${}^tE_jBE_i = {}^t(PE_j)A(PE_i) = {}^tF_jAF_i = \delta_{i,j}$  car la base  $c$  est orthonormale pour le produit scalaire  $\langle, \rangle_A$ . Finalement  $B = I_n$ .

### Exercice 7.29

#### TPE PSI 2006, Polytechnique PC 2007

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définie et positive.

- 1) Montrer que  $\det A \leq \left(\frac{\text{tr } A}{n}\right)^n$ .
- 2) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $a_{ii} > 0$ .

3) Soit  $D$  la matrice diagonale de coefficients diagonaux  $d_{ii} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ . En étudiant

$$B = DAD, \text{ montrer que } \det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

1) La matrice  $A$  est symétrique réelle définie positive, elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les

valeurs propres de  $A$ . On a  $\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ . Montrer que

$$(\det A)^{1/n} \leq \frac{\operatorname{tr} A}{n}, \text{ revient à montrer que } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \lambda_k \leq \ln \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \lambda_k \right) \text{ (toutes les}$$

valeurs propres sont strictement positives). Puisque  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$  et  $1/n > 0$ , c'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme.

2) Soit  $E_i$  le vecteur de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont la  $i$ -ème coordonnée est égale à 1, les autres coordonnées étant nulles. Alors  ${}^tE_i A E_i = {}^tE_i C_i$  où  $C_i$  est la colonne  $i$  de  $A$ , et donc  ${}^tE_i A E_i = a_{ii}$ . Par conséquent  $a_{ii} = {}^tE_i A E_i > 0$ , puisque  $A$  est définie positive.

3) Soit  $X$  un vecteur colonne non nul. On a  ${}^tX B X = {}^tX D A D X = {}^t(DX) A (DX) > 0$  puisque  $D$  est diagonale (donc symétrique) et que  $DX$  n'est pas le vecteur nul. La matrice  $B$  est également symétrique ( ${}^tB = D {}^tA D = B$ ), donc symétrique définie positive. La multiplication de  $A$  par  $D$  à droite a pour effet de multiplier la colonne  $i$  par  $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$  et la multiplication à gauche a pour effet de multiplier la ligne  $i$  par  $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ . L'élément diagonal  $a_{ii}$  est donc multiplié par  $1/a_{ii}$ . La diagonale de la matrice  $B$  est donc constituée de 1. En appliquant la première formule de l'exercice, on obtient  $\det B = \det(D)^2 \det A \leq \left( \frac{\operatorname{tr} B}{n} \right)^n = 1$ , et donc

$$\det A \leq \frac{1}{\det(D)^2} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

### Exercice 7.30

#### Mines-Ponts PSI 2005

Soient  $S$  et  $T$  deux matrices réelles symétriques telles que  $S$  et  $T - S$  soient définies positives. Montrer que  $T$  et  $S^{-1} - T^{-1}$  sont inversibles. Déterminer l'inverse de  $S^{-1} - T^{-1}$ .

Les matrices  $S$  et  $T - S$  étant symétriques réelles définies positives, elles sont diagonalisables à valeurs propres strictement positives. Elles sont donc inversibles. De plus  $T = T - S + S$  et pour tout vecteur colonne  $X$  non nul  $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  ${}^tXTX = {}^tX(T - S)X + {}^tXSX > 0$ . La matrice  $T$  est donc également symétrique réelle définie positive et par conséquent inversible. On a alors  $S(S^{-1} - T^{-1})T = T - S$  et  $S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T - S)T^{-1}$ , produit de trois matrices inversibles. Ainsi  $S^{-1} - T^{-1}$  est inversible, d'inverse  $T(T - S)^{-1}S$ .

## 7.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### Exercice 7.31

#### Plusieurs concours - Décompositions de matrices ☹

- 1) *Décomposition QR ou OT* : soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$  la famille de vecteurs colonnes de  $M$  et  $\mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_n)$  la famille obtenue par orthonormalisation de Schmidt de la base  $\mathcal{B}_1$ . Montrer, en utilisant ces différentes bases, qu'il existe un couple  $(O, T)$  tel que  $O$  soit orthogonale et  $T$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs vérifiant  $M = OT$ . Montrer que la décomposition précédente est unique.
  - 2) *Décomposition polaire* : soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . En appliquant le résultat de l'exercice 7.16, page 203 à la matrice  $U = {}^tMM$ , montrer qu'il existe un unique couple  $(O, S)$  où  $O$  est orthogonale et  $S$  symétrique réelle définie positive telles que  $M = OS$ .
  - 3) *Décomposition de Choleski* : soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure  $T$  telle que  $A = {}^tTT$ .
- 1) Notons  $u$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$ . On a par définition  $\text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M$ . En écrivant  $u = \text{Id}_E \circ u$ , on obtient la relation  $\text{Mat}(\text{Id}_E \circ u, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}) \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}_2)$ . Les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_2$  sont orthonormales donc la matrice  $\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_2, \mathcal{B})$  est orthogonale, notons-la  $O$ . La matrice  $T = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}_2)$  est la matrice où l'on a écrit les vecteurs  $u(e_1) = v_1, \dots, u(e_n) = v_n$  en fonction des vecteurs  $(w_1, \dots, w_n)$ . C'est donc également la matrice  $\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ . Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt construit la base  $\mathcal{B}_2$  en fonction de la base  $\mathcal{B}_1$  de sorte que  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La matrice  $T$  est donc triangulaire supérieure. De plus, le procédé de Gram-Schmidt donne  $(v_i | w_i) > 0$ . Donc les coefficients diagonaux de  $T$  sont strictement positifs. On a bien obtenu la décomposition voulue  $M = OT$ .
- Pour prouver l'unicité, supposons qu'il existe deux décompositions  $M = O_1T_1 = O_2T_2$ . On a  $O_2^{-1}O_1 = T_2T_1^{-1} = A$  qui est une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Son inverse est donc triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (inverse d'une matrice triangulaire supérieure), mais est égale à sa transposée (car elle est



orthogonale) et donc  $A$  est triangulaire inférieure. La matrice  $A$  est donc diagonale, orthogonale et à diagonale strictement positive. Nécessairement  $A = I_n$  et donc  $O_1 = O_2$  et  $T_1 = T_2$ . La décomposition est unique.

- 2) La matrice  $U$  est symétrique réelle définie positive. D'après l'exercice 7.16 appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé, il existe  $S$  symétrique réelle définie positive telle que  $U = S^2 = {}^tSS$ . Considérons alors  $O = MS^{-1}$ . On a  ${}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tMM S^{-1} = {}^t(S^{-1})US^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tSSS^{-1} = I_n$ . La matrice  $O$  est donc orthogonale. Ainsi  $M = OS$  avec  $O$  orthogonale et  $S$  symétrique réelle définie positive.

Supposons que  $M$  admette deux décompositions  $M = O_1S_1 = O_2S_2$ . On a  ${}^tMM = S_1^2 = S_2^2$ . On doit montrer que  $S_1 = S_2$ . Cela équivaut à l'unicité dans l'exercice 7.16. On en déduit  $S_1 = S_2$  puis  $O_1 = O_2$ , donc la décomposition est unique.

- 3) La matrice  $A$  est symétrique réelle définie positive. Il existe donc une matrice inversible  $M$  telle que  $A = {}^tMM$ . Cette matrice  $M$  se décompose en  $M = OT$  où  $O$  est orthogonale et  $T$  triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. On obtient alors  $A = {}^tT{}^tOOT = {}^tTT$ .

### Exercice 7.32

#### Polytechnique PC 2006

Soit  $S = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$  où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\{(AX|X) \mid X \in S\}$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

La matrice  $A$  se décompose en  $A = S_1 + S_2$  avec  $S_1$  symétrique et  $S_2$  antisymétrique (les sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires). Étant donné  $X \in \mathbb{R}^n$ , on note  $a = {}^tXS_2X$ . La matrice  $a$  est de taille 1 (identifiée à un réel) donc  $a = {}^ta = {}^tX{}^tS_2X = -a$ , et ainsi  $a = 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $X \in S$ , on a donc  $(AX|X) = (S_1X|X)$ . On se ramène ainsi au cas où  $A$  est une matrice symétrique. On suppose désormais que  $A$  est symétrique.

Soient  $P$  une matrice orthogonale et  $D$  diagonale de diagonale  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  telles que  $A = PD{}^tP$ . Si  $X \in \mathbb{R}^n$  est unitaire, alors le vecteur  $Y = {}^tPX$  est également unitaire. De plus, lorsque  $X$  décrit  $S$ , le vecteur  $Y = {}^tPX$  décrit également  $S$ . On écrit alors  $(AX|X) = {}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ . On a également

$\{(AX|X) \mid X \in S\} = \{(DY|Y) \mid Y \in S\}$ . Pour tout  $Y$  dans  $S$ , on a :

$$\lambda_1 = \lambda_1 \|Y\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \|Y\|^2 = \lambda_n.$$

Pour tout  $Y \in S$ , on a  $\lambda_1 \leq (DY|Y) \leq \lambda_n$ . Soit  $\mu \in [0, 1]$ . Considérons le vecteur  $Y = (\sqrt{\mu}, 0, \dots, 0, \sqrt{1-\mu})$ . On a  $\|Y\|^2 = \mu + 1 - \mu = 1$  et  $(DY|Y) = \mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_n$ . Lorsque  $\mu$  décrit  $[0, 1]$ , la quantité  $\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_n$

décrit le segment  $[\lambda_1, \lambda_n]$ . Finalement, on en déduit que :

$$\{(AX | X), X \in S\} = \{(DY | Y), Y \in S\} = [\lambda_1, \lambda_n].$$

### Exercice 7.33

#### Centrale PC 2007 ☞

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

- 1) Soient  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $u$  un vecteur unitaire orthogonal à  $H$ . Soit  $s$  la réflexion par rapport à  $H$ . Pour tout  $x \in E$ , exprimer  $s(x)$  en fonction de  $x$  et  $u$ .
  - 2) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de même norme. Montrer qu'il existe une réflexion  $s$  telle que  $s(u) = v$ .
  - 3) Soit  $f \in O(E)$ . Montrer que  $s$  peut s'écrire comme composée d'au plus  $n$  réflexions.
- 1) Soit  $x \in E$ . Le projeté orthogonal de  $x$  sur la droite vectorielle dirigée par  $u$  (orthogonale à  $H$ ) est  $q(x) = (u|x)u$ . Le symétrique de  $x$  par la réflexion d'hyperplan  $H$  est donc  $s(x) = x - 2(u|x)u$ .
- 2) Dans le cas où  $u = v$ , toute réflexion par rapport à un hyperplan qui contient  $u$  convient. Dans le cas où  $u \neq v$ , supposons qu'une telle réflexion d'hyperplan  $H$  existe et considérons  $w$  un vecteur unitaire orthogonal à  $H$ . On doit avoir  $s(u) = u - 2(w|u)w = v$  et donc  $(w|u)w = \frac{u-v}{2}$  ainsi  $w$  doit être colinéaire à  $u - v$ . Si une réflexion convient, alors c'est la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur unitaire  $\frac{u-v}{\|u-v\|}$ . Montrons que cette réflexion, notée  $s$  convient. On a  $s(u) = u - 2(w|u)w = u - 2(u-v|u)\frac{u-v}{\|u-v\|^2}$ . Or  $\|u\|^2 = \|v\|^2$  équivaut à  $\|u\|^2 - \|v\|^2 = (u+v|u-v) = 0$ . On a donc  $(u-v|u) = -(u-v|v)$ , si bien que  $2(u-v|u) = (u-v|u) - (u-v|v) = (u-v|u-v)$ . Finalement  $s(u) = u - \|u-v\|^2 \frac{u-v}{\|u-v\|^2} = u - u + v = v$ .
- Remarque**

Plus simplement, on pourrait décomposer  $u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}$  et  $v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}$  avec  $\frac{u-v}{2}$  colinéaire à  $w$  et  $\frac{u+v}{2}$  orthogonal à  $w$  (car  $(u+v|u-v) = 0$  puisque les vecteurs  $u$  et  $v$  sont de même norme), et retrouver que  $v$  est bien l'image de  $u$  par la réflexion  $s$ .
- 3) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . On définit, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i = f(e_i)$ . L'application  $f$  est orthogonale donc la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base orthonormale de  $E$ . L'idée est de composer par des réflexions afin d'avoir de plus en plus de vecteurs fixes.

- Dans le cas où  $e_1 \neq f_1$ , on définit  $s_1$  comme la réflexion qui transforme  $e_1$  en  $f_1$  (elle existe car  $e_1$  et  $f_1$  sont de même norme 1). Dans le cas où  $e_1 = f_1$ , on choisit  $s_1 = \text{Id}_E$ . Soit  $g_1 = s_1 \circ f$ . On a  $g_1(e_1) = s_1(f_1) = e_1$ . Le vecteur  $e_1$  est invariant par  $g_1$ . De plus l'application  $g_1$  est encore orthogonale car composée de deux applications orthogonales.
- L'image de la base  $\mathcal{B}$  par  $g_1$  est la base orthonormale  $(e_1, g_1(e_2), \dots, g_1(e_n))$ . Le vecteur  $e_1$  est orthogonal à  $e_2$  et à  $g_1(e_2)$  donc il est orthogonal à  $e_2 - g_1(e_2)$ . Dans le cas où  $e_2 \neq g_1(e_2)$ , la réflexion  $s_2$  qui échange  $e_2$  et  $g_1(e_2)$  (les deux sont de même norme) est la réflexion d'hyperplan orthogonal à  $e_2 - g_1(e_2)$ . Le vecteur  $e_1$  est donc invariant par cette réflexion. Soit  $g_2 = s_2 \circ g_1$ . On a  $g_2(e_1) = s_2(e_1) = e_1$  et  $g_2(e_2) = s_2(g_1(e_2)) = e_2$ . L'application orthogonale  $g_2$  laisse  $e_1$  et  $e_2$  invariants. Dans le cas où  $e_2 = g_1(e_2)$ , on pose  $s_2 = \text{Id}_E$  et toujours  $g_2 = s_2 \circ g_1$ . Les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont invariants par  $g_2$ .
- De proche en proche, on construit, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  des applications orthogonales  $g_k$  avec  $g_k = s_k \circ g_{k-1}$  où  $s_k$  est la réflexion qui échange  $e_k$  et  $g_{k-1}(e_k)$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, l'application  $g_k$  laisse invariant les vecteurs  $e_1, \dots, e_k$ .
- La dernière étape donne une application  $g_n$  qui laisse  $\mathcal{B}$  invariante. Ainsi  $g_n = \text{Id}_E$ . De plus,  $g_n = (s_n \circ \dots \circ s_1) \circ f$ . On en déduit

$$f = (s_n \circ \dots \circ s_1)^{-1} = s_1 \circ \dots \circ s_n$$

et  $f$  est la composée d'au plus  $n$  réflexions (certaines des applications  $s_i$  peuvent être l'identité).

### Exercice 7.34

#### Mines-Ponts PSI 2005

Soient  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$  tels que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = \|g(x)\|$ . Établir l'existence de  $h \in O(E)$  tel que  $g = h \circ f$ .

Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base. On va construire  $h$  sur une base orthonormale de  $E$ . On aimerait pouvoir écrire  $h = g \circ f^{-1}$  mais  $f$  n'est pas nécessairement bijective. Lorsque  $x \in \text{Ker } f$ , on a  $f(x) = g(x) = 0$ , et pour tout  $x \in \text{Ker } f$ , on a alors  $g(x) = h(f(x))$ , quelle que soit l'application  $h$  choisie. C'est en revanche sur  $\text{Im } f$  qu'on va construire  $h$ . Considérons la décomposition  $E = \text{Ker } f \oplus (\text{Ker } f)^\perp$ . L'application  $f$  définit un isomorphisme de  $(\text{Ker } f)^\perp$  sur  $\text{Im } f$  (théorème du rang). Soient  $(f_1, \dots, f_p)$  une base orthonormale de  $\text{Im } f$ ,  $(e_1, \dots, e_p)$  la famille de  $(\text{Ker } f)^\perp$  telle que  $f(e_i) = f_i$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , que l'on complète avec une base  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $\text{Ker } f$ . Pour avoir  $g = h \circ f$ , il suffit que  $g(e_i) = h(f(e_i)) = h(f_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Notons alors  $h_i = g(e_i)$ , toujours pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Montrons que cette famille est orthonormale.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}(h_i|h_j) &= \frac{1}{4} (\|h_i + h_j\|^2 - \|h_i - h_j\|^2) = \frac{1}{4} (\|g(e_i + e_j)\|^2 - \|g(e_i - e_j)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|f(e_i + e_j)\|^2 - \|f(e_i - e_j)\|^2) = \frac{1}{4} (\|f_i + f_j\|^2 - \|f_i - f_j\|^2) \\ &= (f_i|f_j).\end{aligned}$$

On complète la famille orthonormale  $(f_1, \dots, f_p)$  en une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$ . On peut alors construire  $h$  sur cette base. On complète la famille orthonormale  $(h_1, \dots, h_p)$  en une base orthonormale  $(h_1, \dots, h_n)$  de  $E$ . On définit  $h$  par  $h(f_i) = h_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'application  $h$  transforme la base orthonormale  $(f_1, \dots, f_n)$  en la base orthonormale  $(h_1, \dots, h_n)$ . Elle est donc orthogonale. Si  $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$ , on a  $f(e_i) = g(e_i) = 0$  et  $g(e_i) = (h \circ f)(e_i)$ . Si  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $(h \circ f)(e_i) = h(f_i) = h_i = g(e_i)$  par définition de  $h_i$ . Les endomorphismes  $g$  et  $h \circ f$  coïncident sur une base de  $E$  donc  $g = h \circ f$ .

### Exercice 7.35

#### CCP PSI 2006 PSI

Soit  $u$  un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien  $E$  (on dit que  $u$  est antisymétrique lorsque  $u^* = -u$ ).

- 1) Montrer que  $\text{Id}_E + u$  est un automorphisme de  $E$ .
- 2) Montrer que  $v = (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1}$  est un élément de  $O^+(E)$ , et que  $-1$  n'est pas valeur propre de  $v$ .
- 3) Soit  $v \in O^+(E)$  n'admettant pas  $-1$  comme valeur propre. Montrer qu'il existe un endomorphisme antisymétrique  $u$  tel que  $v = (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1}$ .

- 1) Pour montrer que  $w = \text{Id}_E + u$  est un automorphisme de  $E$ , il suffit de prouver que  $w$  est injectif. Soit  $x \in \text{Ker } w$ . On a  $w(x) = x + u(x)$ , donc  $u(x) = -x$ . Comme  $u$  est antisymétrique, on a  $(u(x)|x) = -(x|u(x)) = -(u(x)|x)$  et par conséquent,  $(u(x)|x) = 0$ . On en déduit que  $-(x|x) = 0$ , donc que  $x = 0$ .

L'endomorphisme  $w$  est donc injectif et par conséquent bijectif.

- 2) Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned}v^* \circ v &= ((\text{Id}_E + u)^{-1})^* \circ (\text{Id}_E - u)^* \circ (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} \\ &= ((\text{Id}_E + u)^*)^{-1} \circ \underbrace{(\text{Id}_E + u) \circ (\text{Id}_E - u)}_{\text{commutant}} \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} \\ &= (\text{Id}_E - u)^{-1} \circ (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} = \text{Id}_E.\end{aligned}$$

Soit  $x \in E$  tel que  $v(x) = -x$ , c'est-à-dire  $(\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1}(x) = -x$ . En écrivant  $\text{Id}_E - u = 2 \text{Id}_E - (\text{Id}_E + u)$ , on obtient :

$$(\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1}(x) = 2 \text{Id}_E \circ (\text{Id}_E + u)^{-1}(x) - x.$$

Ainsi  $x$  vérifie  $2(\text{Id}_E + u)^{-1}(x) = 0$  et donc  $x = 0$ . Par conséquent,  $-1$  n'est pas valeur propre de  $v$ .

- 3) Notons  $\mathcal{E} = \{v \in O^+(E) \mid -1 \notin \text{Sp } v\}$  et  $\mathcal{A}(E)$  l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de  $E$ . On vient de justifier l'existence d'une application  $\varphi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{E}$ . Montrons qu'elle est surjective, et pour cela effectuons un raisonnement par analyse-synthèse. Soit  $v \in \mathcal{E}$  et supposons que l'endomorphisme  $u$  existe. On a alors :

$$\begin{aligned} v + \text{Id}_E &= (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} + \text{Id}_E \\ &= (\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} + (\text{Id}_E + u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} \\ &= (\text{Id}_E - u + \text{Id}_E + u) \circ (\text{Id}_E + u)^{-1} = 2(\text{Id}_E + u)^{-1}. \end{aligned}$$

En inversant (c'est possible puisque  $-1$  n'est pas valeur propre de  $v$ ), on obtient  $u + \text{Id}_E = 2(v + \text{Id}_E)^{-1}$  soit

$$u = 2(v + \text{Id}_E)^{-1} - \text{Id}_E = (2 \text{Id}_E - (v + \text{Id}_E)) \circ (v + \text{Id}_E)^{-1} = (\text{Id}_E - v) \circ (v + \text{Id}_E)^{-1}.$$

On a donc déterminé l'endomorphisme  $u$ , s'il existe. Pour la synthèse, il suffit de prouver que  $u$  est antisymétrique. On a :

$$\begin{aligned} u^* &= ((v + \text{Id}_E)^*)^{-1} \circ (\text{Id}_E - v)^* = (v^{-1} + \text{Id}_E)^{-1} \circ (\text{Id}_E - v^{-1}) \\ &= (v^{-1} \circ (\text{Id}_E + v))^{-1} \circ (\text{Id}_E - v^{-1}) = (\text{Id}_E + v)^{-1} \circ v \circ (\text{Id}_E - v^{-1}) \\ &= (\text{Id}_E + v)^{-1} \circ (v - \text{Id}_E) = -(\text{Id}_E + v)^{-1} \circ (\text{Id}_E - v) \end{aligned}$$

Il reste à prouver que  $(\text{Id}_E + v)^{-1}$  et  $(\text{Id}_E - v)$  commutent. Or

$$(\text{Id}_E + v)^{-1}(\text{Id}_E - v)(\text{Id}_E + v) = (\text{Id}_E + v)^{-1}(\text{Id}_E + v)(\text{Id}_E - v) = (\text{Id}_E - v),$$

et puisque  $v + \text{Id}_E$  est inversible, on obtient :

$$(\text{Id}_E + v)^{-1}(\text{Id}_E - v) = (\text{Id}_E - v)(\text{Id}_E + v)^{-1}.$$

Finalement  $u^* = -u$ .

### Exercice 7.36

**Mines-Ponts PSI 2006** ☕☕

Soient  $\alpha > 0$  et  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique définie positive. On pose :

$$E_\alpha = \{A \in \mathcal{S}_n^+ \mid \det A \geq \alpha\}.$$

Montrer que  $\min_{A \in E_\alpha} \text{tr}(AH) = n(\alpha \det H)^{\frac{1}{n}}$ .

*Indication* : utiliser l'exercice 7.29.

La matrice  $H$  est réelle, symétrique, définie et positive, il existe donc  $P$  orthogonale et  $D$  diagonale dont les éléments diagonaux  $d_1, \dots, d_n$  sont strictement positifs telles

que  $H = PDP^{-1}$ . On a  $\det H = \prod_{k=1}^n d_k$ . Soit  $A \in E_\alpha$ . On a :

$$\operatorname{tr}(AH) = \operatorname{tr}(APDP^{-1}) = \operatorname{tr}((P^{-1}AP)D).$$

Étudions la matrice  $A' = P^{-1}AP = {}^tPAP$ . On a  $\det A' = \det A$ . Un calcul simple montre que  $A$  est symétrique. Si  $X \in \mathbb{R}^n$ , alors

$${}^tXA'X = {}^tX{}^tPAPX = {}^t(PX)A(PX) \geq 0$$

car  $A$  est symétrique réelle positive. Ainsi  $A' \in E_\alpha$ . La matrice  $A'$  est dans  $S_n^+$ , et, puisque  $\det A' > 0$ , la matrice  $A'$  est définie positive. On a alors

$\operatorname{tr}(A'D) = \sum_{k=1}^n d_k a'_{kk}$ . D'après l'exercice 7.29, on a  $a'_{kk} > 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La même inégalité de convexité que dans l'exercice 7.29 donne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k a'_{kk} \geq \left( \prod_{k=1}^n d_k a'_{kk} \right)^{1/n}, \text{ c'est-à-dire } \operatorname{tr}(A'D) \geq n(\det H)^{1/n} \left( \prod_{k=1}^n a'_{kk} \right)^{1/n}.$$

Or, toujours d'après l'exercice 7.29, on a  $\det A' \leq \prod_{k=1}^n a'_{kk}$  donc  $\prod_{k=1}^n a'_{kk} \geq \alpha$ . On

obtient finalement  $\operatorname{tr}(AH) = \operatorname{tr}(A'D) \geq n(\alpha \det H)^{1/n}$ .

On cherche une matrice  $A$  qui donnerait l'égalité. On cherche  $A$  sous la forme  $kH^{-1}$ . La matrice  $H^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}{}^tP$  est également symétrique réelle définie positive. On a  $\det A = k^n / \det H$  et  $\operatorname{tr}(AH) = nk$ . En choisissant  $k = (\alpha \det H)^{\frac{1}{n}}$ , on a  $\det A = \alpha \det H / \det H = \alpha$ , la matrice  $A$  est dans  $E_\alpha$  et  $\operatorname{tr}(AH) = n(\alpha \det H)^{\frac{1}{n}}$ . On obtient finalement le résultat demandé.

### Exercice 7.37

**Polytechnique, Mines-Ponts PSI 2006** PSI

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

1) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

a) Montrer que, pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ , on a :

$$[f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)] = (\operatorname{tr} f)[x, y, z].$$

b) Trouver l'unique endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $g(x \wedge y) = x \wedge f(y) - y \wedge f(x)$ .

2) Soient  $a \in E$  et  $f$  définie pour tout  $x \in E$  par  $f(x) = x \wedge a$ . Déterminer  $\operatorname{tr} f$  et  $f^*$ .

3) Montrer l'identité :  $x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$ .

Soit  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  la base canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  orienté par cette base. On rappelle que si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de  $E$ , le vecteur  $x \wedge y$  est l'unique vecteur de  $E$  tel que, pour tout  $z \in E$ ,  $(x \wedge y|z) = [x, y, z] = \det(x, y, z)$  (on utilise le déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ).

1) a. Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $E^3$  par :

$$\varphi(x, y, z) = [f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)].$$

On vérifie rapidement que  $\varphi$  est une application 3-linéaire alternée et qu'elle est par conséquent colinéaire au déterminant. Il existe donc une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que  $\varphi = \alpha \det$ . Le calcul de  $\varphi(i, j, k)$  donne la valeur de  $\alpha \det(i, j, k) = \alpha$ . On obtient  $\alpha = \varphi(i, j, k) = [f(i), j, k] + [i, f(j), k] + [i, j, f(k)]$ . Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors  $[f(i), j, k] = a_{11}$ ,  $[i, f(j), k] = a_{22}$  et  $[i, j, f(k)] = a_{33}$ . On a donc  $\alpha = \text{tr } A = \text{tr } f$ .

b. Afin d'utiliser la relation précédente, on essaie de déterminer  $(g(x \wedge y)|z)$  pour un vecteur  $z \in E$  quelconque. On a, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} & (x \wedge f(y) - y \wedge f(x)|z) \\ &= [x, f(y), z] - [y, f(x), z] = [x, f(y), z] + [f(x), y, z] \\ &= (\text{tr } f)[x, y, z] - [x, y, f(z)] = ((\text{tr } f)x \wedge y|z) - (x \wedge y|f(z)) \\ &= ((\text{tr } f)x \wedge y|z) - (f^*(x \wedge y)|z) = ((\text{tr } f)x \wedge y - f^*(x \wedge y)|z) \end{aligned}$$

En posant  $u = x \wedge y$ , on cherche  $g$  telle que, pour tout  $u \in E$  et tout  $z \in E$ , on ait  $(g(u)|z) = ((\text{tr } f)u - f^*(u)|z)$ . La relation doit être vraie pour tout  $z \in E$ , on doit donc avoir, pour tout  $u \in E$ ,  $g(u) = (\text{tr } f)u - f^*(u)$ , et donc  $g = (\text{tr } f)\text{Id}_E - f^*$ .

2) On pourrait écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , mais on va procéder plus directement. On a d'après la formule de 1.a.,  $\text{tr } f = [f(i), j, k] + [i, f(j), k] + [i, j, f(k)]$ . Or  $f(i)$  est orthogonal à  $i$  donc se trouve dans  $\text{Vect}(j, k)$ . Ainsi  $[f(i), j, k] = 0$ . On obtient le même résultat pour les deux autres termes. Ainsi  $\text{tr } f = 0$ . On peut aussi utiliser, puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormale,  $\text{tr } f = (f(i)|i) + (f(j)|j) + (f(k)|k)$ . Chaque terme est nul et on retrouve  $\text{tr } f = 0$ .

Il reste à déterminer  $f^*$ . Soit  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$(f^*(x)|y) = (x|f(y)) = (x|y \wedge a) = (y \wedge a|x) = [y, a, x] = [a, x, y] = (a \wedge x|y).$$

Cela donne  $f^*(x) = a \wedge x$ , c'est-à-dire  $f^* = -f$ .

3) Soit  $z \in E$  et  $f : x \mapsto x \wedge z$ . On réécrit alors, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = x \wedge f(y) + y \wedge (-f(x)) + z \wedge (x \wedge y).$$

D'après la question 1.b., on a  $x \wedge f(y) - y \wedge f(x) = (\text{tr } f)x \wedge y - f^*(x \wedge y)$ , ce qui donne d'après la question 2,  $x \wedge f(y) - y \wedge f(x) = 0 + f(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge z$ . En remplaçant, la somme des trois termes devient

$$(x \wedge y) \wedge z + z \wedge (x \wedge y) = -z \wedge (x \wedge y) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$$

## Exercice 7.38

**Mines-Ponts PC 2006, Polytechnique PC 2005 (quotient de Rayleigh)** 🍷

Soient  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  de spectre ordonné  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ , et, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $\mathcal{G}_k$  l'ensemble des sous-espaces de  $E$  de dimension  $k$ .

Montrer que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{G}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(u(x)|x)}{(x|x)}$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Le sous-espace vectoriel  $F_k$  est de dimension  $k$ . Si  $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in F_k$  est un vecteur non nul, alors on a d'une part

$$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2, \text{ et d'autre part, } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2. \text{ On en déduit que}$$

$$\frac{(u(x)|x)}{(x|x)} \leq \lambda_k \text{ avec égalité lorsque } x = e_k, \text{ d'où } \max_{x \in F_k \setminus \{0\}} \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} = \lambda_k.$$

- Montrons que si  $F \in \mathcal{G}_k$ , alors  $\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} \geq \lambda_k$ . Soit  $F \in \mathcal{G}_k$ . On note

$$H = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n). \text{ Comme précédemment, on montre que si } x = \sum_{i=k}^n x_i e_i \in H$$

est non nul, alors  $(u(x)|x) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \|x\|^2$ . Montrons que  $F$  et  $H$  sont

d'intersection non nulle. En effet, on a  $\dim F = k$ ,  $\dim H = n - k + 1$  et  $\dim(F \cap H) = \dim F + \dim H - \dim(F + H) \geq k + (n - k + 1) - n = 1$ . Il existe

donc un vecteur  $y$  non nul dans  $F$  et  $H$ . Pour ce vecteur, on a  $\frac{(u(y)|y)}{(y|y)} \geq \lambda_k$ . Ainsi

$$\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} \geq \lambda_k.$$

- Finalement, si  $F \in \mathcal{G}_k$ , on a  $\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} \geq \lambda_k$  avec égalité lorsque  $F = F_k$ .

Cela donne le résultat de l'exercice.



## 8.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 8.1.1 Classification des quadriques

#### Ce qu'il faut savoir

On se place dans un espace affine euclidien  $E_3$  de dimension trois.

• On appelle **quadrique** un ensemble  $Q$  de points de  $E_3$  vérifiant la condition : il existe un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et des réels  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$  avec  $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  tels que  $S$  admet dans  $\mathcal{R}$  une équation cartésienne de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

On note  $A$  la matrice définie par



$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Si  $Q$  est une quadrique, alors dans tout repère orthonormal,  $Q$  admet une équation cartésienne de la forme proposée ci-dessus. Il suffit d'appliquer les formules de changements de base pour s'en rendre compte, mais selon le repère choisi, l'équation cartésienne de  $Q$  est plus ou moins simple. On montre que les différentes situations possibles sont celles résumées dans les tableaux des pages suivantes.

#### Remarques mnémotechniques sur les tableaux suivants

- Le nom d'une quadrique est lié à la nature de son intersection avec les plans d'équation  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  dans le repère où elle admet une équation réduite. Lorsque deux de ces intersections sont de même nature, on utilise un terme en « oïde » qui décrit la nature commune de ces deux intersections, le terme en « ique » décrit alors la nature de la troisième intersection. Ainsi on doit s'attendre à ce que l'intersection d'un parabolôïde hyperbolique avec deux de ces plans soit une parabole et que la troisième de ces intersections soit une hyperbole.
- Lorsque le nom d'une quadrique contient les termes parabolôïdes ou cylindre le rang de sa matrice associé perd une unité.

**Tableau 8.1**  $\text{rg } A = 3$ , Quadriques à centre

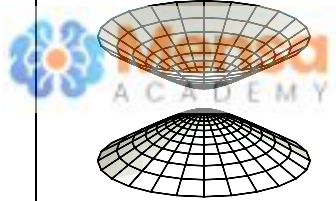
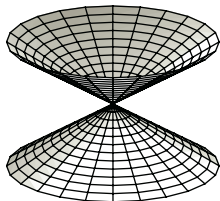
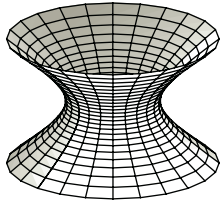
| Équation réduite                                           | représentation graphique                                                            | nature, nom                |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ |                                                                                     | $\emptyset$                |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$  |                                                                                     | singleton                  |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  |    | ellipsoïde                 |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ |   | hyperboloïde à deux nappes |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  |  | cône                       |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  |  | hyperboloïde à une nappe   |

Tableau 8.2  $\text{rg } A = 2$ 

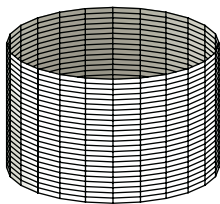
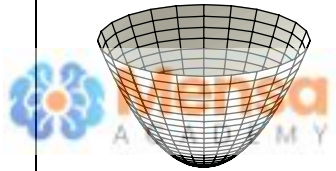
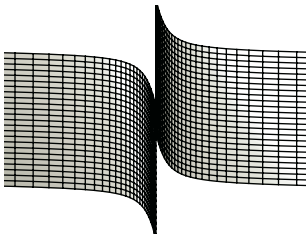
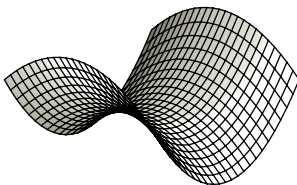
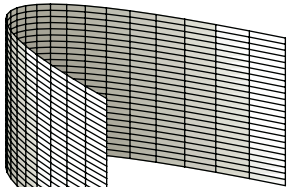
| Équation réduite                                   | représentation graphique                                                            | nature, nom              |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$           |                                                                                     | $\emptyset$              |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$            |                                                                                     | droite                   |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$            |    | cylindre elliptique      |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$ |    | paraboloïde elliptique   |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$            |                                                                                     | deux plans sécants       |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$            |  | cylindre hyperbolique    |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$ |  | paraboloïde hyperbolique |

Tableau 8.3  $\text{rg } A = 1$ 

| Équation réduite        | représentation graphique                                                          | nature, nom           |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\frac{x^2}{a^2} = -1$  |                                                                                   | $\emptyset$           |
| $\frac{x^2}{a^2} = 0$   |                                                                                   | plan                  |
| $\frac{x^2}{a^2} = 1$   |                                                                                   | deux plans parallèles |
| $\frac{x^2}{a^2} = 2py$ |  | cylindre parabolique  |



### Exercice 8.1

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormal de l'espace. Donner le nom des quadriques suivantes.

