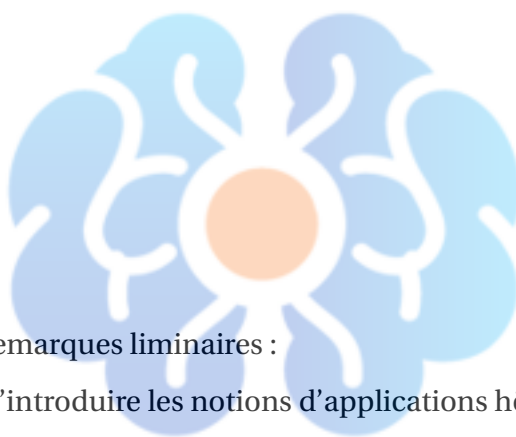


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



Objectif du problème et remarques liminaires :

- On se propose ici d'introduire les notions d'applications hölderiennes et « à variation bornée ».
- Les cinq parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres.
- L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours.

Notations :

- Si A et B sont deux ensembles, B^A est l'ensemble des applications de A dans B .
- Dans la suite, on note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ muni de ses lois usuelles.
- Dans tout le problème, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et on convient que $0^x = 0$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors $\llbracket p, q \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, p \leq k \leq q\}$.
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $x = (x_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]^{\llbracket 0, n \rrbracket}$ est dit subdivision de $[a, b]$ si, et seulement si, x est croissant et tel que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Si c'est le cas et $f \in \mathbb{C}^{[a, b]}$, on note $V_x(f)$ la somme (appelée variation de f relativement à x) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

En outre, $S_{[a, b]}$ désignera l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Enfin, on dit que f est à variation bornée (sur $[a, b]$) si, et seulement si, l'ensemble $\{V_x(f), x \in S_{[a, b]}\}$ est majoré et, lorsque c'est le cas, on appelle variation de f (sur $[a, b]$) sa borne supérieure, que l'on note $V_{[a, b]}(f)$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, $C_T^p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est classiquement le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^p et T -périodiques. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, on note $H^\alpha(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{K}$ qui vérifient : $\exists c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |y - x|^\alpha$

On note aussi $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ l'ensemble des éléments de $H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ T -périodiques.

- Dans tout le problème, F est l'ensemble des éléments $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de E satisfaisant la condition :

pour tout élément p de $\mathbb{N}$, z_n est négligeable devant $|n|^{-p}$ lorsque n tend vers $-\infty$ et $+\infty$.

- Enfin, si $f \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ le nombre complexe :

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (f(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t}) dt$$

PARTIE I

- 1/ Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E .
- 2/ Constater que la suite $(z^{|n|}/|n|!)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à F si $z \in \mathbb{C}$.
- 3/ Soient P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq n_0 \Rightarrow P(n) \neq 0.$$

b) En déduire que $(P(n).z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à F si, et seulement si : $|z| < 1$.

4/ a) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $f' \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $c_n(f') = i.n.\omega.c_n(f)$.

b) Prouver que $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ si $f \in C_T^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5/ On suppose ici que $\alpha \in]1, +\infty[$.

a) Vérifier que, si $f \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, alors f est dérivable et préciser f' .

b) En déduire $H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ puis $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

6/ Constater que, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ stable par $\times$.

7/ a) Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un élément $\tilde{x}$ de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \tilde{x} = x + k.T \quad \text{et} \quad |y - \tilde{x}| \leq T \quad \text{et} \quad |y - \tilde{x}| \leq |y - x|.$$

b) En conclure que $H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ contient $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$ et $\beta \leq \alpha$.

PARTIE III

Dans cette partie, $\alpha \in]0, 1[$ et I_α est l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} (u^{\alpha-2} \cdot (1 - \cos u)) \cdot du$$

8/ Justifier qu'il soit licite de considérer une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_α , continue, T -périodique, paire et satisfaisant :

$$\forall t \in]0, T/2] \quad f_\alpha(t) = t^\alpha$$

9/ a) Vérifier que : $\forall t \in]1, +\infty[\quad t^\alpha - 1 \leq (t - 1)^\alpha$.

b) Prouver que $H^\alpha([0, T], \mathbb{K})$ contient la restriction de f_α à $[0, T]$.

c) En déduire que $f_\alpha \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Appartient-elle à $H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si $\beta \in]\alpha, +\infty[$?

10/ Montrer que I_α converge puis que $I_\alpha > 0$.

11/ a) Déterminer, en fonction de I_α , un équivalent de $c_n(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient-elle à F ?

PARTIE IV

Dans toute la suite du problème, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De plus, $VB([a, b], \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des applications à variations bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

12/ a) Constater que, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors le uplet $(x_k)_{k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ défini par

$$x_0 = 0, x_{n+1} = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = \frac{1}{2 \cdot (n+1-k)}$$

est une subdivision de $[0, 1]$.

b) Montrer que l'application φ de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot x}\right)$ admet un prolongement à $[0, 1]$ continu puis que celui-ci n'est pas à variation bornée.

13/ a) Constater que toute application monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est à variation bornée et préciser sa variation.

b) Prouver que $VB([a, b], \mathbb{K})$ contient $H^1([a, b], \mathbb{K})$. Qu'en déduit-on sur toute application de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 ?

14/ a) Vérifier que $VB([a, b], \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

b) Soient $f \in VB([a, b], \mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = f(\lambda \cdot t + \mu)$ est à variation bornée sur son domaine de définition. Comparer les variations de f et $\tilde{f}$.

15/ Soient $f \in \mathbb{K}^{[a, b]}$ et $c \in]a, b[$. Justifier que f est à variation bornée si, et seulement si, les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont. Montrer que, sous cette hypothèse :

$$V_{[a, b]}(f) = V_{[a, c]}(f) + V_{[c, b]}(f).$$

16/ Soit $f \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telle que la restriction de f à $[0, T]$ soit à variation bornée. On considère $K \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_k)_{k \in \llbracket 0, K \rrbracket}$ de $[0, T]$.

a) Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[(f(t) - f(x_k)) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t} \right] \cdot dt \right| \leq \sum_{k=1}^K \left[V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right]$$

puis que :

$$\left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[f(x_k) \cdot e^{-i \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T} \right] \cdot dt \right| \leq \frac{V_{[0, T]}(f)}{|n| \cdot \omega}$$

b) En conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |c_n(f)| \leq \frac{V_{[0, T]}(f)}{2 \cdot \pi \cdot |n|}$. Qu'en déduit-on sur $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$?

PARTIE V

Dans cette dernière partie, $\alpha \in]0, 1[$ et $p \in]1, 1/\alpha[$. On se propose de prouver que $H^\alpha([a, b], \mathbb{K})$ n'est pas inclus dans $VB([a, b], \mathbb{K})$.

17/ a) Exhiber un nombre réel ρ tel que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = 1 - \rho \cdot \sum_{k=1}^n k^{-p}$$

converge vers 0.

b) Vérifier qu'alors elle est à valeurs dans $]0, 1]$ et qu'elle décroît.

18/ Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ et on note g_n l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_n(t) = \max \left\{ 0, \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} - |t - \mu_n| \right\}$$

a) Représenter graphiquement (sans justification) l'application g_n , montrer que $g_n \in H^1([0, 1], \mathbb{R})$ puis évaluer $V_{[0,1]}(g_n)$, lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'il est légitime de considérer l'application h définie par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(t)$$

puis que $h \in H^1([0, 1], \mathbb{R})$.

c) Montrer que $h^\alpha \in H^\alpha([0, 1], \mathbb{R})$.

19/ a) Evaluer $V_{[\lambda_n, 1]}(h^\alpha)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que h^α n'appartient pas à $VB([0, 1], \mathbb{R})$.

20/ a) Conclure.

b) A quelle condition, portant sur l'élément β de $\mathbb{R}^{*+}$, $VB([a, b], \mathbb{K})$ contient-il $H^\beta([a, b], \mathbb{K})$?

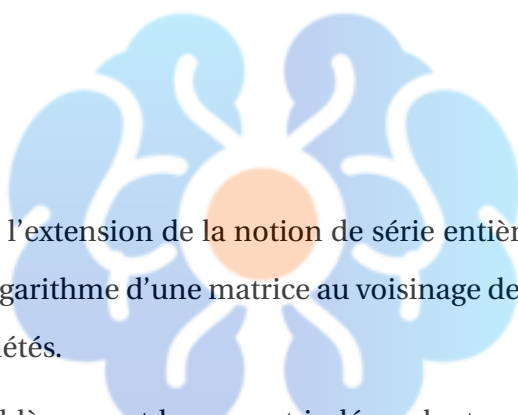
Fin

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h



Le problème a pour objet l'extension de la notion de série entière à des séries de matrices, dans le but de définir le logarithme d'une matrice au voisinage de la matrice-identité et d'en examiner certaines propriétés.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes. Quel que soit l'ordre dans lequel le candidat décide de les aborder, on attend de lui une démarche claire, ainsi qu'une rédaction soignée. La présentation, la précision des arguments et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Dans tout le problème, p désigne un nombre entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont réels.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et tout couple (ℓ, k) d'entiers compris entre 1 et p , on note $M[\ell, k]$ le coefficient situé dans la ℓ -ième ligne et la k -ième colonne de la matrice M .

Dans la base des matrices élémentaires $E_{\ell, k}$ (matrice dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé dans la ℓ -ième ligne et la k -ième colonne, qui vaut 1) une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^p M[\ell, k] E_{\ell, k}.$$

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est triangulaire si tous ses coefficients sous-diagonaux (les $M[\ell, k]$ pour lesquels $\ell > k$) sont nuls.

On appelle polynôme caractéristique de M le polynôme $\chi_M = \det(X.I_p - M)$, où I_p désigne la matrice-identité d'ordre p . Pour tout entier k compris entre 0 et p , on notera $a_k(M)$ le coefficient de son monôme de degré k , de sorte que :

$$\chi_M = \sum_{k=0}^p a_k(M) X^k, \text{ avec } a_p(M) = 1 \text{ et } a_0(M) = (-1)^p \det(M).$$

Le spectre de M , constitué des racines (complexes) de χ_M , sera noté $\text{sp}(M)$:

$$\text{sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(\lambda.I_p - M) = 0\}.$$

On dit qu'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est convergente si chacune des suites $(M_n[\ell, k])_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.

On dit que la série de terme général M_n est convergente si la suite $(\sum_{m=0}^n M_m)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Partie 1 : convergence d'une série entière de matrices

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ des matrices-colonnes à p coefficients complexes.

On note $\| \cdot \|_s$ la norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ subordonnée à $\| \cdot \|$, définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \| A \|_s = \text{Sup}\{ \| AY \|; Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \| Y \| \leq 1 \}.$$

1. Justifier pour toute matrice Y de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ les inégalités :

$$\|AY\| \leq \|A\|_s \|Y\| ,$$

$$\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s .$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on appelle rayon spectral de A , noté $\rho(A)$, le plus grand des modules des valeurs propres (complexes) de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{sp}(A)\}$.
Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) \leq \|A\|_s$.

3. Dans cette question, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ soit strictement positif.

On note R ce rayon de convergence, éventuellement infini.

On note $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} c_n A^n$ soit convergente.

- a) Établir les deux inclusions :

$$\{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \|A\|_s < R\} \subset \mathcal{A}_c \subset \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \rho(A) \leq R\} .$$

- b) Quel résultat sur les séries entières retrouve-t-on lorsque p est égal à 1, si on identifie alors $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$?

- c) Démontrer que $\mathcal{A}_c$ est invariant par similitude, c'est-à-dire que, si A appartient à $\mathcal{A}_c$ et si A' est semblable à A , alors A' est aussi un élément de $\mathcal{A}_c$.

- d) Démontrer que si A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dont le rayon spectral est strictement inférieur à R , alors A appartient à $\mathcal{A}_c$.

Partie 2 : quelques calculs et un exemple

Pour tout couple $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, on note $u_n(z) = (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ et $v_n(z) = \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

1. a) Démontrer que la suite $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $d_n = \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est convergente.

- b) Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle $\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1)$ en fonction de d_{2N} et d_N ,
et en déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \ln(2)$.

- c) Pour quelles valeurs réelles de x la série de terme général $u_n(x)$ est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?
2. a) Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général v_n .
- b) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$, pour tout réel x tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ converge.
- c) Établir, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i \arctan(x)$.
- d) Justifier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(i)$ et calculer sa somme.
3. Dans cette question, on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
- b) Utiliser le résultat de la question 2d pour calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} D^{n+1}$.
- c) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1}$.

Partie 3 : quelques questions topologiques

1. Soit T une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
- Pour tout entier strictement positif n on pose : $T_n = T + \sum_{\ell=1}^p \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.
- a) Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, de la différence $T_n[\ell, \ell] - T_n[k, k]$ de deux coefficients diagonaux de T_n .
- b) Démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de T_n soient deux à deux distincts.
2. a) Rappeler pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- b) Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
3. Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$ de $\mathbb{C}_p[X]$, on note : $\|Q\|_1 = \sum_{k=0}^p |b_k|$.
- Justifier, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \quad \|N - M\|_s \leq \alpha \Rightarrow \|\chi_N - \chi_M\|_1 \leq 1.$$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mu \in \text{sp}(M)$.

a) Justifier successivement les inégalités :

$$(1) |\mu|^p \leq \text{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)| \quad (2) \text{Max}\{1, |\mu|^p\} \leq \text{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^p |a_k(M)|$$

et (3) $|\mu| \leq \|\chi_M\|_1$.

b) En déduire que, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|\chi_N - \chi_M\|_1 \leq 1$, on

a :

$$\forall \lambda \in \text{sp}(N), \quad |\lambda| \leq 2 \|\chi_M\|_1.$$

5. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de limite M .

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique de M_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire qu'il admet p racines réelles $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n}$, distinctes ou non :

$$\chi_{M_n} = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_{k,n}).$$

a) Justifier l'existence d'une suite convergente extraite de la suite $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

b) En déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

a) Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice M de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, alors il existe une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers M .

c) Que peut-on en déduire sur l'intérieur de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$?

Partie 4 : logarithme de matrice

On note $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire.

Soit $\mathcal{B} = \{M \in \mathcal{T}_p(\mathbb{R}); \|M - I_p\|_s < 1\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{B}$.

- a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} (M - I_p)^{n+1}$.
- b) Démontrer que $\text{sp}(M)$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{B}$, on note désormais : $\text{Log}(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (M - I_p)^{n+1}$.

2. Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{B}$, la trace de $\text{Log}(M)$ est égale à $\ln(\det M)$ (on pourra commencer par le cas où M est diagonalisable).

3. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

a) Démontrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les deux matrices $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires.

b) Démontrer qu'il existe deux suites $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers M et N , telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$M_n N_n = N_n M_n.$$

4. Utiliser le résultat précédent pour prouver que, si M et N sont deux matrices de $\mathcal{B}$ telles que $MN = NM$ et $MN \in \mathcal{B}$, alors :

$$\text{Log}(MN) = \text{Log}(M) + \text{Log}(N).$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet est constitué d'un problème en 4 parties et d'un exercice indépendant du problème. On pourra choisir de commencer par traiter l'exercice.

Rappel de résultats

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés dans la suite sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer.

1. **Inégalité de Markov** : pour toute variable aléatoire positive X possédant une espérance, et pour tout nombre réel $x > 0$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}.$$

2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : pour toute variable aléatoire réelle X possédant une espérance et une variance, et pour tout nombre réel $x > 0$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}.$$

3. **Identité pour l'espérance** : pour toute variable aléatoire positive X , on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx,$$

l'espérance de la variable aléatoire X étant définie si et seulement si l'intégrale ci-dessus est convergente.

4. **Espérance d'un produit** : si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes possédant chacune une espérance, alors la variable aléatoire produit XY possède également une espérance, et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

5. **Loi faible des grands nombres** : on considère une variable aléatoire réelle X possédant une espérance, et, pour tout $N \geq 1$, et tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$p(N, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right),$$

où $X_1, \dots, X_N$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X . La loi faible des grands nombres affirme que l'on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \rightarrow +\infty} p(N, \varepsilon) = 0.$$

Problème

Cadre mathématique

Dans tout ce problème, X désigne une variable aléatoire positive, dont on note F_X la fonction de répartition, N désigne un entier vérifiant la condition $N \geq 1$, et $X_1, \dots, X_N$ désigne une famille de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X . On définit alors la variable aléatoire S_N de la manière suivante :

$$S_N = X_1 + \dots + X_N.$$

L'objectif du problème est l'étude de diverses bornes pour des probabilités de la forme

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right).$$

Contexte actuariel

Aucune connaissance en assurance n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cependant, la question étudiée se rattache à une problématique actuarielle concrète, brièvement esquissée ci-après.

Sur une période d'un an, un assureur prend à sa charge les montants des sinistres affectant une population de N assurés. En modélisant les montants individuels des sinistres associés à chacun des assurés par une famille de variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$, la somme S_N représente donc le montant total à la charge de l'assureur sur une période d'un an. En supposant que chacun des N assurés verse une prime d'assurance annuelle égale à x , le montant total des primes perçues pour une année est Nx , et l'événement $\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\}$ correspond à la situation défavorable où le montant des primes perçues est inférieur au montant des sinistres à prendre en charge. La valeur de la prime x est généralement fixée de manière à rendre suffisamment faible la probabilité d'un tel événement, et l'estimation de probabilités du type $\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)$ est donc une question pertinente dans le contexte de l'assurance.

Organisation

Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment de la partie I, en admettant simplement le résultat de la question 8) et les définitions données dans la partie I. La partie IV peut être traitée indépendamment des parties I, II, III.

Notation exponentielle

Dans tout le problème, on utilise indifféremment les notations e^x et $\exp(x)$ pour désigner l'exponentielle d'un nombre réel x .

Partie préliminaire

1) On suppose que la variable aléatoire X possède une espérance. Montrer, en faisant appel à la loi des grands nombres, que pour tout $x > \mathbb{E}(X)$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) = 0.$$

Partie I – Bornes exponentielles : cadre général

Dans toute cette partie, on suppose que la variable aléatoire X vérifie la propriété suivante : il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que

$$\forall x \geq 0, \mathbb{P}(X > x) \leq a \exp(-bx). \quad (1)$$

2) Montrer, grâce à l'inégalité (1), que la variable aléatoire X possède une espérance. (On pourra utiliser l'identité pour l'espérance figurant dans la liste de résultats rappelés en page 2/10.)

3) Pour $t \in [0, +\infty[$ et $z \geq 1$, déduire de l'inégalité (1) une majoration de la probabilité $\mathbb{P}(\exp(tX) > z)$. Donner ensuite une majoration très simple de cette probabilité lorsque $z \in [0, 1[$.

4) En déduire que, pour tout $t \in [0, b[$, la variable aléatoire $\exp(tX)$ possède une espérance, et justifier que $\mathbb{E}(\exp(tX)) > 0$.

Définitions : pour tout $t \in [0, b[$, on définit $\Lambda(t)$ par $\Lambda(t) = \ln(\mathbb{E}(\exp(tX)))$.

5) Montrer que, pour tout $t \in [0, b[$, la variable $\exp(tS_N)$ possède une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(\exp(tS_N)) = \exp(N\Lambda(t)).$$

Définitions : pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on définit les événements $A(N, x)$ et $B(N, x, t)$ par

$$A(N, x) = \left\{ \frac{S_N}{N} \geq x \right\}, \quad B(N, x, t) = \{ \exp(-Ntx) \exp(tS_N) \geq 1 \}.$$

6) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on a l'inclusion entre événements

$$A(N, x) \subset B(N, x, t),$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}(A(N, x)) \leq \mathbb{P}(B(N, x, t)).$$

7) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, et tout $t \in [0, b[$,

$$\mathbb{P}(B(N, x, t)) \leq \exp(-N(tx - \Lambda(t))).$$

8) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \exp(-NI(x)), \quad (2)$$

où $I(x)$ désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par $tx - \Lambda(t)$ lorsque t décrit l'intervalle $[0, b[$, autrement dit :

$$I(x) = \sup \{ tx - \Lambda(t) \mid t \in [0, b[\}.$$

9) Au vu du résultat de la question 8), est-il possible d'avoir $I(x) > 0$ pour un nombre $x \in [0, \mathbb{E}(X)[$? (Justifier la réponse.)

Partie II – Bornes exponentielles : le cas de la loi exponentielle

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où λ est un nombre réel strictement positif. On rappelle que cette loi est caractérisée par la densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

10) Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X > x)$ pour tout $x \geq 0$.

11) En déduire que l'inégalité (1) est satisfaite avec $a = 1$ et $b = \lambda$.

12) Pour $z \geq 0$ et $t \in [0, +\infty[$, calculer la valeur de $\mathbb{P}(\exp(tX) > z)$ en distinguant les cas $z \in [0, 1[$ et $z \in [1, +\infty[$.

13) En déduire que, pour tout $t \in [0, \lambda[$, la variable aléatoire $\exp(tX)$ possède une espérance, et calculer la valeur de celle-ci.

14) En déduire, à l'aide de la question 8), que, pour tout $x \geq \frac{1}{\lambda}$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \exp(-NI_{\mathcal{E}(\lambda)}(x)),$$

où l'on a posé :

$$I_{\mathcal{E}(\lambda)}(x) = \lambda x - 1 - \ln(\lambda x).$$

15) Montrer que $I_{\mathcal{E}(\lambda)}(x) > 0$ pour tout $x > \frac{1}{\lambda}$. Que vaut $I_{\mathcal{E}(\lambda)}(x)$ lorsque $x = \frac{1}{\lambda}$?

Partie III – Bornes exponentielles : le cas de la loi de Bernoulli

Dans cette partie, on suppose que X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in]0, 1[$. Autrement dit, la loi de X est caractérisée par :

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

16) Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X > x)$ pour tout $x \geq 0$.

17) Montrer que, pour tout $b > 0$, on peut trouver un $a > 0$ tel que l'inégalité (1) soit satisfaite.

18) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

19) Calculer, pour tout $t \geq 0$, la valeur de $\Lambda(t)$.

20) En déduire à l'aide de la question 8) l'inégalité, valable pour tout $x \in]p, 1[$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq I_{\mathcal{B}(p)}(x),$$

où

$$I_{\mathcal{B}(p)}(x) = x \ln(x/p) + (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right).$$

21) Montrer que $I_{\mathcal{B}(p)}(x) > 0$ pour tout $x \in]p, 1[$. Comment se comporte $I_{\mathcal{B}(p)}(x)$ lorsque $x \searrow p$ et lorsque $x \nearrow 1$?

Partie IV - Un exemple de comportement polynomial

Dans cette partie, on suppose que la loi de X est caractérisée par une densité f_X dépendant d'un paramètre $\alpha \in]1, 2[$, et possédant l'expression suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

22) Montrer que la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X est donnée, pour tout $x \geq 0$, par la formule :

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^\alpha}.$$

23) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance, et calculer la valeur de celle-ci.

Définitions : pour $u \geq 0$, on définit la variable aléatoire $W_N(u)$ comme étant le nombre d'indices i entre 1 et N pour lesquels $X_i \geq u$. Autrement dit :

$$W_N(u) = \text{nombre d'éléments de l'ensemble } \{i \in \{1, \dots, N\} \mid X_i \geq u\}.$$

24) Quelle est la loi de $W_N(u)$? En déduire une expression simple de

$$\mathbb{P}(W_N(u) \geq 1).$$

25) Montrer que, pour tout $x > 0$ fixé, on a l'équivalent suivant lorsque $N \rightarrow +\infty$:

$$\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha}.$$

26) En déduire que, pour tout $x > 0$, et tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \geq (1-\epsilon)x^{-\alpha} N^{1-\alpha}.$$

27) Une inégalité semblable à l'inégalité (2) obtenue à la question 8), dans laquelle on aurait $I(x) > 0$, est-elle possible dans le cas étudié ici ? (Justifier la réponse.)

Définitions : pour tout $u \geq 0$, on introduit la variable aléatoire $Y^{(u)}$ définie par

$$Y^{(u)} = \min(X, u).$$

Autrement dit,

$$Y^{(u)} = \begin{cases} X & \text{lorsque } X \leq u, \\ u & \text{lorsque } X > u. \end{cases}$$

28) Pour $u \geq 0$, calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y^{(u)}$.

29) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $Y^{(u)}$ possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y^{(u)}) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{(1 + u)^{\alpha - 1}} \right).$$

30) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $[Y^{(u)}]^2 = Y^{(u)} \times Y^{(u)}$, possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}([Y^{(u)}]^2) = \frac{2}{2 - \alpha} (1 + u)^{2 - \alpha} - \frac{2}{2 - \alpha} - \frac{2}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{(1 + u)^{\alpha - 1}} \right).$$

31) En déduire que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $Y^{(u)}$ possède une variance, et donner une expression de celle-ci.

Définitions : pour tout $u \geq 0$, et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on définit la variable aléatoire $Y_i^{(u)}$ par $Y_i^{(u)} = \min(X_i, u)$, puis l'on définit la variable aléatoire $R_N^{(u)}$ en posant

$$R_N^{(u)} = Y_1^{(u)} + \dots + Y_N^{(u)}.$$

32) Montrer que la variable aléatoire $\frac{R_N^{(u)}}{N}$ possède une espérance et une variance, respectivement données par

$$\mathbb{E}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \mathbb{E}(Y^{(u)}), \quad \mathbb{V}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N}.$$

33) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, et pour tout $x > \mathbb{E}(Y^{(u)})$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N(x - \mathbb{E}(Y^{(u)}))^2}.$$

34) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, on a l'inclusion entre événements :

$$\{W_N(u) = 0\} \subset \{S_N = R_N^{(u)}\}.$$

35) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, et pour tout $x > \mathbb{E}(Y^{(u)})$, on a l'inclusion entre événements :

$$\left\{ \frac{S_N}{N} \geq x \right\} \subset \{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{ \frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x \right\}.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}(W_N(u) \geq 1) + \mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right).$$

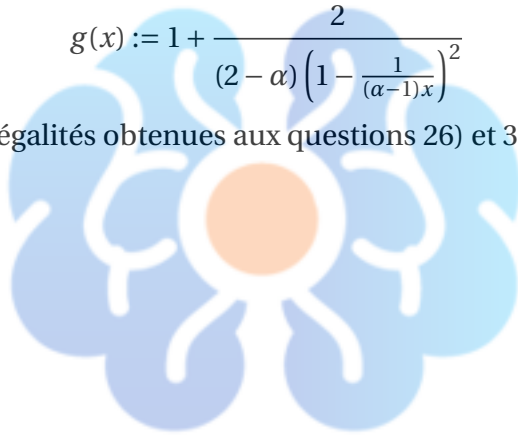
36) On considère à présent un nombre $x > \frac{1}{\alpha-1}$ fixé. En utilisant les résultats précédents avec $u = xN$, montrer que, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe un entier $N_1 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq (1 + \epsilon) x^{-\alpha} N^{1-\alpha} g(x),$$

où

$$g(x) := 1 + \frac{2}{(2-\alpha) \left(1 - \frac{1}{(\alpha-1)x}\right)^2}$$

37) Comparer les inégalités obtenues aux questions 26) et 36).



Exercice

Un assureur proposant des contrats d'assurance automobile utilise le modèle suivant. Deux profils de conducteurs sont pris en compte : les "bons conducteurs" (profil 1), et les "mauvais conducteurs" (profil 2). Pour un conducteur de profil donné $i \in \{1, 2\}$, le nombre de sinistres annuel que l'assureur est amené à indemniser est modélisé par une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$ de paramètre λ_i . La différence entre les bons et les mauvais conducteurs se traduit par l'inégalité :

$$\lambda_1 < \lambda_2. \quad (3)$$

Par ailleurs, pour $i \in \{1, 2\}$, on note ρ_i la probabilité pour qu'un assuré pris au hasard corresponde au profil i , et l'on suppose que $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$.

Dans la suite, on note D la variable aléatoire correspondant au nombre de sinistres annuel pour un assuré pris au hasard, et l'on note Π la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2\}$ indiquant le profil de ce même assuré.

On rappelle la définition de la loi de Poisson : si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On rappelle en outre les formules valables dans ce contexte :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

- A) Pour $k \in \mathbb{N}$, expliciter la valeur de $\mathbb{P}(D = k | \Pi = 1)$ et de $\mathbb{P}(D = k | \Pi = 2)$.
- B) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la valeur de $\mathbb{P}(D = k)$ en fonction de $k, \lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.
- C) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(D)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.
- D) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(D^2)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.
- E) En déduire une expression de la variance $\mathbb{V}(D)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.
- F) Comparer $\mathbb{V}(D)$ à la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2$.
- G) Calculer $\mathbb{P}(\Pi = 1 | D = k)$ et $\mathbb{P}(\Pi = 2 | D = k)$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h



Exercice de Probabilités

Soit $\{B_n | n \in \mathbb{N}^*\} = B_1, B_2, B_3, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$, de Bernoulli de paramètre p : $IP(B_n = 1) = p = 1 - IP(B_n = 0)$.

Notons $S_0 := 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n := B_1 + \dots + B_n$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, notons $N_\ell := \min\{n \in \mathbb{N} | S_n = \ell\}$ le premier entier n tel que $S_n = \ell$.

- 0) Quelle est la loi de S_n ?
- 1) Quelle est la loi de N_1 ? préciser sa moyenne et sa variance.
- 2) Calculer $IP(N_1 = j, N_2 = j + k)$, pour j, k quelconques dans $\mathbb{N}^*$.
- 3) Dédire que $N_2 - N_1$ est indépendante de N_1 , et préciser sa loi.
- 4) Expliciter la loi de N_2 .
- 5) Calculer l'espérance et la variance de N_2 .

Fixons un entier $\ell \geq 2$ pour les trois questions suivantes.

- 6) Pour tous $j_1, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}^*$, expliciter à l'aide des variables $B_1, \dots, B_{j_1 + \dots + j_\ell}$ l'événement $\{N_1 = j_1\} \cap \{N_2 - N_1 = j_2\} \cap \dots \cap \{N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\}$, et en déduire sa probabilité.
- 7) Quelle est la loi de la variable aléatoire $N_\ell - N_{\ell-1}$?
- 8) Que peut-on dire de la suite des variables aléatoires : $N_1, N_2 - N_1, \dots, N_\ell - N_{\ell-1}$?
- 9) Calculer l'espérance et la variance de N_ℓ , pour ℓ quelconque dans $\mathbb{N}^*$.
- 10) Soient ℓ, k quelconques dans $\mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $\{N_\ell = k\}$ à l'aide de B_k et de S_{k-1} , puis calculer $IP(N_\ell = k)$.
- 11) Quel est le comportement de la suite N_ℓ / ℓ , lorsque ℓ tend vers l'infini ?

Exercice n° 1 d'optimisation économique

Soit un individu dont la fonction d'utilité est la suivante : $U = XL_0$, où X est la quantité consommée d'un bien composite de prix P et L_0 est le nombre d'heures de loisir de l'individu. L'individu touche un salaire horaire W issu de son travail et perçoit en plus de celui-ci des revenus non salariaux (de capital) Y constants. L'état prélève un impôt sur les

revenus du travail (t_1) ainsi qu'un impôt sur les revenus du capital (t_2). On appelle L le nombre d'heures de travail offert ($L + L_0 = 24$). On sait que $Y = 12$, $W = 3$ et $P = 1$.

1. Déterminez l'offre optimale de travail en absence d'impôt.
2. Déterminez l'offre optimale de travail lorsque le taux de prélèvement fiscal (sur les revenus salariaux et non salariaux) est de 33,33 %. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.
3. Déterminez l'offre de travail lorsque seul le travail est imposé au taux de 33,33%. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.
4. Dans le dernier cas, décomposez l'effet global de la fiscalité en un effet substitution et un effet revenu, sachant que $Y^* = 20,6$ est la solution de l'équation du second degré suivante : $(Y^*)^2 + 96 Y^* - 2400 = 0$. Discutez les résultats obtenus.

Exercice n° 2 d'optimisation économique

Soit une économie à 3 agents (ménages, entreprises et État) représentée par les relations suivantes : $T = T_0$, T étant la fonction d'imposition,

$C = C_0 + c_1 Y_d$, Y_d étant le revenu disponible après impôt et C la consommation,

$I = I_0$, I représentant l'investissement privé autonome des entreprises,

$G = G_0$, G représentant les dépenses publiques de l'État.

Les données sont les suivantes : $G_0 = I_0 = c_0 = T_0 = 20$; $c_1 = 0,8$.

1. Déterminez la production (revenu) d'équilibre sur le marché des biens et services.
2. Supposons que l'État augmente ses dépenses de 10. Quel est l'effet de cette relance sur la production et le solde budgétaire ?
3. Sachant que la production de plein emploi est égale à 300, déterminez le montant de la relance budgétaire nécessaire pour atteindre le plein emploi si l'État poursuit de plus un objectif d'équilibre budgétaire.

On suppose à présent l'introduction d'un marché monétaire représenté par les équations suivantes : $M^d = aY - bi$, M^d représentant la demande de monnaie,

$M^O = M^d$, M^O représentant l'offre réelle de monnaie de la Banque Centrale.

On suppose de plus que l'investissement privé des entreprises dépend du taux d'intérêt de la manière suivante : $I = I_0 - gi$, i représentant le taux d'intérêt et g la sensibilité de l'investissement au taux. On suppose enfin que l'État instaure un impôt proportionnel, de

telle sorte que $T = tY + T_0$, t étant le taux d'imposition et T_0 le niveau d'imposition autonome.

4. Déterminez de manière littérale la production d'équilibre sur le marché des biens et services et sur le marché monétaire.

5. Déterminez de manière littérale l'effet d'une hausse du taux d'imposition sur la production d'équilibre.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Montaigne suggère, dans un passage de l'*Apologie de Raimond Sebond*, une définition de la vérité philosophique aussi déconcertante que pertinente : « Je ne me persuade pas aisément qu'Epicure, Platon et Pythagore nous aient donné pour argent comptant leurs Atomes, leurs Idées et leurs Nombres. Ils étaient trop sages pour établir leurs articles de foi de chose si incertaine et si débatable. Mais, en cette obscurité et ignorance du monde, chacun de ces grands personnages s'est travaillé d'apporter une telle quelle image de lumière, et ils ont promené leur âme à des inventions qui eussent au moins une plaisante et subtile apparence : pourvu que, toute fausse, elle se pût maintenir contre les oppositions contraires. » En d'autres termes, la vérité énoncée par les philosophes, et leur vérité la plus aiguë, celle qui sert depuis des millénaires à désigner et à caractériser leur pensée, est en même temps une vérité dont aucun de ceux qui l'ont avancée ne serait disposé à se porter le moins du monde garant, ou « auteur », au sens du latin *auctor*. Je rappellerai brièvement, pour en revenir à l'étymologie latine du mot auteur, que le terme *auctor* signifie à la fois garant et producteur. Or voici que le producteur en question, je veux dire le philosophe, se montre des plus défiant à l'égard de ses propres et meilleurs produits : Pythagore ne croit pas aux nombres, Platon ne croit pas aux idées, Epicure ne croit pas aux atomes. Contrairement au fanatique, il possède assez de sagesse pour ne pas défendre à n'en vouloir démordre une vérité qu'il a certes énoncée mais dont il sait aussi, et probablement mieux que personne, à quel point elle est douteuse (...)

Le fait qu'un philosophe soit moins persuadé que quiconque de la vérité dont il se recommande peut sembler hautement paradoxal. Le fait est pourtant indubitable et tient à la nature même de la « vérité » philosophique. On peut naturellement et justement observer qu'il est dans la nature de toute vérité, quel qu'en soit le genre, d'être douteuse. Ainsi tout fait, si simple et si évident soit-il lors de son événement, devient-il incertain et vague dès que celui-ci, une fois passé, se trouve convoqué au tribunal de la justice ou de la mémoire collective. De même une vérité scientifique, quelque certaine qu'elle puisse paraître sur le moment, s'use-t-elle vite au contact des conceptions ultérieures qui l'interprètent d'autre façon, dans le cadre d'une théorie nouvelle qui en modifie radicalement les termes. Aussi n'y a-t-il point, à proprement parler, de « sciences exactes » (hormis les mathématiques, qui renoncent à toute vérité de fait et se contentent d'accorder des conclusions avec des prémisses) : tout comme une vérité historique, une vérité physique est à jamais sujette à cau-

tion et à révision. Il n'en reste pas moins que l'historien et le physicien évoquent des faits indubitables, même s'ils sont incapables d'en proposer une version certaine et définitive. Les interprétations de la Révolution française ou de la loi de la chute des corps sont et seront peut-être toujours plus ou moins controversées ; impossible cependant de mettre leur fait en doute, de penser par exemple que la Révolution française n'a pas eu lieu, ou que la chute des corps ne correspond à rien d'observable dans la nature. L'une et l'autre sont vraies : la première quand elle a eu lieu, la seconde quand elle a été conçue. Elles sont vraies dans la mesure où elles ont été vraies en leur temps et peuvent ainsi se recommander, comme dirait Hegel, d'un certain « moment » de vérité. Or le propre des vérités philosophiques, à la différence des autres genres de vérité, est de ne pouvoir jamais se recommander d'un semblable « moment de vérité ». Dans la mesure où la philosophie est une science des problèmes insolubles, ou du moins des problèmes non résolus comme disait Brunschvicg, les solutions qu'elle apporte à ses propres problèmes sont nécessairement et par définition douteuses, – à tel point qu'une vérité qui serait certaine cesserait par là même d'être une vérité philosophique, et qu'un philosophe qui serait persuadé de la vérité qu'il propose cesserait du même coup d'être un philosophe (encore qu'il puisse lui arriver, en revanche, d'être très raisonnablement persuadé de la fausseté des thèses qu'il critique). Ce principe d'incertitude, selon qu'il est respecté ou non, peut servir d'ailleurs de critère pour départager véritables et faux philosophes : un grand penseur est toujours des plus réservés quant à la valeur des vérités qu'il suggère, alors qu'un philosophe médiocre se reconnaît, entre autres choses, à ceci qu'il demeure toujours persuadé de la vérité des inepties qu'il énonce.

On peut naturellement se demander en quoi consiste l'intérêt d'une vérité philosophique nécessairement promise au doute et à l'incertitude, et par conséquent privée de tous les attributs traditionnels de la vérité. Il est à remarquer ici, tout d'abord, que l'intérêt d'une idée ne s'est jamais confondu avec la connaissance assurée de sa vérité, pas plus que l'intérêt d'un fait ne se confond avec la connaissance de sa nature. Ainsi le fait de la sexualité, et l'aveu universel de son intérêt, s'est-il toujours accommodé sans dommage de son caractère hautement obscur et incompréhensible, dont témoignent en toute sincérité ceux qui ont le plus essayé d'en percer les mystères, tels Freud, Georges Bataille, Lacan et avant eux Schopenhauer. D'où l'on peut justement déduire que, comme toute vérité profonde, toute réalité intéressante est foncièrement ambiguë, pour ne pas dire paradoxale : étant à la fois recon-

nue par tout le monde et inconnue de chacun en particulier. Mais l'intérêt principal d'une vérité philosophique consiste en sa vertu négative, je veux dire sa puissance de chasser des idées beaucoup plus fausses que la vérité qu'elle énonce *a contrario*. Vertu critique qui, si elle n'énonce par elle-même aucune vérité claire, parvient du moins à dénoncer un grand nombre d'idées tenues abusivement pour vraies et évidentes. Il en va un peu de la qualité des vérités philosophiques comme de celle des éponges qu'on utilise au tableau noir et auxquelles on ne demande rien d'autre que de réussir à bien effacer. En d'autres termes, une vérité philosophique est d'ordre essentiellement hygiénique : elle ne procure aucune certitude mais protège l'organisme mental contre l'ensemble des germes porteurs d'illusion et de folie. Et d'autre part cette incertitude même, inhérente aux vérités philosophiques, qui en fait si l'on veut la faiblesse, en fait aussi la force. Le travail du doute n'a en effet de pouvoir que sur ce qui se donne pour certain et assuré ; il est en revanche totalement inefficace contre ce qui se présente de soi-même comme incertain et douteux. Car une vérité incertaine est aussi et nécessairement une vérité *irréfutable* : le doute ne pouvant rien contre le doute. (...)

Je remarquerai en passant que le caractère incertain des plus profondes vérités philosophiques permet d'expliquer le fait, apparemment paradoxal et énigmatique, que des propositions formellement contraires et même contradictoires puissent être tenues pour également pertinentes. Rien de plus juste, par exemple, que ce que disent respectivement de l'amour Platon dans *Le banquet* et Lucrèce dans le *De rerum natura*, – mais rien aussi de plus diamétralement opposé. Cette coexistence pacifique des vérités contraires s'explique, non par le fantasme hégélien d'un savoir absolu réconciliant en bout de course l'ensemble de tous les énoncés philosophiques, mais par le caractère incertain de chacun de ces énoncés. Considérées comme définitivement acquises, les vérités philosophiques s'excluent nécessairement dès lors qu'elles ne parlent pas de même. Considérées en revanche comme toujours douteuses et approximatives, elle se tolèrent réciproquement.

Clément Rosset, *Le principe de cruauté* « Le principe d'incertitude », *Editions de Minuit*, 1988.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



1 Translate the following text into French

Companies are starting to open up about their environmental risks.

Until the late 2000s, most firms saw the environment as either irrelevant or a bit of a nuisance. Either way, they did not publish much about it. That has changed drastically. According to CDP, a group that collects environmental data on behalf of investors, more than half the companies listed on the world's 31 largest stock exchanges publish some environmental data.

The British government requires large quoted companies based in Britain to disclose their carbon-dioxide emissions to shareholders. And the European Union plans to make firms with more than 500 employees publish environmental and social data in their management accounts — though this proposal, like many emanating from Brussels, may sit gathering dust for years.

But by far the biggest influence on firms comes from investors. They are gathering together and demanding better data. Investors' main concern is that climate change — or policies to avert it — will damage the firms they invest in.

As Natasha Lamb, head of equity research at Arjuna, puts it, "Shareholder value is at stake".

Adapted from Economist.com/blogs/schumpeter March 29th 2014.

2 Summarize this text in English in 180 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

<http://www.nytimes.com/2013/11/28/opinion/digital-passivity.html>

Digital Passivity

By JARON LANIER

Published: November 27, 2013

I fear that 2013 will be remembered as a tragic and dark year in the digital universe, despite the fact that a lot of wonderful advances took place.

It was the year in which tablets became ubiquitous and advanced gadgets like 3-D printers and wearable interfaces emerged as pop phenomena; all great fun. Our gadgets have widened access to our world. We now regularly communicate with people we would not have been aware of before the networked age. We can find information about almost anything, any time.

But 2013 was also the year in which we became aware of the corner we've backed ourselves into. We learned — through the leaks of Edward J. Snowden, the former U.S. National Security Agency contractor, and the work of investigative journalists — how much our gadgets and our digital networks are being used to spy on us by ultra-powerful, remote organizations. We are being dissected more than we dissect.

I wish I could separate the two big trends of the year in computing — the cool gadgets and the revelations of digital spying — but I cannot.

Back at the dawn of personal computing, the idealistic notion that drove most of us was that computers were tools for leveraging human intelligence to ever-greater achievement and fulfillment. This was the idea that burned in the hearts of pioneers like Alan Kay, who a half-century ago was already drawing illustrations of how children would someday use tablets.

But tablets do something unforeseen: They enforce a new power structure. Unlike a personal computer, a tablet runs only programs and applications approved by a central commercial authority. You control the data you enter into a PC, while data entered into a tablet is often managed by someone else.

Steve Jobs, who oversaw the introduction of the spectacularly successful iPad at Apple, declared that personal computers were now “trucks” — tools for working-class guys in T-shirts and visors, but not for upwardly mobile cool people. The implication was that upscale consumers would prefer status and leisure to influence or self-determination.

I am not sure who is to blame for our digital passivity. Did we give up on ourselves too easily? This would be bleak enough even without the concurrent rise of the surveillance economy. Not only have consumers prioritized flash and laziness over empowerment; we have also acquiesced to being spied on all the time.

The two trends are actually one. The only way to persuade people to voluntarily accept the loss of freedom is by making it look like a great bargain at first.

Consumers were offered free stuff (like search and social networking) in exchange for agreeing to be watched. Vast fortunes can be made by those who best use the personal data you voluntarily hand them. Instagram, introduced in 2010, had only 13 employees and no business plan when it was bought by Facebook less than two years later for \$1 billion.

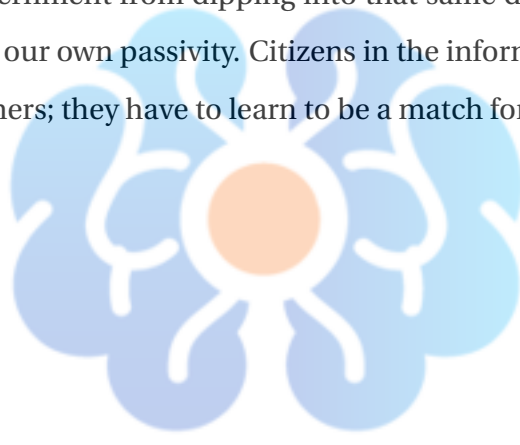
One can argue that network technology enhances democracy because it makes it possible, for example, to tweet your protests. But complaining is not yet success. Social media

didn't create jobs for young people in Cairo during the Arab Spring.

To be free is to have a private zone in which you can be alone with your thoughts and experiments. That is where you differentiate yourself and grow your personal value. When you carry around a smartphone with a GPS and camera and constantly pipe data to a computer owned by a corporation paid by advertisers to manipulate you, you are less free. Not only are you benefiting the corporation and the advertisers, you are also accepting an assault on your free will, bit by bit.

The rise of this consumer-surveillance economy is the uncomfortable and ironic backdrop to the outrage about the N.S.A. snooping. We feel violated. We don't know who has been reading our most tender emails. But why then were we pouring all our personal information into remote corporations to begin with?

Unless we resist giving away our information in exchange for a few free treats, we can't expect to prevent the government from dipping into that same data. 2013 was a year when our noses were rubbed in our own passivity. Citizens in the information age have to learn to be more than just consumers; they have to learn to be a match for their own inventions.



**Banque d'Épreuves des Concours des Écoles
d'Actuariat et Statistique**

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction



BÉCÉAS 2014

⑦

Partie I:

1/ FCE, E est un C-e.v et $(0)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient évidemment à F.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(u, v) \in F^2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $u_n = o(|n|^{-p})$ et $v_n = o(|n|^{-p})$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, il est légitime $\left(\begin{smallmatrix} n \rightarrow +\infty \\ \text{resp. } -\infty \end{smallmatrix} \right)$

d'introduire $(U, V) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq U \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2|\lambda|+1} \cdot |n|^{-p} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq V \Rightarrow |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot |n|^{-p} \end{cases}$$

$$\text{On a alors } \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq \max\{U, V\} \quad |(\lambda \cdot u + v)_n| \leq \left(\frac{|\lambda| \varepsilon}{2|\lambda|+1} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |n|^{-p}$$

$$\text{et donc } \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq \max\{U, V\} \quad |(\lambda \cdot u + v)_n| \leq \varepsilon \cdot |n|^{-p}$$

Il en résulte que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad (\lambda \cdot u + v)_n = o(|n|^{-p})$, soit que $(\lambda \cdot u + v) \in F$.

"Par caractérisation usuelle", F est un sev. de E. $\text{resp. } -\infty$

2/ Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la courbe, $\forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{z^n}{n!} = o(n^{-p})$.

"Par théorème de comparaison", $\frac{z^n}{(-n)!} = o((-n)^{-p})$ et donc, finalement, $\left(\frac{z^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$.

3/ a) Supposons que : $\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq n_0 \text{ et } p(n) = 0$.

On construit alors aisément une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2 \quad k < l \Rightarrow |r_k| < |r_l| \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad p(r_k) = 0. \end{cases}$$

P admettant alors une infinité de racines, R est nul ; ce qui contredit l'énoncé.

On en déduit alors que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq n_0 \Rightarrow p(n) \neq 0$.

b/ Supposons que $(p_n \cdot z^{|n|})_{n \in \mathbb{N}} \in F$. En particulier, $p_n \cdot z^n = o(1)$ $\left(\begin{smallmatrix} n \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \right)$

Vu que $p \neq 0$, R est donc que $(1/p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ; par conséquent

$$z^n = o(1) \quad \text{et donc} \quad \left(\begin{smallmatrix} n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0 \end{smallmatrix} \right) |z| < 1.$$

(2)

Supposons que $z \neq 0$ et $|z| < 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\text{Il est donc que } \left| \frac{P_{n+1} \cdot z^{n+1} \cdot (n+1)^p}{P_n \cdot z^n \cdot n^p} \right| \xrightarrow[n > n_0]{n \rightarrow +\infty} |z|.$$

Or $|z| < 1$, il est donc facile d'introduire un élément m de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$m > n_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \Rightarrow \left| \frac{P_{n+1} \cdot z^{n+1} \cdot (n+1)^p}{P_n \cdot z^n \cdot n^p} \right| \leq \frac{1+|z|}{2}$$

$$\left(\text{car } \frac{1+|z|}{2} > |z| \right).$$

Par un raisonnement ciise par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \Rightarrow |P_n \cdot z^n \cdot n^p| \leq |P_m \cdot z^m \cdot m^p| \cdot \left(\frac{1+|z|}{2} \right)^{n-m}$$

Or $0 < \frac{1+|z|}{2} < 1$, donc $\left(\frac{1+|z|}{2} \right)^{n-m} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. En découle le fait que :

$$|P_n \cdot z^n \cdot n^p| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ c'est-à-dire que } P_n \cdot z^n = o(n^{-p}).$$

Une démonstration analogue prouverait que, de même, $P_n \cdot z^{|n|} = o(|n|^{-p})$.

Si $z=0$, il est clair que le résultat est vrai.

L'équivalence logique est alors fournie.

4a/ * Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$, $f \circ \text{id}_{\mathbb{R}} + T = f$. Or f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; de même $\text{id}_{\mathbb{R}} + T$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; d'après la "théorème de dérivation d'une fonction composée", $f' = f' \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} + T) \times 1$. Du coup, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(x+T)$. Il en résulte que $f' \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$* \quad T \cdot C_T(f') = \int_0^T (f'(t) \cdot e^{-in\omega t}) \cdot dt = \left[f(t) \cdot e^{-in\omega t} \right]_0^T + in\omega \cdot \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$= T \cdot in\omega \cdot C_T(f) \text{ car } f \text{ et } e^{-in\omega \cdot} \text{ sont } T\text{-périodiques et donc}$$

$$\left[f(t) \cdot e^{-in\omega t} \right]_0^T = 0$$

le résultat en découle.

b/ Si $f \in C_T^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, grâce à a/, on montrera aisément par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad C_n(f) = (i \cdot n \cdot \omega)^{(p+1)} \cdot C_n(f^{(p+1)})$$

③

La $f^{(p)}$ étant bornée (car T -périodique), $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ |c_n(p)| \leq \frac{\max_{p \in \mathbb{Z}} |f^{(p)}|}{(n|\omega|)^{p+1}}$

On en conclut que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad c_n(p) = O(n^{-p})$

et donc que $\left(c_n(p) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \in F.$ $\begin{matrix} n \rightarrow +\infty \\ (n \rightarrow -\infty) \end{matrix}$



Partie II :

S/ a) Soit $c \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |y - x|^\alpha$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq c \cdot |x - x_0|^{\alpha-1}$
 Vu que $\alpha > 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} |x - x_0|^{\alpha-1} = 0$. Du coup, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$

Il en résulte que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 0_{\mathbb{R}}$.

b) D'après a), si $f \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, f est constante. Il est clair que les applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ sont α -Hölderiennes et même T -périodiques et α -Hölderiennes. Il résulte de tout cela que les ensembles redécouverts sont les ensembles des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

c) Soit $f \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. f est T -périodique. Soit $c \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |y - x|^\alpha$. Vu que $\alpha > 0$, si $x_0 \in \mathbb{R}$,
 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} |x - x_0|^\alpha = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f(x) - f(x_0)) = 0$ donc f est continue en x_0 .

"Par généralisation", f est continue. Du coup, $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \subset C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
 $C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev. et $0_{\mathbb{K}\mathbb{R}} \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (vidant).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(f, g) \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. $\lambda \cdot f + g$ est T -périodique.

Soit $(c, d) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |y - x|^\alpha$
 $|g(y) - g(x)| \leq d \cdot |y - x|^\alpha$

Il est clair que $(|\lambda| \cdot c + d) \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |(\lambda \cdot f + g)(y) - (\lambda \cdot f + g)(x)| &\leq |\lambda| \cdot |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ &\leq |\lambda| \cdot c \cdot |y - x|^\alpha + d \cdot |y - x|^\alpha = (|\lambda| \cdot c + d) \cdot |y - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte que $(\lambda \cdot f + g) \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

$H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est donc bien un sev. de $C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

. Avec les hypothèses et notations précédentes, comme f et g sont bornées (car continues et périodiques), il est facile d'introduire $F = \max |f|$ et $G = \max |g|$ ($F, G \in \mathbb{R}_+$) et, $\tilde{x}(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|(f \circ g)(y) - (f \circ g)(x)| = |f(y) \cdot [g(y) - g(x)] + g(x) \cdot [f(y) - f(x)]|$$

$$\leq F \cdot |g(y) - g(x)| + G \cdot |f(y) - f(x)| \leq (F \cdot d + G \cdot c) \cdot |y - x|^\alpha$$

D'où, finalement, $(f \circ g) \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est donc $\times$ -stable.

7/ a. Si $|y - x| \leq T$, il est clair que " x convient" car

$$\begin{cases} x \equiv x[T] \\ |y - x| \leq T \\ |y - x| \leq |y - x| \end{cases}$$

. Sinon, soient $e = E\left(\frac{y-x}{T}\right)$ et $\tilde{x} = x + e \cdot T$. Il est évident que $\tilde{x} \equiv x[T]$. Comme $\frac{y-x}{T} - 1 \leq e \leq \frac{y-x}{T}$,

$y - x - T \leq eT \leq y - x$ donc $0 \leq y - \tilde{x} \leq T$ donc $|y - \tilde{x}| \leq T \leq |y - x|$ et donc " $\tilde{x}$ convient encore".

b/ Soit $f \in H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Soit $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |y - x|^\alpha$

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(\tilde{x})| \leq c \cdot |y - \tilde{x}|^\alpha \leq c \cdot |y - \tilde{x}|^\beta \cdot |y - \tilde{x}|^{\alpha-\beta}$$

$$\leq c \cdot (T^{\alpha-\beta} \cdot |y - \tilde{x}|^\beta) \leq (c \cdot T^{\alpha-\beta}) |y - x|^\beta \quad (\text{car } \alpha - \beta \geq 0)$$

Vu que $(c \cdot T^{\alpha-\beta}) \in \mathbb{R}_+$, "par généralisation", $f \in H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Il résulte de tout cela que : $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \subset H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Partie III :

⑤

8/ Soit $f:]0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$. Il est donné que f est une application continue, qui converge en 0 vers 0 (car $\alpha > 0$). Il est donc légitime de la prolonger "par continuité" en l'application continue

$$\bar{f}: [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto |t|^\alpha$$

Comme, de plus, $\bar{f}(-T/2), \bar{f}(T/2), \bar{f}$ admet un prolongement T -périodique continu sur $\mathbb{R}$.

9/ a/ Soit $\varphi:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Il est donné que $\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = 0$ et que φ est dérivable et que :

$\forall t \in]1, +\infty[\quad \varphi'(t) = \alpha(t-1)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha((t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})$. Or, vu que $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha-1 < 0$ donc $\cdot^{\alpha-1}$ décroît sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall t \in]1, +\infty[\quad \varphi'(t) \geq 0$. φ est donc croissante et, vu que $\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = 0$, $\varphi \geq 0$. D'où le résultat.

b/ * Soit $(u, v) \in [0, T/2]^2$ tel que $u \leq v$.

$$\text{— si } u=0, \quad |f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| = |v^\alpha - 0^\alpha| = v^\alpha \leq (v-u)^\alpha$$

$$\text{— sinon : } \frac{v}{u} \in]1, +\infty[\text{ donc } \left(\frac{v}{u}\right)^\alpha - 1 \leq \left(\frac{v}{u} - 1\right)^\alpha \text{ et donc,}$$

$$\text{vu que } u^\alpha \geq 0, \quad v^\alpha - u^\alpha \leq (v-u)^\alpha.$$

On en déduit aisément que : $f_\alpha|_{[0, T/2]} \in H^\alpha([0, T/2], \mathbb{R})$

De même, on montre aisément que $f_\alpha|_{[T/2, T]} \in H^\alpha([T/2, T], \mathbb{R})$

* Soit $(u, v) \in [0, T]^2$ tel que $u \leq T/2 \leq v$. D'après ce qui précède :

$$|f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| \leq |f_\alpha(v) - f_\alpha(T/2)| + |f_\alpha(T/2) - f_\alpha(u)| \leq |v - T/2|^\alpha + |T/2 - u|^\alpha$$

$$= (v - T/2)^\alpha + (T/2 - u)^\alpha. \text{ Supposons, par exemple, que } v - T/2 \leq T/2 - u.$$

$$|f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| \leq 2 \cdot \left(\frac{T}{2} - u\right)^2 \leq 2 \cdot (v-u)^\alpha$$

Résulte de tout ce qui précède que :

$$\forall (u, v) \in [0, T]^2 \quad |f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| \leq 2 \cdot |v-u|^\alpha$$

soit que $f_\alpha|_{[0, T]} \in H^\alpha([0, T], \mathbb{R})$.

* Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0, T]^2$ tel que : $\begin{cases} \tilde{x} \equiv x [T] \\ \tilde{y} \equiv y [T] \\ |\tilde{y} - \tilde{x}| \leq |y - x| \end{cases}$
(cela est facile d'après la question 9/a). D'après b) :
 $|f_\alpha(y) - f_\alpha(x)| = |f_\alpha(\tilde{y}) - f_\alpha(\tilde{x})| \leq |\tilde{y} - \tilde{x}|^\alpha \leq |y - x|^\alpha$ (car $\alpha > 0$)
 f_α est donc un élément de $H_T^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

* Supposons que $f_\alpha \in H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Soit $c \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f_\alpha(y) - f_\alpha(x)| \leq c \cdot |y - x|^\beta$$

$$\text{En particulier, } \forall t \in]0, \frac{T}{2}] \quad |f_\alpha(t) - f_\alpha(0)| \leq c \cdot |t - 0|^\beta$$

$$\text{donc } \forall t \in]0, \frac{T}{2}] \quad t^\alpha \leq c \cdot t^\beta \text{ et donc } \forall t \in]0, \frac{T}{2}] \quad t^{\alpha-\beta} \leq c$$

Or $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha-\beta} = +\infty$ car $\beta > \alpha$. Cela est donc d'une contradiction.

Il en résulte, finalement, que : $f_\alpha \notin H_T^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10) Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Il est clair que f est une application continue
 $u \mapsto u^{\alpha-2} \cdot (1 - \cos u)$

de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^+$. De plus, on que $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$, $f(u) \sim u^\alpha$.

Comme $\alpha > 0$, u^α est intégrable sur $]1, +\infty[$ et donc f l'est aussi.

Par ailleurs, $f(u) = o(u^{\frac{\alpha-3}{2}})$ (car $\frac{\alpha-3}{2} < -1$). Comme $\frac{\alpha-3}{2} < -1$, $u^{\frac{\alpha-3}{2}}$ est

intégrable sur $[1, +\infty[$. f est donc intégrable sur $]1, +\infty[$: f_α est donc bien définie.

⑧

De plus, comme f est continue et positive, $I_\alpha = 0 \Rightarrow f = 0$. Vu que $f(1) \neq 0$, $I_\alpha \neq 0$ et donc, finalement, $I_\alpha > 0$.

11/ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f_α est paire : $C_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (u^\alpha \cos(n\omega u)) \cdot du$

$= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{n\omega T}{2}} \left(\frac{v}{n\omega} \right)^\alpha \cdot \cos v \cdot \frac{1}{n\omega} dv = \frac{2}{T(n\omega)^{\alpha+1}} \int_0^{\frac{n\omega T}{2}} (v^\alpha \cos v) dv$

" $v = n\omega u$ "

$= \frac{2}{T(n\omega)^{\alpha+1}} \left\{ \left[v^\alpha \sin v \right]_0^{\frac{n\omega T}{2}} - \alpha \int_0^{\frac{n\omega T}{2}} (v^{\alpha-1} \sin v) dv \right\}$

$= \frac{-2\alpha}{T(n\omega)^{\alpha+1}} \int_0^{\frac{n\omega T}{2}} (v^{\alpha-1} \sin v) dv = \frac{-2\alpha}{T(n\omega)^{\alpha+1}} \left\{ \left[v^{\alpha-1} (1 - \cos v) \right]_0^{\frac{n\omega T}{2}} - (\alpha-1) \int_0^{\frac{n\omega T}{2}} (v^{\alpha-2} (1 - \cos v)) dv \right\}$

Or $v^{\alpha-1} (1 - \cos v) \xrightarrow[v \rightarrow 0]{v > 0} 0$ car $\begin{cases} v^{\alpha-1} (1 - \cos v) \sim \frac{v^{\alpha+1}}{2} \\ \alpha+1 > 1 \end{cases}$

D'après 10/, $\int_0^{\frac{n\omega T}{2}} (v^{\alpha-2} (1 - \cos v)) \cdot dv \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I_\alpha$ (car $\frac{n\omega T}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$).