1)  $2X^2 - Y^2 + 3Z^2 = 1$

5)  $X^2 - 3Y - Z^2 = 0$

2)  $3Z^2 + 4Y^2 = 0$

6)  $-2X^2 - 3Y^2 - Z^2 = 1$

3)  $X + Y^2 + Z^2 = 0$

7)  $X^2 + Y^2 = 1$

4)  $-2X^2 + 3Y^2 - Z^2 = 5$

8)  $2X^2 - 5Y^2 + 2Z^2 = 0$ .

1) hyperboloïde à une nappe

5) paraboloid hyperbolique

2) droite

6) vide

3) paraboloid elliptique

7) cylindre elliptique

4) hyperboloïde à deux nappes

8) cône.

**Exercice 8.2**

Indiquer des éléments de symétrie des quadriques à centre.

On se place dans un repère orthonormé  $Oxyz$  où elles admettent une équation réduite. Elles admettent toute l'origine pour centre de symétrie ; les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  pour axes de symétrie, et les plans  $xOy$ ,  $yOz$  et  $zOx$  pour plans de symétrie.

**Exercice 8.3**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Discuter suivant  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  la nature de la quadrique  $(S)$  d'équation  $X^2 + \alpha Y^2 + Z^2 = \alpha$

- Lorsque  $\alpha > 0$ , la quadrique  $(S)$  est un ellipsoïde.
- Lorsque  $\alpha = 0$ , la quadrique  $(S)$  est une droite.
- Lorsque  $\alpha < 0$ , la quadrique  $(S)$  est un hyperboloïde à deux nappes.

*L'exercice suivant doit vous permettre de vous entraîner à visualiser les quadriques. On essaiera de bien se représenter les intersections proposées avant de justifier sa réponse.*

**Exercice 8.4****Intersection d'une quadrique et d'un plan**

On se placera bien sûr dans un repère où la quadrique proposée admet une équation réduite.

- 1) Donner un plan dont l'intersection avec un paraboloidé elliptique est une parabole.
- 2) Donner un plan dont l'intersection avec un cône est une hyperbole.
- 3) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde à une nappe peut être une ellipse ?
- 4) Donner un plan dont l'intersection avec un cylindre parabolique est la réunion de deux droites parallèles.
- 5) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde à deux nappes peut être vide ?
- 6) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un ellipsoïde peut être une parabole ?
- 7) Est-ce que l'intersection d'un plan avec un paraboloidé elliptique peut être une hyperbole ?
- 8) Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un cylindre elliptique peut être une parabole ?

- 1) Il existe  $(a, b, c)$  un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que le paraboloïde elliptique  $(S)$  admet dans ce repère une équation de la forme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{z}{c} = 0$ . Considérons le plan  $P$  d'équation  $x = 0$ . Le triplet  $(O, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormal de  $P$ . Soit  $M$  un point de  $P$  de coordonnées  $(X, Y)$  dans  $(O, \vec{j}, \vec{k})$ . Ses coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(0, X, Y)$ . Le point  $M$  appartient à  $P \cap (S)$  si et seulement si  $\frac{X^2}{b^2} - 2\frac{Y}{c} = 0$ , c'est l'équation d'une parabole dans  $P$ .
- 2) Il existe  $(a, b, c)$  un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que le cône  $(C)$  admet dans ce repère une équation de la forme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ . Considérons le plan  $P$  d'équation  $x = \alpha$  avec  $\alpha \neq 0$ . Soit  $\Omega$  le point de  $P$  de coordonnées  $(\alpha, 0, 0)$ . Le triplet  $(\Omega, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormal de  $P$ . Soit  $M$  un point de  $P$  de coordonnées  $(X, Y)$  dans  $(\Omega, \vec{j}, \vec{k})$ . Ses coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(\alpha, X, Y)$ . Le point  $M$  appartient à  $P \cap (C)$  si et seulement si  $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} - \frac{Y^2}{c^2} = 0$ , c'est bien l'équation d'une hyperbole dans  $P$ .
- 3) Il existe  $(a, b, c)$  un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que l'hyperboloïde à une nappe  $(H)$  admet dans ce repère une équation de la forme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Considérons le plan  $P$  d'équation  $z = 0$ . Le triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormal de  $P$ . Soit  $M$  un point de  $P$  de coordonnées  $(X, Y)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Ses coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(X, Y, 0)$ . Le point  $M$  appartient à  $P \cap (H)$  si et seulement si  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ , c'est l'équation d'une ellipse dans  $P$ .
- 4) Il existe  $(a, p)$  un couple de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que le cylindre parabolique  $(S)$  admet dans ce repère une équation de la forme  $\frac{x^2}{a^2} = 2py$ . Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Considérons le plan  $P$  d'équation  $y = \alpha$ . Soit  $\Omega$  le point de  $P$  de coordonnées  $(0, \alpha, 0)$ . Le triplet  $(\Omega, \vec{i}, \vec{k})$  est un repère orthonormal de  $P$ . Soit  $M$  un point de  $P$  de coordonnées  $(X, Y)$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{k})$ . Ses coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(X, \alpha, Y)$ . Le point  $M$  appartient à  $P \cap (S)$  si et seulement si  $\frac{X^2}{a^2} = 2p\alpha$ . Comme  $\alpha$  est strictement positif c'est l'équation d'un couple de droites parallèles dans  $P$ .
- 5) Il existe  $(a, b, c)$  un triplet de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que l'hyperboloïde à deux nappes  $(H)$  admet dans ce repère une équation de la forme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ . Considérons le plan  $P$  d'équation  $z = 0$ . Un point  $M$

de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  appartient à  $P \cap (H)$  si et seulement si  $z = 0$  et  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  ce qui est impossible. On a donc  $P \cap (H) = \emptyset$ .

- 6) Soit  $(E)$  un ellipsoïde. L'ensemble  $(E)$  est une partie bornée de l'espace et son intersection avec un plan sera donc également bornée. Comme une parabole n'est pas une partie bornée de l'espace, l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan ne peut être une parabole.
- 7) Il existe  $(a, b, c)$  un triplet de réels non nuls avec  $c > 0$  et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que le paraboloïde elliptique  $(E)$  admet pour équation dans ce repère  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$ . On constate que  $(E)$  est inclus dans le demi-espace  $z \geq 0$ . Soit  $P$  un plan. Si le plan  $P$  est parallèle au plan  $z = 0$ , on montre que son intersection avec  $H$  est une ellipse, sinon son intersection avec le demi-espace  $z \geq 0$  est un demi-plan. Comme une hyperbole n'est jamais incluse dans un demi-plan, l'intersection de  $H$  et  $P$  ne peut être une hyperbole. Dans tous les cas l'intersection de  $P$  et  $(E)$  n'est jamais une hyperbole.
- 8) Il existe  $(a, b)$  un couple de réels non nuls et un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que le cylindre elliptique  $(E)$  admet pour équation dans ce repère  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . On va utiliser le fait que tout point de l'axe  $Oz$  est un centre de symétrie de  $(E)$ . Soit  $P$  un plan. Si  $P$  est parallèle à l'axe  $Oz$  on montre que son intersection avec  $(E)$  est soit une droite, soit un couple de droites parallèles, soit vide. Si  $P$  n'est pas parallèle à l'axe  $Oz$ , alors il rencontre cet axe en un centre de symétrie de  $(E)$ . Comme le plan  $P$  est lui même stable par cette symétrie centrale, l'intersection de  $(E)$  et  $P$  admet un centre de symétrie. Or une parabole n'a pas de centre de symétrie, ce qui montre que l'intersection de  $P$  et  $(E)$  n'est jamais une parabole.

### 8.1.2 Réduction des quadriques

#### Ce qu'il faut savoir

#### Notations et lien avec l'algèbre bilinéaire

L'espace  $E$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $Q$  une quadrique qui admet pour équation cartésienne dans le repère  $\mathcal{R}$  :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

On note  $A$  la matrice définie par  $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ .

On définit la fonction  $F$ , qui à tout triplet  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , associe le réel

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j.$$

On note  $\phi$  et on appelle partie linéaire de  $Q$ , la forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\phi(x, y, z) = gx + hy + iz.$$

On a alors, en notant  $X$  le vecteur colonne  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  :

$$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow {}^tXAX + \phi(X) + j = 0.$$

## Pratique de la réduction

### Première étape

On détermine le **spectre** de  $A$ . La matrice  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Dans la suite, on note  $(e_1, e_2, e_3)$  une telle base et on note alors  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  les valeurs propres respectivement associées à  $e_1, e_2$  et  $e_3$ .

### Deuxième étape

•  $\text{rg } A = 3$ .

- Remarquons tout d'abord que cette condition revient à « 0 n'appartient pas au spectre de  $A$  ». Dans ce cas la quadrique  $Q$  admet un unique centre de symétrie  $\Omega$  et on dit que  $Q$  est à **centre**.
- Pour déterminer les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $\Omega$ , on peut utiliser le fait qu'elles vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}.$$

Il est aussi utile de savoir que, dans le cas où la partie linéaire  $\phi$  est nulle, le centre de la quadrique est  $O$ .

- Grâce aux formules  $x = x_0 + x', y = y_0 + y', z = z_0 + z'$ , on détermine l'équation cartésienne de  $Q$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  obtenu par translation du repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On obtient une équation de la forme :

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2ex'z' + 2fy'z' + \alpha = 0.$$

Enfin, sans avoir besoin d'explicitier les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , on sait que dans le repère  $\mathcal{R}'' = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique  $Q$  admet pour équation :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \alpha = 0.$$



•  $\text{rg } A < 3$ .

- On explicite les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ . On donne en particulier la matrice de passage de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  : c'est la matrice  $P$  des coordonnées de  $e_1, e_2$  et  $e_3$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
- En utilisant les formules de passage données par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on détermine l'équation cartésienne de  $Q$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ .

- On met sous forme canonique les trinômes en  $X$  en  $Y$ , et en  $Z$  et on en déduit un nouveau repère  $\mathcal{R}'' = (O', e_1, e_2, e_3)$  (obtenu par translation de  $\mathcal{R}'$ ), dans lequel  $Q$  admet une équation cartésienne d'un des types proposés dans les tableaux 2 et 3.

### Exercice 8.5

#### Centrale PC 2005

Etudier la quadrique  $Q$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$



La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Cette matrice est de rang 3 et la partie linéaire  $\phi$  est nulle. Il s'agit donc d'une quadrique de centre  $O$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ . Son spectre est  $\{-1, 2\}$ . Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormale de vecteurs propres. Dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$  la quadrique a pour équation :  $-X^2 + 2Z^2 + 2Y^2 = 1$ . Il faut bien réaliser qu'on n'a pas besoin d'explicitier la base  $(e_1, e_2, e_3)$  pour obtenir cette expression. On reconnaît un hyperboloïde à une nappe.

### Exercice 8.6

#### Mines-Ponts PSI 2006

Reconnaître et réduire la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0.$$

La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le rang de cette matrice vaut 2 et on a  $\text{Sp}(A) = \{0, 2, 3\}$ . On obtient par exemple comme base orthonormale de vecteurs propres :

$$e_1 = \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right), \quad e_2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad e_3 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Les formules de passage du repère initial au repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{6} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Y + \frac{\sqrt{3}}{3} Z, \\ y = \frac{\sqrt{6}}{6} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Y - \frac{\sqrt{3}}{3} Z \\ z = \frac{\sqrt{6}}{3} X + \frac{\sqrt{3}}{3} Z \end{cases}.$$

On en déduit que dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation

$2Y^2 + 3Z^2 - \frac{4\sqrt{6}}{3}X + \sqrt{2}Y + \frac{5\sqrt{3}}{3}Z + 3 = 0$ . En mettant cette expression sous forme canonique, on obtient

$$3 \left( Z + \frac{5}{18}\sqrt{3} \right)^2 + 2 \left( Y + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{6} \left( X - \frac{37}{144}\sqrt{6} \right) = 0.$$

Soit  $O' = \left( -\frac{5\sqrt{3}}{18}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{37\sqrt{6}}{144} \right)$ . Dans le repère orthonormal  $(O', e_1, e_2, e_3)$ , la

quadrique a pour équation  $3Z'^2 + 2Y'^2 - \frac{4}{3}\sqrt{6}X' = 0$ .

On reconnaît un parabolôïde elliptique.

### 8.1.3 Coniques

Les coniques ont été étudiées dans le livre de première année « Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MPSI-PCSI-PTSI » auquel nous vous renvoyons pour les rappels de cours.

La méthode de réduction des quadriques donnée plus haut s'adapte sans difficulté aux coniques.

#### Exercice 8.7

##### Mines-Ponts MP 2006

Étudier la courbe (C) d'équation :  $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 19x - 20y = 0$ .

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $\lambda^2 - 25\lambda$ . Le spectre de  $A$  est  $\{25, 0\}$ . On en déduit que  $(C)$  est une conique du genre parabole. Les vecteurs propres de  $A$  permettent de construire une base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . On obtient par exemple

$e_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  et  $e_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ . Dans le repère  $(O, e_1, e_2)$  la courbe  $(C)$  a pour

équation  $25X^2 - \frac{136}{5}X - \frac{23}{5}Y = 0$ . On peut mettre sous forme canonique le terme de

gauche de cette égalité et obtenir comme équation  $25\left(X - \frac{68}{125}\right)^2 - \frac{23}{5}Y = \frac{4624}{625}$ .

La courbe  $(C)$  est une parabole.

## 8.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### 8.2.1 Quadriques

#### Exercice 8.8

##### Centrale PC 2006

On munit  $\mathbb{R}^3$  de son repère orthonormal canonique. Caractériser la surface d'équation  $y^2 + xy - xz - yz - 3x - 5y - 3z = 0$ .

La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $-\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda$  et on a  $\text{Sp}(A) = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ .

Comme la matrice de  $A$  n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad e_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Dans le repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation :

$$\frac{3}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X + \frac{13}{6}\sqrt{6}Y - \frac{3}{2}\sqrt{2}Z - 3 = 0.$$

En mettant sous forme canonique le terme de gauche de l'égalité précédente on obtient :

$$-\frac{1}{2} \left( Z + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( Y + \frac{13}{18}\sqrt{6} \right)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \left( X + \frac{49}{18}\sqrt{3} \right) = 0.$$

Soit  $O' = \left( -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{13}{18}\sqrt{6}, -\frac{49}{18}\sqrt{3} \right)$ . Dans le repère orthonormal  $(O', e_1, e_2, e_3)$ ,

la quadrique a pour équation  $\frac{3}{2}Y'^2 - \frac{1}{2}Z'^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X' = 0$ .

On reconnaît un parabolôïde hyperbolique.

### Exercice 8.9

#### Mines-Ponts PSI 2006

Reconnaitre, pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , la quadrique  $Q$  d'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy + 2xz - 8yz + \alpha x + 2y - z = 1.$$

La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $-\lambda^3 + \lambda^2 + 30\lambda$ . Le rang de cette matrice vaut 2 et on a  $\text{Sp}(A) = \{6, -5, 0\}$ . Comme la matrice de  $A$  n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \quad e_2 = \left( 0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5} \right), \quad e_3 = \left( -\frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{30} \right).$$

Dans le repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation :

$$6X^2 - 5Y^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}(\alpha - 5)X - \frac{\sqrt{30}}{6}(1 + \alpha)Z - 1 = 0.$$

On constate alors que quelque soit la valeur de  $\alpha$ , le terme en  $X$  pourra être regroupé avec le terme en  $X^2$ . On obtient la forme canonique :

$$6 \left( X + \frac{\sqrt{6}}{72}(\alpha - 5) \right)^2 - 5Y^2 - \frac{\sqrt{30}}{6}(1 + \alpha)Z - 1 - \frac{1}{144}(\alpha - 5)^2 = 0.$$

L'expression obtenue montre que le terme constant est toujours non nul. Le terme en  $Z$  peut par contre être annulé si  $\alpha = -1$ . On a donc la situation suivante : si  $\alpha = -1$  alors la quadrique est un cylindre hyperbolique, si  $\alpha \neq -1$  alors la quadrique est un parabolôïde hyperbolique.

## Exercice 8.10

## Centrale PC 2005

Donner la nature de la surface  $(S)$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = k$ .

La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda$  et on a  $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$ . Comme la matrice de  $A$  n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad e_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad e_3 = \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right).$$

Dans le repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation :

$$3Y^2 + 3Z^2 = k.$$

Si  $k < 0$ , alors la quadrique est vide.

Si  $k = 0$ , alors la quadrique est réduite à la droite d'équations  $Y = Z = 0$ .

Si  $k > 0$ , alors la quadrique est un cylindre elliptique qui ici est de révolution.

## Exercice 8.11



## TPE PC 2005, Mines-Ponts MP 2006

Déterminer, suivant les valeurs des réels  $a$  et  $b$ , la nature de la quadrique dont l'équation dans un repère orthonormé est :  $x^2 + xy - xz - yz + ax + bz = 0$ .

La matrice de  $Q$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $-\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda$  et on a  $\text{Sp}(A) = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$ .

Comme la matrice de  $Q$  n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad e_2 = \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad e_3 = \left( -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right).$$

Dans le repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation :

$$-\frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)X + \frac{\sqrt{2}}{2}bY - \frac{\sqrt{6}}{6}(2a+b)Z = 0.$$

Si  $a \neq -b$ , alors l'expression est du premier degré en  $X$  et il faudrait mettre sous forme canonique cette expression en  $Y$  et en  $Z$ . On peut le faire explicitement mais les calculs sont très désagréables et l'essentiel est de remarquer que cette manipulation fait apparaître un terme constant que l'on va pouvoir faire disparaître grâce à un changement de type ( $X' = X + \gamma$ ) car  $(a + b) \neq 0$ . On sait ainsi qu'il existe un point  $O'$  tel que dans le repère  $(O', e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique  $Q$  a pour équation :

$$-\frac{1}{2}Y'^2 + \frac{3}{2}Z'^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)X' = 0.$$

La quadrique est alors un paraboloïde hyperbolique.

Si  $a = -b$ , alors l'équation obtenue dans  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , se simplifie en

$$-\frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}aY - \frac{\sqrt{6}}{6}aZ = 0.$$

En effectuant une mise sous forme canonique on obtient :

$$\frac{3}{2} \left( Z - \frac{1}{6}a\sqrt{6} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( Y + \frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation de la réunion de deux plans sécants.

## 8.2.2 Coniques



### Exercice 8.12

#### CCP PSI 2006

Reconnaître suivant  $\theta$ , la nature de  $\mathcal{C}_\theta$  :

$$x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta.$$

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & 1 + \cos^2 \theta \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\lambda^2 - 2\lambda + \sin^2 \theta = (\lambda - 1 - \cos \theta)(\lambda - 1 + \cos \theta)$ .

Commençons par traiter le cas  $\theta \neq 0(\pi)$ .

Dans ce cas la conique  $\mathcal{C}_\theta$  est à centre. Comme la partie linéaire en  $x$  et  $y$  dans l'équation de  $\mathcal{E}$  est nulle, le centre est  $(0, 0)$ .

Pour  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$  les deux valeurs propres de  $A$  sont confondues, mais dans tous les

cas  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs propres de  $A$  permettent de construire une base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que dans le repère  $(O, e_1, e_2)$ , la conique  $\mathcal{E}$  a pour équation  $(1 + \cos \theta)X^2 + (1 - \cos \theta)Y^2 - \sin^2 \theta = 0$ . On en déduit que pour  $\theta \not\equiv 0(\pi)$ , la conique  $\mathcal{C}_\theta$  est une ellipse propre, un cercle lorsque  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$ .

Traisons maintenant le cas  $\theta \equiv 0(\pi)$ .

L'équation de  $C_\theta$  devient  $y^2 = 0$ . La conique  $C_\theta$  est dégénérée : c'est la droite d'équation  $y = 0$ .

### Exercice 8.13

#### Mines-Ponts MP 2004

Soit  $C_\lambda$  la courbe d'équation  $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ .

- 1) Déterminer les points communs à toutes les courbes  $C_\lambda$ .
  - 2) Nature de  $C_\lambda$  suivant  $\lambda$ .
  - 3) Ensemble des centres des  $C_\lambda$ .
- 1) Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  tel que pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ , le point  $M$  appartient à  $C_\lambda$ . En particulier  $M$  appartient à  $C_1$  et  $C_0$ . Ses coordonnées vérifient donc le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que  $xy = 0$ . Si  $x = 0$  alors l'appartenance de  $M$  à  $C_0$  montre que  $y = 0$  ou  $y = -2$ , si  $y = 0$  on a  $x = 0$  ou  $x = -2$ . On a donc ainsi montré que  $C_1 \cap C_0 = \{(0, 0), (0, -2), (-2, 0)\}$ , et on vérifie sans difficulté que les points ainsi obtenus appartiennent à  $C_\lambda$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ .

- 2) Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $X^2 - 2X + 1 - \lambda^2 = (X - 1 - \lambda)(X - 1 + \lambda)$ .  
Commençons par traiter le cas  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

La conique  $C_\lambda$  est à centre. Les coordonnées  $(x_0, y_0)$  de son centre  $\Omega$  vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} 2x_0 + 2\lambda y_0 + 2 = 0 \\ 2\lambda x_0 + 2y_0 + 2 = 0 \end{cases}.$$

On obtient  $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{\lambda+1}, -\frac{1}{\lambda+1}\right)$ .

Dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ , la conique  $C_\lambda$  a pour équation  $Y^2 + 2\lambda XY + X^2 - \frac{2}{\lambda+1} = 0$ .

Les vecteurs propres de  $A$  permettent de construire une base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que dans le repère  $(\Omega, e_1, e_2)$ , la conique  $C_\lambda$  a pour équation

$$(1-\lambda)X'^2 + (1+\lambda)Y'^2 - \frac{2}{1+\lambda} = 0.$$

•  $\lambda \in ]-1, 1[$

La conique  $C_\lambda$  est une ellipse propre car  $\frac{2}{1+\lambda} > 0$ .

- $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ .

La conique  $C_\lambda$  est une hyperbole car  $\frac{2}{1+\lambda} \neq 0$ .

- $\lambda = -1$

La conique  $C_\lambda$  a pour équation  $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ .

La matrice  $A$  a pour spectre  $\{2, 0\}$ . Les vecteurs  $e_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  et

$e_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  forment une base orthonormale de  $\mathbb{R}^2$  constituée de vec-

teurs propres de  $A$ . Dans le repère  $(O, e_1, e_2)$  l'équation de  $C_\lambda$  est  $\sqrt{2}X^2 + Y = 0$ .

Pour  $\lambda = -1$ , la conique  $C_\lambda$  est une parabole.

- $\lambda = 1$

La conique  $C_\lambda$  a pour équation  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ . On peut appliquer à nouveau les changements de base usuels, mais on peut aussi constater que  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = (x+y)(x+y+2)$ . La conique  $C_\lambda$  est alors la réunion de deux droites parallèles.

- 3) L'ensemble des centres des  $C_\lambda$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(-\frac{1}{\lambda+1}, -\frac{1}{\lambda+1})$  pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Cet ensemble est la droite d'équation  $x = y$  privée du point de coordonnées  $(0, 0)$ .

### Exercice 8.14



#### Mines-Ponts MP 2006

Reconnaître et tracer la courbe  $\mathcal{E}$  d'équation  $13x^2 - 32xy + 37y^2 = 5$ .

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $\lambda^2 - 50\lambda + 225 = (\lambda - 5)(\lambda - 45)$ . On en déduit que  $\mathcal{E}$  est une conique à centre du genre ellipse.

Comme il n'y a pas de terme du premier degré en  $x$  et en  $y$  dans l'équation de  $\mathcal{E}$ , on constate, en menant les calculs habituels, que son centre est  $(0, 0)$ .

Les vecteurs propres de  $A$  permettent de construire une base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que dans le repère  $(O, e_1, e_2)$ , la conique  $\mathcal{E}$  a pour équation  $5X^2 + 45Y^2 - 5 = 0$ . On constate alors que  $\mathcal{E}$  est une ellipse propre (c'est-à-dire qu'elle est non vide et non réduite à un point).

Pour tracer  $\mathcal{E}$  on peut expliciter les vecteurs propres de  $A$ . Ils donnent les directions des axes de l'ellipse. On obtient  $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$ , associé à la valeur propre 5 et

$(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$  associé à la valeur propre 45.



## 8.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## Exercice 8.15

## CCP PSI 2006

Soit  $(S)$  la surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Montrer qu'aucune droite parallèle au plan  $(xOy)$  n'est contenue dans  $(S)$ . Soit  $D$  la droite définie par  $x = az + b$  et  $y = cz + d$ . Montrer que  $D$  est incluse dans  $(S)$  si et seulement si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est orthogonale.}$$

Remarquons que  $(S)$  est un hyperboloïde à une nappe.

Tout droite parallèle au plan  $(xOy)$  est contenue dans un plan  $P_\alpha$  d'équation  $z = \alpha$ . Soit  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ . Le point  $M$  appartient à  $(S) \cap P_\alpha$  si et seulement si  $x^2 + y^2 = 1 + \alpha^2$  et  $z = \alpha$ , ceci montre que  $(S) \cap P_\alpha$  est borné, il ne contient donc pas de droite.

La droite  $D$  d'équations cartésiennes  $x = az + b$  et  $y = cz + d$  est incluse dans  $(S)$  si et seulement si pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}$  on a  $(az + b)^2 + (cz + d)^2 - z^2 = 1$  ce qui équivaut à : pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}$ , on  $(a^2 + c^2 - 1)z^2 + 2(ab + cd)z + b^2 + d^2 - 1 = 0$ . Finalement la droite  $D$  est incluse dans  $(S)$  si et seulement si  $a^2 + c^2 = 1$ ,  $ab + cd = 0$  et  $b^2 + d^2 = 1$ , ce qui signifie exactement que la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est orthogonale.

## Exercice 8.16

## Centrale MP 2005 et 2006

Soient  $m$  et  $a$  deux réels non nuls. On considère les droites

$$(D_1) \begin{cases} y = mx \\ z = a \end{cases} \text{ et } (D_2) \begin{cases} y = -mx \\ z = -a. \end{cases}$$

Trouver l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ .

Trouver les droites incluses dans  $(S)$ .

Rappelons que si  $M_0$  est un point de  $D_1$  et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $D_1$ , alors la distance d'un point  $M$  à la droite  $D_1$  est donnée par la formule :

$$d(M, D_1) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Les vecteurs  $\vec{n}_1 = -m\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{n}_2 = \vec{k}$  sont des vecteurs normaux aux plans qui définissent  $D_1$ , le vecteur  $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{i} + m\vec{j}$  est alors un vecteur directeur de  $D_1$ .

En choisissant  $M_0$  de coordonnées  $(0, 0, a)$ , on obtient

$$d(M, D_1)^2 = \frac{1}{1 + m^2} ((mx - y)^2 + (1 + m^2)(z - a)^2).$$

On en déduit, en changeant  $a$  en  $-a$  et  $m$  en  $-m$ , que

$$d(M, D_2)^2 = \frac{1}{1+m^2} ((mx+y)^2 + (1+m^2)(z+a)^2).$$

Le point  $M(x, y, z)$  appartient à  $(S)$  si et seulement si  $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ , ou encore  $d(M, D_1)^2 = d(M, D_2)^2$ . Cette relation se traduit par l'équation  $(mx-y)^2 + (1+m^2)(z-a)^2 = (mx+y)^2 + (1+m^2)(z+a)^2$ , et finalement par  $mxy + a(1+m^2)z = 0$ .

On constate alors que  $(S)$  est une quadrique  $Q$  dont nous allons déterminer la nature.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice de cette quadrique. Son spectre est  $\left\{-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, 0\right\}$ .

Comme la matrice de  $Q$  n'est pas de rang 3, on explicite une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient par exemple :

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Dans le repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , la quadrique a pour équation :

$$-\frac{m}{2}X^2 + \frac{m}{2}Y^2 + a(1+m^2)Z = 0.$$

Comme  $m$  et  $a$  sont non nuls, cette équation est celle d'un paraboloides hyperbolique.

Cherchons les droites incluses dans  $(S)$ . Soit  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $(S)$  et soit  $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$  un vecteur directeur d'une droite  $D$  contenant  $M_0$ . La droite  $D$  admet pour représentation paramétrique  $(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t)$  et elle est incluse dans  $(S)$  si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, m(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + a(1+m^2)(z_0 + \gamma t) = 0,$$

ou encore, puisque les coordonnées de  $M_0$  vérifient l'équation de  $(S)$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (m(\alpha y_0 + \beta x_0) + a(1+m^2)\gamma)t + m(\alpha\beta)t^2 = 0.$$

Cette dernière expression est nulle pour tout  $t$  réel si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha\beta = 0 \\ \gamma = \frac{-m}{a(1+m^2)}(\alpha y_0 + \beta x_0) \end{cases}.$$

On obtient  $(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda(0, 1, \frac{-m}{a(1+m^2)}x_0)$  ou  $(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda(1, 0, \frac{-m}{a(1+m^2)}y_0)$

( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Ceci montre que chaque point de  $(S)$  appartient à exactement deux droites qui sont incluses dans  $(S)$ .

### Exercice 8.17

#### Centrale MP 2005

Dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$ , trouver le lieu des points équidistants d'une droite  $D$  et d'un plan  $P$ .

Il y a deux situations à distinguer :

- la droite  $D$  et le plan  $P$  sont sécants
- la droite  $D$  est parallèle au plan  $P$  ou incluse dans le plan  $P$ .

Pour traiter cet exercice, le choix d'un repère bien adapté à chacune de ces situations est essentiel.

- La droite  $D$  et le plan  $P$  sont sécants.

On peut par exemple choisir un repère orthonormal de l'espace  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $P$  a pour équation cartésienne dans ce repère  $z = 0$  et il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^*$  tel que  $D$  a pour système d'équations cartésiennes  $y = \alpha z, x = 0$ . Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(0, \alpha, 1)$  est un vecteur directeur de  $D$  et le point  $O$  appartient à cette droite. Soit alors  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ .

$$\text{On a } d(M, P) = |z| \text{ et } d(M, D) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{(y - \alpha z)^2 + (1 + \alpha^2)x^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

On en déduit que les points équidistants de  $D$  et de  $P$  sont les points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient la relation  $z^2(1 + \alpha^2) = (y - \alpha z)^2 + (1 + \alpha^2)x^2$  ou encore  $(1 + \alpha^2)x^2 + y^2 - z^2 - 2\alpha yz = 0$ .

On obtient donc une quadrique de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{pmatrix}$ . Cette qua-

drique est de rang 3. Comme sa partie linéaire est nulle son centre est  $O$ . On peut se lancer dans le calcul du spectre de  $A$ , mais on peut aussi constater que la quadrique contient son centre et montrer que ce n'est pas un singleton en faisant référence à la définition géométrique de cette quadrique. (Il y a d'autres points de l'espace que l'origine qui sont équidistants de  $P$  et  $D$ ). Le lieu des points à déterminer est un cône.

- La droite  $D$  est parallèle au plan  $P$  ou incluse dans le plan  $P$ .

On peut alors, par exemple, choisir un repère orthonormal de l'espace  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel qu'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  de sorte que  $P$  a pour équation cartésienne  $z = -\alpha$  et  $D$  admet pour système d'équations cartésiennes  $z = \alpha, y = 0$ . Soit alors  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ . On a  $d(M, P) = |z + \alpha|$  et  $d(M, D) = \sqrt{y^2 + (z - \alpha)^2}$ . On en déduit cette fois que les points équidistants de  $D$  et de  $P$  sont les points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient la relation  $(z + \alpha)^2 = y^2 + (z - \alpha)^2$  ou encore  $y^2 - 4\alpha z = 0$ .

On a alors les deux cas suivants :

- si  $\alpha = 0$ , ce qui correspond à la situation où  $D$  est inclus dans  $P$ , alors l'ensemble recherché est le plan d'équation  $y = 0$  ;
- si  $\alpha \neq 0$  alors l'ensemble recherché est un cylindre parabolique.

### Remarque

Le dernier résultat n'est pas très surprenant. L'intersection d'un plan  $H$  orthogonal à  $D$  avec le lieu cherché, est l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un plan, ce qui donne une parabole dans  $H$ . De plus, on constate que le lieu est invariant par les translations de vecteur colinéaire à un vecteur directeur de  $D$ .

# Étude affine et métrique des courbes

9

Dans ce chapitre on complète l'étude des courbes paramétrées et polaires faite en première année. Nous ne mentionnerons dans les rappels de cours que les notions ne figurant pas dans notre livre « Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MPSI-PCSI-PTSI ».

Précisons pour commencer les notations qui seront utilisées dans ce chapitre.

On se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Une application  $f : t \mapsto f(t)$  de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  définit un **arc paramétré orienté de classe  $\mathcal{C}^k$** . Nous noterons  $\mathcal{C} = f(I)$  la courbe géométrique image de  $I$  par  $f$ . L'orientation correspond au sens de parcours de la courbe quand  $t$  décrit  $I$ . La variable  $t$  est appelé **paramètre** de l'arc de courbe.

Lorsque  $f(t) = (x(t), y(t))$ , nous noterons également  $M(t)$  le point de la courbe de paramètre  $t$ .

Pour tout nombre réel  $\theta$ , la base orthonormée directe  $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$  est telle que l'angle  $(\vec{i}, \vec{u}(\theta))$  soit de mesure  $\theta$ .

## 9.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

### 9.1.1 Étude locale

#### Ce qu'il faut savoir

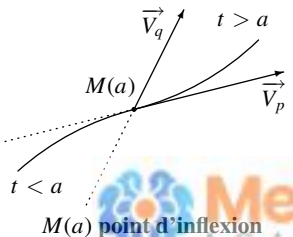
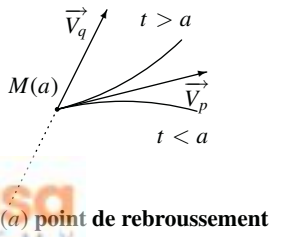
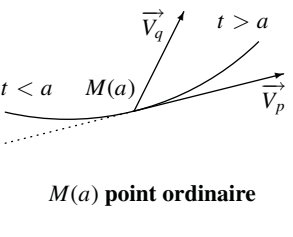
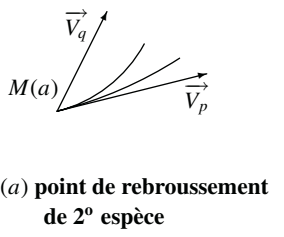
On étudie le comportement de la courbe lorsque  $t$  est au voisinage de  $a \in I$ . On suppose que la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable au voisinage de  $a$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\vec{V}_k = x^{(k)}(a)\vec{i} + y^{(k)}(a)\vec{j}$ , et l'on suppose qu'il existe deux entiers  $p, q$  tels que

- le nombre  $p$  soit le plus petit entier au moins égal à 1, tel que  $\vec{V}_p \neq \vec{0}$ ,
- le nombre  $q$  soit le plus petit entier, au moins égal à  $p + 1$  tel que les vecteurs  $\vec{V}_p$  et  $\vec{V}_q$  ne soient pas colinéaires.

On a ainsi une base  $(\vec{V}_p, \vec{V}_q)$  du plan. Alors au voisinage de  $a$ , le comportement du vecteur  $\overrightarrow{M(a)M(t)}$  est le même que celui du vecteur  $\frac{(t-a)^p}{p!}\vec{V}_p + \frac{(t-a)^q}{q!}\vec{V}_q$ .

En particulier :

- La courbe est tangente en  $M(a)$  au vecteur  $\vec{V}_p$ .
- La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le vecteur  $(t-a)^q \vec{V}_q$  : si l'on place l'origine de ce vecteur en  $M(a)$ , il se trouve situé, pour des valeurs de  $t$  proches de  $a$ , du même côté de la tangente que le point  $M(t)$ .
- Pour des valeurs de  $t$  supérieures à  $a$  et proches de  $a$ , la courbe se trouve à l'intérieur du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{V}_p$  et  $\vec{V}_q$  placés en  $M(a)$ .
- Pour des valeurs de  $t$  inférieures à  $a$ , la position de la courbe par rapport à sa tangente dépend des signes de  $(t-a)^p$  et  $(t-a)^q$ , et donc de la parité des nombres  $p$  et  $q$ . Il en résulte quatre cas possibles, pour la position de  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $M(a)$ .

| $\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}$ | impair                                                                                                                       | pair                                                                                                                                             |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| impair                               |  <p><math>M(a)</math> point d'inflexion</p> |  <p><math>M(a)</math> point de rebroussement de 1° espèce</p>  |
| pair                                 |  <p><math>M(a)</math> point ordinaire</p>  |  <p><math>M(a)</math> point de rebroussement de 2° espèce</p> |

En pratique, sauf dans le cas où les fonctions  $x$  et  $y$  sont très simples (des fonctions polynômes par exemple), on préférera utiliser les développements limités. En effet, si les fonctions  $x$  et  $y$  sont indéfiniment dérivables au voisinage de  $a$ , elles possèdent alors des développements limités en  $a$  de la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1(t-a) + \dots + a_n(t-a)^n + o((t-a)^n) \\ y(t) &= b_0 + b_1(t-a) + \dots + b_n(t-a)^n + o((t-a)^n) . \end{aligned}$$

Pour  $k \geq 1$ , posons  $\vec{U}_k = a_k \vec{i} + b_k \vec{j}$ . On a alors, d'après la formule de Taylor,  $\vec{U}_k = \frac{1}{k!} \vec{V}_k$ . On peut donc, dans l'étude précédente, remplacer les vecteurs  $\vec{V}_k$  par les vecteurs  $\vec{U}_k$ .

**Points singuliers**

L'étude précédente est souvent utile lorsque le point  $M(a)$  est singulier, c'est-à-dire lorsque  $\vec{V}_1 = \vec{0}$ , cependant on peut obtenir le coefficient directeur de la tangente à la courbe en  $M(a)$  comme limite en  $a$  du rapport  $\frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)}$  et aussi, comme limite en  $a$  du rapport  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

**Remarque**

En coordonnées polaires, si  $f(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ , alors on a  $\|\vec{V}_1\|^2 = x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$  et il ne peut y avoir de point singulier en dehors de l'origine.

**Points d'inflexion**

Une condition **suffisante** pour que la courbe admette un point d'inflexion au point  $M(a)$  est que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) les vecteurs  $\overrightarrow{OM'}(a)$  et  $\overrightarrow{OM''}(a)$  sont colinéaires,
- (ii) les vecteurs  $\overrightarrow{OM'}(a)$  et  $\overrightarrow{OM'''}(a)$  sont linéairement indépendants.

La condition (i) est nécessaire mais pas suffisante (voir exercice 9.1).

Les conditions (i) et (ii) sont suffisantes mais pas nécessaires (voir exercice 9.2).

**Exercice 9.1**

Étudier au voisinage de 0, l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \left( \frac{\sin^3 t}{1+t}, (1+t)(\operatorname{sh} t - \sin t) \right)$ .

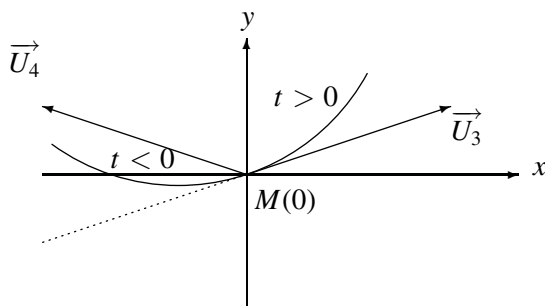
En effectuant un développement limité en zéro :

$$\begin{aligned} x(t) &= (t^3 + o(t^4))(1 - t + o(t)) = t^3(1 + o(t))(1 - t + o(t)) \\ &= t^3(1 - t + o(t)) = t^3 - t^4 + o(t^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (1+t) \left( \left( t + \frac{t^3}{6} \right) - \left( t - \frac{t^3}{6} \right) + o(t^4) \right) = (1+t) \left( \frac{t^3}{3} + o(t^4) \right) \\ &= t^3(1+t) \left( \frac{1}{3} + o(t) \right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3} + o(t^4). \end{aligned}$$

Ceci s'écrit vectoriellement  $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(0) + t^3 \vec{U}_3 + t^4 \vec{U}_4 + o(t^4)$ , où  $\vec{U}_3 = \vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$  et  $\vec{U}_4 = -\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$ .

Les vecteurs  $\vec{U}_3$  et  $\vec{U}_4$  ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Il en résulte que le point  $M(0) = (0, 0)$  est un point ordinaire ( $p = 3$  est impair et  $q = 4$  est pair). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur  $\vec{U}_3$ .



### Exercice 9.2

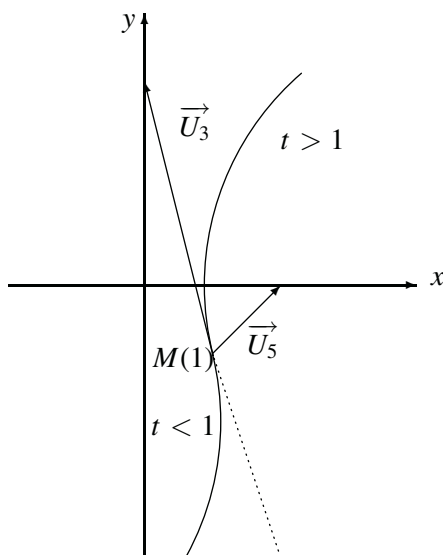
Étudier au voisinage de 1, l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = (1 + t(t - 2)(t - 1)^3, -1 + (t^2 - 2t + 5)(t - 1)^3)$ .

En posant  $u = t - 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} x(1+u) &= 1 + (u+1)(u-1)u^3 = 1 - u^3 + u^5 \\ y(1+u) &= -1 + (u^2+4)u^3 = -1 + 4u^3 + u^5 \end{aligned}$$

Ceci s'écrit vectoriellement  $\vec{OM}(1+u) = \vec{OM}(1) + u^3 \vec{U}_3 + u^5 \vec{U}_5$ , où  $\vec{U}_3 = -\vec{i} + 4\vec{j}$  et  $\vec{U}_5 = \vec{i} + \vec{j}$ .

Les vecteurs  $\vec{U}_3$  et  $\vec{U}_5$  ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Il en résulte que le point  $M(1) = (1, -1)$  est un point d'inflexion ( $p = 3$  et  $q = 5$  sont impairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur  $\vec{U}_3$ .



**Exercice 9.3**

Étudier au voisinage de 1, l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \left( t(3-2t)(t-1)^2, t-1+\frac{1}{t} \right)$ .

En posant  $u = t - 1$ , on a

$$x(1+u) = (1+u)(1-2u)u^2 = u^2 - u^3 - 2u^4,$$

$$y(1+u) = u + \frac{1}{1+u} = 1 + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

Donc

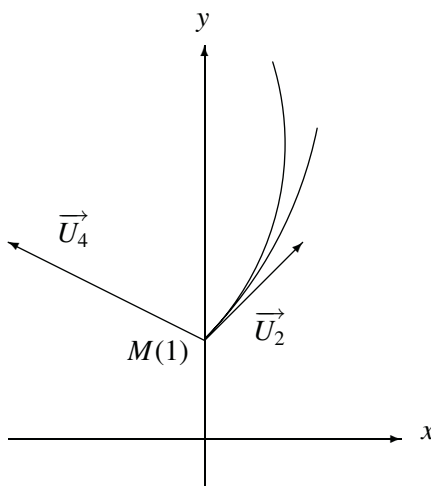
$$\overrightarrow{OM}(1+u) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2 \overrightarrow{U}_2 + u^3 \overrightarrow{U}_3 + u^4 \overrightarrow{U}_4 + o(u^4),$$

où  $\overrightarrow{U}_2 = -\overrightarrow{U}_3 = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\overrightarrow{U}_4 = -2\vec{i} + \vec{j}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{U}_2$  et  $\overrightarrow{U}_4$  ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Par contre  $\overrightarrow{U}_2$  et  $\overrightarrow{U}_3$  sont colinéaires. On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2(1-u) \overrightarrow{U}_2 + u^4 \overrightarrow{U}_4 + o(u^4).$$

Il en résulte que le point  $M(1) = (0, 1)$  est un point de rebroussement de deuxième espèce ( $p = 2$  et  $q = 4$  sont pairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur  $\overrightarrow{U}_2$ .

**Exercice 9.4****Centrale PC 2007**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée définie par  $x(t) = t^2 + t$  et  $y(t) = 2t + 1/t$  où  $t \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  admet trois points d'inflexion.



Pour  $t \neq 0$ , on obtient  $x'(t) = 2t + 1$ ,  $y'(t) = 2 - 1/t^2$ ,  $x''(t) = 2$ ,  $y''(t) = 2/t^3$ ,  $x'''(t) = 0$ ,  $y'''(t) = -6/t^4$ .

• On constate en particulier que  $\overrightarrow{OM'}(t)$  et  $\overrightarrow{OM'''}(t)$  ne sont jamais colinéaires.

• Etudions si  $\overrightarrow{OM'}(t)$  et  $\overrightarrow{OM''}(t)$  peuvent être colinéaires.

Cette condition sera satisfaite si et seulement si le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{OM'}(t)$  et  $\overrightarrow{OM''}(t)$  est nul, c'est-à-dire  $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 0$ . Mais,

$$x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 2 \left( \frac{2t+1}{t^3} - \left( 2 - \frac{1}{t^2} \right) \right) = 2 \frac{-2t^3 + 3t + 1}{t^3}.$$

Il en résulte que la courbe admet des points d'inflexion pour les valeurs de  $t$  solutions de l'équation  $2t^3 - 3t - 1 = 0$ . Une solution évidente est  $t = -1$ . On peut alors factoriser  $2t^3 - 3t - 1 = (t+1)(2t^2 - 2t - 1)$ , et on obtient deux autres solutions

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion : la courbe admet trois points d'inflexion.

### Exercice 9.5

#### Mines-Ponts PSI 2007

Déterminer les points de rebroussement de la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $x(t) = t \cos t - \sin t$ ,  $y(t) = 1 + \cos t$ .

• Une condition nécessaire pour avoir un point de rebroussement au point de paramètre  $t$  est que  $\overrightarrow{OM'}(t) = \vec{0}$  c'est-à-dire  $x'(t) = y'(t) = 0$ . Puisque  $x'(t) = -t \sin t$  et  $y'(t) = -\sin t$ , la condition est satisfaite pour  $t = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

• Cherchons le premier vecteur dérivé non nul en  $k\pi$ . On a  $x''(t) = -t \cos t - \sin t$  et  $y''(t) = -\cos t$ , donc  $x''(k\pi) = k\pi(-1)^{k+1}$  et  $y''(k\pi) = (-1)^{k+1}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$  n'est donc pas nul.

• Cherchons enfin le premier vecteur dérivé non colinéaire avec  $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$ . On a  $x'''(t) = t \sin t - 2 \cos t$  et  $y'''(t) = \sin t$ , donc  $x'''(k\pi) = 2(-1)^{k+1}$  et  $y'''(k\pi) = 0$ .

On constate que les vecteurs  $\overrightarrow{OM''}(k\pi)$  et  $\overrightarrow{OM'''}(k\pi)$  ne sont pas colinéaires. On est donc dans le cas d'un point de rebroussement de première espèce.

Conclusion : Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le point  $M(k\pi)$  de coordonnées  $(k\pi(-1)^k, 1 + (-1)^k)$  est un point de rebroussement de première espèce de la courbe  $\mathcal{C}$ .

## 9.1.2 Équation de la tangente et de la normale en un point

### Ce qu'il faut savoir

- La **tangente** à la courbe en un point  $M(t)$  admet pour vecteur directeur le vecteur  $\overrightarrow{OM^{(p)}}(t) = x^{(p)}(t)\vec{i} + y^{(p)}(t)\vec{j}$ , premier vecteur dérivé non nul, (lorsque  $M(t)$  est régulier, c'est le vecteur  $\overrightarrow{OM'}(t)$ ).

Rechercher une équation de la tangente est donc le problème de géométrie affine élémentaire consistant à trouver une équation d'une droite dont on connaît un vecteur directeur et un point : soit  $P$  le point de la droite de coordonnées  $(X, Y)$ . On obtient une équation de la tangente en écrivant que le déterminant dans la base

$(\vec{i}, \vec{j})$  des vecteurs  $\overrightarrow{OM^{(p)}(t)}$  et  $\overrightarrow{M(t)P}$  est nul, ce qui donne pour équation

$$(Y - y(t))x^{(p)}(t) - (X - x(t))y^{(p)}(t) = 0.$$

Pour une courbe donnée par une équation polaire, on peut,

- ou bien revenir au paramétrage  $x = \rho(\theta) \cos \theta$ ,  $y = \rho(\theta) \sin \theta$  et appliquer ce qui précède (voir l'exercice 9.8),

- ou bien écrire une équation de la tangente dans le repère mobile  $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$  et faire ensuite un changement de repère pour se ramener dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (voir l'exercice 9.7).

• La **normale** à la courbe en un point  $M(t)$ , est la droite passant par  $M(t)$  et orthogonale à la tangente. Soit  $Q$  le point de la droite de coordonnées  $(X, Y)$ . On obtient une équation de la normale en écrivant que le produit scalaire des vecteurs

$\overrightarrow{OM^{(p)}(t)}$  et  $\overrightarrow{M(t)Q}$  est nul, ce qui donne pour équation

$$(X - x(t))x^{(p)}(t) + (Y - y(t))y^{(p)}(t) = 0.$$

On peut également chercher un vecteur non nul  $\vec{W}(t)$  orthogonal à  $\overrightarrow{OM^{(p)}(t)}$ , et écrire que  $\vec{W}(t)$  et  $\overrightarrow{M(t)Q}$  sont colinéaires.



#### Remarque

On peut bien sûr, dans les calculs précédents, remplacer  $\overrightarrow{OM^{(p)}(t)}$  par un vecteur non nul qui lui est colinéaire.

### Exercice 9.6

#### CCP PSI 2005 proche de Mines-Ponts MP 2007

Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée par  $x(t) = 3t^2$ ,  $y(t) = 2t^3$ .

- 1) Pour tout  $t$  réel, donner une équation cartésienne de la tangente à  $\Gamma$  au point  $M(t)$
- 2) Pour tout  $u$  réel, donner une équation cartésienne de la normale à  $\Gamma$  au point  $M(u)$
- 3) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à  $\Gamma$ .

1) On a tout d'abord  $\overrightarrow{OM'}(t) = 6t \vec{i} + 6t^2 \vec{j}$ , et on constate que, pour  $t \neq 0$ , tous les points de la courbe sont réguliers. Dans ce cas, la tangente à la courbe au point  $M(t)$  admet pour vecteur directeur  $\overrightarrow{OM'}(t) = 6t \vec{i} + 6t^2 \vec{j}$ , où encore, en divisant par  $6t$ , le vecteur  $\vec{V}(t) = \vec{i} + t \vec{j}$ .

Lorsque  $t = 0$ , le point de la courbe est singulier. Le rapport  $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{2t}{3}$  tend vers 0, lorsque  $t$  tend vers 0. Il en résulte que la courbe est tangente à l'axe  $Ox$  en  $M(0) = O$ . (Comme de plus la courbe est symétrique par rapport à  $Ox$  puisque la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, le point singulier est un point de rebroussement de première espèce).

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\vec{V}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$  est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en  $M(t)$ .

Soit  $P$  le point de la tangente de coordonnées  $(X, Y)$ . Pour chercher une équation de la tangente, on écrit que le déterminant, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , des vecteurs  $\vec{V}(t)$  et  $\overrightarrow{M(t)P}$  est nul. Mais  $\begin{vmatrix} 1 & X - 3t^2 \\ t & Y - 2t^3 \end{vmatrix} = Y - tX + t^3$ .

On obtient donc comme équation de la tangente :  $tX - Y - t^3 = 0$ .

2) Soit  $Q$  le point de la normale de coordonnées  $(X, Y)$ . On écrit cette fois que les vecteurs  $\vec{V}(u)$  et  $\overrightarrow{M(u)Q}$  sont orthogonaux. En calculant leur produit scalaire, on obtient  $\vec{V}(u) \cdot \overrightarrow{M(u)Q} = X + uY - 3u^2 - 2u^4$ .

On en déduit alors comme équation de la normale :  $X + uY - 3u^2 - 2u^4 = 0$ .

3) Dire qu'une droite est à la fois tangente et normale à  $\Gamma$  signifie qu'il existe deux points  $M(t)$  et  $M(u)$  tels que la tangente à  $\Gamma$  en  $M(t)$  soit la normale à  $\Gamma$  en  $M(u)$ . Cela veut dire que les deux équations  $tX - Y - t^3 = 0$  et  $X + uY - 3u^2 - 2u^4 = 0$  sont deux équations de la même droite. Cela se traduit par la nullité des deux déterminants  $\begin{vmatrix} 1 & u \\ t & -1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 3u^2 + 2u^4 \\ t & t^3 \end{vmatrix}$ , ce qui

donne le système  $(S) \begin{cases} ut + 1 = 0 \\ t(t^2 - 3u^2 - 2u^4) = 0 \end{cases}$ . D'après la première équation les nombres  $u$  et  $t$  ne peuvent être nuls. En multipliant la deuxième équation par  $-u^2/t$ , et puisque  $u^2t^2 = 1$ , on obtient  $2u^6 + 3u^4 - 1 = 0$ . Pour résoudre cette équation, posons  $U = u^2$ . On obtient  $2U^3 + 3U^2 - 1 = 0$ . Le polynôme  $H(U) = 2U^3 + 3U^2 - 1$  a une racine évidente  $-1$ , ce qui permet de le factoriser. On trouve  $2U^3 + 3U^2 - 1 = (U + 1)(2U^2 + U - 1) = (U + 1)^2(2U - 1)$ . La seule racine positive de  $H$  est donc  $1/2$ , ce qui donne pour  $u$  les deux valeurs opposées  $\pm 1/\sqrt{2}$ . Puisque  $t = -1/u$ , on obtient alors les deux couples  $(t, u) = (\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  et  $(t, u) = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Il est facile de voir qu'ils vérifient bien le système  $(S)$ . On obtient les deux droites d'équation :  $\sqrt{2}X - Y = 2\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}X + Y = 2\sqrt{2}$ .

### Exercice 9.7

#### Centrale PC 2006

Soit la courbe  $\Gamma$  d'équation polaire  $\rho = \cos 2\theta$ . Déterminer une équation cartésienne de sa tangente au point de paramètre  $\theta$ .

Remarquons tout d'abord que  $\|\overrightarrow{OM'}(\theta)\|^2 = \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = \cos^2 2\theta + 4 \sin^2 2\theta$  n'est jamais nul. La courbe n'a donc pas de point singulier.

L'énoncé de l'exercice ne précisant pas dans quel repère on cherche l'équation de la tangente, on va la donner, tout d'abord dans le repère mobile  $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ , puis dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Rappelons que  $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et  $\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ .

• Dans le repère  $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ , on a  $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$ , donc en dérivant on obtient  $\overrightarrow{OM'}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta)$ . Soit  $P$  un point de la tangente à la courbe en  $M(\theta)$  de coordonnées  $(X_\theta, Y_\theta)$  dans  $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{OM'}(\theta)$  et  $\overrightarrow{M(\theta)P}$  sont colinéaires, et donc  $\begin{vmatrix} \rho'(\theta) & X_\theta - \rho(\theta) \\ \rho(\theta) & Y_\theta \end{vmatrix} = 0$ , ce qui donne l'équation

$Y_\theta \rho'(\theta) - X_\theta \rho(\theta) + \rho(\theta)^2 = 0$ , et puisque  $\rho(\theta) = \cos 2\theta$  et  $\rho'(\theta) = -2 \sin 2\theta$ , on obtient comme équation (1)  $2Y_\theta \sin 2\theta + X_\theta \cos 2\theta = \cos^2 2\theta$ .

• Le point  $P$  de la tangente a pour coordonnées  $(X, Y)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On a donc  $X \vec{i} + Y \vec{j} = X_\theta \vec{u}(\theta) + Y_\theta \vec{v}(\theta) = X_\theta(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + Y_\theta(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$ .

On en déduit  $X = X_\theta \cos \theta - Y_\theta \sin \theta$  et  $Y = X_\theta \sin \theta + Y_\theta \cos \theta$ , d'où l'on tire  $X_\theta = X \cos \theta + Y \sin \theta$  et  $Y_\theta = -X \sin \theta + Y \cos \theta$ . En remplaçant  $X_\theta$  et  $Y_\theta$  par leur valeur dans l'équation (1), on obtient

(2)  $Y(2 \cos \theta \sin 2\theta + \sin \theta \cos 2\theta) + X(\cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin \theta \sin 2\theta) = \cos^2 2\theta$ .

Bien sûr, on aurait pu obtenir directement cette équation, en partant du paramétrage  $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$ ,  $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$  de la courbe  $\Gamma$ .

### Exercice 9.8

#### Podaire d'une spirale logarithmique par rapport à 0, d'après CCP PC 2007

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  et soit  $\Gamma$  la courbe d'équation polaire  $\rho = e^{k\theta}$ .

- 1) Déterminer un vecteur directeur de la tangente  $\mathcal{T}_\theta$  à la courbe en un point  $M(\theta)$  et en donner une équation cartésienne.
- 2) Déterminer un vecteur normal à la courbe en un point  $M(\theta)$ , puis trouver une équation cartésienne de la normale  $\mathcal{N}_\theta$ .
- 3) *Question de la rédaction* : Déterminer la projection  $P(\theta)$  de l'origine  $O$  sur  $\mathcal{T}_\theta$ . Le point  $P(\theta)$  décrit une courbe  $\gamma$ . Par quelle transformation géométrique simple obtient-on  $\gamma$  à partir de  $\Gamma$  ?

1) Remarquons tout d'abord que  $\rho$  ne s'annule pas. La courbe  $\Gamma$  n'a donc pas de point singulier.

La courbe admet comme paramétrage  $x(\theta) = e^{k\theta} \cos \theta$ ,  $y(\theta) = e^{k\theta} \sin \theta$ . On a donc  $x'(\theta) = e^{k\theta}(k \cos \theta - \sin \theta)$  et  $y'(\theta) = e^{k\theta}(k \sin \theta + \cos \theta)$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{OM'}(\theta)$  est un vecteur directeur de la tangente  $\mathcal{T}_\theta$  à la courbe au point  $M(\theta)$ . En simplifiant par  $e^{k\theta}$  on peut donc prendre comme vecteur directeur  $\overrightarrow{V}(\theta) = (k \cos \theta - \sin \theta) \vec{i} + (k \sin \theta + \cos \theta) \vec{j}$ .

Soit  $Q$  le point de la tangente de coordonnées  $(X, Y)$ . On écrit que le déterminant, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , des vecteurs  $\overrightarrow{V}(\theta)$  et  $\overrightarrow{M(\theta)Q}$  est nul, ce qui donne  $\begin{vmatrix} k \cos \theta - \sin \theta & X - e^{k\theta} \cos \theta \\ k \sin \theta + \cos \theta & Y - e^{k\theta} \sin \theta \end{vmatrix} = 0$ . On obtient pour équation de  $\mathcal{T}_\theta$  :

$$Y(k \cos \theta - \sin \theta) - X(k \sin \theta + \cos \theta) + e^{k\theta} = 0.$$

2) Un vecteur orthogonal à  $\overrightarrow{V}(\theta)$  est  $\overrightarrow{W}(\theta) = -(k \sin \theta + \cos \theta) \vec{i} + (k \cos \theta - \sin \theta) \vec{j}$ . C'est donc un vecteur directeur de la normale à la courbe. Soit  $R$  le point de la normale de coordonnées  $(X, Y)$ . On écrit que le déterminant, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , des vecteurs  $\overrightarrow{W}(\theta)$  et  $\overrightarrow{M(\theta)R}$  est nul, ce qui donne  $\begin{vmatrix} -(k \sin \theta + \cos \theta) & X - e^{k\theta} \cos \theta \\ k \cos \theta - \sin \theta & Y - e^{k\theta} \sin \theta \end{vmatrix} = 0$ .

On obtient pour équation de  $\mathcal{N}_\theta$  :

$$X(k \cos \theta - \sin \theta) + Y(k \sin \theta + \cos \theta) - k e^{k\theta} = 0.$$

On aurait pu également écrire que le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{V}(\theta)$  et  $\overrightarrow{M(\theta)R}$  est nul.

3) La droite orthogonale à  $\mathcal{T}_\theta$  passant par  $O$  est donc la parallèle à  $\mathcal{N}_\theta$  passant par  $O$  et a pour équation  $X(k \cos \theta - \sin \theta) + Y(k \sin \theta + \cos \theta) = 0$ . Les coordonnées du point  $P(\theta)$  sont alors les solutions du système

$$\begin{cases} X(k \sin \theta + \cos \theta) - Y(k \cos \theta - \sin \theta) = e^{k\theta} \\ X(k \cos \theta - \sin \theta) + Y(k \sin \theta + \cos \theta) = 0 \end{cases}.$$

D'où l'on tire

$$X = \frac{1}{k^2 + 1} (k \sin \theta + \cos \theta) e^{k\theta} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{k^2 + 1} (\sin \theta - k \cos \theta) e^{k\theta}.$$

Soit  $\alpha$  un angle tel que  $\sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$  et  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$ . Alors

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) e^{k\theta} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \cos(\theta - \alpha) e^{k\theta} \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) e^{k\theta} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \sin(\theta - \alpha) e^{k\theta}. \end{aligned}$$

En posant  $u = \theta - \alpha$ , on obtient comme nouveau paramétrage de  $\gamma$

$$X = \frac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2 + 1}} e^{ku} \cos u \quad \text{et} \quad Y = \frac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2 + 1}} e^{ku} \sin u.$$

**Conclusion :** la courbe  $\gamma$  s'obtient à partir de  $\Gamma$  par une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{e^{k\alpha}}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

### 9.1.3 Changement de paramètre

#### Ce qu'il faut savoir

Rappelons que si  $u$  est une bijection de classe  $C^k$  de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J$  telle que  $u'$  ne s'annule pas, alors  $u^{-1}$  est une application de classe  $C^k$  de  $J$  sur  $I$ .

Si  $f$  est un paramétrage de classe  $C^k$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont la courbe image est  $\mathcal{C} = f(I)$ , alors  $g = f \circ u^{-1}$  est une application de classe  $C^k$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathcal{C} = g(J)$ . On dit que l'on a effectué un **changement de paramètre** ou un **reparamétrage** de la courbe  $\mathcal{C}$ .

On dit que l'arc  $g$  a **même orientation** que  $f$  lorsque  $u' > 0$ .

Un tel reparamétrage  $u$  qui conserve l'image  $\mathcal{C}$  et le caractère  $C^k$  de l'arc est dit **admissible** et les deux arcs  $f$  et  $g$  de classe  $C^k$  seront dit  $C^k$ -**équivalents**.

#### Exercice 9.9

Soit  $f$  l'application de  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$f(t) = \left( \frac{1}{\cos^2 t}, 1 - \tan t \right). \text{ Soit } g \text{ l'application de } J = ]-\infty, \infty[ \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

définie par  $g(t) = (1 + t^2, 1 - t)$ . Montrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , les arcs  $f$  et  $g$  sont  $C^k$ -équivalents. Déterminer  $f(I)$ .

- Pour tout  $t \in I$ , on a  $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ . En considérant l'application  $u$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $u(t) = \tan t$  on obtient, pour tout  $t \in I$ , la relation  $f(t) = g \circ u(t)$ . L'application  $u$  est une bijection indéfiniment dérivable de  $I$  sur  $J$  telle que  $u'(t) > 0$  et  $f(I) = g(J)$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , les arcs  $f$  et  $g$  sont donc  $C^k$ -équivalents et ont même orientation.

- Déterminons la courbe  $\mathcal{C} = f(I)$ .

En éliminant  $t$  dans la définition de  $g$ , on obtient facilement  $x(t) - 1 = t^2 = (1 - y(t))^2$  d'où  $x(t) = y(t)^2 - 2y(t) + 2$ . Il en résulte que  $\mathcal{C}$  est inclus dans la parabole d'équation  $x = y^2 - 2y + 2$ , et puisque  $y(t)$  prend toutes les valeurs réelles lorsque  $t$  décrit  $J$ , la parabole est décrite complètement.

Remarquons que si, pour  $t$  réel, on pose  $h(t) = (t^2 - 2t + 2, t)$ , on obtient alors un arc paramétré  $h$  qui n'a pas la même orientation que les deux précédents, car, en posant  $\psi(t) = 1 - t$ , on a  $h \circ \psi = g$ , avec  $\psi' < 0$ .

### 9.1.4 Aire d'un domaine limité par une courbe

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  par morceaux d'un intervalle  $I = [a, b]$  ( $a < b$ ) dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f(a) = f(b)$  (courbe fermée). Si la restriction de  $f$  à  $]a, b[$  est injective, alors l'aire géométrique  $\mathcal{A}$  du domaine limité par la courbe

est la valeur absolue d'une des intégrales suivantes

$$(1) \int_a^b y(t)x'(t) dt ; (2) \int_a^b y'(t)x(t) dt ; (3) \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

et, en coordonnées polaires, si  $f(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ , alors l'aire  $\mathcal{A}$  est l'intégrale (4)  $\frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(\theta) d\theta$ .

Quand  $t$  décrit  $[a, b]$ , une telle courbe est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double.

**Plus généralement**, si  $f(a) \neq f(b)$  et

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droites parallèles à  $Oy$  passant par  $M(a)$  et  $M(b)$ , et un morceau de l'axe  $Ox$  pour obtenir une courbe fermée  $\mathcal{C}$ , alors, si  $\mathcal{C}$  est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par  $\mathcal{C}$  est donnée par la formule (1),

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droite parallèles à  $Ox$  passant par  $M(a)$  et  $M(b)$ , et un morceau de l'axe  $Oy$  pour obtenir une courbe fermée  $\mathcal{C}$ , alors, si  $\mathcal{C}$  est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par  $\mathcal{C}$  est donnée par la formule (2),

– si l'on complète l'arc de courbe par deux segments de droite joignant  $M(a)$  et  $M(b)$  à l'origine pour obtenir une courbe fermée  $\mathcal{C}$ , alors, si  $\mathcal{C}$  est parcourue une fois et une seule et n'a pas de point double, l'aire limitée par  $\mathcal{C}$  est donnée par la formule (3), ou, en coordonnées polaires, par la formule (4).

### Remarque

Ces formules sont des applications de la formule de Green-Riemann. Elles se généralisent dans le cas où le domaine est non borné. Les intégrales sont alors généralisées et l'aire peut être infinie.

### Exercice 9.10

Trouver l'aire du domaine limité par la courbe paramétrée par  $x = t(t^2 - 1)$ ,  $y = t^2(t^2 - 1)$ , pour  $t \in [0, 1]$ .

La courbe est fermée, puisque  $f(0) = f(1) = (0, 0)$  et on peut montrer qu'elle n'a pas de point double.

En utilisant la formule (1) par exemple,  $y(t)x'(t) = t^2(t^2 - 1)(3t^2 - 1) = 3t^6 - 4t^4 + t^2$ ,

$$\text{d'où } \mathcal{A} = \left| \int_0^1 (3t^6 - 4t^4 + t^2) dt \right| = \frac{4}{105}.$$

**Exercice 9.11**

Trouver l'aire de la boucle du folium de Descartes paramétrée par

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \text{ pour } t \text{ variant de } 0 \text{ à } +\infty.$$

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  tendent vers 0, et, en utilisant la formule (3),

l'aire  $\mathcal{A}_T = \frac{1}{2} \left| \int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \right|$  du domaine limité par la courbe et la droite joignant  $O$  à  $M(T)$  a pour limite, lorsque  $T$  tend vers l'infini, l'aire de la boucle du folium de Descartes. On a  $x'(t) = 3 \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$  et  $y'(t) = 3t \frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$ , Donc

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}. \text{ Alors}$$

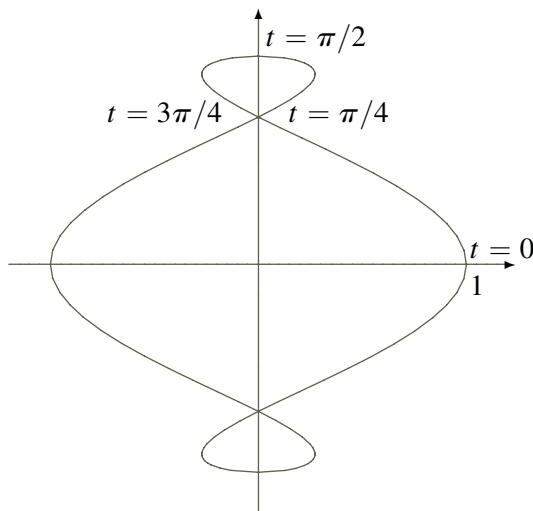
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \int_0^\infty \frac{9t^2 dt}{(1+t^3)^2} \right| = \left[ -\frac{3}{2(1+t^3)} \right]_0^\infty = \frac{3}{2}.$$

**Exercice 9.12**

Trouver l'aire du domaine limité par la courbe paramétrée par  $x(t) = \cos t \cos 2t$ ,  $y = \sin t$ .



On effectue une étude succincte de la courbe. Elle présente des symétries par rapport à  $O$ ,  $Ox$  et  $Oy$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de période  $2\pi$ . La courbe a deux points doubles sur  $Oy$ , le premier obtenu pour  $t = \pi/4$  et  $t = 3\pi/4$  et le second pour  $t = -\pi/4$  et  $t = -3\pi/4$ . La courbe est formée de trois boucles.





On va utiliser la formule (2). On linéarise facilement  $x(t)y'(t)$  :

$$x(t)y'(t) = \cos^2 t \cos 2t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \cos 2t = \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1 + \cos 4t}{4},$$

En raison des symétries, on a pour les boucles du haut et du bas

$$\mathcal{A}_1 = 2 \left| \int_{\pi/4}^{\pi/2} x(t)y'(t)dt \right| = \left| \left[ \frac{\sin 4t}{8} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{t}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

De même pour la boucle centrale

$$\mathcal{A}_2 = 4 \left| \int_0^{\pi/4} x(t)y'(t)dt \right| = \left| \left[ \frac{\sin 4t}{4} + \sin 2t + t \right]_0^{\pi/4} \right| = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

L'aire totale est donc  $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2$ .

Remarquons que cette aire n'est pas  $\left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt \right|$  qui vaut  $\pi/2$ .

### Exercice 9.13

Trouver l'aire limitée par la cardioïde définie en coordonnées polaires par  $\rho(t) = \cos \theta + 1$



En utilisant la formule (4), on a

$$\rho(\theta)^2 = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2},$$

et comme la courbe est obtenue une fois et une seule lorsque  $\theta$  décrit  $[-\pi, \pi]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[ \frac{3\theta}{2} + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} \right| = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 9.1.5 Repère de Frenet

#### Ce qu'il faut savoir

Soit  $f$  un arc paramétré de classe  $C^k$ .