Il en résulte donc que : $C_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\alpha(\alpha-1)}{T(n\omega)^{\alpha+1}} \cdot I_\alpha$.

b/ D'après a/, $C_n(f) \cdot n^{\alpha+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ et donc, a priori,

si $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq \alpha+2$, alors $C_n(f) \cdot n^p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

On en conclut que : $(C_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \notin F$.

Partie IV:

9

12/ a) Il est clair que $(x_k)_{k \in [0, n+1]}$ vérifie, que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.
Il s'agit donc bien d'une subdivision de $[0, 1]$.

b/. $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. D'où : $\bar{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

 et un prolongement continu de φ à $[0, 1]$.

En utilisant la question a/,

$$\begin{aligned} V_x(\varphi) &= \sum_{k=0}^n |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{\varphi}(x_{k+1}) - \bar{\varphi}(x_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| x_{k+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2x_{k+1}}\right) - x_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2x_k}\right) \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| x_{k+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - x_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| x_{k+1} \cdot (-1)^{n+1-k} - x_k \cdot (-1)^{n+1-k} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} + x_k| \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\{V_x(f), x \in S_{[0, 1]}\}$ n'est pas majoré et donc que $\bar{\varphi}$ n'est pas à variation bornée.

13/ a/. Supposons que f est une application croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_k)_{k \in [0, n]} \in S_{[a, b]}$. Vu que f croît,

$$V_x(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

On en conclut aisément que $f \in VB([a, b], \mathbb{R})$ et que $V_{[a, b]}(f) = f(b) - f(a)$.

Si f décroît, $-f$ croît donc $-f$ est à variation bornée et donc f l'est (d'après la définition de "variation bornée").

b/. Soit $f \in H^1([a, b], \mathbb{R})$. Soit $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq c|y - x|$
 Avec les hypothèses précédentes, $V_x(f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (c \cdot |x_{k+1} - x_k|) = c \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = c \cdot (b - a)$. Donc f est à variation bornée.

Si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, d'après le théorème des accroissements finis,
 $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq \max |f'| \cdot (b - a)$

D'après ce qui précède, $f \in H^1([a,b], \mathbb{K})$. Il en résulte donc que :

$$C^1([a,b], \mathbb{K}) \subset VB([a,b], \mathbb{K}).$$

14/a/. $VB([a,b], \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{[a,b]}$, $\mathbb{K}^{[a,b]}$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. et $0_{\mathbb{K}^{[a,b]}}$ est trivialement à variation bornée.

• Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(fg) \in (VB([a,b], \mathbb{K}))^2$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in [0, n]}$ $\in S_{[a,b]}$.

$$\begin{aligned} V_x(fg) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(fg)(x_{k+1}) - \lambda(fg)(x_k)| \leq |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \\ &= |\lambda| \cdot V_x(f) + V_x(g) \leq |\lambda| \cdot V_{[a,b]}(f) + V_{[a,b]}(g). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\{V_x(\lambda fg), x \in S_{[a,b]}\}$ est majoré et donc que $(\lambda fg) \in VB([a,b], \mathbb{K})$.

On déduit de tout cela que $VB([a,b], \mathbb{K})$ est un s.v. de $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_k)_{k \in [0, n]} \in S_{[\frac{a-\nu}{\lambda}, \frac{b-\nu}{\lambda}]}$.

$$V_x(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{f}(x_{k+1}) - \tilde{f}(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\lambda x_{k+1} + \nu) - f(\lambda x_k + \nu)|$$

Or $(\lambda x_k + \nu)_{k \in [0, n]} \in S_{[a,b]}$ donc $V_x(\tilde{f}) \leq V_{\lambda x + \nu}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$.

"Par généralisation", $\tilde{f}$ est à variation bornée et : $V_{[\frac{a-\nu}{\lambda}, \frac{b-\nu}{\lambda}]}(\tilde{f}) \leq V_{[a,b]}(f)$.

En remarquant que $\forall t \in [\frac{a-\nu}{\lambda}, \frac{b-\nu}{\lambda}]$ $\tilde{f}(t) = f(\frac{t-\nu}{\lambda})$ et que $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^+$, on en déduit de même que : $V_{[a,b]}(f) \leq V_{[\frac{a-\nu}{\lambda}, \frac{b-\nu}{\lambda}]}(\tilde{f})$.

Il s'en déduit que : $V_{[a,b]}(f) = V_{[\frac{a-\nu}{\lambda}, \frac{b-\nu}{\lambda}]}(\tilde{f})$.

15/o Supposons que f est à variation bornée. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in [0, n]}$ une subdivision de $[a, c]$. Soient $x_{n+1} = b$ et $\tilde{x} = (x_k)_{k \in [0, n+1]}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^n |\tilde{f}(\tilde{x}_{k+1}) - \tilde{f}(\tilde{x}_k)| \leq V_{[a,b]}(\tilde{f}).$$

donc $f|_{[a,c]} \in VB([a,c], \mathbb{K})$. De même, on prouve que :

$$f|_{[c,b]} \in VB([c,b], \mathbb{K})$$

o Supposons que $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont à variations bornées.

$$\text{Soit } g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{et } d: [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,c] \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que g et d sont à variations bornées (car $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ le sont)

$$\text{et que, de plus, } \begin{cases} V_{[a,b]}(g) = V_{[a,c]}(f) \\ V_{[c,b]}(d) = V_{[c,b]}(f|_{[c,b]}) \end{cases}$$

Vu que $f = g + d$, d'après 14/a), $f \in VB([a,b], \mathbb{K})$.

On montrera aisément, en utilisant ce qui précède que :

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f).$$

$$16/a). \left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((f(t) - f(x_k)) \cdot e^{-i\omega t}) dt \right| \leq \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} (|f(t) - f(x_k)| \cdot 1) dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) = \sum_{k=1}^K \left[V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right]$$

Car, si $k \in [1, K]$ et $t \in [x_{k-1}, x_k]$ ($(x_{k-1}, t, x_k) \in S_{[x_{k-1}, x_k]}$).

$$\left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) e^{-i\omega t}) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^K \left(f(x_k) \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{|\omega|} \left| \sum_{k=1}^K \left[f(x_k) \cdot (e^{-i\omega x_k} - e^{-i\omega x_{k-1}}) \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^K \left(f(x_k) \cdot e^{-in\omega x_k} \right) - \sum_{k=1}^K \left(f(x_k) \cdot e^{-in\omega x_{k-1}} \right) \right| \quad (12) \\
&= \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^K \left(f(x_k) \cdot e^{-in\omega x_k} \right) - \sum_{k=0}^{K-1} \left(f(x_{k+1}) \cdot e^{-in\omega x_k} \right) \right| \\
&= \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^{K-1} \left((f(x_k) - f(x_{k+1})) \cdot e^{-in\omega x_k} \right) + f(x_K) \cdot e^{-in\omega x_K} - f(x_1) \cdot e^{-in\omega x_0} \right| \\
&= \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^{K-1} \left[(f(x_k) - f(x_{k+1})) \cdot e^{-in\omega x_k} \right] + f(T) e^{-in\omega T} - f(x_1) \cdot 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(T) - f(x_1)| \right] \\
&= \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_1) - f(0)| \right] \leq \frac{1}{|n| \cdot \omega} \cdot V_{[0,T]}(f).
\end{aligned}$$

b) Du coup, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k \in [0,K]} \in S_{[0,T]}$,

$$\begin{aligned}
T \cdot |C_n(f)| &= \left| \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} \cdot dt \right| + \left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(t) \cdot e^{-in\omega t} \right) \cdot dt \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(t) - f(x_k) \right) \cdot e^{-in\omega t} \cdot dt \right| + \left| \sum_{k=1}^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) \cdot e^{-in\omega t} \cdot dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^K \left[V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right] + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n| \cdot \omega}
\end{aligned}$$

En adoptant, en particulier, la suite $\left(\frac{kT}{K} \right)_{k \in [0,K]}$ qui est bien une subdivision de $[0, T]$, il vient que :

$$T \cdot |C_n(f)| \leq \frac{T}{K} \sum_{k=1}^K V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n| \cdot \omega}$$

(13)

On en déduit alors, d'après 15/, que :

$$|C_n(f)| \leq \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{T}{K} V_{[0,T]}(f) + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n| \omega} \right)$$

Cela revient donc à considérer le nombre entier naturel non nul K , on en conclut que :

$$|C_n(f)| \leq \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n| \cdot 2\pi}$$

• On en déduit aisément que $C_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow -\infty]{n \rightarrow +\infty} 0$.



Partie V:

13

17/a/ La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-p}$ converge car $-p < -1$. Sa somme est un réel strictement positif car il est supérieur à $\sum_{k=1}^1 k^{-p}$, qui vaut 1.

Il est donc licite d'envisager le nombre réel ρ égal à $\frac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-p}}$. Il satisfait donc la condition de l'énoncé.

b/ Si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k^{-p} > \sum_{k=1}^n k^{-p}$ donc, vu que $p > 0$,

$$-p \cdot \sum_{k=1}^n k^{-p} > -p \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k^{-p} \text{ et donc } \lambda_n > \lambda_{n+1}.$$

En déduire le fait que λ décroît. $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\infty}$.
D'après le cours de première année, λ est à valeurs dans $]0, 1]$.

18/a/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0, 1]$. $|t - \mu_n| \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2}$

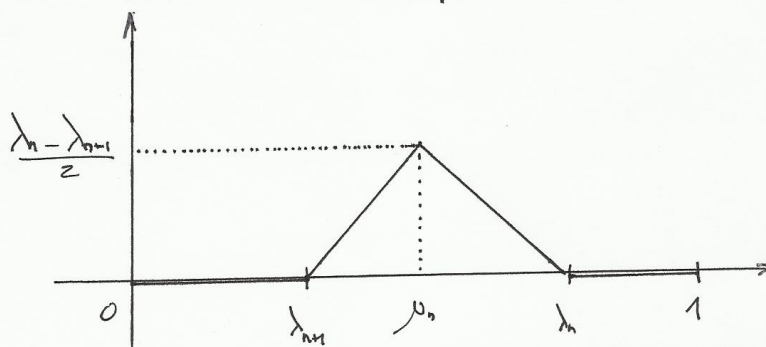
$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2} \leq t - \mu_n \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2} + \mu_n \leq t \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} + \mu_n$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{n+1} \leq t \leq \lambda_n.$$

Donc, si $t \in [0, \lambda_{n+1}] \cup [\lambda_n, 1]$ $g_n(t) = 0$ et, sinon :

$$\begin{cases} \text{si } t \in [\lambda_{n+1}, \mu_n] & g_n(t) = t - \lambda_{n+1} \\ \text{si } t \in [\mu_n, \lambda_n] & g_n(t) = \lambda_n - t. \end{cases}$$

On en déduit l'allure de la courbe représentative de g_n :



• les restrictions de g_n à $[0, \lambda_{n+1}]$, $[\lambda_{n+1}, \mu_n]$, $[\mu_n, \lambda_n]$ et $[\lambda_n, 1]$ ~~et~~
 étant chacune de classe C^1 et monotonnes, d'après 15/, $g_n \in H^1([0, 1], \mathbb{R})$
 et, de plus, $V_{[0, 1]}(g_n) = V_{[0, \lambda_{n+1}]}(g_n) + V_{[\lambda_{n+1}, \mu_n]}(g_n) + V_{[\mu_n, \lambda_n]}(g_n) + V_{[\lambda_n, 1]}(g_n)$
 soit : $V_{[0, 1]}(g_n) = 2 \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} - 0 \right) = \lambda_n - \lambda_{n+1} = \frac{p}{(n+2)^2}$.

b) Si $t \in]0, 1]$, vu que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît,
 $\exists ! n \in \mathbb{N}$ tel que $t \in]\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t \in]\lambda_{n_0+1}, \lambda_{n_0}]$
 $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ $g_n(t) = 0$; il est donc légitime d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n(0) = 0$; il est donc légitime d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

Par conséquent, il est bien de considérer l'application $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

• Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$ tel que $u < v$.

– Si $u=0$, $v \in]0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v \in]\lambda_{n+1}, \lambda_n]$.

$$|h(v) - h(u)| = |g_n(v) - 0| = |g_n(v) - g_n(\lambda_{n+1})| \leq |v - \lambda_{n+1}|^1 \leq |v - 0|^1 = |v - u|^1$$

– Sinon, soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $u \in]\lambda_{p+1}, \lambda_p]$ et $v \in]\lambda_{q+1}, \lambda_q]$.

• si $p=q$, alors $|h(v) - h(u)| = |g_p(v) - g_p(u)| \leq (v-u)^1$ car $g_p \in H^1([0, 1], \mathbb{R})$

• sinon, $p > q$ (absolue) donc $q+1 \leq p$. De comp :

$$\begin{aligned} |h(v) - h(u)| &= |g_q(v) - g_p(u)| \leq |g_q(v) - g_q(\lambda_{q+1})| + |g_p(\lambda_{q+1}) - g_p(\lambda_p)| \\ &\leq |v - \lambda_{q+1}|^1 + |u - \lambda_p|^1 = v - \lambda_{q+1} + \lambda_p - u \leq v - u = |v - u|^1. \end{aligned}$$

Il en découle le fait que : $h \in H^1([0, 1], \mathbb{R})$.

c) Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$. D'après ce qui précède, vu que α soit car $\alpha > 0$,

$$|h^\alpha(v) - h^\alpha(u)| \leq |h(v) - h(u)|^\alpha \leq |v - u|^\alpha = |v - u|^\alpha.$$

D'où $h^\alpha \in H^\alpha([0, 1], \mathbb{R})$.

13/a) d'après les questions et remarques précédentes, si $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{[1,1]}(h^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{[\lambda_{k+1}, \lambda_k]}(h^\alpha) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{2^{k+1}} \right)^\alpha$$

$$= 2^{1-\alpha} \cdot p^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{p\alpha}} = 2^{1-\alpha} \cdot p^\alpha \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p\alpha}}.$$

b) Vu que $p \in]1, 1/\alpha[$, $p\alpha \in]\alpha, 1[$ donc $p\alpha < 1$.

donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{p\alpha}}$ diverge vers $+\infty$. On en conclut que l'ensemble

$\{V_{[1,1]}(h^\alpha), n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré. Mais, si h^α était à variation bornée, on aurait $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{[1,1]}(h^\alpha) \leq V_{[0,1]}(h^\alpha)$

(cf. 15/). Cela constitue une contradiction: $h^\alpha \notin VB([0,1], \mathbb{R})$.

20/a) Soit $\tilde{h}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. D'après la question 14/b), si $\tilde{h}$ était

$$t \mapsto h^\alpha \left(\frac{t-a}{b-a} \right)$$

à variation bornée, h^α le serait puisque $b-a \in \mathbb{R}_+^*$ et que:

$$\forall u \in [0,1] \quad h^\alpha(u) = \tilde{h}(a + u \cdot (b-a))$$

Or $h^\alpha \notin VB([0,1], \mathbb{R})$ donc $\tilde{h} \notin VB([a,b], \mathbb{R})$. Pourtant, $\tilde{h} \in H^{\alpha}([a,b], \mathbb{R})$.

En effet: $\forall (t, t') \in [a,b]^2 \quad |\tilde{h}(t') - \tilde{h}(t)| = \left| h^\alpha \left(\frac{t'-a}{b-a} \right) - h^\alpha \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \right|$

$$\leq \left| \frac{t'-a}{b-a} - \frac{t-a}{b-a} \right|^\alpha = \frac{1}{(b-a)^\alpha} \cdot |t' - t|^\alpha.$$

A donc été prouvé le fait que: $H^{\alpha}([a,b], \mathbb{R}) \not\subset VB([a,b], \mathbb{R})$.

b) Si $\beta \in]0, \alpha[$, $H^{\beta}([a,b], \mathbb{R}) \not\subset VB([a,b], \mathbb{R})$ et, si $\beta \in [1, +\infty[$, alors $H^{\beta}([a,b], \mathbb{R}) \subset VB([a,b], \mathbb{R})$ d'après les questions 5/a) et 13/b).

On conclut finalement que:

$$H^{\beta}([a,b], \mathbb{R}) \subset VB([a,b], \mathbb{R}) \Leftrightarrow \beta \in [1, +\infty[.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : convergence d'une série entière de matrices

1. $\|A\|_s = \sup\{\|AZ\|; Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \|Z\| \leq 1\}.$

• $\|AY\| \leq \|A\|_s \|Y\|$

Si $Y = 0$, l'inégalité est évidente.

Sinon, on pose $Z = \frac{1}{\|Y\|} Y$ qui vérifie $\|Z\| = 1$, donc $\|AZ\| \leq \|A\|_s$ par définition de la norme subordonnée.

On en déduit : $\|AY\| = \|AZ\| \|Y\| \leq \|A\|_s \|Y\|.$

• $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s.$

Pour tout $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|Z\| \leq 1$, on a :

$$\|ABZ\| \leq \|A\|_s \|BZ\| \leq \|A\|_s \|B\|_s.$$

On en déduit : $\|AB\|_s = \sup\{\|ABZ\|; Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \|Z\| \leq 1\} \leq \|A\|_s \|B\|_s.$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \text{sp}(A)$ et X une colonne-propre de A associée à cette valeur propre.

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\|_s \|X\|,$$

d'où, comme $\|X\| > 0$, $|\lambda| \leq \|A\|_s.$

Il en résulte que le rayon spectral de A est majoré par la norme de A :

$$\rho(A) \leq \|A\|_s.$$

3. a) Il s'agit de prouver : $\{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \|A\|_s < R\} \subset \mathcal{A}_c \subset \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \rho(A) \leq R\}.$

• Première inclusion

Si $\|A\|_s < R$, la série numérique de terme général $\|c_n A^n\|_s$ est convergente, puisque, par récurrence immédiate à partir de la question 1, $\|c_n A^n\|_s \leq |c_n| \|A\|_s^n.$

Dès lors, la série $\sum_{n \geq 0} c_n A^n$ est absolument convergente, donc convergente (puisque l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie). Par conséquent A est un élément de $\mathcal{A}_c.$

• Seconde inclusion

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) > R$. Soit X une colonne-propre de A associée à une valeur propre λ de module strictement supérieur à 1.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{n=0}^N c_n A^n X = \sum_{n=0}^N c_n \lambda^n X.$

Comme $|\lambda| > R$, la suite $(c_n \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Il en résulte que les séries $\sum_{n \geq 0} c_n \lambda^n$, $\sum_{n \geq 0} c_n A^n X$ et donc $\sum_{n \geq 0} c_n A^n$ sont divergentes.

Par conséquent A n'est pas un élément de $\mathcal{A}_c$.

b) Lorsque $p = 1$, les normes sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}$, sont proportionnelles au module :

$$\exists \alpha > 0, \forall Z = (z) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \|Z\| = \alpha |z|.$$

La norme subordonnée sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}$, est donc le module :

$$\forall A = (a) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \|a\|_s = |a|$$

puisque $\|AZ\| = \alpha |az| = |a| \|Z\|$.

La double inclusion précédente signifie donc que l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ est convergente est compris entre le disque de convergence (ouvert) de la série entière et son adhérence, le disque fermé de centre 0 et de rayon R .

c) Soit $\mathcal{A}_c \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et A' une matrice semblable à A .

Soit alors P une matrice inversible telle que $A' = P^{-1} A P$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{n=0}^N c_n (A')^n = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^N c_n A^n \right) P$.

Par continuité de l'endomorphisme $M \mapsto P^{-1} M P$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, A' est donc un élément de $\mathcal{A}_c$, puisque $P^{-1} \left(\sum_{n=0}^N c_n A^n \right) P$ tend vers $P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n \right) P$ quand N tend vers l'infini.

d) Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et P une matrice inversible telle que la matrice $P^{-1} A P$ soit égale à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Si le rayon spectral de A est strictement inférieur à R , la série $\sum_{n \geq 0} c_n D^n$ est convergente, et de somme $\text{diag} \left(\sum_{n \geq 0} c_n \lambda_1^n, \dots, \sum_{n \geq 0} c_n \lambda_p^n \right)$.

Il en résulte d'après c) que A , semblable à D appartient à $\mathcal{A}_c$.

Partie 2 : quelques calculs et un exemple

1. $u_n(z) = (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$

a) $d_{n+1} - d_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = O(\frac{1}{n^2})$.

La série de terme général $d_{n+1} - d_n$ est donc convergente, par comparaison. Il en résulte (par le théorème "suite-série") que la suite $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) $\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k}$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = (\ln(2N) - d_{2N}) - (\ln(N) - d_N) = \ln(2) + d_N - d_{2N} (*).$$

Grâce à a), on déduit de (*) que $\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1)$ tend vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.

Comme de plus $u_n(1)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, cette convergence suffit pour affirmer que la série de terme général $u_n(1)$ est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \ln(2).$$

c) Pour x réel, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente si et seulement si $-1 < x \leq +1$ et on a :

$$\forall x \in]-1, +1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \ln(1+x).$$

2. $v_n(z) = \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

a) La série de terme général $v_n(z)$ est convergente lorsque $|z| < 1$, grossièrement divergente lorsque $|z| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière de terme général v_n est donc égal à 1.

b) Pour x réel, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et on a :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{argth}(x).$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

Il en résulte que, pour tout x strictement compris entre -1 et $+1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i \arctan(x).$$

On le prouve par intégration terme à terme d'une série entière géométrique.

Quant au prolongement de cette égalité pour $x = -1$ et $+1$, on le justifie par la continuité de la fonction $\arctan$ et la convergence uniforme de la série sur le segment $[-1, +1]$, qui assure la continuité de sa somme sur ce segment. La preuve de la convergence uniforme exploite le contrôle du reste d'une série alternée vérifiant le "critère spécial".

d) $\sum_{n=0}^{4N+3} u_n(i) = \sum_{n=0}^{4N+3} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^N \left(\frac{i}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{i}{4k+3} - \frac{1}{4k+4} \right)$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(i) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{\ln 2}{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Le polynôme caractéristique $\chi_A = (X - i)(X + i)$ de A étant scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable : il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) Pour $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, on obtient : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = D$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} D^{n+1} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} i^{n+1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-i)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ln 2}{2} + i \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\ln 2}{2} - i \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1} = P \begin{pmatrix} \frac{\ln 2}{2} + i \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\ln 2}{2} - i \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{\ln 2}{2} I_2 + \frac{\pi}{4} A = \begin{pmatrix} \frac{\ln 2}{2} & -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\ln 2}{2} \end{pmatrix}.$$



Partie 3 : quelques questions topologiques

1. $T_n = T + \sum_{\ell=1}^p \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.
- a) $T_n[\ell, \ell] - T_n[k, k]$ tend vers $T[\ell, \ell] - T[k, k]$ quand n tend vers l'infini.
- b) Pour ℓ et k distincts et fixés, il n'y qu'une alternative :
- ou bien $T[\ell, \ell] = T[k, k]$ et alors $T_n[\ell, \ell] \neq T_n[k, k]$ pour tout n
 - ou bien $T[\ell, \ell] \neq T[k, k]$ et alors $T_n[\ell, \ell] \neq T_n[k, k]$ pour n suffisamment grand puisque la différence $T_n[\ell, \ell] - T_n[k, k]$ tend vers une limite non nulle quand n tend vers l'infini.
- Comme il n'existe qu'un nombre fini de couple (ℓ, k) d'entiers distincts compris entre 1 et p , on peut donc affirmer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de T_n sont deux à deux distincts.

2. a) Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindable (théorème de d'Alembert-Gauss). Par conséquent, toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindable.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. D'après a), il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour laquelle la matrice $T = P^{-1}MP$ est triangulaire.

D'après 1.b), il existe une suite de matrices triangulaires T_n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts, donc diagonalisables, qui convergent vers T quand n tend vers l'infini. La matrice M est donc la limite d'une suite de matrices diagonalisables, les matrices PT_nP^{-1} .

Il en résulte que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

3. L'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \quad \|N - M\|_s \leq \alpha \Rightarrow \|\chi_N - \chi_M\|_1 \leq 1$$

résulte de la continuité en M de l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_p[X]$ qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique. Cette continuité provient de celle des applications $N \mapsto a_k(N)$, qui sont polynomiales. Le choix des normes importe peu puisque, sur deux espaces vectoriels de dimensions finies, p^2 et $p+1$ en l'occurrence, toutes les normes sont équivalentes.

4. Soit $\mu \in \text{sp}(M)$.

a) Comme $\mu \in \text{sp}(M)$, $\chi_M(\mu) = 0$, c'est-à-dire : $\mu^p = - \sum_{k=0}^{p-1} a_k(M) \mu^k$.

Il en résulte que : $|\mu|^p \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)| |\mu|^k \leq \text{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|$

puisque, pour tout k compris entre 1 et $p-1$, $|\mu|^k$ est inférieur ou égal à $|\mu|^{p-1}$ si $|\mu| \geq 1$, à 1 sinon.

On a donc bien (1). Pour établir (2), il suffit dès lors d'observer que $\text{Max}\{1, |\mu|^p\} \leq 1 + |\mu|^p$ et que $a_p(M) = 1$.

En simplifiant les deux membres de (2) par $\text{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} = (\text{Max}\{1, |\mu|\})^{p-1}$, on obtient $\text{Max}\{1, |\mu|\} \leq \|\chi_M\|_1$, d'où finalement (3) : $|\mu| \leq \|\chi_M\|_1$.

b) Si $\|\chi_N - \chi_M\|_1 \leq 1$ et $\lambda \in \text{sp}(N)$, on a :

$$|\lambda| \leq \|\chi_N\|_1 \leq 1 + \|\chi_M\|_1 \leq 2 \|\chi_M\|_1.$$

5. a) D'après la question 3, on peut choisir $\alpha > 0$, tel que, pour tout $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on ait :

$$\|N - M\|_s \leq \alpha \Rightarrow \|\chi_N - \chi_M\|_1 \leq 1.$$

Comme la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\|M_n - M\|_s \leq \alpha.$$

Il en résulte, d'après 4.b), que pour tout $n \geq N$, les valeurs propres $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n}$ de M_n ont des valeurs absolues n'excédant pas $2 \| \chi_M \|_1$.

Il en résulte que $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^p$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

b) Soit $(\lambda_{1,j_n}, \dots, \lambda_{p,j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente extraite de la suite $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sa limite.

Le polynôme caractéristique $\chi_{M_{j_n}}$ converge vers le polynôme scindé $\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ quand n tend vers l'infini, puisque ses coefficients, fonctions polynomiales symétriques de ses racines, convergent vers ceux de ce polynôme.

Comme sa limite est aussi le polynôme caractéristique de M , celui-ci est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6. a) On procède par double inclusion.

- Soit M une matrice appartenant à l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$. Cette matrice est la limite d'une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. D'après le résultat précédent (5.b), le polynôme caractéristique de M est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui signifie que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}$.

- Soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$. Elle est donc trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $T = P^{-1}MP$ est triangulaire. Les matrices T_n construites à partir de T comme en question 1 convergent vers T et sont diagonalisables (pour n assez grand). Il en résulte que les matrices $M_n = PT_nP^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ (pour n assez grand). Comme elles convergent vers M , celle-ci appartient bien à l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$.

b) $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et telle que $D[\ell, \ell] = D[k, k]$, avec $\ell \neq k$, M est la limite quand n tend vers l'infini de la matrice $M_n = P(D + \frac{1}{n}E_{\ell,k})P^{-1}$.

Si on note r la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = D[\ell, \ell] = D[k, k]$ de M , ce qui signifie que λ figure r fois sur la diagonale de D , le rang de $(D + \frac{1}{n}E_{\ell,k}) - \lambda I_p$, donc celui de M_n est égal à $n - r + 1$. La dimension du sous-espace propre $E_\lambda(M_n)$ est donc $r - 1 \neq r$.

Il en résulte que M_n n'est pas diagonalisable.

On vient donc bien de prouver que, si le polynôme caractéristique d'une matrice M de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, la matrice M est la limite d'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de matrices non diagonalisables.

c) Il en résulte que l'intérieur de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Remarque : cet ensemble est en fait égal à l'intérieur de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, mais la seconde inclusion est plus longue à établir.

Partie 4 : logarithme de matrice

1. Soit $M \in \mathcal{B} = \{M \in \mathcal{T}_p(\mathbb{R}); \|M - I_p\|_s < 1\}$.

a) Par 3.a de la partie 1, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} (M - I_p)^{n+1}$ est convergente, puisque $\|M - I_p\|_s$ est strictement inférieur au rayon de convergence $R = 1$ de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ (étudiée dans la partie 2).

b) Comme M est trigonalisable, $\text{sp}(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}$, de même que $\text{sp}(M - I_p)$. Par la question 2 de la partie 1, $\rho(M - I_p) \leq \|M - I_p\|_s$. On en déduit que $\text{sp}(M - I_p)$ est inclus dans l'intervalle ouvert $] -1, +1[$, donc que $\text{sp}(M)$ est inclus $]0, 2[$.

2. On suppose d'abord que M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
Comme $\|M - I_p\|_s < 1$, on a, pour tout entier k compris entre 1 et p , $|\lambda_k - 1| < 1$ et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (\lambda_k - 1)^{n+1} = \ln(\lambda_k).$$

Comme $M - I_p = P(D - I_p)P^{-1}$, on a, pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} (M - I_p)^{n+1} = P \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} (D - I_p)^{n+1} \right) P^{-1},$$

qui tend vers $P \text{Diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_p) P^{-1}$ quand N tend vers l'infini. Par conséquent :

$$\text{Log}(M) = P \text{Diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_p) P^{-1}.$$

La trace de $\text{Log}(M)$ est donc égale à $\sum_{k=1}^p \ln(\lambda_k) = \ln \prod_{k=1}^p \lambda_k = \ln(\det M)$.

Si M n'est pas diagonalisable, il existe (d'après la question 2.b de la partie 3) une suite de matrices diagonalisables M_n qui converge vers M . Comme $\|M_n - I_p\|_s \rightarrow \|M - I_p\|_s < 1$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$: $M_n \in \mathcal{B}$. Par continuité de la fonction Log sur $\mathcal{B}$ (qui résulte de la convergence normale donc uniforme de la série entière matricielle définissant cette fonction sur toute partie compacte de la boule ouverte $\mathcal{B}$), et de la trace, on peut affirmer que la trace de $\text{Log}(M_n)$ (égale à $\ln(\det M_n)$) converge vers la trace de $\text{Log} M$. On en déduit, par continuité du déterminant et la fonction $\ln$, que la trace de $\text{Log}(M)$ est égale à $\ln(\det M)$.

3. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

a) Il suffit de démontrer par récurrence sur p la propriété :

$$(\mathcal{P}_p) \quad \forall (M, N) \in (\mathcal{T}_p(\mathbb{R}))^2, MN = NM \Rightarrow \exists P \in \text{GL}_p(\mathbb{R}), P^{-1}MP \text{ et } P^{-1}NP \text{ triangulaires}$$

- Initialisation : la propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente, puisque toutes les matrices carrées d'ordre 1 sont triangulaires.

- Hérédité : on suppose la propriété $\mathcal{P}_p$ et on considère deux matrices M et N de $\mathcal{T}_{p+1}(\mathbb{R})$, tels que $MN = NM$.

On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^{p+1}$ canoniquement associés à M et N .

Soit $\lambda \in \text{sp}(f)$.

Comme f et g commutent, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f associé à la valeur propre λ est stable par g .

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par g est scindé puisque c'est un diviseur du polynôme caractéristique de g , qui est scindé puisque N est trigonalisable. Cet endomorphisme induit admet donc un vecteur propre x_1 , qui est à la fois vecteur propre de g et de f . En complétant ce vecteur pour former une base $(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$ de $\mathbb{R}^{p+1}$, dans laquelle les matrices M' et N' ont une première colonne dont tous les coefficients sous-diagonaux sont nuls.

Par blocs : $M' = \begin{pmatrix} \lambda & L_M \\ 0 & M_0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} \lambda & L_N \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}$, où L_M et L_N sont des matrices-lignes, M_0 et N_0 des matrices carrées, qui appartiennent à $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ puisque leurs polynômes caractéristiques divisent respectivement ceux de M et de N et sont donc scindés.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice $P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}M_0P$ et $P^{-1}N_0P$ soient toutes les deux triangulaires.

Dès lors, la matrice inversible $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ trigonalise à la fois M' et N' , c'est-à-dire que les deux matrices $Q^{-1}M'Q$ et $Q^{-1}N'Q$ sont triangulaires.

Ces deux matrices représentent respectivement f et g dans une même base de $\mathbb{R}^{p+1}$, ce qui prouve que M et N sont simultanément trigonalisables et achève la démonstration par récurrence de la propriété $\mathcal{P}_p$.

b) Soit $P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ telles que les deux matrices $U = P^{-1}MP$ et $V = P^{-1}NP$ soient triangulaires.

Comme en début de partie 3, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U + \sum_{\ell=1}^p \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$ $V_n = V + \sum_{\ell=1}^p \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$, puis $M_n = PU_nP^{-1}$ et $N_n = PV_nP^{-1}$.

Comme M et N commutent, il en de même de U et de V , donc de U_n et V_n , et par conséquent de M_n et N_n .

Pour n assez grand, les matrices M_n et N_n possèdent chacune p valeurs propres réelles distinctes et appartiennent donc à $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$. Elles convergent respectivement vers M et N quand n tend vers l'infini et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n N_n = N_n M_n$.

4. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{B}$ telles que $MN = NM$ et $MN \in \mathcal{B}$.

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers M et N , telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $M_n N_n = N_n M_n$. Soit P_n une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que les deux matrices $P_n^{-1} M_n P_n$ et $P_n^{-1} N_n P_n$ (M_n et N_n sont simultanément diagonalisables, parce qu'elles sont diagonalisables et commutent) :

$$P_n^{-1} M_n P_n = \text{Diag}(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \dots, \lambda_{p,n})$$

$$P_n^{-1} N_n P_n = \text{Diag}(\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \dots, \mu_{p,n}) .$$

Pour n suffisamment grand, M_n , N_n et $M_n N_n$ appartiennent à $\mathcal{B}$, et on peut donc écrire :

$$\text{Log}(M_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (M_n - I_p)^{n+1} = P_n \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (\text{Diag}(\lambda_{1,n} - 1, \dots, \lambda_{p,n} - 1))^{n+1} \right) P_n^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$\text{Log}(M_n) = P_n \left(\text{Diag}(\ln(\lambda_{1,n}), \dots, \ln(\lambda_{p,n})) \right) P_n^{-1} .$$

De même :

$$\text{Log}(N_n) = P_n \left(\text{Diag}(\ln(\mu_{1,n}), \dots, \ln(\mu_{p,n})) \right) P_n^{-1} .$$

Il en résulte que :

$$\text{Log}(M_n) + \text{Log}(N_n) = P_n \left(\text{Diag}(\ln(\lambda_{1,n} \mu_{1,n}), \dots, \ln(\lambda_{p,n} \mu_{p,n})) \right) P_n^{-1} = \text{Log}(M_n N_n) .$$

Par passage à la limite et continuité de Log sur $\mathcal{B}$, on en déduit que :

$$\text{Log}(MN) = \text{Log}(M) + \text{Log}(N) . \quad |$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (B) : Probabilités

Éléments de correction

Problème

1) On réécrit l'inégalité

$$\frac{S_N}{N} \geq x$$

sous la forme

$$\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X) \geq x - \mathbb{E}(X),$$

qui, en vertu de l'hypothèse selon laquelle $x > \mathbb{E}(X)$, entraîne l'inégalité

$$\left| \frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X) \right| \geq x - \mathbb{E}(X).$$

On en déduit l'inclusion entre événements :

$$\left\{ \frac{S_N}{N} \geq x \right\} \subset \left\{ \left| \frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X) \right| \geq x - \mathbb{E}(X) \right\},$$

d'où l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X) \right| \geq x - \mathbb{E}(X)\right).$$

En vertu du fait que $x > \mathbb{E}(X)$, la loi faible des grands nombres entraîne que le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

2) D'après l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels de résultats (numéro 3), il s'agit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx$ est convergente. Ceci se déduit directement de l'inégalité, valable pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq \mathbb{P}(X > x) \leq ae^{-bx},$$

et du fait que, comme on suppose $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-bx} dx$ est convergente.

3) Supposons d'abord $t > 0$ et $z \geq 1$. L'inégalité $\exp(tX) > z$ entraîne que $tX > \ln z$, puis (en utilisant le fait que $t > 0$) que $X > (\ln z)/t$. En posant $x = (\ln z)/t$, on a alors $x \geq 0$, d'où

$$\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq \mathbb{P}(X > x) \leq ae^{-bx} = az^{-b/t}.$$

Si $t = 0$, on a de toute façon $\exp(tX) = 1$ et $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 0$. Lorsque $z \in [0, 1]$, on peut de toute façon écrire que $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq 1$, par définition d'une probabilité. On peut noter que, comme il est toujours vrai que $\exp(tX) \geq 1$, vu que X est une variable aléatoire à valeurs positives et que $t \geq 0$, on a en fait $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ lorsque $z \in [0, 1]$.

4) Le cas $t = 0$ est réglé immédiatement par le fait que $\exp(tX) = 1$ dans ce cas. Dans le cas $t > 0$, prouver l'existence de $\mathbb{E}(\exp(tX))$ revient, d'après l'identité pour l'espérance déjà utilisée pour traiter la question 2), à vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z) dz$ est convergente. Comme on a supposé $0 < t < b$, on a donc $b/t > 1$, et l'on en déduit la convergence de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} z^{-b/t} dz$. Compte-tenu également du fait que $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq 1$ pour $0 \leq z \leq 1$, on a finalement, en utilisant l'inégalité prouvée en 3), la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z) dz$, donc l'existence de $\mathbb{E}(\exp(tX))$. Comme on a toujours $\exp(tX) \geq 1$, on a également $\mathbb{E}(\exp(tX)) \geq 1$.

5) La variable aléatoire $\exp(tS_N)$ se réécrit

$$\exp(tS_N) = \exp[t(X_1 + \dots + X_N)] = \exp[tX_1] \times \dots \times \exp[tX_N].$$

Ainsi, $\exp(tS_N)$ apparaît comme le produit de N variables aléatoires indépendantes et de même loi que $\exp(tX)$. Cette dernière possédant une espérance d'après 4), on a, en utilisant la propriété de l'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes (rappel de résultats, numéro 4), le fait que

$$\mathbb{E}(\exp(tS_N)) = \mathbb{E}(\exp(tX_1)) \cdots \mathbb{E}(\exp(tX_N)) = \mathbb{E}(\exp(tX))^N = \exp(N\Lambda(t)),$$

ce qui conclut la preuve.

6) Pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, l'inégalité $\frac{S_N}{N} \geq x$ entraîne (car $N \geq 0$) que $S_N - Nx \geq 0$, puis, en multipliant par t (supposé ≥ 0), que $t(S_N - Nx) \geq 0$, puis, par croissance de la fonction exponentielle, le fait que $\exp[t(S_N - Nx)] \geq 1$. On obtient ainsi l'inclusion $A(N, x) \subset B(N, x, t)$. L'inégalité $\mathbb{P}(A(N, x)) \leq \mathbb{P}(B(N, x, t))$ est une conséquence directe de cette inclusion.

7) On applique l'inégalité de Markov (rappel de résultats, numéro 1) de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(\exp[t(S_N - Nx)] \geq 1) \leq \mathbb{E}(\exp[t(S_N - Nx)]) = \exp(-Ntx) \mathbb{E}(\exp[tS_N]).$$

On en déduit, avec 5), que

$$\mathbb{P}(B(N, x, t)) \leq \exp(-N(tx - \Lambda(t))),$$

ce qui conclut la preuve.

8) Pour tout $t \in [0, b[$ fixé, 6) et 7) entraînent que

$$\mathbb{P}(A(N, x)) \leq \exp(-N(tx - \Lambda(t))).$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0, b[$, on a donc également :

$$\mathbb{P}(A(N, x)) \leq \inf\{\exp(-N(tx - \Lambda(t))) \mid t \in [0, b[\}.$$

Ensuite, en exploitant la décroissance stricte de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h \mapsto \exp(-Nh)$, on en déduit que

$$\inf\{\exp(-N(tx - \Lambda(t))) \mid t \in [0, b[\} = \exp(-NI(x)),$$

ce qui fournit la conclusion demandée.

9) Montrons par l'absurde qu'il n'est pas possible d'avoir $I(x) > 0$ pour un nombre $x \in [0, \mathbb{E}(X)[$. Dans le cas contraire, l'inégalité vue en 8) entraînerait que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A(N, x)) = 0.$$

Mais, comme $x < \mathbb{E}(X)$, la loi faible des grands nombres entraîne, par un argument similaire à celui employé à la question 1), que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A(N, x)^c) = 0$ (où $A(N, x)^c$ désigne l'événement complémentaire de $A(N, x)$). On aurait donc que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A(N, x)) = 1$. Contradiction.

10) On a par définition que

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x},$$

ce qui répond à la question.

11) Au vu du résultat du calcul mené à la question 10), c'est immédiat.

12) Supposons d'abord $t > 0$. Pour $z \in [0, 1[$, on a $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ car $\exp(tX) \geq 1$ vu que $t \geq 0$ et que X est une variable aléatoire ne prenant que des valeurs positives. Pour $z > 1$, on a $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = \mathbb{P}(X > \ln(z)/t) = e^{-\lambda \ln(z)/t} = z^{-\lambda/t}$. Cette égalité est encore vraie pour $z = 1$, car $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ du fait que $\exp(tX) \geq 1$, et $1^{-\lambda/t} = 1$. Pour $t = 0$, on a $e^{tX} = 1$ et donc : $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ si $z < 1$ et $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 0$ si $z \geq 1$.

13) Pour $t = 0$, il est clair que $\mathbb{E}(\exp(tX)) = 1$. Supposons $t > 0$. Grâce à l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels (numéro 3), il s'agit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z) dz$ est bien convergente et de calculer sa valeur. D'après la question 12), on a, compte-tenu du fait que $t \in [0, \lambda[$:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z) dz = \int_0^1 1 dz + \int_1^{+\infty} z^{-\lambda/t} dz = 1 + \frac{1}{\lambda/t - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

On note que cette dernière formule donne encore la valeur de l'espérance lorsque $t = 0$.

14) D'après la question 8) et le résultat des questions 11) et 13), il faut s'intéresser à la quantité

$$\sup \{ h_x(t) \mid t \in [0, \lambda] \},$$

où, pour tout $t \in [0, \lambda]$, on a posé

$$h_x(t) = tx - \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right).$$

On vérifie facilement que h_x est dérivable sur $[0, \lambda]$, et, que, pour tout $t \in [0, \lambda]$, on a $h'_x(t) = x - \frac{1}{\lambda - t}$. On constate que h'_x est positive pour t entre 0 et $\lambda - 1/x$, puis négative pour t entre $\lambda - 1/x$ et λ , avec annulation en $t = \lambda - 1/x$. On en déduit que

$$\sup \{ h_x(t) \mid t \in [0, \lambda] \} = h_x(\lambda - 1/x),$$

et l'on vérifie que

$$h_x(\lambda - 1/x) = I_{\mathcal{E}(\lambda)}(x).$$

Le résultat de la question 8) entraîne alors l'inégalité demandée.

15) On vérifie que $I_{\mathcal{E}(\lambda)}(1/\lambda) = 0$ et que $I_{\mathcal{E}(\lambda)}$ est dérivable sur $[1/\lambda, +\infty[$, avec $I'_{\mathcal{E}}(x) = \lambda - 1/x$, cette expression étant strictement positive pour tout $x > 1/\lambda$, ce qui entraîne en particulier que, pour $x > 1/\lambda$, on a $I_{\mathcal{E}(\lambda)}(x) > I_{\mathcal{E}(\lambda)}(1/\lambda) = 0$.

16) On se rappelle que X ne prend comme valeurs que 0 et 1. Par conséquent, pour $x \in [0, 1]$, $X > x$ équivaut à $X = 1$, et par conséquent $\mathbb{P}(X > x) = p$. Ensuite, pour $x \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X > x) = 0$.

17) On cherche donc un $a > 0$ tel que, pour tout $x \geq 0$, on ait $\mathbb{P}(X > x) \leq a \exp(-bx)$. Au vu de la question 16), une telle inégalité est vraie quel que soit $a > 0$ lorsque $x \geq 1$, et la seule contrainte à vérifier sur a est que l'on doit avoir, pour tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité $p \leq a \exp(-bx)$, ce qui revient à avoir $p \leq a \exp(-b)$. Du coup, il suffit de choisir $a = p \exp(b)$.

18) On a (classiquement) $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p$.

19) Par définition, on a $\Lambda(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = e^0 \times \mathbb{P}(X = 0) + e^t \times \mathbb{P}(X = 1) = (1 - p) + pe^t$.

20) D'après la question 8) et le résultat des questions 17) et 19), il faut s'intéresser, pour tout $b > 0$, à la quantité

$$\sup \{ r_x(t) \mid t \in [0, b] \},$$

où pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a posé

$$r_x(t) = tx - \ln((1 - p) + pe^t).$$

La fonction r_x est dérivable sur $[0, +\infty[$, avec $r'_x(t) = x - \frac{pe^t}{(1-p)+pe^t}$. On vérifie facilement que r'_x est positive pour t entre 0 et $t_x = \ln \left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p} \right)$, puis positive pour $t \geq t_x$, avec annulation en t_x . Le fait que $t_x > 0$ provient de ce que $p < x < 1$. On vérifie que $I_{\mathcal{B}(p)}(x) = r_x(t_x)$, et, par conséquent, l'inégalité demandée est une conséquence de la question 8), en choisissant $b > t_x$.

21) On vérifie que par continuité des différentes fonctions intervenant dans la définition de $I_{\mathcal{B}(p)}$, on a

$$\lim_{x \searrow p} I_{\mathcal{B}(p)}(x) = p \ln(p/p) + (1 - p) \ln \left(\frac{1 - p}{1 - p} \right) = 0.$$

Lorsque $x \nearrow 1$, $x \ln(x/p) \rightarrow \ln(1/p)$ par continuité, tandis que, classiquement, $(1 - x) \ln(1 - x) \rightarrow 0$, et $(1 - x) \ln(1 - p) \rightarrow 0$. On en déduit finalement que

$$\lim_{x \nearrow 1} I_{\mathcal{B}(p)}(x) = \ln(1/p).$$

D'autre part, on vérifie que $I_{\mathcal{B}(p)}$ est dérivable dans $]p, 1[$ avec $I'_{\mathcal{B}(p)}(x) = t_x$, qui est strictement positif pour $x \in]p, 1[$. On en déduit que $I_{\mathcal{B}(p)}(x) > 0$ pour tout $x \in]p, 1[$.

22) On doit simplement vérifier que $\int_0^x \alpha(u + 1)^{-(\alpha+1)} du = 1 - \frac{1}{(x+1)^\alpha}$, ce qui est immédiat.

23) D'après la question 22), on a pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$. Par conséquent, En faisant appel à l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels (numéro 3), il s'agit de vérifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha} dx.$$

et de calculer sa valeur. La convergence est une conséquence immédiate du fait que $\alpha > 1$, et l'on a classiquement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha} dx = \frac{1}{1 - \alpha},$$

ce qui fournit la réponse à la question posée.

24) $W_N(u)$ compte le nombre d'indices i entre 1 et N pour lesquels l'événement $\{X_i \geq u\}$ se réalise. Comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ sont par hypothèse indépendantes, les événements $\{X_i \geq u\}$, où $1 \leq i \leq N$, sont également indépendants. De plus, comme les variables aléatoires X_i ont toutes la même loi que X , on a pour tout i : $\mathbb{P}(X_i \geq u) = \mathbb{P}(X \geq u)$. Par conséquent, la variable aléatoire $W_N(u)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = N$ et $p = \mathbb{P}(X \geq u)$. Comme X possède une loi à densité, on a $\mathbb{P}(X \geq u) = \mathbb{P}(X > u)$ que l'on a déjà calculé : $\mathbb{P}(X > u) = \frac{1}{(u+1)^\alpha}$.

25) On a $\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(W_N(xN) = 0)$, et, d'après le résultat de la question 24),

$$\mathbb{P}(W_N(xN) = 0) = \left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)^N.$$

On écrit alors

$$\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)\right).$$

Comme $xN \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, on peut utiliser le développement limité du logarithme au voisinage de 1 : lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right) = -\frac{1}{(xN+1)^\alpha}(1 + o(1)),$$

d'où

$$N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right) = -N^{1-\alpha} x^{-\alpha} (1 + o(1)).$$

Comme $\alpha > 1$, on a que $N^{1-\alpha} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, et l'on peut donc utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$\exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)\right) = 1 - N^{1-\alpha} x^{-\alpha} (1 + o(1)).$$

On conclut finalement que

$$\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) = x^{-\alpha} N^{1-\alpha} (1 + o(1)),$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

26) D'après la question 25), on sait que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)}{x^{-\alpha} N^{1-\alpha}} = 1.$$

Par définition d'une limite, il existe donc, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, un entier $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)}{x^{-\alpha} N^{1-\alpha}} \geq 1 - \epsilon.$$

On en déduit immédiatement le résultat souhaité.

27) Une telle inégalité est impossible. En effet, en combinant une telle inégalité avec celle obtenue à la question 26), on en déduirait que, étant donné $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, on ait

$$x^{-\alpha} N^{1-\alpha} \leq \exp(-NI(x)),$$

ce qui est visiblement impossible (croissance comparée puissance/exponentielle).

28) Considérons $x \geq u$. Il est alors immédiat que $\mathbb{P}(Y^{(u)} \leq x) = 1$. Considérons $x < u$. Il est alors clair que l'événement $\{\min(X, u) \leq x\}$ s'identifie à l'événement $\{X \leq x\}$ et que l'on a donc alors $\mathbb{P}(Y^{(u)} \leq x) = \mathbb{P}(\min(X, u) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

29) En vertu de l'identité pour l'espérance donnée dans le rappel de résultats (numéro 3), nous voulons montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y^{(u)} > x) dx,$$

et montrer que sa valeur est donnée par la formule figurant dans l'énoncé. En faisant appel à la question 28), l'intégrale étudiée n'est autre que

$$\int_0^u \mathbb{P}(X > x) dx = \int_0^u \frac{1}{(x+1)^\alpha},$$

et la formule demandée s'en déduit par un calcul direct.

30) En vertu de l'identité pour l'espérance donnée dans le rappel de résultats (numéro 3), nous voulons montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([Y^{(u)}]^2 > x) dx,$$

et montrer que sa valeur est donnée par la formule figurant dans l'énoncé. Pour $x \geq u^2$, il est clair que $\mathbb{P}([Y^{(u)}]^2 > x) = 0$. Inversement, pour $x < u^2$, on a

$$\mathbb{P}([Y^{(u)}]^2 > x) = \mathbb{P}(X > \sqrt{x}) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^\alpha}.$$

Finalement, nous cherchons donc à prouver que

$$\int_0^u \frac{dx}{(\sqrt{x} + 1)^\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}(1+u)^{2-\alpha} - \frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{(1+u)^{\alpha-1}}\right).$$

Plutôt que de chercher à calculer directement l'intégrale figurant à gauche de l'équation ci-dessus, il est plus simple de vérifier que les dérivées par rapport à u des deux expressions à gauche et à droite de l'équation coïncident, ainsi que leurs valeurs en $u = 0$. C'est un calcul élémentaire.

31) Les questions 29) et 30) établissent l'existence de l'espérance de $Y^{(u)}$ et $[Y^{(u)}]^2$, ainsi que des formules explicites pour ces quantités. On a donc l'existence de la variance de $Y^{(u)}$, et l'identité :

$$\mathbb{V}(Y^{(u)}) = \mathbb{E}([Y^{(u)}]^2) - [\mathbb{E}(Y^{(u)})]^2,$$

et on peut reporter les expressions explicites obtenues aux questions 29) et 30) dans la formule ci-dessus.

32) La variable aléatoire $\frac{R_N^{(u)}}{N}$ possède une espérance car elle s'écrit comme une combinaison linéaire de variables aléatoires possédant une espérance. Par linéarité, on a alors :

$$\mathbb{E}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{1}{N} [\mathbb{E}(Y_1^{(u)}) + \dots + \mathbb{E}(Y_N^{(u)})] = \mathbb{E}(Y^{(u)}),$$

où la dernière égalité utilise le fait que les variables aléatoires $Y_i^{(u)}$ possèdent la même loi, et donc la même espérance, que $Y^{(u)}$. L'existence de la variance s'obtient de la même façon. Quant au calcul, on note déjà que

$$\mathbb{V}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{1}{N^2} \mathbb{V}(R_N^{(u)}).$$

Ensuite, les variables aléatoires $Y_i^{(u)}$ étant indépendantes, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances, qui elles-mêmes sont toutes égales à la variance de $Y^{(u)}$, comme précédemment. Ainsi,

$$\mathbb{V}(R_N^{(u)}) = \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y_1^{(u)}) + \dots + \mathbb{E}(Y_N^{(u)})] = N\mathbb{V}(Y^{(u)}).$$

In fine, on obtient bien l'identité demandée.

33) C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (rappel de résultats, numéro 2), appliquée à la variable $\frac{R_N^{(u)}}{N}$, en utilisant la question 32) pour identifier l'espérance et la variance.

34) Lorsque l'événement $\{W_N(u) = 0\}$ est réalisé, on a, par définition, le fait que, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $X_i \leq u$. Ceci entraîne que, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $X_i = Y_i^{(u)}$, et par conséquent $\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i^{(u)}$, ce qui est exactement l'identité $S_N = R_N^{(u)}$.

35) Supposons l'événement $\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\}$ réalisé. Alors, soit l'événement $\{W_N(u) \geq 1\}$ est réalisé, soit l'événement $\{W_N(u) = 0\}$ est réalisé. Dans ce dernier cas, la question précédente montre que $S_N = R_N^{(u)}$, et, comme on a supposé au départ que $\frac{S_N}{N} \geq x$, on doit alors avoir l'inégalité $\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x$. On en déduit l'inclusion demandée. Du point de vue des probabilités, on déduit de l'inclusion

$$\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\} \subset \{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right\}$$

l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right\}\right).$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}(W_N(u) \geq 1) + \mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right),$$

ce qui est exactement l'inégalité voulue.

36) On utilise l'inégalité démontrée à la question 35). D'après la question 25), on a déjà, lorsque $N \rightarrow +\infty$, l'équivalent suivant : $\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha}$. Ensuite, on utilise l'inégalité obtenue à la question 33) dans laquelle on substitue les valeurs exactes obtenues aux questions 29) et 31). Lorsque $N \rightarrow +\infty$, on vérifie que, avec $u = xN$, on a le comportement asymptotique

$$\frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N(x - \mathbb{E}(Y^{(u)}))^2} \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha} (g(x) - 1),$$

ce qui permet de conclure.

37) En utilisant simultanément les inégalités obtenues aux questions 26) et 36), on obtient que, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, et tout entier N suffisamment grand, on a l'encadrement :

$$(1 - \epsilon)x^{-\alpha} N^{1-\alpha} \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq (1 + \epsilon)x^{-\alpha} N^{1-\alpha} g(x).$$

Du point de vue de la dépendance en N , les deux bornes de l'encadrement sont exactement du même ordre de grandeur (soit $N^{1-\alpha}$), mais les facteurs qui dépendent de x ne sont pas identiques de part et d'autre de l'inégalité.



Exercice

A) Au vu des hypothèses,

$$\mathbb{P}(D = k | \Pi = 1) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \text{ et } \mathbb{P}(D = k | \Pi = 2) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

ce qui répond à la question.

B) On applique la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D = k) = \mathbb{P}(D = k | \Pi = 1) \times \mathbb{P}(\Pi = 1) + \mathbb{P}(D = k | \Pi = 2) \times \mathbb{P}(\Pi = 2).$$

On a $\mathbb{P}(\Pi = 1) = \rho_1$ et $\mathbb{P}(\Pi = 2) = \rho_2$, d'où, en utilisant les formules obtenues au A), l'expression :

$$\mathbb{P}(D = k) = \rho_1 \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} + \rho_2 \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

ce qui répond à la question.

C) On peut simplement appliquer la formule $\mathbb{E}(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(D = k)$ avec l'expression obtenue au B). On en déduit facilement que

$$\mathbb{E}(D) = \rho_1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \right) + \rho_2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} \right) = \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2,$$

en reconnaissant les expressions de l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson.

D) De même qu'au C), on peut simplement appliquer la formule $\mathbb{E}(D^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(D = k)$ avec l'expression obtenue au B), d'où

$$\mathbb{E}(D^2) = \rho_1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \right) + \rho_2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} \right) = \rho_1 (\lambda_1^2 + \lambda_1) + \rho_2 (\lambda_2^2 + \lambda_2),$$

en reconnaissant les expressions de l'espérance du carré d'une variable aléatoire de loi de Poisson.

E) En faisant la différence entre les expressions obtenues en C) et en D), on obtient :

$$\mathbb{V}(D) = \mathbb{E}(D^2) - \mathbb{E}(D)^2 = \rho_1 (\lambda_1^2 + \lambda_1) + \rho_2 (\lambda_2^2 + \lambda_2) - (\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2)^2,$$

ce qui répond à la question.

F) La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2$ est égale à $\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2$. Calculons la différence entre $\mathbb{V}(D)$ et cette dernière valeur :

$$\mathbb{V}(D) - \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2 = \rho_1 \lambda_1^2 + \rho_2 \lambda_2^2 - (\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2)^2.$$

On vérifie (par exemple en faisant appel à la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$) que, compte-tenu du fait que ρ_1 et ρ_2 sont deux nombres positifs tels que $\rho_1 + \rho_2 = 1$, on a toujours

$$\rho_1 \lambda_1^2 + \rho_2 \lambda_2^2 \geq (\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2)^2.$$

La variance de D est donc toujours supérieure à la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson possédant la même espérance que D .

G) On applique simplement la formule de Bayes.

$$\mathbb{P}(\Pi = 1 | D = k) = \frac{\mathbb{P}(D = k | \Pi = 1) \times \mathbb{P}(\Pi = 1)}{\mathbb{P}(D = k)} = \frac{\rho_1 \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}}{\rho_1 \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} + \rho_2 \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}},$$

et l'on peut encore (si on le souhaite) simplifier par $k!$, une formule analogue étant obtenue pour $\mathbb{P}(\Pi = 2 | D = k)$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (C) : Économie

Éléments de correction

Exercice de probabilités

0) S_n est de loi $\mathcal{B}(n, p)$ par définition.

1) $N_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid B_n = 1\}$ est $\mathcal{G}(p)$. $IE(N_1) = \frac{1}{p}$ et $\text{Var}(N_1) = \frac{1-p}{p^2}$.

$$\begin{aligned} 2) IP(N_1 = j, N_2 = j + k) &= IP(B_1 = \dots = B_{j-1} = B_{j+1} = \dots = B_{j+k-1} = 0, B_j = B_{j+k} = 1) \\ &= (1-p)^{j+k-2} p^2 = (1-p)^{j-1} p \times (1-p)^{k-1} p = IP(N_1 = j) \times (1-p)^{k-1} p. \end{aligned}$$

3) Ce qui précède montre par sommation sur j que $IP(N_2 - N_1 = k) = (1-p)^{k-1} p$, et par suite, que N_1 et $N_2 - N_1$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$.

4) Notons que $N_2 \geq 2$. Utilisant la question 2), nous avons : pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$IP(N_2 = m + 2) = \sum_{j=1}^{m+1} IP(N_1 = j, N_2 = m + 2) = \sum_{j=1}^{m+1} (1-p)^m p^2 = (m+1)(1-p)^m p^2.$$

On peut aussi utiliser que la loi de S_{k+1} est $\mathcal{B}(k+1, p)$; pour tout $m \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$IP(N_2 = m + 2) = IP(S_{m+1} = 1, B_{m+2} = 1) = C_{m+1}^1 p^1 (1-p)^m \times p = (m+1)(1-p)^m p^2.$$

5) Via 3), nous avons aussitôt : $IE(N_2) = IE(N_1) + IE(N_2 - N_1) = 2 IE(N_1) = 2/p$, et

$$\text{Var}(N_2) = \text{Var}(N_1) + \text{Var}(N_2 - N_1) = 2 \text{Var}(N_1) = 2(1-p)/p^2.$$

6) Nous avons :

$$\begin{aligned} \{N_1 = j_1, N_2 - N_1 = j_2, \dots, N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\} &= \{B_1 = \dots = B_{j_1-1} = 0, \\ &B_{j_1} = 1, B_{j_1+1} = \dots = B_{j_1+j_2-1} = 0, B_{j_1+j_2} = 1, \dots, B_{j_1+\dots+j_{\ell-1}} = 0, B_{j_1+\dots+j_\ell} = 1\}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} IP(N_1 = j_1, N_2 - N_1 = j_2, \dots, N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell) &= (1-p)^{j_1-1} p \dots (1-p)^{j_\ell-1} p \\ &= (1-p)^{j_1+\dots+j_\ell-\ell} p^\ell. \end{aligned}$$

7) En sommant ce qui précède sur $j_1, \dots, j_{\ell-1} \geq 1$, il vient

$$\begin{aligned} IP(N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell) &= \sum_{j_1 \geq 1} (1-p)^{j_1-1} p \times \dots \times \sum_{j_{\ell-1} \geq 1} (1-p)^{j_{\ell-1}-1} p \times (1-p)^{j_\ell-1} p \\ &= (1-p)^{j_\ell-1} p \quad \text{pour tout } j_\ell \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $N_\ell - N_{\ell-1}$ est géométrique de paramètre p , de même que N_1 .

8) Selon les questions 6) et 7) nous avons

$$IP\left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_k - N_{k-1} = j_k\}\right) = \prod_{k=1}^{\ell} (1-p)^{j_k-1} p = \prod_{k=1}^{\ell} IP(N_k - N_{k-1} = j_k),$$

ce qui montre l'indépendance de la suite des $N_k - N_{k-1}$, qui ont toute $\mathcal{G}(p)$ pour loi.

9) La question précédente montre que $IE(X_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} IE(X_j - X_{j-1}) = \ell/p$,

et que $Var(X_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} Var(X_j - X_{j-1}) = \ell(1-p)/p^2$.

10) Notons que $N_\ell \geq \ell$, de sorte que $IP(N_\ell = k) = 0$ si $k < \ell$. Et utilisant que S_{k-1} a pour loi $\mathcal{B}(k-1, p)$ et est indépendante de B_k , pour tout $k \geq \ell$ nous avons :

$$IP(N_\ell = k) = IP(S_{k-1} = \ell - 1, B_k = 1) = C_{k-1}^{\ell-1} p^{\ell-1} (1-p)^k p = C_{k-1}^{\ell-1} p^\ell (1-p)^k.$$

11) Par la loi des grand nombres : $N_\ell / \ell \rightarrow IE(N_1) = 1/p$, selon la question 8).

Exercice n°1 d'optimisation économique

Le problème revient à maximiser la fonction $U = X(24 - L)$ sous la contrainte

$$WL(1 - t_1) + Y(1 - t_2) \leq PX$$

La condition de premier ordre permet d'obtenir :

$$L = 12 - Y(1 - t_2)/2W(1 - t_1) \quad \text{et} \quad X = [WL(1 - t_1) + Y(1 - t_2)]/P$$

1. En absence d'impôt, $L = 10$; $L_0 = 14$; $X = 42$; $U = 588$
2. Avec un taux de prélèvement de 33%, $L = 10$; $L_0 = 14$; $X = 28$; $U = 392$. Il n'y a aucun impact de l'impôt sur l'offre de travail du fait d'une stricte compensation entre effet substitution et effet revenu. Par contre la quantité de bien et le niveau d'utilité ont diminué.
3. Lorsque seul le travail est imposé, on obtient : $L = 9$; $L_0 = 15$; $X = 30$; $U = 450$. L'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu.
4. Le problème revient à chercher Y^* pour $U = 588$, $L = 12 - Y(1 - t_2)/2W(1 - t_1)$, $t_1 = 1/3$, et $t_2 = 0$. Après remplacement, on recherche la solution de

$$588 = (24 + 1/2Y)(12 + 1/4Y)$$

et on trouve $Y^* = 20,6$. D'où le nouveau point dans l'espace $(L_0; X) = (17, 15; 34, 3)$. L'effet total de l'impôt $(1; -12)$ se décompose donc en un effet substitution $(3, 15; -7, 7)$ qui nous dit qu'en taxant le travail, l'individu prend davantage de loisir et obtient moins de biens et un effet revenu $(-2, 15; -4, 3)$ qui nous dit qu'en taxant le travail l'individu prend moins de loisir et obtient moins de biens.

Exercice n°2 d'optimisation économique

L'équilibre entre l'offre et la demande permet d'obtenir :

1. $Y = (C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0)/(1 - c_1) = 230$
2. Avec $dG = 10$, on obtient $dY = 50$ et $d(G - T) = 10$.
3. Théorème de Haavelmo : $dG = dT = dY = 70$.
4. L'équilibre simultané sur les deux marchés est :

$$Y = [b(C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0) + gM^O]/[ag + b(1 - c_1 + c_1 t)]$$

5.

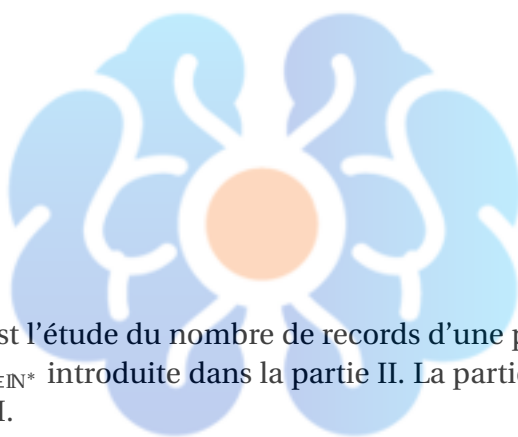
$$\delta Y / \delta t = [-b^2 c_1 (C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0) - b c_1 g M^O] / [ag + b(1 - c_1 + c_1 t)]^2$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'objet du problème est l'étude du nombre de records d'une permutation via la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ introduite dans la partie II. La partie III utilise les notations et des résultats de la partie II.

Partie I Une distance entre lois de variables aléatoires

Toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général $\left| \mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n]) \right|$.

On note $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left| \mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n]) \right| \right)$.

b) Que dire des variables X et Y quand $d(X, Y) = 0$?

Donner un exemple simple de deux variables X et Y distinctes et telles que $d(X, Y) = 0$.

c) Prouver l'inégalité : $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$.

2. a) On pose $A = \{k \in \mathbb{N}; \mathbf{P}([X = k]) \geq \mathbf{P}([Y = k])\}$. Vérifier l'égalité :

$$d(X, Y) = \left| \mathbf{P}([X \in A]) - \mathbf{P}([Y \in A]) \right|.$$

b) Soit B une partie de $\mathbb{N}$.

Prouver l'inégalité : $\left| \mathbf{P}([X \in B]) - \mathbf{P}([Y \in B]) \right| \leq d(X, Y)$.

On pourra faire intervenir les parties $B \cap A$ et $B \cap A^c$.

3. Soit $p \in [0, 1]$, X une variable suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable suivant la loi de Poisson de paramètre p .

a) Justifier, pour tout réel x , l'inégalité : $e^x \geq 1 + x$.

b) Établir l'égalité $d(X, Y) = p(1 - e^{-p})$ et en déduire la majoration $d(X, Y) \leq p^2$.

Dans la fin de cette partie, on considère un entier n au moins égal à 3, un entier $N > n$, et on note I la matrice identité de $M_N(\mathbb{R})$ et R la matrice de $M_N(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients

sont nuls sauf ceux de la sur-diagonale qui valent 1, c'est-à-dire $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

On considère une n -liste $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de réels de $[0, 1]$, n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$), indépendantes suivant des lois de Bernoulli (resp. Poisson) de paramètres respectifs $p_1, p_2, \dots, p_n$.

On note, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i = (1 - p_i)I + p_i R$ et $Q_i = p_i(R - I)$.

4. a) Montrer que la première ligne du produit $P_1 P_2$ est constituée des $n+1$ réels $\mathbf{P}([X_1 + X_2 = 0])$, $\mathbf{P}([X_1 + X_2 = 1])$, ..., $\mathbf{P}([X_1 + X_2 = n])$ suivis de termes nuls.

b) On note $U_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que la première ligne du produit $P_1 P_2 \dots P_n$ est constituée des $n+1$ réels $\mathbf{P}([U_n = 0])$, $\mathbf{P}([U_n = 1])$, ..., $\mathbf{P}([U_n = n])$ suivis de termes nuls.

5. On rappelle (ou on admet) que si $A \in M_N(\mathbb{R})$, la suite de terme général $\sum_{k=0}^r \frac{A^k}{k!}$ converge, quand r tend vers $+\infty$, vers une matrice notée $\exp A$. La convergence d'une suite de matrices s'entend comme la convergence coefficient par coefficient. On admet que si deux matrices A et B de $M_N(\mathbb{R})$ commutent alors on a $\exp(A + B) = \exp A \times \exp B$.

a) Soit i un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et r un entier naturel. Prouver l'égalité :

$$\sum_{k=0}^r \frac{Q_i^k}{k!} = \sum_{j=0}^r \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j.$$

b) En déduire que $\exp Q_i = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j$.

c) On note $V_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que la première ligne du produit $\exp Q_1 \times \exp Q_2 \times \dots \times \exp Q_n$ est constituée par les N réels $\mathbf{P}([V_n = 0])$, $\mathbf{P}([V_n = 1])$, ..., $\mathbf{P}([V_n = N-1])$.

6. On note, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ de $M_N(\mathbb{R})$, $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|$.

a) Prouver, pour tout couple (A, B) d'éléments de $M_N(\mathbb{R})$ les inégalités

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

b) Prouver, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'inégalité $\|\exp Q_i\| \leq 1$.

c) En remarquant que

$$\prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp Q_i = (P_1 - \exp Q_1) \left(\prod_{i=2}^n P_i \right) + (\exp Q_1) \left(\prod_{i=2}^n P_i - \prod_{i=2}^n \exp Q_i \right),$$

prouver l'inégalité

$$\left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp Q_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i - \exp Q_i\|.$$

d) En exprimant, pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice $P_i - \exp Q_i$ à l'aide des puissances de la matrice R , prouver l'inégalité $\|P_i - \exp Q_i\| \leq 2p_i^2$.

7. a) Déduire des questions précédentes l'inégalité $d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$.

b) Soit $\lambda > 0$. En appliquant le résultat précédent, retrouver la propriété d'approximation usuelle de la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ par une loi de Poisson.

Partie II Records d'une permutation

On rappelle qu'une permutation d'un ensemble non vide E est une bijection de E sur E . On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ (des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$) et $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ la permutation σ qui envoie l'entier 1 sur σ_1 , 2 sur σ_2 , ..., n sur σ_n .

On note $\mathcal{P}(\mathcal{S}_n)$ l'ensemble des parties de $\mathcal{S}_n$ et on munit l'espace probabilisable $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n))$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$. Ainsi, pour tout élément σ de $\mathcal{S}_n$, on a $\mathbf{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On dit qu'une permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ présente un record au rang k si, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq k$, on a $\sigma_i \leq \sigma_k$. Ainsi, en particulier, toute permutation présente un record au rang 1. On note $R_n(\sigma)$ le nombre de records que compte la permutation σ . On définit ainsi une variable aléatoire R_n sur $\mathcal{S}_n$. Bien sûr, la variable R_1 est certaine égale à 1. On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone convergente. On note γ la limite de cette suite.

Dans toute la suite de cette partie II on considère un entier n au moins égal à 3.

2. Déterminer la loi de R_3 , son espérance et sa variance.

3. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}([R_n = 1])$ et $\mathbf{P}([R_n = n])$.

4. a) Soit p un entier de $\llbracket 2, n \rrbracket$. Déterminer le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant exactement 2 records lesquels sont atteints aux rangs 1 et p .

b) Prouver l'égalité : $\mathbf{P}([R_n = 2]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

c) Donner un équivalent de $\mathbf{P}([R_n = 2])$ quand n tend vers l'infini.

5. On introduit, pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire T_i , définie sur $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathbf{P})$, qui, à chaque élément σ de $\mathcal{S}_n$, associe la valeur 1 si σ présente un record au rang i et égale à 0 sinon.

a) Montrer que, pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$.

b) Calculer l'espérance de la variable R_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

6. a) Soit (i, j) un couple d'entiers vérifiant $2 \leq i < j \leq n$.

En calculant la probabilité $\mathbf{P}([T_i = 1] \cap [T_j = 1])$, justifier l'indépendance des variables T_i et T_j .

b) Calculer la variance de la variable R_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

7. On admet l'indépendance mutuelle des variables $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Établir, pour tout entier k de $\llbracket 2, n \rrbracket$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([R_n = k]) = \sum_{2 \leq i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{i_2} \frac{1}{i_3} \dots \frac{1}{i_k} \prod_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \notin \{i_2, \dots, i_k\}}} (1 - \frac{1}{j}).$$

a) En déduire l'égalité : $\mathbf{P}([R_n = 3]) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{1}{ij}$.

b) Prouver l'équivalence : $\mathbf{P}([R_n = 3]) \sim \frac{1}{2} \frac{\ln^2 n}{n}$.

Partie III Deux résultats asymptotiques

1. Un premier résultat

a) Soit $\varepsilon > 0$. Prouver, pour tout entier n assez grand, l'inclusion entre événements :

$$\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Établir l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

(ii) En déduire l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

2. Un second résultat

On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ on note G_X sa fonction génératrice c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel t de $[0, 1]$, associe

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) t^k.$$

a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

b) Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Justifier l'égalité : $G_{S_n} = \prod_{k=1}^n G_{X_k}$.

d) Soit $Y, X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On **admet** le résultat suivant : si, pour tout réel t de $[0, 1]$, la suite $(G_{X_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $G_Y(t)$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Y , c'est-à-dire que, pour tout entier naturel k ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \mathbf{P}([Y = k]).$$

Soit m un entier naturel au moins égal à 2 et $n = 2m$. On conserve les notations de la partie II et on pose $W_n = \sum_{k=m+1}^{2m} T_k$ (qui compte le nombre aléatoire de records que présente une permutation de $\llbracket 1, 2m \rrbracket$ entre les rangs $m+1$ et $2m$).

Prouver, pour tout réel t de $[0, 1]$, l'égalité : $G_{W_n}(t) = \prod_{i=m+1}^{2m} \left(1 + \frac{t-1}{i}\right)$.

e) En déduire que, lorsque l'entier m tend vers $+\infty$, la suite de terme général W_n converge en loi vers une variable aléatoire qu'on identifiera.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Toutes les matrices de l'énoncé sont à coefficients réels et, pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{M}_n$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et $\mathcal{C}_n$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices-colonnes à n coefficients ($\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{C}_n$ sont donc des notations simplifiées pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

L'espace $\mathcal{M}_1$ est identifié à $\mathbb{R}$ et la transposée d'une matrice M , quel que soit son format, est notée tM .

On s'intéresse dans ce problème aux matrices carrées H dont les coefficients $h_{i,j}$ ne dépendent que de la somme $i + j$ de leur indice de ligne i et de leur indice de colonne j .

Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout entier strictement positif n , on note $H_\varphi^{(n)}$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n$ donnée par :

$$H_\varphi^{(n)} = \left(\varphi(i + j - 2) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n-1) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(n-1) & \varphi(n) & \dots & \varphi(2n-2) \end{pmatrix}.$$

L'objet du problème est de préciser dans quels cas les matrices $H_\varphi^{(n)}$ définissent un produit scalaire, ce qui permet alors d'écrire leurs coefficients comme les moments d'une variable aléatoire discrète.

Les trois parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres, mais un même exemple apparaît à la fin de chacune d'entre elles.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : premiers exemples

1. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont H est la matrice dans la base canonique.

a) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

i) Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et D la droite engendrée par a . Déterminer, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, la projection orthogonale de x sur la droite D .

ii) Énoncer le théorème spectral. En déduire que le noyau et l'image de h sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

iii) Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur orthogonal sur l'image de h .

b) i) Calculer la trace de l'endomorphisme $h \circ h$.

ii) En déduire le spectre de l'endomorphisme h .

2. Dans cette question, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3 et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = (-1)^k (k+1).$$

On observera que $H_{\varphi}^{(3)}$ est la matrice de la question précédente.

a) Soit τ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(k) = k+1.$$

Écrire les matrices $H_{\varphi}^{(n)}$ et $H_{\tau}^{(n)}$ et démontrer qu'elles sont semblables.

b) Soit $\mathcal{B}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_n$ est $H_{\tau}^{(n)}$.

i) Montrer que l'image de g est le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ engendré par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{k=1}^n e_k \\ f_2 = \sum_{k=1}^n k e_k \end{cases}.$$

ii) Justifier la stabilité de F par g et démontrer que la matrice dans la base (f_1, f_2) de l'endomorphisme de F induit par g est :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n^2-1)}{3} \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Déduire des résultats précédents le spectre de $H_{\varphi}^{(n)}$.

3. Dans cette question, n désigne un nombre entier strictement positif et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = k!.$$

a) Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathcal{C}_n$.

i) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1} \right)^2 e^{-t} dt$.

ii) Justifier l'égalité : $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1} \right)^2 e^{-t} dt = {}^t C H_\varphi^{(n)} C$.

b) Dédurre de ce qui précède que toutes les valeurs propres de $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives.

4. Par un procédé similaire à celui utilisé dans la question précédente, démontrer que toutes les valeurs propres de la matrice $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = \frac{1}{k+1}.$$

Partie 2 : les formes bilinéaires Δ_n

Tous les polynômes considérés dans la suite du problème sont à coefficients réels et, pour tout entier naturel p , on note E_p l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus p (E_p est donc une notation simplifiée pour $\mathbb{R}_p[X]$).

On considère une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout entier naturel n les applications Δ_n et δ_n définies sur $E_n \times E_n$ et E_{2n} de la manière suivante.

- Pour tout polynôme $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E_n$ et tout polynôme $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j \in E_n$, on pose :

$$\Delta_n(A, B) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \varphi(i+j).$$

- Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \in E_{2n}$, on pose : $\delta_n(Q) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi(k)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Préciser la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$.

b) Vérifier que l'application Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.

c) Établir, pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, l'égalité :

$$\Delta_n(A, B) = \delta_n(AB).$$

d) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$ qui peuvent s'écrire $(A, B) \mapsto \delta(AB)$, avec δ forme linéaire sur E_{2n} ?

2. Dans cette question, on considère un nombre entier naturel d , au moins égal à deux, et une variable aléatoire discrète Y , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant d valeurs distinctes $y_1, y_2, \dots, y_d$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_d$, strictement positives et de somme égale à 1.

On se place alors dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = \mathbf{E}(Y^k),$$

où $\mathbf{E}(Y^k)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire Y^k .

- a) Pour tout polynôme Q de E_{2n} , vérifier l'égalité : $\delta_n(Q) = \mathbf{E}(Q(Y))$.
- b) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d , pour que la forme bilinéaire Δ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.
3. Dans cette question, on suppose que la fonction φ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = \frac{1}{k+1}.$$

- a) i) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :

$$\Delta_2(a_2 X^2 + a_1 X + a_0, b_2 X^2 + b_1 X + b_0) = {}^t C_A H_\varphi^{(3)} C_B$$

$$\text{où } C_A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ et } C_B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- ii) En déduire que Δ_2 est un produit scalaire.

b) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire à partir de la base canonique $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ de E_2 une base orthonormale $\mathcal{B}'_2$ de E_2 pour le produit scalaire Δ_2 .

c) On note M la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$ et N la matrice de passage de $\mathcal{B}'_2$ à $\mathcal{B}_2$.

i) Montrer que la matrice N est triangulaire.

ii) Calculer la matrice ${}^t M H_\varphi^{(3)} M$ et en déduire l'égalité : $H_\varphi^{(3)} = {}^t N N$.

d) Généraliser la démarche précédente pour prouver que, pour tout entier n strictement positif, il existe une matrice triangulaire $T^{(n)}$ de $\mathcal{M}_n$ telle que :

$$H_\varphi^{(n)} = {}^t T^{(n)} T^{(n)}.$$

Partie 3 : polynômes positifs et matrices de moments

Dans cette partie, on utilise les mêmes notations que dans la partie 2.

On considère donc encore une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout n des applications Δ_n et δ_n définies comme précédemment.

On dit qu'un polynôme P est *positif* s'il est distinct du polynôme nul et si $P(x)$ est positif ou nul pour tout réel x .

1.
 - a) Montrer que l'ordre de multiplicité de toute racine réelle α d'un polynôme positif P est pair.
 - b) Montrer que tout polynôme positif Q de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes tels que $Q = A^2 + B^2$.
 - c) Pour des polynômes A, B, C, D , écrire le polynôme $(AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$ comme produit de deux sommes de deux carrés de polynômes.
 - d) En utilisant sa décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire des résultats précédents que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.
 - e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme positif P de E_{2n} , on a : $\delta_n(P) > 0$.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction φ vérifie l'égalité $\varphi(0) = 1$.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2, et on suppose que l'application Δ_n associée à φ est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la base orthonormale de E_n (pour ce produit scalaire) obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de $(1, X, \dots, X^n)$.

2.
 - a) Justifier l'orthogonalité de P_n avec tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 2$.
 - b) En déduire que P_n est scindé à racines simples. *On pourra raisonner par l'absurde.*
3. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les n racines de P_n , réelles et distinctes deux à deux, d'après ce qui précède.

Pour tout entier k compris entre 1 et n , on note :
$$L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i} .$$

a) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et calculer $\sum_{i=1}^n L_i$.

b) Soit $Q \in E_{2n-1}$.

i) Justifier l'existence d'un couple $(A, R) \in E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que : $Q = P_n A + R$.

ii) Vérifier que : $\delta_n(Q) = \sum_{i=1}^n Q(\alpha_i) \delta_n(L_i) .$

c) Pour tout entier k compris entre 1 et n , on pose : $p_k = \delta_n(L_k) .$

Démontrer que $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont strictement positifs et de somme égale à 1.

4.
 - a) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket, \quad \mathbf{E}(Z^k) = \varphi(k) .$$

b) On revient ici au cas où la fonction φ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) = \frac{1}{k+1} .$

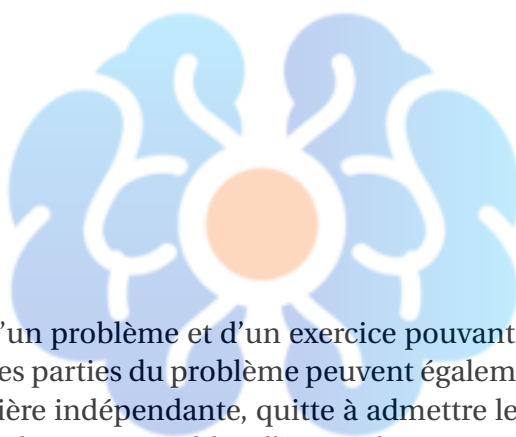
Déterminer le nombre minimal de valeurs prises par une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété précédente.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice pouvant être traités de manière indépendante. Les différentes parties du problème peuvent également, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. Une liste de résultats susceptibles d'être utiles, et pouvant être utilisés sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer, est donnée au début.

La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Rappel de résultats

Ci-après figurent plusieurs résultats que l'on pourra utiliser sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer. Par souci de simplicité, certains énoncés sont donnés dans des cas particuliers (variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, ou variables aléatoires à valeurs entières), et non pas dans le cadre le plus général possible.

1. **Inégalité triangulaire pour l'espérance** : pour toute variable aléatoire réelle X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a l'inégalité :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

2. **Loi faible des grands nombres** : étant donnée une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 0}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a, sous l'hypothèse que les variables sont indépendantes et de même loi, la loi faible des grands nombres : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_0 + \dots + X_{n-1}}{n} - \mathbb{E}(X) \right| \geq \epsilon \right) = 0.$$

3. **Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire** : étant donnée une variable aléatoire réelle X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes $\{x_1, \dots, x_m\}$, et une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'identité :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{q=1}^m h(x_q) \cdot \mathbb{P}(X = x_q).$$

4. **Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes** : étant données deux variables aléatoires réelles X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'identité :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j) \cdot \mathbb{P}(Y = k - j).$$

5. **Loi uniforme sur $[0, 1]$** : la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ est la loi associée à la densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

Pour deux nombres a, b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a alors l'identité

$$\mathbb{P}(a < U \leq b) = b - a.$$

6. **Borne sur la probabilité d'une réunion d'événements** : étant donné un nombre $n \geq 1$ d'événements $A_1, \dots, A_n$ définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

7. **Développement de Taylor de l'exponentielle** : au voisinage de $x = 0$, on a le développement limité suivant :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Problème

Dans ce problème, on étudie, sur un modèle mathématique très simplifié, les conséquences à long terme de la répartition d'un investissement entre un placement sans risque, garantissant un taux de croissance constant, et un placement risqué, dont le taux de croissance est modélisé par une variable aléatoire.

On considère un pas de temps $\delta > 0$, et une succession de dates $t_0, t_1, \dots$ définies par $t_n = n\delta$ pour tout $n \geq 0$. On suppose que, entre deux dates successives, le placement sans risque voit son montant systématiquement multiplié par une constante $\rho \geq 1$. Autrement dit, pour tout $n \geq 0$, x euros investis à la date t_n dans le placement sans risque se transforment en $x \cdot \rho$ euros à la date t_{n+1} . Pour ce qui est du placement risqué, son montant est multiplié entre deux dates successives par une variable aléatoire : pour tout $n \geq 0$, x euros investis à la date t_n dans le placement risqué se transforment en $x \cdot X_n$ euros à la date t_{n+1} , où X_n est une variable aléatoire. On fait l'hypothèse que les variables $(X_n)_{n \geq 0}$ sont indépendantes et de même loi, et ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes h (valeur « haute ») et b (valeur « basse »), leur loi commune étant définie par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = h) = p \\ \mathbb{P}(X_n = b) = q \end{cases},$$

où :

- h et b sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant la relation $b < h$.
- p et q sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant la relation $p + q = 1$.

La stratégie d'investissement que l'on étudie consiste, partant d'un capital initial non-aléatoire $C_0 > 0$ à la date t_0 , à répartir à chaque date t_n le montant disponible en une proportion α investie dans le placement risqué, et une proportion $1 - \alpha$ dans le placement sans risque, le nombre α étant une constante fixée dans $[0, 1]$. On suppose en outre qu'il n'y a au cours du temps ni apport extérieur (hormis le capital initial C_0) ni retrait. Dans la suite, on note C_n le montant disponible à la date C_n obtenu en suivant la stratégie d'investissement étudiée.

Partie I – Quelques résultats généraux

Question 1) Exprimer, pour tout $n \geq 0$, la valeur de C_{n+1} en fonction de C_n , X_n , α et ρ .

Question 2) En déduire la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$C_n = C_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} [\alpha X_k + (1 - \alpha)\rho].$$

Question 3) On définit la fonction $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi(\alpha) = \mathbb{E}(\alpha X_0 + (1 - \alpha)\rho). \quad (1)$$

Déduire de ce qui précède la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(C_n) = C_0 \times (\phi(\alpha))^n.$$

Question 4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $C_n > 0$, puis établir pour tout $n \geq 1$ la relation :

$$\ln C_n = \ln C_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\alpha X_k + (1 - \alpha)\rho).$$

Question 5) On définit la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(\alpha) = \mathbb{E}(\ln(\alpha X_0 + (1 - \alpha)\rho)). \quad (2)$$

Montrer que l'on a la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\ln C_n}{n} - g(\alpha)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Indication : Exploiter le résultat de la question 4) en faisant appel à la loi des grands nombres.

Question 6) En déduire que l'on peut écrire, pour $n \geq 1$,

$$C_n = e^{n(g(\alpha) + \epsilon_n)},$$

où $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires vérifiant la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\epsilon_n| \geq \epsilon) = 0.$

Partie II – Taux de croissance optimal

On introduit la notation $\mu = \mathbb{E}(X_0)$, et, dans toute cette partie, on fait les hypothèses suivantes :

- $b < \rho < h$
- $\mu > \rho$

On introduit également la notation

$$\alpha^* = \frac{\rho(\mu - \rho)}{(h - \rho)(\rho - b)}.$$

Question 7) Donner une expression explicite de $g(\alpha)$ en fonction de α et des autres paramètres du problème (ρ, h, b, p, q) .

Question 8) Montrer que l'on a toujours $g(0) \geq 0$.

Question 9) Montrer que, si $\alpha^* < 1$, la fonction g est strictement croissante sur $[0, \alpha^*]$, puis strictement décroissante sur $[\alpha^*, 1]$, et possède donc un unique maximum sur $[0, 1]$ atteint en α^* .

Question 10) Montrer que, si $\alpha^* \geq 1$, la fonction g est strictement croissante sur $[0, 1]$, et possède donc un unique maximum sur $[0, 1]$ atteint en 1.

Question 11) Quelle valeur de α doit-on choisir (selon vous) afin de maximiser la croissance à long terme du montant disponible ? (Justifier la réponse.)

Partie III – Un exemple

On suppose que les paramètres prennent les valeurs suivantes : $h = 1,4$; $b = 0,7$; $\rho = 1,04$; $p = q = 0,5$. On donne la valeur approchée (à $\pm 10^{-3}$ près) $\alpha^* \approx 0,085$.

Question 12) Montrer que sur cet exemple on a $\phi(1) > 1$ et $g(1) < 0$.

Question 13) En déduire que, avec le choix $\alpha = 1$, on a les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(C_n) = +\infty,$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n \geq \epsilon) = 0.$$

Comment expliquer l'occurrence simultanée de ces deux propriétés apparemment contradictoires ?

Partie IV – Probabilité de franchissement d'un seuil

On suppose dans cette partie que $h = e^\ell$ et $b = e^{-\ell}$, où ℓ est un nombre réel strictement positif, et l'on suppose également que $p > q$. On définit $Z_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln X_k.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on introduit l'événement A_m défini par

$$A_m = \{\text{il existe } n \geq 0 \text{ tel que } Z_n = -m \times \ell\}$$

et la probabilité

$$u_m = \mathbb{P}(A_m).$$

Question 14) Montrer que $u_0 = 1$.

Question 15) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, on a les identités :

$$\mathbb{P}(A_m | X_0 = h) = \mathbb{P}(A_{m+1}) \text{ et } \mathbb{P}(A_m | X_0 = b) = \mathbb{P}(A_{m-1}).$$

Question 16) En déduire la relation, valable pour tout $m \geq 1$:

$$u_m = pu_{m+1} + qu_{m-1}.$$

Question 17) En déduire qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que, pour tout $m \geq 0$,

$$u_m = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

On admettra dans la suite que la propriété suivante est vérifiée :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 0. \quad (3)$$

Question 18) Montrer que, pour tout $m \geq 1$,

$$u_m = \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

Indication : utiliser (3) et les résultats des questions 14) et 17).

Partie V – Passage à la limite

Comme dans la partie IV, on suppose que $h = e^\ell$ et $b = e^{-\ell}$. On suppose en outre que les paramètres du modèle sont reliés au pas de temps δ de la manière suivante :

$$\ell = \sigma \cdot \sqrt{\delta}, \quad p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma} \sqrt{\delta} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma} \sqrt{\delta} \right), \quad \rho = 1 + r\delta,$$

où r , m et σ sont trois constantes vérifiant $m > r \geq 0$ et $\sigma > 0$, et δ est supposé suffisamment petit pour que p et q soient strictement positifs.

Question 19) Montrer que l'on a les propriétés suivantes lorsque $\delta \rightarrow 0^+$:

$$(i) \quad \mathbb{E}(X_0) = 1 + m\delta + o(\delta)$$

(ii) $\mathbb{V}(X_0) = \sigma^2 \delta + o(\delta)$ (la notation $\mathbb{V}$ désigne la variance)

(iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha^* = \frac{m-r}{\sigma^2}$.

Indication : Expliciter les valeurs de $\mathbb{E}(X_0)$, $\mathbb{V}(X_0)$ et α^* , puis effectuer un développement limité en δ .

Question 20) On suppose pour simplifier que $r = 0$ et que $\frac{m-r}{\sigma^2} = 1$, de telle sorte que l'on a $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha^* = 1$. En supposant que l'on choisit exactement $\alpha = 1$, montrer que l'on a, pour tout $\theta \in]0, 1[$, le résultat suivant :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathbb{P} \left[\text{il existe } n \geq 0 \text{ tel que } \left(\frac{C_n}{C_0} \right) \leq \theta \right] = \theta. \quad (4)$$

Indication : Relier la probabilité figurant dans (4) à la probabilité étudiée dans la partie IV.

Question 21) On peut montrer dans un cadre très général qu'une relation analogue à (4) est valable, lorsque l'on choisit d'investir à chaque pas de temps une proportion α^* du montant disponible dans le placement risqué. Commenter la relation (4) du point de vue du risque associé à une telle stratégie d'investissement à long terme.

Exercice

On considère un entier $N \geq 1$, et N variables aléatoires $B_1, \dots, B_N$ indépendantes. On suppose en outre que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la variable aléatoire B_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i , où $p_i \in [0, 1]$; autrement dit, la loi de B_i est caractérisée par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(B_i = 1) = p_i \\ \mathbb{P}(B_i = 0) = 1 - p_i \end{cases}.$$

On introduit ensuite la variable S_N définie par

$$S_N = \sum_{i=1}^N B_i,$$

et l'on considère également une variable aléatoire T suivant la loi de Poisson de paramètre λ , où λ est défini par

$$\lambda = \sum_{i=1}^N p_i.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une borne sur l'écart entre la loi de S_N et la loi de T .

Question A) On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y , X suivant la loi de Poisson de paramètre β , et Y la loi de Poisson de paramètre γ . Montrer que la loi de la variable aléatoire $X + Y$ est la loi de Poisson de paramètre $\beta + \gamma$.

Indication : Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X + Y = k)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Dans la suite de l'exercice, on considère N variables aléatoires $U_1, \dots, U_N$ indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

Question B) Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on définit la variable aléatoire C_i par

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i > 1 - p_i \\ 0 & \text{si } U_i \leq 1 - p_i \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la variable aléatoire C_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i .

Indication : calculer la probabilité $\mathbb{P}(C_i = 1)$.

Question C) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $p \in [0, 1]$, on note $g_p(k) = \sum_{j=0}^k e^{-p} \frac{p^j}{j!}$, et l'on pose $g_p(-1) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on définit ensuite la variable aléatoire D_i en stipulant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_i = k \text{ si et seulement si } g_{p_i}(k-1) < U_i \leq g_{p_i}(k).$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la variable aléatoire D_i suit la loi de Poisson de paramètre p_i .

Indication : calculer pour tout k la probabilité $\mathbb{P}(D_i = k)$.

Question D) Représenter sur une figure l'ensemble des valeurs de la variable U_i pour lesquelles on a l'égalité $C_i = D_i$, en tenant compte de l'inégalité $1 - p_i \leq e^{-p_i}$.

Question E) En utilisant l'inégalité $1 - p_i \leq e^{-p_i}$, montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(C_i = D_i) \geq 1 - p_i^2. \quad (5)$$

Question F) On introduit l'événement $A = \{\forall i \in \{1, \dots, N\}, C_i = D_i\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^N p_i^2, \quad (6)$$

où $\bar{A}$ désigne l'événement complémentaire de A .

Dans la suite de l'exercice, on considère les variables aléatoires

$$C = \sum_{i=1}^N C_i \text{ et } D = \sum_{i=1}^N D_i.$$

Question G) Montrer que la loi de C est identique à la loi de S_N , et que la loi de D est identique à la loi de T .

Question H) On considère un sous-ensemble $H \subset \mathbb{N}$, et l'on introduit les variables aléatoires V et W définies respectivement par

$$V = \begin{cases} 1 & \text{si } C \in H \\ 0 & \text{si } C \notin H \end{cases} \text{ et } W = \begin{cases} 1 & \text{si } D \in H \\ 0 & \text{si } D \notin H \end{cases}.$$

Montrer que l'on a les identités

$$\mathbb{P}(C \in H) = \mathbb{E}(V) \text{ et } \mathbb{P}(D \in H) = \mathbb{E}(W).$$

Question I) Dédurre de la question précédente que l'on a l'inégalité

$$|\mathbb{P}(C \in H) - \mathbb{P}(D \in H)| \leq \mathbb{E}(|V - W|).$$

Question J) On introduit la variable aléatoire Y définie par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

Montrer que l'on a l'inégalité $|V - W| \leq Y$.

Question K) En faisant la synthèse des questions précédentes, montrer que

$$|\mathbb{P}(S_N \in H) - \mathbb{P}(T \in H)| \leq \sum_{i=1}^N p_i^2. \quad (7)$$

Expliquer en quoi ce résultat répond à l'objectif de l'exercice présenté au début.

Question L) On se donne un nombre réel positif h tel que $h \leq N$, et l'on fait l'hypothèse que $p_i = h/N$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Quelles sont alors les lois respectives de S_N et T ? Quelle est dans ce cas la valeur du membre de droite de l'inégalité (7)? Comment se comporte celui-ci lorsque $N \rightarrow \infty$?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h



Ce sujet se compose de deux parties distinctes (probabilités et optimisation économique) pouvant être traitées de manière totalement indépendante.

Probabilités

Cette partie compte pour 1/3 de la note

Notations et hypothèses

On considère une famille de variables aléatoires réelles positives $(X_n)_{n \geq 1}$, que l'on suppose indépendantes et de même loi. On suppose en outre que les variables $(X_n)_{n \geq 1}$ possèdent une espérance et une variance finies. Pour tout $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire S_n par :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

et l'on pose également :

$$S_0 = 0.$$

On considère ensuite une variable aléatoire N à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, supposée indépendante de la famille de variables $(X_n)_{n \geq 1}$, et l'on définit la variable aléatoire

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

On introduit également la fonction ϕ , définie pour tout nombre réel $\lambda > 0$ par :

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}),$$

ainsi que la fonction G définie pour tout $x \in [0, 1]$ par :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(N = k).$$

Un rappel sur l'espérance

Dans la suite, étant donnée une variable aléatoire X possédant une espérance, et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on utilise la notation $\mathbb{E}(X|A)$ pour désigner l'espérance de la variable aléatoire X par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ conditionnelle à A , que l'on peut écrire :

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)},$$

où $\mathbf{1}_A$ est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A , c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

Dans ce contexte, on a l'analogue de la formule des probabilités totales : étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable), on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Questions à traiter

Question 1) Pour $n \geq 1$, exprimer la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$, de la variance $\mathbb{V}(S_n)$, et de l'espérance $\mathbb{E}((S_n)^2)$ en fonction de n , $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

Question 2) Etant donné un entier n tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}(S_N | N = n)$.

Question 3) En déduire l'identité :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

Question 4) Etant donné un entier n tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}((S_N)^2 | N = n)$.

Question 5) En déduire l'identité

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(N) \cdot (\mathbb{E}(X_1))^2.$$

Commenter la différence entre cette formule et celle obtenue pour $\mathbb{V}(S_n)$.

Question 6) On introduit la fonction ψ définie pour tout $\lambda > 0$ par :

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda S_N}).$$

Montrer que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, la relation

$$\psi(\lambda) = G(\phi(\lambda)).$$

Indication : Calculer d'abord $\mathbb{E}(e^{-\lambda S_n})$, puis $\mathbb{E}(e^{-\lambda S_N} | N = n)$.

Question 7) On suppose que les v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre p , autrement dit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$, et d'autre part que N suit la loi de Poisson de paramètre $\rho > 0$.

- (i) Pour $n \geq 1$ donné, quelle est la loi de S_n ?
- (ii) Expliciter la valeur de $\phi(\lambda)$ en fonction de λ .
- (iii) Expliciter la valeur de $G(x)$ en fonction de x .
- (iv) En déduire que S_N suit la loi de Poisson de paramètre $\rho \cdot p$.

Question 8) On suppose que les v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et l'on définit explicitement la variable aléatoire N comme le plus petit entier n tel que $X_n = 1$, soit

$$N = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}.$$

- (i) Quelle est la loi de N ? Que vaut $\mathbb{E}(N)$?
- (ii) Quelle est l'unique valeur possible pour la variable aléatoire S_N ?
- (iii) L'hypothèse d'indépendance de N vis-à-vis des variables $(X_n)_{n \geq 1}$ est-elle vérifiée ?
- (iii) Montrer que l'on a, sur cet exemple, la relation $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1)$
- (iv) Montrer que, si l'on pose $N' = N - 1$, la relation $\mathbb{E}(S_{N'}) = \mathbb{E}(N') \cdot \mathbb{E}(X_1)$ n'est pas vérifiée.

Optimisation économique

Cette partie compte pour 2/3 de la note

Problème 1

7 points : 1+2+2+2

Soit un marché composé de n firmes identiques de type i . Une firme i représentative de ce marché a une fonction de coût que l'on peut spécifier de la manière suivante :

$$CT(q) = 4q^2 - 6q + 4.$$

La demande au marché est représentée par la fonction $Q^D = 170 - P$. On suppose que pour $n \geq 20$, le marché est en concurrence pure et parfaite.

Déterminez les prix et quantités optimales dans les cas suivants :

1. $n = 1$
2. $n = 1$ et le monopole est public (vous préciserez les deux types de tarification)
3. $n = 80$
4. Dans le dernier cas, en absence de barrières à l'entrée, on suppose qu'il existe une autre technologie j caractérisée par la fonction de coût suivante :

$$CT(q) = 2q^2 - 4q + 4.$$

Les firmes de type j réussissent-elles à pénétrer le marché? Déterminez les prix et quantités d'équilibre de long terme ainsi que le nombre de firmes. De quelles firmes s'agit-il?

Problème 2

7 points : 2+2+3

Soit un marché composé de 2 firmes dont les fonctions de coût sont les suivantes :

$$CT_1 = q_1 ; CT_2 = \frac{1}{2}q_2^2.$$

La demande au marché est représentée par la fonction suivante : $P = 4 - Q^D$.

1. Déterminez l'équilibre de Cournot (prix et quantités) de ce marché ainsi que le profit optimal de chaque entreprise.
2. On suppose que l'entreprise 2 est en situation de dominante. Déterminez l'équilibre de Stackelberg (prix et quantités) de ce marché, ainsi que le profit optimal de chaque entreprise.
3. Les 2 entreprises forment à présent un cartel. Déterminez leurs niveaux de production respectifs. Les 2 firmes ont-elles toujours intérêt à s'entendre? Quelles sont les conséquences de l'entente pour le consommateur?

Problème 3

6 points : 2+2+2

Soit à présent une économie composée de 5 ménages caractérisés par les anticipations suivantes sur les taux d'intérêt futurs : $i^a = 2\%$; 4% ; 6% ; 8% et 10% . Chaque ménage a la possibilité de placer une épargne d'une valeur de 1000 euros en monnaie ou titre.

1. Sachant que le taux d'intérêt d'aujourd'hui est de 5% , déterminez la demande optimale de monnaie de spéculation, la demande optimale de titres ainsi que les gains anticipés de chaque agent.
2. Tracez la courbe de demande de monnaie à des fins de spéculation pour les valeurs de taux d'intérêt suivantes : 1% , 2% , 5% , 7% et 15% .
3. Explicitez le principe de « trappe à liquidité ».

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction *que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique*¹. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer les faiblesses des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres. Elle n'est jamais immédiate et pleine. Les révélations du réel sont toujours récurrentes. Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser. La pensée empirique est claire, *après coup*, quand l'appareil des raisons a été mis au point. En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît *contre* une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation.

L'idée de partir de zéro pour fonder et accroître son bien ne peut venir que dans des cultures de simple juxtaposition où un fait connu est immédiatement une richesse. Mais devant le mystère du réel, l'âme ne peut *se faire*, par décret, ingénue. Il est alors impossible de faire d'un seul coup table rase des connaissances usuelles. Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir. Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est, spirituellement rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé.

La science, dans son besoin d'achèvement comme dans son principe, s'oppose absolument à l'opinion. S'il lui arrive, sur un point particulier, de légitimer l'opinion, c'est pour d'autres raisons que celles qui fondent l'opinion ; de sorte que l'opinion a, en droit, toujours tort. L'opinion *pense mal* ; elle ne *pense pas* ; elle *traduit des besoins* en connaissances. En désignant les objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. Elle est le premier obstacle à surmonter : il ne suffirait pas, par exemple, de la rectifier sur des points particuliers, en maintenant, comme une sorte de morale provisoire, une connaissance vulgaire provisoire. L'esprit scientifique nous interdit d'avoir une opinion sur des questions que nous ne savons pas formuler clairement. Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce *sens du problème* qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.

Une connaissance acquise par un effort scientifique peut elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use : la réponse concrète reste. Dès lors l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non questionnée. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. « Notre esprit, dit justement M. Bergson a une irrésistible tendance à considérer

1. Tous les termes en italiques désignent les passages soulignés par l'auteur.

comme plus claire l'idée qui lui sert le plus souvent » (*La Pensée et le Mouvant*). L'idée gagne une clarté intrinsèque abusive. A l'usage, les idées se *valorisent* indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. C'est un facteur d'inertie pour l'esprit. Parfois une idée dominante polarise un esprit dans sa totalité. Un épistémologue irrévérencieux disait, il y a vingt ans, que les grands hommes sont utiles à la science dans la première moitié de leur vie, nuisibles dans la seconde moitié. *L'instinct formatif* finit par céder devant l'instinct *conservatif*. Il vient un temps où l'esprit aime mieux ce qui confirme son savoir que ce qui le contredit, où il aime mieux les réponses que les questions. Alors l'instinct conservatif domine, la croissance spirituelle s'arrête.

Comme on le voit, nous n'hésitons pas à invoquer les instincts pour marquer la juste résistance de certains obstacles épistémologiques. (...) Dès maintenant, il faut se rendre compte que la connaissance empirique engage l'homme sensible par tous les caractères de sa sensibilité. Quand la connaissance empirique se rationalise, on n'est jamais sûr que des valeurs sensibles primitives ne coefficientent² pas les raisons. D'une manière bien visible, on peut reconnaître que l'idée scientifique trop familière se charge d'un concret psychologique trop lourd, qu'elle amasse trop d'analogies, d'images de métaphores, et qu'elle perd peu à peu son *vecteur d'abstraction*, sa fine pointe abstraite. En particulier, c'est verser dans un vain optimisme que de penser que savoir sert automatiquement à savoir, que la culture devient d'autant plus facile qu'elle est plus étendue, que l'intelligence enfin, sanctionnée par des succès précoces, par de simples concours universitaires, se capitalise comme une richesse matérielle. En admettant même qu'une *tête bien faite* échappe au narcissisme intellectuel si fréquent dans la culture littéraire, dans l'adhésion passionnée aux jugements de goût, on peut sûrement dire qu'une tête bien faite est malheureusement une tête fermée. C'est un produit d'école.

En fait les crises de croissance de la pensée impliquent une refonte totale du système du savoir. La tête bien faite doit alors être refaite. Elle change d'espèce. Elle s'oppose à l'espèce précédente par une fonction décisive. Par les révolutions spirituelles que nécessite l'invention scientifique, l'homme devient une espèce mutante, ou pour mieux dire encore, une espèce qui a besoin de muter, qui souffre de ne pas changer. Si l'on voulait bien considérer par exemple la modification psychique qui se trouve réalisée par la compréhension d'une doctrine comme la Relativité ou la Mécanique ondulatoire, on ne trouverait peut-être pas ces expressions exagérées, surtout si l'on réfléchissait à la réelle solidité de la science anté-relativiste (...) En résumé, l'homme animé par l'esprit scientifique désire sans doute savoir, mais c'est aussitôt pour mieux interroger.

G. Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique*, 1938.

2. Néologisme signifiant : qui affectent d'un coefficient. Ici, il indique la contamination de l'idée scientifique par le concret, le sensible, chargé d'analogies, d'images et de métaphores trompeuses.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



1 Translate the following text into French

Couple in 40s 'too old for loan'

One of Britain's biggest banks has become the first to be officially reprimanded for age discrimination after telling a couple in their forties that they were too old to get a mortgage.

The Financial Ombudsman Service has ruled HSBC was wrong and unfair to refuse the couple's mortgage application because the husband would have turned 65 by the time the mortgage would need to have been paid off.

The couple, who do not wish to be named, applied for a joint £250,000 mortgage over 18 years on their home, in which they have substantial equity.

HSBC refused to consider their application on account of the husband's age. This was despite the fact that he did not plan to retire at 65 and his final salary pension would have been large enough to cover the monthly repayments. Moreover, his wife would have been able to pay the loan from her income alone, if necessary.

The couple complained, saying they had been victims of discrimination. The ombudsman service — headed by Caroline Wayman, a former barrister — upheld the complaint and ordered HSBC to pay £500.

Like many lenders, HSBC has tightened its rules and does not offer loans with a term beyond a borrower's 65th birthday: "As a responsible lender, we need to ensure our customers' ability to repay their mortgage."

Adapted from The Sunday Times, 12 April 2015

2 Summarize this text in English in 180 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

In Accepting Bitcoin, Rand Paul Raises Money and Questions

Adapted from The New York Times, April 9, 2015

WASHINGTON — Presidential fund-raising, never known for its transparency, may have just become even more secretive.

In announcing his candidacy for president this week, Senator Rand Paul of Kentucky waded into new waters when he said he would accept campaign contributions in Bitcoins, a largely untraceable virtual currency, in amounts up to \$100.

Interested donors at randpaul.com were given three options for making a contribution: a credit card, PayPal or Bitcoins. While some state and federal candidates in California, Colorado, New Hampshire and elsewhere have started accepting Bitcoins, Mr. Paul, a Republican, is the first presidential candidate to do so.

The novelty of the payment method is likely to help Mr. Paul highlight his edgy appeal to other libertarians, tech-savvy voters, young people and others who favor Bitcoins. But it also raises questions about whether illegal contributions could make their way into campaigns more easily.

The Bitcoin itself is essentially untraceable if the owner wants to maintain anonymity, and political candidates who accept them must rely largely on donors' disclosing their identity.

Federal law bans contributions to individual candidates from foreigners, corporations or straw donors, among other restrictions, and campaigns are expected to make their "best

efforts” to collect and publicly identify donors who contribute more than \$200 in a year and to detect contributions that may be illegal.

“At some level, we are trusting candidates,” said Richard L. Hasen, a campaign finance expert at the University of California, Irvine, School of Law. The system already relies on some measure of trust from candidates, he said, “but the difference with Bitcoin is that it is inherently untraceable.”

In a ruling last year, the Federal Election Commission agreed to allow a political action committee to accept Bitcoins with a voluntary limit of \$100, but the commissioners split over how the online currency — which can fluctuate widely in value — should be treated on a broader scale or whether it should be capped.

“Bitcoins are no more anonymous than any other contribution,” wrote Lee E. Goodman, a Republican commissioner who was then the chairman of the panel. He said that technological innovations should be embraced in the political system and that Bitcoins should be treated no differently than a computer, securities, a painting or other legal, “in-kind” contributions.

But the three Democratic commissioners — Ann M. Ravel, Steven T. Walther and Ellen L. Weintraub — were much more cautious in endorsing the limited use of Bitcoins.

Bitcoins should be treated the same as cash, with a cap of \$100, to protect against unethical and illegal activities, the three commissioners wrote. “The fact that Bitcoins are ultimately untraceable makes prophylactic measures at the outset of the transaction particularly important,” they said. The commission did not adopt the cap.

For Mr. Paul, who has been sharply critical of the government’s electronic surveillance programs as an attack on privacy, his embrace of Bitcoins — with their added layers of privacy — is a way to establish his bona fides with younger voters who put a premium on Internet freedom and technology.

“This is certainly new territory,” said David Mittrani, a Washington lawyer who specializes in campaign finance law and has represented several candidates who have accepted Bitcoins.

As an experiment, Mr. Mittrani tried to make an online donation of more than \$200 in Bitcoins on Mr. Paul’s campaign website — above the voluntary limit that his campaign placed on Bitcoin donations.

The donation was rejected. “Bitcoin donations are limited to \$100,” the automated response said. “If you would like to contribute more than \$100, you may select Credit Card as your payment option and contribute up to \$2,600 for the primary election and up to \$2,600 for the general election.”

Bitcoin enthusiasts predicted that Mr. Paul would be the first of many presidential candidates to rake in Bitcoins.

“Rand Paul is at the forefront of a tech revolution, like the first candidates to have websites,” said Brian Klein, a Los Angeles lawyer and a Bitcoin supporter who has represented many clients involved in the currency.

“I bet other presidential candidates will follow his lead, and soon,” Mr. Klein said. “I also believe in a year or two, this won’t be a story because every candidate will accept Bitcoins — just like every candidate has a website.”

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique. Mathématiques.

Partie I. Une distance entre lois de variables aléatoires

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |P([X = n]) - P([Y = n])| \leq P([X = n]) + P([Y = n])$. Puisque la série de terme général $P([X = n]) + P([Y = n])$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme 2), il en est de même de la série de terme général $|P([X = n]) - P([Y = n])|$, $n \in \mathbb{N}$.

b) • $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = P([Y = n])$.

Donc, $d(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y ont mêmes lois.

• On lance une pièce de monnaie non truquée. On a alors $\Omega = \{P, F\}$. Soit X la variable égale à 0 si on obtient pile et 1 si on obtient face et Y la variable égale à 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile. X et Y sont distinctes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ont mêmes lois. Donc, $d(X, Y) = 0$ (pour tout $k \geq 2$, $P([X = k]) = P([Y = k]) = 0$).

c)

$$\begin{aligned} d(X, Z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Z = n])| = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n]) + P([Y = n]) - P([Z = n])| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |P([Y = n]) - P([Z = n])| \\ &= d(X, Y) + d(Y, Z). \end{aligned}$$

2) a) La série de terme général $P([X = n]) - P([Y = n])$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge.

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in A} |P([X = n]) - P([Y = n])| + \sum_{n \in \bar{A}} |P([X = n]) - P([Y = n])| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in A} (P([X = n]) - P([Y = n])) + \sum_{n \in \bar{A}} (P([Y = n]) - P([X = n])) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in A} P([X = n]) - \sum_{n \in \bar{A}} P([X = n]) - \sum_{n \in A} P([Y = n]) + \sum_{n \in \bar{A}} P([Y = n]) \right) \\ &= \frac{1}{2} (P([X \in A]) - P([X \in \bar{A}]) - P([Y \in A]) + P([Y \in \bar{A}])) \\ &= \frac{1}{2} (P([X \in A]) - 1 + P([X \in A]) - P([Y \in A]) + 1 - P([Y \in A])) \\ &= P([X \in A]) - P([Y \in A]) = |P([X \in A]) - P([Y \in A])|. \end{aligned}$$

En particulier, $P([X \in A]) - P([Y \in A]) \geq 0$ puis $d(X, Y) \leq |P([X \in A]) - P([Y \in A])|$.

b) Soit B une partie de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P([X \in B]) - P([Y \in B]) &= \sum_{n \in B} P([X = n]) - \sum_{n \in B} P([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in B \cap A} P([X = n]) + \sum_{n \in B \cap \bar{A}} P([X = n]) - \sum_{n \in B \cap A} P([Y = n]) - \sum_{n \in B \cap \bar{A}} P([Y = n]) \\
&= \sum_{n \in B \cap A} (P([X = n]) - P([Y = n])) + \sum_{n \in B \cap \bar{A}} (P([X = n]) - P([Y = n])) \\
&\leq \sum_{n \in B \cap A} (P([X = n]) - P([Y = n])) \text{ (car si } n \in \bar{A}, P([X = n]) - P([Y = n]) \leq 0) \\
&\leq \sum_{n \in A} (P([X = n]) - P([Y = n])) \text{ (car si } n \in A, P([X = n]) - P([Y = n]) \geq 0) \\
&= \sum_{n \in A} P([X = n]) - \sum_{n \in A} P([Y = n]) = P([X \in A]) - P([Y \in A]) \\
&= |P([X \in A]) - P([Y \in A])| = d(X, Y).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute partie B de $\mathbb{N}$ et tout couple de variables aléatoires (X, Y) , on a $P([X \in B]) - P([Y \in B]) \leq d(X, Y)$. En échangeant les rôles de X et Y , on a donc aussi $P([Y \in B]) - P([X \in B]) \leq d(X, Y)$ et finalement

$$\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), |P([X \in B]) - P([Y \in B])| \leq d(X, Y).$$

3) a) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 ce qui fournit

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

b) On sait que $P([X = 0]) = 1 - p$, $P([X = 1]) = p$ et pour $k \geq 2$, $P([X = k]) = 0$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([Y = k]) = \frac{p^k}{k!} e^{-p}$. D'après la question précédente, $e^{-p} \geq 1 - p$ et donc $1 - p - e^{-p} \leq 0$ puis

$$\begin{aligned}
d(X, Y) &= \frac{1}{2} \left(|1 - p - e^{-p}| + |p - p e^{-p}| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \right) \\
&= \frac{1}{2} ((-1 + p + e^{-p}) + p(1 - e^{-p}) + (e^p - 1 - p) e^{-p}) = \frac{1}{2} (p + p(1 - e^{-p}) - p e^{-p}) \\
&= p(1 - e^{-p}).
\end{aligned}$$

On a aussi $1 - e^{-p} \leq p$ et donc

$$d(X, Y) = p(1 - e^{-p}) \leq p \times p = p^2.$$

4) a) Posons $P_1 P_2 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$a_{1,1} = (1 - p_1)(1 - p_2) = P([X_1 = 0]) \times P([X_2 = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P([X_1 + X_2 = 0]).$$

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= (1 - p_1)p_2 + p_1(1 - p_2) = P([X_1 = 0]) \times P([X_2 = 1]) + P([X_1 = 1]) \times P([X_2 = 0]) \\
&= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = P([X_1 + X_2 = 1]).
\end{aligned}$$

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
a_{1,3} &= p_1 p_2 = P([X_1 = 1]) \times P([X_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\
&= P([X_1 + X_2 = 2]).
\end{aligned}$$

• Ensuite, si $j \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $a_{1,j} = 0 = P([X_1 + X_2 = k])$ et si $j > n$, $a_{1,j} = 0$.

Donc, la première ligne de $P_1 P_2$ est constituée des $n + 1$ réels $P([X_1 + X_2 = j])$, $0 \leq j \leq n$, suivis de termes nuls.

b) Montrons par récurrence que $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la première ligne de $P_1 P_2 \dots P_k$ est constituée des $n + 1$ réels $P([U_k = j])$, $0 \leq j \leq n$, suivis de termes nuls.

- Le résultat est vrai pour $k = 2$ d'après la question précédente.
- Soit $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$. Supposons que la première ligne de $P_1 P_2 \dots P_k$ soit constituée des $n + 1$ réels $P([U_k = j])$, $0 \leq j \leq n$, suivis de termes nuls. Posons $P_1 P_2 \dots P_{k+1} = (P_1 P_2 \dots P_k) P_{k+1} = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$.

D'après le lemme des coalitions, les variables U_k et X_{k+1} sont indépendantes et donc

- $a_{1,1} = P([U_k = 0]) \times P([X_{k+1} = 0]) = P([U_k = 0] \cap [X_{k+1} = 0]) = P([U_{k+1} = 0])$.
- Ensuite, pour $2 \leq j \leq k + 1$,

$$a_{1,j} = P([U_k = j - 1]) \times p_1 + P([U_k = j]) \times (1 - p_1) = P([U_k = j - 1] \cap [X_{k+1} = 1]) + P([U_k = j] \cap [X_{k+1} = 0]) \\ = P([U_{k+1} = j]).$$

- Ensuite, pour $k + 1 < j \leq n$, $a_{i,j} = 0 = P([U_{k+1} = j])$ et pour $j > n$, $a_{i,j} = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit en particulier que la première ligne de $P_1 P_2 \dots P_n$ est constituée des $n + 1$ réels $P([U_n = j])$, $0 \leq j \leq n$, suivis de termes nuls.

5) a) Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis $r \in \mathbb{N}$. Puisque les matrices R et Q_i commutent (car $Q_i \in \mathbb{R}[R]$), la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} Q_i^k &= \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} p_i^k (R - I)^k = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} p_i^k \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} R^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^r \left(\sum_{k=j}^r (-1)^{k-j} \frac{1}{k!} p_i^k \frac{k!}{j!(k-j)!} R^j \right) = \sum_{j=0}^r \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=j}^r (-1)^{k-j} p_i^{k-j} \frac{1}{(k-j)!} \right) R^j \\ &= \sum_{j=0}^r \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{\ell=0}^{r-j} (-1)^\ell p_i^\ell \frac{1}{\ell!} \right) R^j \\ &= \sum_{j=0}^r \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j. \end{aligned}$$

b) La matrice R est nilpotente et on sait que $R^N = 0$ puis pour $j \geq N$, $R^j = 0$. Pour $r \geq N$, on a donc

$$\sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} Q_i^k = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j.$$

Chacune des r séries numériques $\left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-p_i)^k}{k!} \right)_{r \geq j}$, $0 \leq j \leq N - 1$, converge vers e^{-p_i} et quand r tend vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \exp(Q_i) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j = \sum_{j=0}^{N-1} P([Y_i = j]) R^j \\ &= \begin{pmatrix} P([Y_i = 0]) & P([Y_i = 1]) & \dots & P([Y_i = N - 2]) & P([Y_i = N - 1]) \\ 0 & P([Y_i = 0]) & P([Y_i = 1]) & & P([Y_i = N - 2]) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & P([Y_i = 1]) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P([Y_i = 0]) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Puisque les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes, le coefficient ligne 1, colonne j de $\exp(Q_1) \times \exp(Q_2)$ est

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= \sum_{k=1}^j P([Y_1 = k-1]) \times P([Y_2 = (j-1) - (k-1)]) = \sum_{k=1}^j P([Y_1 = k-1, Y_2 = j-k]) \\ &= P([Y_1 + Y_2 = j-1]). \end{aligned}$$

Mais alors, comme dans la question 4, par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient ligne 1, colonne j , $1 \leq j \leq N$, de $\exp(Q_1) \times \dots \times \exp(Q_k)$ est $P([Y_1 + \dots + Y_k = j-1])$.

En particulier, les coefficients de la première ligne de $\exp(Q_1) \times \dots \times \exp(Q_n)$ sont $P([V_n = 0])$, $P([V_n = 1])$, $\dots$, $P([V_n = N-1])$.