- Soit  $k \geq 1$  et  $t \in I$ . Le point  $M(t)$  est **régulier** lorsque  $\overrightarrow{OM}'(t) \neq \vec{0}$ . L'arc est régulier lorsque tous ses points le sont.
- Soit  $k \geq 2$  et  $t \in I$ . Le point  $M(t)$  est **birégulier** lorsque, d'une part  $\overrightarrow{OM}'(t) \neq \vec{0}$  et d'autre part  $\overrightarrow{OM}'(t)$  et  $\overrightarrow{OM}''(t)$  ne sont pas colinéaires. L'arc est birégulier lorsque tous ses points le sont.

- En un point régulier, on appelle **vecteur tangent**, le vecteur  $\vec{T}(t) = \frac{\overrightarrow{OM'}(t)}{\|\overrightarrow{OM'}(t)\|}$ , et **vecteur normal** le vecteur  $\vec{N}(t)$  tel que la base  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$  soit orthonormale directe. Le repère  $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  est appelé **repère de Frenet** au point  $M(t)$ . Le vecteur  $\vec{T}(t)$  (ou le vecteur  $\overrightarrow{OM'}(t)$ ) définit une demi-droite, appelée la **demi-tangente** à la courbe en  $M(t)$ .
- Si  $f$  est un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  avec  $k \geq 2$ , alors il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $I$ , appelée **fonction angulaire**, telle que, pour tout  $t \in I$ , on ait  $\vec{T}(t) = \cos \alpha(t) \vec{i} + \sin \alpha(t) \vec{j}$ , et donc  $\vec{N}(t) = -\sin \alpha(t) \vec{i} + \cos \alpha(t) \vec{j}$ .

### Exercice 9.14

Soit la courbe paramétrée par  $x(t) = \sin t$  et  $y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos t}$ . L'origine  $O$  est un point double de cette courbe. Déterminer le repère de Frenet pour les valeurs de  $t$  telles que  $M(t) = O$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de période  $2\pi$  et l'origine est obtenue pour  $t = 0$  et  $t = \pi$  (modulo  $2\pi$ ).

On a  $x'(t) = \cos t$  et  $y'(t) = \frac{2 \cos t + 1}{(2 + \cos t)^2}$ .

- Pour  $t = 0$ , on obtient  $x'(0) = 1$  et  $y'(0) = 1/3$ , donc  $\|\overrightarrow{OM}(0)\| = \frac{\sqrt{10}}{3}$ . Alors

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{i} + \vec{j}) \text{ et } \vec{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\vec{i} + 3\vec{j}).$$

- Pour  $t = \pi$ , on obtient  $x'(\pi) = -1$  et  $y'(\pi) = -1$ , donc  $\|\overrightarrow{OM}(\pi)\| = \sqrt{2}$ . Alors
- $$\vec{T}(\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ et } \vec{N}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}).$$

### Exercice 9.15

Soit la courbe d'équation polaire  $\rho = \sin^2 \theta$ . Déterminer le repère de Frenet au point d'angle  $\theta = \pi/4$ .

On a  $x(\theta) = \cos \theta \sin^2 \theta$  et  $y(\theta) = \sin^3 \theta$ , donc  $x'(\theta) = -\sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$  et  $y'(\theta) = 3 \sin^2 \theta \cos \theta$ .

On obtient donc  $x(\pi/4) = y(\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $x'(\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  et  $y'(\pi/4) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ ,

donc  $\|\overrightarrow{OM}'(\pi/4)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Alors

$$\vec{T}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ et } \vec{N}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\vec{i} + \vec{j}).$$

### 9.1.6 Abscisse curviligne - Longueur d'un arc de courbe

#### Ce qu'il faut savoir

Dans ce paragraphe l'arc paramétré  $f$  prend ses valeurs dans un espace vectoriel euclidien  $F$  (en général  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ).

Soit  $f$  un arc paramétré orienté de classe  $\mathcal{C}^k$  défini sur  $I$ .

- Une abscisse curviligne est une fonction  $s$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  telle que, pour tout  $t \in I$ , on ait  $s'(t) = \|\overrightarrow{OM}'(t)\|$ . Si  $s(I) = J$ , alors,  $s$  est un paramétrage admissible de l'arc  $f$  qui définit la même orientation que celle de  $f$ .

Par abus de notation on notera  $s$  le paramètre de l'arc  $f \circ s^{-1}$ .

- Lorsque  $I = [a, b]$ , la longueur du chemin parcouru sur  $\mathcal{C}$  lorsque  $t$  décrit  $I$  est donnée par l'intégrale  $\ell_I = \int_a^b s'(t) dt$ .

Lorsque  $I$  n'est pas un segment, l'intégrale généralisée définissant  $\ell_I$  peut être infinie.

On a donc  $s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{OM}'(t)\| dt + K$ , où  $K$  est une constante.

En coordonnées polaires on a  $\|\overrightarrow{OM}'(\theta)\| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$ , et pour une courbe d'équation  $y = h(x)$ , on a  $\|\overrightarrow{OM}'(x)\| = \sqrt{1 + h'(x)^2}$ .

- L'arc  $f \circ s^{-1}$  est appelé **représentation normale** de l'arc  $f$ .

Déterminer un paramétrage par l'abscisse curviligne revient donc à faire deux opérations successives : calculer une intégrale, puis trouver une application réciproque.

#### Exercice 9.16

Trouver un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe d'équation  $y = x^{3/2}$  pour  $x \geq 0$ .

On a  $\overrightarrow{OM}'(x) = \vec{i} + \frac{3}{2}x^{1/2}\vec{j}$ , donc  $\|\overrightarrow{OM}'(x)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$ .

Pour  $x \geq 0$ , posons  $s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt$ . Une primitive de  $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$  est

$x \mapsto \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} = \left(x + \frac{4}{9}\right)^{3/2}$  donc  $s = \left(x + \frac{4}{9}\right)^{3/2} - \frac{8}{27}$ . On en déduit

$x = \left(s + \frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9}$  et  $y = \left[\left(s + \frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9}\right]^{3/2}$ , pour  $s \geq 0$ .

**Exercice 9.17**

Trouver un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi].$$

On a  $\rho'(\theta) = \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ , donc  $\|\overrightarrow{OM}'(\theta)\|^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Si, pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ , l'on pose  $s = \int_{\pi}^{\theta} \|\overrightarrow{OM}'(t)\| dt = \int_{\pi}^{\theta} \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = -\cos \frac{\theta}{2}$ , alors  $s$  varie de  $-1$  à  $1$ , et on obtient  $\rho = \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - s^2)$ . Par ailleurs  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -2s \sqrt{1 - s^2}$  et  $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2s^2 - 1$  d'où  $x(t) = (1 - s^2) \left(s^2 - \frac{1}{2}\right)$  et  $y(t) = -s(1 - s^2)^{3/2}$ .

**Exercice 9.18**

Montrer que les deux arcs suivants ont même longueur :

$C_1$  paramétré par  $x(t) = 2 \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ , pour  $t \in [0, \pi/2]$

$C_2$  paramétré en coordonnées polaires par  $\rho(\theta) = \sin 2\theta$ , pour  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

Pour  $C_1$ , on a  $x'(t) = -2 \sin t$  et  $y'(t) = \cos t$ , donc  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4 \sin^2 t + \cos^2 t$ , et l'arc a pour longueur  $\ell_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} dt$ .

Pour  $C_2$ , on a  $\rho'(\theta) = 2 \cos 2\theta$ , donc  $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = 4 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta$ , et l'arc a pour longueur  $\ell_2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} d\theta$ .

Pour transformer cette dernière intégrale on effectue le changement de variable

$$u = 2\theta. \text{ Alors } \ell_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u} du.$$

Comme la fonction intégrée est de période  $\pi$  et paire, on a encore

$$\ell_2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u} du = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u} du.$$

On a donc bien trouvé que  $\ell_1 = \ell_2$ .

**Exercice 9.19**

Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 3. Calculer la longueur de l'épicycloïde à  $k$  rebroussements paramétrée par  $x(t) = (k+1) \cos t - \cos(k+1)t$ ,  $y(t) = (k+1) \sin t - \sin(k+1)t$  lorsque  $t \in [0, 2\pi]$ .

On a  $x'(t) = (k+1)(-\sin t + \sin(k+1)t)$  et  $y'(t) = (k+1)(\cos t - \cos(k+1)t)$ , donc

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 2(k+1)^2(1 - (\sin t \sin(k+1)t + \cos t \cos(k+1)t)) \\ &= 2(k+1)^2(1 - \cos kt) = 4(k+1)^2 \sin^2 \frac{kt}{2}. \end{aligned}$$

On a donc  $\ell = \int_0^{2\pi} 2(k+1) \left| \sin \frac{kt}{2} \right| dt$ . Mais la fonction intégrée est de période  $2\pi/k$ , donc la courbe a pour longueur

$$\ell = k \int_0^{2\pi/k} 2(k+1) \sin \frac{kt}{2} dt = 4(k+1) \left[ -\cos \frac{kt}{2} \right]_0^{2\pi/k} = 8(k+1).$$

### Exercice 9.20

Calculer la longueur  $\ell(\theta_0)$  de l'arc de spirale logarithmique d'équation polaire

$\rho = e^{-b\theta}$ , où  $b > 0$ , lorsque  $\theta \in [0, \theta_0]$ .

Qu'obtient-on lorsque  $\theta_0$  tend vers  $+\infty$  ?

On a  $\rho'(\theta) = -be^{-b\theta}$ , donc  $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = (1+b^2)e^{-2b\theta}$ . Alors

$$\ell(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \sqrt{1+b^2} e^{-b\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \left[ -e^{-b\theta} \right]_0^{\theta_0} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (1 - e^{-b\theta_0}).$$

Lorsque  $\theta_0$  tend vers  $+\infty$ , cette expression a pour limite  $\ell(\infty) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$ . La branche de spirale logarithmique qui s'enroule autour de l'origine a une longueur finie.

### Exercice 9.21

Soit  $a > 0$ . Calculer la longueur  $\ell(a)$  de l'arc de courbe de  $\mathbb{R}^3$  paramétré par

$$x(t) = t \cos t, y(t) = t \sin t, z(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \text{ lorsque } t \text{ varie de } 0 \text{ à } a.$$

On a  $x'(t) = \cos t - t \sin t$ ,  $y'(t) = \sin t + t \cos t$ ,  $z'(t) = \sqrt{2}t$ , d'où

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1+t^2+2t} = t+1.$$

$$\text{Alors } \ell(a) = \int_0^a (t+1) dt = \frac{a^2}{2} + a.$$

## 9.1.7 Courbure - Formules de Frenet

### Ce qu'il faut savoir

Soit  $f$  un arc de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ), paramétré par l'abscisse curviligne  $s$ , c'est-à-dire tel que  $\overrightarrow{OM}'(s) = \overrightarrow{T}(s)$ ,  $x'(s) = \cos \alpha(s)$ ,  $y'(s) = \sin \alpha(s)$ .

En un point birégulier  $M(s)$  on appelle **courbure** le nombre  $\gamma(s) = \alpha'(s)$ . Ce nombre n'est pas nul, et on appelle **rayon de courbure** le nombre  $R(s) = 1/\gamma(s)$ . On a alors les formules de Frenet

$$\vec{T}'(s) = \gamma(s)\vec{N}(s), \quad \vec{N}'(s) = -\gamma(s)\vec{T}(s).$$

### Comment calculer la courbure $\gamma$ en un point d'une courbe de paramétrage quelconque

Les formules permettant un calcul direct n'étant pas au programme, on adoptera une des deux techniques suivantes, en tenant compte dans les deux cas, du fait

que  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$  :

– lorsque l'on peut mettre facilement  $\vec{T}(t)$  sous la forme  $\cos \alpha(t) \vec{i} + \sin \alpha(t) \vec{j}$ , on utilise la relation  $\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds}$  (Voir ex. 9.23),

– on utilise la relation  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$  en écrivant  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt}$  (Voir ex. 9.22).

### Notions hors programme utiles

Bien que les notions suivantes ne soient pas au programme, elles sont parfois employées dans les exercices d'oraux. Il peut être utile de les connaître.

Soit  $f$  un arc de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ).

– On appelle **centre de courbure au point de paramètre  $t$**  le point  $\Omega(t)$  défini par  $\overrightarrow{O\Omega(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t)\vec{N}(t)$ .

– Le cercle de centre  $\Omega(t)$  et de rayon  $|R(t)|$  est appelé **cercle osculateur** au point  $M(t)$ .

– L'ensemble des centres de courbure est (en général) une courbe  $\mathcal{C}_1$  appelée **développée** de la courbe  $\mathcal{C}$ .

#### Exercice 9.22

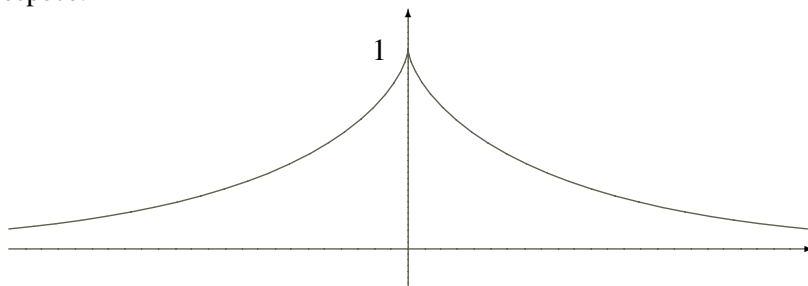
##### Développée de la tractrice CCP PC 2006

Dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la courbe para-

métrique : 
$$\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 1) Donner rapidement l'allure de la courbe.
- 2) Déterminer le rayon de courbure  $R(t)$  en tout point  $M(t)$  de la courbe.
- 3) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points  $I(t)$  définis par la relation  $\overrightarrow{IM}(t) = R(t)\vec{N}(t)$  où  $\vec{N}(t)$  désigne le vecteur normal au point  $M(t)$  (le point  $I(t)$  est le centre de courbure).

1) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ . La courbe est donc symétrique par rapport à  $Oy$ . On a aussi  $x'(t) = \text{th}^2 t$  et  $y'(t) = -\frac{\text{sh } t}{\text{ch}^2 t}$ . Sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $x$  est croissante et varie de 0 à  $+\infty$ , et la fonction  $y$  est décroissante et varie de 1 à 0. La courbe admet donc l'axe  $Ox$  comme asymptote horizontale. Comme  $x'(0) = y'(0) = 0$ , la courbe admet un point singulier au point  $M(0) = (0, 1)$ . Le rapport  $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{1}{\text{sh } t}$  tend vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers 0 et la courbe admet l'axe  $Oy$  pour tangente verticale en ce point, et puisque la courbe est symétrique par rapport à  $Oy$ , le point  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce.



2) On a  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \text{th}^4 t + \frac{\text{sh}^2 t}{\text{ch}^4 t} = \text{th}^2 t$ . Donc, en notant  $\varepsilon(t)$  le signe de  $t$  qui est aussi le signe de  $\text{th } t$  et de  $\text{sh } t$ ,

$$\vec{T}(t) = \varepsilon(t) \left( \text{th } t \vec{i} - \frac{1}{\text{ch } t} \vec{j} \right), \text{ et } \vec{N}(t) = \varepsilon(t) \left( \frac{1}{\text{ch } t} \vec{i} + \text{th } t \vec{j} \right) = \frac{\varepsilon(t)}{\text{ch } t} (\vec{i} + \text{sh } t \vec{j}).$$

On a  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |\text{th } t|$ , puis,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\varepsilon(t)}{|\text{th } t|} \left( \frac{1}{\text{ch}^2 t} \vec{i} + \frac{\text{sh } t}{\text{ch}^2 t} \vec{j} \right) = \frac{1}{\text{sh } t \text{ch } t} (\vec{i} + \text{sh } t \vec{j}).$$

Mais, on a aussi  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N} = \frac{1}{R} \frac{\varepsilon(t)}{\text{ch } t} (\vec{i} + \text{sh } t \vec{j})$ .

Alors en identifiant les deux expressions de  $\frac{d\vec{T}}{ds}$ , on en déduit que  $R(t) = |\text{sh } t|$ .

3) On a donc  $R(t)\vec{N}(t) = \text{th } t (\vec{i} + \text{sh } t \vec{j})$ , et on en déduit

$$\vec{OI}(t) = \vec{OM}(t) + R(t)\vec{N}(t) = t \vec{i} + \text{ch } t \vec{j}.$$

La courbe obtenue a donc pour équation cartésienne  $y = \text{ch } x$ .

### Exercice 9.23

#### Mines-Ponts MP 2005

Calculer la courbure  $\gamma$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation polaire  $\rho = a(1 - \cos \theta)$  ( $a > 0$ )

La fonction  $\rho$  étant de période  $2\pi$ , on limite l'étude à  $[0, 2\pi]$ .

On a  $\rho'(\theta) = a \sin \theta$ , donc  $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = 2a^2(1 - \cos \theta) = 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ .

Cette expression est nulle en 0 et  $2\pi$  (point de rebroussement). Dans la suite on se limite à l'intervalle  $]0, 2\pi[$ . Sur cet intervalle,  $\sin \frac{\theta}{2}$  est positif, et donc

$$\frac{ds}{d\theta} = \|\overrightarrow{OM'}(t)\| = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

En partant de  $x(\theta) = a(1 - \cos \theta) \cos \theta$  et  $y(\theta) = a(1 - \cos \theta) \sin \theta$  on obtient

$$x'(\theta) = a(-\sin \theta + \sin 2\theta) = 2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},$$

$$y'(\theta) = a(\cos \theta - \cos 2\theta) = 2a \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2},$$

d'où  $\vec{T}(\theta) = \cos \frac{3\theta}{2} \vec{i} + \sin \frac{3\theta}{2} \vec{j}$ , et donc, en posant  $\alpha = 3\theta/2$ , on trouve

$$\vec{T} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}. \text{ Ainsi } \gamma(\theta) = \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{3}{4a \sin \frac{\theta}{2}}.$$

### Exercice 9.24

#### Centrale PC 2006

Soit  $a$  un réel strictement positif. Déterminer les courbes telles que  $R(s) = a + s^2/a$ , où  $s$  désigne l'abscisse curviligne et  $R(s)$  le rayon de courbure.

Remarquons qu'un tel problème est invariant par les isométries conservant l'orientation (rotations, symétries centrales, translations).

On a  $x'(s) = \cos \alpha(s)$ ,  $y'(s) = \sin \alpha(s)$ , et  $\alpha'(s) = 1/R(s)$ .

L'équation différentielle  $\alpha'(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{s^2}{a^2}}$  a pour solution

$$\alpha(s) = \text{Arctan} \frac{s}{a} + \alpha_0.$$

On va chercher les courbes obtenues lorsque  $\alpha_0 = 0$ . Les autres sont obtenues à partir de celles-ci par rotation.

On a  $\cos^2 \text{Arctan} \frac{s}{a} = \frac{1}{1 + \tan^2 \text{Arctan} \frac{s}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{a^2}}$ , donc, en posant  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$x'(s) = \cos \text{Arctan} \frac{s}{a} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}}$$

et

$$y'(s) = \sin \text{Arctan} \frac{s}{a} = \cos \text{Arctan} \frac{s}{a} \tan \text{Arctan} \frac{s}{a} = \frac{\varepsilon \frac{s}{a}}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}}.$$



On peut se limiter à  $\varepsilon = 1$ , car le cas des courbes obtenues dans le cas  $\varepsilon = -1$  se ramènent à celles obtenues dans le cas  $\varepsilon = 1$  par symétrie centrale. Alors

$$x(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} \text{ et } y(s) = \int \frac{\frac{s}{a} ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}}.$$

Pour obtenir  $x$  et  $y$  il est préférable de changer de paramètre en prenant  $s = a \operatorname{sh} t$ , donc  $ds = a \operatorname{ch} t dt$ . Alors

$$X(t) = x(a \operatorname{sh} t) = \int a dt = at + b \text{ et } Y(t) = y(a \operatorname{sh} t) = \int a \operatorname{sh} t dt = a \operatorname{ch} t + c.$$

On peut prendre  $b = c = 0$ . Les autres courbes sont obtenues par translation à partir de ce cas particulier. On trouve alors la chaînette d'équation  $Y = a \operatorname{ch} \frac{X}{a}$ .

## 9.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

### Exercice 9.25

Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = (2t^3 + 3t^2, 3t^4 + 4t^3)$ . En particulier, on étudiera les points singuliers et le point double.

#### Dérivées et tableau de variation

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ . On a immédiatement  $x' = 6t(t + 1)$  et  $y'(t) = 12t^2(t + 1)$  et l'on obtient le tableau de variation suivant :

|         |           |               |              |                    |     |
|---------|-----------|---------------|--------------|--------------------|-----|
| $t$     | $-\infty$ | $-1$          | $0$          | $+\infty$          |     |
| $x'$    | $+$       | $0$           | $-$          | $0$                | $+$ |
| $x$     | $-\infty$ | $\nearrow 1$  | $\searrow 0$ | $\nearrow +\infty$ |     |
| $y$     | $+\infty$ | $\searrow -1$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow +\infty$ |     |
| $y'$    | $-$       | $0$           | $+$          | $0$                | $+$ |
| $y'/x'$ |           | $-2$          |              | $0$                |     |

### Branches paraboliques

Lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ ,  $y(t)$  tend vers  $+\infty$ , et  $y(t)/x(t)$  tend vers l'infini. La courbe admet deux branches paraboliques dans la direction des  $y$  positifs. (L'arc de courbe « ressemble » à des branches de paraboles d'axes parallèles à  $Oy$ ).

### Points singuliers

La courbe admet des points singuliers pour  $t = 0$  et  $t = -1$ .

• Pour  $t = 0$ , le limite en zéro, du rapport  $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{3t^2 + 4t}{2t + 3}$  est nulle. (On peut aussi regarder la limite de  $y'(t)/x'(t) = 2t$ ). La courbe est donc tangente en  $O$  à l'axe des  $x$ , et le tableau de variation indique qu'il y aura un point de rebroussement de première espèce pour cette valeur.

• Pour  $t = -1$ , la nature du point de la courbe correspondant n'est plus évidente. Plutôt que d'effectuer un développement limité, on préférera ici calculer les dérivées successives en  $-1$ . On a

$$x''(t) = 6(2t + 1) \text{ et } y''(t) = 12t(3t + 2), \text{ puis } x'''(t) = 12 \text{ et } y'''(t) = 24(3t + 1).$$

Alors  $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(-1) + (t + 1)^2 \overrightarrow{U}_2 + (t + 1)^3 \overrightarrow{U}_3 + o((t + 1)^3)$ , où

$$\overrightarrow{U}_2 = \frac{1}{2!} \overrightarrow{OM}''(-1) = \frac{1}{2} (x''(-1)\vec{i} + y''(-1)\vec{j}) = -3\vec{i} + 6\vec{j},$$

$$\overrightarrow{U}_3 = \frac{1}{3!} \overrightarrow{OM}'''(-1) = \frac{1}{6} (x'''(-1)\vec{i} + y'''(-1)\vec{j}) = 2\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{U}_2$  et  $\overrightarrow{U}_3$  étant linéairement indépendants, on en déduit que l'on a de nouveau un point de rebroussement de première espèce en  $t = -1$ .

La tangente à la courbe au point  $(x(-1), y(-1)) = (1, -1)$  a pour vecteur directeur le vecteur  $\overrightarrow{U}_2$  donc pour coefficient directeur  $-2$ , ce que l'on obtient également en calculant la limite de  $y'(t)/x'(t)$  en  $-1$ .

### Point double

Le tracé de la courbe laisse apparaître un point double. Pour le déterminer on cherche deux valeurs distinctes  $t_1$  et  $t_2$  du paramètre, telles que  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$ . L'équation  $x(t_1) - x(t_2) = 0$  donne  $2(t_1^3 - t_2^3) + 3(t_1^2 - t_2^2) = 0$ , et en simplifiant par  $t_1 - t_2$ , on obtient,  $2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 3(t_1 + t_2) = 0$ .

Le membre de gauche peut s'exprimer en fonction de  $S = t_1 + t_2$  et  $P = t_1 t_2$ . En effet  $t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2 = S^2 - P$ ,

et donc  $2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 3(t_1 + t_2) = 2(S^2 - P) + 3S$ .

On obtient  $2(S^2 - P) + 3S = 0$ , c'est-à-dire  $2P = 2S^2 + 3S$ .

L'équation  $y(t_1) - y(t_2) = 0$  conduit, par un procédé analogue à

$3(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2) + 4(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0$ , puis à  $3S(S^2 - 2P) + 4(S^2 - P) = 0$ , et finalement à  $2P(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2$ .

Le système de départ, est donc équivalent au système 
$$\begin{cases} 2P = 2S^2 + 3S \\ 2P(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2 \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième équation  $2P$  par son expression tirée de la première, il vient  $(2S^2 + 3S)(3S + 2) = 3S^3 + 4S^2$ , ce qui donne  $S(S^2 + 3S + 2) = 0$ .

On obtient trois valeurs possibles de  $S$ , donc trois couples  $(S, P)$  possibles :

$$(0, 0), (-2, 1), (-1, -1/2),$$

qui sont bien solutions du système comme on le vérifie facilement.

Les nombres  $t_1$  et  $t_2$  sont alors solutions de l'équation  $t^2 - St + P = 0$ . On étudie les trois cas obtenus.

(i) Lorsque  $S = P = 0$ , l'équation se réduit à  $t^2 = 0$ , et admet une racine double  $t_1 = t_2 = 0$ . On n'a donc pas de point double, mais on retrouve un point singulier.

(ii) Lorsque  $S = -2$  et  $P = 1$ , l'équation  $t^2 + 2t + 1 = 0$  admet encore une racine double  $t = -1$ , et l'on obtient l'autre point singulier.

(iii) Lorsque  $S = -1$  et  $P = -1/2$ , le trinôme  $t^2 + t - 1/2$  a un discriminant strictement positif. Il possède deux racines réelles distinctes et l'on aura bien un point double dans ce cas. Plutôt que de calculer  $x(t_1)$  et  $y(t_1)$ , on va utiliser le fait que, si  $t$  désigne un des nombres  $t_1$  ou  $t_2$ , on a alors  $2t^2 + 2t - 1 = 0$ .

En effectuant la division euclidienne de  $x(t)$  par ce polynôme, on obtient

$$x(t_1) = x(t_2) = 2t^3 + 3t^2 = (2t^2 + 2t - 1) \left( t + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y(t_1) = y(t_2) = 3t^4 + 4t^3 = (2t^2 + 2t - 1) \left( \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

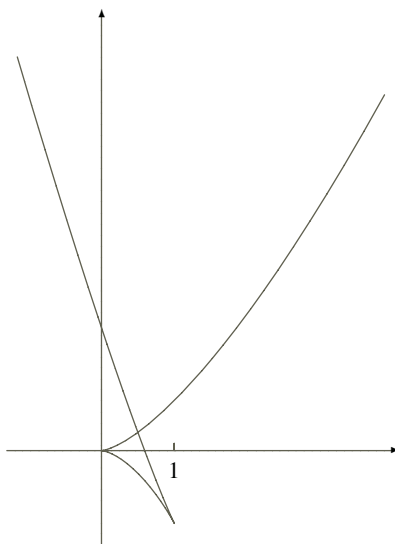
Le point double est donc le point de coordonnées  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$ .

### Intersection avec les axes

(i) Intersection avec  $Ox$ . On l'obtient lorsque  $y(t) = 0$ , c'est-à-dire pour  $t = -4/3$ , et dans ce cas  $y(t) = 16/27$ .

(ii) Intersection avec  $Oy$ . On l'obtient lorsque  $x(t) = 0$ , c'est-à-dire pour  $t = -3/2$ , et dans ce cas  $y(t) = 27/16$ .

### Tracé de la courbe



**Exercice 9.26**

Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par

$f(t) = \left( \sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \right)$ . En particulier, on étudiera les points singuliers et on déterminera les points d'inflexion.

**Réduction du domaine d'étude**

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  et de périodes  $2\pi$ . Si l'on veut utiliser la parité des fonctions, on prend alors l'intervalle  $I_0 = [-\pi, \pi]$  comme intervalle d'étude. L'application  $\Phi_1 : t \mapsto -t$  est une bijection de  $I_1 = [0, \pi]$  sur  $I'_1 = [-\pi, 0]$ , et l'on a  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ . La courbe est symétrique par rapport à  $Oy$ . On l'étudie sur  $I_1$ , et on complètera par la symétrie  $\mathcal{S}_1$  par rapport à  $Oy$ .

**Dérivées et tableau de variation**

On obtient  $x'(t) = \cos t$  et  $y'(t) = \frac{\sin t \cos t (\cos t - 4)}{(2 - \cos t)^2}$ . La fonction  $x'$  s'annule dans  $I_1$  en  $\pi/2$  et la fonction  $y'$  en  $0, \pi/2$  et  $\pi$ . On obtient facilement le tableau de variation suivant :

| $t$     | 0 | $\pi/2$ | $\pi$         |
|---------|---|---------|---------------|
| $x'$    | + | 0       | -             |
| $x$     | 0 | 1       | 0             |
| $y$     | 1 | 0       | $\frac{1}{3}$ |
| $y'$    | 0 | 0       | 0             |
| $y'/x'$ | 0 | -1      | 0             |

**Points singuliers**

La courbe présente un point singulier en  $t = \pi/2$ . Pour étudier sa nature, on pose  $u = t - \pi/2$ . Alors  $x(t) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$ , et

$$y(t) = \frac{\sin^2 u}{2 + \sin u} = \frac{u^2 + o(u^3)}{2 + u + o(u)} = \frac{u^2}{2} \frac{1 + o(u)}{1 + \frac{u}{2} + o(u)} = \frac{u^2}{2} \left( 1 - \frac{u}{2} + o(u) \right),$$

ce qui donne  $y(t) = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{4} + o(u^3)$ . On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \overrightarrow{U}_2 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 \overrightarrow{U}_3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right),$$

où  $\overrightarrow{U}_2 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$  et  $\overrightarrow{U}_3 = -\frac{1}{4}\vec{j}$ . La courbe admet un point de rebroussement de première espèce, au point  $(1, 0)$ , et en son symétrique  $(-1, 0)$ .

### Points d'inflexion

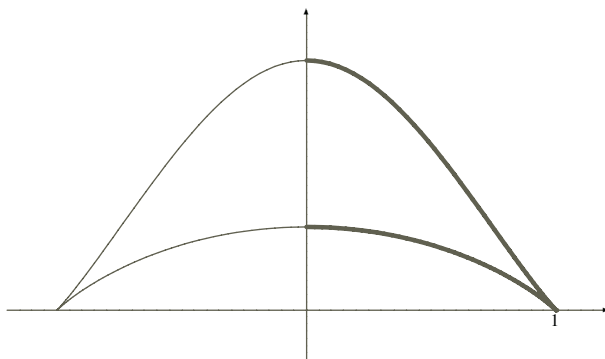
Le tracé de la courbe fait apparaître deux points d'inflexion. Une condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion en un point de paramètre  $t$  est que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}'(t)$  et  $\overrightarrow{OM}''(t)$  soient colinéaires, ce qui se traduit par la condition  $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 0$ , où encore, lorsque  $x'(t) \neq 0$ , par la condition  $(y'/x')'(t) = 0$ .

On a  $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t(\cos t - 4)}{(2 - \cos t)^2}$ , et en dérivant cette expression, on obtient  $\left(\frac{y'}{x'}\right)'(t) = \frac{3(2 - 3\cos t)}{(2 - \cos t)^3}$ . Cette expression s'annule pour  $t = \pm \arccos(2/3)$ , et

les deux points d'inflexion sont :  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}\right)$  et son symétrique par rapport à  $Oy$ .

### Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque  $t$  varie de  $0$  à  $\pi$ , puis on complète par la symétrie  $S_1$ .



### Exercice 9.27

Étudier et tracer la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho(\theta) = \frac{2}{1 - e^\theta}$ .

Déterminer en particulier, l'asymptote et les points doubles. Que se passe-t-il lorsque  $\theta$  tend vers  $-\infty$  ? vers  $+\infty$  ?

La fonction  $\rho$  est définie sauf en 0.

### Dérivée et tableau de variation

On a  $\rho'(\theta) = \frac{2e^\theta}{(1-e^\theta)^2}$ , et  $\rho'$  est toujours positive. On obtient le tableau de variation suivant :

| $\theta$ | $-\infty$ | 0         | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| $\rho'$  | +         |           | +         |
| $\rho$   | 2         | $-\infty$ | 0         |

#### Étude en $-\infty$

Lorsque  $\theta$  tend vers  $-\infty$ , alors  $\rho(\theta)$  tend vers 2. La courbe s'approche du cercle de centre  $O$  et de rayon 2 (cercle asymptote). Comme  $\rho > 2$  quand  $\theta < 0$ , la courbe possède une branche spirale qui s'enroule autour du cercle. Elle coupe le cercle lorsque  $\rho(\theta) = \frac{2}{1-e^\theta} = -2$ , c'est-à-dire lorsque  $\theta = \ln 2$ .

#### Étude en $+\infty$

Lorsque  $\theta$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\rho(\theta)$  tend vers 0. La courbe possède une branche spirale qui s'enroule autour de l'origine (point asymptote).

#### Asymptote

On a  $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 - e^\theta}$ . En utilisant un développement limité en zéro, on

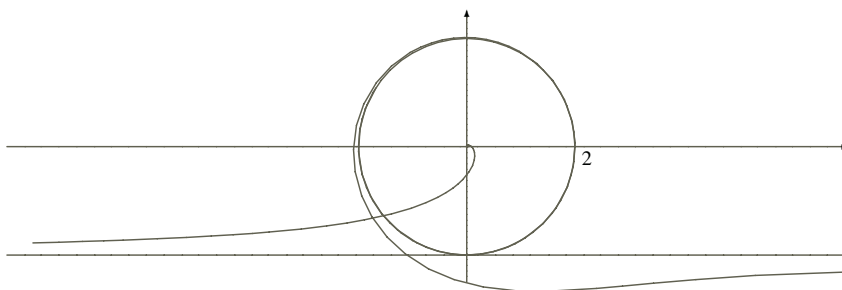
obtient  $y(\theta) = \frac{2\theta + o(\theta^2)}{-\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)} = -2 \left( 1 - \frac{\theta}{2} \right) + o(\theta) = -2 + \theta + o(\theta)$ .

Cette expression tend vers  $-2$  lorsque  $\theta$  tend vers zéro. La courbe admet donc l'asymptote horizontale d'équation  $y = -2$ . La différence  $y(\theta) + 2$  est du signe de  $\theta$ . La courbe est donc au-dessus de son asymptote lorsque  $\theta$  tend vers  $0^+$ , et en dessous lorsque  $\theta$  tend vers  $0^-$ .

#### Points doubles

Il est facile de voir que l'équation  $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}^*$ , n'a pas de solution. Par contre la courbe possède une infinité de points doubles, obtenus pour des valeurs  $\theta_k$  telles que  $\rho(\theta_k + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta_k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . c'est-à-dire telles que  $1 - e^{\theta_k + (2k+1)\pi} = e^{\theta_k} - 1$ . Cette équation est équivalente à  $e^{\theta_k} (1 + e^{(2k+1)\pi}) = 2$ , donc à  $\theta_k = \ln 2 - \ln(1 + e^{(2k+1)\pi})$ . Remarquons que lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(\theta_{-k})$  admet  $\ln 2$  pour limite. On retrouve la valeur de  $\theta$  donnant le point d'intersection de la courbe et du cercle asymptote.