6) a)

• Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\sum_{j=1}^N |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^N |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^N |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$$

puis

$$\|A + B\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

• Posons $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^N \left| \sum_{k=1}^N a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N |a_{i,k}| |b_{k,j}| \right) = \sum_{k=1}^N |a_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^N |b_{k,j}| \right) \\ &\leq \|B\| \sum_{k=1}^N |a_{i,k}| \leq \|B\| \|A\| \end{aligned}$$

puis

$$\|AB\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |c_{i,j}| \leq \|A\| \|B\|.$$

b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\|R^0\| = \|I\| = 1$, $\|R\| = 1$ puis pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\|R^j\| \leq \|R\|^j \leq 1$ puis

$$\begin{aligned} \|\exp(Q_i)\| &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} \|R\|^j \leq e^{-p_i} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \\ &\leq e^{-p_i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p_i^j}{j!} = 1. \end{aligned}$$

c) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|P_i\| \leq (1 - p_i) \|I\| + p_i \|R\| \leq 1 - p_i + p_i = 1$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) &= P_1 \prod_{i=2}^n P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^n \exp(Q_i) \\ &= P_1 \prod_{i=2}^n P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^n P_i + \exp(Q_1) \prod_{i=2}^n P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^n \exp(Q_i) \\ &= (P_1 - \exp(Q_1)) \prod_{i=2}^n P_i + \exp(Q_1) \left(\prod_{i=2}^n P_i - \prod_{i=2}^n \exp(Q_i) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) \right\| &\leq \|P_1 - \exp(Q_1)\| \prod_{i=2}^n \|P_i\| + \|\exp(Q_1)\| \left\| \prod_{i=2}^n P_i - \prod_{i=2}^n \exp(Q_i) \right\| \\ &\leq \|P_1 - \exp(Q_1)\| + \left\| \prod_{i=2}^n P_i - \prod_{i=2}^n \exp(Q_i) \right\| \end{aligned}$$

puis, par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^k \|P_i - \exp(Q_i)\| + \left\| \prod_{i=k+1}^n P_i - \prod_{i=k+1}^n \exp(Q_i) \right\|$$

et en particulier,

$$\left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i - \exp(Q_i)\|.$$

d) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \|P_i - \exp(Q_i)\| &= \left\| (1 - p_i)I + p_i R - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j \right\| = \left\| (1 - p_i - e^{-p_i})I + p_i(1 - e^{-p_i})R + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j \right\| \\ &\leq -1 + p_i + e^{-p_i} + p_i(1 - e^{-p_i}) + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} \text{ (d'après la question 3)} \\ &\leq -1 + p_i + e^{-p_i} + p_i(1 - e^{-p_i}) + e^{-p_i}(e^{p_i} - 1 - p_i) = 2p_i(1 - e^{-p_i}) \\ &\leq 2p_i^2 \text{ (d'après la question 3)}. \end{aligned}$$

7) a) D'après les questions 7.c) et 7.d),

$$\left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|P_i - \exp(Q_i)\| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

D'après les questions 4.b) et 5.c), la première ligne de la matrice $\prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i)$ est

$$(a_{1,j})_{1 \leq j \leq N} = (P([U_n = j - 1]) - P([V_n = j - 1]))_{1 \leq j \leq N}$$

et donc

$$\sum_{j=1}^N |P([U_n = j - 1]) - P([V_n = j - 1])| \leq \left\| \prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n \exp(Q_i) \right\| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Ces inégalités sont vraies pour tout N de $\mathbb{N}^*$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$2d(U_n, V_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} |P([U_n = j - 1]) - P([V_n = j - 1])| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2$$

et finalement

$$d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

b) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on prend $p_i = \frac{\lambda}{n}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{B}\left(1, \frac{\lambda}{n}\right)$ et, puisque les variables X_i sont indépendantes, on sait que $U_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et, puisque les variables $Y_1, \dots, Y_n$, sont indépendantes, on sait que $V_n \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n} + \dots + \frac{\lambda}{n}\right) = \mathcal{P}(\lambda)$.

En résumé, U_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ et V_n suit la loi de Poisson de paramètre λ . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a obtenu

$$d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 = n \times \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(U_n, V_n) = 0$. Or,

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \left| P([U_n = k]) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| = \max_{k \in \mathbb{N}} |P([U_n = k]) - P([V_n = k])| \leq 2d(U_n, V_n)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{k \in \mathbb{N}} \left| P([U_n = k]) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| = 0.$$

Ceci améliore le résultat usuel de cours : on a une sorte de convergence uniforme.

Partie II. Records d'une permutation

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \\ &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$. Ainsi, la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté γ , positif ou nul.

2) $\mathcal{S}_3$ est constitué de 6 permutations $i = (1 \ 2 \ 3)$, $\tau_1 = (2 \ 1 \ 3)$, $\tau_2 = (3 \ 2 \ 1)$, $\tau_3 = (1 \ 3 \ 2)$, $c_1 = (2 \ 3 \ 1)$ et $c_2 = (3 \ 1 \ 2)$, toutes équiprobables de probabilité égale à $\frac{1}{6}$.

Ensuite, $R_3(\mathcal{S}_3) = \{1, 2, 3\}$.

- i présente 3 records.
- τ_1 , τ_3 et c_1 présentent 2 records.
- τ_2 et c_2 présentent 1 record.

Donc, $P(R_3 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(R_3 = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(R_3 = 3) = \frac{1}{6}$. Ensuite,

$$E(R_3) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{11}{6},$$

et, d'après la formule de KOENIG-HUYGENS,

$$V(R_3) = E(R_3^2) - (E(R_3))^2 = \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 - \frac{121}{36} = \frac{23}{6} - \frac{121}{36} = \frac{17}{36}.$$

3) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si σ présente n records, alors $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$ ce qui impose $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$. Réciproquement, $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ présente n records. Donc,

$$P([R_n = n]) = P(\{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}\}) = \frac{1}{n!}.$$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $\sigma_1 \neq n$, σ présente un record au rang 1 et un record au rang $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $\sigma_k = n$ et en particulier, σ présente au moins deux records. Donc, si σ présente exactement un record, nécessairement $\sigma_1 = n$. Réciproquement, si $\sigma_1 = n$, alors pour tout $k \geq 2$, $\sigma_1 > \sigma_k$ et donc σ ne présente pas d'autre record que le record au rang 1.

En résumé, l'événement $[R_n = 1]$ est constitué des permutations σ telles que $\sigma_1 = n$. Il y a $(n-1)!$ telles permutations ($n-1$ possibilités pour σ_1 , puis $n-2$ pour σ_2 , ..., puis une pour σ_n). Donc,

$$P([R_n = 1]) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

4) a) On cherche les permutations ayant exactement deux records, en 1 et p (pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$). Soit σ une telle permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{p-1} & \sigma_p & \sigma_{p+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que :

- $\sigma_p = n$ sinon il y aurait un autre record.
- De plus, $\forall k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$, $\sigma_1 > \sigma_k$ sinon il y aurait un autre record.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{p-1} & n & \sigma_{p+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une telle permutation,

- on doit choisir $p-1$ entiers entre 1 et $n-1$. Ce seront les $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Le maximum est obtenu pour σ_1 , les $\sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ peuvent être permutés. Il y a par conséquent $\binom{n-1}{p-1}(p-1-2+1)!$

possibilités soit $\binom{n-1}{p-1}(p-2)!$ possibilités.

- σ_p est déterminé et il vaut n .
- Enfin, il reste $n - (p+1) - 1 = n - p$ entiers compris entre 1 et $n-1$, ce sont $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_n$. On peut les permuter. Il y a donc $(n-p)!$ possibilités.

Au final, il y a $\binom{n-1}{p-1}(p-2)!(n-p)! = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}(p-2)!(n-p)! = \frac{(n-1)!}{p-1}$ possibilités.

b) Si pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note $E_{n,p}$ l'événement « la permutation σ présente exactement deux records, un au rang 1 et un au rang p », alors l'événement $[R_n = 2]$ est la réunion disjointe des événements $E_{n,p}$ et donc

$$\begin{aligned} P([R_n = 2]) &= \sum_{p=2}^n P(E_{n,p}) = \frac{1}{n!} \sum_{p=2}^n \frac{(n-1)!}{p-1} = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

c) D'après la question 1 de la partie II,

$$P([R_n = 2]) = \frac{1}{n} H_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} (\ln(n-1) + O(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} (\ln n + o(\ln n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

5) a) On remarque déjà que $T_i(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$. On cherche à calculer $P(T_i = 1)$.

Pour construire une permutation σ ayant un record au rang i ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{i-1} & \sigma_i & \sigma_{i+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On commence par choisir i éléments entre 1 et n , ce seront $\sigma_1, \dots, \sigma_i$. Pour ces i éléments, σ_i est le maximum, les $i-1$ autres éléments peuvent être permutés. Il y a $\binom{n}{i}(i-1)!$ possibilités.

Les autres valeurs $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$ sont déterminés de fait et on peut les permuter. Il y a $n - (i+1) + 1)! = (n-i)!$ possibilités.

Au final, il y a $\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)! = \frac{n!}{i!(n-i)!}(i-1)!(n-i)! = \frac{n!}{i}$ possibilités.

Par suite, $P(T_i = 1) = \frac{1}{n!} \frac{n!}{i} = \frac{1}{i}$ ainsi, $\forall i$, $T_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)$, c'est-à-dire, T_i suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{i}$.

b) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(T_i) = \frac{1}{i}$. Puisque $R_n = T_1 + \dots + T_n$ et puisque l'espérance est linéaire,

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^n E(T_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H_n.$$

En particulier,

$$E(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

6) a) Soient $2 \leq i < j \leq n$. On cherche une permutation σ ayant des records en i et j .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{i-1} & \sigma_i & \sigma_{i+1} & \cdots & \sigma_{j-1} & \sigma_j & \sigma_{j+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On commence par choisir j éléments parmi n . Le maximum est σ_j .

On choisit ensuite i éléments parmi $j-1$ (on a enlevé aux j termes précédents le maximum σ_j). Le maximum de ces i termes est σ_i .

Les entiers $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ peuvent être permutés, les entiers $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{j-1}$ peuvent l'être aussi.

Il y a ainsi $\binom{n}{j} \binom{j-1}{i} ((i-1)-1+1)!((j-1)-(i+1)+1)! = \binom{n}{j} \binom{j-1}{i} (i-1)!(j-1-i)!$ possibilités.

Enfin, les autres valeurs $\sigma_{j+1}, \dots, \sigma_n$ sont déterminées de fait et on peut les permuter.

Il y a $n - (j+1) + 1)! = (n-j)!$ possibilités.

Finalement,

$$P(T_i = 1 \cap T_j = 1) = \frac{1}{n!} \binom{n}{j} \binom{j-1}{i} (i-1)!(j-1-i)! = \frac{1}{n!} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(j-1)!}{i!(j-i-1)!} (i-1)!(j-i-1)! = \frac{1}{i \cdot j}$$

D'autre part, $P([T_i = 1]) \times P([T_j = 1]) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{j} = \frac{1}{ij}$. Donc, les événements $[T_i = 1]$ et $[T_j = 1]$ sont indépendants. On sait alors que les événements $[T_i = 0] = \overline{[T_i = 1]}$ et $[T_i = 1]$ sont indépendants. De même, les événements $[T_i = 1]$ et $[T_j = 0]$ sont indépendants et les événements $[T_i = 0]$ et $[T_j = 0]$ sont indépendants. Ceci montre que les variables T_i et T_j sont indépendantes.

b) Puisque les variables $T_1, \dots, T_n$, sont deux à deux indépendantes, on sait que

$$\begin{aligned} V(R_n) &= V\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{i=1}^n V(T_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2} = H_n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{i^2}$, $i \geq 1$, converge et que H_n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$V(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

7) Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
P([R_n = k]) &= P([T_1 + \dots + T_n = k]) \\
&= \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n \\ j_1 + \dots + j_n = k}} P([T_1 = j_1, \dots, T_n = j_n]) \\
&= \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n \\ j_1 + \dots + j_n = k}} P([T_1 = j_1]) \times \dots \times P([T_n = j_n]) \quad (\text{car } T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes}) \\
&= \sum_{\substack{(j_2, \dots, j_n) \in \{0,1\}^{n-1} \\ j_2 + \dots + j_n = k-1}} P([T_2 = j_2]) \times \dots \times P([T_n = j_n]) \quad (\text{car } P([T_1 = 0]) = 0) \\
&= \sum_{2 \leq i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} P([T_{i_2} = 1]) P([T_{i_3} = 1]) \dots P([T_{i_k} = 1]) \prod_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \notin \{i_2, \dots, i_k\}}} P([T_j = 0]) \\
&\quad (\text{de nouveau car } T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes}) \\
&= \sum_{2 \leq i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{i_2} \frac{1}{i_3} \dots \frac{1}{i_k} \prod_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \notin \{i_2, \dots, i_k\}}} \left(1 - \frac{1}{j}\right).
\end{aligned}$$

8) a)

$$\begin{aligned}
P([R_n = 3]) &= \sum_{2 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i} \frac{1}{j} \prod_{\substack{2 \leq k \leq n \\ k \notin \{i, j\}}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{2 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i} \frac{1}{j} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{i}\right) \left(1 - \frac{1}{j}\right)} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{2 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(i-1)(j-1)} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(i-1)(j-1)} \quad (\text{produit télescopique}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{1}{ij}.
\end{aligned}$$

b) $P([R_n = 3]) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} H_{j-1}$. Maintenant, $\frac{1}{j} H_{j-1} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(j-1)}{j} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln j}{j} > 0$ et la série de terme général $\frac{\ln j}{j}$ diverge.

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$P([R_n = 3]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\ln j}{j}.$$

Ensuite, puisque la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est positive et décroissante sur $[3, +\infty[$ (car de dérivée $x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x^2}$), on sait que la série de terme général $\frac{\ln j}{j} - \int_{j-1}^j \frac{\ln x}{x} dx$ converge. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n-1} \frac{\ln j}{j} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{j=2}^{n-1} \int_{j-1}^j \frac{\ln x}{x} dx + O(1) = \int_1^{n-1} \frac{\ln x}{x} dx + O(1) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln^2(n-1) + O(1) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2 n
\end{aligned}$$

et finalement

$$P([R_n = 3]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2n}.$$

Partie III. Deux résultats asymptotiques

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 1 de la partie II, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq n_0$, $\left| \frac{H_n}{\ln n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq n_0$. Soit $\sigma \in \left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$. Alors,

$$\left| \frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - 1 \right| \leq \left| \frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| + \left| \frac{H_n}{\ln n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et donc $\sigma \in \left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| < \varepsilon \right]$. Ceci montre que $\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right] \subset \left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| < \varepsilon \right]$.

Par passage au complémentaire, on en déduit que pour $n \geq n_0$,

$$\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

b)

(i) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 5.b) de la partie II, $E(R_n) = H_n$. D'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV,

$$P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon\right]\right) = P(|R_n - E(R_n)| \geq \varepsilon \ln n) \leq \frac{V(R_n)}{\varepsilon^2 \ln^2 n}.$$

D'après la question 6.b) de la partie II, $\frac{V(R_n)}{\varepsilon^2 \ln^2 n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\varepsilon^2 \ln^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 \ln n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 \ln n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question a), $P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$ et d'après la question b.(i),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) = 0. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

2) a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant une loi de BERNOULLI de paramètre $p \in [0, 1]$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = (1-p) + pt.$$

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant une loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}.$$

c) Montrons le résultat par récurrence.

• Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes. On sait que G_{X_1} et G_{X_2} sont définies sur $[-1, 1]$ au moins et que pour tout $t \in [-1, 1]$, les séries numériques de termes généraux respectifs $P([X_1 = k])t^k$ et $P([X_2 = k])t^k$ sont absolument convergentes. Pour $t \in [-1, 1]$ (sur $] -1, 1[$, on peut effectuer directement le produit de CAUCHY des deux séries entières),

$$\begin{aligned} G_{X_1+X_2}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X_1 + X_2 = k])t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k P([X_1 = i] \cap [X_2 = k-i]) \right) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k P([X_1 = i])t^i P([X_2 = k-i])t^{k-i} \right) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P([X_1 = k])t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P([X_2 = k])t^k \right) \\ &\quad (\text{produit de CAUCHY de deux séries numériques absolument convergentes}) \\ &= G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t), \end{aligned}$$

et donc $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} \times G_{X_2}$.

• Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat pour n variables aléatoires indépendantes. Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$, $(n+1)$ variables aléatoires indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X_{n+1} et $X_1 + \dots + X_n$ sont indépendantes puis

$$\begin{aligned} G_{X_1+\dots+X_n+X_{n+1}} &= G_{X_1+\dots+X_n} \times G_{X_{n+1}} \text{ (d'après le cas } n=2) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n G_{X_k} \right) \times G_{X_{n+1}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} G_{X_k}. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

d) D'après la question a), pour tout $i \in \llbracket m+1, 2m \rrbracket$, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_{T_i}(t) = 1 - \frac{1}{i} + \frac{1}{i}t = 1 + \frac{t-1}{i}$. D'après la question 7 de la partie II, les variables $T_{m+1}, \dots, T_{2m}$ sont indépendantes et donc, d'après la question c), pour tout $t \in [0, 1]$,

$$G_{W_n}(t) = G_{T_{m+1}+\dots+T_{2m}}(t) = \prod_{i=m+1}^{2m} G_{T_i}(t) = \prod_{i=m+1}^{2m} \left(1 + \frac{t-1}{i} \right).$$

e) Soit $t \in [0, 1]$. Pour $i \in \llbracket m+1, 2m \rrbracket$, $1 + \frac{t-1}{i} \geq 1 - \frac{1}{i} \geq 1 - \frac{1}{m+1} > 0$ et on peut donc écrire

$$\ln(G_{W_n}(t)) = \sum_{i=m+1}^{2m} \ln \left(1 + \frac{t-1}{i} \right).$$

La fonction $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right)$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (car $t-1 \leq 0$) et on peut donc écrire

$$\ln(G_{W_n}(t)) \leq \sum_{i=m+1}^{2m} \int_i^{i+1} \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right) dx = \int_{m+1}^{2m+1} \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right) dx$$

et aussi

$$\ln(G_{W_n}(t)) \geq \sum_{i=m+1}^{2m} \int_{i-1}^i \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right) dx = \int_m^{2m} \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right) dx.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \ln \left(1 + \frac{t-1}{x} \right) dx &= \int \ln(x+t-1) dx - \int \ln x dx = ((x+t-1) \ln(x+t-1) - x) - (x \ln x - x) + C \\ &= (x+t-1) \ln(x+t-1) - x \ln x + C. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \ln(G_{W_n}(t)) &\geq ((2m+t-1) \ln(2m+t-1) - 2m \ln(2m)) - ((m+t-1) \ln(m+t-1) - m \ln m) \\ &= 2m \ln \left(\frac{2m+t-1}{2m} \right) - m \ln \left(\frac{m+t-1}{m} \right) + (t-1) \ln \left(\frac{2m+t-1}{m+t-1} \right) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \ln(G_{W_n}(t)) &\leq ((2m+1+t-1) \ln(2m+t) - (2m+1) \ln(2m+1)) - ((m+1+t-1) \ln(m+t) - (m+1) \ln(m+1)) \\ &= (2m+1) \ln \left(\frac{2m+t}{2m+1} \right) - (m+1) \ln \left(\frac{m+t}{m+1} \right) + (t-1) \ln \left(\frac{2m+t}{m+t} \right) \end{aligned}$$

Or, $2m \ln \left(\frac{2m+t-1}{2m} \right) = 2m \ln \left(1 + \frac{t-1}{2m} \right) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} t-1 + o(1)$ et de même, $m \ln \left(\frac{m+t-1}{m} \right) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} t-1 + o(1)$. On en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(2m \ln \left(\frac{2m+t-1}{2m} \right) - m \ln \left(\frac{m+t-1}{m} \right) + (t-1) \ln \left(\frac{2m+t-1}{m+t-1} \right) \right) = (t-1) \ln 2$$

et de même,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left((2m+1) \ln \left(\frac{2m+t}{2m+1} \right) - (m+1) \ln \left(\frac{m+t}{m+1} \right) + (t-1) \ln \left(\frac{2m+t}{m+t} \right) \right) = (t-1) \ln 2.$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln(G_{W_n}(t)) = (t-1) \ln 2$ puis que $\lim_{m \rightarrow +\infty} G_{W_n}(t) = e^{(t-1) \ln 2}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de POISSON de paramètre $\lambda = \ln 2$.

D'après le résultat admis par l'énoncé, la suite $(W_n)_{n \geq 4} = \left(\sum_{k=m+1}^{2m} T_k \right)_{m \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y telle que $Y \sim \mathcal{P}(\ln 2)$.



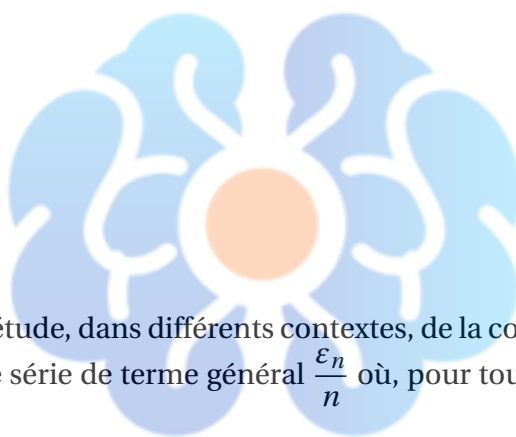
|

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'objet du problème est l'étude, dans différents contextes, de la convergence et, parfois, de la valeur de la somme d'une série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1 .

Partie I : Quelques cas déterministes

On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $\gamma_n = H_n - \ln n$.
Montrer que la suite de terme général $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.
2. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = H_N - H_{2N}$.
b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n , $\varepsilon_{3n+1} = \varepsilon_{3n+2} = 1$ et $\varepsilon_{3n+3} = -1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$?
4. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n ,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1.$$

- a) Prouver, pour tout entier naturel N , l'égalité :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} dx.$$

- b) En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

- c) Calculer, de même, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$ et en déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

Dans toute la suite de cette partie, pour tout entier naturel p non nul, on considère la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout entier naturel n ,

$$\varepsilon_{2pn+1} = \varepsilon_{2pn+2} = \dots = \varepsilon_{2pn+p} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2pn+p+1} = \varepsilon_{2pn+p+2} = \dots = \varepsilon_{2pn+2p} = -1.$$

La suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc constituée de p termes égaux à 1, suivis de p termes égaux à -1, suivis de p termes égaux à 1, etc.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k}$.

5. a) Prouver, pour tout entier naturel n , la majoration : $\sum_{k=2pn+1}^{2pn+2p} \frac{\varepsilon_k}{k} \leq \frac{1}{2n^2}$.

- b) En déduire la convergence de la suite $(S_{2pn})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- c) Prouver la convergence de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$.

On note Σ_p la somme de cette série c'est-à-dire $\Sigma_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$.

6. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2pn+1} + \dots + \frac{1}{2pn+p} - \frac{1}{2pn+p+1} - \dots - \frac{1}{2pn+p+p} \right) = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (1+x+\dots+x^{p-1})(1-x^p)x^{2pn} dx.$$

b) En déduire l'égalité : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2p(N+1)} = \int_0^1 \frac{1+x+\dots+x^{p-1}}{1+x^p} dx$.

c) Conclure à l'égalité : $\Sigma_p = \int_0^1 \frac{1+x+\dots+x^{p-1}}{1+x^p} dx$.

7. Calcul de Σ_3

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ puis conclure à l'égalité : $\Sigma_3 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$.

8. Une relation de récurrence

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\dots+x^{p-2}}{1+x^p} dx$ et établir l'égalité :

$$(1) \quad \Sigma_p = \frac{\ln 2}{p} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x+\dots+x^{p-2}}{1+x^p} dx.$$

b) Établir l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{x(1+x^2+x^4+\dots+x^{2p-4})}{1+x^{2p}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+u+u^2+\dots+u^{p-2})}{1+u^p} du$.

c) En déduire l'égalité : $\Sigma_{2p} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2+x^4+\dots+x^{2p-2}}{1+x^{2p}} dx + \frac{1}{2} \Sigma_p$.

9. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}} dx$

a) Soit A un réel strictement positif et f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont on note f_1 (resp. f_2) la partie réelle (resp. imaginaire).

On rappelle (ou on admet) que $\int_{-A}^A f(t) dt$ désigne la somme $\int_{-A}^A f_1(t) dt + i \int_{-A}^A f_2(t) dt$.

Soit $\alpha \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. Établir l'égalité :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{1}{t - e^{i\alpha}} dt = \begin{cases} i\pi & \text{si } \alpha \in]0, \pi[; \\ -i\pi & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) (i) On note, pour tout $k \in \llbracket 0, 2p-1 \rrbracket$, $z_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2p}\right)$.

Établir, pour tout entier $r \in \llbracket 0, 2p-1 \rrbracket$, l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$, noté L_r , tel que

$$L_r(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq r; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_{2p-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$.

c) Soit $q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

(i) Justifier l'existence de nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2p-1}$ tels que, pour tout réel t ,

$$\frac{t^{2q}}{1+t^{2p}} = \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\lambda_k}{t - z_k}.$$

(ii) Établir l'égalité : $\sum_{k=0}^{2p-1} \lambda_k = 0$.

(iii) Prouver, pour tout $k \in \llbracket 0, 2p-1 \rrbracket$, l'égalité : $\lambda_k = -\frac{z_k^{2q+1}}{2p}$.

d) En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}} dx = -\frac{i\pi}{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp\left(\left[\frac{(2k+1)(2q+1)}{2p}\right] i\pi\right)$.

10. Déterminer la valeur de Σ_4 .

Partie II : Un cas aléatoire

On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes, centrées** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et possédant un moment d'ordre 2.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si, et seulement si, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \geq N \text{ et } n \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| \leq \varepsilon).$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

A. La convergence presque sûre

1. On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_n - S_p| \leq \varepsilon]$.

a) (i) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à $\mathcal{A}$.

(ii) Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)$.

(iii) Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

(iv) Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$ et en déduire que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

2. a) Montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbf{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1.$$

b) En déduire que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

c) Montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0$.

B. Une inégalité

Quand une variable aléatoire U , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, a une espérance on note $\mathbf{E}(U)$ sa valeur.

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$T_N(\omega) = \inf \left\{ p \in \mathbb{N}^*; p > N \quad \text{et} \quad |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon \right\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).

1. a) Soit A un événement. Établir l'égalité : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
 b) Déterminer, pour tout entier naturel N non nul et pour tout entier $p > N$, les valeurs des espérances $\mathbf{E}(S_p - S_N)$ et $\mathbf{E}((S_p - S_N)^2)$ en fonction des moments des Y_k .
2. Exprimer, pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.
3. a) Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \mathbf{E}((S_k - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N = k]})$.
 b) Soit p un entier strictement plus grand que N .
 Justifier, pour tout $k \in [N+1, p]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N) \mathbf{1}_{[T_N = k]}$.
 c) En déduire, pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leq p$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \mathbf{E}((S_p - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N = k]}).$$

- d) Prouver, pour tout entier $p > N$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^p \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \sum_{i=N+1}^p \mathbf{E}(Y_i^2).$$

4. On suppose, de plus, que la série $\sum \mathbf{E}(Y_m^2)$ converge. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

C. Le résultat

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1 . On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par

$$\mathbf{P}([X_1 = -1]) = \mathbf{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{p > N} [|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}].$$

2. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a , on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^n$ mais pas devant $(x - a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a . On dit que f est *ultraplate en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^m$ lorsque x tend vers a , quel que soit l'entier naturel m .

L'objet du problème est l'étude des fonctions plates et de leurs approximations polynomiales. Les quatre parties du sujet sont largement indépendantes, mais les notations de la partie 1 sont utilisées dans les deux parties suivantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a , on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x - a)^n$ lorsque x tend vers a .

1. Soit $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n , la dérivée d'ordre k de f en a est nulle :

$$f \in E_n(a) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = 0.$$

b) Démontrer que la somme $s : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ d'une série entière de rayon de convergence infini est ultraplate en 0 si, et seulement si, s est une fonction constante.

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0

Pour tout $x > 0$, on pose : $b(x) = \exp(-(\ln x)^2)$.

a) Donner l'allure du graphe de b en précisant les coordonnées de ses points d'inflexion.

b) Justifier que b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x > 0, b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2)$$

(on précisera le degré et le coefficient du monôme dominant de B_n).

c) En déduire que la fonction $c : x \mapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0. En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que, pour tout réel a , $E_n(a)$ est une sous-algèbre de l'algèbre E .

b) L'ensemble $E_n(a)$ est-il un idéal de l'anneau commutatif E ?

4. a) Montrer que, si une fonction f est ultraplate en 0, alors la fonction $x \mapsto f(x-a)$ est ultraplate en a .

b) Construire à l'aide de la fonction c définie plus haut une fonction de E ultraplate à la fois en 0, en +1 et en -1.

Partie 2 : interpolations polynomiales avec ajustement de dérivées

1. a) Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$.

2. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \dots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \dots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^p n_k$.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), \dots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p) \right)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

a) Vérifier que Φ est linéaire et vérifier que son noyau est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(a_k) = \alpha_k.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier l'existence d'une unique fonction polynomiale paire H_n de degré inférieur ou égal à $n + 4$, appartenant à $E_n(0) \cap E_1(-1) \cap E_1(+1)$ et telle que $H_n(0) = 0$, $H_n(-1) = H_n(+1) = 1$.

b) Calculer H_n , selon la parité de n .

c) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle ouvert $] -1, +1 [$.

Partie 3 : fonctions génératrices plates en 0

Dans cette partie, on note $(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

On admet que, quelle que soit la série convergente $\sum p_n$ à termes positifs ou nuls, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = p_n.$$

1. Dans cette question, G_X désigne la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une probabilité P .
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction de répartition de X pour que G_X soit plate à l'ordre n en 0.
 - b) Démontrer que G_X est ultraplate en 0 si, et seulement si, $P([X = 0]) = 1$.
2. Dans cette question, $\sum a_n x^n$ désigne une série entière de rayon de convergence infini, dont la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est égale à 1 pour $x = 1$ et dont tous les coefficients a_n sont positifs ou nuls.

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P([X = n]) = a_n.$$

- a) Justifier que X admet un moment à n'importe quel ordre.
 - b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si S est plate à l'ordre n en 0, alors l'espérance de X est supérieure ou égale à $n + 1$. Dans quel cas a-t-on égalité?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et c un réel strictement supérieur à $n + 1$.
 - a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la fonction génératrice G appartient à $E_n(0)$ et vérifie $G'(1) = c$.
On pourra chercher une variable aléatoire ne prenant que deux valeurs entières distinctes.
 - b) Démontrer que la fonction génératrice G d'une telle variable aléatoire vérifie nécessairement l'inégalité :

$$G''(1) \geq c(c-1).$$
 - c) Démontrer que cette inégalité ne peut devenir une égalité que lorsque c est un nombre entier. Quelle est la valeur minimale de $G''(1)$ dans le cas contraire?

Partie 4 : approximations polynomiales

Dans cette partie, on note $\| \cdot \|$ la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions réelles bornées sur le segment $[-1, +1]$.

1. Soit F l'espace vectoriel normé obtenu en munissant de la norme $\| \cdot \|$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $[-1, +1]$.
 - a) L'ensemble des fonctions f de F qui vérifient $f(0) = 0$ est-il une partie fermée de F ?
 - b) Montrer que l'ensemble des fonctions f de F pour lesquelles $f(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 n'est pas une partie fermée de F .

Pour le prouver, on pourra utiliser la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}$.

2. On note T l'application qui, à chaque fonction f de F , associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-1, +1]$ par :

$$\forall x \in [-1, +1], T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- a) Démontrer que T est une application continue de F dans F .
- b) Soit $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note T^n la composée n -ième $T \circ T \circ \dots \circ T$ (n fois T). Démontrer que $T^n(f)$ est l'unique fonction de F nulle en 0 dont la dérivée n -ième est f et dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à n s'annulent en 0.
- c) L'application T est-elle injective? Est-elle surjective?

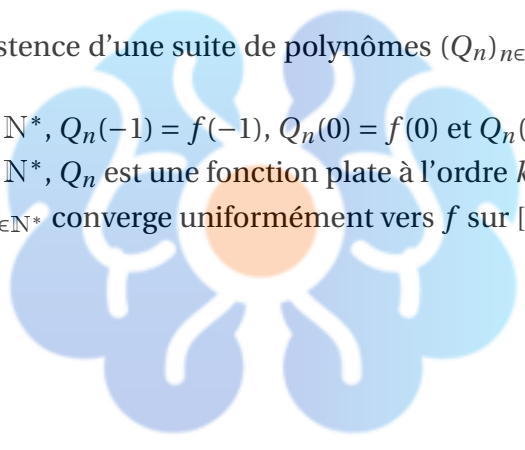
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de F plate d'ordre k en 0.

a) Justifier l'existence d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $f^{(k+3)}$ sur le segment $[-1, +1]$.

b) Démontrer que la suite $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, +1]$ vers une fonction de la forme $f + R$, où R est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $k + 2$.

c) Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(-1) = f(-1)$, $Q_n(0) = f(0)$ et $Q_n(1) = f(1)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est une fonction plate à l'ordre k en 0;
- la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1, +1]$.

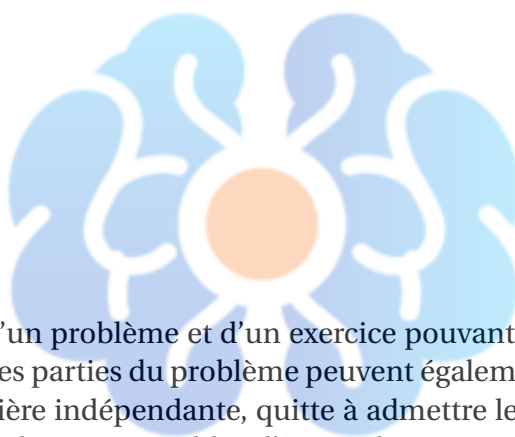


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice pouvant être traités de manière indépendante. Les différentes parties du problème peuvent également, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. Une liste de résultats susceptibles d'être utiles, et pouvant être utilisés sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer, est donnée au début.

La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Rappel de résultats

Ci-après figurent plusieurs résultats que l'on pourra utiliser sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer. Par souci de simplicité, certains énoncés sont donnés dans des cas particuliers, et non pas dans le cadre le plus général possible.

1. **Inégalité triangulaire pour l'espérance** : pour toute variable aléatoire réelle bornée X , on a l'inégalité :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$$

2. **Inégalité pour l'espérance d'une puissance** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X et un nombre réel $h \geq 1$, on a $(\mathbb{E}(|X|))^h \leq \mathbb{E}(|X|^h)$.

3. **Espérance conditionnelle à un événement** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X , et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on a

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)},$$

où $\mathbf{1}_A$ est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A , c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

4. **Décomposition de l'espérance** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X , et un système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable), on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Problème

Un résultat fondamental en théorie des probabilités est le théorème central limite, dont l'une des formulations possibles est la suivante : étant donné une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi, satisfaisant en outre les conditions $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{V}(X_1) = 1$ (où la notation $\mathbb{V}$ désigne la variance), on a la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y, \quad (2)$$

où

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

et où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On rappelle que (2) équivaut au fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (3)$$

Dans ce problème, on se propose notamment d'établir le résultat plus élémentaire suivant : étant donné une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi, satisfaisant en outre les trois conditions

(a) $\mathbb{P}(|X_1| \leq c) = 1$ pour une certaine constante $c > 0$,

(b) $\mathbb{E}(X_1) = 0$,

(c) $\mathbb{V}(X_1) = 1$,

on a, pour tout entier $m \geq 1$, le fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^m\right) = \mathbb{E}(Y^m),$$

où, comme précédemment, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Dans la suite, on utilisera les notations

$$T_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

et

$$M(m) = \mathbb{E}(Y^m).$$

Dans le cadre de ce problème, étant donné une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dira que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ existe lorsqu'il existe un nombre réel I tel que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} f(x) dx = I,$$

et l'on écrira alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I$. (Il s'agit d'une définition simplifiée uniquement destinée à ce problème.)

Partie I – Calcul de $M(m)$

Dans cette partie, on calcule explicitement pour tout entier $m \geq 1$ la valeur de $M(m)$.

Question 1) Que représente la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour une variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$? En déduire l'identité :

$$M(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1. \quad (4)$$

Question 2) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, on a l'identité

$$M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx.$$

Question 3) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $M(2k+1) = 0$.

Question 4) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $M(2k+2) = (2k+1) \cdot M(2k)$.

Indication : On pourra utiliser la formule d'intégration par parties.

Question 5) Dédire de ce qui précède l'identité, valable pour tout $k \geq 0$:

$$M(2k) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}.$$

Partie II – Un résultat sur les suites

Cette partie est consacrée à la preuve d'un résultat général sur les suites, qui est utilisé dans la partie III.

Etant donné une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, un nombre réel $q \geq 0$ et un nombre réel α tels que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{n^q} = \alpha, \quad (5)$$

on va prouver le fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}. \quad (6)$$

Question 6) Montrer que, pour tout nombre réel $q \geq 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^q}{n^{q+1}} = \frac{1}{q+1}.$$

Indication : On pourra d'abord établir que pour tout $1 \leq \ell \leq n-1$, on a un encadrement donné par $\int_{\ell-1}^{\ell} x^q dx \leq \ell^q \leq \int_{\ell}^{\ell+1} x^q dx$, et en déduire un encadrement de $\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^q$.

Question 7) On considère une suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Montrer que pour tout entier $q \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\ell=1}^{n-1} v_{\ell} \cdot \ell^q}{n^{q+1}} = 0.$$

Indication : si n_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|v_n| \leq \epsilon$, utiliser une majoration très simple de $\left| \sum_{\ell=n_0}^{n-1} v_{\ell} \cdot \ell^q \right|$ faisant intervenir $\sum_{\ell=n_0}^{n-1} \ell^q$.

Question 8) En faisant la synthèse des questions précédentes, établir le résultat sur les suites souhaité : la propriété (5) entraîne la propriété (6).

Partie III – Convergence de $\mathbb{E}(T_n^m)$ vers $M(m)$

Dans cette partie, on prouve le fait que, pour tout $m \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n^m) = M(m). \quad (7)$$

On commence par étudier les cas particuliers $m = 1, 2, 3$, avant d'effectuer une preuve dans le cas général.

Question 9) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 1$.

Question 10) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(S_n^2) = n$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 2$.

Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2$, développer cette expression, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(S_{n+1}^2) - \mathbb{E}(S_n^2)$.

Question 11) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(S_n^3) = n\mathbb{E}(X_1^3)$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 3$.

Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^3 = (S_n + X_{n+1})^3$, développer cette expression, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(S_{n+1}^3) - \mathbb{E}(S_n^3)$.

Question 12) On va maintenant prouver par récurrence le fait que, pour tout entier $q \geq 1$, on a la propriété (H_q) définie par

$$(H_q) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n^{2q}) = M(2q).$$

On suit pour cela les étapes indiquées ci-après.

- (i) Vérifier la propriété (H_q) pour $q = 1$.
- (ii) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, on a, pour tout entier $k \leq 2q - 1$, le fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(|S_n|^k)}{n^q} = 0.$$

Indication : On pourra utiliser les points 1 et 2 du rappel de résultats.

- (iii) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(S_{n+1}^{2(q+1)}) - \mathbb{E}(S_n^{2(q+1)})}{n^q} = (2q+1) \cdot (q+1) \cdot M(2q).$$

Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^{2(q+1)} = (S_n + X_{n+1})^{2(q+1)}$, développer cette expression, et penser à utiliser (ii) pour traiter le comportement d'une partie des termes.

- (iv) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, la propriété (H_{q+1}) est également vérifiée.

Indication : Utiliser ce qui précède et les résultats des parties I et II.

Question 13) Montrer que, pour tout entier $q \geq 0$, on a la propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n^{2q+1}) = 0.$$

Indication : Adapter les arguments précédents.

Question 14) Effectuer un bilan des résultats précédents, établissant la validité de la propriété (7) pour tout $m \geq 1$.

Partie IV – Convergence de $\mathbb{E}(f(T_n))$ pour f continue et bornée

Une formulation mathématiquement équivalente de l'énoncé (3) du théorème central limite est que, pour toute fonction **continue et bornée** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a la convergence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(T_n)) = \mathbb{E}(f(Y)), \quad (8)$$

où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette partie est consacrée à établir le fait que la propriété (8) entraîne effectivement la propriété (3).

Question 15) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{E}(g_x(T_n))$, où g_x est définie par

$$g_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

La fonction g_x ainsi définie est-elle bornée? Est-elle continue?

Question 16) Etant donné $\epsilon > 0$, définir une fonction **continue** $f_{x,\epsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on ait :

- $g_x(t) \leq f_{x,\epsilon}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $f_{x,\epsilon}(t) \in [0, 1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $g_x(t) = f_{x,\epsilon}(t)$ pour tout $t \notin]x, x + \epsilon[$.

Question 17) Montrer que, étant donné $x \in \mathbb{R}$, et une variable aléatoire Y suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on doit avoir, pour la fonction $f_{x,\epsilon}$ définie à la question 16), la propriété :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(f_{x,\epsilon}(Y)) = \mathbb{E}(g_x(Y)).$$

Question 18) Dédurre de ce qui précède que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f , alors, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\mathbb{E}(g_x(T_n)) \leq \mathbb{E}(g_x(Y)) + \alpha.$$

Question 19) Adapter le raisonnement des questions 16) à 18) pour établir que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f , alors, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\mathbb{E}(g_x(T_n)) \geq \mathbb{E}(g_x(Y)) - \alpha,$$

où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Question 20) Conclure de ce qui précède le fait que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f , on a la propriété (3).

Partie V – Un petit exemple d'application du théorème central limite

Sur une période d'une année, un assureur prend à sa charge les montants des sinistres affectant une population de 10000 assurés. En modélisant les montants individuels des sinistres associés à chacun des assurés par une famille de variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_{10000}$ indépendantes et de même loi, la somme $Z_1 + \dots + Z_{10000}$ représente donc le montant total à la charge de l'assureur sur une période d'une année.

Question 21) En supposant que les variables Z_i (exprimées en euros) vérifient $\mathbb{E}(Z_i) = 4$ et $\mathbb{V}(Z_i) = 4$, utiliser le théorème central limite (voir (3)) pour proposer une approximation des probabilités suivantes :

$$p_1 = \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_{10000} \geq 40200) \text{ et } p_2 = \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_{10000} \geq 40400).$$

Données : valeurs approchées à $\pm 10^{-3}$ près de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ pour certaines valeurs de x .

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$	0,023	0,067	0,159	0,309	0,5	0,691	0,841	0,933	0,977

Indication : On pourra transformer les variables Z_i en des variables X_i de manière à garantir les conditions $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{V}(X_i) = 1$.

Exercice

On considère une population d'individus évoluant au cours du temps. L'écoulement du temps est représenté par une succession de dates $t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, la date $t = 0$ étant prise comme origine pour l'étude de la population. Un individu présent dans la population à la date t et né à la date $s \leq t$ est considéré comme ayant un âge égal à $t - s$ à la date t . Pour tout entier $t \geq 0$, et tout entier $x \geq 0$, on note $N_x(t)$ le nombre d'individus présents dans la population à la date t et ayant un âge égal à x . On suppose l'existence d'un âge maximal atteignable $x^* \geq 1$, si bien que $N_x(t)$ est automatiquement égal à 0 lorsque $x > x^*$. La **durée de vie** d'un individu est définie comme le nombre total de périodes de temps pendant lesquelles l'individu s'est trouvé en vie. Ainsi, un individu né à la date t_1 , encore en vie à la date $t_2 \geq t_1$, et décédé à la date $t_2 + 1$, a une durée de vie égale à $t_2 - t_1$. Finalement, on note $N(t)$ le nombre **total** (tous âges confondus) d'individus présents dans la population à la date t .

Le processus d'évolution de la population au cours du temps est modélisé de la manière suivante : les nombres $N_0(x)$ pour $x = 0, \dots, x^*$ (composition initiale de la population) sont supposés connus. Ensuite, pour tout $t \geq 0$, étant donné l'évolution de la population jusqu'à la date t , et indépendamment de tous les autres individus de la population, la probabilité pour un individu d'âge x à la date t d'être décédé à la date $t + 1$ est donnée par un nombre $q_x > 0$. On a $q_{x^*} = 1$. Un individu décédé à la date $t + 1$ n'est alors plus considéré comme faisant partie de la population. D'autre part, on suppose que les nombres de nouveaux-nés $N_0(1), N_0(2), \dots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes entre elles, et indépendantes de la survie/non-survie des autres individus présents dans la population.

Question A) Pour $t \geq 0$, exprimer $N(t)$ en fonction de $N_0(t), \dots, N_{x^*}(t)$.

Question B) Etant donné $x \geq 0$, un entier $n \geq 0$, et un entier $t \geq 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}(N_{x+1}(t+1) | N_x(t) = n)$ en fonction de n et de q_x .

Question C) En déduire une expression de $\mathbb{E}(N_{x+1}(t+1))$ en fonction de $\mathbb{E}(N_x(t))$ et de q_x .

Question D) On considère un individu d'âge $y \geq 0$ à la date 0. On note T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie (totale) de cet individu, et S la variable aléatoire correspondant à la durée de vie **restante** de cet individu après la date 0, c'est-à-dire $S = T - y$. Donner une expression explicite de $\mathbb{P}(S = z)$ pour tout $z \geq 0$ en fonction des q_x .

Question E) Déduire du résultat de la question précédente une expression pour $\mathbb{E}(S)$ et pour $\mathbb{V}(S)$.

Question F) On dit que la population est **stationnaire en moyenne** lorsque, pour tout $t \geq 0$, et tout $x = 0, \dots, x^*$, on a $\mathbb{E}(N_x(t+1)) = \mathbb{E}(N_x(t))$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la population soit stationnaire en moyenne est que les équations suivantes soient satisfaites :

(i) pour tout $t \geq 1$, $\mathbb{E}(N_0(t)) = N_0(0)$,

(ii) pour tout $x = 0, \dots, x^* - 1$, on a $(1 - q_x)N_x(0) = N_{x+1}(0)$.

Question G) On suppose que la condition (i) de la question précédente est vérifiée. Montrer que, pour une valeur donnée de $N(0)$ et des q_x , il existe un et un seul jeu de valeurs $N_0(0), \dots, N_0(x^*)$ tel que la population soit stationnaire en moyenne. Donner une expression explicite de ces valeurs de $N_0(0), \dots, N_0(x^*)$, en fonction de $N(0)$ et des q_x .

Question H) On suppose que la population est stationnaire en moyenne. On numérote les individus présents dans la population à la date 0 par $i = 1, \dots, N(0)$, et l'on utilise la notation S_i pour désigner la durée de vie restante (après la date 0) de l'individu numéro i . Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la relation : $N_x(0) = \sum_{i=1}^{N(0)} \mathbb{P}(S_i = x)$.

Question I) Justifier l'interprétation suivante de la relation obtenue en H) : « dans une population stationnaire en moyenne, le nombre moyen d'individus âgés de x années est égal au nombre moyen d'individus auxquels il reste exactement x années à vivre ».

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h



Ce sujet se compose de deux parties distinctes (probabilités et optimisation économique) pouvant être traitées de manière totalement indépendante.

Probabilités

Cette partie compte pour 1/3 de la note

Le problème du collectionneur de vignettes

Une personne collectionne les vignettes qui se trouvent dans les paquets de biscuits qu'elle achète. Une vignette peut appartenir à m types différents, numérotés de 1 à m , où m est un entier ≥ 2 , et l'on suppose que, dans chaque nouveau paquet de biscuits acheté, le type de la vignette se trouvant dans le paquet est tiré uniformément au hasard parmi les m types possibles, indépendamment des vignettes trouvées dans les paquets précédents. On s'intéresse au nombre de paquets qu'il est nécessaire d'acheter pour disposer d'au moins un exemplaire de chacun des m types différents de vignette.

Pour tout $k \geq 0$, on définit la variable aléatoire Z_k comme étant le nombre total de types distincts de vignettes obtenus après l'achat de k paquets de biscuits. (On a donc $Z_0 = 0$.)

On pose $T_0 := 0$, et l'on définit récursivement pour tout $k \geq 1$ la variable

$$T_k = \inf\{n \geq T_{k-1} + 1 \mid Z_n = k\}. \quad (1)$$

Rappels

- Loi géométrique : une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ lorsque, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : étant donné une variable aléatoire X possédant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X) > 0$, on a, pour tout $t > 0$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}.$$

- Probabilité d'une réunion : étant donné n événements $A_1, \dots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n),$$

et

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \alpha_k,$$

avec

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Questions à traiter

- 1) Expliquer à partir de (1) pourquoi T_k correspond bien au nombre minimal de paquets que le collectionneur doit acheter pour disposer de k types différents de vignettes dans sa collection.
- 2) Montrer que les variables aléatoires $(T_k - T_{k-1})_{1 \leq k \leq m}$ sont indépendantes, et que, pour tout $1 \leq k \leq m$, la variable aléatoire $(T_k - T_{k-1})$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{m-k+1}{m}\right)$.
- 3) Montrer que, si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- 4) En déduire l'espérance et la variance de T_m .
- 5) Montrer que, lorsque $m \rightarrow +\infty$, on a $\mathbb{E}(T_m) \sim m \log m$ et $\mathbb{V}(T_m) = O(m^2)$.

6) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_m}{m \log m} - 1\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Indication : utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

7) Pour tout $1 \leq k \leq m$, et tout $n \geq 1$, on définit l'événement A_k^n par

$$A_k^n = \{\text{aucun des } n \text{ premiers paquets ne contient de vignette de type } k\}.$$

Exprimer l'événement $T_m > n$ à partir des événements A_k^n .

8) Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq m$, et tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(A_k^n) = (1 - 1/m)^n$.

9) En déduire que $\mathbb{P}(T_m > n) \leq m(1 - 1/m)^n$.

10) Comment se comporte la borne obtenue à la question précédente lorsque $m \rightarrow +\infty$ et $n = \lceil m \log m + cm \rceil$, où $c \geq 0$, et où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x (c.à.d. l'entier immédiatement supérieur ou égal à x) ?

11) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(T_m > n) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} C_m^j \left(1 - \frac{j}{m}\right)^n, \quad (2)$$

où $C_m^k = \binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial (combinaison de k parmi m).

Indication : Utiliser la formule d'inclusion-exclusion.

12) La fonction génératrice de T_m est définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(T_m = k).$$

Donner une expression explicite de $G(x)$.

Indication : Calculer d'abord la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Optimisation économique

Cette partie compte pour 2/3 de la note

Problème 1

7 points : 2+2+3

Soit une économie produisant un bien i dont les fonctions de demande et d'offre sont respectivement les suivantes : $Q^D = 10 - 3P_i$ et $Q^O = \frac{1}{2}P_i - 2$.

1. Calculez l'élasticité prix de la demande au point d'équilibre. Le producteur a-t-il intérêt à augmenter son prix de vente? Justifiez votre réponse.
2. On suppose à présent que l'Etat impose une taxe à la production de 0,5 euro par produit. Déterminez le nouvel équilibre et la part payée par le consommateur et le producteur. Expliquez.
3. On suppose à présent l'introduction d'un second bien j dans l'économie, dont le prix P_j est fixé à 1 euro. La demande du bien i devient : $Q^D = 10 - 3P_i P_j$ et l'offre reste inchangée. Déterminez le nouvel équilibre de marché et calculez l'élasticité croisée en ce point. Quelle est la nature des biens i et j ?

Problème 2

7 points : 2+2+3

Soit un producteur dont la technologie exclusivement basée sur la main d'œuvre est donnée par la fonction de production suivante : $Y = \sqrt{L}$, Y désignant les quantités produites et L , le nombre d'ouvriers.

1. Déterminez les productivités marginales et moyennes pour $L = 30$ et $L = 25$.
2. Si l'on suppose que le prix de vente du bien est $P = 20$ et la taux de salaire de l'ouvrier $w = 2$, l'entreprise a-t-elle intérêt à embaucher 25 ouvriers, 30 ouvriers? Justifiez votre réponse.
3. Suite à un progrès technique, on suppose à présent que l'entreprise se mécanise. La fonction de production devient ainsi : $Y = \sqrt{L}\sqrt{K}$, Y désignant les quantités produites, L le niveau d'emploi et K de capital. L'entreprise utilise 36 machines et 49 ouvriers. Le coût de l'ouvrier (w) est à présent de 1, celui du capital (i) de 2, et l'entreprise dispose d'une somme totale de 112. Son choix est-il optimal? Justifiez votre réponse.

Problème 3

6 points : 1+2+3

On considère un marché où deux firmes se font concurrence et produisent des biens verticalement différenciés x_i ($i = 1, 2$) avec des coûts de production égaux à zéro. On suppose que la qualité du bien 2 est supérieure à celle du bien 1 de telle sorte que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Les consommateurs sont uniformément distribués sur un intervalle $[0, 1]$ et l'utilité du consommateur t achetant le bien x_i au prix p_i est donnée par $u_i = t \cdot x_i - p_i$.

1. Représentez graphiquement (dans un référentiel $[t, u_i]$) les fonctions d'utilité pour les deux biens.
2. Déterminez les demandes adressées à chacune des deux firmes.
3. Déterminez les prix, demandes et profits optimaux lorsque les firmes se concurrencent en prix. Qu'en concluez-vous?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Tout pouvoir politique obtient finalement la subordination par le moyen de la théâtralité, plus apparente dans certaines sociétés que dans d'autres; parce que leurs différences de civilisation les rendent à des degrés inégaux « spectaculaires ». Il représente, dans toutes les acceptions du terme, la société qu'il gouverne. Il se montre comme son émanation, il en assure la présentation à l'extérieur, il lui renvoie une image d'elle-même idéalisée et donc acceptable. Mais la représentation implique la séparation, la distance; elle établit des hiérarchies; elle change ceux qui en ont la charge. Et ces derniers dominent la société tout en lui donnant un spectacle d'elle-même où elle doit (ou devrait) se trouver magnifiée. Les manifestations du pouvoir s'accommodent mal de la simplicité. La grandeur ou l'ostentation, le décorum ou le faste, le cérémonial ou le protocole les caractérisent généralement.

Le pouvoir utilise d'ailleurs des moyens spectaculaires pour marquer sa prise en charge de l'histoire (commémorations), exposer les valeurs qu'il exalte (manifestations) et affirmer sa force (exécutions). Ce dernier aspect est le plus dramatique, non seulement parce qu'il met en activité la violence des institutions, mais aussi parce qu'il sanctionne publiquement la transgression des interdits que la société et son pouvoir ont décrété inviolables. La place de Grève a été la scène où se produit une représentation sacrée, sacrificielle, de la force. Et qui a une valeur exemplaire pour le public y assistant et y participant. Les grands procès politiques, dans leur déroulement, dans la présentation qui en est faite, portent la dramatisation à son plus fort degré d'intensité. [...] Ils transforment pour un temps la scène politique en un théâtre tragique, puisque l'enjeu du drame est la mort physique ou morale de ceux que le pouvoir accuse au nom de la sauvegarde de la forme et des valeurs suprêmes de la société.

La puissance politique n'apparaît pas **uniquement** lors des circonstances exceptionnelles. Elle se veut inscrite dans la **durée**, **immortalisée** dans une matière impérissable, exprimée dans des créations manifestant sa « personnalité » et son éclat. Elle conduit une politique des lieux et des œuvres monumentales. La monarchie louis-quatorzienne se montre, se dit, se glorifie dans le château de Versailles qui se construit et dans l'opéra qui se constitue comme drame lyrique. Chaque « règne », même **républicain**, **marque d'une manière nouvelle** un territoire, une cité, un espace public. Il aménage, modifie et organise, selon les exigences des rapports économiques et sociaux dont il est le gardien, mais aussi afin de ne pas être effacé par l'oubli et de créer les conditions de ses commémorations futures. Dans les illusions que produit le pouvoir se trouve, au centre, celle d'avoir la capacité d'échapper aux assauts du temps. [...]

Toute ville au cours de son histoire s'enrichit de ces lieux auxquels peut être attribuée une fonction symbolique, qu'ils la reçoivent par destination ou qu'ils la tiennent de l'événement. Ils sont les théâtres où la société « officielle » se produit, et ceux, à l'inverse, où la protestation populaire se « manifeste ». La topographie symbolique d'une grande cité est une topographie sociale et politique; la Bastille désigne des composantes sociologiques, des classes et des activités, en même temps que l'espace ouvert aux démonstrations de revendication ou de révolte. Certains lieux expriment le pouvoir, imposent sa sacralité, mieux que ne pourrait le faire toute explication. La basilique Saint-Pierre de Rome, mise en valeur par la place à colonnade conçue par Le Bernin, est un décor destiné à provoquer vénération et crainte. La liturgie y devient, participation et spectacle, une consécration de la toute-puissance de Dieu et aussi de celle du pontife souverain, naguère maître d'un Empire. [...]

Aujourd'hui, le pouvoir se manifeste néanmoins sur trois terrains principaux. Celui des activités rationnelles où siègent les compétents et les gestionnaires, les gens qui ont la charge du pouvoir-faire humain et de la solution technique des problèmes; ils érigent l'organisation, l'efficacité, le résultat – qu'il soit profit ou tout autre acquis – en objets de leur foi. Celui des activités médiatisées où le réel se construit par l'information, la parole, l'image et la dramatisation; il donne l'existence par la visibilité, il hiérarchise selon les degrés du vedettariat, il accorde moins d'importance à la confrontation poussée des points de vue, des idées, des projets qu'à leur traduction spectaculaire. L'affrontement, l'*agôn*, n'occupe plus la scène sacrée et civique comme dans le théâtre antique, il se produit par spectacles et contre-spectacles reçus sur ces multiples scènes que sont les écrans; ces petits espaces visuels où les pouvoirs, quels qu'ils soient, se font et se maintiennent par la présence, se déforcent et s'effacent par l'absence. Le troisième terrain, le plus difficile à préserver et à occuper durablement, est celui où le politique se transfigure en « mystique », selon le mot de Péguy; le mythe, le symbole, le rite, les valeurs collectives les plus élevées et les émotions qui les servent y ont pour fonction d'unir en créant (ou en tentant de créer) une solidarité supérieure et généralisée, de mobiliser en orientant et fortifiant l'action des sujets et des groupes auxquels ils appartiennent. C'est sur ce terrain que se situe, exhaussée, distante, la figure du souverain, du *Suprême*.

Aucune société, serait-elle la plus technicisée, la plus soumise aux gouvernements des experts, ou la plus médiatisée et régie par les nouveaux constructeurs de la réalité, ne pourrait faire l'économie de ce pouvoir-là. Une tendance à un réinvestissement du symbolique, de l'imaginaire et des affects dans le champ politique se manifeste périodiquement; c'est l'expression d'une nécessité qui n'a jamais cessé de s'imposer au cours de la longue histoire humaine, indifférente à tous les bouleversements. Dans le monde présent, ouvert aux changements rapides et cumulés, aux incertitudes et aux inquiétudes qui entretiennent la *conscience de désordre*, se renforce la demande d'une image du pouvoir suprême crédible, parce qu'elle serait ajustée à ce temps et en montrerait le sens, parce qu'elle éprouverait le mouvement sans le subir, parce qu'elle traduirait dans le langage de l'idéal la réalité contemporaine. On peut dire, sans trop d'excès, que le temps du refaçonnage des souverains est venu. Il y a une attente, qui permet aux princes, héritiers du passé, de reparaître sur plusieurs scènes politiques contemporaines et qui ravive une nostalgie des monarchies, déjà exploitées par le commerce de l'audiovisuel et par certains magazines spécialisés; une attente qui rend plus facile la transformation des régimes démocratiques en républiques d'aspect monarchique ou qui, à plus hauts risques, pare les leaders populistes et autocratiques des vieux habits de la souveraineté.

G. BALANDIER, *Le Pouvoir sur scènes*, 1980.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The real danger of Brexit

Feb 27th 2016 | The Economist

The battle is joined, at last. David Cameron has called a referendum on Britain's membership of the European Union for June 23rd, promising to campaign hard to stay in. What began as a gambit to hold together his divided Tory party is turning into an alarmingly close contest. Betting markets put the odds that Britons opt to leave at two-to-one; some polls suggest the voters are evenly split; several cabinet ministers are campaigning for Brexit. There is a real chance that in four months' time Britain could be casting off from Europe's shores.

That would be grave news—and not just for Britain. A vote to leave would damage the economy, certainly in the short term and probably in the long run. (As financial markets woke up to the prospect, the pound this week fell to its lowest level against the dollar since 2009.) It would imperil Britain's security, when threats from terrorists and foreign powers are at their most severe in years. And far from reclaiming sovereignty, Britons would be forgoing clout, by giving up membership of a powerful club whose actions they can influence better from within than without. Those outside Britain marvelling at this proposed act of self-harm should worry for themselves, too. Brexit would deal a heavy blow to Europe, a continent already on the ropes. It would uncouple the world's fifth-largest economy from its biggest market, and unmoor the fifth-largest defence spender from its allies. Poorer, less secure and disunited, the new EU would be weaker; the West, reliant on the balancing forces of America and Europe, would be enfeebled, too.

The Brexiters' case is that Britain is held back by Europe: unshackled, it could soar as an open economy that continued to trade with the EU and all round the world. That is possible in theory, but it is not how things would work in practice. At a minimum, the EU would allow full access to its single market only in return for adherence to rules that Eurosceptics are keen to jettison. If Norway and Switzerland (whose arrangements with the EU many Brexiters idolise) are a guide, the union would also demand the free movement of people and a big payment to its budget before allowing unfettered access to the market.

Worse, the EU would have a strong incentive to impose a harsh settlement to discourage other countries from leaving. The Brexit camp's claim that Europe needs Britain more than the other way round is fanciful: the EU takes almost half Britain's exports, whereas Britain takes less than 10% of the EU's; and the British trade deficit is mostly with the Germans and Spanish, not with the other 25 countries that would have to agree on a new trade deal.

To some Eurosceptics these hardships would be worth it if they meant reclaiming sovereignty from Europe, whose bureaucrats and judges interfere with everything from bankers' bonuses to working-time limits. Yet the gain would be partly illusory. In a globalised world, power is necessarily pooled and traded: Britain gives up sovereignty in exchange for clout through its memberships of NATO, the IMF and countless other power-sharing, rule-setting institutions. Signing up to treaties on trade, nuclear power or the environment involves submitting to regulations set jointly with foreigners, in return for greater gains. Britain outside the EU would be on the sidelines: notionally independent from, but in fact still constrained by, rules it would have no role in formulating. It would be a purer but rather powerless sort of sovereignty.

One exception is immigration, the area over which many Eurosceptics most long for control. Half of Britain's migrants come from the EU, and there is little the government can do to

stop them. If Britain left the union, it could. But doing so would have a double cost. Gaining the right to stop immigration from the EU would almost certainly mean losing full access to the single market. And reducing the numbers of immigrants would hurt Britain's businesses and public services, which rely on French bankers, Bulgarian builders and Italian doctors.

The longer-term costs would go beyond economics. Brexit might well break up the United Kingdom itself. Scotland, more Europhile than England, is again agitating for a divorce; if Britain decides to leave Europe, then the Scots may at last have a point. Brexit could also dangerously unsettle Northern Ireland, where the peace process over two decades has depended on the fact that both Ireland and Britain are members of the EU. The Irish government is among the most vocal foreign supporters of the campaign for Britain to stay in.

Ireland is not the only country that would suffer. European leaders know Brexit would weaken a club already in deep trouble over such issues as migration and the euro crisis. And Europe would be poorer without Britain's voice: more dominated by Germany; and, surely, less liberal, more protectionist and more inward-looking. Europe's links to America would become more tenuous. Above all, the loss of its biggest military power and most significant foreign-policy actor would seriously weaken the EU in the world.

The EU has become an increasingly important part of the West's foreign and security policy, whether it concerns a nuclear deal with Iran, the threat of Islamist terrorism or the imposition of sanctions against Russia. Without Britain, it would be harder for the EU to pull its global weight—a big loss to the West in a troubled neighbourhood, from Russia through Syria to north Africa. It is little wonder that Russia's Vladimir Putin is keen on Brexit—and that America's Barack Obama is not. It would be shortsighted for Eurosceptics to be indifferent to this. A weakened Europe would be unambiguously bad for Britain, whose geography, unlike its politics, is fixed.

A lot thus rests on the tight race now under way. For those who believe, as this newspaper does, in free trade and freedom of movement, the benefits to Britain of its membership of the EU have never been in much doubt. What more sceptical sorts must now recognise is that Brexit would also weaken Europe and the West. The stakes in Mr Cameron's great gamble are high; should he fail, the losses would be widely felt.

2 Translate the following text into French

San Francisco first U.S. city to require businesses to offer new parents paid leave

By Danielle Paquette April 6 at 7:49 PM The Washington Post

A week after Vanessa Harlin gave birth, she returned to work but could not sit down. The staples in her stomach would tear.

Harlin, an assistant bank manager at the time, had used up her sick days that year to care for her three older boys. So, as her mother watched baby Chloe, she strove to make rent on their San Francisco apartment.

Harlin, 36, was among the roughly 88 percent of American private-sector workers who receive no paid family leave from employers, a benefit generally reserved in the United States for high earners and those in the perk-friendly technology sector. She was thrilled to learn that this week, San Francisco became the first city in the country to require businesses to offer new parents fully paid leave.

The measure, unanimously approved Tuesday by the city's Board of Supervisors, comes as momentum grows nationwide for workplace policies that better support families — an effort pushed by both workers' rights activists and Silicon Valley juggernauts.

Twitter, for example, this week became the latest company in a string of high-profile firms, including Netflix and Spotify, to expand its paid-leave policy, offering new parents up to 20 weeks off.

The San Francisco provision gives mothers and fathers six weeks of time off without losing a penny of income. The help, expected to take effect next year, would also be available to parents who adopt.

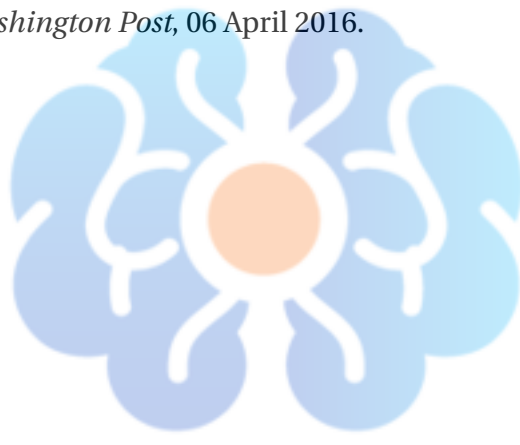
Under federal law, most American employers must offer at least 12 weeks of leave. None of it, however, has to be paid.

California, Rhode Island and New Jersey offer new parents partial pay, using employee-funded programs. New York joined their ranks last month, approving up to 12 weeks of partial coverage.

Lawmakers in at least 18 other states, meanwhile, are considering some form of paid-family-leave policy. The District could soon outpace San Francisco in benefit generosity, with council members discussing legislation that would provide new parents with 16 weeks of paid leave, funded through a new employee tax.

Supporters say the action will chip away at inequality, since America's low-wage workers are among the least likely to have access to any paid time off. Those without savings can slip into poverty.

Adapted from *The Washington Post*, 06 April 2016.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique. Mathématiques. Option A

Partie I. Etude des espaces $E_n(a)$

1) a) Soient $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en a un développement limité d'ordre n , son développement de TAYLOR-YOUNG :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité,

$$f \in E_n(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = 0.$$

b) La somme d'une série entière de rayon infini est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc un élément de E . De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$. D'après la question précédente,

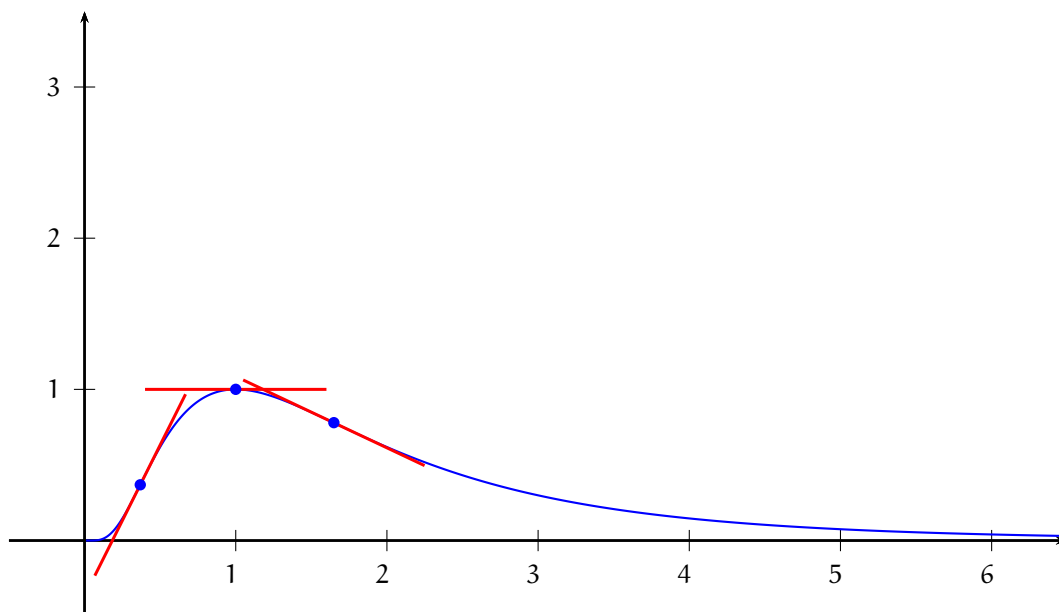
$$\begin{aligned} s \text{ ultraplate en } 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, s \in E_n(0) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{s^{(k)}(0)}{k!} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, s(x) = a_0 \Leftrightarrow s \text{ est constante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) a) La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction b est strictement croissante sur $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. La fonction b admet un maximum en 1 égal à $b(1) = 1$. La fonction b est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $b'(x) = -\frac{2 \ln x}{x} e^{-(\ln x)^2}$ puis

$$b''(x) = \left(\left(-\frac{2 \ln x}{x} \right)^2 - 2 \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) \right) e^{-(\ln x)^2} = \frac{2}{x^2} (2 \ln^2 x + \ln x - 1) e^{-(\ln x)^2}.$$

Pour $x > 0$, $b''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln^2 x + \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x \in \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \Leftrightarrow x \in \{e^{-1}, e^{1/2}\}$. De plus, en e^{-1} et en $e^{1/2}$, b'' s'annule en changeant de signe. Donc, le graphe de b admet deux points d'inflexion à savoir les points (e^{-1}, e^{-1}) et $(e^{1/2}, e^{-1/4})$.

Graphe de la fonction b .



b) La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $g : y \mapsto -y^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $h : z \mapsto e^z$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $b = h \circ g \circ f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} e^{-(\ln x)^2}.$$

• D'après la question précédente, le résultat est vrai pour $n = 1$ avec $B_1 = -2X \in \mathbb{R}[X]$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat pour n . Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} b^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{(B'_n(\ln x))/x}{x^n} - n \frac{B_n(\ln x)}{x^{n+1}} + \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \left(-2 \frac{\ln x}{x} \right) \right) e^{-(\ln x)^2} \\ &= \frac{B'_n(\ln x) - (n+2 \ln x) B_n(\ln x)}{x^{n+1}} e^{-(\ln x)^2} = \frac{B_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}} e^{-(\ln x)^2}. \end{aligned}$$

avec $B_{n+1} = B'_n - (2X + n)B_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} e^{-(\ln x)^2}.$$

c) Par parité, la fonction c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $c^{(n)}(0) = 0$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} c(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = c(0)$. Le résultat est vrai quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons le résultat pour n . D'après un théorème de croissances comparées,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} c^{(n+1)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{B_{n+1}(\ln |x|)}{x^{n+1}} e^{-(\ln |x|)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{B_{n+1}(-\sqrt{-X})}{(\pm e^{-\sqrt{-X}})^{n+1}} e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pm B_{n+1}(-\sqrt{-X}) e^{x+(n+1)\sqrt{-X}} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $c \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C^{n+1}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $c^{(n+1)} = (c^{(n)})'$ a une limite réelle en 0 à savoir 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, c est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n+1$ fois dérivable en 0 avec $c^{(n+1)}(0) = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $c^{(n)}(0) = 0$.

Ainsi, la fonction c est un élément de E , ultraplate en 0.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si c est plate en a , alors $c'(a) = 0$ puis $b'(|a|) = 0$ puis $a \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, si $a \in \{-1, 1\}$, c' s'annule en a et c'' ne s'annule pas en a d'après la question a). Donc, la fonction c est plate en 1 et -1 à l'ordre 1 et n'est plate en aucun autre réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction constante 1 est un élément de $E_n(a)$ d'après la question 1.b). Ensuite, si f et g sont deux éléments de $E_n(a)$ et (λ, μ) est un couple de réels,

$$(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a)) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$$

et donc $\lambda f + \mu g$ est un élément de $E_n(a)$. De même,

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) \underset{x \rightarrow a}{=} (f(a) + o((x-a)^n))(g(a) + o((x-a)^n)) - f(a)g(a) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$$

et donc fg est un élément de $E_n(a)$. Ceci montre que $E_n(a)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(E, +, \cdot, \times)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto 1 + (x-a)^{n+1}$ est dans $E_n(a)$. Soit $g : 1 + (x-a)$. $f(a)g(a) = 1$ puis

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (1 + (x-a)^{n+1})(1 + (x-a)) - 1 = (x-a) + (x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+2} \underset{x \rightarrow a}{\sim} x-a,$$

et donc $fg \notin E_n(a)$. Par suite, $E_n(a)$ n'est jamais un idéal de l'anneau E .

4) a) Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 , ultraplate en 0 . Soit a un réel non nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x - a)$. g est définie sur un voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(x) = f(x - a) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n).$$

Donc, g est ultraplate en a .

b) Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = c(x - 1)c(x)c(x + 1)$. d est une fonction élément de E qui est ultraplate en $-1, 0$ et 1 d'après la question 4.a) (et car de plus $d(-1) = d(0) = d(1) = 0$).

Partie II. Interpolations polynomiales avec ajustement des dérivées

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si P_n est un élément de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n \in E_n(a)$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_n^{(k)}(0) = 0$ puis 0 est racine de P_n d'ordre au moins $n + 1$. Donc, il existe deux réels a et b tels que $P_n = X^{n+1}(aX + b)$. Puis

$$\begin{aligned} P_n(1) = 1 \text{ et } P_n \in E_1(1) &\Rightarrow P_n(1) = 1 \text{ et } P_n'(1) = 0 \Rightarrow a + b = 1 \text{ et } (n + 1)(a + b) + a = 0 \\ &\Rightarrow a = -(n + 1) \text{ et } b = n + 2 \\ &\Rightarrow P_n = X^{n+1}(-(n + 1)X + (n + 2)). \end{aligned}$$

Réciproquement, si $P_n = X^{n+1}(-(n + 1)X + (n + 2))$, alors $P_n(0) = 0$, $P_n(x) - P_n(0) = P_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$, $P_n(1) = 1$ et $P_n'(1) = 0$ de sorte que $P_n(x) - P_n(1) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(x - 1)$. Donc, P_n convient.

b) Soit $x \in [0, 1]$.

- Si $x = 1$, $P_n(x) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- Si $x \in [0, 1[$, $P_n(x) = x^{n+1}(-(n + 1)x + (n + 2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Donc, la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases}$.

Puisque chaque fonction P_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[0, 1]$ et que la fonction limite f n'est pas continue sur $[0, 1]$ car discontinue en 1 , la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$ ne peut pas être uniforme. Donc, la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction f .

2) a) Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P^{(0)}(a_1) + \mu Q^{(0)}(a_1), \dots, \lambda P^{(n_1)}(a_1) + \mu Q^{(n_1)}(a_1), \dots, \\ &\quad \lambda P^{(0)}(a_p) + \mu Q^{(0)}(a_p), \dots, \lambda P^{(n_p)}(a_p) + \mu Q^{(n_p)}(a_p)) \\ &= \lambda (P^{(0)}(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), \dots, P^{(0)}(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p)) \\ &\quad + \mu (Q^{(0)}(a_1), \dots, Q^{(n_1)}(a_1), \dots, Q^{(0)}(a_p), \dots, Q^{(n_p)}(a_p)) \\ &= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q). \end{aligned}$$

Donc, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R}^{m+1})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\Phi) &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n_k \rrbracket, P^{(i)}(a_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k \text{ racine de } P \text{ d'ordre au moins } n_k + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] / P = Q \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{n_k + 1}. \end{aligned}$$

Donc, si on pose $A = \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{n_k + 1}$, alors $\text{Ker}(\Phi) = A\mathbb{R}[X]$. On note que $\deg(A) = \sum_{k=1}^p (n_k + 1) = p + \sum_{k=1}^p n_k = m + 1$.

Vérifions alors que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] \oplus \text{Ker}(\Phi)$.

• Soit $P \in \mathbb{R}_m[X] \cap \text{Ker}(\Phi)$. Donc, $\deg(P) \leq m$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QA$. Si $Q \neq 0$, $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(A) \geq \deg(A) = m + 1$ ce qui est faux. Donc, $Q = 0$ puis $P = 0$. Ceci montre que $\mathbb{R}_m[X] \cap \text{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La division euclidienne de P par A fournit deux polynômes Q et R tels que $P = AQ + R$ et $\deg(R) \leq \deg(A) - 1 = m$. Le polynôme AQ est dans $\text{Ker}(\Phi)$ et le polynôme R est dans $\mathbb{R}_m[X]$. On a montré que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ est somme d'un élément de $\mathbb{R}_m[X]$ et d'un élément de $\text{Ker}(\Phi)$ et donc que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] + \text{Ker}(\Phi)$.

Finalement, $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] \oplus \text{Ker}(\Phi)$.

b) On en déduit que la restriction Φ_m de Φ à $\mathbb{R}_m[X]$ est une application linéaire injective sur $\mathbb{R}_m[X]$ et donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$ car $\dim(\mathbb{R}_m[X]) = \dim(\mathbb{R}^{m+1}) = m + 1 < +\infty$.

Maintenant, si P est un élément de $\mathbb{R}_m[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k) &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k \text{ racine d'ordre au moins } n_k \text{ de } P - P(a_k) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n_k \rrbracket, P^{(i)}(a_k) = 0. \end{aligned}$$

Soit alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $P \in \mathbb{R}_m[X]$.

$$P \in \bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k) \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(a_k) = \alpha_k \Leftrightarrow \Phi_m(P) = (\alpha_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, \dots, \alpha_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_p}).$$

Puisque Φ_m est un isomorphisme, il existe un et un seul tel polynôme.

3) a) Ici, $m = (3 - 1) + n + 1 + 1 = n + 4$. D'après la question précédente, il existe un polynôme H_n et un seul, élément de $\mathbb{R}_{n+4}[X]$ tel que $H_n \in E_n(0) \cap E_1(1) \cap E_1(-1)$ et $H_n(0) = 0$ et $H_n(1) = H_n(-1) = 1$.

Le polynôme $H_n(-X)$ vérifie exactement les mêmes conditions et donc, par unicité, $H_n(-X) = H_n(X)$ ou encore, le polynôme H_n est pair.

b) Nécessairement, puisque $H_n(0) = 0$, que $H_n \in E_n(0)$ et que $\deg(X_n) \leq n + 4$, il existe quatre réels a, b, c et d tels que $H_n = X^{n+1}(aX^3 + bX^2 + cX + d)$. H_n doit être pair.

• Supposons n pair. Posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. $X^{n+1} = X^{2p+1}$ étant un polynôme impair, il doit en être de même du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donc, $b = d = 0$.

La condition $H_{2p}(1) = 1$ fournit $a + c = 1$ et donc $H_{2p} = X^{2p+1}(aX^3 + (1 - a)X)$. Mais alors

$$H'_{2p} = (2p + 1)X^{2p}(aX^3 + (1 - a)X) + X^{2p+1}(3aX^2 + 1 - a)$$

puis

$$H'_{2p}(1) = 0 \Leftrightarrow (2p + 1) + (3a + 1 - a) = 0 \Leftrightarrow a = -(p + 1).$$

Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, H_{2p} = X^{2p+1}(-(p + 1)X^3 + (p + 2)X) = X^{2p+2}(-(p + 1)X^2 + (p + 2)).$$

• Supposons n impair. Posons $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. $X^{n+1} = X^{2p+2}$ étant un polynôme pair, il doit en être de même du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donc, $a = c = 0$.

La condition $H_{2p+1}(1) = 1$ fournit $b + d = 1$ et donc $H_{2p+1} = X^{2p+2}(bX^2 + (1 - b))$. Mais alors

$$H'_{2p+1} = (2p + 2)X^{2p+1}(bX^2 + (1 - b)) + X^{2p+2}(2bX)$$

puis

$$H'_{2p+1}(1) = 0 \Leftrightarrow (2p + 2) + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -(p + 1).$$

Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}, H_{2p+1} = X^{2p+2}(-(p + 1)X^2 + (p + 2)).$$

On note que $H_{2p+1} = H_{2p}$.

c) Soit $x \in]-1, 1[$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$H_{2p}(x) = x^{2p+2}(-(p + 1)x^2 + (p + 2)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } H_{2p+1}(x) = x^{2p+2}(-(p + 1)x^2 + (p + 2)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $H_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $] -1, 1[$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $x_p = \sqrt{1 - \frac{1}{p+1}} \in] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} H_{2p}(x_p) &= \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} \left(-(p+1) \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) + (p+2)\right) = 2 \left(\frac{p}{p+1}\right)^{p+1} \\ &= 2 \left(\frac{p+1}{p}\right)^{-(p+1)} = 2 \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-(p+1)} = 2e^{-(p+1) \ln(1 + \frac{1}{p})} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{=} 2e^{-(p+1)(\frac{1}{p} + o(\frac{1}{p}))} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} 2e^{-1+o(1)}. \end{aligned}$$

Donc, $H_{2p}(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{2}{e}$ et en particulier, $H_{2p}(x_p)$ ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite de fonctions $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $] -1, 1[$.

Partie III. Fonctions génératrices plates en 0

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. G_X est plate à l'ordre n en 0 si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = 0$ et $P(X = n+1) \neq 0$. Ceci est équivalent au fait que pour tout x réel de $[0, n+1[$, $P(X \leq x) = P(X = 0)$ et $P(X \leq n+1) > P(X = 0)$. En résumé, G_X est plate à l'ordre n en 0 si et seulement si la fonction de répartition de X est constante sur $[0, n+1[$ et pas sur $[0, n+1]$.

b) D'après la question 1.b) de la partie I, G_X est ultraplate en 0 si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = 0$. Ceci équivaut $P(X = 0) = 1$.

2) a) La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Donc, ici G_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, G_X est dérivable à tout ordre en 1 et on sait alors que la variable aléatoire X admet un moment à n'importe quel ordre.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons S plate à l'ordre n en 0. Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = 0$ et $P(X = n+1) \neq 0$ puis

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \geq (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = (n+1) \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = (n+1).$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si pour tout $k \geq n+2$, $P(X = k) = 0$ ce qui équivaut à $P(X = n+1) = 1$.

3) a) Soit $m = [c] + 1$ (où $[\]$ désigne la partie entière). c est un élément de $]n+1, m[$. Donc il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $c = (1 - \lambda)(n+1) + \lambda m$ (à savoir $\lambda = \frac{c - (n+1)}{m - (n+1)}$). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P(X = n+1) = 1 - \lambda$, $P(X = m) = \lambda$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{n+1, m\}$, $P(X = k) = 0$. G_X est dans $E_n(0)$ et

$$E(X) = (n+1)P(X = n+1) + mP(X = m) = (1 - \lambda)(n+1) + \lambda m = c.$$

b) Par hypothèse, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = 0$ et $c = G'_X(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = E(X)$. D'après le théorème de

transfert, $G''_X(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k(k-1)P(X = k) = E(X(X-1))$ puis

$$G''_X(1) - c(c-1) = E(X(X-1)) - E(X)(E(X)-1) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2) \geq 0,$$

et donc $G''_X(1) \geq c(c-1)$.

c)

$$G''_X(1) = c(c-1) \Rightarrow E((X - E(X))^2) = 0 \Rightarrow E((X - c)^2) = 0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k - c)^2 P(X = k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \geq n+1, (k - c)^2 P(X = k) = 0$$

$$\Rightarrow \exists k \geq n+1 / c = k \text{ (car l'une au moins des probabilités } P(X = k) \text{ n'est pas nulle)}$$

$$\Rightarrow c \in \mathbb{N} \text{ (et } c > n+1).$$

Donc, si $G''_X(1) = c(c-1)$, c est nécessairement un entier.

Supposons maintenant que $c \notin \mathbb{N}$ (et $c > n + 1$).

Partie IV. Approximations polynomiales

1) a) Soit $G = \{f \in F / f(0) = 0\}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers une certaine fonction f appartenant à F . En particulier, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction f et en particulier, $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$. Donc, $f \in G$.

Ainsi, toute suite convergente d'éléments de G converge dans G et donc G est un fermé de F .

b) Soit $H = \{f \in F / f(x) = o(x)\}$. (L'indication fournie est mauvaise car la suite de fonctions proposée converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto |x|$ qui n'est pas de classe C^∞ sur $[-1, 1]$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, posons $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$. Chaque f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et vérifie $f_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} nx^3$ et en particulier, $f_n(x) = o(x)$. Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de H .

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto x$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^3}{1 + nx^2} - x \right| = \frac{|x|}{1 + nx^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1, 1]$, posons $g_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$. g_n est impaire. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$g'_n(x) = \frac{(1 + nx^2) - x(2nx)}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

g_n est positive sur $[0, 1]$, impaire, croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$. Donc, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|g_n(x)| \leq g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ et de plus, f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de H qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers un élément f de F . Mais, f n'est pas négligeable devant x quand x tend vers 0 et f n'est donc pas un élément de H . Ceci montre que H n'est pas un fermé de F .

2) a) Soit $f \in F$. f est continue sur $[-1, 1]$ et donc $T(f)$ est définie et de classe C^1 sur $[-1, 1]$ puis $(T(f))' = f$. Mais alors, $T(f)$ est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ ou encore $T(f) \in F$. Ceci montre que T est une application de F dans F .

Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout x de $[-1, 1]$,

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_0^x f(t) dt + \mu \int_0^x g(t) dt = (\lambda T(f) + \mu T(g))(x),$$

et donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$. On a montré que T est un endomorphisme de F .

On sait alors que pour montrer la continuité de T , il suffit de fournir un réel $k \geq 0$ tel que, pour tout f de F , $\|T(f)\| \leq k\|f\|$. Soit $f \in F$. Pour tout x de $[0, 1]$,

$$|Tf(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\| dt = x\|f\| \leq \|f\|.$$

De même, si $x \in [-1, 0]$,

$$|Tf(x)| \leq \int_x^0 |f(t)| dt \leq -x\|f\| \leq \|f\|.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|Tf(x)| \leq \|f\|$ et finalement, $\|T(f)\| \leq \|f\|$.

On a montré que pour tout $f \in F$, $\|T(f)\| \leq \|f\|$ et donc, T est continue sur l'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$.

b) Soient $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $T^n(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $(T^n(f))' = T^{n-1}(f)$ puis par récurrence, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$. En particulier, $(T^n(f))^{(n)} = f$. D'autre part, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(T^n(f))^{(k)}(0) = T^{n-k}(f)(0) = 0$ car $n-k > 0$. Donc, $T^n(f)$ est une fonction dont la dérivée n -ème est f et dont les dérivées d'ordre au plus $n-1$ s'annulent en 0.

Si g est une telle fonction, la dérivée n -ème de $T^n(f) - g$ est nulle et donc il existe un polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que $T^n(f) - g = P$. Les dérivées successives de P en 0 jusqu'à l'ordre $n - 1$, sont nulles et donc tous les coefficients de P sont nuls ($\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0$) et donc $P = 0$ puis $g = T^n(f)$. Ceci montre $T^n(f)$ est l'unique solution du problème posé.

c) Soit $f \in F$.

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(T) &\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \int_0^x f(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], f(x) = 0 \text{ (en dérivant l'égalité précédente)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ puis T est injective.

Un élément de $\text{Im}(T)$ s'annule en 0 et donc par exemple, la fonction $x \mapsto 1$ est un élément de F qui n'appartient pas à $\text{Im}(T)$. Ainsi, $\text{Im}(T) \neq F$ et donc T n'est pas surjective.

3) a) $f^{(k+3)}$ est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$. D'après le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers la fonction $f^{(k+3)}$ sur $[-1, 1]$.

b) T est continue sur l'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$ et donc, T^{k+3} est continue sur cet espace. Puisque la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f^{(k+3)}$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$ et que T^{k+3} est continue sur cet espace, la suite $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $T^{k+3}(f^{(k+3)})$ dans cet espace ou encore la suite de fonctions $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $T^{k+3}(f^{(k+3)})$ sur $[-1, 1]$.

Maintenant, $(T^{k+3}(f^{(k+3)}))^{(k+3)} = f^{(k+3)}$ et donc il existe un polynôme R de degré inférieur ou égal à $k + 2$ tel que $T^{k+3}(f^{(k+3)}) = f + R$.

Finalement, la suite $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction de la forme $f + R$ où R est un polynôme de degré au plus $k + 2$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $R_n = T^{k+3}(P_n) - R$.

- La suite de polynômes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.
- La suite de polynômes $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers $f + R$ sur $[-1, 1]$. En particulier, $f(0) + R(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k+3}(P_n)(0) = 0$ et donc $R(0) = -f(0)$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(0) = T^{k+3}(P_n)(0) - R(0) = f(0)$.
- La suite de polynômes $(T^{k+3}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f + R$ sur $[-1, 1]$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k + 2 \rrbracket$, la suite $\left((T^{k+3}(P_n))^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (T^{k+3-i}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ (car $k + 3 - i \geq 0$ et par continuité de T^{k+3-i} sur $(F, \|\cdot\|)$).

On sait alors que pour tout $i \in \llbracket 1, k + 2 \rrbracket$, la suite $\left((T^{k+3}(P_n))^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (T^{k+3-i}(P_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $(f + R)^{(i)}$. Par suite,

$$R^{(i)}(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k+3-i}(P_n)(0) - f^{(i)}(0) = -f^{(i)}(0)$$

$$\text{et en particulier, } R = -f(0) - \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}X^{k+1} - \frac{f^{(k+2)}(0)}{(k+2)!}X^{k+2}.$$

Ensuite, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n^{(i)}(0) = T^{k+3-i}(P_n)(0) - R^{(i)}(0) = 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n est plate en 0 à l'ordre k au moins. Ensuite, $R_n^{(k+1)}(0) = T^2(P_n)(0) - R^{(k+1)}(0) = f^{(k+1)}(0) \neq 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n est plate en 0 à l'ordre k (exactement).

• Il reste à corriger R_n pour obtenir un polynôme prenant en plus la même valeur que f en -1 et en 1 sans changer la valeur en 0 , la caractère plat à l'ordre k en 0 et la convergence uniforme vers f sur $[-1, 1]$.

Cherchons Q_n sous la forme $Q_n = R_n + X^{2k}(a_n X^2 + b_n X)$ ($x^{2k}(a_n x^2 + b_n x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{2k})$ avec $2k \geq k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{cases} Q_n(1) = f(1) \\ Q_n(-1) = f(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n + R_n(1) = f(1) \\ a_n - b_n + R_n(-1) = f(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(f(1) - R_n(1) + f(-1) - R_n(-1)) \\ b_n = \frac{1}{2}(f(1) - R_n(1) - f(-1) + R_n(-1)) \end{cases}$$

$$\text{Soit donc } Q_n = R_n + T_n \text{ où } T_n = \frac{1}{2}X^{2k}((f(1) - R_n(1) + f(-1) - R_n(-1))X^2 + (f(1) - R_n(1) - f(-1) + R_n(-1))X).$$

$Q_n(0) = R_n(0) = f(0)$, $Q_n(1) = f(1)$ et $Q_n(-1) = f(-1)$.

Pour $i \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$, $Q_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} R_n(x) + o(x^{2k}) = f(0) + \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{k+1})$ et donc Q_n est plate à l'ordre k en 0 .

Pour $x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| \leq |a_n| + |b_n| \leq \text{Max}\{|R_n(1) - f(1)|, |R_n(-1) - f(-1)|\}$ et donc

$$\|T_n\| \leq \text{Max}\{|R_n(1) - f(1)|, |R_n(-1) - f(-1)|\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, la suite de fonctions (T_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$ puis la suite de fonctions (Q_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[-1, 1]$.



|

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On note $\mathbf{P}$ une probabilité sur cet espace. On note $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ les espérance et variance (pour la probabilité $\mathbf{P}$) d'une variable X . Si $A \in \mathcal{A}$, on note $\mathbf{1}_A$ son indicatrice, c'est-à-dire l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon. Si $A \in \mathcal{A}$ est de probabilité non nulle, on note $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A et, s'il y a lieu, $\mathbf{E}_A(X)$ l'espérance, pour $\mathbf{P}_A$, d'une variable aléatoire X .

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

L'objet du problème est, principalement, l'étude de la variable aléatoire égale au maximum de n variables indépendantes toutes de même loi géométrique.

La partie **I** regroupe des questions indépendantes dont les résultats seront utilisés par la suite.

Partie I. Préliminaires

1. Un résultat bien connu

- a) Montrer que la suite de terme général $u_n = H_n - \ln n$ est monotone.
 b) En déduire l'existence d'un réel noté γ pour lequel on a, quand l'entier n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

2. Un résultat de bornitude...

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer que la fonction f est bornée.

3. Une formulation intégrale des moments d'une variable positive

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- a) Établir, pour tout entier naturel N , l'égalité :

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}([X = k]) + (N+1) \mathbf{P}([X > N]).$$

- b) On suppose que la variable X possède une espérance.

(i) Établir l'égalité : $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \mathbf{P}([X > N]) = 0$.

(ii) En déduire que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge et qu'on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n]).$$

- c) On suppose, réciproquement, que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge. Montrer que la variable X possède une espérance qu'on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n])$.

- d) (i) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}([X > t])$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que X a une espérance si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) dt$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t]) dt$.

- e) Montrer que X a un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t \mathbf{P}([X > t]) dt$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}([X > t]) dt$.

4. Autour du produit de convolution

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

On suppose que, pour tout réel x , les séries $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument. On rappelle, ou on admet, qu'alors, pour tout réel x , la série $\sum w_n x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right).$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

On suppose que, pour tout réel x , les séries $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{b_n}{n!} x^n$ convergent absolument. Montrer que, pour tout réel x , la série $\sum \frac{c_n}{n!} x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \right).$$

5. Loi conditionnelle d'un vecteur aléatoire

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Quelle est la loi de $X - 1$ pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X > 1]}$?
- Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_r$ des variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0, 1[$. On note

$$A = \bigcap_{i=1}^r [X_i > 1].$$

Montrer que le vecteur aléatoire $(X_1 - 1, X_2 - 1, \dots, X_r - 1)$ a, pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$, même loi que le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ (pour la probabilité $\mathbf{P}$).

6. La formule de l'espérance totale

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

- Soit A un événement de probabilité non nulle et soit X une variable aléatoire possédant une espérance. Montrer que le produit $X \mathbf{1}_A$ a une espérance et exprimer $\mathbf{E}(X \mathbf{1}_A)$ à l'aide de $\mathbf{E}_A(X)$.
- On considère des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, chacun étant de probabilité non nulle, formant une partition de Ω . Soit X une variable aléatoire, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{A_k}(X) \mathbf{P}(A_k).$$

Dans toute la suite du problème on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **in-dépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On note, pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

7. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'application I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Il en est de même, et on l'admet, de l'application M_n .

Partie II. Étude du minimum

- Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
- Quelles sont les limites de $\mathbf{E}(I_n)$, $\mathbf{Var}(I_n)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $\mathbf{P}([I_n = k])$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?
- a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'une limite finie, notée $\ell(\omega)$, pour la suite de terme général $I_n(\omega)$.
b) Exprimer la partie $\mathcal{L}$ définie par $\mathcal{L} = \{\omega \in \Omega; \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $[I_n = 1]$ et en déduire que la partie $\mathcal{L}$ est un événement presque sûr.

Partie III. Étude du maximum

- L'espérance de M_n tend vers $+\infty$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(i) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable M_n et l'encadrement

$$\frac{1}{p} \leq \mathbf{E}(M_n) \leq \frac{n}{p}.$$

- Déterminer, pour tout entier naturel k , la valeur de $\mathbf{P}([M_n \leq k])$.
- (i) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathbf{E}(M_n) \geq \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{[M_n \leq K]}) + K \mathbf{P}([M_n > K]).$$

- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.
- Deux expressions de l'espérance de M_n
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Établir l'égalité : $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1-q^i}$. On utilisera le résultat de I-3-b-ii).
b) On note $[x]$ la partie entière d'un réel x . Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^{[t]})^n\right) dt.$$

On utilisera le résultat de I-3-d-ii).

3. Estimation de l'espérance de M_n

a) Justifier, pour tout entier naturel k , la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} q^t (1 - q^t)^k dt$ et déterminer sa valeur.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^t)^n\right) dt = -\frac{H_n}{\ln q}.$$

c) (i) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$-\frac{H_n}{\ln q} \leq \mathbf{E}(M_n) \leq -\frac{H_n}{\ln q} + 1.$$

En déduire l'équivalent de $\mathbf{E}(M_n) \sim -\frac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

(ii) **Déduire** de l'encadrement précédent, pour tout $x \in]0, 1[$, l'encadrement :

$$-\frac{x}{1-x} \leq \ln(1-x) \leq -x.$$

4. Estimation de la variance de M_n

a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t q^t (1 - q^t)^k dt$ dont on note α_k la valeur.

(ii) Établir l'égalité $\alpha_k = -\frac{1}{(k+1)\ln q} \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^t)^{k+1}\right) dt$.

b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $\int_0^{+\infty} t \left(1 - (1 - q^t)^n\right) dt = \frac{1}{\ln^2 q} \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k}$ puis l'encadrement

$$\frac{2}{\ln^2 q} \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k} \leq \mathbf{E}(M_n^2) \leq 1 + \frac{2}{\ln^2 q} \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k} - 2 \frac{H_n}{\ln q}.$$

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $H_n^2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

d) En déduire l'estimation asymptotique $\mathbf{Var}(M_n) = O(\ln n)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Partie IV. Comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Prouver, pour tout $x \in [0, 1[$, l'encadrement : $-\frac{x^2}{1-x} \leq x + \ln(1-x) \leq 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, les majorations :

$$\left| e^{-nq^k} - (1 - q^k)^n \right| \leq \frac{n q^{2k}}{1 - q^k} e^{-nq^k} \leq \frac{n q^{2k}}{1 - q} e^{-nq^k}.$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4. Déduire des questions précédentes le résultat asymptotique suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \left| \mathbf{P}([M_n \leq k]) - e^{-nq^k} \right| = 0.$$

Partie V. Où l'on retrouve une formule exacte pour l'espérance de M_n

Dans cette dernière partie on suppose que $p = \frac{1}{2}$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $m_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $m_n = \mathbf{E}(M_n)$.

1. On note $B_0 = \bigcap_{i=1}^n [X_i > 1]$, $B_n = \bigcap_{i=1}^n [X_i = 1]$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$B_k = \left(\bigcap_{i=1}^k [X_i = 1] \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n [X_i > 1] \right).$$

- a) Établir, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'égalité : $\mathbf{E}_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.
 b) En utilisant la formule de l'espérance totale, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$m_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + m_{n-k}).$$

2. Justifier, pour tout réel x , la convergence de la série de terme général $\frac{m_n}{n!} x^n$.

On note, pour tout réel x , $M(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n}{n!} x^n$.

3. Établir, pour tout réel x , l'égalité : $M(2x) = e^{2x} - 1 + M(x) e^x$.

On note, pour tout réel x , $G(x) = M(x) e^{-x}$.

On a donc, pour tout réel x , $G(2x) = 1 - e^{-2x} + G(x)$.

4. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = m_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1}.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout le problème, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à deux.

Selon une formule classique, que l'on pourra admettre dans toute la suite, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

admet pour déterminant le nombre réel $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, appelé *déterminant de Vandermonde*, que l'on notera dans la suite $v_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

L'objet du problème est l'étude de déterminants de matrices d'une forme plus générale, appelés *déterminants vandermondiens*, définis comme suit.

Pour toute famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{S}$, à valeurs réelles, et tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathcal{S}^n$, on note

$$V_{f_1, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

et $v_{f_1, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette matrice.

Bien que les déterminants vandermondiens interviennent dans les trois parties du sujet, celles-ci sont largement indépendantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : polynômes de Tchebycheff de seconde espèce

Dans cette partie, $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent n nombres réels vérifiant les inégalités strictes

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \pi$$

et on note $s_1, s_2, \dots, s_n$ les n fonctions définies par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad s_i(x) = \sin(ix).$$

On considère la suite $(U_p(X))_{p \in \mathbb{N}}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$\begin{cases} U_0(X) = 1 \\ U_1(X) = 2X \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad U_{p+2}(X) = 2XU_{p+1}(X) - U_p(X) \end{cases}.$$

1. a) Calculer $U_2(X)$ et $U_3(X)$, puis indiquer la parité de la fonction $x \mapsto U_p(x)$, selon les valeurs de p .
 b) Pour tout entier naturel p , déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $U_p(X)$.
 c) Justifier que $(U_0(X), U_1(X), \dots, U_n(X))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.

- a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $\sin((p+2)t) + \sin(pt)$ en fonction de $\sin((p+1)t)$ et $\cos(t)$.
 b) En déduire que pour tout entier naturel p , on a :

$$\sin((p+1)t) = \sin(t) U_p(\cos(t)).$$

- c) Justifier que le polynôme $U_n(X)$ possède n racines distinctes, qui appartiennent toutes à l'intervalle ouvert $] -1, +1 [$.

3. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose : $c_{i,j} = 2^{1-i} U_{i-1}(\cos(x_j))$.

On note C la matrice $(c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de cette matrice.

- a) Justifier l'existence de nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :

$$L_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j L_j = (\cos^{n-1}(x_1) \quad \cos^{n-1}(x_2) \quad \dots \quad \cos^{n-1}(x_n)).$$

- b) Démontrer que le déterminant de C est égal à $v_n(\cos(x_1), \cos(x_2), \dots, \cos(x_n))$.

- c) Établir la formule :

$$v_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^{n(n-1)/2} \left(\prod_{k=1}^n \sin(x_k) \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(x_j) - \cos(x_i)) \right).$$

- d) En déduire l'indépendance linéaire des fonctions $s_1, s_2, \dots, s_n$.

4. a) Calculer, pour tout couple (p, q) de nombres entiers naturels, l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(pt) \sin(qt) dt.$$

- b) En déduire que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} U_p(t) U_q(t) \sqrt{1-t^2} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}.$$

5. On note V^* la comatrice de la matrice $V_{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}}(\cos(x_1), \cos(x_2), \dots, \cos(x_n))$ et $v^*(i, j)$ ses coefficients (pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $v^*(i, j)$ est le coefficient situé dans la i -ème ligne et la j -ème colonne de V^*).

- a) Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\varphi : t \longmapsto v_{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}}(\cos(x_1), \dots, \cos(x_{n-1}), t).$$

- b) Démontrer l'égalité

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} (\varphi(t))^2 \sqrt{1-t^2} dt = \sum_{i=1}^n (v^*(i, n))^2.$$

Partie 2 : factorisations de déterminants vandermondiens

1. a) Justifier que la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ admet un unique prolongement continu à $\mathbb{R}$ et démontrer, en utilisant une série entière, que ce prolongement est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La fonction ainsi prolongée sera notée sinc (pour *sinus cardinal*).

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :
$$c(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ -\sin(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Exprimer $c(x, y)$ à l'aide des fonctions sin et sinc, et en déduire que la fonction c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

c) En déduire, à l'aide de la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, que la fonction $b : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \frac{v_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)}{v_n(x_1, \dots, x_n)}$ admet un prolongement de classe C^∞ à $\mathbb{R}^n$.

2. Dans cette question, f et g désignent des fonctions à valeurs réelles, continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), dérivables sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

a) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction de la forme $x \longmapsto v_{f_1, f_2, f_3}(a, b, x)$, justifier l'existence d'un élément c de $]a, b[$ vérifiant :

$$\frac{g(b)f(a) - g(a)f(b)}{b-a} = g'(c) \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} - f'(c) \frac{bg(a) - ag(b)}{b-a}.$$

b) En quoi le résultat précédent est-il une généralisation du théorème des accroissements finis ?

3. Dans cette question f et g désignent des fonctions polynomiales à coefficients réels.

- La première est de degré n : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, avec $a_n \neq 0$.
- La seconde est de degré inférieur ou égal à n : $\forall x \in \mathbb{R}, b(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$.

a) Soit k et ℓ deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Justifier que, pour $x \neq y$, le quotient $\frac{x^k y^\ell - x^\ell y^k}{x - y}$ est une combinaison linéaire de monômes de la forme $x^i y^j$, avec $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$.

b) Pour tout réel x , on note $C(x)$ la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$ et $L(x)$ sa transposée.

Justifier l'existence d'une unique matrice carrée $B(f, g) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout couple (x, y) de réels distincts, l'égalité :

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x - y} = L(x) B(f, g) C(y).$$

c) Démontrer que si une matrice-colonne M vérifie $L(x) M = 0$ pour tout réel x , alors M est nulle.

d) En déduire que si les deux polynômes $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $\sum_{i=0}^n b_i X^i$ ont une racine réelle commune, alors la matrice $B(f, g)$ n'est pas inversible.

Partie 3 : unisolvance et interpolation

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble non vide et F un sous-espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ est *unisolvant* pour F si le seul élément de F qui s'annule en chacun des x_j est la fonction nulle :

$$\forall f \in F, \left[(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_j) = 0) \implies (\forall x \in \mathcal{S}, f(x) = 0) \right].$$

1. a) Justifier que $\mathcal{S}$ possède au moins n éléments.

b) Démontrer que, si un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ est unisolvant pour F , alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont nécessairement deux à deux distincts.

2. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^n$.

a) Démontrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour F si, et seulement si, le déterminant vandermondien $v_{f_1, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n)$ est différent de 0.

b) Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Justifier que si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour F , alors il existe un unique élément f de F vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_j) = y_j.$$

c) En utilisant la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, justifier que pour tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $]0, \pi[$ et toute fonction réelle g définie sur cet intervalle, il existe un unique vecteur $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_i s_i(x_j) = g(x_j).$$

3. On dit que F est *unisolvant* si tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathcal{S}$ est unisolvant pour F .

a) Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, justifier que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$ est unisolvant.

b) Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, montrer que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n qui s'annulent en 0 n'est pas unisolvant et déterminer les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui sont unisolvants pour cet espace vectoriel.

4. Dans cette question, on étudie le cas où $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que tous les éléments de l'espace vectoriel F sont des applications continues (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

On cherche à montrer que F ne peut pas être unisolvant.

Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n -uplet de vecteurs deux à deux distincts de $\mathbb{R}^2$ tel que le déterminant vandermondien $v_{f_1, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas nul.

On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^2$ non colinéaire au vecteur $x_1 - x_2$ et pour tout réel $r > 0$, on définit l'application γ_r de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}^2)^n$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_r(t) = ((1-t)x_1 + tx_2 + r \sin(\pi t)y, (1-t)x_2 + tx_1 - r \sin(\pi t)y, x_3, \dots, x_n).$$

a) Soit $r > 0$.

Calculer $\gamma_r(0)$ et $\gamma_r(1)$, puis en déduire qu'il existe un réel t compris entre 0 et 1 pour lequel le déterminant vandermondien $v_{f_1, \dots, f_n}(\gamma_r(t))$ est nul.

b) Justifier que, pour tout $r > 0$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$(1-t)x_1 + tx_2 + r \sin(\pi t)y \neq (1-t)x_2 + tx_1 - r \sin(\pi t)y.$$

c) Prouver qu'il existe au plus un élément (t, r) de $]0, 1[\times]0, +\infty[$ pour lequel

$$(1-t)x_1 + tx_2 + r \sin(\pi t)y = x_3.$$

d) En généralisant le résultat précédent, justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, les n vecteurs

$$(1-t)x_1 + tx_2 + r \sin(\pi t)y, (1-t)x_2 + tx_1 - r \sin(\pi t)y, x_3, \dots, x_n$$

de $\mathbb{R}^2$ sont distincts deux à deux.

e) Conclure.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

Dans tout le problème, X désigne une variable aléatoire réelle, prenant ses valeurs exclusivement dans l'intervalle $]0, +\infty[$. La fonction de répartition de X est notée F_X . On rappelle sa définition : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

On pose en outre deux hypothèses supplémentaires sur X : pour tout $x > 0$, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$, et, d'autre part, pour tous $0 < a < b$, on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) > 0$. In fine, on a donc les propriétés suivantes pour F_X , qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer :

- (i) $F_X(0) = 0$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- (iii) La fonction F_X est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- (iv) La fonction F_X est continue.

Partie I – Quelques calculs avec la loi uniforme sur $]0, 1[$

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle. La loi de U est donc caractérisée par la fonction de densité f_U définie sur $\mathbb{R}$ par $f_U(u) = 1$ pour $u \in]0, 1[$, et $f_U(u) = 0$ pour $u \notin]0, 1[$.

- 1) On note F_U la fonction de répartition de U . Montrer que, pour tout $u \in [0, 1]$, on a la relation $F_U(u) = u$.
- 2) On considère deux nombres réels $0 \leq a \leq b \leq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(a \leq U \leq b) = b - a$.
- 3) Montrer que la variable aléatoire $(1 - U)$ suit également la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
- 4) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(U)$.
- 5) Plus généralement, calculer la valeur de $\mathbb{E}(U^m)$, pour tout entier $m \geq 1$.

Partie II – Fonction quantile q_X

- 6) Montrer que, pour tout $u \in]0, 1[$, il existe un et un seul nombre réel $x \in]0, +\infty[$ vérifiant l'identité $F_X(x) = u$.

Dans toute la suite, on note $q_X(u)$ le nombre réel x dont l'existence est établie à la question 1). On a donc, pour tout $u \in]0, 1[$, l'identité $F_X(q_X(u)) = u$.

- 7) Montrer que, pour tout $u \in]0, 1[$, on a $\mathbb{P}(X \geq q_X(u)) = 1 - u$.
- 8) Montrer que, pour tous $0 < u < v < 1$, on a l'inégalité $q_X(u) < q_X(v)$.
- 9) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a équivalence entre la condition $q_X(u) \leq x$ et la condition $u \leq F_X(x)$.
- 10) On considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle, comme décrit dans la partie I. Montrer que la variable aléatoire Y définie par $Y = q_X(U)$ suit la même loi de probabilité que la variable aléatoire X . *Indication* : calculer la fonction de répartition de Y .
- 11) On définit la variable aléatoire V par $V = F_X(X)$. Montrer que V suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
- 12) Etablir la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 q_X(u) du.$$

Partie III – Expériences répétées

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, que l'on suppose indépendantes, et suivant chacune la même loi de probabilité que X . Etant donné un nombre $u \in]0, 1[$, on introduit la variable aléatoire $T_1(u)$ définie par

$$T_1(u) = \inf \{n \geq 1 \mid X_n \geq q_X(u)\},$$

avec la convention $T_1(u) = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $n \geq 1$ pour lequel $X_n \geq q_X(u)$. La variable aléatoire $T_1(u)$ correspond donc au plus petit indice n tel que $X_n \geq q_X(u)$.

13) Pour tout entier $k \geq 1$, donner une expression de l'événement $\{T_1(u) = k\}$ en termes des valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$.

14) Exprimer pour tout entier $k \geq 1$ la valeur de $\mathbb{P}(T_1(u) = k)$.

15) Calculer l'espérance et la variance de $T_1(u)$.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $X_{T_1(u)}$ définie par le fait que, pour tout entier $k \geq 1$, $X_{T_1(u)} = X_k$ lorsque $T_1(u) = k$, et (par convention) $X_{T_1(u)} = 0$ lorsque $T_1(u) = +\infty$.

16) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, et tout $x \geq q_X(u)$, on a

$$\mathbb{P}(X_{T_1(u)} \leq x \mid T_1(u) = k) = \frac{F_X(x)}{1-u} - \frac{u}{1-u}.$$

17) En déduire que, pour tout $x \geq q_X(u)$, on a

$$\mathbb{P}(X_{T_1(u)} \leq x) = \frac{F_X(x)}{1-u} - \frac{u}{1-u}.$$

18) En déduire l'identité

$$\mathbb{E}(X_{T_1(u)}) = q_X(u) + \frac{1}{1-u} \int_{q_X(u)}^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

Indication : On rappelle la formule, valable pour toute variable aléatoire positive W :
 $\mathbb{E}(W) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(W > w) dw.$

On introduit maintenant la variable aléatoire $N_n(u)$ définie par

$$N_n(u) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{X_j \geq q_X(u)},$$

où la notation $\mathbf{1}_A$ désigne la variable aléatoire indicatrice de l'événement A , c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

19) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $N_n(u)$? Donner la valeur de son espérance et de sa variance.

20) Formaliser et justifier, au moyen de la loi des grands nombres, l'affirmation (imprécise) suivante : « sur un grand nombre n de répétitions, la proportion des cas pour lesquels $X_j \geq q_X(u)$ doit être approximativement égale à $1 - u$ ».

21) Etant donné une valeur $u \in]0, 1[$, proposer un moyen d'obtenir une estimation de $q_X(u)$ à partir de la donnée d'une « longue » série de valeurs $X_1, \dots, X_n$.

22) Pour tout $n \geq 1$, et tout $0 < u < 1$, on définit la variable aléatoire $R_n(u)$ par $R_n(u) = 0$ lorsque $N_n(u) = 0$, et, lorsque $N_n(u) > 0$, par

$$R_n(u) = \frac{\sum_{j=1}^n X_j \mathbf{1}_{X_j \geq q_X(u)}}{N_n(u)}.$$

Etudier le comportement de $R_n(u)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. (Justifier votre réponse.)

Partie IV – Deux exemples

On suppose pour commencer que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La loi de X est donc caractérisée par la fonction de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, et $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$.

23) Calculer la valeur de $q_X(u)$ pour tout $u \in]0, 1[$.

24) En déduire que la variable aléatoire $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ , où U est la variable aléatoire étudiée dans la partie I.

25) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(X_{T_1(u)})$ en fonction de λ et de u .

26) Comment se comporte le rapport $\frac{\mathbb{E}(X_{T_1(u)})}{q_X(u)}$ lorsque $u \rightarrow 1$?

On suppose à présent que X suit une loi caractérisée par la fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{s}\right) \frac{1}{(1 + x/s)^{\alpha+1}} \text{ pour } x \geq 0, \text{ et } f_X(x) = 0 \text{ pour } x < 0,$$

où $s > 0$ et $\alpha > 1$.

27) Calculer la fonction de répartition de X .

28) Calculer la valeur de $q_X(u)$ pour tout $u \in]0, 1[$.

29) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(X_{T_1(u)})$ en fonction de (s, α) et de u .

30) Comment se comporte le rapport $\frac{\mathbb{E}(X_{T_1(u)})}{q_X(u)}$ lorsque $u \rightarrow 1$? Commenter la différence éventuelle avec le résultat obtenu à la question 26).

Partie IV – Avec une loi discrète

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire D prenant un nombre fini de valeurs distinctes $0 < x_1 < \dots < x_m$, associées respectivement à des probabilités que l'on note $p_1 = \mathbb{P}(D = x_1), \dots, p_m = \mathbb{P}(D = x_m)$, toutes supposées strictement positives. On pose ensuite $\pi_0 = 0$, et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$, $\pi_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} p_j$. Pour tout $u \in]0, 1[$, on définit alors $q_D(u)$ comme le nombre x_ℓ , où $\ell \in \{1, \dots, m\}$ est l'unique entier tel que $\pi_{\ell-1} < u \leq \pi_\ell$.

31) On considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle, comme décrit dans la partie I. Montrer que la variable aléatoire G définie par $G = q_D(U)$ suit la même loi de probabilité que la variable aléatoire D .

32) La loi de probabilité de la variable $F_D(D)$ peut-elle être la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$?

Exercice

On considère une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 1}$, indépendantes, et suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère d'autre part une variable aléatoire X_0 suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$, indépendante de la suite $(W_n)_{n \geq 1}$. On définit ensuite par récurrence les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ via la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \sigma W_n,$$

où α et σ sont deux nombres donnés vérifiant $\sigma > 0$ et $\alpha \in]-1, 1[$.

A) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, la variable X_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, où la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ obéit à une relation de récurrence que l'on précisera.

B) On pose $\sigma_\star = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}$. Montrer que, si $\sigma_0 = \sigma_\star$, alors pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_\star^2)$.

C) Montrer que, de manière générale, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2 = \sigma_\star^2$.

Dans toute la suite, on suppose que $\sigma_0 = \sigma_\star$.

D) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \alpha \sigma_\star^2$. Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes en général?

E) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et tout $\ell \geq 1$, on a la relation :

$$X_{n+\ell} = \alpha^\ell X_n + \sum_{k=0}^{\ell-1} \sigma \alpha^k W_{n+\ell-k}.$$

F) En déduire que pour tout $n \geq 0$ et tout $\ell \geq 1$, on a :

$$\text{Cov}(X_n, X_{n+\ell}) = \alpha^\ell \sigma_\star^2.$$

G) Donner une expression de la variance $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n)$, et en déduire une inégalité de la forme $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \leq Cn$, où C est une constante positive.

H) Déduire de la question précédente que l'on a la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Du Moyen Âge, hanté par l'ombre de Dieu, au siècle des Lumières, travaillé par l'essor de la Raison, les époques se distinguent par les questions qu'elles se posent. Toutes ont pourtant interrogé l'énigme de notre apparition et les conditions de notre vie commune, à chaque fois selon un nouvel angle, sans jamais parvenir à trouver *la* solution. Dans son pragmatisme, la nôtre semble seule à dédaigner ces grandes controverses ; ni l'origine, ni la finalité de la vie ne l'intéresse plus trop : notre opium n'est plus au ciel, ni même sur Terre, mais en nous. « Être un peuple, voilà la religion de notre temps », affirmait Ernst Moritz Arndt, chantre du nationalisme allemand, à l'aube du XIX^e siècle : être *soi* est la nôtre. J'éprouve, nous éprouvons, le besoin impérieux de nous extraire du flux anonyme des choses, de *personnaliser* toujours plus notre humanité : devenir ce que nous sommes est devenu, Nietzsche aidant, une exigence aussi insatiable que la faim. Il faut être soi pour donner sens à sa vie et s'estimer, devenir chaque jour un peu plus l'individu *qu'on porte en soi* pour combler les lacunes d'un ordre symbolique affaibli. Le philosophe était vécu comme un sculpteur d'homme dans la cité antique et le prêtre comme celui de l'âme, dans les royaumes chrétiens : nous rêvons de devenir et le créateur, et la sculpture.

Des écrits grecs sur *la vie bonne* aux manuels romains encourageant l'examen de soi, l'individualité a une histoire, avant même que saint Augustin ne donne sa profondeur au sujet chrétien, en le poussant à s'étudier moralement. Certains voient le sujet se déprendre de ses gangues collectives pour affirmer son autonomie dès le Moyen Âge, dans l'Angleterre rurale ; d'autres datent ce décrochage de la floraison créatrice que suscita la Renaissance italienne, sinon de l'étonnant succès des *Essais* de Montaigne. On trouve des penseurs pour situer au siècle des Lumières l'émergence d'un individu qui, las d'être le sujet du Tout-Puissant et de ses princes, se pose en propriétaire de lui-même et en maître rationnel de sa destinée. La Réforme protestante, en prônant une relation directe entre Dieu et soi, puis le Romantisme, en encourageant les confessions mêlant lyrisme et égocentrisme, jouèrent aussi leur rôle : « Dans les sociétés démocratiques, chaque citoyen est habituellement occupé à contempler un très petit objet qui est lui-même », écrit déjà Tocqueville en 1840¹, déduisant du seul modèle américain ce qui va devenir notre ordinaire ; cette tendance s'est creusée jusqu'à faire de certains d'entre nous leur propre origine et leur finalité. Le souci que nous avons de notre personne, de ses frustrations réelles et de ses traumatismes supposés, est devenu d'une intensité que les hommes du passé auraient jugée pathologique ; le narcissisme est devenu phénomène de masse.

La croyance en l'individualité repose pourtant sur des bases fragiles ; ce noyau qui fonde notre spécificité, cette invisible boîte noire qui enregistrerait tout du monde en soi que nous sommes devenu, échappe à tout critère d'évaluation. En définir le contenu, la structure et la forme est si ardu qu'on doit recourir à toutes sortes de notions, de la conscience au *ça*, de l'ego au *self*, de la personnalité à l'identité, de la subjectivité au propre — sans parler de l'âme des théologiens ou du karma des hindouistes —, des notions qui se recoupent et se contaminent, à mi-chemin de la psychologie et de la sociologie, de la psychanalyse, de la philosophie et de la théologie, en muant à chaque auteur, sinon à chaque ouvrage, jusqu'à échapper à toute définition. Comme le temps ou le mouvement, l'identité glisse entre les doigts ; analyser ce qui nous rend incomparable, c'est avoir affaire à des fragments dont l'originalité ou l'autonomie s'avère vite problématique, la plupart résultant d'un compromis passé avec le monde, ou du long processus d'interaction qui a fini par nous doter de traits

1. De la démocratie en Amérique, t. II, 1^{ère} partie, ch. XVIII.

reconnaissables. Ne devrait-on pas dire « nous », autant que « je » ? C'est la question qu'on en vient à se poser, en craignant déjà pour sa stabilité.