## Tracé de la courbe



## Exercice 9.28

## Strophoïde droite, d'après Centrale MP 2006

- 1) Étudier et tracer la courbe  $\mathcal{S}$  définie en coordonnées polaires par  $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ .
- 2) Calculer l'aire entre la courbe et l'asymptote et l'aire de la boucle de la courbe.
- 3) *Question de la rédaction* : On appelle inversion de pôle  $O$  et de puissance  $\lambda$ , la transformation géométrique qui à tout point  $M$  distinct de  $O$  associe le point  $P$  situé sur la droite  $OM$  et tel que  $OP \cdot OM = \lambda$ .  
Trouver l'équation polaire de l'image  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{S}$  dans l'inversion de pôle  $O$  et de puissance 2. En déduire l'équation cartésienne puis la nature de  $\mathcal{H}$ .

## 1) Domaine de définition - Période - Réduction du domaine d'étude

La fonction est de période  $2\pi$ . Mais on constate que  $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$ . La courbe est donc parcourue deux fois sur une période. On l'étudie sur un intervalle de longueur  $\pi$ .

La fonction  $\rho$  n'est pas définie si  $\theta = \pi/2 + k\pi$  avec  $k$  entier. D'autre part on a  $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ . On choisit donc  $I_0 = ]-\pi/2, \pi/2[$  comme intervalle d'étude. L'application :  $\Phi_1 : t \mapsto -t$  est une bijection de  $I_1 = [0, \pi/2[$  sur  $I'_1 = ]-\pi/2, 0]$ , et la courbe est symétrique par rapport  $Ox$ . On l'étudie sur  $I_1$ , et on complètera par la symétrie  $\mathcal{S}_1$  par rapport à  $Ox$ .

## Dérivée et tableau de variation

On obtient

$$\rho'(\theta) = \frac{-2 \cos \theta \sin 2\theta + \cos 2\theta \sin \theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{\sin \theta (2 \cos^2 \theta + 1)}{\cos^2 \theta},$$

d'où le tableau de variation :

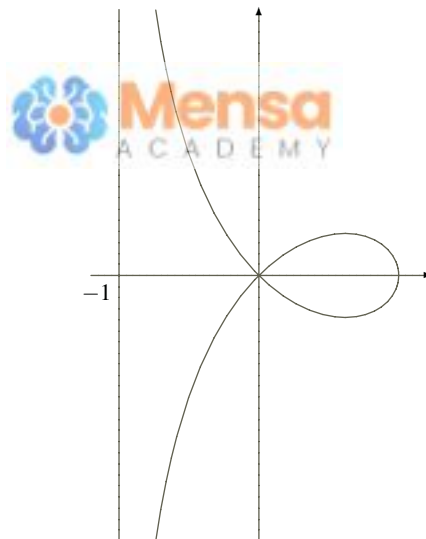
| $\theta$ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$   |
|----------|---|---------|-----------|
| $\rho'$  | 0 | —       |           |
| $\rho$   | 1 | 0       | $-\infty$ |

**Asymptote**

Lorsque  $\theta$  tend vers  $\pi/2$ , on a  $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = \cos 2\theta$ , et cette expression tend vers  $-1$ . On a donc une asymptote verticale d'équation  $x = -1$ , et  $x(\theta) + 1$  est toujours positif, donc la courbe est à droite de son asymptote.

**Tracé de la courbe**

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $\pi/2$ , puis on complète par la symétrie par rapport à  $Ox$ .



2) En raison de la symétrie, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine compris entre la courbe et son asymptote est le double de l'aire  $\mathcal{A}_1$  du domaine limité par l'arc de courbe obtenu quand  $\theta$  varie de  $\pi/4$  à  $\pi/2$ , l'asymptote et l'axe  $Ox$ .

L'aire se calcule par la formule  $\mathcal{A}_1 = \left| \int_{\pi/4}^{\pi/2} y(t)x'(t) dt \right|$ .

On a  $x'(\theta) = -2 \sin 2\theta$ , donc  $y(\theta)x'(\theta) = -2 \sin 2\theta \sin \theta \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ . On linéarise facilement cette expression ce qui donne

$$y(\theta)x'(\theta) = -4 \sin^2 \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = -2 \sin^2 2\theta + 4 \sin^2 \theta = 1 + \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta.$$



Alors

$$\mathcal{A} = 2 \left| \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \right| = 2 \left| \left[ \theta + \frac{\sin 4\theta}{4} - \sin 2\theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \right| = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

On a de même l'aire de la boucle de la courbe. Elle vaut

$$\mathcal{A} = 2 \left| \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \right| = 2 \left| \left[ \theta + \frac{\sin 4\theta}{4} - \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \right| = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

3) • Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $O$  situé sur la droite orientée faisant un angle  $\theta$  avec  $Ox$  et soit  $P$  son image par l'inversion de pôle  $O$  et de puissance 2. On a donc  $\overline{OM}(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$  et, puisque  $\overline{OM}(\theta)\overline{OP}(\theta) = 2$ , on obtient  $\overline{OP}(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\cos 2\theta}$ , ce qui donne l'équation polaire de  $\mathcal{H}$ .

• On en déduit

$$x(\theta) = \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos 2\theta} = 1 + \frac{1}{\cos 2\theta} \quad \text{et} \quad y(\theta) = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta.$$

Alors

$$(x(\theta) - 1)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \tan^2 2\theta \quad \text{et} \quad (x(\theta) - 1)^2 - y(\theta)^2 = 1.$$

La courbe  $\mathcal{H}$  est donc incluse dans l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne  $(x - 1)^2 - y^2 = 1$ . Il est facile de vérifier que  $\mathcal{H}$  est l'hyperbole complète, (le point  $O$  de  $\mathcal{H}$  est l'image des points à l'infini de  $\mathcal{C}$ ).

### Exercice 9.29

#### Mines-Ponts PSI 2005

Étudier et tracer la courbe d'équation polaire  $\rho = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$ .

#### Domaine de définition – Période – Réduction du domaine d'étude

La fonction est de période  $2\pi$ . Mais on constate que  $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$ . La courbe est donc parcourue deux fois sur une période. On l'étudie sur un intervalle de longueur  $\pi$ .

En écrivant  $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4)$ , on en déduit que le dénominateur de  $\rho$  s'annule en  $-\pi/4 + k\pi$ , où  $k$  est entier.

D'autre part on a  $\rho(\pi/2 - \theta) = \rho(\theta)$ . On choisit donc  $I_0 = ]-\pi/4, 3\pi/4[$  comme intervalle d'étude. L'application :  $\Phi_1 : t \mapsto \pi/2 - t$  est une bijection de  $I_1 = ]-\pi/4, \pi/4[$  sur  $I'_1 = [\pi/4, 3\pi/4[$ , et la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice. On l'étudie sur  $I_1$ , et on complètera par la symétrie  $S_1$  par rapport à la première bissectrice.

**Dérivée et tableau de variation**

Pour  $\theta \neq -\pi/4$  modulo  $\pi$ , on obtient

$$\begin{aligned}\rho'(\theta) &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \cos \theta \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta)}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}.\end{aligned}$$

Tout d'abord  $\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta = \frac{2 + \sin 2\theta}{2}$  est strictement positif. Par ailleurs, sur  $]-\pi/4, \pi/4]$ , la différence  $\cos \theta - \sin \theta = \cos \theta(1 - \tan \theta)$  est positive et s'annule en  $\pi/4$ . On a donc le tableau de variation suivant :

| $\theta$ | $-\pi/4$  | 0 | $\pi/4$      |
|----------|-----------|---|--------------|
| $\rho'$  |           | + | 0            |
| $\rho$   | $-\infty$ | 0 | $\sqrt{2}/4$ |

**Asymptote**

Lorsque  $\theta$  tend vers  $-\pi/4$ , on a

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2\theta,$$

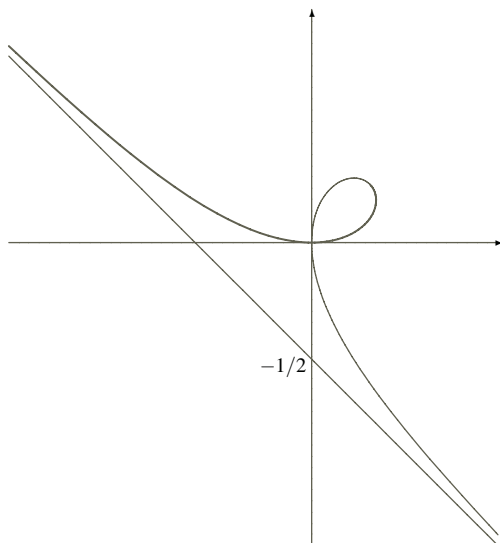
donc cette expression tend vers  $a = -\sqrt{2}/4$  lorsque  $\theta$  tend vers  $-\pi/4$ , et la courbe admet une asymptote d'équation polaire  $\rho = \frac{-\sqrt{2}}{4 \sin(\theta + \pi/4)}$ , ou d'équation cartésienne  $x + y = -1/2$ . Par ailleurs, en se plaçant dans le repère  $(O, \vec{u}(-\pi/4), \vec{v}(-\pi/4))$  on trouve

$$Y(\theta) - a = \rho(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sin 2\theta + 1).$$

Cette expression est toujours négative et la courbe se trouve du même côté de l'asymptote que l'origine.

**Tracé de la courbe**

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque  $\theta$  varie de  $-\pi/4$  à  $\pi/4$ , puis on complète par la symétrie par rapport à la première bissectrice.



### 9.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT



#### Exercice 9.30

##### Cycloïde CCP PSI 2005

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- 1) Montrer qu'il existe un unique arc paramétré  $t \mapsto M(t)$  tel que

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{i} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{j} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = \vec{0}.$$

- 2) Représenter graphiquement cet arc.  
3) Calculer la longueur de l'arc de courbe pour  $t$  variant de 0 à  $2\pi$ .

- 1) Soient  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  les coordonnées du point  $M(t)$ .

On a alors  $\overrightarrow{OM}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$ , et donc  $\overrightarrow{OM}' \wedge \vec{j} = -z' \vec{i} + x' \vec{k}$ .

La relation  $\overrightarrow{OM}'' = \vec{i} + \overrightarrow{OM}' \wedge \vec{j}$  est alors équivalente au système 
$$\begin{cases} x'' = 1 - z' \\ y'' = 0 \\ z'' = x' \end{cases}.$$

On en tire tout d'abord que  $y'$  est constante, mais puisque  $\overrightarrow{OM}'(0) = \vec{0}$ , il en résulte que  $y'$  est nulle. Donc  $y$  est constante. La courbe cherchée sera tracée dans un plan fixe  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = y_0$ .

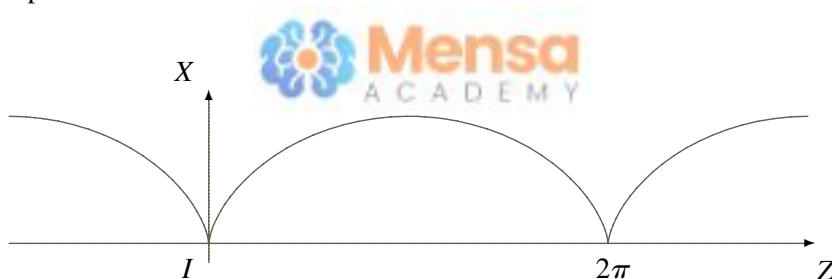
En intégrant la troisième équation on a alors  $z' = x + a$ , puis en remplaçant dans la première équation  $x'' + x = 1 - a$ . Cette équation différentielle linéaire du deuxième ordre a comme solutions  $x(t) = A \cos t + B \sin t + 1 - a$ . On a alors  $x'(t) = -A \sin t + B \cos t$ , et puisque  $x'(0) = 0$ , on en tire  $B = 0$ , et  $x(t) = A \cos t + 1 - a$ .

Alors  $z'(t) = A \cos t + 1$ , et donc  $z'(0) = A + 1 = 0$ . On en déduit que  $A = -1$ , donc  $z(t) = -\sin t + t + b$ .

Dans le plan  $\mathcal{P}$  la courbe cherchée est paramétrée par  $(x, z)$  où  $x(t) = -\cos t + 1 - a$ ,  $z(t) = t - \sin t + b$ . On vérifie facilement qu'elle satisfait aux conditions demandées. Si l'on appelle  $I$  le point de coordonnées  $(-a, b)$ , dans le repère  $(I, \vec{k}, \vec{i})$  du plan  $\mathcal{P}$  la courbe a alors pour paramétrage  $(Z(t) = t - \sin t, X(t) = 1 - \cos t)$ . La courbe obtenue est une cycloïde.

2) On remarque que  $X(t + 2\pi) = X(t)$  et  $Z(t + 2\pi) = 2\pi + Z(t)$ . La courbe est donc invariante par translation de vecteur  $2\pi \vec{k}$ . On limite l'étude à un intervalle de longueur  $2\pi$ , et puisque  $Z$  est impaire et  $X$  est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $IX$ . On restreint l'étude à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Sur cet intervalle,  $Z'(t)$  et  $X'(t)$  sont positives. Donc  $Z$  est croissante et varie de 0 à  $\pi$ , et  $X$  est croissante et varie de 0 à 2. Pour  $t = 0$  la courbe est tangente à l'axe  $IX$  en  $I$  et par symétrie de la courbe, ce sera un point de rebroussement de première espèce.

Dans le plan  $\mathcal{P}$  on a le dessin suivant :



3) On a  $X'(t)^2 + Z'(t)^2 = \sin^2 t + (1 - \cos t)^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$ . Sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , on a alors  $\|\vec{OM}(t)\| = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2 \sin \frac{t}{2}$ .

La longueur de l'arc de courbe est donc

$$\ell = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left[ -\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.$$

### Exercice 9.31

#### Centrale PC 2005

Étudier et tracer la courbe paramétrée par  $x(t) = \frac{t - \sin t}{t^2}$ ,  $y(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$ .

*Questions de la rédaction :* Montrer en particulier que les points de rebroussement de la courbe sont cocycliques et que les tangentes en ces points sont

concourantes. (On pourra poser  $t = 2u$  et exprimer  $x'(2u)$  et  $y'(2u)$  en fonction de  $u$  et  $\tan u$ ).

On ne peut espérer faire une étude méthodique de cette courbe dont le paramétrage n'est pas périodique mais contient malgré tout des fonctions trigonométriques. On peut cependant étudier quelques points particuliers.

- Tout d'abord on remarque que  $x$  est impaire et que  $y$  est paire, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ .
- Ensuite on voit que  $x(t)$  et  $y(t)$  tendent vers 0, lorsque  $t$  tend vers l'infini en écrivant

$$x(t) = \frac{1}{t} - \frac{\sin t}{t^2}, \quad y(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{t^2},$$

et en remarquant que les fonctions sinus et cosinus sont bornées.

- On peut étudier également le comportement de la courbe au voisinage de 0. En utilisant les développements limités, on obtient  $x(t) = \frac{t}{6} + o(t)$  et  $y(t) = \frac{1}{2} + o(t)$ , ce qui montre que la courbe se prolonge par le point  $(0, 1/2)$ , avec une tangente horizontale.

- Enfin, on a  $x'(t) = \frac{t(1 - \cos t) - 2(t - \sin t)}{t^3}$  et  $y'(t) = \frac{t \sin t - 2(1 - \cos t)}{t^3}$ ,

et l'on constate que  $y'$  et  $y$  s'annulent pour les nombres de la forme  $t_n = 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}^*$ ), alors que  $x'$  ne s'annule pas. Donc la courbe est tangente à l'axe  $Ox$  aux points  $(x(t_n), 0)$ . Par ailleurs, comme  $y(t)$  est positif, la courbe est toujours au-dessus de l'axe  $Ox$ .

- On constate également que  $x'$  s'annule pour les nombres de la forme  $s_n = (2n+1)\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), alors que  $y'$  ne s'annule pas, et la courbe possède une tangente verticale en ces points. Dans ce cas  $y(s_n) = 2x(s_n)^2$ , et les points de la courbe correspondants sont situés sur la parabole d'équation  $y = 2x^2$ .

- Le tracé de la courbe montre qu'elle possède une infinité de points de rebroussement qui s'accumulent sur l'origine.

En utilisant les relations  $\sin(2u) = \frac{2 \tan u}{1 + \tan^2 u}$  et  $\cos(2u) = \frac{1 - \tan^2 u}{1 + \tan^2 u}$ , on obtient, pour  $u \neq \pi/2 + k\pi$ , avec  $k$  entier :  $x'(2u) = \frac{\tan u - u}{2u^3(1 + \tan^2 u)}$  et  $y'(2u) = \frac{\tan u(u - \tan u)}{2u^3(1 + \tan^2 u)}$ .

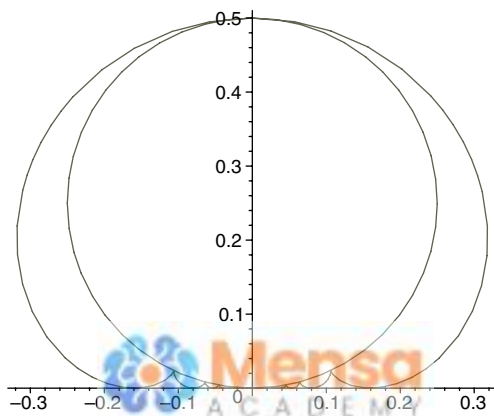
Les points de rebroussement sont donc obtenus pour les valeurs non nulles solution de l'équation  $\tan u = u$ . On a alors, lorsque  $u$  est une de ces solutions,  $x(2u) = \frac{u}{2(1 + u^2)}$  et  $y(2u) = \frac{1}{2(1 + u^2)}$ , d'où  $x(2u)^2 + y(2u)^2 = \frac{y(2u)}{2}$ . Les points de rebroussement se trouvent sur le cercle de centre  $(0, 1/4)$  et de rayon  $1/4$ .

Pour tout nombre  $u$  pour lequel  $x'(2u)$  et  $y'(2u)$  ne sont pas nuls, le coefficient directeur de la tangente au point de paramètre  $2u$  vaut  $\frac{y'(2u)}{x'(2u)} = -\tan u$ . Cela reste vrai par prolongement en un point singulier et l'équation de la tangente en ce point

est donc  $Y = -\tan u(X - x(2u)) + y(2u)$ . Si ces droites sont concourrantes, leur point d'intersection se situera sur l'axe  $Oy$  pour des raisons de symétrie. Vérifions le, en déterminant le point d'intersection de ces tangentes avec  $Oy$  :

pour  $X = 0$ , on obtient  $Y = x(2u) \tan u + y(2u) = ux(2u) + y(2u) = \frac{1}{2}$ . Le point de coordonnées  $(0, 1/2)$  appartient donc à toutes les tangentes aux points de rebroussement.

Voici le tracé de la courbe et du cercle contenant les points de rebroussement, obtenu avec Maple.



### Exercice 9.32

#### Enveloppe d'une famille de droites. Mines-Ponts PC 2006

Soient  $p \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $D_\theta$  la droite d'équation :  $x \cos \theta + y \sin \theta + p(\theta) = 0$ .

Trouver les arcs paramétrés réguliers  $\gamma : \theta \mapsto M(\theta)$  tels que :

- i) pour tout  $\theta$ ,  $M(\theta) \in D_\theta$ ,
- ii) pour tout  $\theta$ ,  $D_\theta$  est la tangente à  $\gamma$  au point  $M(\theta)$ .

Si  $M(\theta)$  a pour coordonnées  $(x(\theta), y(\theta))$ , on écrit tout d'abord que  $M(\theta)$  appartient à  $D_\theta$ , ce qui donne l'équation : (1)  $x(\theta) \cos \theta + y(\theta) \sin \theta + p(\theta) = 0$ .

Le vecteur  $\vec{H}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  est orthogonal à la droite  $D_\theta$ . Dire que cette droite est tangente à la courbe en  $M(\theta)$  signifie que le vecteur  $\overrightarrow{OM}'(\theta) = x'(\theta) \vec{i} + y'(\theta) \vec{j}$  est orthogonal à  $\vec{H}(\theta)$ , donc que le produit scalaire  $\vec{H}(\theta) \cdot \overrightarrow{OM}'(\theta)$  est nul. Cela donne la condition : (2)  $x'(\theta) \cos \theta + y'(\theta) \sin \theta = 0$ .

En dérivant la relation (1), on obtient

$$(3) \quad x'(\theta) \cos \theta - x(\theta) \sin \theta + y'(\theta) \sin \theta + y(\theta) \cos \theta + p'(\theta) = 0.$$

En soustrayant la relation (2) de la relation (3) on obtient

$$(4) \quad -x(\theta) \sin \theta + y(\theta) \cos \theta + p'(\theta) = 0.$$

Les courbes cherchées sont telles que  $(x(\theta), y(\theta))$  est solution du système linéaire

$$\text{formé des équations (1) et (4) : } \begin{cases} x(\theta) \cos \theta + y(\theta) \sin \theta = -p(\theta) \\ -x(\theta) \sin \theta + y(\theta) \cos \theta = -p'(\theta). \end{cases}$$

Ce système se résout facilement et l'on trouve

$$x(\theta) = -p(\theta) \cos \theta + p'(\theta) \sin \theta \quad \text{et} \quad y(\theta) = -p(\theta) \sin \theta - p'(\theta) \cos \theta.$$

On a alors

$$x'(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p''(\theta) \sin \theta \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -p(\theta) \cos \theta - p''(\theta) \cos \theta.$$

Donc le vecteur  $\overrightarrow{OM'}(\theta)$  est nul si et seulement si  $p(\theta) + p''(\theta) = 0$ .

Lorsque  $p + p''$  ne s'annule pas, l'arc de courbe obtenu est régulier.

### Exercice 9.33

#### Centrale PSI 2006

Montrer que l'arc paramétré  $x(t) = t \cos t - \sin t, y(t) = 1 + \cos t$  a une infinité de points multiples.



Cherchons deux nombres  $t$  et  $s$  distincts tels que  $x(t) = x(s)$  et  $y(t) = y(s)$ . La relation  $y(t) = y(s)$  donne  $\cos t = \cos s$ . Donc, il y a deux cas possibles :

$$(1) \quad t = s + 2k\pi \text{ avec } k \text{ entier non nul, ou} \quad (2) \quad t = -s + 2k\pi \text{ avec } k \text{ entier.}$$

En remplaçant dans l'équation  $x(t) = x(s)$ , on obtient dans le premier cas

$$(s + 2k\pi) \cos s - \sin s = s \cos s - \sin s, \quad \text{ce qui donne} \quad \cos s = 0.$$

Donc  $s = \pi/2 + r\pi$  avec  $r$  entier. Dans ce cas  $x(s) = (-1)^{r+1}$  et  $y(s) = 1$ . On trouve deux points  $(-1, 1)$  et  $(1, 1)$  qui sont obtenus pour une infinité de valeurs du paramètre.

Dans le second cas, on obtient cette fois  $(-s + 2k\pi) \cos s + \sin s = s \cos s - \sin s$  ce qui équivaut à  $2k\pi \cos s = 2s \cos s - 2 \sin s$ . Si  $\cos s$  était nul, on en déduirait alors que  $\sin s$  est nul ce qui n'est pas possible. On peut donc diviser par  $2 \cos s$  et l'équation devient  $\tan s = s - k\pi$ . Or la fonction  $s \mapsto \tan s - s + k\pi$  a une dérivée positive. Elle est strictement croissante dans tout intervalle  $I_p = ]-\pi/2 + p\pi, \pi/2 + p\pi[$  où  $p$  est entier. Comme elle varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur cet intervalle, l'équation  $\tan s = s - k\pi$  possède une solution et une seule  $s_{p,k}$  dans  $I_p$ . On a alors  $y(s_{p,k}) = 1 + \cos s_{p,k}$  et  $x(s_{p,k}) = k\pi \cos(s_{p,k})$ . Lorsque  $k$  est fixé, ces points sont situés sur la droite d'équation  $k\pi y - x = k\pi$ . Ces points sont tous distincts. On a donc bien une infinité de points doubles.

## Exercice 9.34

## Mines-Ponts PC 2006

Déterminer la développée de la courbe d'équation  $y = a \sin(x/a)$  ( $a \neq 0$ ).

Comme on obtient la même fonction pour  $a$  et pour  $-a$ , on peut supposer  $a > 0$ . La courbe est une sinusoïde de période  $2a\pi$ . Elle n'est pas birégulière pour les points tels que  $x = ka\pi$  avec  $k$  entier, puisque l'on a un point d'inflexion en ces points.

Paramétrons la courbe en posant  $x(t) = at$  et  $y(t) = a \sin t$ . On a alors  $x'(t) = a$ ,  $y'(t) = a \cos t$ , donc  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = a \sqrt{1 + \cos^2 t}$ , d'où l'on déduit

$$\vec{T} = (1 + \cos^2 t)^{-1/2} (\vec{i} + \cos t \vec{j}) ; \quad \vec{N} = (1 + \cos^2 t)^{-1/2} (-\cos t \vec{i} + \vec{j}) ,$$

puis, en dérivant,  $\frac{d\vec{T}}{dt} = (1 + \cos^2 t)^{-3/2} \sin t (\cos t \vec{i} - \vec{j})$ .

On a alors  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{a} (1 + \cos^2 t)^{-2} \sin t (\cos t \vec{i} - \vec{j})$ . Et puisque  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$ , on en déduit que le rayon de courbure  $R$  est donné par la formule

$$R(t) = -a \frac{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}{\sin t}.$$

Alors le centre de courbure  $\Omega(t)$  est déterminé par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\Omega(t)} &= \overrightarrow{OM(t)} + R(t) \vec{N}(t) \\ &= at \vec{i} + a \sin t \vec{j} - a \frac{1 + \cos^2 t}{\sin t} (-\cos t \vec{i} + \vec{j}) \\ &= a \left[ t + (1 + \cos^2 t) \cotan t \right] \vec{i} - 2a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \vec{j}. \end{aligned}$$

La développée est donc paramétrée par

$$X(t) = a(t + (1 + \cos^2 t) \cotan t) \quad \text{et} \quad Y(t) = -2a \frac{\cos^2 t}{\sin t}.$$

## Exercice 9.35

## CCP PSI 2005

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $M_{a,b}$  l'arc paramétré donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, M_{a,b}(t) = \left( 2t + \frac{a^4}{t^3}, t^2 + \frac{b^3}{t} \right).$$

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'arc ait un point de rebroussement.
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'arc ait un point double.



1) Une condition nécessaire pour que l'arc admette un point de rebroussement est qu'il admette un point singulier, donc que  $x'(t)$  et  $y'(t)$  s'annulent pour une même valeur de  $t$ . Or  $x'(t) = 2 - 3a^4t^{-4}$  est nul lorsque  $t = \pm(3/2)^{1/4}a$  et  $y'(t) = 2t - b^3t^{-2}$  est nul lorsque  $t = 2^{-1/3}b$ . Donc la courbe admet un point singulier si et seulement si  $\pm(3/2)^{1/4}a = 2^{-1/3}b$  ou encore  $b^2 = 2^{1/6}3^{1/2}a^2$ .

Il reste à vérifier que l'on a bien un point de rebroussement dans ce cas. On a  $x''(t) = 12a^4t^{-5}$ ,  $y''(t) = 2 + 2b^3t^{-3}$ ,  $x'''(t) = -60a^4t^{-6}$ , et  $y'''(t) = -6b^3t^{-4}$ . Alors, si  $t$  est le paramètre du point singulier, on a

$$x''(t)y'''(t) - y''(t)x'''(t) = 24a^4(2b^3 + 5t^3)t^{-9} = 108a^4b^3t^{-9} \neq 0$$

et donc les vecteurs  $\overrightarrow{OM''}(t)$  et  $\overrightarrow{OM'''}(t)$  ne sont pas colinéaires. Le point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

2) Résolvons l'équation  $M_{a,b}(t) = M_{a,b}(s)$ , avec  $t \neq s$  et  $t$  et  $s$  non nuls. Elle se ramène au système  $(S_1)$

$$\begin{cases} 2t + a^4/t^3 = 2s + a^4/s^3 \\ t^2 + b^3/t = s^2 + b^3/s. \end{cases}$$

En posant  $st = P$  et  $s+t = S$ , la première équation s'écrit alors  $2(t-s) = a^4 \frac{t^3 - s^3}{t^3 s^3}$  et en simplifiant par  $t - s$  elle devient  $2t^3 s^3 = a^4(t^2 + st + t^2)$ , c'est-à-dire  $2P^3 = a^4(S^2 - P)$ .

La seconde équation s'écrit  $t^2 - s^2 = b^3 \frac{t-s}{ts}$ , et devient après simplification  $SP = b^3$ . Le système initial est équivalent à  $(S_2)$

$$\begin{cases} 2P^3 = a^4(S^2 - P) \\ SP = b^3 \end{cases},$$

et, en exprimant la première équation en fonction de  $P$ , à

$$(S_3) \quad \begin{cases} 2P^5 + a^4P^3 - a^4b^6 = 0 \\ SP = b^3 \end{cases}.$$

Pour  $P \in \mathbb{R}$ , étudions le polynôme  $\Phi(P) = 2P^5 + a^4P^3 - a^4b^6$ . On a alors  $\Phi'(P) = 10P^4 + 3a^4P^2 > 0$ , et le polynôme  $\Phi$  est strictement croissant et varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il a donc une racine réelle et une seule et cette racine est non nulle. Alors, quel que soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ , le système  $S_3$  a une solution  $(S, P)$  et une seule. Les nombres  $s$  et  $t$  sont les racines du trinôme  $X^2 - SX + P$ , et celui-ci aura des racines réelles distinctes si et seulement si  $S^2 - 4P > 0$ . En tenant compte de la relation  $SP = b^3$ , cette condition devient  $P < 2^{-2/3}b^2$ . Comme  $P$  est une fonction strictement croissante, cette condition équivaut à  $\Phi(P) < \Phi(2^{-2/3}b^2)$ , et puisque  $\Phi(P) = 0$ , elle sera satisfaite si et seulement si  $\Phi(2^{-2/3}b^2) > 0$ . On obtient  $\Phi(2^{-2/3}b^2) = \frac{b^6}{4}(b^4 2^{-1/3} - 3a^4)$ , d'où la condition  $b^2 > 2^{1/6}3^{1/2}a^2$ .

### Remarque

La condition obtenue dans 1) correspond à l'égalité  $s = t$  dans le système du 2).

## 10.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

## Ce qu'il faut savoir

On munit  $\mathbb{R}^3$  de la base orthonormale directe canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1) Une surface paramétrée  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est définie par une application  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  :  $\mathcal{S} = \{f(u, v) \mid (u, v) \in U\}$ . On dit que  $f$  est un **paramétrage** de  $\mathcal{S}$ .

Un point  $M_0 = f(u_0, v_0)$  de  $\mathcal{S}$  est dit **régulier** lorsque les vecteurs  $\vec{V}_1 = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$

et  $\vec{V}_2 = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$  sont non colinéaires, c'est-à-dire lorsque le vecteur

$\vec{N} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$  est non nul ; dans ce cas, la droite passant

par  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $\vec{N}$  est la **normale** à  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$ . Le plan passant par  $M_0$  et dont la direction est le plan vectoriel  $\text{Vect}(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  est le **plan tangent** à  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$ . C'est aussi le plan passant par  $M_0$  et orthogonal à  $\vec{N}$ .

La surface  $\mathcal{S}$  est dite **régulière** lorsque tous ses points sont réguliers.

2) **Un cas particulier.** Lorsque  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{S} = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$  est la surface définie par le paramétrage  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , avec  $f(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$ . On dit que  $\mathcal{S}$  est la surface d'équation  $z = \varphi(x, y)$ . Une telle surface est régulière. Le plan tangent au point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0 = \varphi(x_0, y_0))$  est le plan d'équation cartésienne

$$z = z_0 + (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3) **Surface d'équation  $F(x, y, z) = 0$ .** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $F$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}$$

est appelé la surface d'équation  $F(x, y, z) = 0$ .

Un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathcal{S}$  est dit régulier lorsque le gradient de  $F$  au point  $M_0$  :  $\text{grad}(F)(M_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$  est non nul. Dans ce cas, le plan tangent à  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$  est le plan passant par  $M_0$  et orthogonal au vecteur  $\text{grad}(F)(M_0)$ .

## Vocabulaire

Une droite  $D$  est dite **tracée** sur une surface  $\mathcal{S}$  lorsque tous les points de  $D$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ . Une surface est dite **réglée** lorsqu'elle est la réunion d'une famille de droites.

### Exercice 10.1

#### TPE PC 2006

Trouver les plans tangents à la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  et parallèles au plan d'équation  $x + 2y + z = 0$ .

Soit  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 1$  et soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{S}$ . Le gradient de  $F$  au point  $M_0$  est le vecteur  $\vec{N} = (2x_0, 2y_0, 8z_0)$ . Il est non nul puisque  $\|\vec{N}\|^2 = 4(x_0^2 + y_0^2 + 16z_0^2) > 0$ . La surface  $\mathcal{S}$  est donc régulière. La normale à  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$  est aussi dirigée par le vecteur  $\vec{N}_1 = \frac{1}{2}\vec{N} = (x_0, y_0, 4z_0)$ .

Pour que le plan tangent au point  $M_0$  soit parallèle au plan d'équation  $x + 2y + z = 0$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{N}_1 = \lambda(1, 2, 1)$ , c'est-à-dire tel que  $x_0 = \lambda$ ,  $y_0 = 2\lambda$  et  $4z_0 = \lambda$ . La relation  $x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 1$  équivaut alors à  $\lambda^2 = \frac{4}{21}$  et donc à  $\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

On obtient donc deux points symétriques par rapport à l'origine :  $M_0 = \frac{2}{\sqrt{21}}(1, 2, 1/4)$  et  $M'_0 = -M_0$ . Les plans tangents à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  et  $M'_0$  sont les plans d'équation respective  $x + 2y + z = \frac{\sqrt{21}}{2}$  et  $x + 2y + z = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ .

### Exercice 10.2

On considère la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $x^3 - 3xy + z = 0$  et un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  appartenant à  $\mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe une droite et une seule passant par  $M_0$  tracée sur  $\mathcal{S}$ .

Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{S}$  et soit  $V = (a, b, c)$  un vecteur non nul. Les points de la droite  $D$  passant par  $M_0$  et dirigée par  $V$  sont de la forme  $M = (x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda)$  où  $\lambda$  est un réel. Pour que  $D$  soit incluse dans la surface  $\mathcal{S}$ , il faut et il suffit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (x_0 + a\lambda)^3 - 3(x_0 + a\lambda)(y_0 + b\lambda) + (z_0 + c\lambda) = 0$$

soit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, a^3 \lambda^3 + 3(a^2 x_0 - 3ab) \lambda^2 + (3ax_0^2 - 3ay_0 - 3bx_0 + c) \lambda = 0.$$

Cette dernière relation signifie que le polynôme

$$P(\lambda) = a^3 \lambda^3 + 3(a^2 x_0 - 3ab) \lambda^2 + (3ax_0^2 - 3ay_0 - 3bx_0 + c) \lambda$$

est le polynôme nul, c'est-à-dire que ses coefficients sont nuls. On obtient donc  $a = 0$  et  $c = 3bx_0$  et donc  $V = (0, b, 3bx_0) = b(0, 1, 3x_0)$ . Il existe donc une droite  $D$  et une seule : c'est la droite passant par  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $(0, 1, 3x_0)$ .

### Remarque

On en déduit que  $S$  est une **surface réglée**, c'est-à-dire qu'elle est la réunion d'une famille de droites.

### Ce qu'il faut savoir

#### Intersection de deux surfaces

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  les surfaces d'équation respective  $F_1(x, y, z) = 0$  et  $F_2(x, y, z) = 0$ . On suppose qu'il existe un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  situé sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  et régulier pour chacune des deux surfaces. On suppose en outre que les plans tangents en  $M_0$  à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont distincts, c'est-à-dire que les vecteurs gradients de  $F_1$  et  $F_2$  au point  $M_0$  ne sont pas colinéaires.