Tout à son désir de vouloir parler de soi comme d'une entité bien réelle, l'individu singulier que nous prétendons être déchante alors. Il ne se voit plus que comme un sas entre l'anonymat des foules et le magma où gît son moi profond — une zone tampon entre la masse intimidante de la réalité et le halo inconsistant de ses désirs. L'identité qu'il secrète, depuis l'enfance, lui paraît une construction, plus qu'une réalité ; c'est l'adresse avec laquelle il a pioché dans ses « 7 familles » pour constituer son « jeu », se présenter comme l'héritier de tel ancêtre ou de telle foi, de telle province ou de telle culture plutôt que de tel autre, ou mettre en valeur une origine déjà plus flatteuse — géographique ou sociale : c'est la manière qu'il a de se raconter ce *qu'il est*, en élimant telle période de vide ou de flottement pour mieux valoriser telle séquence, en occultant l'influence qu'a pu exercer sur lui tel être, ou telle forme de pensée ; c'est sa façon de se décrire à autrui — puis à soi tel que l' imagine ou le redoute autrui, enfin à autrui tel que l' imagine ce *soi-même* déformé par lui — soit déjà quatre récits à la puissance *n*, eux-mêmes sujets à des variantes ; c'est l'art, cohérent ou inventif, rigoureux ou délirant, qu'il déploie pour se rendre « lisible », mais aussi pour réduire ou justifier ses oscillations intimes, se convaincre qu'il aura été plus ou moins *le même* à travers le temps et l'espace, assurer une indispensable continuité à son être.

Or qui dit art dit aussi élaboration et esthétisation — donc en partie artificiel ; qui dit invention dit aussi affabulation, dans les cas limites. On doit se raconter pour se rendre connaissable, puis re-connaissable, mais il faut aussi forcer le trait pour donner à ce récit des couleurs, l'enrichir de synthèses flatteuses et d'épisodes pittoresques ; comme les conteurs, nous brotons. En *creux*, lorsqu'on occulte inconsciemment tel aspect de son passé ou de son héritage, comme le romancier coupe les scènes qui affaiblissent ses personnages. En *plein*, lorsqu'on préfère délibérément falsifier tel fait, ou inventer tel autre.

L'identité qu'on se prête pourrait donc relever de la fiction, autant que de la biographie : elle serait la nouvelle — la tragédie, l'opéra, ou la pièce de boulevard aussi bien — que chacun écrit, selon son tempérament ou sa philosophie, sur la page blanche qui l'a vu naître, puis qu'il ne cesse d'amender avec le même aplomb et la même imagination parfois — mais aussi les mêmes périodes de découragement —, qu'un auteur met à bâtir son intrigue. L'étude de la vie encourage l'écriture de romans dont l'intrigue et les caractères nourrissent en retour la façon dont chacun envisage sa destinée : « Je suis ce que je me raconte », avance Ricœur dans *Soi-même comme un autre*, en ajoutant que ni le début ni la fin de l'histoire n'est de notre ressort : nous n'écrivons jamais que les chapitres médians d'une « œuvre » dont le déroulement nous échappe largement.

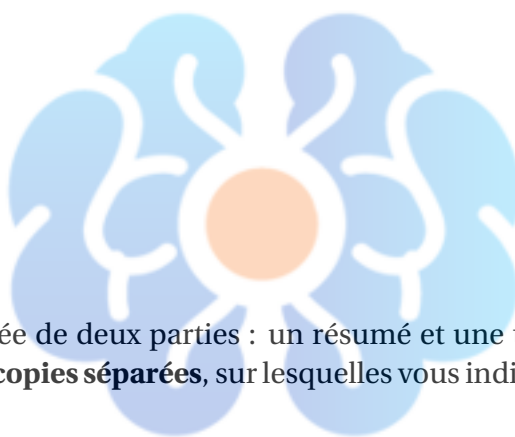
Claude ARNAUD, *Qui dit je en nous ?*, Ed. Grasset, 2006.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The rise of the cashless city: 'There is this real danger of exclusion'

Adapted from The Guardian, Monday 9 January 2017.

Scrolling through my online bank statements at Christmas, I was surprised to find I had not removed cash from an ATM for well over four months. Thanks to the ubiquity of electronic payment systems, it has become increasingly easy to glide around London to a chorus of approving bleeps.

As more shops and transport networks adapt to contactless card and touch-and-go mobile technology, many major cities around the world are in the process of relegating cash to second-class status. Some London shops and cafes are now, like the capital's buses, simply refusing to handle notes or coins.

Could we see a whole city go cash-free? From Seoul to Bergamo, cities big and small are at the forefront of a global drive to go digital. Many of us are happy to tap cards or phones to hop on a bus, buy a coffee or pay for groceries, but it raises the prospect of a time we no longer carry any cash at all.

No spare change for the busker at the station, the person sleeping rough in need of a hot drink, the market trader, the donation box. Although even on-street charity fundraisers are now broaching the world of contactless payments, what might the rise of the cashless city mean for street vendors, small merchants and the poorest inhabitants?

Some experts now fear a two-tier urban realm in which those on the lowest incomes become disconnected from mainstream commercial life by their dependence on traditional forms of currency.

"The beauty of cash is that it's a direct and simple transaction between all kinds of different people, no matter how rich or poor," explains financial writer Dominic Frisby. "If you begin to insist on cashlessness, it does put pressure on you to be banked and signed up to financial system, and many of the poorest are likely to remain outside of that system. So there is this real danger of exclusion."

Ajay Banga, Mastercard's CEO, has spoken about the growing global risk of "creating islands, where the unbanked transact [only] with each other".

In India, the question of how the poorest might connect with the digitised world of the middle-class consumer is now of central importance. In November, the prime minister Narendra Modi announced the removal of 500 and 1000 rupee notes from circulation. Part of a wider attempt to jolt the nation into joining the cashless revolution, Modi's government believes restricting currency and pushing the take-up of electronic payment will help tackle corruption and regulate India's untaxed, "black" economy.

Saurabh Shukla, the Delhi-based editor in chief at NewsMobile Asia, says he has seen many small "mom and pop" store owners introduce card readers and learn how to use Paytm, a mobile payment platform, over the past two months.

"They realise a big change is here and they are trying to adjust to electronic payment," he explains. "But they still want to convert back to cash at the end of the working day or the working week. It will be a gradual adjustment. We might not be able to create a completely cashless India, but we can aim to create a low cash economy."

Modi is encouraging state government to create "smart" cities by connecting their public services with the latest online technology. Yet huge queues remain outside banks as many Indians continue to demand cash. Some of the poorest street vendors cannot afford card

readers, and have struggled to operate Paytm payment transfers on their mobile phones.

Aires Rodrigues, a human rights lawyer in Goa, says traders in Panjim are suffering. Rickshaw drivers and fish market sellers have been left with no way of accepting payment from middle-class customers now inclined to do everything digitally. "It's senseless to try to make everyone go cashless," says Rodrigues. "The government seems to have lost sight of the plight of the common man."

If India's urbanites are being forced to undergo digital shock therapy, city dwellers in much of Europe have been moving steadily away from cash. Consumers like convenience. Governments like the idea of tax transparency. And retailers like cutting down on the costs of cash handling.

According to a recent report by Fung Global Retail & Technology, nine of the top 15 "most digital-ready" countries are in Europe. It predicts Sweden could become the world's first completely cashless society. Niklas Arvidsson at Stockholm's KTH Royal Institute of Technology thinks it could happen by 2030.

Yet even Sweden has seen an enthusiasm gap emerge, mostly along demographic lines. Older people in the rural north, tending to be the least tech-savvy, resent the economic power of Stockholm and Gothenburg, now almost entirely cash-free urban zones. The National Pensioners Organisation is a key player in the "Cash Uprising" coalition now campaigning to make sure older Swedes can still deposit and remove cash from banks.

Wealth, however, remains the key factor in determining who might be entirely left behind by the evolving digital economy. Some of the poorest people in Europe's richest cities have found themselves pushed aside.

Kenya may offer a guiding light here, having found a way to allow unbanked citizens access into the cashless society using cheap mobiles. Launched in 2007, M-Pesa has become the world's leading mobile money platform, allowing millions of users to transfer money to each other by sending text messages and store their funds digitally without opening a conventional bank account.

In Zimbabwe, last year's cash liquidity crisis led to renewed distrust in the banks and helped mobile money platforms take off as an alternative way of doing business, first in the capital city Harare, then in rural areas. The country's most popular text-based service Eco-Cash now has more than six million users.

Dave Birch, director of innovation at UK firm Consult Hyperion, thinks it would be foolish to insist on clinging on to cash on behalf of the poor. "If you keep people trapped in a cash economy, you leave them to pay higher prices for everything, you leave them struggling to access credit, and more vulnerable to theft," he says.

"We're going to replace cash with electronic platforms," Birch adds. "I don't think poverty or being unbanked is necessarily a barrier, because everyone has a phone. Given the technology we have, we can develop new ways of moving digital cash around, even on the most basic of phones."

The challenge for banks, regulators, tech innovators and officials keen to push forward "smart city" initiatives, is to make sure evolving platforms are accessible and keep everyone interconnected.

2 Translate the following text into French

Students call for Bristol University tower to change name

Students at the University of Bristol have launched a campaign to rename one of the city's most iconic buildings over its alleged links to slavery.

The campaigners claim the Wills Memorial Tower “glorifies” the slave trade due to its namesake, Henry Overton Wills III, Bristol's founding chancellor.

Mr Wills was the first official chancellor of the university and used profits from his tobacco trade investments to fund Bristol's royal charter. The tower was dedicated to him by his two sons after his death.

The student protestors argue the building undermines the university's commitment to “diversity and inclusivity” and symbolises the “toleration” of former slave masters.

Should their campaign be successful, the tower will be renamed after “somebody the entire university population can be proud of”.

Launching a petition, the student group said: “Every student who first attends Bristol cannot help but notice the grand prominence of Wills Memorial Building at the top of Park Street. However, few know the history behind the name... Wills is known best for being the first chancellor of the university; fewer people are aware that this position was granted to him after financing the university with slave-profited money. While we begrudgingly understand that Bristol has a historical connection to the slave trade, we find it hard to accept that the university still glorifies an individual who advocated such an immoral practice.”

Responding to the petition, a spokesman for the university said “We have never sought to hide our association with the Wills family. We believe that it is important to be open and reflective about our history, and the city's historical connection to the slave trade.

“To us, it would seem disingenuous to seek to deny or cover up our relationship with the family. We would welcome the chance to discuss this further with the organisers of this petition.”

Adapted from *The Independent*, Wednesday 29 March 2017.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x . On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit **premier** s'il n'est divisible que par 1 et lui-même (donc 1 n'est pas premier).

On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel n , au moins égal à 2, se **décompose**, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, p_2, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}.$$

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leq b$, la notation $\sum_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$ désigne la somme des nombres α_p pour tous les entiers **premiers** p de l'intervalle entier $\llbracket a, b \rrbracket$. On définit de la même façon $\sum_{\substack{p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$, $\prod_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$, etc.

Par exemple, $\sum_{\substack{4 \leq p \leq 10 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_5 + \alpha_7$, ou $\prod_{\substack{p \leq 8 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_5 \times \alpha_7$.

Partie I - Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k)$.

- (a) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^n f(t) dt$ est monotone et convergente.

- (b) En déduire, l'existence d'un réel, noté C , pour lesquels on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + C + o(1).$$

- (c) Établir la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t} dt$ et en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln^2 k}$.

2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln k}{k(k-1)}$ est convergente.

On note $K = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k(k-1)}$ sa somme.

3. (a) Prouver, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, l'inégalité :

$$\sum_{k=2}^n \ln k \geq n \ln n - n + 1.$$

- (b) En déduire, quand n tend vers $+\infty$, l'estimation : $\ln n! = n \ln n + O(n)$.

4. (a) Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x \ln x - \lambda x = \ln n$. On note r_n cet unique réel.

- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$ puis établir l'équivalence $r_n \sim \frac{\ln n}{\ln \ln n}$.

5. On note, pour toute partie E de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des éléments de E inférieurs ou égaux à n , c'est-à-dire que $E_n = E \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, et l'on pose, pour tout entier naturel n non nul, $d_n(E) = \frac{1}{n} \text{card}(E_n)$.

Si la suite $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, on note $d(E)$ sa limite et on dit que la partie E de $\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $d(E)$.

- (a) Montrer que les ensembles suivants possèdent une densité dont on donnera la valeur :

i. Une partie F finie de $\mathbb{N}^*$.

ii. L'ensemble $a\mathbb{N}^* := \{ka; k \in \mathbb{N}^*\}$ des multiples non nuls de l'entier $a \in \mathbb{N}^*$.

- iii. L'ensemble $C := \{k^2; k \in \mathbb{N}^*\}$ des entiers non nuls qui sont des carrés.
- (b) Soit E_1, E_2 deux parties **disjointes** de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité. Les parties $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ et $E_1 \cup E_2$ possèdent-elles une densité? Et, si oui, que valent-elles?
- (c) L'application d est-elle une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu formée de toutes ses parties?
6. (a) Justifier, pour tout entier naturel m non nul, l'inégalité : $2 \binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$.
- (b) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, l'entier $\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de $\llbracket r+1, 2r+1 \rrbracket$).
- (c) Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, l'inégalité : $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à n).
- On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang n , on examinera, en particulier, le cas où $n+1$ est un entier premier égal à $2r+1$.*
- On en déduit ainsi l'inégalité : $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \ln p \leq n \ln 4$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout nombre premier p et tout entier $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $v_p(r)$ l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de r , et on pose $v_p(1) = 0$. Par exemple, puisque $300 = 2^2 3 5^2$, $v_2(300) = 2$, $v_3(300) = 1$, $v_5(300) = 2$ et $v_p(300) = 0$ si $p \notin \{2, 3, 5\}$.
- Soit p un nombre premier. On note, pour tout entier naturel k non nul, α_k (resp. β_k) le nombre d'entiers $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que p^k divise d (resp. tels que $v_p(d) = k$).
- Bien sûr, dès que k est assez grand, $\alpha_k = \beta_k = 0$.*
- (a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\alpha_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
- (b) Justifier l'égalité : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \beta_k$.
- (c) En déduire, en reliant β_k aux α_i , l'égalité : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
- (d) En déduire l'encadrement : $\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$ ($= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$).
8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- Prouver, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n.$$

9. Soit $(a_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite positive de limite $+\infty$ et $(b_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée. Soit $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_N) = a_N + b_N$ et, quand N tend vers $+\infty$, $\mathbf{Var}(X_N) = O(a_N)$.

(a) Justifier, pour tout entier N assez grand, l'inclusion entre événements :

$$\left[|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \subset \left[|X_N - a_N| \leq a_N^{2/3} \right].$$

(b) En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) = 0.$$

Partie II - Deux résultats asymptotiques

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\ln n! = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln p$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln n!}{n} - K \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} \leq \frac{\ln n!}{n} + \ln 4,$$

où le réel K est défini dans la question I - 2).

(c) Conclure, quand l'entier n tend vers $+\infty$, à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).$$

2. On note χ l'application qui, à chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, associe 1 si k est premier (i.e. $k \in \mathcal{P}$) et 0 sinon.

(a) En posant, pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \chi(k) \frac{\ln k}{k}$, $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$, en utilisant I - 8), établir, pour tout $n \geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln n}.$$

(b) Établir, quand l'entier k tend vers $+\infty$, l'égalité : $\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} A_k = \frac{1}{k \ln k} + O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$.

(c) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \ln \ln n + O(1).$$

Partie III

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\omega(n)$ le nombre d'entiers **premiers** distincts qui divisent l'entier n . On a donc $\omega(2^5) = 1$, $\omega(2^2 \cdot 5^3) = 2$, $\omega(2 \cdot 5^2 \cdot 11^5) = 3$, etc.

L'objet de la suite du problème est le contrôle asymptotique, en un certain sens, de la suite $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dont la décomposition en nombres premiers est $n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}$.

On a donc $\omega(n) = r$.

Prouver l'inégalité : $\omega(n) = r \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

- (b) À l'aide de I-4) prouver la domination $\omega(n) = O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$.

On observera que $n \geq 2 \prod_{k=1}^{r-1} (2k+1)$ puis on prouvera, pour un réel λ qu'on déterminera, l'inégalité : $\ln n \geq (r-1) \ln(r-1) - \lambda(r-1)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$ de la probabilité uniforme, et, pour tout $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note $X_{N,r}$ la variable aléatoire suivante :

$$X_{N,r} : \begin{array}{ccc} \llbracket 1, N \rrbracket & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ divise } d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

et note $X_N = \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} X_{N,p}$ (on effectue donc la somme sur tous les entiers p **premiers** de $\llbracket 1, N \rrbracket$).

On a donc, pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $X_N(n) = \omega(n)$.

On note $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y sur l'espace précédent (elles dépendent, bien sûr, de l'entier N).

- (a) Vérifier, pour tout $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'égalité : $\mathbf{E}(X_{N,r}) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor$.
- (b) Prouver l'égalité : $\mathbf{E}(X_N^2) = \mathbf{E}(X_N) + \sum_{\substack{1 \leq p, q \leq N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor$.
- (c) En déduire, quand l'entier N tend vers $+\infty$, l'ordre de grandeur : $\mathbf{Var}(X_N) = O(\ln \ln N)$.
- (d) En déduire, à l'aide d'un résultat de la **partie I**, le résultat :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 1, N \rrbracket ; |\omega(n) - \ln \ln N| > (\ln \ln N)^{2/3} \right\} = 0.$$

Ainsi, en examinant le cas où $N = 10^{99}$, on peut s'attendre à ce que, « le plus souvent », un entier d'au plus 100 chiffres, possède entre 3 et 8 facteurs premiers distincts. Étonnant non ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout l'énoncé, p désigne un nombre entier strictement positif et $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle *solution de l'équation de réplication de matrice A*, toute application $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, dont les composantes $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_i(t) = \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle f_i(t) \quad (1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$ et $Af(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice-

colonne dans la base canonique est la matrice-produit $A \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix}$.

L'objet du problème est d'étudier la trajectoire des solutions de (1) et en particulier leurs limites en $+\infty$.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : solutions de l'équation de réplication scalaire

Dans le cas où p est égal à 1, les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ne possèdent qu'un seul coefficient et l'équation (1) se réduit à une équation différentielle scalaire, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

Soit a un nombre réel différent de 0.

On se propose de montrer que, pour tout réel $y \in]0, 1[$, il existe une unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$ vérifiant :

$$\begin{cases} x(0) = y \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = a(x(t))^2(1 - x(t)) \end{cases} \quad (2)$$

1. On note φ l'application définie sur $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (3)$$

- a) Justifier que φ est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
 - b) Donner l'allure du graphe de φ .
 - c) Les fonctions φ et φ^{-1} sont-elles lipschitziennes?
2. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, exprimer l'intégrale $\int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))} du$ à l'aide des fonctions φ et f , de t et de $f(0)$.
- b) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, qui vérifie (2) est la fonction f_y donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_y(t) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y)).$$

3. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme.
- a) Démontrer que l'application Φ qui associe à tout élément y de $]0, 1[$ la fonction f_y est une application continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- b) On note $\mathcal{S} = \{f_y; y \in]0, 1[\}$.
Justifier que $\mathcal{S}$ est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 $\mathcal{S}$ est-elle une partie ouverte de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? En est-elle une partie fermée?

Partie II : étude du cas où $p = 2$

Dans cette partie, on suppose que p est égal à 2 et on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Soit $x_0 \in]0, 1[$.

On admet qu'il existe une unique application $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) et telle que :

$$\begin{cases} f_1(0) = x_0 \\ f_2(0) = 1 - x_0 \end{cases} \quad (4)$$

1. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que g et sa dérivée g' admettent chacune une limite finie en $+\infty$.

Démontrer que la limite de la dérivée g' en $+\infty$ est nécessairement nulle.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et H une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
On considère une fonction $x : t \mapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = h(t)x(t).$$

a) Donner, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ en fonction de $x(0)$ et deux valeurs de la fonction H .

b) Que peut-on en déduire sur le signe de la fonction x si $x(0)$ n'est pas nul?

3. a) Justifier, pour tout réel t , l'égalité :

$$f_1'(t) + f_2'(t) = \langle f(t), Af(t) \rangle (1 - f_1(t) - f_2(t)).$$

b) Justifier que $f_1(t) + f_2(t)$ est égal à 1 pour tout réel t .

4. On suppose dans cette question que c est égal à d .

a) Utiliser les résultats de la partie I pour exprimer f_1 à l'aide de la fonction φ .

b) En déduire la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ selon les valeurs de a et b .

5. On suppose dans cette question que a et d sont égaux et non nuls, et que b et c sont nuls, autrement dit

$$A = a I_2 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1'(t) = a f_1(t) (1 - f_1(t)) (2f_1(t) - 1).$$

b) On suppose dans cette sous-question que x_0 est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

i) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2} < f_1(t) < 1$.

ii) En déduire que $f_1(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.

iii) Trouver, selon le signe de a , la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

c) Étudier la convergence de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ dans le cas où $x_0 < \frac{1}{2}$.

Partie III : inégalités de Pinsker

1. On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, \quad K(x, y) = x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1 - x) \ln\left(\frac{1 - x}{1 - y}\right) \quad (5)$$

a) En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, démontrer que la fonction K est minorée. Est-elle majorée?

- b) Justifier que K est de classe C^1 sur $]0, 1[\times]0, 1[$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1 K$ et $\partial_2 K$.
- c) En déduire les points où la fonction K atteint sa borne inférieure.
- d) Justifier l'inégalité :

$$x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \geq 2(x-y)^2 \quad (6)$$

2. Pour toute partie D de $\llbracket 1, p \rrbracket$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note :

$$x_D = \begin{cases} \sum_{i \in D} x_i & \text{si } D \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } D = \emptyset \end{cases}$$

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ deux éléments de $\mathbb{R}_+^p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i = 1.$$

On note $B_+ = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i > y_i\}$ et $B_- = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \leq y_i\}$.

a) Exprimer $\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$ en fonction de x_{B_+} et y_{B_+} .

b) Justifier l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^p x_i \ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \geq x_{B_+} \ln\left(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}\right) + (1 - x_{B_+}) \ln\left(\frac{1 - x_{B_+}}{1 - y_{B_+}}\right).$$

c) En déduire l'inégalité, dite de Pinsker, qui généralise l'inégalité (6) :

$$\sum_{i=1}^p x_i \ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p |x_i - y_i| \right)^2 \quad (7)$$

Partie IV : Convergence vers un point de coordonnées strictement positives

On note $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p \mid \sum_{i=1}^p x_i = 1\}$ et $\Delta^0 = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p \mid \sum_{i=1}^p x_i = 1\}$.

Soit f une solution de l'équation de répliation (1) telle que $f(0)$ appartient à Δ^0 , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(0) > 0 \\ f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_p(0) = 1 \end{cases}.$$

1. Justifier les deux assertions :

a) $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^p f_i(t) = 1$.

b) f est à valeurs dans Δ^0 .

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*) \in \Delta^0$ tel que :

$$\forall x \in \Delta \setminus \{x^*\}, \langle x^* - x, Ax \rangle > 0 \quad (8)$$

2. On note Q la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[^p$ de $\mathbb{R}^p$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in]0, 1[^p, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^* \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \quad (9)$$

- a) Justifier que $Q(x)$ est positif ou nul pour tout $x \in \Delta^0$.
- b) Justifier que x^* est l'unique élément x de Δ^0 tel que $Q(x) = 0$.
- c) Pour tout $x \in \Delta^0$, justifier les inégalités :

$$Q(x) \leq \sum_{i=1}^p \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, x_2, \dots, x_p\}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i - x_i^*)^2 \right)^{1/2}.$$

- 3. a) Justifier que la fonction composée $Q \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f , A et x^* .
- b) En déduire que $Q \circ f$ admet une limite positive ou nulle ℓ en $+\infty$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif ε tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(t) \geq \varepsilon \quad (10)$$

- a) Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $\sum_{i=1}^p (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq \varepsilon^2 \ell^2$.
- b) Justifier que, pour tout réel strictement positif α , il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \Delta, \quad \left(\langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq \alpha \right) \implies \left(\langle x^* - x, Ax \rangle \geq \beta \right).$$

- c) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que la limite ℓ de $Q \circ f$ en $+\infty$ est nulle.
- d) Démontrer que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

5. Un exemple

Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Justifier l'existence d'un unique vecteur x^* vérifiant (8) et le trouver.
- b) Démontrer que la fonction $t \mapsto f_1(t)f_2(t)f_3(t)$ est croissante.
- c) Justifier que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un nombre entier, et l'on suppose que $n \geq 2$. On considère n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, avec les hypothèses suivantes :

(α) Pour tout $1 \leq k \leq n$, la variable X_k ne peut prendre comme valeur que 0 ou 1.

(β) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \mathbb{P}(X_k = 1) < 1$.

(γ) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Dans la suite, on notera, pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$p_k = \mathbb{P}(X_k = 1), \quad q_k = 1 - p_k, \quad r_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Etant donné deux entiers naturels a et b , on utilisera dans la suite la notation $\llbracket a, b \rrbracket$ pour désigner l'ensemble des entiers j tels que $a \leq j \leq b$ (ainsi $\llbracket a, b \rrbracket$ correspond à l'ensemble vide si l'on a $a > b$).

Partie I – Calculs avec les fonctions génératrices

Pour tout nombre réel $t \in [0, +\infty[$, et tout nombre entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit

$$g_j(t) = \mathbb{E}(t^{X_j}),$$

en posant par convention que $0^0 = 1$. On définit également, pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ la variable aléatoire S_j par

$$S_j = \sum_{k=j+1}^n X_k. \quad (1)$$

On pose en outre

$$G_j(t) = \mathbb{E}(t^{S_j}),$$

toujours avec la convention que $0^0 = 1$.

1) Montrer que l'on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'identité :

$$g_j(t) = q_j + p_j t. \quad (2)$$

2) En déduire que l'on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, et $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'identité :

$$G_j(t) = \prod_{k=j+1}^n q_k (1 + r_k t). \quad (3)$$

3) A partir de (3), obtenir une expression explicite pour la dérivée $G'_j(t)$ et montrer que

$$G'_j(0) = \left(\prod_{k=j+1}^n q_k \right) \left(\sum_{k=j+1}^n r_k \right). \quad (4)$$

4) Montrer que l'on a l'identité :

$$\mathbb{P}(S_j = 1) = G'_j(0). \quad (5)$$

5) Donner une expression de l'espérance $\mathbb{E}(S_j)$ (à partir de l'expression de G_j , ou en revenant à la définition de S_j).

6) Donner une expression de la variance $\mathbb{V}(S_j)$ (à partir de l'expression de G_j , ou en revenant à la définition de S_j).

Partie II – Probabilité de s'arrêter au dernier succès

Dans cette partie, on considère un entier $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et l'on note T_s la variable aléatoire définie de la manière suivante :

$$T_s = \min \{j \in \llbracket s+1, n \rrbracket \mid X_j = 1\},$$

avec par convention $T_s = n$ s'il n'existe aucun entier $j \in \llbracket s+1, n \rrbracket$ pour lequel $X_j = 1$.

Lorsque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ représentent les résultats (1 = succès, 0 = échec) de n expériences successives, la variable aléatoire T_s correspond donc à l'indice du premier succès strictement postérieur à s lorsqu'un tel succès existe, et prend la valeur n sinon.

On introduit maintenant l'événement A_s défini par :

$$A_s = \{X_{T_s} = 1 \text{ et } X_j = 0 \text{ pour tout } j \in \llbracket T_s + 1, n \rrbracket\}.$$

L'événement A_s correspond donc au fait qu'il existe un succès strictement postérieur à s , celui-ci étant de plus le dernier succès de la séquence $X_1, \dots, X_n$.

7) Petit exemple : on suppose que $n = 5$ et que les valeurs effectivement réalisées des variables aléatoires $X_1, \dots, X_5$ sont les suivantes : $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 0$. Dans cette situation, quelles valeurs les variables aléatoires $T_0, \dots, T_4$ prennent-elles ? Parmi les événements $A_0, \dots, A_4$, quels sont ceux qui sont réalisés ?

8) Montrer que, pour tout $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a l'identité $\mathbb{P}(A_s) = \mathbb{P}(S_s = 1)$.

9) On considère un entier $s \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Montrer que l'on a l'inégalité $\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$ si et seulement si l'on a l'inégalité $\sum_{k=s+2}^n r_k \geq 1$.

Indication : Faire appel aux questions précédentes, en notant aussi que $\left(\frac{q_{s+1}}{1-q_{s+1}}\right) r_{s+1} = 1$.

10) On suppose que l'on a $\sum_{k=2}^n r_k \geq 1$, et l'on pose

$$s_n^* = \max \left\{ s \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \sum_{k=s+1}^n r_k \geq 1 \right\}.$$

(a) Montrer que s_n^* est bien défini (comme max. d'un ensemble d'entiers fini non-vidé).

(b) Montrer que la suite $(u_m)_{m=1, \dots, n}$ définie par $u_m = \sum_{k=m}^n r_k$ est décroissante.

(c) Montrer que, pour tout $s \in \llbracket 1, s_n^* \rrbracket$, on a $\sum_{k=s+1}^n r_k \geq 1$.

(d) Montrer que, pour tout $s \in \llbracket 0, s_n^* - 1 \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$.

(e) Montrer que, pour tout $s \in \llbracket s_n^* + 1, n-1 \rrbracket$, on a $\sum_{k=s+1}^n r_k < 1$.

(f) Montrer que, pour tout $s \in \llbracket s_n^*, n-2 \rrbracket$ on a $\mathbb{P}(A_s) \geq \mathbb{P}(A_{s+1})$.

(g) En déduire que la probabilité $\mathbb{P}(A_s)$ est maximale pour $s = s_n^*$, parmi les différentes valeurs de $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ possibles.

11) On suppose maintenant que l'on a $\sum_{k=2}^n r_k < 1$. Montrer que la probabilité $\mathbb{P}(A_s)$ est maximale pour $s = 0$.

12) On suppose que toutes les probabilités p_i sont égales : il existe un nombre $p \in]0, 1[$ telle que $p_1 = \dots = p_n = p$. Exprimer la valeur de s_n^* en fonction de n et p (en distinguant éventuellement différents cas).

13) Donner une expression de $\mathbb{E}(T_s | A_r)$ et de $\mathbb{E}(T_s | A_r^c)$ en fonction de n et des paramètres p_j, q_j, r_j . (On note A_r^c l'événement complémentaire de A_r .)

Partie III – Records d'une permutation aléatoire

On rappelle qu'une permutation des entiers de 1 à n est une bijection de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même, autrement dit, une application $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ telle que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un et un seul $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) = j$. Dans cette partie, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations des entiers de 1 à n , et l'on rappelle que cet ensemble comporte $n!$ éléments. On considère ensuite une permutation aléatoire Θ uniformément distribuée sur $\mathcal{S}_n$, autrement dit, Θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ vérifiant, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, l'identité $\mathbb{P}(\Theta = \sigma) = \frac{1}{n!}$.

Etant donné un entier $1 \leq i \leq n$, on introduit l'événement R_i défini par

$$R_i = \{\Theta(i) > \Theta(j) \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket\}.$$

On définit ensuite Y_i comme la variable aléatoire indicatrice de l'événement R_i , autrement dit : $Y_i = 1$ lorsque R_i se réalise, et $Y_i = 0$ dans le cas contraire.

On admettra sans preuve les deux propriétés (remarquables!) suivantes :

- (a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1/i$.
- (b) Les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.

On pose dans la suite de cette partie $X_i = Y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

14) L'une des hypothèses effectuées au début du problème n'est pas vérifiée, avec la définition des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ posée ci-dessus. Laquelle?

On admettra que, malgré l'hypothèse non-vérifiée identifiée à la question précédente, le résultat de la question 10) demeure néanmoins valable.

15) Montrer que l'événement A_r coïncide avec l'événement $\{\Theta(T_r) = n\}$.

16) Exprimer la valeur de $\sum_{k=2}^n r_k$ dans le cas étudié dans cette partie, et justifier que l'on se trouve dans le cas de la question 10).

17) Montrer que, pour tout couple d'entiers a et b tels que $2 \leq a \leq b$, on a :

$$\ln\left(\frac{b+1}{a}\right) \leq \sum_{\ell=a}^b 1/\ell \leq \ln\left(\frac{b}{a-1}\right).$$

Indication : Comparer la somme $\sum_{\ell=a}^b 1/\ell$ avec l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur des intervalles appropriés.

18) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n^*}{n} = 1/e. \quad (6)$$

Indication : Utiliser la définition de s_n^* afin d'obtenir deux inégalités pour lesquelles on peut utiliser la question 17).

19) Voici un contexte d'application possible pour les résultats précédents¹. On dispose d'une liste de n candidatures sur un poste à pourvoir. Les candidat(e)s passent un entretien individuel visant à mesurer leur aptitude vis-à-vis du poste, mais la contrainte suivante est imposée : à l'issue de chaque entretien individuel, une réponse immédiate (recrutement ou refus) doit être donnée à la personne ayant passé l'entretien, si bien que le recrutement s'achève

1. Ou, du moins, une motivation pratique justifiant l'étude de ce type de modèle. Il ne s'agit pas d'une application réaliste.

dès qu'une réponse positive a été donnée à un(e) candidat(e). On suppose que le nombre n de candidatures disponibles est élevé, et la procédure retenue pour mener le recrutement est la suivante : dans une première phase, on fait passer un entretien à un nombre s (fixé à l'avance) de candidat(e)s, qui ne recevront de toute façon pas de réponse positive. Dans une seconde phase, on procède à des entretiens avec les autres candidat(e)s, en donnant une réponse positive dès le premier entretien montrant une aptitude supérieure à l'ensemble des entretiens qui l'ont précédé (ce qui inclut les s entretiens de la première phase, plus les précédents entretiens de la seconde phase), et l'on arrête alors de faire passer des entretiens. Enfin, dans le cas où les entretiens ont continué jusqu'à la n -ème candidature, celle-ci est de toute façon retenue.

- Quels peuvent être les inconvénients liés à un choix de s trop faible ?
- Quels peuvent être les inconvénients liés à un choix de s trop élevé ?
- En supposant que les aptitudes successives des candidat(e)s soient ordonnées selon une permutation aléatoire uniformément distribuée, que suggèrent les résultats précédents quant au choix du s permettant de maximiser la probabilité de recruter la candidature présentant la plus grande aptitude parmi les n disponibles ?
- Quelles critiques formulerez-vous vis-à-vis de la procédure de recrutement envisagée ? Quelle autre procédure (respectant la contrainte d'une réponse immédiate après l'entretien) proposeriez-vous ?
- Quelles critiques formulerez-vous vis-à-vis du modèle probabiliste adopté ?

Exercice

La loi de Gumbel est caractérisée par la fonction de répartition F suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

A) Vérifier que la formule ci-dessus possède bien les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition continue :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- F est croissante ;
- F est continue.

B) Montrer que la loi de Gumbel est associée à une fonction de densité, dont on donnera l'expression.

C) Donner un équivalent simple de $1 - F(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

D) Montrer que, si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, la variable aléatoire définie par $G = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel. On rappelle la densité de la loi uniforme sur $]0, 1[$: $f(x) = 0$ pour $x \notin]0, 1[$, et $f(x) = 1$ pour $x \in]0, 1[$.

E) Etant donné un entier $N \geq 1$, on considère N variables aléatoires i.i.d. $X_1, \dots, X_N$ suivant chacune la loi de Gumbel. Montrer que la variable aléatoire Z définie par

$$Z = \max(X_1, \dots, X_N) - \ln N$$

suit également la loi de Gumbel.

Indication : Passer par la fonction de répartition de Z .

F) On considère une suite de variables aléatoires i.i.d. $(Y_n)_{n \geq 1}$ suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la convergence suivante :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_N) - \ln N \leq x) = e^{-e^{-x}}.$$

On rappelle la densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$: $f_{\mathcal{E}(1)}(x) = 0$ pour $x < 0$, et $f_{\mathcal{E}(1)}(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Maintenant, que les cultures soient en droit égales signifie-t-il qu'elles le sont en fait, et qu'à travers la différence de leurs orientations respectives se sont créées les conditions d'un certain équilibre? Non, sans doute. Il ne peut par exemple y avoir d'équilibre entre une culture qui développe, au moins dans le cadre de certaines fonctions sociales spécialisées, et à l'aide des dispositifs d'enregistrement et de communication les plus performants, les formes les plus sophistiquées, réfléchies ou formalisées de la rationalité, et une culture dont les mythes transmis oralement constituent l'architecture principale. La faiblesse du mythe réside dans son efficacité même. Les mythes expliquent le pourquoi de l'univers et l'ordre de la nature, constituent la place qu'y occupe l'homme, justifient les règles de la vie collective (...), il n'y a cependant aucun sens à les *discuter*; discutés, ils perdent leur efficacité, qui dépend du crédit sans réserve accordé à leur sens. (...) Au contraire, les lois scientifiques sont par principe proposées à la corroboration expérimentale, et les théories scientifiques à des critiques; au moins autant qu'elle cherche à dire le vrai, la pensée scientifique traque le faux sans jamais pouvoir se satisfaire entièrement des constructions déjà réalisées. La science est ainsi, peut-on dire, recherche plutôt que possession de la vérité, et c'est précisément dans cette mesure que l'expansion du savoir scientifique n'est pas destinée à trouver de terme. On ne doit pas inférer de là que le surgissement de la pensée scientifique doive détruire, là où il a lieu, toutes les structures de la pensée mythique, à laquelle la première ne laisserait ni rôle ni possibilité de subsistance. On ne supposera même pas que la première, toujours collective et largement institutionnalisée, aille de pair avec une ouverture *éthique* au monde d'autrui ou à l'altérité comme telle, supérieure à celle que peuvent montrer les représentants des cultures « primitives ». Mais tout progrès de la rationalité de type scientifique s'accompagne d'un gain de possibilités de domination – l'investissement explicite de la pensée dans des fins de domination ayant d'ailleurs de longtemps précédé en Europe la révolution scientifique du XVIIe siècle.

Aussi bien le déséquilibre dont il s'agit n'est-il pas simplement celui qui oppose les grands empires aux petites sociétés tribales. On peut d'ailleurs en prendre pour exemple la conquête de l'Amérique, où les Conquistadores semblent avoir mieux réussi à intégrer les aspects de la réalité aztèque susceptibles d'avoir pour eux de l'importance, que les Aztèques à intégrer le monde des Espagnols. Selon T. Todorov, il faut en l'occurrence évoquer l'intérêt prédominant des Aztèques pour la communication avec la nature ou avec les dieux, et leur peu de souplesse et d'ouverture dans la communication avec les hommes. A la même époque en revanche, les Espagnols s'intéressaient moins à la communication avec les instances transcendantes qu'à l'interprétation et à l'utilisation des signes humains. Leur culture avait en quelque sorte un « programme » de lecture « ouvert » qui leur permettait d'intégrer — en l'occurrence à des fins d'abord pragmatiques et nullement « humanistes » — les signes provenant d'autres cultures, quand les Aztèques avaient au contraire un « programme de lecture » fermé qui, au lieu de les inciter à découvrir le sens « propre » du comportement et de l'invasion des Espagnols, les reconduisait au système séculaire des significations de leur monde théocratique. Les Aztèques eurent ainsi tendance à traiter les Espagnols comme des dieux, et les Espagnols à traiter les Aztèques comme des bêtes.

Le genre humain a aujourd'hui cessé de se découvrir en extension. Non seulement l'exploration de la planète est achevée, mais la communication entre ses divers points a atteint, du point de vue matériel ou technique, un degré de rapidité, de fiabilité, de systématisme qu'il est encore permis de trouver stupéfiant. Cette transformation matérielle, dont les

conséquences sur la vie des hommes sont d'autant plus considérables qu'elles se conjuguent avec d'autres espèces de transformations induites par la technique, est issue d'une souche culturelle déterminée, qui est, il est vrai, irréductible à une simple tradition (il s'agit plutôt d'une tradition de remise en cause de la tradition), et s'est montrée susceptible d'être transplantée loin au-delà de son aire d'origine. Sur le plan proprement culturel, ces conséquences sont contrastées. D'un côté, avec l'importance partout acquise par le « support » télévisuel, il faut faire état de la diffusion planétaire d'une « culture de masse » produite industriellement, et qui tend à imposer partout une mémoire élémentaire, un imaginaire et des modèles de comportement rigoureusement stéréotypés. D'un autre côté, les révolutions de la communication ont multiplié les possibilités d'ouverture sur les cultures étrangères, et rendent même, en certaines régions du monde du moins, la conscience et l'acceptation des cultures plus générales qu'elles n'ont jamais été. La manière dont, depuis le début du XXe siècle, l'art européen — musique aussi bien que peinture ou sculpture — a su et voulu intégrer des formes originaires d'autres régions du monde symbolisait d'avance les virtualités du métissage et la nécessité moderne de l'intercommunication. L'information « en temps réel » sur les conflits qui persistent ou se créent dans telle ou telle région du monde élargit les préoccupations de chacun à des maux qui autrefois auraient été difficilement connus; elle favorise les réactions de l'« opinion publique internationale » dans une mesure qui fait du contrôle de cette information un enjeu stratégique d'une importance jamais égalée. La relation des hommes entre eux, à l'intérieur de chaque région du monde ou à l'échelle de la planète, en est-elle profondément transformée? Le « genre humain » se réalise-t-il comme tel dans une plus grande mesure qu'à d'autres moments de l'histoire?

Ici encore, le diagnostic sera contrasté. L'époque de l'action humanitaire est aussi celle du repli identitaire. Le mouvement vers la communauté planétaire se double partout — non seulement dans les parties les plus démunies ou les plus désorganisées du monde, mais dans le monde occidental lui-même — d'un mouvement à rebours qui vise au contraire à promouvoir et à consolider, sous une forme aisément raciste, et sans remise en cause des discriminations sociales et sexuelles, les particularismes de toutes sortes, supposés pourvus de valeur par eux-mêmes, sinon érigés en source de toute valeur. En raison notamment de conditions macro-économiques impitoyables, il faut admettre avec Lévi-Strauss que les conditions de la tolérance réciproque — « d'une part, une égalité relative, de l'autre une distance suffisante » — sont choses que « les sociétés contemporaines sont plus éloignées que jamais de connaître » (...) La préoccupation humanitaire, la sympathie pour les cultures étrangères à la nôtre sont des dispositions qui peuvent relever pour nous d'une sorte d'évidence; savoir comment faire vivre ce que les stoïciens ont appelé, pour faire de sa conservation le plus général de tous les devoirs, la « société universelle du genre humain », cela en revanche pourrait bien constituer désormais la plus cruciale de toutes les questions.

Max MARCUZZI, *Le genre humain*, in *Notions de Philosophie*, 1995.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Water shortages could affect 5bn people by 2050, UN report warns

The Guardian, Mon 19 Mar 2018.

Jonathan Watts in Brasília.

More than 5 billion people could suffer water shortages by 2050 due to climate change, increased demand and polluted supplies, according to a UN report on the state of the world's water.

The comprehensive annual study warns of conflict and civilisational threats unless actions are taken to reduce the stress on rivers, lakes, aquifers, wetlands and reservoirs.

The World Water Development Report – released in drought-hit Brasília – says positive change is possible, particularly in the key agricultural sector, but only if there is a move towards nature-based solutions that rely more on soil and trees than steel and concrete.

“For too long, the world has turned first to human-built, or ‘grey’, infrastructure to improve water management. In doing so, it has often brushed aside traditional and indigenous knowledge that embraces greener approaches,” says Gilbert Houngbo, the chair of UN Water, in the preface of the 100-page assessment. “In the face of accelerated consumption, increasing environmental degradation and the multi-faceted impacts of climate change, we clearly need new ways of managing competing demands on our freshwater resources.”

Humans use about 4,600 cubic km of water every year, of which 70% goes to agriculture, 20% to industry and 10% to households, says the report, which was launched at the start of the triennial World Water Forum. Global demand has increased sixfold over the past 100 years and continues to grow at the rate of 1% each year.

This is already creating strains that will grow by 2050, when the world population is forecast to reach between 9.4 billion and 10.2 billion (up from 7.7 billion today), with two in every three people living in cities.

Demand for water is projected to rise fastest in developing countries. Meanwhile, climate change will put an added stress on supplies because it will make wet regions wetter and dry regions drier.

Drought and soil degradation are already the biggest risk of natural disaster, say the authors, and this trend is likely to worsen. “Droughts are arguably the greatest single threat from climate change,” it notes. The challenge has been most apparent this year in Cape Town, where residents face severe restrictions as the result of a once-in-384-year drought. In Brasília, the host of the forum, close to 2m people have their taps turned off once in every five days due to a unusually protracted dry period.

By 2050, the report predicts, between 4.8 billion and 5.7 billion people will live in areas that are water-scarce for at least one month each year, up from 3.6 billion today, while the number of people at risk of floods will increase to 1.6 billion, from 1.2 billion.

In drought belts encompassing Mexico, western South America, southern Europe, China, Australia and South Africa, rainfall is likely to decline. The shortage cannot be offset by groundwater supplies, a third of which are already in distress. Nor is the construction of more dams and reservoirs likely to be a solution, because such options are limited by silting, runoff and the fact that most cost-effective and viable sites in developed countries have been identified.

Water quality is also deteriorating. Since the 1990s, pollution has worsened in almost every river in Africa, Asia and Latin America, and it is expected to deteriorate further in the

coming two decades, mainly due to agriculture runoffs of fertiliser and other agrochemicals that load freshwater supplies with nutrients that lead to the growth of pathogens and choking algae blooms. Industry and cities are also a significant problem. About 80% of industrial and municipal wastewater is discharged without treatment.

Crucially, the report emphasises a shift away from watershed management towards a wider geographic approach that takes in land use in distant areas, particularly forests. Although farmers have long seen trees as a drain on water supplies, the authors recognise more recent studies that show vegetation helps to recycle and distribute water. This was apparent in the São Paulo drought of 2014-15, which the city's water authorities and scientists have linked to Amazon deforestation.

The key for change will be agriculture, the biggest source of water consumption and pollution. The report calls for "conservation agriculture", which would make greater use of rain-water rather than irrigation and regularise crop rotation to maintain soil cover. This would also be crucial to reverse erosion and degradation, which currently affects a third of the planet's land, a different UN study found last year.

Perhaps the most positive message of the report is that the potential savings of such practices exceed the projected increase in global demand for water, which would ease the dangers of conflict and provide better livelihoods for family farmers and poverty reduction.

Nature-based solutions can be personal – such as dry toilets – or broad landscape-level shifts in agricultural practices. The report contains several positive case studies that show how environments and supplies can improve as a result of policy changes. In Rajasthan, more than 1,000 drought-stricken villages were supported by small-scale water harvesting structures, while a shift back towards traditional soil preservation practices in the Zarqa basin in Jordan are credited with a recovery of water quality in local springs.

The authors stress the goal is not to replace all grey infrastructure, because there are situations where there is no other choice, for example in building reservoirs to supply cities with water. But they urge greater take-up of green solutions, which are often more cost-effective as well as sustainable. They also encourage more use of "green bonds" (a form of financing that aims to reward long-term sustainable investments) and more payments for ecosystem services (cash for communities that conserve forests, rivers and wetlands that have a wider benefit to the the environment and society).

Audrey Azoulay, the director-general of Unesco, which commissioned the report, noted two-thirds of the world's forests and wetlands have been lost since the turn of the 20th century – a trend that needs to be addressed. "We all know that water scarcity can lead to civil unrest, mass migration and even to conflict within and between countries," she said. "Ensuring the sustainable use of the planet's resources is vital for ensuring long-term peace and prosperity."

The World Water Forum is the biggest single gathering of policymakers, businesses and NGOs involved in water management. It is being held in the southern hemisphere for the first time, and is expected to draw 40,000 participants.

Among them are indigenous and other grassroots activists who believe the event is too close to government, agriculture and business. They are staging an alternative forum in Brasília that puts greater emphasis on community management of water as a free public resource.

2 Translate the following text into French

Climate change cases predicted to make a legal splash in 2018

A clutch of high-profile legal cases over responsibility for the effects of climate change will be fought out in courtrooms next year as claims stack up against both governments and some of the world's biggest oil and energy companies.

Lawsuits in the United States brought by young activists and several Californian cities are most likely to make waves, but legal action by a Peruvian farmer in Germany and Greenpeace in Norway could also cause ripples, said lawyers and academics.

"There is a trend towards more litigation around climate change, and probably the lack of political action in the United States may increase that trend," said Sophie Marjanac, a London-based lawyer at non-profit environmental law group ClientEarth.

Lawyers and campaigners are closely watching the looming legal battles they say could set the stage for fresh claims against major oil and industrial companies, and pressure governments to ramp up action on climate change.

With U.S. President Donald Trump and his cabinet members named as defendants, the *Juliana v. United States* case brought by 21 young activists from Oregon is set to be one of the most closely followed in 2018.

In the federal case, scheduled for trial in February, the plaintiffs hope to establish that the government's climate change policies have failed to protect their constitutional right to live in a habitable environment.

Lawyers and academics say *Juliana* builds on the groundbreaking *Urgenda* case brought by hundreds of Dutch citizens in 2015, which saw the government ordered by a district court to accelerate reductions of greenhouse gas emissions.

Elsewhere, a January judgment is expected in a case brought by Greenpeace Nordic and environmental group *Nature and Youth* against Norway, which they claim has breached its pledge to combat climate change by granting oil and gas exploration rights.

A successful ruling against a heavyweight corporate could potentially unleash a wave of similar claims, say case watchers, who reference long-running fights against tobacco, asbestos and pesticide manufacturers over harm to human health.

Adapted from *Reuters*, December 28, 2017.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique. Mathématiques.

Partie I. Préliminaires

1) (a) Soit $n \geq n_0$.

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (S_{n+1} - S_n) - \left(\int_{n_0}^{n+1} f(t) dt - \int_{n_0}^n f(t) dt \right) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt.$$

Puisque la fonction f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, pour tout réel $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) - f(t) \leq 0$ puis $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leq 0$. La suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante.

Soit $n \geq n_0$. Toujours par décroissance de la fonction f sur $[n_0, +\infty[$,

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n (k+1-k)f(k) \geq \sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt$$

puis $\gamma_n \geq \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt - \int_{n_0}^n f(t) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0$ car f est positive sur $[n_0, +\infty[$. La suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ converge vers un certain réel positif ou nul.

(b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. D'après la question précédente, il existe un réel positif ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1).$$

Pour $n \geq 2$, $\int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$ et donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \ell + o(1).$$

Le réel $C = -\ln(\ln 2) + \ell$ convient.

(c) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2 \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et pour $X \geq 2$,

$$\int_2^X \frac{1}{t \ln^2 t} dt = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^X = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln X}.$$

Quand X tend vers $+\infty$, $\int_2^X \frac{1}{t \ln^2 t} dt$ converge vers le réel $\frac{1}{\ln 2}$ et donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t} dt$ est une intégrale convergente. Mais alors, la suite $\left(\int_2^n \frac{1}{t \ln^2 t} dt \right)_{n \geq 2}$ est une suite convergente.

Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 \ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ (en tant qu'inverse d'une fonction croissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$), la suite $(\gamma_n)_{n \geq 2}$ converge d'après la question (a). Mais alors, la suite $(S_n)_{n \geq 2} = \left(\int_2^n \frac{1}{t \ln^2 t} dt \right)_{n \geq 2} + (\gamma_n)_{n \geq 2}$ converge. On a montré que la série de terme général $\frac{1}{k \ln^2 k}$, $k \geq 2$, converge.

2) $k^{3/2} \frac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\frac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$. Puisque $\frac{3}{2} > 1$, la série de terme général $\frac{1}{k^{3/2}}$, $k \geq 2$, converge, il en est de même de la série de terme général $\frac{\ln k}{k(k-1)}$, $k \geq 2$.

3) a) Soit $n \geq 2$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue et croissante sur $]1, +\infty[$. Donc,

$$\sum_{k=2}^n \ln k \geq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t \, dt = \int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

(b) D'autre part, $\sum_{k=2}^n \ln k \leq \sum_{k=2}^n \ln n = (n-1) \ln n \leq n \ln n$. En résumé, pour $n \geq 2$,

$$n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq n \ln n.$$

On en déduit que pour $n \geq 2$,

$$\left| \frac{\left(\sum_{k=2}^n \ln k \right) - n \ln n}{n} \right| \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$$

et donc $\frac{\left(\sum_{k=2}^n \ln k \right) - n \ln n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ puis $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n + O(n)$.

4) a) Soit $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, on pose $f_n(x) = x \ln x - \lambda x - \ln n$. f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'_n(x) = \ln x + 1 - \lambda.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_n(x) = +\infty$. Puisque la fonction f'_n est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction f'_n s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$ en un certain réel α , d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

De plus, la fonction f'_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. Donc, f'_n est injective sur $]0, +\infty[$ ce qui assure l'unicité d'un réel en lequel f'_n s'annule. Puisque la fonction f'_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, pour $0 < x < \alpha$, on a $f'_n(x) < f'_n(\alpha) = 0$ et pour $x > \alpha$, on a $f'_n(x) > 0$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\ln n \leq 0$, on en déduit que pour tout $x \in]0, \alpha]$, $f_n(x) < 0$ et en particulier, $f_n(x) \neq 0$. En suite, f_n est continue et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et de plus, $f_n(\alpha) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty > 0$ (car $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln x$).

On en déduit que f_n s'annule une fois et une seule sur $[\alpha, +\infty[$.

En résumé, f_n s'annule une fois et une seule dans $]0, +\infty[$. Ceci montre l'existence et l'unicité de r_n .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $r_n \ln r_n - \lambda r_n = \ln n$. D'autre part, l'étude de la fonction $x \mapsto x - \ln x$ (qui admet un minimum en 1 égal à 1) montre que $\forall x > 0$, $x > \ln x$ et donc, puisque $r_n > 0$,

$$r_n^2 > r_n \ln r_n = \ln n + \lambda r_n \geq \ln n,$$

puis $r_n > \sqrt{\ln n}$. Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$. Mais alors,

$$\ln n = r_n \ln r_n - \lambda r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n \ln r_n.$$

On en déduit encore que $\ln(\ln n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(r_n \ln r_n) = \ln(r_n) + \ln(\ln(r_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(r_n)$ et donc que $\ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n \ln(\ln n)$. Finalement,

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}.$$

5) (a) i. Soient F une partie finie de $\mathbb{N}^*$ puis $m = \text{card}(F)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq d_n(F) = \frac{1}{n} \text{card}(F \cap [1, n]) \leq \frac{1}{n} \text{card}(F) = \frac{m}{n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(F) = 0$ et donc que $d(F) = 0$.

(a) ii. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a\mathbb{N}^* \cap [1, n] = \{ka \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq ka \leq n\}$. Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq ka \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq k \leq \frac{n}{a} \Leftrightarrow 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{a} \right].$$

Donc, $\text{card}(\mathbb{a}\mathbb{N}^* \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ (y compris si $n < a$) puis

$$d_n(\mathbb{a}\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{a} - 1 \right) \leq d_n(\mathbb{a}\mathbb{N}^*) \leq \frac{1}{n} \times \frac{n}{a} = \frac{1}{a},$$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(\mathbb{a}\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a}$. Par suite, $d(\mathbb{a}\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a}$.

(a) iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $C \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \{k^2 / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq k^2 \leq n\} = \{k^2 / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq k \leq \sqrt{n}\}$. Donc, $\text{card}(C \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ puis

$$d_n(C) = \frac{1}{n} \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n(C) \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(C) = 0$. Par suite, $d(C) = 0$.

(b) Soient E_1 et E_2 deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n(\mathbb{N}^* \setminus E_1) = \frac{1}{n} \text{card}((\mathbb{N}^* \setminus E_1) \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \frac{1}{n} (n - \text{card}(E_1 \cap \llbracket 1, n \rrbracket)) = 1 - d_n(E_1).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $d_n(\mathbb{N}^* \setminus E_1)$ tend vers $1 - d(E_1)$. Donc, $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ admet une densité et $d(\mathbb{N}^* \setminus E_1) = 1 - d(E_1)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d_n(E_1 \cup E_2) &= \frac{1}{n} \text{card}((E_1 \cup E_2) \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \frac{1}{n} \text{card}((E_1 \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \cup (E_2 \cap \llbracket 1, n \rrbracket)) \\ &= \frac{1}{n} (\text{card}(E_1 \cap \llbracket 1, n \rrbracket) + \text{card}(E_2 \cap \llbracket 1, n \rrbracket)) \\ &= d_n(E_1) + d_n(E_2). \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, $d_n(E_1 \cup E_2)$ tend vers $d(E_1 \cup E_2)$. Donc, $E_1 \cup E_2$ admet une densité et $d(E_1 \cup E_2) = d(E_1) + d(E_2)$.

(c) Montrons qu'il existe une partie de $\mathbb{N}^*$ n'ayant pas de densité.

On commence par écrire $E = \{1, 3, \dots\}$ de sorte que $d_2(E) = \frac{1}{2}$ puis on complète de manière à refaire passer $d_n(E)$ au dessus de $\frac{3}{4}$: $E = \{1, 3, 4, \dots\}$ de sorte que $d_2(E) = \frac{1}{2}$ et $d_4(E) = \frac{3}{4}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\frac{1}{2}$: $E = \{1, 3, 4, 8, \dots\}$: $d_8(E) = \frac{1}{2}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\frac{3}{4}$: $E = \{1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots\}$ de sorte que $d_{16}(E) = \frac{3}{4}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\frac{1}{2}$: $E = \{1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 26, \dots\}$ de sorte que $d_{26}(E) = \frac{1}{2}$...

La suite $(d_n(E))$ n'est pas convergente car cette suite admet deux suites extraites, convergentes, de limites distinctes ($\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$). L'ensemble E ainsi « construit » n'admet donc pas de densité.

On en déduit que d n'est pas une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

6) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, $0 < m < m+1 < 2m+1$ puis

$$\begin{aligned} 2^{2m+1} &= (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{(2m+1)-(m+1)} \\ &= 2 \binom{2m+1}{m}, \end{aligned}$$

puis $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m} = 4^m$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit p un nombre premier tel que $r+1 < p \leq 2r+1$.

$$\binom{2r+1}{r} = \frac{(2r+1)(2r)\dots(r+2)}{r!}$$

puis $\prod_{k=r+2}^{2r+1} k = r! \binom{2r+1}{r}$. p divise $\prod_{k=r+2}^{2r+1} k = r! \binom{2r+1}{r}$. Mais, puisque p est un nombre premier strictement supérieur à r , p est premier avec chacun des entiers $1, 2, \dots, r$ et donc p est premier avec le produit de ces entiers, c'est-à-dire $r!$. En résumé, p divise $r! \binom{2r+1}{r}$ et p est premier avec $r!$. D'après le théorème de GAUSS, p divise $\binom{2r+1}{r}$.

Ainsi, $\binom{2r+1}{r}$ est divisible par chacun des nombres premiers p tels que $r+1 < p \leq 2r+1$ et donc $\binom{2r+1}{r+1}$ est divisible par $\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$.

(c) Montrons par récurrence forte que $\forall n \geq 2, \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$.

- $\prod_{\substack{p \leq 2 \\ p \in \mathcal{P}}} p = 2 \leq 16 = 4^2$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.

- Soit $n \geq 2$. Supposons que $\forall k \in [2, n], \prod_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^k$.

Si $n+1$ est pair, puisque $n+1 \geq 3$, $n+1$ n'est pas premier. Donc, par hypothèse de récurrence,

$$\prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}.$$

Sinon $n+1$ est impair et donc, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ (car $n+1 \geq 3$) tel que $n+1 = 2r+1$ et donc aussi $r = \frac{n}{2}$. D'après la

question précédente, $\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise $\binom{2r+1}{r}$ et en particulier, $\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq \binom{2r+1}{r}$. D'après la question

6)(a) et par hypothèse de récurrence (car $r+1 < r+r+1 = n+1$ ou encore $r+1 \leq n$),

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p &= \left(\prod_{\substack{p \leq r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \right) \times \left(\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \right) \\ &\leq 4^{r+1} \times \binom{2r+1}{r} \leq 4^{r+1} \times 4^r = 4^{2r+1} = 4^{n+1}. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

7) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de compter le nombre de multiple de p^k qui appartiennent à $[1, n]$. Or, pour $q \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq qp^k \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leq q \leq \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Il y a donc $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ multiples de p^k qui appartiennent à $[1, n]$ ou encore $\alpha_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= v_p(1) + v_p(2) + \dots + v_p(n) = \sum_{d=1}^n v_p(d) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{d \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ v_p(d)=k}} v_p(d) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\sum_{\substack{d \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ v_p(d)=k}} 1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \beta_k \text{ (la somme étant en fait finie).}
\end{aligned}$$

(c) $v_p(d) = k$ si et seulement si p^k divise d et p^{k+1} ne divise pas d . Il y a α_k entiers éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ divisibles par p^k auxquels on retire les α_{k+1} entiers éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ divisibles par p^{k+1} et on obtient $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ puis

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \beta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha_{k+1} \text{ (les sommes sont finies)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha_k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

(d) Puisque $0 < \frac{1}{p} < 1$, on en déduit que

$$v_p(n!) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$$

et d'autre part,

$$v_p(n!) \geq \mathbb{E} \left(\frac{n}{p} \right) \geq \frac{n}{p} - 1.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathcal{P}, \frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$.

8) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k &= \varepsilon_1 a_1 + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) = \varepsilon_1 A_1 + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k A_k - \sum_{k=2}^n \varepsilon_k A_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_k - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{k+1} A_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n.
\end{aligned}$$

9) a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $|X_N(\omega) - \mathbb{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$|X_N(\omega) - a_N| \leq |X_N(\omega) - (a_N + b_N)| + |b_N| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3} + |b_N|.$$

D'autre part, (b_N) est une suite bornée et a_N tend vers $+\infty$ (et donc $a_N^{2/3}$ tend vers $+\infty$). Donc, pour N assez grand, $|b_N| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3}$ (car par exemple, $\frac{|b_N|}{a_N^{2/3}}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$). Par suite, pour N assez grand,

$$|X_N(\omega) - a_N| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3} + \frac{1}{2} a_N^{2/3} = a_N^{2/3}.$$

Ainsi, pour N assez grand, $\left[|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \subset \left[|X_N - a_N| \leq a_N^{2/3} \right]$.

(b) Par passage au complémentaire, on en déduit déjà que pour N assez grand, $\left[|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right] \subset \left[|X_N - E(X_N)| > \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right]$ et donc que

$$0 \leq P\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) \leq P\left(|X_N - E(X_N)| > \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right) \leq P\left(|X_N - E(X_N)| \geq \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right).$$

En suite, d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV,

$$0 \leq P\left(|X_N - a_N| \geq \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right) \leq \frac{4V(X_N)}{a_N^{4/3}}.$$

Par hypothèse, $\frac{4V(X_N)}{a_N^{4/3}} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{a_N^{1/3}}\right)$ et en particulier, $\frac{V(X_N)}{a_N^{4/3}} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Mais alors,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = 0.$$

Partie II. Deux résultats asymptotiques

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln p$ est une somme vide et donc $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln p = 0 = \ln(n!)$.

Sinon, $n \geq 2$ puis $n! \geq 2$. Un facteur premier de $n!$ est un nombre premier p divisant le produit $1 \times 2 \times \dots \times n$ et donc divisant l'un des entiers 2 ou 3 ou ... ou n . En particulier, $p \leq n$. La décomposition primaire de $n!$ peut donc s'écrire

$$n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(n!)}$$

et on en déduit encore une fois que

$$\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln p.$$

(b) D'après la question 7.(d),

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n!)}{n} &= \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{v_p(n!)}{n} \ln p \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p-1} = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} + \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \\ &\leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k(k-1)} = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} + K \end{aligned}$$

et donc $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} \geq \frac{\ln(n!)}{n} - K$. D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n!)}{n} &= \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{v_p(n!)}{n} \ln p \geq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) \ln p \\ &= \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \ln p = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \right) \\ &\geq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n} \ln(4^n) \quad (\text{d'après la question 6.(c)}) \\ &= \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} - \ln 4 \end{aligned}$$

et donc $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} \leq \frac{\ln(n!)}{n} + \ln 4$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n!)}{n} - K \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} \leq \frac{\ln(n!)}{n} + \ln 4.$$

(c) On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n!)}{n} + O(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n \ln n + O(n)}{n} + O(1) \text{ (d'après la question 3.(c))} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + O(1). \end{aligned}$$

2) a) Soit $n \geq 3$. On pose de plus, pour $k \geq 2$, $\varepsilon_k = \frac{1}{\ln k}$. D'après la question 8,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} \frac{\chi(k) \ln k}{k} = \sum_{k=2}^n \varepsilon_k a_k = \sum_{k=2}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \frac{A_n}{\ln n}. \end{aligned}$$

De plus, pour $k \geq 2$,

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)}$$

et donc,

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln n}.$$

(b) D'après la question II.1.(c), $A_k = \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln p}{p} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \ln k + O(1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)} A_k &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \times \frac{A_k}{\ln k} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\ln k + O\left(\frac{1}{k}\right)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right) \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k \ln k} \frac{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k \ln k}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right) \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k \ln k} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{k \ln k}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k \ln k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)^3 \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k \ln k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k \ln k} + O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right). \end{aligned}$$

(c) On en déduit déjà que $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln(n+1)} A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$ et donc que $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2 n \frac{1}{n \ln n} = \ln n$ puis que

$\frac{A_n}{\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ et en particulier $\frac{A_n}{\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$. D'autre part, d'après la question I.1.(c), la série de terme général $\frac{1}{k \ln^2 k}$ converge et donc la série de terme général $O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$ converge. On en déduit que $\sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$. Par suite, d'après la question I.1.(b),

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)} A_k &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} + \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) + C + o(1) + O(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1). \end{aligned}$$

puis

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1) + O(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1).$$

Partie III.

1) a) Soit $n \geq 2$. Tout facteur premier de n est supérieur ou égal à 2. Donc,

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^r p_k \geq \prod_{k=1}^r 2 = 2^r$$

puis $\ln n \geq r \ln 2 = \omega(n) \ln 2$ et donc $\omega(n) \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

(b) Supposons $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Si $r \geq 2$, les nombres premiers distincts de 2 sont impairs. Donc, $p_1 \geq 2$, puis, par récurrence, $\forall k \in \llbracket 2, r \rrbracket$, $p_k \geq 2k - 1$. On en déduit que

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^r p_k \geq 2 \prod_{k=2}^r (2k - 1) = 2 \prod_{k=1}^{r-1} (2k + 1).$$

Si $r = 1$, l'inégalité reste vraie avec la convention $\prod_{k=1}^{r-1} (2k + 1) = 1$.

Si $r \geq 2$, (erreur d'énoncé ?) on obtient

$$\begin{aligned} \ln n &\geq \ln \left(2 \prod_{k=1}^{r-1} (2k + 1) \right) = \ln \left(2 \frac{(2r) \times (2r - 1) \times \dots \times 3 \times 2}{(2r) \times (2r - 2) \times \dots \times 4 \times 2} \right) = \ln \left(\frac{(2r)!}{2^{r-1} r!} \right) \\ &= \ln((2r)!) - \ln(r!) - (r - 1) \ln 2 \\ &\geq (2r \ln(2r) - (2r) + 1) - (r \ln r) - (r - 1) \ln 2 \text{ (d'après la question I.3.(a))} \\ &= r \ln r + 2r \ln 2 - 2r - r \ln 2 + \ln 2 + 1 = r \ln r - (2 - \ln 2)r + 1 + \ln 2 \\ &\geq r \ln r - (2 - \ln 2)r + 2 - \ln 2 = r \ln r - (2 - \ln 2)(r - 1) \\ &\geq (r - 1) \ln(r - 1) - (2 - \ln 2)(r - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, si f est la fonction $f : x \mapsto x \ln x - \lambda x$ de la question I.4.(a) (avec $\lambda = 2 - \ln 2 > 0$), on a pour $r \geq 2$

$$f(r - 1) = (r - 1) \ln(r - 1) - (2 - \ln 2)(r - 1) \leq \ln n = f(r_n).$$

L'étude de la fonction f effectuée à la question I.4.(a) montre que $r - 1 \leq r_n$ (car on ne peut avoir $r - 1 > r_n$) (ce qui reste vrai si $r = 1$) puis, d'après la question I.4.(b)

$$\omega(n) = r \leq r_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}\right).$$

On a montré que $\omega(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}\right)$.

2) (a) Le nombre de multiples de r qui sont éléments de $\llbracket 1, d \rrbracket$ est $\left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor$ (où $[x]$ est la partie entière du réel x) d'après la question I.5.(a).ii, et donc

$$E(X_{N,r}) = \frac{1}{N} \sum_{d=1}^N X_{N,r}(d) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{r \text{ divise } d \\ 1 \leq d \leq N}} 1 = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor.$$

On en déduit encore par linéarité que

$$E(X_N) = \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} E(X_{N,p}) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor.$$

(b) On note tout d'abord que pour tout $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $X_{N,r}^2 = X_{N,r}$ puis, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(X_N^2) &= E \left(\sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2}} X_{N,p} X_{N,q} \right) = E \left(\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} X_{N,p}^2 + \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} X_{N,p} X_{N,q} \right) \\ &= E \left(\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} X_{N,p} \right) + \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} E(X_{N,p} X_{N,q}) \\ &= E(X_N) + \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} E(X_{N,p} X_{N,q}). \end{aligned}$$

Maintenant, si $p \neq q$, $X_{N,p} X_{N,q}(d) = 1 \Leftrightarrow d$ multiple de p et de $q \Leftrightarrow d$ multiple de pq . Donc, comme précédemment, $E(X_{N,p} X_{N,q}) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor$. On a montré que

$$E(X_N^2) = E(X_N) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor.$$

(c) Tout d'abord $0 \leq E(X_N) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \leq \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p}$. D'après la question II.2.(c), $\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln N) + O(1)$ et donc,

$$E(X_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(\ln(\ln N)).$$

Ensuite, d'après la formule de KOËNIG-HUYGENS,

$$\begin{aligned} V(X_N) - E(X_N) &= E(X_N^2) - (E(X_N))^2 - E(X_N) = \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor - \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \right)^2 \\ &\leq \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{1}{N} \frac{N}{pq} - \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{N} \left(\frac{N}{p} - 1 \right) \right)^2 \\ &\quad (\text{pour } N \text{ suffisamment grand de sorte que } \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{N} \left(\frac{N}{p} - 1 \right) \geq 0) \\ &= \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{1}{pq} - \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 V(X_N) - E(X_N) &\leq \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2 \text{ et } p \neq q}} \frac{1}{pq} - \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - 1 \right)^2 \quad (\text{toujours pour } N \text{ assez grand}) \\
 &= \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} \right)^2 - \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p^2} - \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - 1 \\
 &\leq 2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 \leq V(X_N) \leq E(X_N) + 2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, on a $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ et donc

$$E(X_N) + 2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(\ln(\ln N)).$$

Finalement, $V(X_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(\ln(\ln N))$.

(d) Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 E(X_N) &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{N}{p} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{N}{p} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\left[\frac{N}{p} \right] - \frac{N}{p} \right) \\
 &= \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\left[\frac{N}{p} \right] - \frac{N}{p} \right) \\
 &= \ln(\ln N) + \left(\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\left[\frac{N}{p} \right] - \frac{N}{p} \right) \right).
 \end{aligned}$$

On pose alors $a_N = \ln(\ln N)$ et $b_N = \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) - \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{N}{p} - \left[\frac{N}{p} \right] \right)$ de sorte que $E(X_N) = a_N + b_N$.

(a_N) est une suite positive, de limite $+\infty$. D'autre part, $\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ d'après la question II.2.(c) puis

$$0 \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{N}{p} - \left[\frac{N}{p} \right] \right) \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} 1 \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 = 1.$$

On en déduit que (b_N) est une suite bornée en tant que somme de deux suites bornées. Enfin, d'après la question précédente, $V(X_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} O(a_N)$.

D'après la question, I.9.(b), $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) = 0$ ou encore

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(|X_N - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|X_N - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}\right) &= \frac{1}{N} \text{card} \left\{ \mathfrak{n} \in \llbracket 1, N \rrbracket, |X_N(\mathfrak{n}) - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \text{card} \left\{ \mathfrak{n} \in \llbracket 1, N \rrbracket, |\omega(\mathfrak{n}) - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3} \right\}. \end{aligned}$$



|

**Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques. Option A**

Partie I. Solutions de l'équation de réplication scalaire

1) (a) Pour $x \in]0, 1[$, $\varphi(x) = -\frac{1}{x} + \ln x - \ln(1-x)$. φ est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout réel x ,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x) + x(1-x) + x^2}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2(1-x)} > 0.$$

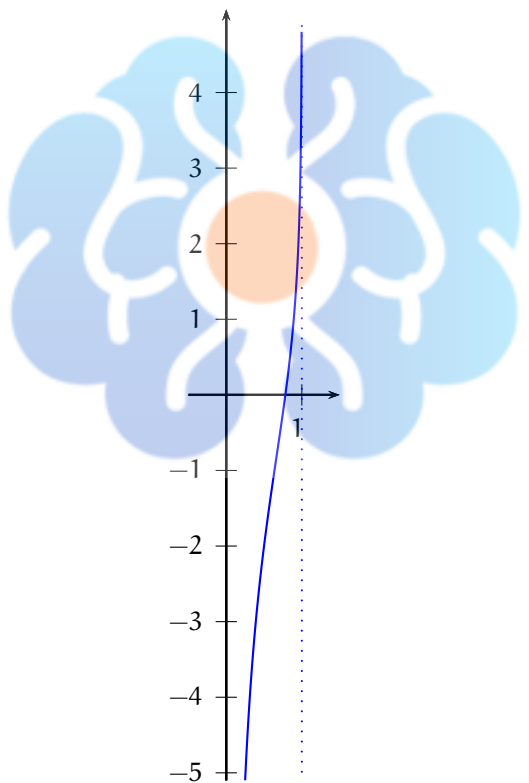
φ est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$. Donc, φ est une bijection de $]0, 1[$ sur $\varphi(]0, 1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) \right[$.

Pour $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{-1 + x \ln x}{x} - \ln(1-x)$ et donc $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x}$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

D'autre part, $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-x)$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = +\infty$.

Finalement, φ est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Allure du graphe de φ .



(c) Soit a un réel donné de $]0, 1[$, $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ et donc $\sup \left\{ \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}, (x, y) \in]0, 1[^2, x \neq y \right\} = +\infty$. φ n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1[$. Par contre, φ' est continue et donc bornée sur tout segment de $]0, 1[$ et donc φ est lipschitzienne sur tout segment de $]0, 1[$.

Pour $x \in]0, 1[$, posons $u(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3$. Pour $x \in]0, 1[$, $u'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$. u est strictement positive sur $]0, 1[$ et admet un maximum en $\frac{2}{3}$ égal à $u\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$. Donc, pour tout réel x de $]0, 1[$, $\varphi'(x) \geq \frac{27}{4}$.

Puisque la fonction φ' ne s'annule pas sur $]0, 1[$, on sait que la fonction φ^{-1} est dérivable sur $\varphi(]0, 1[) = \mathbb{R}$ puis que, pour tout réel y ,

$$0 \leq (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \leq \frac{4}{27}.$$

Ainsi, $(\varphi^{-1})'$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et on sait alors que φ^{-1} est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (par exemple de rapport $\frac{4}{27}$).

2) (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, la fonction $u \mapsto \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de l'intégrale proposée.

D'après la question, la fonction $u \mapsto \varphi(f(u))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction $u \mapsto \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}$. Donc,

$$\int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))} du = [\varphi(f(u))]_0^t = \varphi(f(t)) - \varphi(f(0)).$$

(b) Existence. Pour tout réel t , posons $f(t) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y))$. La fonction $t \mapsto at + \varphi(y)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction φ^{-1} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$. Donc, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$ puis, pour tout réel t

$$f'(t) = \frac{a}{\varphi'(\varphi^{-1}(at + \varphi(y)))} = a (\varphi^{-1}(at + \varphi(y)))^2 (1 - \varphi^{-1}(at + \varphi(y))) = a(f(t))^2(1 - f(t))$$

et d'autre part, $f(0) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$. Donc, la fonction f convient. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f_y(t) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y))$.

Unicité. Soit f est une solution de (2). Nécessairement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$ et pour tout réel t ,

$$\varphi(f(t)) - \varphi(y) = \varphi(f(t)) - \varphi(f(0)) = \int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))} du = \int_0^t a du = at$$

puis

$$f(t) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y)) = f_y(t).$$

Ceci démontre l'unicité de f_y .

3) (a) Soit $[a, b] \subset]0, 1[$. Soit $(y, z) \in [a, b]^2$. Pour tout réel t , d'après la question 1.(c),

$$\begin{aligned} |f_y(t) - f_z(t)| &= |\varphi^{-1}(at + \varphi(y)) - \varphi^{-1}(at + \varphi(z))| \leq \frac{4}{27} |(at + \varphi(y)) - (at + \varphi(z))| = \frac{4}{27} |\varphi(y) - \varphi(z)| \\ &\leq \frac{4}{27} \|\varphi'\|_{\infty, [a, b]} |y - z| \text{ (d'après l'inégalité des accroissements finis),} \end{aligned}$$

et donc, $\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_{\infty} \leq \frac{4}{27} \|\varphi'\|_{\infty, [a, b]} |y - z|$. L'application Φ est donc lipschitzienne sur $[a, b]$ et en particulier continue sur $[a, b]$.

Ainsi, Φ est continue sur tout segment de $]0, 1[$ et donc sur $]0, 1[$.

(b) • $]0, 1[$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et Φ est continue sur $]0, 1[$ à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (car pour tout $y \in]0, 1[$ et tout réel t , $0 < f(t) < 1$). Donc, $\mathcal{S} = \Phi([0, 1])$ est un connexe par arcs de $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

• Soit $g = f_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}$. Pour $\varepsilon > 0$ et pour $t \in \mathbb{R}$, posons $h_{\varepsilon}(t) = g(t) + \frac{2}{\pi} \varepsilon \operatorname{Arctan} t$. h_{ε} est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\|h_{\varepsilon} - g\|_{\infty} = \varepsilon$. De plus, $h_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2}$ puis $a(h_{\varepsilon}(0))^2(1 - h_{\varepsilon}(0)) = \frac{a}{8}$ et $h'_{\varepsilon}(0) = g'(0) + \frac{2}{\pi} \varepsilon = \frac{a}{8} + \frac{2}{\pi} \varepsilon$. Pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, $h'_{\varepsilon}(0) \neq a(h_{\varepsilon}(0))^2(1 - h_{\varepsilon}(0))$ et donc $h_{\varepsilon} \notin \mathcal{S}$.

Ceci montre que toute boule ouverte $B(g, \varepsilon)$ sauf peut-être une, contient au moins un élément h_{ε} de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui n'est pas dans $\mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S}$ n'est pas une partie ouverte de l'espace vectoriel $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$.

• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément et en particulier simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y_n)).$$

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f_n(0) \in]0, 1[$ puis que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$. $f(0)$ est donc nécessairement un élément de $[0, 1]$.

• Si $y = f(0) \in]0, 1[$, alors pour tout réel t , par continuité de φ sur $]0, 1[$ et de φ^{-1} sur $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(at + \varphi(y_n)) = \varphi^{-1}(at + \varphi(y)) = f_y(t),$$

et donc, la fonction f est la fonction f_y . Ainsi, f est un élément de $\mathcal{S}$.

- Si $f(0) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(y_n) = -\infty$ et donc, pour tout réel t , on a nécessairement

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(at + \varphi(y_n)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi^{-1}(x) = 0.$$

f est donc nécessairement la fonction nulle. Mais pour $n \in \mathbb{N}$, si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_n(t) - f(t)| = 1$ et si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |f_n(t) - f(t)| = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\|_\infty \geq 1$ ce qui contredit le fait que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- De même, si $f(0) = 1$, f est nécessairement la fonction constante $t \mapsto 1$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

En résumé, toute suite d'éléments de $\mathcal{S}$, qui converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, converge dans $\mathcal{S}$. Donc, $\mathcal{S}$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Partie II. Etude du cas où $p = 2$

1) Notons ℓ la limite de g en $+\infty$ et ℓ' la limite de g' . Soit $x > 0$. La fonction g est continue sur $[x, 2x]$ et dérivable sur $]x, 2x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]x, 2x[$ tel que $g(2x) - g(x) = xg'(c(x))$. Quand x tend vers $+\infty$, $g(2x) - g(x)$ tend vers $\ell - \ell = 0$. D'autre part, puisque $c(x) > x$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(c(x)) = \ell'$. Si $\ell' \neq 0$, $g(2x) - g(x) \sim \ell'x$ ce qui contredit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(2x) - g(x) = 0$. Donc, $\ell' = 0$.

2) (a)

$$\begin{aligned} x' = hx &\Rightarrow x' - hx = 0 \Rightarrow e^{-H}x' - he^{-H}x = 0 \Rightarrow (e^{-H}x)' = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{-H(t)}x(t) = e^{-H(0)}x(0) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x(0)e^{H(t)-H(0)}. \end{aligned}$$

(b) Si $x(0) > 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) > 0$ et si $x(0) < 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) < 0$. En particulier, la fonction x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Enfin, si $x(0) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$.

3) (a) Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f_1'(t) + f_2'(t) &= \langle e_1 - f(t), Af(t) \rangle f_1(t) + \langle e_2 - f(t), Af(t) \rangle f_2(t) \\ &= \langle f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2, Af(t) \rangle - \langle f(t), Af(t) \rangle f_1(t) - \langle f(t), Af(t) \rangle f_2(t) \\ &= \langle f(t), Af(t) \rangle - \langle f(t), Af(t) \rangle f_1(t) - \langle f(t), Af(t) \rangle f_2(t) \\ &= \langle f(t), Af(t) \rangle (1 - f_1(t) - f_2(t)). \end{aligned}$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $x(t) = f_1(t) + f_2(t) - 1$ et $h(t) = -\langle f(t), Af(t) \rangle$ de sorte que pour tout réel t , $x'(t) = h(t)x(t)$. On a $x(0) = f_1(0) + f_2(0) - 1 = x_0 + 1 - x_0 - 1 = 0$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après la question précédente, pour tout réel t , $x(t) = 0$ ou encore, pour tout réel t , $f_1(t) + f_2(t) = 1$.

4) (a) Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} \langle e_1 - f(t), Af(t) \rangle &= (1 - f_1(t)) (af_1(t) + cf_2(t)) - f_2(t) (bf_1(t) + cf_2(t)) \\ &= (1 - f_1(t)) ((a - c)f_1(t) + c) - (1 - f_1(t)) ((b - c)f_1(t) + c) \\ &= (a - b) (1 - f_1(t)) f_1(t) \end{aligned}$$

et donc

$$f_1'(t) = (a - b) (f_1(t))^2 (1 - f_1(t)).$$

Si $a = b$, alors pour tout réel t , $f_1'(t) = 0$ puis pour tout réel t , $f_1(t) = f_1(0) = x_0$.

Si $a \neq b$, d'après la question I.2.(b), pour tout réel t , $f_1(t) = \varphi^{-1}((a - b)t + \varphi(x_0))$ (ce qui reste vrai quand $a = b$).

(b) Pour tout réel t , $f(t) = (\varphi^{-1}((a - b)t + \varphi(x_0)), 1 - \varphi^{-1}((a - b)t + \varphi(x_0)))$.

Si $a > b$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (a - b)t + \varphi(x_0) = +\infty$ puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}((a - b)t + \varphi(x_0)) = 1$. Dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (1, 0)$.

Si $a < b$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (a - b)t + \varphi(x_0) = -\infty$ puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}((a - b)t + \varphi(x_0)) = 0$. Dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (0, 1)$.

Si $a = b$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (x_0, 1 - x_0)$.

5) (a) Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned}\langle e_1 - f(t), Af(t) \rangle &= \alpha((1 - f_1(t))f_1(t) - f_2(t)f_2(t)) = \alpha((1 - f_1(t))f_1(t) - (1 - f_1(t))^2) \\ &= \alpha(1 - f_1(t))(2f_1(t) - 1)\end{aligned}$$

et donc, pour tout réel t ,

$$f'_1(t) = \alpha f_1(t)(1 - f_1(t))(2f_1(t) - 1).$$

(b).i. La question II.2.b) appliquée aux fonctions $x = 1 - f_1$ et $h = -\alpha f_1(2f_1 - 1)$ montre que $1 - f_1$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Puisque $(1 - f_1)(0) = 1 - x_0 > 0$, on a donc pour tout réel t , $1 - f_1(t) > 0$ puis $f_1(t) < 1$.

La question II.2.b) appliquée aux fonctions $x = 2f_1 - 1$ et $h = 2\alpha f_1(1 - f_1)$ montre que $2f_1 - 1$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Puisque $(2f_1 - 1)(0) = 2x_0 - 1 > 0$, on a donc pour tout réel t , $2f_1(t) - 1 > 0$ puis $f_1(t) > \frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout réel t , $\frac{1}{2} < f_1(t) < 1$.

(b).ii. Puisque pour tout réel t , $f'_1(t) = \alpha f_1(t)(1 - f_1(t))(2f_1(t) - 1)$, on en déduit que pour tout réel t , $\text{sgn}(\alpha)(f'_1(t)) = +$. La fonction f_1 est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction f_1 est bornée. On en déduit que f_1 a une limite réelle ℓ quand t tend vers $+\infty$.

(b).iii. D'autre part, la fonction f'_1 tend vers le réel $\alpha\ell(1 - \ell)(2\ell - 1)$ quand t tend vers $+\infty$. D'après la question II.1, on doit avoir $\alpha\ell(1 - \ell)(2\ell - 1) = 0$.

• Si $\alpha > 0$, puisque pour tout réel t , $\frac{1}{2} < f_1(t) < 1$ et que f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\frac{1}{2} < \ell \leq 1$. Puisque $\alpha\ell(1 - \ell)(2\ell - 1) = 0$, on en déduit que $\ell = 1$. Donc, si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (1, 0)$.

• Si $\alpha < 0$, f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\frac{1}{2} \leq \ell < 1$ et donc $\ell = \frac{1}{2}$ puisque $\alpha\ell(1 - \ell)(2\ell - 1) = 0$.
Donc, si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) La fonction f_2 vérifie de même : pour tout réel t , $f'_2(t) = \alpha f_2(t)(1 - f_2(t))(2f_2(t) - 1)$ et $f_2(0) = 1 - x_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

D'après la question précédente, si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (0, 1)$ et si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Partie III. Inégalité de Pinsker

1) (a) La fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, est négative sur $]0, +\infty[$. Donc, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, $\lambda \ln a + (1 - \lambda) \ln b \leq \ln(\lambda a + (1 - \lambda)b)$. Par suite, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$\begin{aligned}K(x, y) &= x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - (x \ln y + (1 - x) \ln(1 - y)) \geq x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - \ln(xy + (1 - x)(1 - y)) \\ &\geq x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - \ln(1 + 1) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - \ln 2.\end{aligned}$$

La fonction $\psi : x \mapsto x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - \ln 2$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1 (en posant $\psi(0) = \psi(1) = -\ln 2$). Son prolongement est alors une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - \ln 2$ est bornée sur $]0, 1[$ et en particulier, est minorée sur $]0, 1[$.

Ceci montre que la fonction K est minorée sur $]0, 1[^2$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $K(x, 1 - x) = x \ln \left(\frac{x}{1 - x}\right) + (1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{x}\right) = (2x - 1) \ln \left(\frac{x}{1 - x}\right)$ puis $\lim_{x \rightarrow 1} K(x, 1 - x) = +\infty$. On en déduit que la fonction K n'est pas majorée sur $]0, 1[^2$.

(b) Les fractions rationnelles $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ et $(x, y) \mapsto \frac{1 - x}{1 - y}$ sont de classe C^1 sur $]0, 1[^2$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $\ln$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Donc, les fonctions $(x, y) \mapsto \ln \left(\frac{x}{y}\right)$ et $(x, y) \mapsto \ln \left(\frac{1 - x}{1 - y}\right)$ sont de classe C^1 sur $]0, 1[^2$. Il en est de même de la fonction K puis, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, y) = \ln \left(\frac{x}{y}\right) + 1 - \ln \left(\frac{1 - x}{1 - y}\right) - 1 = \ln \left(\frac{x(1 - y)}{y(1 - x)}\right)$$

puis, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$, $K(x, y) = x \ln x - x \ln y + (1-x) \ln(1-x) - (1-x) \ln(1-y)$ et donc

$$\frac{\partial K}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{1-x}{1-y} = \frac{-x(1-y) + y(1-x)}{y(1-y)} = \frac{y-x}{y(1-y)}.$$

(c) Soit $x \in]0, 1[$ fixé. La fonction $\Psi : y \mapsto K(x, y)$ est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée $\Psi' : y \mapsto \frac{y-x}{y(1-y)}$. La fonction Ψ' est strictement négative sur $]0, x[$ et strictement positive sur $]x, 1[$. La fonction Ψ admet donc un minimum global strict sur $]0, 1[$ égal à $\Psi(x) = x \ln \left(\frac{x}{x}\right) + (1-x) \ln \left(\frac{1-x}{1-x}\right) = 0$.

Ainsi, $\forall (x, y) \in]0, 1[^2$, $K(x, y) \geq 0$ avec égalité si et seulement $x = y$ ou encore, la fonction K admet sur $]0, 1[^2$ un minimum égal à 0 et ce minimum est atteint en tous les (x, x) , $x \in]0, 1[$, et seulement en ces points.

(d) Soit $x \in]0, 1[$ fixé. La fonction $L_x : y \mapsto K(x, y) - 2(x-y)^2$ est dérivable sur $]0, 1[$ et pour $y \in]0, 1[$

$$\frac{L_x}{dx}(y) = \frac{y-x}{y(1-y)} - 4(y-x) = \frac{y-x}{y(1-y)}(1-4y(1-y)) = \frac{(y-x)(2y-1)^2}{y(1-y)}.$$

Encore une fois, la fonction L_x admet un minimum en $y = x$ avec $L_x(x) = 0$.

Donc, $\forall (x, y) \in]0, 1[^2$, $K(x, y) - 2(x-y)^2 = L_x(y) \geq 0$ puis, $\forall (x, y) \in]0, 1[^2$, $x \ln \left(\frac{x}{y}\right) + (1-x) \ln \left(\frac{1-x}{1-y}\right) \geq 2(x-y)^2$.

2) (a) Puisque $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p |x_i - y_i| &= \sum_{i \in B_+} (x_i - y_i) + \sum_{i \in B_-} (y_i - x_i) = \sum_{i \in B_+} x_i - \sum_{i \in B_+} y_i + \left(1 - \sum_{i \in B_+} y_i\right) - \left(1 - \sum_{i \in B_+} x_i\right) \\ &= 2(x_{B_+} - y_{B_+}). \end{aligned}$$

(b) Si, par l'absurde, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $x_i > y_i$, alors $1 = \sum_{i=1}^p x_i > \sum_{i=1}^p y_i = 1$ ce qui est impossible. Donc, $B_- \neq \emptyset$.

Si $B_+ = \emptyset$ alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \leq y_i$. Si de plus, par l'absurde, il existe $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors $1 = \sum_{i=1}^p x_i < \sum_{i=1}^p y_i = 1$ ce qui est impossible.

En résumé, B_- est non vide et de plus, B_+ est vide si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = y_i$.

Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = y_i$ alors $x_{B_+} = 0$, $y_{B_+} = 0$ (erreur d'énoncé?) et $\sum_{i=1}^p x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i}\right) = 0$.

Sinon, B_+ et B_- sont non vides et dans ce cas, $0 < x_{B_+} < \sum_{i=1}^p x_i = 1$ et de même $y_{B_+} \in]0, 1[$ puis

$$\sum_{i=1}^p x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i}\right) = \sum_{i \in B_+} x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i}\right) + \sum_{i \in B_-} x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i}\right)$$

Inachevé.

(c) Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = y_i$, alors l'inégalité à établir est immédiate. Sinon, $x_{B_+} \in]0, 1[$ et $y_{B_+} \in]0, 1[$ puis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i}\right) &\geq x_{B_+} \ln \left(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}\right) + (1-x_{B_+}) \ln \left(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}\right) = K(x_{B_+}, y_{B_+}) \\ &\geq 2(x_{B_+} - y_{B_+})^2 \text{ (d'après III.1.d)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|\right)^2 \text{ (d'après III.2.a)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|\right)^2. \end{aligned}$$

Partie IV. Convergence vers un point de coordonnées strictement positives

1) (a) Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'_i(t) = \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle f_i(t)$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^p f_i \right)'(t) &= \sum_{i=1}^p \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle f_i(t) = \left\langle \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i, Af(t) \right\rangle - \left(\sum_{i=1}^p f_i(t) \right) \langle f(t), Af(t) \rangle \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^p f_i(t) \right) \langle f(t), Af(t) \rangle \end{aligned}$$

puis

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p f_i \right)'(t) = -\langle f(t), Af(t) \rangle \left(1 - \sum_{i=1}^p f_i(t) \right).$$

Par suite, la fonction $x = 1 - \sum_{i=1}^p f_i$ vérifie $x' = hx$ où pour tout réel t , $h(t) = -\langle f(t), Af(t) \rangle$. Puisque $x(0) = 0$ et que h

est continue sur $\mathbb{R}$, la question II.2.b permet d'affirmer que $x = 0$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^p f_i(t) = 1$.

(b) Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $h_i : t \mapsto \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle$. h_i est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f'_i = h_i f_i$. De plus, $f_i(0) > 0$. D'après la question II.2.b, pour tout réel t , $f_i(t) > 0$. Puisque pour tout réel t , $\sum_{i=1}^p f_i(t) = 1$, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f_i(t) \in]0, 1[$ (si $p \geq 2$). Donc, f est à valeurs dans Δ^0 .

2) (a) Soit $x \in \Delta^0$. Puisque x^* est aussi dans Δ^0 , d'après l'inégalité (7) de la question II.2.c,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^* \ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p |x_i^* - x_i| \right)^2 \geq 0.$$

(b) De plus, si $x \neq x^*$, $Q(x) > 0$ et d'autre part,

$$Q(x^*) = \sum_{i=1}^p x_i^* \ln \left(\frac{x_i^*}{x_i^*} \right) = 0.$$

(c) Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Si $x_i^* > x_i > 0$, $\ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right) = \int_{x_i}^{x_i^*} \frac{dt}{t} \leq \int_{x_i}^{x_i^*} \frac{dt}{x_i} = \frac{1}{x_i} (x_i^* - x_i)$.

Si $0 < x_i^* \leq x_i$, $-\ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right) = \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{dt}{t} \geq \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{dt}{x_i} = \frac{1}{x_i} (x_i - x_i^*)$ et encore une fois $\ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right) \leq \frac{1}{x_i} (x_i^* - x_i)$.

Puisque chaque x_i^* est positif, on a dans tous les cas $x_i^* \ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right) \leq \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$Q(x) \leq \sum_{i=1}^p \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) &\leq \sum_{i=1}^p \frac{x_i^*}{x_i} |x_i^* - x_i| \\
&\leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_p\}} \sum_{i=1}^p x_i^* |x_i^* - x_i| \\
&\leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_p\}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i^* - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\
&\leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_p\}} \left(\sum_{i=1}^p x_i^* \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i^* - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{car pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i^* \in [0, 1]) \\
&= \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_p\}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i^* - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \Delta^0, Q(x) \leq \sum_{i=1}^p \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_p\}} \left(\sum_{i=1}^p (x_i^* - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans Δ^0 (d'après la question IV.1) et Q est de classe C^1 sur Δ_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, $Q \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t ,

$$Q(f(t)) = \sum_{i=1}^p x_i^* \ln(x_i^*) - \sum_{i=1}^p x_i^* \ln(f_i(t))$$

et donc

$$\begin{aligned}
(Q \circ f)'(t) &= - \sum_{i=1}^p x_i^* \frac{f_i'(t)}{f_i(t)} = - \sum_{i=1}^p x_i^* \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle \\
&= - \left\langle \sum_{i=1}^p x_i^* e_i, Af(t) \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^p x_i^* \right) \langle f(t), Af(t) \rangle \\
&= - \langle x^*, Af(t) \rangle + \langle f(t), Af(t) \rangle = - \langle x^* - f(t), Af(t) \rangle.
\end{aligned}$$

(b) Par hypothèse, pour tout réel t , $\langle x^* - f(t), Af(t) \rangle \geq 0$ (puisque $f(t)$ est dans Δ^0) et donc pour tout réel t , $(Q \circ f)'(t) \leq 0$. La fonction $Q \circ f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $Q \circ f$ est minorée par 0 d'après la question IV.2.a. On en déduit que la fonction $Q \circ f$ a une limite en $+\infty$ qui est un réel ℓ positif ou nul.

4) (a) D'après la question IV.2.c, pour tout réel t ,

$$0 \leq Q(f(t)) \leq \frac{1}{\min\{f_1(t), \dots, f_p(t)\}} \left(\sum_{i=1}^p (f_i(t) - x_i^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc, puisque la fonction $Q \circ f$ tend vers ℓ en décroissant,

$$\sum_{i=1}^p (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq (\min\{f_1(t), \dots, f_p(t)\})^2 (Q(f(t)))^2 \geq \varepsilon^2 \ell^2.$$

(b) • Soit $\alpha > 0$. Soit $B = B_o(x^*, \sqrt{\alpha})$. Vérifions que $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. Si $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) = \emptyset$, c'est immédiat. On suppose dorénavant $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) \neq \emptyset$.

B est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et donc $C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$. D'autre part, l'application $\varphi : x \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ car linéaire (et $\dim \mathbb{R}^p < +\infty$). Donc, $\Delta = \varphi^{-1}\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue. Finalement, $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout x de Δ , $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p x_i = 1$ et donc Δ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$. Il en est de même de $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$.

Finalement, $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$. Puisque $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, le théorème de BOREL-LEBESGUE permet d'affirmer que $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

• Soit $\alpha > 0$. Si $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) = \emptyset$, n'importe quel réel strictement positif β convient (puisque pour $x \in \Delta$, la proposition $\|x - x^*\|^2 \geq \alpha$ est toujours fausse).

Supposons dorénavant $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) \neq \emptyset$. La fonction $\psi : x \mapsto \langle x^* - x, Ax \rangle$ est polynomiale en les composantes de x et est donc continue sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On en déduit que l'application ψ admet un minimum sur le compact $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$. Par suite, il existe $a \in \Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ tel que pour tout $x \in \Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$, $\langle x^* - x, Ax \rangle \geq \langle x^* - a, Aa \rangle$. Soit $\beta = \langle x^* - a, Aa \rangle$. Par construction, $a \neq x^*$ (car $\|a - x^*\|^2 \geq \alpha > 0$) et donc $\beta > 0$.

On a montré qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que : $\forall x \in \Delta, (\|x - x^*\|^2 \geq \alpha \Rightarrow \langle x^* - x, Ax \rangle \geq \beta)$.

(c) Pas trouvé.

(d) Pas trouvé.

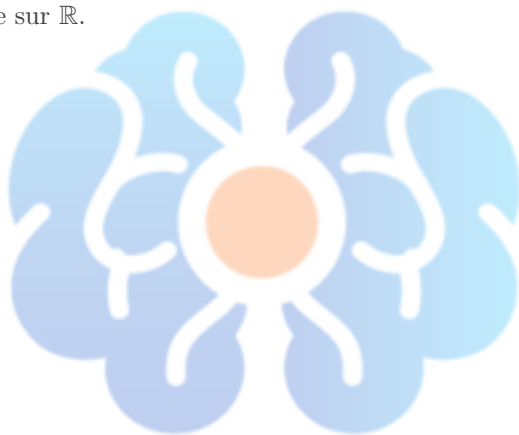
5) (a) Pas trouvé.

(b) Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 f_3)'(t) &= f_1'(t) f_2(t) f_3(t) + f_1(t) f_2'(t) f_3(t) + f_1(t) f_2(t) f_3'(t) \\ &= (\langle e_1 - f(t), Af(t) \rangle + \langle e_2 - f(t), Af(t) \rangle + \langle e_3 - f(t), Af(t) \rangle) f_1(t) f_2(t) f_3(t) \\ &= 3 \left\langle \frac{1}{3} (e_1 + e_2 + e_3) - f(t), Af(t) \right\rangle f_1(t) f_2(t) f_3(t) \\ &= 3 \langle x^* - f(t), Af(t) \rangle f_1(t) f_2(t) f_3(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $f_1 f_2 f_3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Pas trouvé.

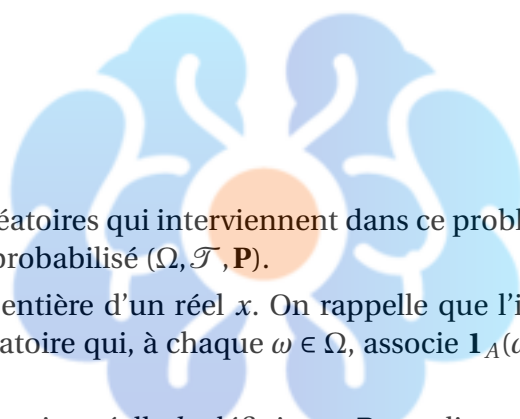


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x . On rappelle que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A est la variable aléatoire qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On rappelle qu'une fonction réelle h , définie sur $\mathbb{R}$, est dite convexe si, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a : $h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$. Le candidat se rappellera, ou admettra, que si une fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et convexe alors, pour tout réel a , la fonction $p_a : x \mapsto \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Partie I - Préliminaires

On établit ici des résultats qui seront utilisés dans la suite du problème. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout entier naturel, non nul n , $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Quelle est, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n ?
 (b) Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \lambda + \varepsilon\right) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

2. Soit $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mu < x$.

On considère l'application Ψ qui, à chaque réel $\theta \geq 0$, associe

$$\Psi(\theta) = \exp\left(\mu(e^\theta - 1) - \theta x\right).$$

- (a) Montrer que la fonction Ψ a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa valeur.
 (b) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = n(\lambda + \varepsilon)$ et $\mu = n\lambda$.
 Justifier, dans ces conditions, l'existence d'un réel $a > 0$ (fonction de λ et ε mais pas de n) pour lequel $\min_{\theta \geq 0} \Psi(\theta) = e^{-an}$.

3. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$.

- (a) Prouver, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in [0, 2^n]$, l'inégalité :

$$g\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}g(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)g(y).$$

On pourra raisonner par récurrence sur l'entier n , et observer que, si p est un entier, on a l'égalité : $\frac{2p + (2p + 2)}{2} = 2p + 1$.

- (b) On pose $D = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{k}{2^n} ; k \in [0, 2^n] \right\}$ et on considère un réel λ de $[0, 1]$.

On note, pour tout entier naturel n , $d_n = \frac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$.

Vérifier que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D , **croissante** et convergente vers λ .

- (c) On suppose, de plus, que la fonction g est croissante. Montrer qu'elle est convexe.

4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance.

- (a) Rappeler l'inégalité de Markov.

- (b) On suppose, de plus, la variable X à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité

$$\mathbf{P}(X \geq x) \leq \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbf{E}(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}.$$

5. Soit X une variable aléatoire, **possédant une espérance** et telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$. On note, pour tout entier naturel n , $\alpha_n = \mathbf{E}(X \mathbf{1}_{[X \leq x_n]})$.

- (a) Prouver la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$.

Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a :

$$\mathbf{E}(X) - \varepsilon \leq \alpha_n.$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{E}(X)$.

- (c) Soit β la fonction qui, à chaque réel $K \geq 0$ associe, $\beta(K) = \mathbf{E}(X \mathbf{1}_{[X \leq K]})$.

Prouver l'égalité $\lim_{K \rightarrow +\infty} \beta(K) = \mathbf{E}(X)$.

On admet que ce résultat est valable pour toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concave et décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Justifier l'existence d'une limite finie, négative ou nulle, à droite en x , pour la fonction $u \mapsto \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$. On note θ_0 cette limite.

- (b) Prouver, pour tout réel u , l'inégalité : $f(u) \leq f(x) + \theta_0(u - x)$.

- (c) En déduire l'égalité

$$\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) + \theta(u - x)) = f(x),$$

en ayant, pour tout réel θ , posé $\sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) + \theta(u - x)) = +\infty$ quand la fonction $u \mapsto f(u) + \theta(u - x)$ n'est pas majorée.

7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$.

- (a) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}(X > t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit r un entier naturel.

Prouver l'égalité $\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbf{P}(X > x_k)$, puis l'égalité

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t) dt = \sum_{k=1}^r x_k \mathbf{P}(X = x_k) + x_{r+1} \mathbf{P}(X > x_r).$$

- (c) Prouver que la variable aléatoire X a une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t) dt$ converge et que, dans ce cas, on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t) dt.$$

On admet que ce résultat s'étend à toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

8. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'inégalité :

$$v_{m+n} \leq v_m + v_n.$$

(a) Justifier l'existence du nombre $\rho = \inf \left\{ \frac{v_n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho \leq \frac{v_N}{N} < \rho + \varepsilon$.

Soit $(k, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $n = kN + r$. Prouver l'inégalité $\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_N}{N} + \frac{v_r}{n}$ et en déduire, pour tout entier n assez grand, l'encadrement $\rho \leq \frac{v_n}{n} \leq \rho + 2\varepsilon$.

On en déduit ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \rho$.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, à valeurs **positives ou nulles**, indépendantes et suivant toutes la loi de X_1 . On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On suppose, de plus, que, pour tout réel t , $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

9. (a) Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_{m+n} \geq mu + nv) \geq \mathbf{P}(S_m \geq mu) \mathbf{P}(S_n \geq nv).$$

(b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel u , l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_n \geq nu) > 0.$$

(c) En déduire que, pour tout réel u , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbf{P}(S_n \geq nu)}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln \mathbf{P}(S_n \geq nu)}{n}$.

Partie II - Le théorème de Cramer

1. Une inégalité

(a) Soit J une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de J , l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans J . Prouver que la partie J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier que la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln \mathbf{E}(e^{\theta X_1})$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_-$.

(c) Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta \in I$, dans les cas où X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ ou la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

2. (a) Vérifier que la fonction $H : u \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \ln (\mathbf{P}(S_n \geq nu))$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est décroissante.

(b) Prouver, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité : $H\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(H(u) + H(v))$.

On utilisera I - 9.

(c) Qu'en déduit-on pour la fonction H ?

3. Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$.

(a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}) = \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1})\right)^n$.

(b) En déduire, pour tout réel u et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geq \frac{1}{n} \ln \left(e^{n\theta u} \mathbf{P}(S_n \geq nu) \right).$$

(c) Conclure à l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geq \sup_{u \in \mathbb{R}} (\theta u + H(u)).$$

4. Le cas d'égalité si $\theta = 0$

Établir l'égalité : $\varphi(0) = \sup_{u \in \mathbb{R}} H(u)$.

5. L'autre inégalité si $\theta > 0$

On rappelle que les variables X_k sont discrètes, à valeurs positives ou nulles, indépendantes et suivent toutes la loi de X_1 , et que, pour tout réel t , $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

Soit $K > 0$, $\theta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) i. Prouver l'inégalité :

$$\ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{[X_1 \leq K]}) \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i \leq K]}) \right).$$

ii. En déduire l'inégalité :

$$\ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{[X_1 \leq K]}) \right) \leq \frac{1}{n} \ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{[S_n \leq nK]}) \right).$$

(b) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{[S_n \leq nK]}$ et établir l'inégalité :

$$\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{[S_n \leq nK]}) \leq \int_0^{\exp(n\theta K)} \mathbf{P}(e^{\theta S_n} > t) dt.$$

(c) En déduire l'inégalité $\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{[S_n \leq nK]}) \leq 1 + n\theta \int_0^K \mathbf{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du$, puis l'inégalité :

$$\ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{[X_1 \leq K]}) \right) \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + n\theta K \exp(nM(\theta)) \right),$$

où l'on a posé $M(\theta) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (\theta u + H(u))$.

6. Prouver, pour tout réel K assez grand et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\ln \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{[X_1 \leq K]}) \right) \leq \frac{\ln(2n\theta K)}{n} + M(\theta).$$

7. En déduire l'inégalité : $\varphi(\theta) \leq M(\theta)$.

Il y a donc égalité via 3 - (c).

8. Conclure, pour tout réel x , à l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n \geq nx) = \inf_{\theta \geq 0} \left(\ln \mathbf{E}(e^{\theta X_1}) - \theta x \right).$$

9. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ pour lequel, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \lambda + \varepsilon\right) \leq e^{-an}.$$

(b) Retrouver ce résultat, en utilisant les résultats des questions I - 2 et I - 4, dans le cas particulier où X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude de quelques fonctions périodiques, bâties à partir de la distance à une partie de $\mathbb{R}$ et utilisées notamment en théorie du signal et en théorie des probabilités.

- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble des opposés des éléments de A :

$$-A = \{-a; a \in A\}.$$

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel strictement positif t , on dit que la fonction f est t -périodique si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x).$$

On dit que f est périodique s'il existe un réel strictement positif t pour lequel la fonction f est t -périodique. Dans ce cas, on appelle *période* de f la borne inférieure de l'ensemble des réels strictement positifs t pour lesquels la fonction f est t -périodique.

Par exemple, la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période égale à 1, et toute fonction constante est périodique, de période égale à 0.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes, mais les matrices introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie IV.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : une famille de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note T_c la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$T_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

On considère d'autre part la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1. a) Pour quelles valeurs de c la matrice T_c est-elle diagonalisable?
 b) Existe-t-il une valeur de c et une matrice inversible P pour lesquelles les deux matrices $P^{-1}T_cP$ et $P^{-1}SP$ sont diagonales?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer la matrice $(T_{1/2})^n$.

b) En déduire, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, la matrice $S^m (T_{1/2})^n$.

c) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{G}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable par le produit matriciel et contenant les matrices S et $T_{1/2}$.

Justifier que toutes les matrices de $\mathcal{G}$ sont de la forme $2^{-n} \begin{pmatrix} 2^n & h & k \\ 0 & (-1)^m & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(h, k, \ell) \in \mathbb{Z}^3$

et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

d) Quelles sont les matrices de $\mathcal{G}$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $+1$ ou à -1 ?

Partie II : distances à une partie de $\mathbb{R}$

3. a) Justifier, pour tout réel x et pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, l'existence de la distance de x à A , c'est-à-dire du nombre réel positif ou nul

$$d(x, A) = \inf\{|x - a|; a \in A\}.$$

b) Quels sont les nombres réels x pour lesquels la distance $d(x, A)$ de x à une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est nulle?

c) Justifier que, si A est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe pour tout réel x un élément a_x de A tel que :

$$|x - a_x| = d(x, A).$$

4. Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, on note d_A la fonction $x \mapsto d(x, A)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a) Dessiner le graphe de la fonction d_A lorsque $A = \{-1, 0, +1\}$.

b) Démontrer que si $A = -A$, alors la fonction d_A est paire et que la réciproque est vraie lorsque A est fermée.

c) Démontrer que, si l'ensemble A est minoré ou majoré, alors la fonction d_A n'est pas bornée.

d) Donner un exemple d'ensemble A qui n'est ni minoré ni majoré, pour lequel la fonction d_A n'est pas bornée.

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$d_A(y) \leq d_A(x) + |y - x| + \varepsilon.$$

b) En déduire que la fonction d_A est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier que, si la fonction d_A est dérivable et nulle en un point x_0 , alors sa dérivée en ce point est nécessairement nulle.

6. On considère dans cette question une suite strictement décroissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, convergente et de limite nulle, et on note :

$$A = \mathbb{R}_-^* \cup \{u_n; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

a) Justifier que 0 appartient à la frontière de A et que la fonction d_A s'annule en 0.

b) On considère ici le cas où $u_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $d_A\left(\frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})\right)$ et en déduire que la fonction d_A n'est pas dérivable à droite au point 0.

c) On considère maintenant le cas où $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que la fonction d_A est dérivable au point 0 et indiquer les autres points où elle est dérivable.

Partie III : signaux triangulaires

7. Dans cette question, on suppose que A est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

a) Donner la fonction d_A lorsque $A = \{0\}$ et lorsque A est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que, dans tous les autres cas, il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \alpha d_{\mathbb{Z}}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On note désormais σ la fonction $d_{\mathbb{Z}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) = \min\{|x - n|; n \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

8. a) Justifier l'expression de $d_{\mathbb{Z}}(x)$ donnée par (1).

b) Vérifier que la fonction σ est paire, périodique et de période égale à 1.

c) Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t) dt$.

d) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t) \cos(2\pi n t) dt = \begin{cases} -\frac{1}{n^2 \pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Pour tout $r \in]0, 1[$, on note P_r l'application $t \mapsto \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(2\pi t) + r^2}$.

9. a) Vérifier que, pour tout $r \in [0, 1[$, la fonction P_r est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Démontrer que l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{+1/2} P_r(t) dt$ tend vers 0 quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\cos(2\pi n t)) x^n$ est égal à 1.

b) Établir, pour tout $r \in [0, 1[$, l'égalité

$$P_r(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(2\pi n t)) r^n.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $r \in [0, 1]$, on pose : $\sigma_r(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)2\pi x)}{(2k+1)^2} r^{2k+1}$.

a) En utilisant les formules démontrées en 8c et 8d, démontrer que :

$$\forall r \in [0, 1[, \quad \sigma_r(x) = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2\pi n x) \cos(2\pi n t) r^n \right) dt.$$

b) En déduire, pour tout $r \in [0, 1[$, les égalités :

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t) P_r(x+t) dt + \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t) P_r(x-t) dt \right) = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(x+t) P_r(t) dt.$$

12. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)2\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

Partie IV : une famille de fonctions 1-périodiques

Pour tout réel $c \in]0, 1[$, on note τ_c l'application

$$\tau_c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c^n \sigma(2^n x) \quad (2)$$

où σ est la fonction définie par (1) dans la partie III.

13. Soit $c \in]0, 1[$.

- Justifier que la fonction τ_c est définie, continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
- Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tau_c(x) = \sigma(x) + c\tau_c(2x)$.
- Démontrer que τ_c est l'unique fonction τ définie et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau(x) = \sigma(x) + c\tau(2x) \quad (3)$$

14. Dans cette question, on suppose que c est égal à $1/4$.

- Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1/2]$, on a : $\tau_c(x) = 2x(1-x)$.
- Donner une représentation graphique de la fonction τ_c .

On note désormais β la fonction $\tau_{1/2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sigma(2^n x) \quad (4)$$

15. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note f_1, f_2, f_3 les restrictions à $[0, 1]$ des trois fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \beta(x)$, respectivement, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions.

On note Φ et Ψ les deux applications définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \begin{cases} \Phi(f)(x) = f(x/2) \\ \Psi(f)(x) = f(1-x) \end{cases}.$$

- Vérifier que le sous-espace vectoriel F est stable par les endomorphismes Φ et Ψ .
- Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et reconnaître les matrices dans cette base des endomorphismes de F induits par Φ et Ψ .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 2^{-n}]$.

En utilisant le résultat de la question 2b de la partie I, exprimer $\beta((1-x)2^{-n})$ à l'aide de x , n et $\beta(x)$.

- En exploitant le résultat trouvé en 15 c, justifier que la fonction β n'est pas dérivable en 0.
 - Démontrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction β est dérivable.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Chaque réponse doit être suffisamment justifiée. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

On considère un entier $n \geq 2$, une succession de $n + 1$ dates $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, et un titre financier dont les valeurs successives (en €) lors des dates $t_0, \dots, t_n$ sont respectivement notées $S_0, \dots, S_n$.

On suppose que, sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$ (où $0 \leq i \leq n - 1$), un individu détient à la fois une certaine somme c_i (en €) déposée sur un compte bancaire, et une certaine quantité d_i du titre financier. A chaque date intermédiaire t_i , l'individu a la possibilité de modifier la répartition de ses avoirs entre compte bancaire et titre financier, et l'on suppose qu'il n'y a ni retrait ni apport de fonds lors d'une telle modification, si bien que l'on a, pour tout $0 \leq i \leq n - 2$, la relation :

$$c_i + d_i S_{i+1} = c_{i+1} + d_{i+1} S_{i+1}. \quad (1)$$

On suppose en outre que toutes les valeurs $c_i \in \mathbb{R}$ et $d_i \in \mathbb{R}$ sont possibles (y compris des valeurs négatives pour c_i et d_i , qui correspondent concrètement au cas où l'individu a emprunté une somme en € ou une certaine quantité de titres). On notera R_i l'avoir total de l'individu (en €) à la date t_i , soit $R_0 = c_0 + d_0 S_0$ et, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$R_i = c_{i-1} + d_{i-1} S_i. \quad (2)$$

Pour décrire l'évolution de la valeur du titre au cours du temps, on introduit une suite de variables aléatoires $W_1, \dots, W_n$, mutuellement indépendantes, et possédant toutes la même loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{P}(W_i = h) = p, \quad \mathbb{P}(W_i = b) = 1 - p,$$

h, b et p étant des nombres réels fixés vérifiant les conditions $0 < b < 1 < h$ et $0 < p < 1$. On suppose que $S_0 \equiv 1$ €, et l'on modélise l'évolution de la valeur du titre au cours du temps en supposant que celle-ci obéit, pour tout $1 \leq i \leq n$, à la relation :

$$S_i = W_i \cdot S_{i-1}.$$

Partie I – Quelques calculs préliminaires

- 1) Exprimer S_n en fonction des variables aléatoires $W_1, \dots, W_n$.
- 2) Exprimer la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n, p, b, h .
- 3) Exprimer la valeur de la variance $\mathbb{V}(S_n)$ en fonction de n, p, b, h .
- 4) On considère une fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $c_f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $d_f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, telles que, pour tout $s \in]0, +\infty[$, le système d'équations suivant est satisfait :

$$\begin{cases} c_f(s) + s \cdot h \cdot d_f(s) = f(h \cdot s) \\ c_f(s) + s \cdot b \cdot d_f(s) = f(b \cdot s) \end{cases}$$

Une expression explicite des fonctions c_f et d_f à l'aide de f, h et b est demandée.

- 5) Montrer que, avec les notations de la question 4), on a, pour tout s :

$$c_f(s) + s \cdot d_f(s) = \left(\frac{1-b}{h-b} \right) \cdot f(hs) + \left(\frac{h-1}{h-b} \right) \cdot f(bs).$$

Partie II – Réplication avec horizon fixe

Dans toute cette partie, on considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ fixée.

6) On suppose que, à la date t_{n-1} , on dispose de $c_{n-1} = c_g(S_{n-1}) \in$ sur le compte bancaire, et d'une quantité $d_{n-1} = d_g(S_{n-1})$ du titre financier (les fonctions c_g et d_g sont celles définies à la question 4) pour $f = g$). Montrer que, à la date t_n , la richesse totale de l'individu vérifie nécessairement $R_n = g(S_n)$. (On prêtera bien attention au fait que, ici, S_{n-1} et S_n sont des variables aléatoires.)

7) On définit récursivement les fonctions $f_0, \dots, f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante : on pose d'abord $f_n = g$, puis, pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$f_i(s) = c_{f_{i+1}}(s) + s d_{f_{i+1}}(s). \quad (3)$$

On suppose que, à la date t_0 , l'individu dispose d'un avoir initial de $f_0(S_0) \in$, soit $R_0 = f_0(S_0)$. Montrer que, en répartissant son avoir de manière appropriée à chaque nouvelle date, il lui est possible de maintenir la validité de la relation $R_i = f_i(S_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Indication : Pour commencer, l'individu répartit son avoir initial en $c_0 = c_{f_1}(S_0) \in$ sur le compte bancaire et une quantité $d_0 = d_{f_1}(S_0)$ du titre financier.

8) **Application :** Alice souhaiterait (pour des raisons qui lui sont propres) pouvoir disposer d'une somme de $g(S_n) \in$ à la date t_n , en échange d'un versement initial à la date t_0 , sans avoir à s'occuper d'opérations intermédiaires de gestion entre ces deux dates. Son ami Barnabé s'engage alors à lui fournir la somme de $g(S_n) \in$ à la date t_n en échange du versement de $v_0 \in$ à la date t_0 . En utilisant les résultats des questions précédentes, expliquer comment, en fixant $v_0 = f_0(S_0)$, Barnabé parviendra à fournir à Alice la somme de $g(S_n) \in$ à la date t_n , sans gain ni perte pour lui.

On introduit maintenant une probabilité $\mathbb{Q}$ distincte (en général) de la probabilité de référence $\mathbb{P}$ considérée jusqu'ici, et l'on suppose que, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, les variables aléatoires $W_1, \dots, W_n$ sont mutuellement indépendantes et possèdent toutes la même loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{Q}(W_i = h) = \frac{1-b}{h-b}, \quad \mathbb{Q}(W_i = b) = \frac{h-1}{h-b}.$$

L'espérance calculée par rapport à la probabilité $\mathbb{Q}$ sera notée $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ dans la suite, pour la distinguer de l'espérance $\mathbb{E}$ calculée par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.

9) Vérifier que les valeurs de $\mathbb{Q}(W_i = h)$ et $\mathbb{Q}(W_i = b)$ données ci-dessus constituent une spécification correcte de la loi de probabilité d'une variable aléatoire ne prenant que les deux valeurs h et b .

10) Pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on définit la fonction $\phi_i :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par la formule :

$$\phi_i(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [g(s \cdot W_{i+1} \cdots W_n)], \quad (4)$$

et l'on pose en outre $\phi_n = g$. Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a la relation :

$$\phi_i(s) = \left(\frac{1-b}{h-b} \right) \phi_{i+1}(sh) + \left(\frac{h-1}{h-b} \right) \phi_{i+1}(sb).$$

Indication : utiliser une décomposition selon les différentes valeurs possibles de W_{i+1} .

11) Dédire de ce qui précède que, pour tout $0 \leq i \leq n$, on a $\phi_i = f_i$.

Indication : relire la question 5).

- 12) En déduire la relation (importante!) $f_0(S_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_n))$.
- 13) On introduit la variable aléatoire B définie comme le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $W_i = h$.
- Quelle est la loi de B (par rapport à la probabilité $\mathbb{Q}$) ?
 - Exprimer S_n comme une fonction de B et de h, b, n .
 - En déduire une formule explicite (sous forme d'une somme) pour $f_0(S_0)$ en fonction de h, b, n et g .
- 14) Montrer l'identité :

$$f_0(S_0) = \mathbb{E} \left[g(S_n) \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^B \left(\frac{1-b}{h-b} \right)^B \left(\frac{1}{1-p} \right)^{n-B} \left(\frac{h-1}{h-b} \right)^{n-B} \right].$$

- 15) Commenter le fait que les raisonnements précédents conduisent à choisir $v_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_n))$ et non pas $v_0 = \mathbb{E}(g(S_n))$, ou encore une valeur de v_0 caractérisée (par exemple) par une condition du type $\mathbb{P}(g(S_n) > v_0) \leq \epsilon$ pour une « petite » valeur de ϵ .