Dans ces conditions, au voisinage de  $M_0$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  est le support d'une courbe paramétrée régulière et la tangente en  $M_0$  à cette courbe est la droite d'intersection des plans tangents aux deux surfaces (cf. exercice 10.6).

## 10.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

### Exercice 10.3

#### CCP PC 2006, Centrale PC 2006

On considère la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $z^3 = xy$ .

- 1) Ecrire un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{S}$ .
- 2) Montrer que les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont les seules droites tracées sur  $\mathcal{S}$ .
- 3) Trouver l'équation du plan tangent en un point régulier de la surface.
- 4) Quels sont les points réguliers de  $\mathcal{S}$  en lesquels le plan tangent contient la

$$\text{droite} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

- 1) On peut proposer le paramétrage  $x = u^3$ ,  $y = v^3$ ,  $z = uv$ , avec  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

2) On voit que  $\mathcal{S}$  contient les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Réciproquement soit  $D$  une droite,  $A = (a, b, c)$  un point de  $D$  et  $V = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  un vecteur directeur de  $D$ . Pour que  $D$  soit tracée sur  $\mathcal{S}$ , il faut et il suffit que  $(c + t\gamma)^3 = (a + t\alpha)(b + t\beta)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On doit donc avoir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^3\gamma^3 + (3c\gamma^2 - \alpha\beta)t^2 + (3c^2\gamma - a\beta - b\alpha)t + c^3 - ab = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'annule pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , est que ses coefficients soient nuls. On obtient  $\gamma^3 = 0$ ,  $3c\gamma^2 - \alpha\beta = 0$ ,  $3c^2\gamma - a\beta - b\alpha = 0$  et  $c^3 - ab = 0$ , d'où en déduit aisément  $\gamma = 0$  et  $\alpha\beta = 0$ .

- Si  $\alpha = 0$ , on a alors  $a\beta = 0$  et, puisque  $\beta \neq 0$ , on a  $a = 0$ , puis,  $c^3 = 0$ .  $D$  est alors l'axe  $(Oy)$ .
- Si  $\beta = 0$ , on a alors  $b\alpha = 0$  et, puisque  $\alpha \neq 0$ , on a  $b = 0$ , puis,  $c^3 = 0$ .  $D$  est alors l'axe  $(Ox)$ .

3) La surface  $\mathcal{S}$  est définie par l'équation  $f(x, y, z) = 0$  avec  $f(x, y, z) = z^3 - xy$ . La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\text{grad}(f)(x, y, z) = (-y, -x, 3z^2)$ . Le gradient de  $f$  s'annule seulement à l'origine, qui est donc le seul point singulier de  $\mathcal{S}$ . En un point régulier  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathcal{S}$  le plan tangent est le plan d'équation  $-y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + 3z_0^2(z - z_0) = 0$ . En tenant compte de la relation  $z_0^3 = x_0y_0$  on obtient  $xy_0 + yx_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 0$ .

4) Pour que le plan tangent au point  $M_0$  contienne la droite d'équations  $x = 2$ ,  $y = 3z - 3$ , il faut et il suffit que

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad 2y_0 + (3z - 3)x_0 - 3zz_0^2 + z_0^3 = 3z(x_0 - z_0^2) - 3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0,$$

c'est-à-dire  $x_0 = z_0^2$  et  $-3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0$  et, puisque  $M_0 \in \mathcal{S}$ ,  $z_0^3 = x_0y_0$ .

Si  $z_0 = 0$ , on obtient  $x_0 = 0$  puis  $y_0 = 0$ , ce qui est exclu puisque le point  $M_0$  est régulier. On a donc  $z_0 \neq 0$  et les relations  $x_0 = z_0^2$  et  $x_0y_0 = z_0^3$  donnent  $y_0 = z_0$ . La relation  $-3x_0 + 2y_0 + z_0^3 = 0$  donne alors  $z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$ , d'où  $z_0 = 1$  ou  $z_0 = 2$  et on obtient finalement  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  ou  $(x_0, y_0, z_0) = (4, 2, 2)$ .

#### Exercice 10.4

##### Mines-Ponts MP 2006

On donne la surface  $\mathcal{S}$  d'équation cartésienne  $xyz = 1$  et  $\Sigma$  l'ensemble des projections orthogonales de  $O$  sur les plans tangents à  $\mathcal{S}$ . Donner une équation cartésienne de  $\Sigma$ .

La fonction  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = xyz - 1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  on a  $\text{grad}(f)(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ . En particulier si  $(x_0, y_0, z_0)$  est un point de  $(\mathcal{S})$  alors  $\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}\right) \neq (0, 0, 0)$ . Tous les points de  $\mathcal{S}$  sont réguliers et le plan tangent  $T_0$  à  $\mathcal{S}$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est le plan d'équation

cartésienne  $(x - x_0)\frac{1}{x_0} + (y - y_0)\frac{1}{y_0} + (z - z_0)\frac{1}{z_0} = 0$ , ou  $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3$ .

Le vecteur  $\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0)$  est un vecteur normal au plan  $T_0$ ; il en résulte que la projection orthogonal de  $O$  sur  $T_0$  est le point  $P = (X, Y, Z) = \left(\frac{\lambda}{x_0}, \frac{\lambda}{y_0}, \frac{\lambda}{z_0}\right)$ , avec

$$\lambda \left( \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2} \right) = 3.$$

On en déduit que  $XYZ = \lambda^3$  et que  $X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda^2 \left( \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2} \right) = 3\lambda$ , puis

$$\text{que } \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^3}{XYZ} = 27.$$

Réciproquement soient  $X, Y$  et  $Z$  trois réels non nuls tels que  $(X^2 + Y^2 + Z^2)^3 = 27XYZ$ .

Posons  $x_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3X}$ ,  $y_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3Y}$  et  $z_0 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3Z}$ . On a alors  $x_0 y_0 z_0 = 1$ . Le point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  appartient de  $S$  et le plan tangent à  $S$  en ce point est le plan d'équation

$$x \frac{3X}{X^2 + Y^2 + Z^2} + y \frac{3Y}{X^2 + Y^2 + Z^2} + z \frac{3Z}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 3.$$

La projection orthogonale de  $O$  sur ce plan est précisément  $(X, Y, Z)$ .

Ainsi  $\Sigma$  est la surface d'équation  $\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^3}{XYZ} = 27$ .

### Exercice 10.5

Déterminer les droites tracées sur le paraboloid hyperbolique  $H$  d'équation

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \text{ Montrer que } H \text{ est une surface réglée.}$$

Nous utilisons la méthode de l'exercice précédent : soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $H$  et soit  $V = (\alpha, \beta, \gamma)$  un vecteur non nul. Pour que la droite passant par  $M_0$  et dirigée par  $V$  soit contenue dans  $H$  il faut et il suffit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, z_0 + \gamma\lambda = \frac{(x_0 + \alpha\lambda)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta\lambda)^2}{b^2}$$

c'est-à-dire que le polynôme

$$P(\lambda) = \left( \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \right) \lambda^2 + \left( 2\frac{x_0\alpha}{a^2} - 2\frac{y_0\beta}{b^2} - \gamma \right) \lambda$$

soit le polynôme nul, ou encore que  $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$  et  $\gamma = \frac{2x_0\alpha}{a^2} - \frac{2y_0\beta}{b^2}$ .

La première relation s'écrit  $\frac{\alpha}{a} = \varepsilon \frac{\beta}{b}$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$ . Posons  $k = \frac{\alpha}{a}$ . Si  $\varepsilon = +1$ , on obtient  $\alpha = ka$ ,  $\beta = kb$  puis  $\gamma = 2k \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right)$ , tandis que si  $\varepsilon = -1$ , on obtient  $\alpha = ka$ ,  $\beta = -kb$  et  $\gamma = 2k \left( \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right)$ .

On obtient donc les vecteurs de la forme

$$V = \left( ka, kb, 2k \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right) \text{ ou } V = \left( ka, -kb, 2k \left( \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Il existe donc exactement deux droites passant par  $M_0$  et contenues dans  $H$  : elles sont respectivement dirigées par

$$V_1 = \left( a, b, \frac{2x_0}{a} - \frac{2y_0}{b} \right) \quad \text{et} \quad V_2 = \left( a, -b, \frac{2x_0}{a} + \frac{2y_0}{b} \right).$$

Il en résulte que  $H$  est la réunion d'une famille de droites : c'est donc une surface réglée.

### Exercice 10.6

#### Centrale PC 2007

Soit  $a > 0$  et soit  $\Gamma$  l'intersection de la sphère  $S$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  et du cylindre  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 - ax = 0$ .

- 1) Déterminer un paramétrage de  $\Gamma$ .
- 2) Quel est la tangente à  $\Gamma$  en l'un de ses points ?
- 3) Soit  $P$  le point d'intersection de la tangente à  $\Gamma$  en un point  $M$  avec le plan  $(xOy)$ . Déterminer le lieu de  $P$  lorsque  $M$  parcourt  $\Gamma$ .

1) L'intersection du cylindre  $\mathcal{C}$  avec le plan  $xOy$  est la courbe d'équation

$$\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{a^2}{4} \right).$$

C'est le cercle de centre  $A = \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$  et de rayon  $\frac{a}{2}$ .

Les points de  $\mathcal{C}$  sont les points  $M = (x, y, z)$  tels que

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos(\theta)) = a \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad y = \frac{a}{2} \sin(\theta) = a \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right), \\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Pour qu'un tel point  $M$  appartienne à  $\Gamma$ , il faut et il suffit que  $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$ , c'est-à-dire  $z^2 = a^2 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = a^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$ . On a donc  $z = \pm a \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$ .

Comme  $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)$ , la courbe  $\Gamma$  peut être décrite par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = a \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ y = a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ z = a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad \theta \in [-2\pi, 2\pi].$$

2) La tangente à  $\Gamma$  au point  $M$  de paramètre  $\theta$  est dirigée par le vecteur

$$(x'(\theta), y'(\theta), z'(\theta)) = \frac{a}{2} \left( -\sin(\theta), \cos(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

C'est aussi l'intersection du plan tangent à la sphère  $\mathcal{S}$  (le plan passant par  $M$  et perpendiculaire au rayon  $OM$ ) et du plan tangent au cylindre  $\mathcal{C}$  (le plan perpendiculaire à la droite  $(Am)$  passant par la projection orthogonale de  $M$  sur le plan  $xOy$ ).

3) On déduit des calculs précédents un paramétrage de la tangente à  $\Gamma$  au point  $M$  de paramètre  $\theta$  :

$$\begin{cases} x = a \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \lambda \frac{a}{2} \sin(\theta) \\ y = a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \lambda \frac{a}{2} \cos(\theta) \\ z = a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \lambda \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour  $\theta \neq \pm\pi$ , le point  $P$  où la tangente coupe le plan  $(xOy)$  correspond à la valeur  $\lambda = -2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et les coordonnées de  $P$  sont alors

$$\begin{cases} x = a \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + a \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \\ y = a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - a \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

On obtient alors aisément

$$x = a + a \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } y = a \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et, en posant  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ,  $x = a + a \frac{t^2}{1+t^2}$ ,  $y = a \frac{t^3}{1+t^2}$ .



Le lieu de  $P$  est donc la courbe du plan ( $xOy$ ) définie par la paramétrisation

$$\begin{cases} x = a + a \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = a \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Cette courbe est appelée une cissoïde droite.)

### 10.3 SURFACES USUELLES PC

#### Ce qu'il faut savoir

#### 1) Cylindre

Une surface cylindrique  $\mathcal{S}$  est définie par la donnée d'une courbe  $\Gamma$  et d'un vecteur non nul  $\vec{K}$ .

La réunion des droites  $D$  dirigées par le vecteur  $\vec{K}$  et qui rencontrent  $\Gamma$  est appelée un cylindre. Les droites  $D$  sont appelées les **génératrices** du cylindre et la courbe  $\Gamma$  une **directrice**.

L'intersection d'un cylindre avec un plan orthogonal aux génératrices est appelée une **section droite**.

**Paramétrage du cylindre  $\mathcal{S}$  :** Supposons que  $\Gamma$  soit définie par un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1 : u \in I \mapsto \gamma(u)$ . Un paramétrage de  $\mathcal{S}$  est alors

$$(u, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto f(u, v) = \gamma(u) + v\vec{K}$$

**Plan tangent :** On a ici  $\vec{V}_1 = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \gamma'(u)$  et  $\vec{V}_2 = \vec{K}$ .

Le plan tangent en un point régulier  $M_0 = f(u_0, v_0)$  est le plan passant par  $M_0$  et dont la direction est  $\text{Vect}(\gamma'(u_0), \vec{K})$ . En particulier, ce plan tangent contient la génératrice qui passe par  $M_0$ .

#### 2) Cônes

Une surface conique  $\mathcal{S}$  est définie par la donnée d'une courbe  $\Gamma$  et d'un point  $S$  qui n'est pas situé sur  $\Gamma$ .

La réunion des droites passant par  $S$  et qui rencontrent  $\Gamma$  est appelée le cône de sommet  $S$  et de directrice  $\Gamma$ . Ces droites sont appelées les **génératrices** du cône,  $S$  est appelé le **sommet** du cône et  $\Gamma$  est une **directrice**.

**Paramétrage du cône :** Supposons  $\Gamma$  défini par un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1 : u \in I \mapsto \gamma(u)$  et soit  $S = (a, b, c)$ .

Un point  $M$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $M$  est barycentre de  $S$  et d'un point de  $\Gamma$ , c'est-à-dire si et seulement si il existe  $u \in I$  et  $v \in \mathbb{R}$  tel que  $M = (1 - v)S + v\gamma(u)$ . La surface  $\mathcal{S}$  est donc défini par le paramétrage

$$(u, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto f(u, v) = (1 - v)S + v\gamma(u).$$

On a ici  $\vec{V}_1 = \frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = v\gamma'(u)$  et  $\vec{V}_2 = \frac{\partial M}{\partial v}(u, v) = -S + \gamma(u) = \overrightarrow{SP(u)}$  où  $P(u)$  est le point de  $\Gamma$  de paramètre  $u$ .

Pour  $v = 0$ , on a  $M(u, 0) = S$  et on a alors  $\vec{V}_1 = \vec{0}$ . Le sommet est donc un point singulier.

Si  $(u_0, v_0) \in I \times \mathbb{R}$  avec  $v_0 \neq 0$ , le point  $M_0 = M(u_0, v_0)$  est régulier si et seulement les vecteurs  $\varphi'(u_0)$  et  $\overrightarrow{SP(u_0)}$  ne sont pas colinéaires. Dans ce cas le plan tangent à  $S$  au point  $M_0$  est le plan passant par  $M_0$  et dirigé par  $\text{Vect}(\varphi'(u_0), \overrightarrow{SP(u_0)})$ . Il contient la génératrice qui passe par  $M_0$ .

### 3) Surface de révolution

Soit  $D$  est une droite. Un **cercle d'axe**  $D$  est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à  $D$  et dont le centre est situé sur  $D$ .

Une **surface de révolution**  $S$  est définie par la donnée d'une courbe  $\Gamma$  et d'une droite  $D$ . La surface  $S$  est la réunion des cercles d'axe  $D$  qui rencontrent  $\Gamma$ .

La droite  $D$  est appelé l'**axe**, la courbe  $\Gamma$  est appelée une **directrice** et les cercles d'axe  $D$  qui rencontrent  $\Gamma$  sont appelés les **parallèles** de la surface.

On dit que  $S$  est la surface de révolution engendrée par la rotation de  $\Gamma$  autour de  $D$ .

Les plans qui contiennent l'axe  $D$  sont appelés les **plans méridiens**. L'intersection de  $S$  avec un plan méridien est appelé une **méridienne**.

**Paramétrage :** Nous considérons ici une courbe  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  définie par le paramétrage  $u \in I \mapsto \gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \gamma_3(u))$ . Soit  $S$  la surface de révolution engendrée par la rotation de  $\Gamma$  autour de l'axe  $Oz$ .

On obtient un paramétrage  $f$  de  $S$  en écrivant qu'un point  $M = (x, y, z)$  appartient à  $S$  si et seulement si  $M$  est l'image d'un point de  $\Gamma$  dans une rotation d'axe  $Oz$ , c'est-à-dire  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ \gamma_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \cos(v) - \gamma_2(u) \sin(v) \\ \gamma_1(u) \sin(v) + \gamma_2(u) \cos(v) \\ \gamma_3(u) \end{pmatrix}$$

**Détermination d'une surface de révolution par une équation cartésienne :**

a) Tout équation de la forme  $f(x^2 + y^2, z)$  représente une surface de révolution d'axe  $Oz$ .

b) Soit  $\Gamma$  une courbe du plan  $yOz$  définie par une équation de la forme  $\varphi(y, z) = 0$  et désignons par  $S$  la surface de révolution engendrée par la rotation de  $\Gamma$  autour de l'axe  $Oz$ . Alors  $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \cdot \varphi(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$  est une équation de  $S$ .

## 10.3.1 Exercices d'assimilation

## Exercice 10.7

## Centrale PC 2006

Donner une équation cartésienne du cylindre  $\mathcal{C}$  de directrice  $\Gamma$  définie par

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

et dont les génératrices sont dirigées par le vecteur  $\vec{K} = (1, 1, -1)$ .

Pour qu'un point  $M = (x, y, z)$  appartienne à  $\mathcal{C}$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $M + \lambda \vec{K} \in \Gamma$ , c'est-à-dire tel que  $2(x + \lambda)^2 + 3(y + \lambda)^2 = 1$  et  $z - \lambda = 0$ . Il en résulte que  $\mathcal{C}$  est le cylindre d'équation  $2(x + z)^2 + 3(y + z)^2 = 1$ .

## Exercice 10.8

On considère l'ellipsoïde  $E$  d'équation  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .

1) Montrer que tous les points de  $E$  sont réguliers et indiquer un vecteur normal en un point  $M = (x, y, z)$  de  $E$ .

2) Ecrire une équation du cylindre  $S$  dont les génératrices sont dirigées par le vecteur non nul  $\vec{V} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et sont tangentes à  $E$ .

3) Ecrire une équation du cône  $C$  de sommet  $A = (a, b, c)$  et dont les génératrices sont tangentes à  $E$ .

1) Désignons par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ . C'est une fonction de classe  $C^1$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\text{grad}(f)(M) = (2x, 4y, 6z)$ . Il est nul si et seulement si  $x = y = z = 0$ , et on a donc  $\text{grad}(f)(M) \neq 0$ , pour tout  $M \in E$ . Un vecteur normal en  $M$  à  $E$  est précisément le vecteur  $\text{grad}(f)(M)$ .

2) Pour qu'un point  $M = (x, y, z)$  appartienne à  $S$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

- a)  $M + \lambda \vec{V}$  appartient à  $(E)$ ,
- b) le vecteur  $\vec{V}$  est orthogonal au vecteur  $\text{grad}(f)(M + \lambda \vec{V})$ .

La condition a) s'écrit  $f(x + \alpha\lambda, y + \beta\lambda, z + \gamma\lambda) = 0$ , c'est-à-dire

$$(x + \alpha\lambda)^2 + 2(y + \beta\lambda)^2 + 3(z + \gamma\lambda)^2 - 1 = 0,$$

et la condition b) s'écrit quant à elle

$$2\alpha(x + \alpha\lambda) + 4\beta(y + \beta\lambda) + 6\gamma(z + \gamma\lambda) = 0.$$

Soit  $P$  le polynôme du défini par

$$P(\lambda) = (x + \alpha\lambda)^2 + 2(y + \beta\lambda)^2 + 3(z + \gamma\lambda)^2.$$

Les conditions précédentes s'écrivent donc : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $P(\lambda) = 0$  et  $P'(\lambda) = 0$ , ce qui signifie que le polynôme  $P$  admet une racine réelle double. Comme

$$P(\lambda) = (\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2)\lambda^2 + (2x\alpha + 4y\beta + 6z\gamma)\lambda + x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$$

est un polynôme du second degré on traduit cette condition en écrivant que son discriminant est nul. Ainsi le point  $M = (x, y, z)$  appartient à  $S$  si et seulement si

$$(\alpha x + 2\beta y + 3\gamma z)^2 - (\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2)(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) = 0.$$

3) On utilise la même méthode : pour qu'un point  $M = (x, y, z)$  appartienne à  $C$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

- a)  $\lambda M + (1 - \lambda)A$  appartient à  $(E)$ ,
- b) le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  est orthogonal au vecteur  $\text{grad}(f)(\lambda M + (1 - \lambda)A)$ .

La condition a) s'écrit  $f(\lambda x + a(1 - \lambda), \lambda y + b(1 - \lambda), \lambda z + c(1 - \lambda)) = 0$ , c'est-à-dire

$$(\lambda x + a(1 - \lambda))^2 + 2(\lambda y + b(1 - \lambda))^2 + 3(\lambda z + c(1 - \lambda))^2 - 1 = 0,$$

et la condition b) s'écrit quant à elle

$$2(x - a)(\lambda x + a(1 - \lambda)) + 4(y - b)(\lambda y + b(1 - \lambda)) + 6(z - c)(\lambda z + c(1 - \lambda)) = 0.$$

Soit  $Q$  le polynôme du défini par

$$Q(\lambda) = (\lambda x + a(1 - \lambda))^2 + 2(\lambda y + b(1 - \lambda))^2 + 3(\lambda z + c(1 - \lambda))^2 - 1.$$

Les conditions précédentes s'écrivent : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $Q(\lambda) = 0$  et  $Q'(\lambda) = 0$  et expriment donc que  $Q$  a une racine réelle double.

Comme

$$Q(\lambda) = ((x - a)^2 + 2(y - b)^2 + 3(z - c)^2)\lambda^2 + 2(a(x - a) + 2b(y - b) + 3c(z - c))\lambda + a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 1,$$

on traduit cette condition en écrivant que le discriminant est nul. On obtient

$$(a(x - a) + 2b(y - b) + 3c(z - c))^2 - ((x - a)^2 + 2(y - b)^2 + 3(z - c)^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 1) = 0.$$

### 10.3.2 Exercices d'entraînement et d'approfondissement

#### Exercice 10.9

##### Centrale PC 2006

Identifier dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe  $\Gamma$  d'équation 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Donner l'équation de la surface engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe  $(Oz)$ .

La courbe  $\Gamma$  est l'intersection du cylindre de révolution  $C$  d'équation  $x^2 + (y-1)^2 = 4$  avec le plan  $\Pi$  d'équation  $2y - 2z + 3 = 0$ . L'axe de  $C$  est la droite parallèle à l'axe  $(Oz)$  qui passe par le point  $(0, 1, 0)$ . Comme le plan  $\Pi$  n'est pas parallèle à l'axe  $(Oz)$ , la courbe  $\Gamma$  est une ellipse.

Notons que  $\Gamma$  est aussi l'intersection du paraboloïde  $P$  d'équation  $x^2 + y^2 = 2z$  et du plan  $\Pi$ . Soit alors  $S$  la surface engendrée par la rotation de  $\Gamma$  autour de l'axe  $(Oz)$  et soit  $M = (x, y, z)$  un point de  $S$ . Il existe alors  $\theta \in \mathbb{R}$ , tel que l'image  $M' = (x', y', z')$  de  $M$  par la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $(Oz)$  soit un point de  $\Gamma$ . On a alors  $(x', y', z') = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$  et  $(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = 2z$ . On a donc  $x^2 + y^2 = 2z$ , ce qui montre que  $S$  est incluse dans le paraboloïde  $P$ .

Observons que  $S$  n'est pas égal à  $P$  tout entier. On a en effet  $x'^2 + (y' - 1)^2 = 4$ , d'où  $-1 \leq y' \leq 3$  et puisque  $z = y' + \frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{9}{2}$ .

Réciproquement soit  $M = (x, y, z)$  un point de  $P$  tel que  $\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{9}{2}$ . Le nombre réel  $y' - 1 = z - \frac{5}{2}$  est compris entre  $-2$  et  $2$  et il existe donc un réel  $x'$  tel que  $x'^2 + (y' - 1)^2 = 4$ . Comme  $x^2 + y^2 = 2z = x'^2 + y'^2$ , le point  $M'$  appartient à  $\Gamma$  et  $M$  est l'image de  $M' = (x', y', z)$  dans une rotation d'axe  $(Oz)$ . Donc  $M$  appartient à  $S$ .



### Exercice 10.10

#### CCP PC 2007

Soit  $(C)$  la courbe définie par le paramétrage  $x = \sin 2t$ ,  $y = 1 - \cos 2t$ ,  $z = 2 \cos t$ .

1) Montrer que  $(C)$  est contenue dans une sphère de centre  $O$  dont on précisera le rayon.

2) Pour  $a$  et  $b$  réels et  $R$  positif, on note  $(S_{a,b,R})$  la surface d'équation  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ . Montrer que  $(C)$  est contenu dans  $(S_{a,b,R})$  si et seulement si  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $R = 1$ .

3) En déduire que  $(C)$  est tracée sur un cylindre de génératrices parallèles à  $Ox$ , dont on précisera les sections droites.

4) Montrer que  $(C)$  est tracée sur chaque quadrique  $(Q_{(\alpha,\beta)})$  d'équation

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 + 2(\alpha - \beta)y - 4\beta = 0 \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels quelconques.}$$

5) La famille de quadriques  $(Q_{(\alpha,\beta)})$  (pour  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ) contient-elle des cônes ? Si oui, préciser leur sommet.

1) Pour tout réel  $t$  on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2 2t + (1 - \cos 2t)^2 + 4 \cos^2 t = 2(1 - \cos 2t) + 2(1 + \cos 2t) = 4.$$

La courbe  $(C)$  est donc contenue dans la sphère de centre  $O$  et de rayon 2.

2) Pour que  $(C)$  soit contenue dans le cylindre  $(S_{a,b,R})$ , il faut et il suffit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\sin 2t - a)^2 + (1 - \cos 2t - b)^2 - R^2 = 0,$$

c'est-à-dire (1) :  $\forall t \in \mathbb{R}, -2a \sin 2t - 2(1 - b) \cos 2t + 1 + a^2 + (1 - b)^2 - R^2 = 0$ .

La relation (1) est évidemment vérifiée si  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $R = 1$ . Réciproquement si la relation (1) est vérifiée, on a en particulier pour  $t = 0$ ,  $-2(1-b)+1+a^2+(1-b)^2-R^2 = 0$ , puis pour  $t = \pi/2$ ,  $2(1-b)+1+a^2+(1-b)^2-R^2 = 0$ , d'où on déduit  $2(1-b) = 0$  puis  $1 + a^2 + (1-b)^2 - R^2$ . En prenant alors  $t = \pi/4$  on obtient  $-2a = 0$  et on en déduit que  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $R = 1$ .

La courbe  $(C)$  est donc contenue dans le cylindre  $(S_{0,1,1})$  : c'est le cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe  $Oz$  et dont une section droite est le cercle du plan  $xOy$  de centre  $A = (0, 1, 0)$  et de rayon 1.

3) Les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point  $M$  de  $(C)$  vérifient à la fois les relations  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$  et  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Par différence on obtient  $z^2 + 2y = 4$ . La courbe  $(C)$  est donc contenue dans la surface d'équation  $z^2 + 2y = 4$  : il s'agit d'un cylindre de génératrices parallèles à  $Ox$  et dont une section droite est la parabole du plan  $yOz$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}z^2 + 2$ .

4) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\alpha \sin^2 2t + \alpha(1 - \cos 2t)^2 + 4\beta \cos^2 t + 2(\beta - \alpha)(1 - 2 \cos 2t) - 4\beta = 0.$$

La courbe  $(C)$  est donc incluse dans la quadrique d'équation

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 + 2(\alpha - \beta)y - 4\beta = 0.$$

5) Lorsque  $\alpha = 0$ , on obtient la quadrique d'équation  $z^2 + 2y - 4 = 0$  : il s'agit du cylindre étudié dans la question 3). (Ce n'est pas un cône). On peut donc supposer  $\alpha \neq 0$ . L'équation de  $(Q_{(\alpha,\beta)})$  peut s'écrire

$$\alpha x^2 + \alpha \left( y + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right)^2 + \beta z^2 - \left( 4\beta + \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha} \right) = 0.$$

Soit  $S$  le point de coordonnées  $(0, y_0, 0)$  où  $y_0 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$  et plaçons nous dans le repère  $R = (S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Si  $(X, Y, Z)$  désigne les coordonnées d'un point dans ce repère, une équation de  $(Q_{(\alpha,\beta)})$ , est alors  $\alpha X^2 + \alpha Y^2 + \beta Z^2 = K$ , avec  $K = 4\beta + \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha}$ . C'est un cône si et seulement si  $K = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha = \beta$ . Dans le repère initial il s'agit du cône d'équation  $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$ . Son sommet est le point  $S$ .

## Exercice 10.11

## Centrale PC 2005

- 1) Donner l'équation du cylindre  $\mathcal{C}$  qui s'appuie sur la courbe  $\Gamma$  d'équations  $f(x, y) = 0, z = 0$  et dont la direction est définie par le vecteur  $\vec{u} = (a, b, c)$  ( $c \neq 0$ ).
- 2) Montrer que l'équation d'un cylindre peut se mettre sous la forme  $f(P, Q) = 0$  où  $P = 0$  et  $Q = 0$  sont des équations de plans. Donner la direction des génératrices.
- 3) Caractériser la surface d'équation  $(x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 + (3z - x)^2 = 1$ .

1) Pour que  $M = (x, y, z)$  appartienne à  $\mathcal{C}$ , il faut et il suffit qu'il existe un point  $M_0 = (x_0, y_0, 0)$  appartenant à  $\Gamma$  et un réel  $\lambda$  tel que  $M = M_0 + \lambda \vec{u}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et  $x = x_0 + \lambda a, y = y_0 + \lambda b$  et  $z = \lambda c$ . Ces relations équivalent à  $\lambda = \frac{z}{c}, x_0 = x - \frac{az}{c}$  et  $y_0 = y - \frac{bz}{c}$ .

$\mathcal{C}$  est donc la surface d'équation  $f(x - \frac{az}{c}, y - \frac{bz}{c}) = 0$ .

2) Soit maintenant  $\mathcal{C}$  un cylindre arbitraire de  $\mathbb{R}^3$  dont les génératrices sont dirigées par un vecteur unitaire  $\vec{K}$  et soit  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ . Dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ ,  $\mathcal{C}$  admet une équation de la forme  $f(X, Y) = 0$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$  la matrice de passage de la base  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Désignons par  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(X, Y, Z)$  ses coordonnées dans la base  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ .

On a alors :

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z, Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

et il en résulte que, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $\mathcal{C}$  admet une équation de la forme  $f(P, Q) = 0$ , avec  $P = X = \alpha x + \beta y + \gamma z$  et  $Q = Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$ .

La direction du cylindre est définie par le vecteur  $\vec{K}$  : c'est donc celle de la droite d'intersection des plans d'équations  $P = 0$  et  $Q = 0$ .

3) L'équation  $(x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 + (3z - x)^2 = 1$  s'écrit  $P^2 + Q^2 + (P + Q)^2 = 1$ , avec  $P = x - 2y$  et  $Q = 2y - 3z$ . Il s'agit de l'équation d'un cylindre dont la direction est celle de la droite définie par les équations  $x - 2y = 0, 2y - 3z = 0$ . Il est dirigé par  $\vec{u} = (6, 3, 2)$ .

Une directrice du cylindre est obtenue en prenant son intersection avec le plan  $(xOy)$ . Il s'agit de l'ellipse d'équations  $2x^2 + 8y^2 - 4xy = 1, z = 0$ .

## Exercice 10.12

## Centrale PC 2006

Soient  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $T = \{(x, y, g(x^2 + y^2)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

1) Montrer que  $T$  est une surface de révolution.

2) Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $P_t = \{(x, x \tan t, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$ . Étudier les normales à  $T$  aux points de  $T \cap P_t$ . Que remarque-t-on ?

3) Trouver les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telles que les normales à la surface  $S$  d'équation  $z = f(x, y)$  coupent l'axe  $Oz$ .

*Indication de l'examinateur :* on pourra utiliser les coordonnées polaires.

1) Soit  $M = (x, y, z)$  un point de  $T$  et soit  $M'(x', y', z')$  l'image de  $M$  par une rotation d'axe  $(Oz)$ . On a alors  $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$  et donc  $z' = z = g(x^2 + y^2) = g(x'^2 + y'^2)$ . Le point  $M'$  appartient donc à  $T$ , ce qui démontre que  $T$  est une surface de révolution.

2) L'ensemble  $P_t$  est un plan contenant l'axe de la surface de révolution  $T$  : c'est un **plan méridien** de  $T$ . La courbe  $T \cap P_t$  est une **méridienne** de  $T$ .

La surface  $T$  est la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  où  $f(x, y, z) = z - g(x^2 + y^2)$ . La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et pour  $(x, y, z) \in T$ , on a :

$$\text{grad}(f)(x, y, z) = (-2xg'(x^2 + y^2), -2yg'(x^2 + y^2), 1) \neq (0, 0, 0).$$

Il s'agit donc d'une surface régulière et en un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $T$ , la normale est définie par le paramétrage

$$\begin{cases} x = x_0 - 2\lambda x_0 g'(x_0^2 + y_0^2) \\ y = y_0 - 2\lambda y_0 g'(x_0^2 + y_0^2) \\ z = z_0 + \lambda \end{cases}$$

En particulier si  $M_0$  appartient au plan méridien d'équation  $y = x \tan t$  et si  $g'(x_0^2 + y_0^2) \neq 0$ , on a  $x = y = 0$  pour  $\lambda = \frac{1}{2g'(x_0^2 + y_0^2)}$ . Il en résulte que la normale à  $T$  au point  $M_0$  coupe l'axe  $(Oz)$ .

3) Nous supposons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  ne contenant pas l'origine. Comme l'application  $\Phi: (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $V = \Phi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et l'application  $h = f \circ \Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ . (Elle est définie par  $h(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ).

La surface  $S$  est alors définie en coordonnées polaires par le paramétrage  $F$  tel que :

$$\forall (r, \theta) \in V, F(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = h(r, \theta). \end{cases} \quad (r, \theta) \in V.$$



Sachant que

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{\partial h}{\partial r} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \begin{vmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

on a

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial r} \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} \\ -\cos \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \sin \theta \frac{\partial h}{\partial r} \\ r \end{vmatrix}$$

Comme  $\vec{N}$  est non nul,  $S$  est régulière et  $\vec{N}$  est un vecteur directeur de la normale à  $S$  au point  $M = (r \cos \theta, r \sin \theta, h(r, \theta))$ .

Pour que la normale rencontre l'axe  $(Oz)$ , il faut et il suffit que les projections

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} \\ -\cos \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \sin \theta \frac{\partial h}{\partial r} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{m} = \begin{vmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{vmatrix} \quad \text{des vecteurs } \vec{N} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ sur}$$

$(xOy)$  soient colinéaires, c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} & r \cos \theta \\ -\cos \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - r \sin \theta \frac{\partial h}{\partial r} & r \sin \theta \end{vmatrix} = r \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0.$$

On obtient donc la relation  $\frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$ , qui signifie que  $h$  est indépendante de  $\theta$ . Ainsi la condition pour que les normales à  $S$  rencontrent l'axe  $(Oz)$  est que  $f(x, y)$  soit de la forme  $h(\sqrt{x^2 + y^2})$ , ou encore de la forme  $g(x^2 + y^2)$  où  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  (il suffit de considérer la fonction  $g$  définie par  $g(t) = h(t^2)$ ).

## Préambule

La géométrie fait partie intégrante du programme des concours et intervient dans des domaines très variés. Bête noire des candidats, elle ne doit pas être négligée. Malgré l'apparente simplicité des énoncés, la résolution demande un savoir-faire qui ne s'acquiert que par un entraînement régulier. Le lecteur est invité à reprendre les chapitres de géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3 du livre de première année. Le but de ce chapitre – qui n'est en rien exhaustif – est d'inciter le candidat à travailler suffisamment la géométrie en lui montrant un échantillon de ce qui peut lui être demandé aux concours.

## 11.1 GÉOMÉTRIE AFFINE



### Exercice 11.1

#### CCP MP 2006

Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les droites  $\mathcal{D}_1$ , d'équations  $x + y + z - 1 = x - 2y + 2z - a = 0$ , et  $\mathcal{D}_2$ , d'équations  $z - 2bx - 2 = y - x - 1 = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres réels.

Comment choisir  $a$  et  $b$  pour que ces droites soient coplanaires ?

Supposons que  $\mathcal{D}_1$  soit définie par un de ses points  $A_1$  et un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  et de même pour  $\mathcal{D}_2$  avec  $A_2$  et  $\vec{u}_2$ .

On remarque en distinguant le cas  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  parallèles ou non, que ces droites sont coplanaires si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont liés c'est-à-dire

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0.$$

Déterminons  $A_1$  par exemple en choisissant  $z_{A_1} = 0$ . On résout alors le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = a \end{cases}, \text{ il vient } x = \frac{a+2}{3} \text{ et } y = \frac{-a+1}{3}.$$

Donc  $A_1(\frac{a+2}{3}, \frac{-a+1}{3}, 0) \in \mathcal{D}_1$ . On peut trouver un vecteur directeur en cherchant un second point, ou plus directement en calculant avec les formules du produit

vectorel usuel  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$ . De même, on peut choisir

$A_2(0, 1, 2)$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2b \end{pmatrix}$ . Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont coplanaires si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0 \text{ ce qui s'écrit } \begin{vmatrix} -a-2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{a+2} & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -3 & -2b \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient finalement la condition suivante :  $a + 2b + ab - 3 = 0$ .

### Ce qu'il faut retenir

Deux droites de l'espace  $\mathcal{D}_1(A_1, \vec{u}_1)$  et  $\mathcal{D}_2(A_2, \vec{u}_2)$  sont coplanaires si et seulement si  $\det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$ .

### Exercice 11.2

#### Mines-Ponts PC 2005



Soient  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ , quatre points distincts du plan. Existe-t-il quatre points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , tels qu'en posant  $A_5 = A_1$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M_i$  soit le milieu de  $A_i A_{i+1}$  ?

Une rédaction rapide consiste à raisonner avec les affixes  $m_1, \dots, m_4$  des points  $M_1, \dots, M_4$ .

• Supposons qu'il existe quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (d'affixes respectives  $a_1, \dots, a_4$ ) vérifiant l'énoncé. On a :

$$a_1 = a_5 \text{ et pour tout } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \frac{a_i + a_{i+1}}{2} = m_i.$$

De ce système à quatre équations, on en déduit notamment

$$2(m_1 - m_2) = a_1 - a_3 = 2(m_4 - m_3).$$

• Réciproquement, supposons  $m_1 - m_2 = m_4 - m_3$  (1). Soit  $a_1 \in \mathbb{C}$  quelconque. Soient  $a_3 \in \mathbb{C}$  tel que  $2(m_1 - m_2) = a_1 - a_3$  (2),  $a_2 \in \mathbb{C}$  et  $a_4 \in \mathbb{C}$  tels que  $2m_1 = a_1 + a_2$  (3) et  $2m_4 = a_4 + a_1$  (4).

(3) - (2) nous donne  $2m_2 = a_2 + a_3$  et (4)-(2) combiné avec (1) nous donne  $2m_3 = a_3 + a_4$ . On en déduit que la propriété est satisfaite.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante sur les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  est  $\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{M_3 M_4}$  c'est-à-dire que  $M_1 M_2 M_3 M_4$  est un parallélogramme.

**Remarque**

L'exercice revient à déterminer l'image de l'application linéaire associée canoni-

quement à la matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  définie par  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette matrice est de rang 3 et  $\text{Im } M = \{^t(m_1, \dots, m_4) \mid m_1 - m_2 = m_4 - m_3\}$ .

**Exercice 11.3****Polytechnique MP 2006**

Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan,  $A'$  (resp.  $B', C'$ ) un point de  $(BC)$  (resp.  $(AC), (AB)$ ). Montrer que  $(AA'), (BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Pour cet exercice de géométrie affine pure (on ne considère pas de distance euclidienne), considérons un repère qui simplifiera les calculs. Plaçons-nous dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

Remarquons que, nécessairement,  $A' \neq A$  ( $A \notin (BC)$ ) et, implicitement,  $A' \neq C$  et de même pour les points  $B'$  et  $C'$ .

Soit  $\alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ . On a  $\overrightarrow{A'B} - \alpha \overrightarrow{A'C} = \vec{0} = (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) - \alpha(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC})$ , ce qui donne  $(1 - \alpha)\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} - \alpha \overrightarrow{AC}$ . On a  $\alpha \neq 1$ , sinon  $A, B$  et  $C$  seraient alignés, il vient que  $A'$  a pour coordonnées dans notre repère  $\left(\frac{1}{1 - \alpha}, \frac{-\alpha}{1 - \alpha}\right)$ . De la même manière, on trouve  $B' \left(0, \frac{1}{1 - \beta}\right)$  et  $C' \left(\frac{-\gamma}{1 - \gamma}, 0\right)$  avec  $\beta \neq 1$  et  $\gamma \neq 1$ .

On détermine alors des équations des droites  $(AA'), (BB')$  et  $(CC')$ .

Par exemple pour  $(BB')$  : on calcule  $\begin{vmatrix} x - 1 & -1 \\ y & \frac{1}{1 - \beta} \end{vmatrix} = 0$  ce qui nous donne  $x + (1 - \beta)y - 1 = 0$ .

On obtient pour  $(AA')$  :  $\alpha x + y = 0$  et pour  $(CC')$  :  $(\gamma - 1)x + \gamma y - \gamma = 0$ .

Utilisons le lemme suivant : trois droites  $\mathcal{D}_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$  sont concourantes

ou parallèles si et seulement si  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ .

En effet, si on note  $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ , alors le déterminant de  $M$  est nul si et

seulement si le noyau de  $X \mapsto MX$  est non réduit à  $\{0\}$  c'est-à-dire qu'il existe  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  tel que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i x + b_i y + c_i z = 0$ .

Soit  $z \neq 0$ , auquel cas les trois droites sont concourantes au point de coordonnées  $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ , soit  $z = 0$  et alors les vecteurs  $(a_1, a_2, a_3)$  et  $(b_1, b_2, b_3)$  sont colinéaires

(car  $(x, y) \neq (0, 0)$ ) donc les trois vecteurs  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  également ce qui signifie, en considérant les vecteurs normaux, que les trois droites sont parallèles.

Pour terminer la preuve, on calcule

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \beta & -1 \\ \gamma - 1 & \gamma & -\gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 1$$

*Conclusion :*  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes si et seulement si

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

### Remarque

Ce résultat est appelé théorème de Ceva.

### Ce qu'il faut retenir



• Pour un exercice qui n'utilise pas de produit scalaire, d'angle, de distance euclidienne, il est souvent judicieux de choisir un repère affine qui simplifie les calculs.

• Trois droites du plan  $\mathcal{D}_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$  sont concourantes ou parallèles si

et seulement si  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ .

## 11.2 GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

### Exercice 11.4

#### Centrale PSI 2006

1) Montrer que  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

2) Soient  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  et  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ . Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ .

Démontrer géométriquement que  $z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$ .

En déduire une bijection de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{D}$ .

Notons  $\varphi : z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ .

1) Soient  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$  et  $Z = \varphi(z)$ . Alors  $Z = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow (1-Z)z = i(Z+1)$ .

Il est clair que  $Z \neq 1$  (sinon  $2i = 0$ ), et donc  $z = i \frac{Z+1}{1-Z}$ . Ceci prouve que  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  d'application réciproque  $Z \mapsto \frac{Z+1}{1-Z}i$ .

2) Soient  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $-i$  et  $i$ , et soit  $M$  d'affixe  $z$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow BM^2 < AM^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\|^2 < \|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}}_{=4\vec{j}} > 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{H} \quad (\text{le vecteur } \vec{j} \text{ est le vecteur d'affixe } i). \end{aligned}$$

(l'équivalence  $BM < AM \Leftrightarrow M \in \mathcal{H}$  peut aussi se voir directement, il s'agit d'un demi-plan ouvert de frontière la médiatrice de  $[A, B]$ , c'est-à-dire  $(Ox)$ ). Ainsi  $z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \varphi(z) \in \mathcal{D}$  donc  $Z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(Z) \in \mathcal{H}$  (on a bien  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C} \setminus \{-i\}$  et  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ) donc la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{H}$  est une bijection de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 11.5

#### Centrale PC 2005

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté. Soit  $a \in E$  tel que  $a \neq 0$ . Montrer que tout vecteur de  $E$  est entièrement déterminé par la donnée de  $\langle a, x \rangle$  et de  $a \wedge x$ .

Posons  $\vec{T} = \frac{1}{\|a\|}a$ . On choisit  $\vec{J}$  unitaire et orthogonal à  $\vec{T}$  et on pose  $\vec{K} = \vec{T} \wedge \vec{J}$ .

On sait que  $(\vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$  est une base orthonormale directe.

Si  $x$  a pour coordonnées dans cette base  $(x_1, x_2, x_3)$ , alors  $\langle \vec{T}, x \rangle = x_1$  et

$$\vec{T} \wedge x = -x_3 \vec{J} + x_2 \vec{K}. \text{ Ainsi } x_1 = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|} (a \wedge x), \text{ ce qui}$$

permet donc de reconstituer entièrement  $x$ .

### Exercice 11.6

#### Centrale PSI 2006

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x+y+z=0$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $\begin{cases} x = -2z + 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$ .

Déterminer la projection orthogonale de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{P}$ .

En paramétrant  $\mathcal{D}$  par la variable  $z$ , on voit que  $\vec{u}(-2, 1, 1)$  est un vecteur directeur (et que  $A(3, -1, 0)$  est un point de  $\mathcal{D}$ ). Le plan  $\mathcal{P}$  contient l'origine donc son plan vectoriel admet la même équation  $x+y+z=0$ , qui est vérifiée par les coordonnées de  $\vec{u}$ . Nous sommes donc dans le cas particulier où  $\mathcal{D}$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ . Sa projection

est donc une droite de même vecteur directeur  $\vec{u}$  et passant par le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

On calcule alors les coordonnées de  $p_{\mathcal{P}}(A)$  en passant par la projection vectorielle sur la normale (vectorielle) à  $\mathcal{P}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Op_{\mathcal{P}}(A)} &= \overrightarrow{p_{\mathcal{P}}(\overrightarrow{OA})} = (\text{id} - p_{\mathcal{P}^\perp})(\overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{OA} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \text{ avec } \vec{n}(1, 1, 1) \text{ vecteur normal à } \mathcal{P}.\end{aligned}$$

Après calcul, on trouve que  $p_{\mathcal{P}}(A)$  a pour coordonnées  $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  d'où une représentation paramétrique de la droite  $p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$ ,

$$p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -2t + \frac{7}{3} \\ y = t - \frac{5}{3} \\ z = t - \frac{2}{3} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On obtient le système d'équations, en éliminant la variable  $t$ ,

$$p_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

### Ce qu'il faut retenir

- La présence de constantes non nulles dans les équations définissant les plans ou les droites de l'espace indiquent que ces sous-espaces sont affines (et non vectoriels). On obtient les équations de leur direction vectorielle en annulant ces constantes.
- Les transformations affines classiques (projections, symétries, rotations) possèdent des points invariants. Supposons qu'un point  $O$  est l'un des points invariants d'une application affine  $f$ . Pour étudier l'application  $f$ , on considère le point  $O$  comme origine et on utilise sa partie linéaire  $\vec{f}$  grâce à la relation  $\overrightarrow{Of(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ .
- Il existe des applications affines sans point fixe : les translations, la composée d'une réflexion avec une translation de vecteur parallèle à la direction du plan de réflexion... Leur étude détaillée n'est pas un objectif du programme actuel.

### Exercice 11.7

#### Centrale PSI 2007

Dans  $\mathbb{R}^3$  affine euclidien, soient  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $2x + 3y + z - 1 = 0$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équations  $(x = y, y = z)$ . Déterminer le plan symétrique (orthogonal) de  $\mathcal{P}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

Commençons par déterminer le point  $\Omega$ , intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{6}.$$

Nous savons que le plan  $\mathcal{P}'$  symétrique de  $\mathcal{P}$  par rapport à  $\mathcal{D}$  passe par  $\Omega$  et a pour vecteur normal  $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}(\vec{n})$  où  $\vec{n}$  est un vecteur normal de  $\mathcal{P}$  et  $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ , la droite vectorielle associée à  $\mathcal{D}$ .

On peut prendre pour vecteur normal  $\vec{n}(2, 3, 1)$  et le vecteur  $\vec{u}(1, 1, 1)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  ( $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\vec{u}$ ). Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}(\vec{n}) &= (2\overrightarrow{p_{\mathcal{D}}} - \text{id})(\vec{n}) = 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} - \vec{n} \\ &= (2, 1, 3). \end{aligned}$$

Le plan  $\mathcal{P}'$  admet donc pour équation

$$2 \times \left(x - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(y - \frac{1}{6}\right) + 3 \times \left(z - \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 1 = 0.$$



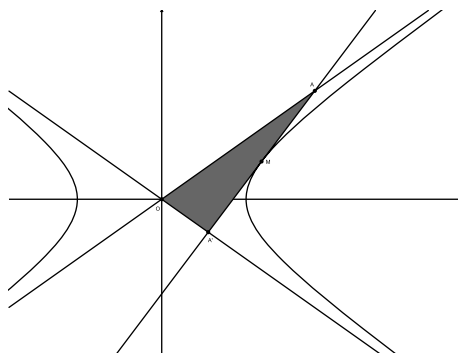
### Exercice 11.8

#### Mines-Ponts MP 2007

Soit  $\mathcal{H}$  une hyperbole du plan centrée en un point  $O$ , d'asymptotes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . La tangente à  $\mathcal{H}$  en un point  $M$  recoupe  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ) en  $A$  (resp.  $A'$ ). Montrer que l'aire du triangle  $OAA'$  ne dépend pas de  $M$ .

Dans un repère orthonormal adapté, l'hyperbole  $\mathcal{H}$  admet pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et les asymptotes ont pour équations } y = \pm \frac{b}{a}x.$$





En un point  $M(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{H}$ , une équation de la tangente à  $\mathcal{H}$  est  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

(en notant  $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ , une équation de la tangente en  $M$  à  $\mathcal{H}$  est  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0$ ).

Déterminons les coordonnées de  $A$  et  $A'$  en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ . Pour  $A$ , on résout le système :

$$\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \\ y = \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \end{cases}.$$

On a bien  $bx_0 - ay_0 \neq 0$  car les asymptotes ne rencontrent pas l'hyperbole. De même,  $A'$  a pour coordonnées  $\left( \frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0 + ay_0} \right)$ . L'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $OAA'$  vaut donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left| \det \left( \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a^3b^3}{(bx_0)^2 - (ay_0)^2} \right| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \left| \frac{ab}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} \right| = ab. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire  $\mathcal{A}$  est indépendante de  $x_0$  et  $y_0$  donc du point  $M$ .

### Exercice 11.9

#### Mines-Ponts MP 2007

Soit  $E$  un espace affine euclidien de dimension 3. Majorer le volume d'un tétraèdre de  $E$  dont les arêtes sont toutes  $\leq 1$ .

Nous savons que le volume d'un tétraèdre  $ABCD$  est donné par la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{6} \left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right| \text{ où } [ ] \text{ désigne le produit mixte. Ainsi,} \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{6} | \langle \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle | \leq \frac{1}{6} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| \| \overrightarrow{AD} \| \\ &\leq \frac{1}{6} \| \overrightarrow{AB} \| \| \overrightarrow{AC} \| \| \overrightarrow{AD} \| \leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### Exercice 11.10

#### Polytechnique MP 2007

Soit  $ABC$  un vrai triangle. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

La relation  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$  peut se simplifier avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Les points  $M$  vérifiant les égalités de l'énoncé sont donc ceux vérifiant :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}.$$

Soient les points  $H_{AB}$  et  $H_{AC}$  définies par  $\overrightarrow{CH_{AB}} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BH_{AC}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ .

Les égalités de l'énoncé sont alors équivalentes à  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH_{AB}} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MH_{AC}} = 0$ .

On obtient un seul point, intersection de deux droites respectivement perpendiculaires à  $(AB)$  et  $(AC)$  et passant respectivement par  $H_{AB}$  et  $H_{AC}$ .

### Exercice 11.11

#### Polytechnique MP 2007

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  pour qu'il existe trois points  $A, B, C$  du plan affine euclidien tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \beta$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \gamma$ .
- 2) On suppose cette condition vérifiée ainsi que  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .  
Montrer que l'orthocentre  $H$  de  $ABC$  est le barycentre du système pondéré  $(A, 1/\alpha), (B, 1/\beta), (C, 1/\gamma)$ .

- 1) Supposons (analyse) que les points  $A, B$  et  $C$  existent. Remarquons que  $\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = AB^2 - \beta$ . De même pour les autres

relations. Ainsi 
$$\begin{cases} AB^2 = \alpha + \beta \\ BC^2 = \beta + \gamma \\ AC^2 = \alpha + \gamma \end{cases}$$
 . En particulier, une condition nécessaire est

que  $\alpha + \beta \geq 0$ ,  $\beta + \gamma \geq 0$  et  $\alpha + \gamma \geq 0$ . Rappelons qu'il existe un triangle (éventuellement plat) de côtés de longueur  $a, b$  et  $c$  si et seulement si  $a \leq b+c$ ,  $b \leq a+c$  et  $c \leq a+b$  (ce qui s'écrit également de manière équivalente  $|b-c| \leq a \leq b+c$ ). Par exemple  $AB \leq AC + BC \Leftrightarrow \sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\beta + \gamma} + \sqrt{\alpha + \gamma}$  s'écrit aussi en élevant au carré,  $\gamma \geq -\sqrt{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)}$ .

Réciproquement (synthèse) supposons que  $\alpha + \beta \geq 0$ ,  $\beta + \gamma \geq 0$  et  $\alpha + \gamma \geq 0$  et que  $\gamma \geq -\sqrt{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)}$ ,  $\beta \geq -\sqrt{(\beta + \alpha)(\beta + \gamma)}$  et  $\alpha \geq -\sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}$ . En posant  $a = \sqrt{\beta + \gamma}$ ,  $b = \sqrt{\alpha + \gamma}$  et  $c = \sqrt{\alpha + \beta}$ , on sait d'après l'hypothèse

qu'il existe un triangle  $ABC$  (éventuellement plat) tel que 
$$\begin{cases} AB^2 = \alpha + \beta \\ BC^2 = \beta + \gamma \\ AC^2 = \alpha + \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ce système s'inverse en } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ \beta = \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 - AC^2) \\ \gamma = \frac{1}{2} (AC^2 + BC^2 - AB^2) \end{cases}.$$

$$\text{Or} \quad BC^2 = \left( \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right)^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc  $\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et de même  $\beta = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$  et  $\gamma = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

*Conclusion* : la condition nécessaire et suffisante est  $\alpha + \beta \geq 0$ ,  $\beta + \gamma \geq 0$ ,  $\alpha + \gamma \geq 0$ ,  $\alpha \geq -\sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}$ ,  $\beta \geq -\sqrt{(\beta + \alpha)(\beta + \gamma)}$  et  $\gamma \geq -\sqrt{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)}$ .

- 2) On suppose implicitement le triangle non plat. Soit  $H$  l'orthocentre de  $ABC$ . Il existe  $\alpha', \beta', \gamma'$  réels de somme non nulle, définis à un scalaire multiplicatif non nul près tels que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $(A, \alpha'), (B, \beta'), (C, \gamma')$ . Nous avons par exemple,  $(\alpha' + \beta' + \gamma')\overrightarrow{AH} = \beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}$ . Sachant que les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  sont orthogonales, on obtient, en effectuant le produit scalaire avec  $\overrightarrow{BC}$ , la relation  $0 = -\beta\beta' + \gamma\gamma'$ . De la même façon, on obtient  $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \lambda$ . Le réel  $\lambda$  est non nul car  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  (sinon on aurait  $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ ).

Il en résulte que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $(A, \frac{\lambda}{\alpha}), (B, \frac{\lambda}{\beta}), (C, \frac{\lambda}{\gamma})$ .

On peut bien sûr choisir  $\lambda = 1$ .

### Ce qu'il faut savoir

Un triangle (éventuellement plat) de côté  $a, b, c$  existe si et seulement si  $a \leq b+c$ ,  $b \leq a+c$  et  $c \leq a+b$  ce qui est équivalent à  $|b-c| \leq a \leq b+c$ .

Une autre formulation utile est : deux cercles  $\mathcal{C}(O, R)$  et  $\mathcal{C}(O', R')$  sont d'intersection non vide si et seulement si

$$|R - R'| \leq OO' \leq R + R'.$$

### Exercice 11.12

#### Polytechnique MP 2007

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan affine euclidien. Montrer que :

$$AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC.$$

Désignons par  $b$  l'affixe de  $\overrightarrow{AB}$ , par  $c$  celle de  $\overrightarrow{AC}$  et par  $d$  celle de  $\overrightarrow{AD}$ .

$b - d$  est l'affixe de  $\overrightarrow{DB}$ ,  $c - d$  est l'affixe de  $\overrightarrow{DC}$  et  $b - c$  est l'affixe de  $\overrightarrow{CB}$ .

Nous voulons donc démontrer que  $|c| \cdot |b - d| \leq |b| \cdot |c - d| + |d| \cdot |b - c|$ .

Écrivons que  $c(b - d) = b(c - d) + d(b - c)$ . On utilise alors l'inégalité triangulaire (passage au module complexe) pour conclure.

### Remarque

On doit cette inégalité au mathématicien grec Ptolémée.

## 11.3 ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET AFFINES EN DIMENSION 3

### Ce qu'il faut savoir

Rappelons et complétons les résultats sur les isométries vectorielles que nous avons déjà abordées dans le chapitre « espaces euclidiens ».

Soit  $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$ , une matrice orthogonale (représentant un endomorphisme  $u$  dans une base orthonormale directe). Rappelons qu'il s'agit d'une matrice dont les vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux **et unitaires**. Pour caractériser géométriquement l'automorphisme orthogonal associé, on regarde dans l'ordre :

- si la matrice  $M$  est de plus symétrique alors  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à son image. Dans ce cas, si  $\text{tr } u = 1$  ( $= 1 + 1 - 1$ ) alors  $u$  est une réflexion (symétrie par rapport à un plan) sinon  $u$  est un retournement (symétrie par rapport à une droite).
- si la matrice  $M$  n'est pas symétrique, on calcule son déterminant, s'il vaut 1 alors il s'agit d'une rotation sinon  $\det M = -1$  et  $-M$  est une rotation.

Si  $M$  est une rotation d'axe  $\mathcal{D} = \mathbb{R}a$ , **orienté** par le vecteur directeur  $a$ , on peut définir un angle  $\theta$  caractérisant la rotation  $u = \text{rot}(a, \theta)$ . On peut choisir  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . La **trace** de cette matrice s'obtient immédiatement par  $\text{tr } u = 1 + 2 \cos \theta$ . Ainsi  $\theta = \varepsilon \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr } u - 1)\right)$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

On cherche ensuite un vecteur  $a$  invariant (valeur propre 1) qui orientera l'axe  $\mathcal{D} = \mathbb{R}a = E_1(u)$ .

Pour déterminer le signe  $\varepsilon$  (le cosinus ne permet pas de trancher), on peut utiliser la formule ci-dessous très utile :

$$\forall x \in E \setminus \mathbb{R}a, \quad \text{sgn}[a, x, u(x)] = \text{sgn}(\sin \theta)$$

et ainsi déterminer le signe de  $\theta$  (dans  $] - \pi, \pi]$ ) en choisissant  $x$  le plus simple possible (typiquement un vecteur de la base canonique).

### Remarques

- On utilise parfois la caractérisation suivante des rotations parmi les matrices orthogonales  $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ .

Les vecteurs colonnes  $C_1, C_2$  et  $C_3$  de la matrice  $M$  forment une base orthonormale directe si et seulement si  $M$  est la matrice d'une rotation, ce qui peut se traduire par  $C_3 = C_1 \wedge C_2$ .

○ si  $\det u = -1$ , alors  $-u$  est une rotation (que l'on étudie comme précédemment) mais le géomètre préfère voir  $u$  comme la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion ( $s_{a^\perp}$ )...

### Exercice 11.13

#### CCP PC 2005

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice représentative dans la base canonique est  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $f$  est une isométrie dont on précisera les caractéristiques.

On remarque que  $A$  est une matrice orthogonale (ses vecteurs colonnes sont orthogonaux et **unitaires**) donc  $f$  est une isométrie vectorielle (ou encore un automorphisme orthogonal). De plus  $\det A = 1$ , donc  $f$  est une rotation. Pour la caractériser, on cherche son axe, c'est-à-dire son espace propre associé à la valeur propre 1 (ensemble des invariants). Une fois l'axe orienté (par un vecteur propre), on cherche son angle avec la trace et le produit mixte.

Le vecteur  $u(1, -1, 0)$  engendre  $E_1(A)$ , l'axe est donc  $\mathcal{D} = \mathbb{R}u$  et on l'oriente par  $u$ .

Soit  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  un angle représentant la rotation. On sait que  $\text{tr } A = 1 + 2 \cos \theta = \frac{1}{3}$  donc  $\theta = \pm \arccos(-1/3)$ . Pour déterminer le signe, on peut utiliser la propriété bien pratique suivante. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}u$ , le signe de  $[x, f(x), u]$  est égal au signe de  $\sin \theta$ . On choisit  $x$  le plus simple possible, typiquement  $x = (1, 0, 0)$  donc  $f(x)$  vaut la première colonne de  $A$ . Il vient :

$$\text{sgn}(\sin \theta) = \text{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

*Conclusion :*  $f$  est la rotation d'axe  $\mathbb{R}u$ , orienté par  $u$  et d'angle  $\arccos(-1/3)$ .

### Exercice 11.14

#### Navale PC 2005

On pose  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -2 & 1 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$ . Trouver  $a, b, c$  pour que  $M$  soit une matrice de rotation. Déterminer alors son axe et son angle.

Pour que  $M$  soit la matrice d'une rotation, il est nécessaire (et suffisant car  $(C_1(M), C_2(M))$  est une famille orthonormale) que  $C_3(M) = C_1(M) \wedge C_2(M)$ .

On résout donc :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne directement } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On procède alors comme dans l'exercice précédent.

• L'axe est porté et est orienté par le vecteur  $u = (1, 0, -1)$ . Soit  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  son angle. On a  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr } A = \frac{5}{3}$  donc  $\theta = \pm \text{Arccos} \left( \frac{1}{3} \right)$ . En prenant  $x = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}u$ , on obtient :

$$\text{sgn}(\sin \theta) = \text{sgn}([x, Mx, u]) = \text{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\text{d'où } \theta = \text{Arccos} \left( \frac{1}{3} \right).$$



### Exercice 11.15

#### Centrale PSI 2006

Dans  $\mathbb{R}^3$  affine euclidien, on considère les plans  $\mathcal{P} : z = 0$  et  $\mathcal{Q} : x + y + 2 = 0$ . Soient  $s_{\mathcal{P}}$  et  $s_{\mathcal{Q}}$  les réflexions par rapport à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ .

- 1) Donner les expressions analytiques de  $s_{\mathcal{P}}$  et  $s_{\mathcal{Q}}$  dans la base canonique.
  - 2) Montrer que  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$  est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle. Que dire de  $s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$  ?
- 1) L'expression analytique de  $s_{\mathcal{P}}$  est immédiate :  $x' = x$ ,  $y' = y$  et  $z' = -z$ . Pour la réflexion  $s_{\mathcal{Q}}$ , on peut également aller assez vite mais donnons une méthode générale. Soit  $\vec{n}_{\mathcal{Q}}$  un vecteur normal unitaire de  $\mathcal{Q}$ . On peut prendre  $\vec{n}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \vec{s}_{\mathcal{Q}}(x) &= (2\vec{p}_{\mathcal{Q}} - \text{Id})(x) = (2(\text{Id} - \vec{p}_{\text{Vect}(\vec{n}_{\mathcal{Q}})}) - \text{Id})(x) \\ &= (\text{Id} - 2\vec{p}_{\text{Vect}(\vec{n}_{\mathcal{Q}})})(x) = x - 2 \langle \vec{n}_{\mathcal{Q}}, x \rangle \vec{n}_{\mathcal{Q}}. \end{aligned}$$

On en déduit les images de la base canonique  $\mathcal{B}$ , d'où

$$\text{mat}(\vec{s}_{\mathcal{Q}}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point  $A(-2, 0, 0)$  appartient à  $\mathcal{Q}$ , donc si  $M' = s_{\mathcal{Q}}(M)$ , alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}(\overrightarrow{AM}) \\ \begin{pmatrix} x' + 2 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y \\ z \end{pmatrix}; \\ \text{d'où } \begin{cases} x' &= -y - 2 \\ y' &= -x - 2 \\ z' &= z \end{cases}.\end{aligned}$$

- 2) Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  se coupent suivant la droite  $(AB)$  avec  $A(-2, 0, 0)$  et  $B(0, -2, 0)$ . On sait que la composée de deux réflexions est une rotation d'axe l'intersection des deux plans, ici  $(AB)$ , et d'angle le double de l'angle formé par les deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Ici les deux plans sont perpendiculaires donc l'angle vaut  $\pi$  et la rotation est un retournement. L'ordre dans lequel on considère les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  dans le raisonnement géométrique n'intervenant pas ( $-\pi = \pi (2\pi)$ ), la composée  $s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$  nous donne le même retournement.

On peut aussi prouver que  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$  est un retournement en écrivant

$$\begin{aligned}\text{mat}(\overrightarrow{s_{\mathcal{P}}}, \mathcal{B}) \times \text{mat}(\overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}, \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cette matrice est la matrice d'une rotation, sa trace valant  $-1 = 1 + 2 \cos \theta$ , d'où  $\cos \theta = -1$ , et donc  $\theta = \pi (2\pi)$ . Il s'agit d'un retournement. La partie linéaire de  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ , qu'on note  $\overrightarrow{s_{\mathcal{P}}} \circ \overrightarrow{s_{\mathcal{Q}}}$ , est un retournement. D'autre part, il est immédiat que tout point de  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (AB)$  est invariant par  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$ , et donc  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$  est le retournement d'axe  $(AB)$ .

### Remarque

En général  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}} \neq s_{\mathcal{Q}} \circ s_{\mathcal{P}}$ . Les réflexions commutent ici car les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont perpendiculaires. Cependant, on retiendra que si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  ne sont pas parallèles, alors  $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$  est une rotation d'axe  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$  dont on peut déterminer l'angle en orientant l'axe et en se plaçant sur un plan perpendiculaire à l'axe (on se ramène au cas du plan, où le produit de deux réflexions est une rotation d'angle deux fois l'angle formé par les deux droites). Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont parallèles, alors on obtient une translation (on généralise sans peine le cas du plan).

**Exercice 11.16****Polytechnique PC 2005**

Soit  $\vec{n} = (a, b, c)$  un vecteur unitaire de l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Caracté-

riser l'endomorphisme associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ .

- On remarque que la matrice  $A$  est orthogonale et symétrique. De plus, on a  $\text{tr}(A) = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2$ , donc  $A$  est la matrice d'une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan). Cherchons le sous-espace propre  $E_1(A)$ . Soit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2x - aby - acz = 0 \\ -abx - b^2y - bcz = 0 \\ -acx - bcy - c^2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(ax + by + cz) = 0 \\ b(ax + by + cz) = 0 \\ c(ax + by + cz) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ax + by + cz = 0$  (car l'une des coordonnées  $a, b$  ou  $c$  est non nulle).

La matrice  $A$  est donc la matrice de la projection orthogonale sur le plan

$$\{M(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}.$$

- Voici une seconde résolution de l'exercice plus astucieuse.

Remarquons que  $A = I_3 - J$  où  $J = (x_i x_j)$ , en notant  $(a, b, c) = (x_1, x_2, x_3)$ . La matrice  $J$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}\vec{n}$ . En effet,  $J = {}^t\vec{n} \vec{n}$  et donc  $J\vec{x} = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \vec{n}$ . On retrouve que la matrice  $A$  est donc la matrice de la projection orthogonale sur le plan orthogonal à  $\vec{n}$ , c'est-à-dire

$$\{M(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}.$$

**Exercice 11.17****TPE PC 2006**

On considère l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $R$  une rotation d'angle  $\theta$  et de vecteur directeur unitaire  $\omega$ . Soit  $x \in E$ .

1) Montrer que  $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos \theta) \langle \omega, x \rangle \omega$ .

2) On pose  $u_0 = x$  et on définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_{n+1} = \omega \wedge u_n$ .

Calculer  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3) On pose  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{\theta^k}{k!} u_k$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .



- 1) Si  $x$  est orthogonal à  $\omega$ , alors on sait que  $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x)$  donc la formule de l'énoncé est vraie puisque  $\langle \omega, x \rangle = 0$ .

Si  $x$  est colinéaire à  $\omega$  alors  $R(x) = x$  et on remarque que

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)\underbrace{(\omega \wedge x)}_{=0} + (1 - \cos \theta)\underbrace{\langle \omega, x \rangle \omega}_{=x} = \cos(\theta)x + (1 - \cos \theta)x = x.$$

La formule de l'énoncé est vraie pour de tels  $x$ . On conclut en disant que  $R$  et l'application  $x \mapsto \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos \theta)\langle \omega, x \rangle \omega$  sont deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  qui coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires ( $\mathbb{R}\omega$  et  $(\mathbb{R}\omega)^\perp$ ) donc sont égaux sur  $\mathbb{R}^3$ .

- 2) Rappelons la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

Soit  $\varphi$  l'application définie par  $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \omega \wedge x$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\varphi(\varphi(x)) = \omega \wedge (\omega \wedge x) = \langle \omega, x \rangle \omega - \underbrace{\|\omega\|^2}_{=1}x = -(x - p_\omega(x)) = -p_{\omega^\perp}(x),$$

d'où  $\varphi \circ \varphi = -p_{\omega^\perp}$ . Calculons également  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ . On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(x) &= \varphi(-p_{\omega^\perp}(x)) \\ &= \omega \wedge (\langle \omega, x \rangle \omega - x) = -\omega \wedge x = -\varphi(x) \end{aligned}$$

Il en découle que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{2n} = \varphi^{2n}(x) = (-1)^n p_{\omega^\perp}(x) = (-1)^{n+1} u_2$  car  $(p_{\omega^\perp})^2 = p_{\omega^\perp}$  et

$$u_{2n+1} = \varphi^{2n+1}(x) = (-1)^n p_{\omega^\perp}(\varphi(x)) = (-1)^{n+1} (-\varphi(x)) = (-1)^n u_1,$$

cette dernière formule s'étend à  $n = 0$  (mais pas la précédente).

- 3) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} v_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\theta^k}{k!} u_k = u_0 + \sum_{p=1}^n \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} u_{2p} + \sum_{p=0}^n \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} u_{2p+1} \\ &= u_0 + \underbrace{\left( \sum_{p=1}^n \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} (-1)^{p+1} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -(\cos \theta - 1)} u_2 + \underbrace{\left( \sum_{p=0}^n \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} (-1)^p \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin \theta} u_1, \end{aligned}$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1}(x) = u_0 + (1 - \cos \theta)u_2 + \sin \theta u_1$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{2n+1}(x) - v_{2n}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \right) u_1 \right] = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) &= u_0 + (1 - \cos \theta) u_2 + \sin \theta u_1 \\ &= x + (1 - \cos \theta) (\langle \omega, x \rangle \omega - x) + \sin \theta (\omega \wedge x) \\ &= \cos(\theta)x + (1 - \cos \theta) \langle \omega, x \rangle \omega + \sin(\theta)(\omega \wedge x) \\ &= R(x). \end{aligned}$$

*Conclusion :* la série vectorielle  $\sum \frac{\theta^k}{k!} u_k$  converge, sa somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} u_k$  est  $R(x)$ .

### Exercice 11.18

#### Mines-Ponts MP 2007

Caractériser  $s \circ r \circ s$  où  $r$  et  $s$  sont respectivement une rotation et une réflexion de  $\mathbb{R}^3$  vectoriel euclidien.

Nous savons que  $s \circ r \circ s$  est un automorphisme orthogonal et nous avons :

$\det(s \circ r \circ s) = (\det s)^2 \det r = 1$  donc  $s \circ r \circ s$  est une rotation. Soit  $u$  vecteur directeur de l'axe de  $r$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  un angle de  $r$  orienté par  $u$ . Comme

$$(s \circ r \circ s)(s(u)) = s(r(u)) = s(u),$$

l'endomorphisme  $s \circ r \circ s$  est une rotation d'axe  $\mathbb{R}s(u)$ . Déterminons son angle  $\theta' \in ]-\pi, \pi]$  en ayant orienté l'axe par  $s(u)$ . Puisque

$$1 + 2 \cos \theta' = \text{tr}(s \circ r \circ s) = \text{tr}(r \circ s \circ s) = \text{tr} r = 1 + 2 \cos \theta,$$

on obtient  $\theta = \theta' (2\pi)$  ou  $\theta = -\theta' (2\pi)$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}s(u)$ . On sait que  $\text{sgn}(\sin \theta') = \text{sgn}[x, s \circ r \circ s(x), s(u)]$ . Or

$$[s(x), s(s \circ r \circ s(x)), s(s(u))] = \det s \times [x, s \circ r \circ s(x), s(u)]$$

$$[s(x), r \circ s(x), u] = -[x, s \circ r \circ s(x), s(u)].$$

Remarquons que  $x \notin \mathbb{R}s(u) \Leftrightarrow s(x) \notin \mathbb{R}u$  donc  $\text{sgn}[s(x), r \circ s(x), u] = \text{sgn}(\sin \theta)$ . Ainsi  $\text{sgn} \sin \theta' = -\text{sgn}(\sin \theta)$ .

*Conclusion :*  $s \circ r \circ s$  est la rotation d'axe  $\mathbb{R}s(u)$  (orienté par  $s(u)$ ) et d'angle  $-\theta$ .

### Exercice 11.19

#### Mines-Ponts MP 2007, Polytechnique MP 2007

Montrer que  $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$  est la matrice d'une rotation si, et seulement

si, il existe  $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$  tel que  $a, b$  et  $c$  sont les trois racines du polynôme

$$X^3 - X^2 + t.$$

Pour simplifier la rédaction, raisonnons par implication.

• Si  $M$  est la matrice d'une rotation, alors ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^3$ , donc  $\left( \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} \right)$  est une famille orthonormale et  $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$ .

On en déduit les égalités  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $ab + bc + ca = 0$ , ainsi que  $a^2 - bc = a$ ,  $b^2 - ca = b$ ,  $c^2 - ab = c$ .

Il vient  $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c + ab + bc + ca = a + b + c$  donc  $a + b + c = 1$ .

Notons  $S = a + b + c = 1$ ,  $T = ab + bc + ca = 0$  et  $t = -abc$ .

On sait que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les solutions de l'équation  $x^3 - Sx^2 + Tx + t = 0$  (car  $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Sx^2 + Tx + t$ ) d'où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les trois racines réelles d'un polynôme  $X^3 - X^2 + t$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

Notons  $f(x) = x^3 - x^2 + t$  et calculons  $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ . Ceci nous permet de dresser le tableau de variations suivant :

|         |           |     |                  |           |
|---------|-----------|-----|------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\frac{2}{3}$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $+$ | $-$              | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $t$ | $f(\frac{2}{3})$ | $+\infty$ |

Pour que  $f$  admette trois racines réelles (éventuellement confondues), il faut et il suffit que  $f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0 \leq t$  ce qui équivaut à  $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ .

• Réciproquement, soient  $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$  et  $a$ ,  $b$  et  $c$  les trois racines du polynôme

$X^3 - X^2 + t$ . Nous savons que  $S = a + b + c = 1$  et  $T = ab + bc + ca = 0$ .

On calcule alors :  $S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1$ , d'où  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Enfin,  $a^2 - a = a(a - 1) = -a(b + c) = -ab - ac = bc$

De même,  $b^2 - b = ca$  et  $c^2 - c = ab$ .

Ces relations montrent que  $\left( \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} \right)$  est une famille orthonormale et

$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$  donc les colonnes de  $M$  forment une base orthonormale directe, et  $M$  est bien la matrice d'une rotation.

**Exercice 11.20****Polytechnique MP 2007**

Donner une condition nécessaire pour que deux rotations de  $\mathbb{R}^3$  commutent.

Écartons d'emblée le cas particulier où l'une des rotations est l'identité.

Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux rotations distinctes de Id telles que  $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ .

Soit  $\mathbb{R}u_1$  l'axe de  $r_1$ . C'est l'espace propre associé à la valeur propre 1. Comme  $r_1$  et  $r_2$  commutent, cet espace propre est stable par  $r_2$ , et comme c'est une droite, cela signifie que  $u_1$  est un vecteur propre de  $r_2$ . La rotation  $r_2$  n'a pas d'autre valeur propre que 1 ou  $-1$  (auquel cas  $r_2$  est un retournement) donc soit  $\mathbb{R}u_1$  est l'axe de  $r_2$  soit  $u_1$  est orthogonal à l'axe de  $r_2$  et  $r_2$  est un retournement.

Examinons ce cas particulier, dans une base  $\mathcal{B}$  orthonormale directe adaptée,

$$\text{mat}(r_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } \text{mat}(r_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit alors que  $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}.$$

Il en résulte que  $r_1$  est soit l'identité (exclue par hypothèse) soit un retournement également.

En résumé, soit les deux rotations (supposées distinctes de Id) ont même axe, soit les deux rotations sont des retournements avec des axes orthogonaux.

Remarquons que cette condition nécessaire est également suffisante.

**11.4 LIEUX GÉOMÉTRIQUES****Exercice 11.21****Centrale PC 2007**

On se place dans le plan affine euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé. Soit

$\mathcal{E}$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- 1) Montrer que la droite d'équation  $ux + vy + w = 0$  est tangente à l'ellipse  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$ .
- 2) Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à  $\mathcal{E}$  orthogonales entre elles.

- 1) En un point  $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ , une équation de la tangente à  $\mathcal{E}$  est  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ . On sait qu'une équation de droite dans le plan est unique à un coefficient multiplicatif non nul près.

• Supposons que la droite d'équation  $ux + vy + w = 0$  soit tangente à l'ellipse en un point  $(x_0, y_0)$ . La tangente en  $(x_0, y_0)$  admet également pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ donc il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} u = \lambda \frac{x_0}{a^2} \\ v = \lambda \frac{y_0}{b^2} \\ w = -\lambda \end{cases} \text{ . Remarquons que } \lambda \neq 0$$

et donc  $w \neq 0$  car  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Il en résulte que  $\begin{cases} x_0 = \frac{a^2 u}{\lambda} \\ y_0 = \frac{b^2 v}{\lambda} \\ \lambda = -w \end{cases}$  . Puis, en utili-

sant la relation  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , on obtient l'égalité  $\frac{1}{a^2} \left( \frac{a^2 u}{-w} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left( \frac{b^2 v}{-w} \right)^2 = 1$  qui peut s'écrire  $a^2 u^2 + b^2 v^2 = w^2$ .

• Réciproquement, supposons que  $a^2 u^2 + b^2 v^2 = w^2$ . Comme  $(u, v) \neq (0, 0)$ , on a  $w \neq 0$ . Posons alors  $\lambda = -w$ ,  $x_0 = \frac{a^2 u}{\lambda}$  et  $y_0 = \frac{b^2 v}{\lambda}$ .

Notre hypothèse nous montre que  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , et donc  $(x_0, y_0)$  est un point de

l'ellipse. Comme on peut réécrire les relations sous la forme  $\begin{cases} u = \lambda \frac{x_0}{a^2} \\ v = \lambda \frac{y_0}{b^2} \\ w = -\lambda \end{cases}$  , on en

dédit que la droite d'équation  $ux + vy + w = 0$  est tangente à l'ellipse au point  $(x_0, y_0)$ .

- 2) • Supposons que  $M(x, y)$  est un point d'intersection de deux tangentes à l'ellipse  $\mathcal{D} : ux + vy + w = 0$  et  $\mathcal{D}' : -vx + uy + w' = 0$ . Nous avons  $a^2 u^2 + b^2 v^2 = w^2 = (ux + vy)^2$  (1) et  $a^2 v^2 + b^2 u^2 = w'^2 = (-vx + uy)^2$  (2). La somme (1) + (2) nous donne  $(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ . Comme  $(u, v) \neq (0, 0)$ , on en déduit que  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ , le point  $M$  est sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

• Réciproquement, donnons-nous un point  $M(x, y)$  vérifiant  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ . Montrons qu'il existe  $(u, v) \neq (0, 0)$  tel que  $a^2 u^2 + b^2 v^2 = w^2$  (3) et  $a^2 v^2 + b^2 u^2 = w'^2$  (4) avec  $w = -ux - vy$  et  $w' = vx - uy$ . On aura ainsi montré que  $M$  est point d'intersection de deux tangentes orthogonales  $\mathcal{D} : ux + vy + w = 0$  et  $\mathcal{D}' : -vx + uy + w' = 0$ . La relation (3) peut s'écrire en

remplaçant  $w$  par  $-ux - vy$ ,  $a^2u^2 + bv^2 = u^2x^2 + v^2y^2 + 2xyuv$  ce qui s'écrit également  $u^2(x^2 - a^2) + 2xyuv + v^2(y^2 - b^2) = 0$ .

Supposons  $x^2 \neq a^2$  et cherchons un  $u$  solution avec  $v = 1$  (on sait que si  $(u, v)$  est solution  $(\lambda u, \lambda v)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  est également solution). On a un trinôme en  $u$  de discriminant  $4[(xy)^2 + (x^2 - a^2)^2] > 0$  (car  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ) donc  $u$  existe et  $(u, v) = (u, 1)$  est solution à notre problème.

Le cas particulier où  $x \in \{-a, a\}$  se traite de même en inversant le rôle de  $u$  et  $v$ , on cherche  $v$  en imposant par exemple  $u = 1$ .

En conclusion, le lieu recherché, appelé courbe orthoptique de l'ellipse, est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Exercice 11.22

#### Centrale PC 2007

On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3. On se donne deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  non coplanaires.

- 1) Montrer que l'on peut construire un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  aient pour système d'équations :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y = mx \\ z = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} y = -mx \\ z = -a \end{cases} \quad (\text{avec } a \neq 0 \text{ et } m \neq 0).$$

- 2) Déterminer le lieu des points équidistants de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

- 1) Considérons  $\Delta$  la perpendiculaire commune à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Soient  $\{H\} = \mathcal{D} \cap \Delta$  et  $\{H'\} = \mathcal{D}' \cap \Delta$ .

Prenons comme origine du repère,  $O$  le milieu de  $[HH']$  et comme vecteur  $\vec{k}$  un vecteur directeur unitaire de  $\Delta$ .

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  des vecteurs directeurs unitaires de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . On choisit alors pour vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , des vecteurs directeurs unitaires des bissectrices de  $\vec{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\vec{u}$  et  $\vec{\mathcal{D}'} = \mathbb{R}\vec{u}'$ , par exemple,

$$\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u} + \vec{u}'\|} (\vec{u} + \vec{u}') \quad \text{et} \quad \vec{j} = \frac{1}{\|\vec{u} - \vec{u}'\|} (\vec{u} - \vec{u}').$$

Le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  obtenu répond alors à la question.

- 2) Rappelons que si  $\mathcal{D}$  est définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}_{\mathcal{D}}$ , alors

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}_{\mathcal{D}}\|}{\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|}.$$

Ici  $A(0, 0, a)$  et  $\vec{u}(1, m, 0)$  définissent  $\mathcal{D}$ . De même,  $A'(0, 0, -a)$  et  $\vec{u}'(1, -m, 0)$  définissent  $\mathcal{D}'$ .

Le lieu des points  $M(x, y, z)$  équidistants de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  est défini par l'équation suivante :

$$\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}'\|}{\|\vec{u}'\|} \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} -m(z-a) \\ z-a \\ mx-y \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} m(z+a) \\ z+a \\ -mx-y \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)az + mxy = 0.$$

On obtient donc la quadrique d'équation  $z = \frac{am}{m^2 + 1}xy$ .

Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique (en forme de selle de cheval).

(en tournant les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  autour de  $(Oz)$  d'un angle de  $\frac{\pi}{4}$ , on a les

relations  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$  et  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ ,  $z = Z$ , il vient dans le nouveau repère,  $Z = \frac{am}{2(m^2 + 1)}(X^2 - Y^2)$ , le paraboloïde est « équilatère »).

### Ce qu'il faut savoir

#### Quelques formules sur les distances

On se place dans l'espace affine euclidien orienté de dimension 3.

• **Distance d'un point à une droite**  $\mathcal{D}$  définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$  :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

• **Distance d'un point à un plan**  $\mathcal{P}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

• **Distance entre deux droites non coplanaires  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , perpendiculaire commune.**

Soient  $\mathcal{D} = D(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}' = D(A', \vec{u}')$  deux droites non coplanaires. Posons  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ . On obtient un système d'équations définissant la perpendiculaire commune  $\Delta$  à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  en écrivant  $\Delta = P(A, \vec{u}, \vec{n}) \cap P(A', \vec{u}', \vec{n})$ .

La distance entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  s'obtient directement par la formule

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} = \frac{\left| \left[ \vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'} \right] \right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}.$$

## Exercice 11.23

## Centrale PC 2005

Soit  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  un point du plan affine euclidien. Un repère orthonormal tournant d'origine  $A$  coupe les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  en  $M$  et  $N$ .

Étudier le lieu géométrique décrit par  $P$ , projeté de l'origine  $O$  sur la droite  $(MN)$ .

Posons  $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et  $\vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ . Notons  $(AX)$  et  $(AY)$  les axes du repère tournant  $(A, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ . On ne perdra pas de points en considérant que  $M$  est le point d'intersection de  $(Ox)$  avec  $(AY)$  et  $N$  le point d'intersection de  $(Oy)$  avec  $(AX)$ .

Notons que pour que  $M$  et  $N$  existent, il faut que  $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . On obtiendra tous les points  $P$  en faisant varier  $\theta$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  (un intervalle de longueur  $\pi$  suffit).

Une équation de  $(AX)$  dans le repère d'origine  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$-x \sin \theta + y \cos \theta = -\sin \theta + \cos \theta,$$

car  $A$  a pour coordonnées  $(1, 1)$ . De même

$$(AY) : x \cos \theta + y \sin \theta = \cos \theta + \sin \theta.$$

Ainsi les coordonnées des points  $M$  et  $N$  sont  $M \left( \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}, 0 \right) = (1 + \tan \theta, 0)$

et  $N \left( 0, \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta} \right) = (0, 1 - \tan \theta)$ .

Considérons le triangle rectangle  $OMN$  et calculons son aire de deux manières différentes. On obtient :

$$NM \times OP = ON \times OM = (1 + \tan \theta) \times (1 - \tan \theta) = 1 - \tan^2 \theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta}.$$

D'autre part, on a :

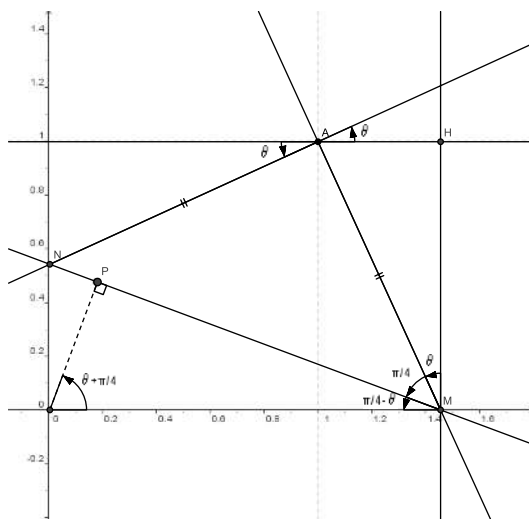
$$NM = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}.$$

On obtient finalement,

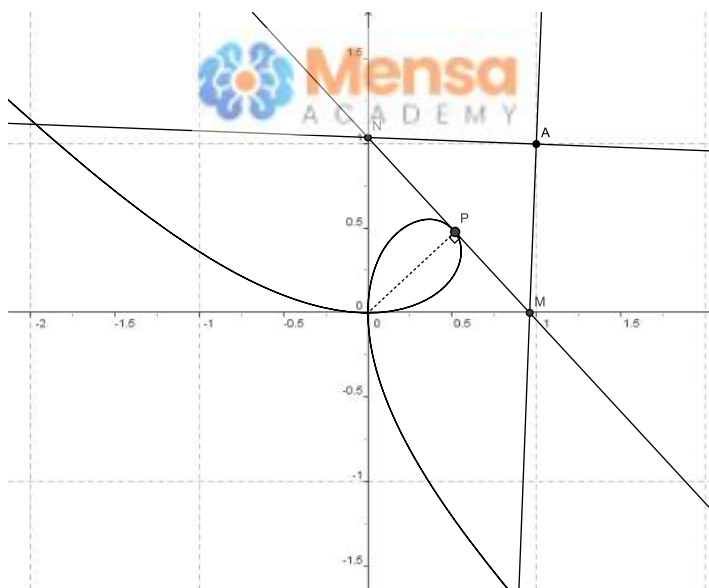
$$OP = \frac{\sqrt{2} \cos 2\theta}{2 \cos \theta}.$$

Comme l'angle  $(\vec{i}, \vec{OP})$  mesure  $\theta + \frac{\pi}{4}$  ( $2\pi$ ) (voir figure, on remarque au passage que le triangle  $AMN$  est isocèle rectangle en  $A$ ), on se place dans le repère  $(O, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{4}})$  (ainsi  $(O, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}})$  est un axe de symétrie).





La courbe décrite par  $P$  est une courbe polaire d'équation  $\rho = \frac{\sqrt{2} \cos 2\theta}{2 \cos \theta}$ ,  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  pour l'axe polaire  $(O, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}})$ .



### Exercice 11.24

#### Centrale PC 2005

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ . Soient  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  deux droites orthogonales passant par  $O$ . Soit  $M \in \mathcal{C}$ . Notons  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ , et  $Q$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ .

Enfin, notons  $A$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(PQ)$ . Déterminer le lieu des points  $A$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\mathcal{C}$ .

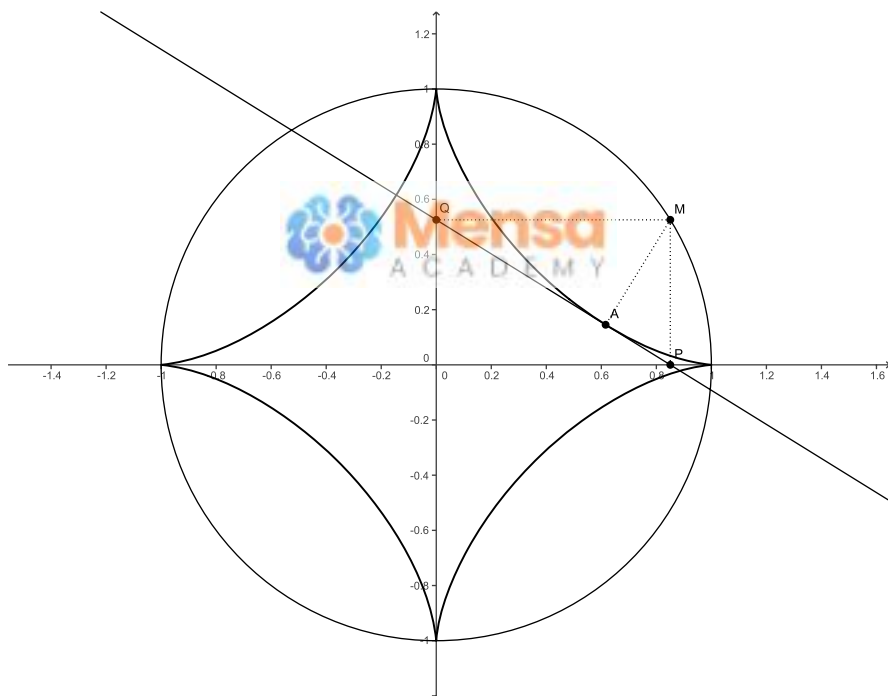
Par une similitude, ramenons-nous au cas où  $\mathcal{C}$  est le cercle unité et  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  sont les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Le point  $M$  a pour coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $P(\cos \theta, 0)$ ,  $Q(0, \sin \theta)$ . La droite  $(PQ)$  admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - \cos \theta & -\cos \theta \\ y & \sin \theta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \sin \theta + y \cos \theta = \sin \theta \cos \theta.$$

Le projeté  $A$  est le point d'intersection de la droite  $(PQ)$  et de la perpendiculaire à la droite  $(PQ)$  passant par  $M$ , d'équation

$$-x \cos \theta + y \sin \theta = -\cos \theta \times \cos \theta + \sin \theta \times \sin \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta.$$

On détermine facilement les coordonnées de  $A$  avec les formules de Cramer et on obtient  $A(\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$ . La courbe obtenue est appelée une astroïde.



### Exercice 11.25

#### Centrale PC 2005

Soient  $\Delta$  une droite mobile distante de 1 de l'origine,  $A, B$  les intersections de  $\Delta$  avec  $(Ox)$  et  $(Oy)$  respectivement,  $C$  tel que  $OACB$  soit un rectangle.

Déterminer le lieu des points  $M$  intersection de la parallèle à  $\Delta$  passant par  $O$  et de la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $C$

Une équation de la droite  $\Delta$  est  $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

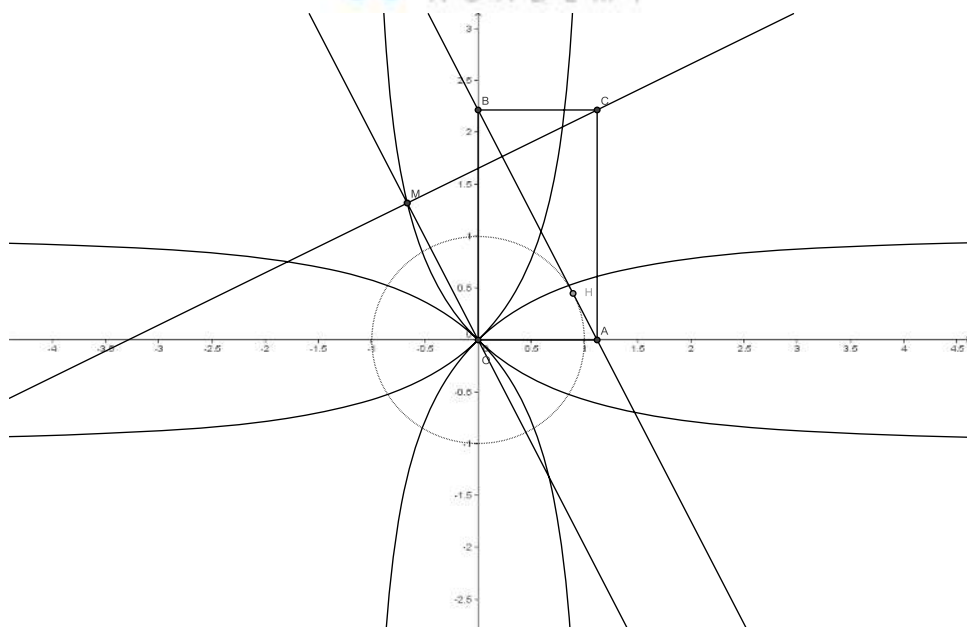
Pour  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\}$ ,  $\Delta$  coupe  $(Ox)$  en  $A \left( \frac{1}{\cos \theta}, 0 \right)$  et  $(Oy)$  en  $B \left( 0, \frac{1}{\sin \theta} \right)$ , d'où les coordonnées du point  $C \left( \frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \right)$ .

On peut remarquer dès à présent que le lieu des points est invariant par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et que l'on peut limiter l'étude à  $\theta$  variant sur l'un des intervalles équivalents  $]0, \frac{\pi}{2}[$  ou  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ,  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,  $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ .

La parallèle à  $\Delta$  passant par  $O$  admet pour équation  $x \cos \theta + y \sin \theta = 0$  et la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $C$ ,  $-x \sin \theta + y \cos \theta = -\frac{1}{\cos \theta} \times \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \times \cos \theta$ . On résout alors le système (avec les formules de Cramer)

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 0 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{cases}$$

pour obtenir  $M \left( -\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}, \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \right)$  et on peut se contenter d'étudier cette courbe paramétrée sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  pour en déduire le lieu (par rotation ou symétrie).



## 11.5 EXTREMA

### Ce qu'il faut savoir

**Inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.** Le cas  $n = 3$  est assez couramment utilisé dans des problèmes d'extremum en géométrie.

Soit  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^+)^3$ , on a  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a + b + c)$  avec égalité si et seulement si  $a = b = c$ .

(on le prouve en utilisant la (stricte) concavité du logarithme).

### Exercice 11.26

#### TPE PSI 2007, 2006

Soit  $ABC$  un triangle du plan affine euclidien. Déterminer les points  $M$  intérieurs à  $ABC$  tels que le produit des distances de  $M$  aux trois côtés de  $ABC$  soit maximal.

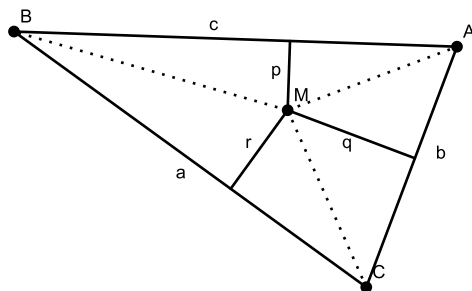
*Indication de la rédaction :* pour donner une interprétation géométrique, on pourra utiliser le lemme suivant :

**Lemme :** Soit  $ABC$  un triangle non aplati direct du plan affine euclidien orienté alors tout point  $M$  est barycentre de

$\{(A, [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]), (B, [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]), (C, [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}])\}$  où  $[\vec{u}, \vec{v}]$  désigne le produit mixte (c'est-à-dire le déterminant dans une base orthonormale directe).

*La démonstration du lemme se trouve à la fin du corrigé.*

Soit  $\varphi$  la fonction du plan dans  $\mathbb{R}$  qui à un point  $M$  associe  $\varphi(M)$  le produit de ses distances aux côtés de  $ABC$ . Soient  $a, b$  et  $c$  les longueurs des côtés du triangle  $ABC$ ,  $p, q$  et  $r$  les distances de  $M$  aux trois côtés de  $ABC$  comme sur la figure suivante. On a  $\varphi(M) = pqr$ .



Remarquons que comme  $M$  est intérieur au triangle,  $ar + bq + cp = 2S$  où  $S$  est l'aire du triangle  $ABC$ , si bien que la relation  $r = (2S - bq + cp)/a$  montre qu'il s'agit d'un problème d'extremum d'une fonction de deux variables ( $p$  et  $q$  par exemple), que l'on pourrait traiter classiquement en recherchant un point critique.

Voici une autre démarche plus directe. On a par l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique :

$$(pqrabc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(ar + bq + cp)$$

et l'égalité  $ar + bq + cp = 2S$  nous donne

$$\varphi(M) = pqr \leq \frac{8S^3}{27abc}.$$

Nous avons égalité si et seulement si  $ar = bq = cp$ , c'est-à-dire si et seulement si les aires des triangles  $AMB$ ,  $BMC$  et  $AMC$  sont égales.

Grâce au lemme, nous allons montrer que ce majorant est un maximum atteint lorsque  $M$  est le centre de gravité du triangle.

En effet, si les aires des triangles  $AMB$ ,  $BMC$  et  $AMC$  sont égales, en ayant choisi un triangle  $ABC$  direct (sinon on compose par une réflexion), alors  $[\vec{MB}, \vec{MC}] = [\vec{MC}, \vec{MA}] = [\vec{MA}, \vec{MB}] > 0$  donc  $M$  est l'isobarycentre de  $ABC$ .

*Conclusion :*  $\varphi$  est maximal lorsque  $M$  est le centre de gravité du triangle et vaut alors  $\frac{8S^3}{27abc}$ .

*Démonstration du lemme*



Soit  $M$  un point du plan, on sait qu'il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  de somme non nulle, unique à un scalaire non nul multiplicatif près tel que  $M$  soit le barycentre de  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ . Nous avons  $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = 0$ . Ainsi, en composant par  $[\vec{MA}, \cdot]$ ,  $[\vec{MB}, \cdot]$ , et  $[\vec{MC}, \cdot]$ , il vient :

$$\begin{cases} \beta [\vec{MA}, \vec{MB}] + \gamma [\vec{MA}, \vec{MC}] = 0 \\ \alpha [\vec{MB}, \vec{MA}] + \gamma [\vec{MB}, \vec{MC}] = 0 \\ \alpha [\vec{MC}, \vec{MA}] + \beta [\vec{MC}, \vec{MB}] = 0. \end{cases}$$

Au moins l'un des produit mixtes est non nul car le triangle est supposé non aplati, par exemple  $[\vec{MA}, \vec{MB}] \neq 0$ , il vient en posant  $\lambda = \frac{\gamma}{[\vec{MA}, \vec{MB}]}$ ,

$$\alpha = \lambda [\vec{MB}, \vec{MC}], \quad \beta = \lambda [\vec{MC}, \vec{MA}] \text{ et } \gamma = \lambda [\vec{MA}, \vec{MB}].$$

On a  $\lambda \neq 0$  car sinon  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . On trouve bien que  $M$  est barycentre de  $\{(A, [\vec{MB}, \vec{MC}]), (B, [\vec{MC}, \vec{MA}]), (C, [\vec{MA}, \vec{MB}])\}$ .

## Exercice 11.27

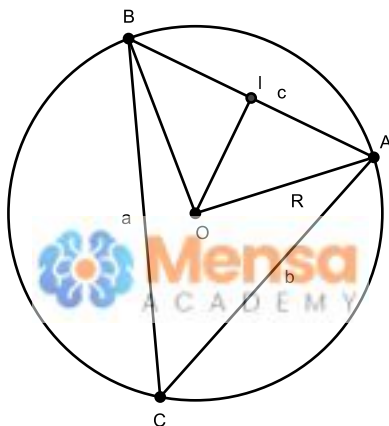
## Mines-Ponts MP 2006

Soit  $O$  le centre d'un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$ , soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les sommets d'un triangle inscrit dans ce cercle. Calculer l'aire maximale de  $ABC$ .

*Indication pour une méthode géométrique :* montrer que  $S = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$  puis utiliser la concavité de la fonction  $x \mapsto \ln(\sin x)$  sur  $]0, \pi[$ .

On peut sans trop de difficulté montrer que pour  $A$  et  $B$  fixés, c'est un triangle isocèle en  $C$  qui réalise l'aire maximale. On peut ensuite, en rapportant le plan à un repère orthonormal, ramener la recherche de l'aire maximale des triangles isocèles inscrits dans  $\mathcal{C}$  à un problème de recherche de maximum d'une fonction d'une variable réelle.

Voici une autre méthode plus géométrique.



Soit  $S$  l'aire de  $ABC$ . On va chercher une relation liant  $S$  et  $R$  avec  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$  les longueurs des côtés de  $ABC$ . On a la relation :

$$S = \frac{1}{2}ab \left| \sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \right|.$$

Pour faire apparaître  $r$  dans cette relation il est naturel de se tourner vers le théorème de l'angle inscrit. On a  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}$ . Par ailleurs le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$ , deux de ses côtés étant de longueur  $R$ . En notant  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ , on obtient un triangle  $IAO$  qui est rectangle en  $I$ , à partir des relations trigonométriques dans un triangle rectangle, on obtient :

$$\left| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \right| = \frac{AI}{AO} = \frac{c}{2R}.$$

Par ailleurs, dans ce triangle  $IAO$ , l'angle au sommet  $O$  est égal à la moitié de  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ . On a donc :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}.$$

Remarquons que la division par 2 fait apparaître un modulo  $\pi$ . Ceci n'a d'effet que sur le signe de  $\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$ , et on en déduit :

$$\left| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \right| = \left| \sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \right| = \sin \hat{C}.$$

En reportant cette égalité dans les relations précédentes on obtient :

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{2R}.$$

On montre de la même manière les relations  $\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$  et  $\sin \hat{B} = \frac{b}{2R}$ . En reportant les deux dernières relations dans l'expression de  $S$  proposée ci-dessus on obtient :

$$S = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}.$$

(les angles géométriques  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  sont dans  $]0, \pi[$ ).

On vérifie sans peine que la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par  $x \mapsto \ln(\sin x)$  est à dérivée seconde strictement négative donc strictement concave. On en déduit :

$$\frac{1}{3}(\ln(\sin \hat{A}) + \ln(\sin \hat{B}) + \ln(\sin \hat{C})) \leq \ln \left( \sin \left( \frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \right) \right),$$

avec égalité si et seulement si  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ . Ce qui, en composant par la fonction exponentielle, devient :

$$(\sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C})^{\frac{1}{3}} \leq \sin \left( \frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \right).$$

On sait que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ . On déduit donc de l'inégalité précédente :

$$S \leq 2R^2 \left( \sin \frac{\pi}{3} \right)^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2,$$

avec égalité si et seulement si  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ . On en déduit que le triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle est équilatéral et son aire vaut  $\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$ .

# TOUS LES EXERCICES D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE PC-PSI

Pour assimiler le programme, s'entraîner  
et réussir son concours

Ce livre d'exercices corrigés d'Algèbre et Géométrie est un outil **d'apprentissage quotidien** destiné aux élèves de seconde année des classes préparatoires **PC** et **PSI**. Le respect scrupuleux de chacun des programmes (PC et PSI) a guidé en permanence la rédaction ; en particulier tout exercice ou tout rappel de cours faisant appel à une notion qui n'est pas commune aux deux programmes est signalé de façon explicite.

Les premiers chapitres assurent la transition entre la première et la seconde année. Ils pourront servir de support aux **révisions** « **estivales** » précédant le début de la deuxième année.

Chaque chapitre est constitué de trois parties :

- une présentation synthétique de **l'essentiel du cours** suivi d'exercices d'**assimilation** ;
- des exercices d'**entraînement** dont l'objectif est d'amener le lecteur à la compréhension et à une bonne maîtrise des notions étudiées ;
- des exercices d'**approfondissement** destinés à mettre l'élève en situation de concours ; ils fourniront une **référence** et une excellente base de travail pendant les périodes de révisions.

Les candidats aux concours du CAPES et de l'Agrégation pourront également trouver dans cet ouvrage une aide précieuse pour leur préparation.

**El-Haj Laamri**

Agrégé de Mathématiques  
Maître de Conférences à  
Nancy-Université

**Philippe Chateaux**

Agrégé de Mathématiques  
Professeur au Lycée Henri  
Poincaré en MP\*

**Gérard Eguether**

Maître de Conférences à  
Nancy-Université

**Alain Mansoux**

Agrégé de Mathématiques  
Professeur au Lycée Henri  
Poincaré en PC

**David Rupprecht**

Agrégé de Mathématiques  
Professeur au Lycée Henri  
Loritz en PSI

**Laurent Schwald**

Agrégé en Mathématiques  
Professeur au Lycée Henri  
Poincaré en BCPST