Partie III – Réplication avec horizon variable

Alice souhaite conclure un accord différent de celui étudié à la question 8), qui lui permettrait de choisir à tout moment la date à laquelle elle recevrait le versement de Barnabé. En échange d'un montant initial de $z_0 \in$ à la date t_0 , Alice pourrait donc décider à la date t_k de demander à Barnabé de lui verser la somme de $g(S_k) \in$ (Alice ne pouvant exiger qu'une seule fois le versement, parmi l'ensemble des dates possibles.)

- 16) A priori, la valeur de z_0 devrait-elle être supérieure, égale, ou inférieure à la valeur v_0 considérée à la question 8) ? (Justifier la réponse.)

On définit récursivement les fonctions $\psi_0, \dots, \psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante : on pose d'abord $\psi_n = g$, puis, pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$\psi_i(s) = \max(g(s), c_{\psi_{i+1}}(s) + sd_{\psi_{i+1}}(s)). \quad (5)$$

- 17) Expliquer comment, en fixant $z_0 = \psi_0(S_0)$, Barnabé parviendra à disposer à toute date t_k d'une somme au moins égale à $g(S_k) \in$ jusqu'à ce qu'Alice en fasse la demande.
- 18) Expliquer pourquoi, si Alice demande à Barnabé le versement de $g(S_k) \in$ à une date t_k pour laquelle on a $g(S_k) < \psi_k(S_k)$, Barnabé dégagera un profit de cette opération. Pour Alice, quelle pourrait-être la meilleure date à laquelle demander le versement ?

Partie IV – Un petit contre-exemple

Dans cette partie, on considère simplement deux dates t_0 et t_1 , et l'on suppose que W_1 peut prendre trois valeurs distinctes : $\mathbb{P}(W_1 = 0,5) = 0,2$; $\mathbb{P}(W_1 = 1) = 0,6$; $\mathbb{P}(W_1 = 2) = 0,2$, tandis que la fonction g vérifie $g(0,5) = 1$; $g(1) = 2$; $g(2) = 3$.

- 19) Vérifier qu'il n'existe pas de couple de nombres réels c, d tels que $\mathbb{P}(c + dS_1 = g(S_1)) = 1$.
- 20) Un accord entre Alice et Barnabé du type de celui considéré à la question 8) est-il possible ici ? (Justifier la réponse.)

Exercice

Dans cet exercice, on considère un nombre entier $N \geq 1$, et N variables aléatoires $U_1, \dots, U_N$, supposées **mutuellement indépendantes, et suivant chacune la loi uniforme sur $]0, 1[$** . On rappelle que la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ est caractérisée par la fonction de densité f_U définie sur $\mathbb{R}$ par $f_U(u) = 1$ pour $u \in]0, 1[$, et $f_U(u) = 0$ pour $u \notin]0, 1[$.

On définit ensuite les variables aléatoires $U_{(1)}, \dots, U_{(N)}$ obtenues en **triant par ordre croissant** les valeurs prises par les variables aléatoires¹ $U_1, \dots, U_N$.

Par exemple, avec $N = 4$, si les valeurs effectivement réalisées des variables aléatoires U_1, U_2, U_3, U_4 se trouvent être :

$$U_1(\omega) = 0,44; U_2(\omega) = 0,72; U_3(\omega) = 0,23; U_4(\omega) = 0,44,$$

on aura :

$$U_{(1)}(\omega) = 0,23; U_{(2)}(\omega) = 0,44; U_{(3)}(\omega) = 0,44; U_{(4)}(\omega) = 0,72.$$

L'objectif de cet exercice est de caractériser la loi de probabilité de la variable $U_{(m)}$, pour chaque $m \in \{1, \dots, N\}$.

A) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(U_m)$ pour $1 \leq m \leq N$.

B) Etant donné $x \in [0, 1]$, on appelle $N(x)$ la variable aléatoire définie comme le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, N\}$ tels que $U_i \leq x$. Montrer que, pour tout entier $m \in \{1, \dots, N\}$, et tout $x \in [0, 1]$, la réalisation de l'événement $U_{(m)} \leq x$ est équivalente à la réalisation de l'événement $N(x) \geq m$, et en déduire l'identité :

$$\mathbb{P}(U_{(m)} \leq x) = \mathbb{P}(N(x) \geq m).$$

C) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, la variable aléatoire $N(x)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$ avec $p = x$, et en déduire que, pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathbb{P}(U_{(m)} \leq x) = \sum_{k=m}^N \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}.$$

D) En déduire que, pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, la loi de la variable aléatoire $U_{(m)}$ possède une densité $f_{m,N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{m,N}(x) = \begin{cases} \frac{N!}{(m-1)!(N-m)!} x^{m-1} (1-x)^{N-m} & \text{pour } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{pour } x \notin]0, 1[\end{cases}.$$

E) A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'identité :

$$\int_0^1 x f_{m,N}(x) dx = \frac{m}{N-m+1} \left(\int_0^1 f_{m,N}(x) dx - \int_0^1 x f_{m,N}(x) dx \right).$$

F) En déduire que, pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$:

$$\mathbb{E}(U_{(m)}) = \frac{m}{N+1}.$$

G) Commenter la différence entre les valeurs de $\mathbb{E}(U_m)$ et $\mathbb{E}(U_{(m)})$.

1. De manière plus formelle, pour tout $\omega \in \Omega$, les valeurs $U_{(1)}(\omega), \dots, U_{(N)}(\omega)$ sont obtenues en triant dans l'ordre croissant les valeurs $U_1(\omega), \dots, U_N(\omega)$, une valeur apparaissant plusieurs fois étant alors répétée avec sa multiplicité.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

C'est une petite musique qui enfle. Un refrain fredonné sans tabou, de plus en plus haut, de plus en plus fort, et de toutes parts. Et si les Lumières étaient has been? Si les idéaux de progrès, de raison et d'universel, qui élèvent la connaissance et le savoir au-delà des croyances, étaient passés de mode, périmés, voire néfastes? Livres, discours, manifestes, la remise en cause de cet esprit qui a irrigué le XVIII^e siècle autour des figures totémiques de Voltaire, de Rousseau, de Kant et de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, ce mouvement fondateur de la modernité politique européenne et matrice intellectuelle de la Révolution française, s'affiche aujourd'hui sans fard. (...)

Retour du religieux et des philosophies antirationalistes, repli sur le national et les communautés, avènement des vérités relatives et alternatives – les fameuses « fake news »... Jamais contexte n'a semblé plus défavorable à la pensée des Lumières. Les philosophes du XVIII^e siècle incarnaient l'espoir d'une émancipation politique hors du carcan de la monarchie absolue de droit divin; les démocraties libérales semblent désormais mortelles. Ils défendaient l'idéal d'une Europe des lettres transcendant les frontières; à la veille des élections européennes de mai 2019, les populismes gagnent l'Europe entière, de l'Italie à la Hongrie en passant par la Scandinavie. (...)

L'idée de progrès est la première cible de cette attaque. Une méfiance croissante pèse aujourd'hui sur les sciences et la technique. Prise de conscience de la vulnérabilité de la planète et inquiétudes légitimes d'une apocalypse climatique, craintes de l'avènement d'une « humanité augmentée » à l'heure de l'intelligence artificielle, tout sujet scientifique est désormais interrogé avec inquiétude. Autant d'angoisses sur lesquelles surfe un nouveau courant écologiste ultraconservateur adepte de la « décroissance », incarné notamment par la jeune revue *Limite*.

Plus grave, la contestation des Lumières s'adosse à celle des découvertes les plus évidentes de la médecine, comme les vaccins, ou les antibiotiques, largement véhiculée par les réseaux sociaux. Seul l'allongement de la vie semble faire consensus. Les travaux des agences de santé sont désormais mis en cause. « *Tout argument est soupçonné, démonté* », résume Frédéric Worms. « *Le progressisme est en baisse à la bourse des idées, et un soupçon général pèse sur les sciences* », confirme le philosophe Francis Wolff, professeur émérite à l'Ecole normale supérieure.

L'« illusion du progrès » est aussi dénoncée par la critique anticapitaliste. A gauche comme à droite, celle-ci rappelle volontiers que le libéralisme économique, théorisé par Adam Smith, est l'héritier des Lumières. « *Une fois qu'on a compris que le libéralisme et le capitalisme sont des produits de la modernité et de la philosophie des Lumières, on comprend alors que la notion de progrès est beaucoup plus ambiguë qu'il n'y paraît* », dénonce par exemple l'essayiste antilibéral Jean-Claude Michéa, ancien communiste et « conservateur » assumé.

« *Il faut un peu desserrer l'étau du credo hérité des Lumières : d'un côté la vertu, la science et la liberté, de l'autre les sorcières du bocage et les obscurantistes! Trop facile!* », s'agaçait déjà en 2006 l'écrivain Régis Debray à l'occasion de la parution de son ouvrage *Aveuglantes Lumières*, publié chez Gallimard. « *Les Lumières, en dépit de notre triomphalisme et de notre ethnocentrisme glorieux, ont des zones d'ombre capitales* » assure le philosophe, comme « *l'imaginaire*,

le sentiment du collectif, notre rapport à la mort, à l'animalité... » Et d'abord « *la religion* », qui, depuis la fin du XX^e siècle, effectue son grand retour, mais dans un paysage redessiné : l'islam est en plein essor, l'expression « cathos de gauche » a disparu.

Sous ces coups de boutoir portés à la Raison, les catholiques ultraconservateurs voient l'occasion d'une revanche contre un ennemi ancestral qui semblait les avoir terrassés. L'antagonisme entre les Lumières et les religions, solidement ancré dans l'histoire française, re-surgit. « *Tout ce qui est éternel dans la religion, tout ce qui est permanent dans la société y est à la fois détruit et méconnu* », assénait le monarchiste et catholique Louis de Bonald dès le début du XIX^e siècle. L'universalisme des Lumières était déjà accusé de couper l'homme de ses racines pour dessiner un être abstrait et désincarné, détourné de l'ordre naturel divin. « *Que j'en veux à ces Français qui ont (...) céd[é] le sceptre de la philosophie rationnelle à ce faux dieu du XVIII^e siècle, qui ne sait rien, qui ne dit rien, qui ne peut rien, et dont ils ont élevé le piédestal devant la face du Seigneur, sur la foi de quelques fanatiques encore plus mauvais citoyens que mauvais philosophes* », écrivait le chef de file des contre-révolutionnaires, Joseph de Maistre, dans ses *Considérations sur la France* (1796). (...)

« *Au fond, il y a une certaine continuité dans la critique classique des Lumières* », estime l'historien britannique spécialiste de la France Sudhir Hazareesingh, auteur de *Ce pays qui aime les idées* (Flammarion, 2015) : aux XVIII^e et XIX^e siècles, les contempteurs de la Révolution, Burke, Bonald et Maistre, avaient déjà dégainé tout l'éventail des arguments pour discréditer les idées des Philosophes.

« *A gauche, poursuit le professeur à l'université d'Oxford, c'est différent.* » A partir des années 1920, une première critique, autour de l'école de Francfort, avait commencé à dénoncer les dangers de la rationalité technique et détricoté le lien entre gauche et progrès. Puis, sous l'influence du penseur Michel Foucault, un courant entreprend, à partir des années 1970, de déconstruire les principes hérités des Philosophes, accusés de porter en germe les totalitarismes contemporains. « *Dans Surveiller et punir, en 1975, Foucault montre que l'ambition de contrôler l'être humain est un héritage indirect de la tradition des Lumières* », assure Sudhir Hazareesingh.

Les intellectuels de gauche se divisent. Certains opèrent un retour aux Lumières par le biais d'un courant « néorépublicain » qui renaît dans les années 1990 sur les décombres du marxisme. Dans ce sillage, des figures de proue du monde intellectuel font de la défense pure et dure de la laïcité leur nouveau combat. (...) Une autre partie de la gauche intellectuelle investit, elle, les études postcoloniales. Une nouvelle critique se fait jour en lien avec les *cultural studies* nées aux Etats-Unis. *L'Orientalisme*, d'Edward Said, publié en France en 1980 (Seuil), en constitue l'une des œuvres fondatrices. Les Lumières sont accusées par les intellectuels postcoloniaux d'avoir légitimé une « domination occidentale » sur le monde. « *Pour eux, les principes abstraits issus de la Révolution française se sont fracassés sur la réalité du XIX^e siècle, où l'esclavage et la colonisation ont pu se trouver justifiés par le rationalisme* », résume Sudhir Hazareesingh. (...)

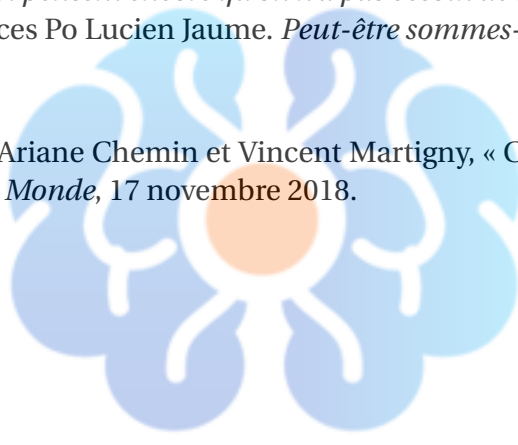
Les mobilisations féministes, elles aussi, s'interrogent sur la valeur des Lumières dans le combat pour l'émancipation. Comment brandir l'étendard de l'universel et exclure les

femmes de la citoyenneté, dénoncent une partie d'entre elles? Elles s'inspirent d'Olympe de Gouges et sa Déclaration des droits de la femme et de la citoyenne, rédigée en 1791, mais aussi de Nicolas de Condorcet. Dans *Sur l'admission des femmes au droit de cité* (1790), le penseur et député girondin soulignait la contradiction théorique et politique de l'exclusion des femmes du droit de vote. « *La première mise en cause de l'universalisme est féminine, soutient la philosophe Silyane Larcher, dès le XVIII^e siècle* ». (...)

Trois siècles après sa naissance, la pensée des Lumières reste disséquée dans ses moindres replis. « *La mode est à la philosophie du soupçon, à la déconstruction, déplore Francis Wolff : chercher derrière tout ce qui se présente comme universel l'intérêt particulier, le « d'où parlez-vous ».* Certes, on peut déconstruire les Lumières et dénoncer ses errements. Mais au nom de quoi mener la lutte pour la libération des femmes ou des minorités, sinon au nom de l'universel? », interroge l'universitaire.

« *Dès que les Lumières sont apparues, elles ont été critiquées de l'intérieur. Mais c'était pour les faire progresser, ce qui n'est pas forcément le cas aujourd'hui* », s'inquiète aussi le philosophe Frédéric Worms. Les Lumières seraient-elles devenues solubles dans la (post)modernité? « *Des gens comme moi pensent encore qu'on n'a pas besoin de les défendre, réfléchit à voix haute l'historien de Sciences Po Lucien Jaume. Peut-être sommes-nous trop optimistes...* »

Extraits d'un article d'Ariane Chemin et Vincent Martigny, « Ces ombres qui planent sur l'esprit des Lumières », *Le Monde*, 17 novembre 2018.

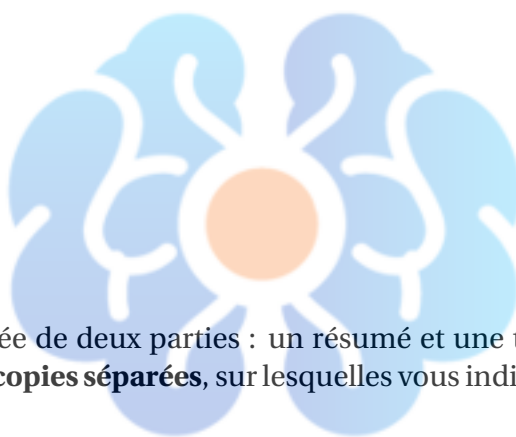


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Slower growth in ageing economies is not inevitable

From The Economist, Mar 28, 2019

FOR THE first time in history, the Earth has more people over the age of 65 than under the age of five. In another two decades the ratio will be two-to-one, according to a recent analysis by Torsten Sløk of Deutsche Bank. The trend has economists worried about everything from soaring pension costs to “secular stagnation”—the chronically weak growth that comes from having too few investment opportunities to absorb available savings. The world’s greying is inevitable. But its negative effects on growth are not. If older societies grow more slowly, that may be because they prefer familiarity to dynamism.

Ageing slows growth in several ways. One is that there are fewer new workers to boost output. Workforces in some 40 countries are already shrinking because of demographic change. As the number of elderly people increases, governments may neglect growth-boosting public investment in education and infrastructure in favour of spending on pensions and health care. People in work, required to support ever more pensioners, must pay higher taxes. But the biggest hit to growth comes from weakening productivity. A study published in 2016, for example, examined economic performance across American states. It found that a rise of 10% in the share of a state’s population that is over 60 cuts the growth rate of output per person by roughly half a percentage point, with two-thirds of that decline due to weaker growth in productivity.

Why are older economies less productive? The answer is not, as one might suppose, that older workers are. Though some capabilities, notably physical ones, deteriorate with age, the overall effect is not dramatic. A study of Germany’s manufacturing sector published in 2016 failed to detect a drop-off in productivity in workers up to the age of 60. Companies can tweak employees’ roles as they get older in order to make best use of the advantages of age, such as extensive experience and professional connections.

Furthermore, if weak productivity growth was caused by older workers producing less, pay patterns should reflect that. Wages would tend to rise at the beginning of a career and fall towards its end. But that is not what usually happens. Rather, according to a recent paper by economists at Moody’s Analytics, a consultancy, wages are lower for everyone in companies with lots of older workers. It is not older workers’ falling productivity that seems to hold back the economy, but their influence on those around them. That influence is potent: the authors reckon that as much as a percentage point of America’s recent decline in annual productivity growth could be associated with ageing.

How this influence makes itself felt is unclear. But the authors suggest that companies with more older workers might be less eager to embrace new technologies. That might be because they are reluctant to make investments that would require employees to be retrained, given the shorter period over which they could hope to make a return on that training for those near the end of their careers. Or older bosses might be to blame. Research indicates that younger managers are more likely to adopt new technologies than are older ones. This may seem obvious: older people’s greater aversion to new technology is a cliché. And at least anecdotally, greying industries do seem more averse to change.

If the evidence suggested that ageing economies struggled primarily because of slow-growing labour forces and fast-growing pension costs, it would make sense to focus policy efforts on keeping people in work longer—by raising retirement ages, for example. But if, as

seems to be the case, reluctance to embrace new technologies is a bigger issue, other goals should take priority—in particular, boosting competition. In America, increasing industrial concentration and persistently high profits are spurring renewed interest in antitrust rules. The benefits of breaking up powerful firms and increasing competition might be even bigger than thought, if conservative old firms are thereby spurred to make better use of newer technologies.

There are other measures that could help. Removing barriers to job-switching, for example by making benefits more portable, could shorten average tenures and help stop companies' cultures becoming ossified. Best of all would be more immigration. An influx of young foreign workers would address nearly all the ways in which population ageing depresses growth. It would not only expand the labour force and create new taxpayers, but would mean more and younger companies, and greater openness to new technologies. And there would be plenty of willing takers in poorer countries with younger populations.

Societies with lots of older workers are also societies with lots of older voters, however. Those voters are, on average, more politically conservative than younger people, and less likely to support increased immigration. People of all ages would gain from policies that boosted growth and productivity. But given the choice between a dynamic but unfamiliar society and a static but familiar one, older countries tend to opt for the second. In hindsight, the demographic boom that coincided with industrialisation in rich countries may have had an underappreciated benefit: it created a big constituency in favour of embracing new technologies and the opportunities they provided.

Technology may at some point overcome the stifling effect of ageing. In a new paper Daron Acemoglu of the Massachusetts Institute of Technology and Pascual Restrepo of Boston University find that when young workers are sufficiently scarce, manufacturers invest in more automation, and experience faster productivity growth as a result. Robots have yet to make a big impact in the service sector and beyond, but as their capabilities improve and jobs for younger people go begging that may change. The world could use more flexibility and productivity now. But stagnation may end eventually, once the robots are promoted to management.

2 Translate the following text into French

Older workers helped fuel recent U.S. growth.

Adapted from Reuters, April 24, 2019

As a record-breaking economic expansion nears the decade mark, people like Marty Groth may determine whether it is forced into a lower gear. Not long ago, the 60-year-old Groth found himself out of a job and considered retiring on a pension built over a career of maintaining computer servers and printers.

Instead, he returned to school to update his computer skills and will soon join a Wisconsin labor force that is decidedly short of workers.

Over the last three years, around 3 million Americans over 55 joined or rejoined the workforce, federal data show. The addition of these older workers not only contributed to economic growth, experts say, but helped stop a national decline in the share of adults working or looking for work.

The trend may have run its course. After adding 5 million new and returning workers of all ages from 2016 to 2018, the U.S. labor force shrank during the first three months of this year.

From healthcare to manufacturing, companies are taking longer to hire as they struggle to find workers; some have delayed projects, others have become more willing to hire ex-convicts and less experienced workers bypassed when labor markets were looser, local officials say.

The upshot, according to policymakers, business executives and labor experts, is that the labor market may be nearing its limits.

Over a long enough period, labor shortages can spark investment and raise productivity as companies retool. They can also improve opportunities for minorities with unemployment rates higher than those for whites.

Any employer, if they are willing to raise wages enough, at some point will get all the workers they need. But it is coming at a higher cost and projects that were profitable in a lower wage environment are not profitable anymore.

Abstract

Dans ce present document vous trouverez la correction du concours
BCEAS 2019

1 CORRECTION DU CONCOURS BECEAS 2019

1.1 PARTIE PRELIMINAIRES

- On sait que $X_{k,k \in \mathbb{N}}$ sont indépendants et suivent des lois de Poisson de paramètre λ alors $G_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{S_n t}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{X_k t}) = [G_{X_1}(t)]^n$ comme

$$[G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{kt} P(X_1 = k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda e^t}$$

donc

$$G_{S_n}(t) = e^{-n\lambda + n\lambda e^t}$$

donc $S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\lambda)$

- Prouvons pour $\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \geq \lambda + \epsilon) \leq \frac{\lambda}{n\epsilon^2}$ On a

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} - \lambda \geq \epsilon) = \mathbb{P}((\frac{S_n}{n} - \lambda)^2 \geq \epsilon^2) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\frac{S_n}{n} - \lambda)^2 \geq \epsilon^2}) \leq \mathbb{E}(\frac{(\frac{S_n}{n} - \lambda)^2}{\epsilon^2} \mathbf{1}_{(\frac{S_n}{n} - \lambda)^2 \geq \epsilon^2})$$

donc

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} - \lambda \geq \epsilon) \leq \mathbb{E}(\frac{(\frac{S_n}{n} - \lambda)^2}{\epsilon^2}) = \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{\lambda}{n\epsilon^2}$$

- Montrons que la fonction Ψ définie par :

$$\forall \theta \geq 0, \Phi(\theta) = e^{\mu(e^\theta - 1) - \theta x}$$

a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+, \Psi'(\theta) = (\mu e^\theta - x) \Psi(\theta)$$

donc $\Psi(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq \ln(\frac{x}{\mu})$ ceci justifie la croissance de Ψ sur $[\ln(\frac{x}{\mu}), +\infty[$ et la décroissance sur $[0, \ln(\frac{x}{\mu})]$ d'où $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}_+} \Psi(\theta) = \ln(\frac{x}{\mu})$

- Pour justifier l'existence de $a > 0$ il suffit de Montrer que

$$a(\lambda, \epsilon) = \frac{\ln(\frac{x}{\mu})x - \mu(\frac{x}{\mu} - 1)}{n} \geq 0$$

et est le candidat. Par simplification $a(\lambda, \epsilon) = (\lambda + \epsilon) \ln(1 + \frac{\epsilon}{\lambda}) - \epsilon$ en remarquant que $\forall x > -1, \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ on prend $x = \frac{\epsilon}{\lambda}$ on a donc $\ln(1 + \frac{\epsilon}{\lambda}) \geq \frac{\epsilon}{\lambda + \epsilon}$ ainsi $a(\lambda, \epsilon) \geq 0$ et vérifie de manière évidente la relation .

- Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant la relation:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

Montrons que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0, 2^n]] : g\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}g(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)g(y)$$

Nous allons démontrer par récurrence cette propriété . Au rang $n=0$ la relation est vérifiée En effet $k \in \{0, 1\}$ suivant les valeurs de k les choses s'obtiennent . Supposons que la relation est vrai au rang n et montrons sa validité au rang $n+1$

$$g\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) = g\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}\frac{2^n}{2^n}y\right) \leq \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + g\left(\frac{2^n}{2^n}y\right)\right)$$

$$g\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}g(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)g(y) + g(y)\right)$$

$$g\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}g(x) + 2g(y) - \frac{k}{2^n}g(y)\right) = \frac{k}{2^{n+1}}g(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)g(y)$$

Ceci achève la récurrence .

- On pose

$$D = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{k}{2^n}, k \in [[0, 2^n]] \right\}$$

Vérifions que la suite $d_n = \frac{[\lambda 2^n]}{2^n}$ pour $\lambda \in [0, 1]$ est une suite de D , croissante et convergente . Posons $v_n = 2^n d_n = [\lambda 2^n]$ on a $v_n \in [[0, 2^n]]$ alors $d_n = \frac{v_n}{2^n} \in D$ De plus $v_{n+1} = \max\{k : k \leq 2^{n+1}\lambda\}$ comme $[\lambda 2^n] \leq \lambda 2^n$ alors $2[\lambda 2^n] \leq \lambda 2^{n+1}$ Ainsi $v_{n+1} \geq 2v_n \Leftrightarrow d_{n+1} \geq d_n$ ceci justifie que d_n est croissante. comme $d_n \leq \lambda \leq d_1 + \frac{1}{2^n}$ alors d_n converge vers λ

- On suppose que g est croissante . Montrons qu'elle est convexe Ici la fonction f n'est pas supposée continue elle est juste croissante donc le passage à la limite il faudrait s'abstenir sans preuve !!! Soit x, y deux réelles on a soit $x \leq y$ où $y \leq x$ Pour conclure nous allons traiter les deux cas . Supposons le premier cas et posons $a_n = d_n x + (1 - d_n)y$ comme $a_{n+1} - a_n = (d_{n+1} - d_n)(x - y)$ alors la suite a_n est croissante et elle converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lambda x + (1 - \lambda)y$ de plus $g(a_n) \leq d_n g(x) + (1 - d_n)g(y)$ Posons $b_n = d_n g(x) + (1 - d_n)g(y)$ de

même $b_{n+1} - b_n = (d_{n+1} - d_n)(g(x) - g(y))$ donc b_n est croissante et converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$ comme

$$g(a_n) \leq b_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g(a_n) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

ainsi $g(\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n) = g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$

L'autre cas est laissé au lecteur ..

• L'inégalité de Markov soit X une variable aléatoire alors

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X)$$

• On suppose dans cette partie à valeurs positives ou nulles .Etablissons la relation (inégalité de Chernoff) :

$$\forall x > 0 : \mathbb{P}(X \geq x) \leq \inf_{\theta > 0} \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

la fonction $x \mapsto e^{\theta x}$ est croissante donc

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta x})$$

on applique ensuite l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta x}) \leq \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

donc

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \inf_{\theta > 0} \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

• Soit X une variable aléatoire ,possédant une espérance et telle que

$$X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$$

où la suite $x_{k,k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,strictement croissante et de limite $+\infty$ On pose $x_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \leq x_n})$$

Dans cette partie on souhaite prouver la convergence de α_n Comme la variable $X \geq 0$ alors $X \mathbf{1}_{X \leq x_n} \leq X$ de plus son esperance est fini d'où

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \leq x_n}) \leq \mathbb{E}(X) < +\infty$$

Comme x_n est strictement croissante alors $X\mathbf{1}_{X \leq x_{n+1}} \geq X\mathbf{1}_{X \leq x_n}$. En effet $[x_{n+1}, +\infty[\subset [x_n, +\infty[$ donc $\mathbb{R} \setminus [x_n, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus [x_{n+1}, +\infty[$ ceci justifie la relation. Par passage à l'espérance on a :

$$\alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X \leq x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X \leq x_{n+1}}) = \alpha_{n+1}$$

la suite α est croissante et majorée par $\mathbb{E}(X)$ donc elle converge .

• Justifions que

$$\forall \epsilon, \exists N, \forall n \geq N : \mathbb{E}(X) - \epsilon \leq \alpha_n$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > x_n}) + \alpha_n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ alors $\forall A > 0, \exists N, \forall n \geq N : x_n > A$. De plus

$$\forall n \geq N : \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > A})$$

D'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X > A) \leq \frac{1}{A} \mathbb{E}(X)$$

en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > A) = 0$$

d'où $\exists M$ tel que $X \leq M$ donc (*) devient

$$\forall n \geq N : \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > A}) \leq M\mathbb{P}(X > A)$$

en faisant tendre A vers l'infini . il vient que $\forall \epsilon, \exists N, \forall n \geq N, \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > x_n}) \leq \epsilon$ comme $\mathbb{E}(X) - \alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X > x_n})$ le résultat s'en déduit. De plus la convergence de α_n est immédiate . La justification vient du fait que toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure ou bien on majore α_n par $\mathbb{E}(X) + \epsilon$

• Soit $K \geq 0$ on pose $\beta(K) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X \leq K})$ la suite $X_K = K$ est strictement croissante et de limite $+\infty$ donc d'après la partie précédente le résultat s'obtient.

• Soit f une fonction concave réelle et décroissante et $x \in \mathbb{R}$ Posons

$$r_x(u) : \frac{f(u) - f(x)}{u - x}, \forall u \neq x$$

On souhaite montrer que l'existence de la limite à droite en x . Commençons par montrer que la fonction r_x est décroissante dans le voisinage de x^+

Soit $u, u' : x < u < u'$ alors

$$r_x(u') - r_x(u) = \frac{f(u') - f(x)}{u' - x} - \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \frac{(f(u') - f(x))(u - x) - (f(u) - f(x))(u' - x)}{(u' - x)(u - x)}$$

$$r_x(u') - r_x(u) = \frac{(u - u')f(x) - (u - x)f(u') + (u' - x)f(u)}{(u' - x)(u - x)}$$

En remarquant que

$$u = \frac{u - x}{u' - x}u' + \left(1 - \frac{u - x}{u' - x}\right)x$$

comme $0 \leq \frac{u-x}{u'-x} \leq 1$ de la concavité de f on déduit que

$$f(u) \geq \frac{u - x}{u' - x}f(u') + \left(1 - \frac{u - x}{u' - x}\right)f(x)$$

d'où r_x est décroissante au voisinage de x^+ de plus $r_x(u) \leq r_x(x^+) \leq 0$
Ainsi D'après le Théorème de la limite monotone r_x admet une limite finie ,négative ou nulle .

• Prouvons que $\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + \theta_0(u - x)$

Remarquons que

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = f(x) + (u - x)r_x(u) \leq f(x) + (u - x) \sup_{u \in \mathbb{R} \setminus \{x\}} r_x(u)$$

comme

$$\sup_{u \in \mathbb{R} \setminus \{x\}} r_x(u) = \max\left(\sup_{u \in]-\infty, x[} r_x(u), \sup_{u \in]x, +\infty[} r_x(u)\right)$$

de plus $\forall u \in]-\infty, x[, \forall y \in]x, +\infty[: r_x(u) \geq r_x(y)$ donc

$$\sup_{u \in \mathbb{R} \setminus \{x\}} r_x(u) = \sup_{u \in]-\infty, x[} r_x(u)$$

de plus

$$\forall y \in]x, +\infty[, (u - x) \sup_{u \in]-\infty, x[} r_x(u) \leq (u - x)r_x(y)$$

donc $(u - x) \sup_{u \in]-\infty, x[} r_x(u) \leq (u - x)r_x(x^+)$ d'où:

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + (u - x)\theta_0$$

• Déduisons l'égalité $\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) + \theta(u - x)) = f(x)$ On sait que

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + (u - x)\theta_0$$

donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) - (u - x)\theta_0 \leq f(x)$$

comme $-\theta_0 \geq 0$ alors

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) - \theta_0(u - x)) \leq f(x) \Leftrightarrow \inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) + \theta(u - x)) \leq \sup_{u \in \mathbb{R}} (f(u) - \theta_0(u - x)) \leq f(x)$$

de plus $f(x) = f(x) + \theta(x - x)$ et c'est gagné!! • Soit une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite x_k est positif, strictement croissante et de limite $+\infty$

• Montrons la fonction qui à tout $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$ il suffit d'abord démontrer que la fonction est décroissante En effet soit t et t' tel que $t > t' > 0$ alors $\{X > t\} \subset \{X > t'\}$ donc

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(X > t')$$

de plus si $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X > t')$ alors $\forall k \in \mathbb{N} : x_k \notin]t', t[$ comme la suite x_k est strictement croissante de limite infini alors cela n'est possible que si $t = t'$ donc F est bien strictement croissante de plus si $t \leq 0, \mathbb{P}(X \geq t) = 1$ Ceci permet de conclure !!! • On notera par dP_X la loi densité de X Montrons que

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbb{P}(X > x_k)$$

On va appliquer le théorème de Fubini

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \int_{x_0}^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t) dt$$

1.2 METHODE 1

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \int_{x_0}^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t) dt$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{j=[t]+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j) dt = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=[t]+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r \sum_{j=k+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dt$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=k+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbb{P}(X > x_k)$$

1.3 METHODE 2

$$\begin{aligned}\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt &= \sum_{k=0}^r \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_t^{+\infty} d\mathbb{P}_X \right] dt \\ \int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt &= \sum_{k=0}^r \int_{x_r}^{+\infty} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} dt \right] d\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^r \int_{x_r}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) d\mathbb{P}_X \\ \int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt &= \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \int_{x_r}^{+\infty} d\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbb{P}(X > x_k)\end{aligned}$$

• Montrons que

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt = \sum_{k=0}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1} \mathbb{P}(X > x_r)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbb{P}(X > x_k) &= \sum_{k=1}^{r+1} x_k \mathbb{P}(X > x_{k-1}) - \sum_{k=1}^r x_k \mathbb{P}(X > x_k) \\ \sum_{k=0}^r (x_{k+1} - x_k) \mathbb{P}(X > x_k) &= x_{r+1} \mathbb{P}(X > x_r) + \sum_{k=1}^r x_k \mathbb{P}(x_{k-1} < X \leq x_k)\end{aligned}$$

comme $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ et que x_k est strictement croissante alors

$$\mathbb{P}(x_{k-1} < X \leq x_k) = P(X = x_k)$$

et c'est gagné!! • Montrons l'équivalence

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt < +\infty$$

Supposons que $\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty$ Comme la suite x_k est strictement croissante on a :

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

donc

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1} \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=0}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1} \mathbb{P}(X > x_r)$$

d'où

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt \leq \int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty$$

en faisant tendre r vers $+\infty$ le resultat est gagné!!! Réciproquement supposons que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt < +\infty$$

alors

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt < +\infty$$

comme

$$\sum_{k=0}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1} \mathbb{P}(X > x_r) = \int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t) dt \geq \sum_{k=0}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

ceci justifie que

$$\sum_{k=0}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k) < +\infty$$

en faisant tendre r vers l'infini c'est gagné!!! L'égalité se déduit simplement supposons que X est intégrable alors le reste R_r d'ordre r de la série

$$S_r = \sum_{k=1}^r x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

tend vers 0 comme $R_r \geq x_{r+1} \mathbb{P}(X = x_k)$ alors $x_{r+1} \mathbb{P}(X = x_k)$ tends vers 0 quand r tends vers $+\infty$ • Soit v_n une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant la relation de sous additivité

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, v_{n+m} \leq v_n + v_m$$

On souhaite justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\{\frac{v_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ Posons $A = \{\frac{v_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ alors de l'existence de la suite on déduit que l'ensemble A est non vide de plus tous les éléments de A sont positifs . Il ressort que A est une partie non vide et minoré de $\mathbb{R}$ ceci justifie l'existence du nombre ρ

• Dans cette partie on considère $\epsilon > 0$ et

$$N \in \mathbb{N}^* : \rho \leq \frac{v_N}{N} \leq \rho + \epsilon$$

.Soit $(k, r) \in \mathbb{N} \times [[0, N - 1]]$, $n = kN + r$ Prouvons l'inégalité

$$\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_N}{N} + \frac{v_r}{n}$$

On a :

$$v_n = v_{kN+r} \leq v_{kN} + v_r$$

Montrons par récurrence sur p que $v_{pn} \leq pv_n$ au rang $p=1$ c'est trivial supposons qu'elle est vrai au rang p

$$v_{(p+1)n} = v_{pn+n} \leq v_{pn} + v_n \leq (p+1)v_n$$

En utilisant ce résultat on a :

$$v_n = v_{kN+r} \leq v_{kN} + v_r \leq kv_N + v_r$$

comme $k \leq \frac{n}{N}$ alors on a

$$v_n \leq \frac{n}{N}v_N + v_r$$

En divisant par n c'est gagné!!! • comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_r}{n} = 0$ alors $\exists n_0$ tel que $\frac{v_r}{n} \leq \epsilon$ ainsi $\forall n \geq n_0 : \rho \leq \frac{v_n}{n} \leq \rho + 2\epsilon$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \rho$$

- On considère une suite $X_{k,k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes ,à valeurs positives ou nulles ,indépendantes et suivant toutes la loi de X_1 .On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose $\mathbb{P}(X_1 > t) > 0$
- Montrons que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv) \geq \mathbb{P}(S_m \geq mu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

Il s'agit d'une relation simple remarquons que

$$\{S_m \geq mu\} \cap \left\{ \sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv \right\} \subset \{S_{m+n} \geq mu + nv\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\{S_m \geq mu\} \cap \left\{ \sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv \right\}) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv)$$

comme les variables sont indépendantes alors S_m et $\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k$ le sont .
donc

$$\mathbb{P}(S_m \geq mu)\mathbb{P}\left(\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv\right) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv)$$

comme

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_{k+m} \geq nv\right)$$

de plus les variables X sont directes leur loi peut être caractérisé par la fonction génératrice alors

$$G_{\sum_{k=1}^n X_{k+m}}(t) = \mathbb{E}(e^{t \sum_{k=1}^n X_{k+m}}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{t X_{k+m}}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{t X_k}) = G_{S_n}(t)$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_{k+m} \geq nv\right) = \mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

ceci achève la preuve

- Montrons dans cette partie la question suivante :

$$\forall n \geq 1, \forall u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(S_n \geq nu) > 0$$

Nous allons montrer par récurrence sur n $\forall u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_1 > u) > 0$ comme $S_1 = X_1$ la relation est vraie au rang $n=1$ Supposons qu'elle l'est au rang n comme

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \geq (n+1)u) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu) \mathbb{P}(X_{n+1} \geq u) > 0$$

alors la relation est vraie au rang $n+1$ ceci achève la preuve .

bullet On souhaite en déduire que ,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n}$$

Posons $v_n = -\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))$ la suite $v_n \geq 0$ et de plus elle sous additive d'après la question 9-a il suffit de passer au logarithme puis ensuite multiplier par -1. D'après la question 8-b on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \rho = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{-\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n} = - \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n}$$

comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-v_n}{n}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-v_n}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n}$$

et c'est gagné!!!

2 PARTIE 2 LE THEOREME DE CRAMER

2.1 UNE INEGALITE

• Soit J une partie de $\mathbb{R}$ qui est telle que $\forall x \in J,]-\infty, x] \subset J$ On souhaite Montrer que J est un intervalle .Rappelons qu'on appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie convexe de $\mathbb{R}$ Donc nous allons montrer que J est convexe .
 $\forall (x, y) \in J^2, \forall \alpha \in [0, 1]$ on a

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in [\min(x, y), \max(x, y)] \subset]-\infty, \max(x, y)] \subset J$$

donc

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in J$$

ceci montre que J est convexe .c'est gagné!!

• vérifions que la fonction $\phi : \theta \mapsto \ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))$ la condition pour que ϕ soit définie est $\mathbb{E}(e^{\theta X_1}) > 0$ comme X_1 est une variable positive alors

$$0 < \mathbb{E}(e^{\theta X_1}) = \int_{X(\Omega)} e^{\theta X_1} d\mathbb{P}_{X_1} < +\infty, \forall \theta \leq 0$$

donc l'ensemble sur lequel elle est définie contient $\mathbb{R}_-$ ceci achève la preuve .

• Determination de I dans le cas d'une loi de géométrie (p) ou poisson (λ). Il s'agit d'une question au choix nous allons traiter le cas exponentielle le lecteur pourrait chercher le cas géométrique .Dans la partie préliminaire nous tirons la forme de $\phi(\theta) = \ln(e^{-\lambda(1-e^\theta)})$ donc $I = \mathbb{R}$

• On souhaite montrer que la fonction H définie par $H(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est décroissante . D'après la question 9-b elle est bien définie la décroissance vient du fait que $\forall u, u' : u \leq u'$ on a

$$\{S_n \geq nu'\} \subset \{S_n \geq nu\}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq nu') &\leq \mathbb{P}(S_n \geq nu) \\ \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu'))}{n} &\leq \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} \\ H(u') = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu'))}{n} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} = H(u) \end{aligned}$$

et c'est gagné!!

• Montrons que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 : H(\frac{u+v}{2}) \geq \frac{1}{2}(H(u) + H(v))$ On utilisera la question 9-a en prenant $n=m$ et

donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} \geq n(u+v)) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

$$\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2}) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

$$\frac{1}{2n} \ln(\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2})) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu)) + \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv)))$$

comme

$$H(\frac{u+v}{2}) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq n\frac{u+v}{2}))}{n} \geq \frac{1}{2n} \ln(\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2}))$$

alors

$$H(\frac{u+v}{2}) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu)) + \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv)))$$

en passant au sup sur n c'est gagné!!! • la fonction H est décroissante donc $-H$ est croissante et vérifie la relation 3 donc elle est convexe ainsi H est concave .

• Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$ On demande de justifier que $\forall n \geq 1, \mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^n$
 Nous l'avons plus ou moins démontré mais nous allons le reprendre par récurrence sur n au rang $n = 1$ c'est trivial !!! supposons que la relation est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ on a $\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}}) = \mathbb{E}(e^{\theta S_n} e^{\theta X_{n+1}})$ comme S_n et X_{n+1} sont indépendants et de même loi que X_1 alors

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}}) = \mathbb{E}(e^{\theta S_n})\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}}) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^n (\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^{n+1}$$

c'est gagné!!!

• Il s'agit d'une déduction :

$$\forall n \geq 1, \phi(\theta) \geq \frac{1}{n} \ln(e^{n\theta u} \mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

On sait que

$$e^{\theta S_n} \geq e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \geq nu} \geq e^{n\theta u} \mathbf{1}_{S_n \geq nu}$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) \geq e^{n\theta u} \mathbb{P}(S_n \geq nu)$$

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n})) \geq \ln(e^{n\theta u} \mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

On utilise maintenant la question précédente

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n})) = n\phi(\theta) \geq \ln(e^{n\theta u} \mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

c'est gagné!!!

• On souhaite conclure à l'inégalité :

$$\phi(\theta) \geq \sup_{u \in \mathbb{R}} (\theta u + H(u))$$

On se sert de la déduction

$$\phi(\theta) \geq \frac{1}{n} \ln(e^{n\theta u} \mathbb{P}(S_n \geq nu)) = \theta u + \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

En prenant le sup sur n on a $\phi(\theta) \geq \theta u + H(u)$ en reprenant le sup sur u c'est gagné!!!!

• On souhaite établir le cas d'égalité pour $\theta = 0$ on a $\phi(0) \geq \sup_{u \in \mathbb{R}} H(u)$ comme $H(0) = \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq 0))$ comme les variables sont positives alors $\mathbb{P}(S_n \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(S_n < 0) = 1$ donc $H(0) = 0 = \phi(0)$ on peut conclure on pouvait utiliser la question 6 aussi comme argument de justification puisque H est concave et décroissante avec $x=0$ c'est aussi gagné!!!

• Prouvons

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{X_1 \leq K})) = \frac{1}{n} \ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq K}))$$

On a

$$e^{\theta S_n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq K} = \prod_{i=1}^n e^{\theta X_i} \mathbf{1}_{X_i \leq K}$$

comme les variables sont indépendants et ont même loi que alors

$$\ln(\mathbb{E}(S_n \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq K})) = \ln(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{\theta X_i} \mathbf{1}_{X_i \leq K})) = \sum_{i=1}^n \ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_i} \mathbf{1}_{X_i \leq K})) = n \ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{X_1 \leq K}))$$

et c'est gagné!!!!

• Justifions l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}$ On a

$$e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{\{S_n \leq nK\}} \leq e^{\theta nK}$$

donc

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq e^{\theta nK}$$

Montrons l'inégalité

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt$$

Remarquons que

$$e^{nK\theta} = \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n} > t\}} dt$$

Donc

$$e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK} \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n} > t\}} dt$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n} > t\}} dt\right)$$

La linéarité de l'espérance .

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n} > t\}}) dt = \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt$$

c'est gagné!!!!

• Déduisons l'inégalité

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du$$

D'après la question précédente on a :

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt$$

De plus en posant $t = e^{n\theta u}$ on a :

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt = \int_{-\infty}^K n\theta \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du$$

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt = \int_{-\infty}^0 n\theta \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du + \int_0^K n\theta \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du$$

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t) dt \leq \int_{-\infty}^0 n\theta e^{n\theta u} du + \int_0^K n\theta \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du = 1 + \int_0^K n\theta \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du$$

c'est gagné!!!!.

• Dédution de l'inégalité

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{X_1 \leq K})) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + n\theta K e^{nM(\theta)})$$

On sait que

$$\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n > nu)) \leq H(u)$$

donc

$$\mathbb{P}(S_n > nu) \leq e^{nH(u)}$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K \mathbb{P}(S_n > nu) e^{n\theta u} du \leq 1 + n\theta \int_0^K e^{nH(u)} e^{n\theta u} du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K e^{nH(u)} e^{n\theta u} du = 1 + n\theta \int_0^K e^{n(H(u)+\theta u)} du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K e^{n \sup_{u \in \mathbb{R}} (H(u)+\theta u)} du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K e^{nM(\theta)} du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq 1 + n\theta K e^{nM(\theta)}$$

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(e^{\theta S_n} \mathbf{1}_{S_n \leq nK}) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + n\theta K e^{nM(\theta)})$$

d'après 5-ii c est gagné!!!!

- Soit n fixé et $K_0 = \lceil \frac{e^{-nM(\theta)}}{n\theta} \rceil + 1 \forall K \geq K_0, n\theta K e^{nM(\theta)} \geq 1$

$$\forall K \geq K_0, 1 + n\theta K e^{nM(\theta)} \leq 2n\theta K e^{nM(\theta)}$$

$$\forall K \geq K_0, \ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1} \mathbf{1}_{X_1 \leq K})) \leq \frac{\ln(2n\theta e^{nM(\theta)})}{n}$$

c'est gagné!!!!!! En faisant tendre n vers l'infini puis ensuite K vers l'infini dans la question 6 on déduit la question 7

- Dans cette question il s'agira de conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx)) = \inf_{\theta \geq 0} (\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) - \theta x)$$

D'après la question 9-c on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx))}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx))}{n} \stackrel{!}{=} H(x)$$

de plus la fonction H est concave et décroissante alors d'après la question 6-c on a :

$$\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (H(u) + \theta(u - x)) = H(x)$$

$$\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (H(u) + \theta u - \theta x) = \inf_{\theta \geq 0} (-\theta x + \sup_{u \in \mathbb{R}} (H(u) + \theta u)) = \inf_{\theta \geq 0} (-\theta x + M(\theta)) = \inf_{\theta \geq 0} (-\theta x + \phi(\theta))$$

$$\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} (H(u) + \theta(u - x)) = \inf_{\theta \geq 0} (\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) - \theta x)$$

et c'est gagné!!!!!!

- Soit $\lambda > 0, \epsilon > 0$ on souhaite montrer l'existence de $a > 0$ tel que pour tout entier n suffisamment grand on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \lambda + \epsilon\right) \leq e^{-an}$$

D'après la question précédente on a ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx))}{n} = \inf_{\theta \geq 0} (\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) - \theta x)$$

comme

$$\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx))}{n} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx))}{n} = \inf_{\theta \geq 0} (\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) - \theta x) = H(x) \leq 0$$

donc

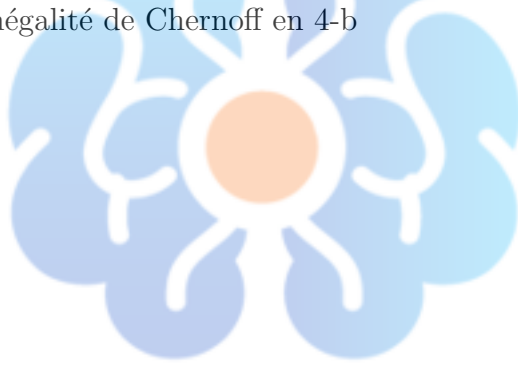
$$\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nx)) \leq nH(x)$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq e^{-n(-H(x))}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \leq e^{-n(-H(x))}$$

pour $x = \lambda + \epsilon$ on prend $a = -H(\lambda + \epsilon) > 0$ et c'est gagné

• La dernière question est simple il suffit de trouver a tel que $e^{-na} = \frac{\lambda}{n\epsilon^2}$ On pouvait utiliser l'inégalité de Chernoff en 4-b



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve de mathématiques

Durée : 3h

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. Les sous-questions sont indépendantes.

(a) On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}.$

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

- (c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.
ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln^4 n}{n}.$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Partie II Montées d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, **montée** d'une liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ (avec $p \leq q$) vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ou } a_{p-1} > a_p \\ \text{et } a_p < a_{p+1} < \dots < a_q \text{ (si } p < q) \\ \text{et } q = n \text{ ou } a_q > a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a . Par exemple, les montées de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont $(2, 5, 7)$, (6) , $(1, 4)$ et $(3, 8)$, et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont (2) , (5) , $(7, 6, 1)$, $(4, 3)$ et (8) , et donc $D(a) = 5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n -listes d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq M(a) \leq n$ et $1 \leq D(a) \leq n$.

Enfin, pour tout entier naturel k , on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{card} \{ a \in S_n; M(a) = k \}$. On a donc, $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

(b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n .

Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n , la valeur de $M(a) + D(a)$.

En notant, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, a_2, \dots, a_i)$, on évaluera, en fonction du nombre s_i , la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, a_2, \dots, a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe, à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de S_n , la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n).$$

- (a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n .
- (b) En déduire, pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

4. Calcul de $E_n(2)$

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

- (a) Quel est le nombre de couples (A, B) de parties **non vides** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que

$$A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

- (b) Établir l'égalité : $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

5. Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1} , on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a . Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$, et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$ alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$.

- (a) Soit $b = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de S_n . Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (b) Soit k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et soit b dans S_n tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (c) Établir, pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité :

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k).$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

- (d) Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leq k \leq n \leq 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. La formule de Worpitzky

Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n .

7. Une égalité miraculeuse !

Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 3h

Les matrices de Hessenberg sont des matrices « presque triangulaires », qui permettent d'économiser les calculs lors de la mise en œuvre d'algorithmes d'analyse numérique. L'objet du problème est d'examiner le comportement asymptotique des puissances de certaines de ces matrices.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Dans tout l'énoncé, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

- Le coefficient situé dans la i -ème ligne et la j -ème colonne d'une matrice M est noté $M[i, j]$.
- Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1, sont notées $E_{i,j}^{(n)}$. Ainsi a-t-on, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\forall (\ell, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad E_{i,j}^{(n)}[\ell, k] = \delta_i^\ell \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où δ_i^ℓ (respectivement δ_j^k) vaut 1 si $i = \ell$ (respectivement $j = k$), 0 sinon.

• Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note u_M (respectivement v_M) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M , c'est-à-dire l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). On appelle *spectre* de M l'ensemble, noté $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$, des valeurs propres de v_M (il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{C}$).

• Lorsque doit être établie la convergence d'une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de la convergence pour l'une quelconque des normes sur cet espace vectoriel, toutes équivalentes puisqu'il est de dimension finie.

Partie I Matrices de Hessenberg

• On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hessenberg* si tous ses coefficients $M[i, j]$ situés en dessous de la « sous-diagonale », c'est-à-dire tels que $i \geq j + 2$, sont nuls.

Par exemple, les matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M[1,1] & M[1,2] & M[1,3] & M[1,4] & M[1,5] \\ M[2,1] & M[2,2] & M[2,3] & M[2,4] & M[2,5] \\ 0 & M[3,2] & M[3,3] & M[3,4] & M[3,5] \\ 0 & 0 & M[4,3] & M[4,4] & M[4,5] \\ 0 & 0 & 0 & M[5,4] & M[5,5] \end{pmatrix}.$$

- Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Justifier que $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - En donner une base et la dimension.
- Soit a un réel strictement positif. On note $H_+(a)$ et $H_-(a)$ les deux matrices de Hessenberg de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H_+(a) = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a + \sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_-(a) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les valeurs propres de la matrice $H_+(a)$ et montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p} (H_+(a))^p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a + \sqrt{a}$.

c) Soit $Q(a) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a + \sqrt{a})^p} (H_+(a))^p$.

Justifier que l'endomorphisme $u_{Q(a)}$ de $\mathbb{R}^n$ est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.

d) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p} (H_-(a))^p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $J_n = \sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j}^{(n)}$ et $H_n(a, b) = a I_n + b J_n$.
 - Calculer les puissances successives de la matrice J_3 et donner, sans démonstration, une expression générale des puissances $(J_n)^q$ ($q \in \mathbb{N}$).
 - Établir, pour tout entier $p \geq n - 1$, l'égalité

$$(H_n(a, b))^p = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \binom{p}{i-j} a^{p-i+j} b^{i-j} E_{i,j}^{(n)}$$

et en déduire que, si a et b sont différents de 0, alors tous les coefficients de la matrice $(H_n(a, b))^{n-1}$ situés sur ou en dessous de la diagonale (c'est-à-dire dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à l'indice de colonne) sont différents de 0.

c) Pour quelles valeurs de (a, b) la suite $\left((H_n(a, b))^p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente?

Partie II Rayon spectral

Dans cette partie, on considère une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\rho(M)$ le plus grand des modules des éléments du spectre de M , appelé *rayon spectral* de M :

$$\rho(M) = \text{Max} \{ |\lambda| ; \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M) \} .$$

4. Soit ε un nombre réel strictement positif et P_{ε} la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont donnés par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{\varepsilon}[i, i] = \varepsilon^i .$$

a) Calculer, pour toute matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de la matrice $P_{\varepsilon}^{-1} T P_{\varepsilon}$.

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une matrice triangulaire semblable à T dont tous les coefficients non diagonaux sont de modules inférieurs ou égaux à α .

c) Démontrer que pour tout réel $r > \rho(M)$, il existe une matrice inversible P à coefficients complexes pour laquelle la matrice $M' = P^{-1} M P$ est triangulaire et le module de chacun de ses coefficients au plus égal à r , c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |M'[i, j]| \leq r .$$

5. Justifier, pour tout réel $r > \rho(M)$, la convergence de la suite $\left(\frac{1}{r^p} M^p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ vers la matrice nulle.
6. On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique de M possède au moins une racine réelle simple, que l'on note λ .

On note u_M^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de u_M , dont la matrice dans la base canonique est la transposée ${}^t M$ de la matrice M .

- a) Justifier l'existence de deux éléments non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$u_M(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad u_M^*(y) = \lambda y .$$

b) Démontrer que l'orthogonal $\text{Vect}\{y\}^{\perp}$ de la droite vectorielle engendrée par le vecteur y , pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, est stable par l'endomorphisme u_M et que λ n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme de $\text{Vect}\{y\}^{\perp}$ induit par u_M .

c) En déduire que $\text{Vect}\{y\}^{\perp}$ et $\text{Vect}\{x\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

d) On note Q la matrice dans la base canonique du projecteur de $\mathbb{R}^n$ d'image $\text{Vect}\{x\}$ et de noyau $\text{Vect}\{y\}^{\perp}$.

Démontrer que, si λ est égal au rayon spectral $\rho(M)$ et si tous les éléments de $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ distincts de λ ont un module strictement inférieur à $\rho(M)$, alors la suite $\left(\frac{1}{\rho(M)^p} M^p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente et de limite Q .

Partie III Matrices irréductibles

Pour toute partie J de $[[1, n]]$, on note F_J le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dont l'indice j appartient à J :

$$F_J = \text{Vect}\{e_j; j \in J\}$$

(qui est réduit au vecteur nul lorsque J est vide).

• On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *J-réduite* si F_J est stable par l'endomorphisme u_M et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})[J]$ l'ensemble des matrices *J-réduites* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})[J] = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); u_M(F_J) \subseteq F_J\}.$$

• On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *irréductible* s'il n'existe aucune partie J de $[[1, n]]$, non vide et distincte de $[[1, n]]$, pour laquelle M est *J-réduite*.

7. Exemples

a) Pour quelles parties non vides J de $\{1, 2, 3\}$ les matrices $H_+(a)$ et $H_-(a)$ de la question 2 sont-elles *J-réduites*?

b) Démontrer qu'aucune des matrices $H_n(a, b)$ de la question 3 n'est irréductible.

8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que, pour que M soit irréductible, il suffit qu'il existe un entier naturel p pour lequel tous les coefficients de la matrice M^p sont différents de 0.

Pour traiter la dernière question du problème, on admettra les deux résultats suivants (théorèmes de Perron-Frobenius).

• Si une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs ou nuls, alors $\rho(N)$ appartient au spectre de N .

• Si une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs, alors $\rho(N)$ en est la seule valeur propre de module maximal et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé est égale à 1.

9. Soit H une matrice de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés sur et au dessus de la sous-diagonale sont strictement positifs :

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, i \leq j + 1 \implies H[i, j] > 0.$$

a) Justifier l'existence de deux réels strictement positifs a et b pour lesquels tous les coefficients de $H - H_n(a, b)$ sont positifs ou nuls.

b) En déduire que H est irréductible.

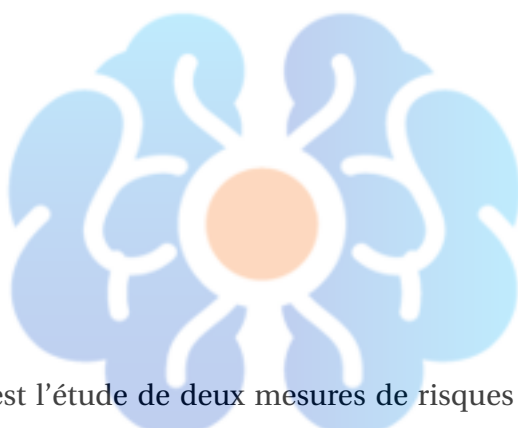
c) Démontrer que la suite $\left(\frac{1}{\rho(H)^p} H^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice qui est canoniquement associée à un projecteur de rang 1.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 3h



L'objet du problème est l'étude de deux mesures de risques fréquemment utilisées en gestion financière : la *Value-at-Risk* (VaR) et la *Tail-VaR*. Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante. La notation tiendra bien évidemment compte de la clarté et de la précision des réponses.

Notations et rappels

Pour l'ensemble du problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

- On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des **variables aléatoires réelles**. Un élément de $\mathcal{X}$ est donc une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.
- Soit $X \in \mathcal{X}$. La fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$ est la **fonction de répartition** de X . On admettra que cette fonction est nécessairement croissante et continue à droite.
- Un **vecteur aléatoire** de taille $n \geq 1$ est un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \in \mathcal{X}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $[X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n] \in \mathcal{A}$.
- Deux vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont dits **égaux en loi** si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([Y_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [Y_n \leq x_n])$. L'égalité en loi est notée $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_1, \dots, Y_n)$.
- Si la fonction de répartition de $X \in \mathcal{X}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (éventuellement privé d'un ensemble fini de points) alors X est une **variable aléatoire à densité**. En notant $f = F'$ la dérivée de F on a pour toute fonction continue positive $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

- Pour tout $X \in \mathcal{X}$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** assure que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

- Soit $(X_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en probabilité** vers $c \in \mathbb{R}$ ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$) si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(c)$.
- Soit $(X_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$, la **loi faible des grands nombres** assure que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Introduction du problème

En gestion financière, il est primordial de pouvoir évaluer le risque associé à un portefeuille d'actifs. Plus précisément, si la perte d'un portefeuille sur une période de temps donnée est modélisée par une variable aléatoire X , on souhaite quantifier le risque d'une perte importante de capital en résumant les valeurs prises par X par une unique valeur réelle $\mathcal{R}(X)$ appelée **mesure de risque**. L'objectif de ce problème est l'étude de deux mesures de risque classiques en gestion financière : la **Value-at-Risk (VaR)** et la **Tail-VaR**.

Dans un premier temps, nous supposons que les variables aléatoires $X \in \mathcal{X}$ considérées admettent une fonction de répartition $F(\cdot) = \mathbb{P}([X \leq \cdot])$ vérifiant la propriété suivante : il existe un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que F est une bijection de I dans $]0, 1[$.

Dans ce cadre¹, la **Value-at-Risk** au niveau $\alpha \in]0, 1[$ d'une variable aléatoire $X \in \mathcal{X}$ modélisant la perte d'un portefeuille d'actifs est donnée par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(1 - \alpha),$$

où F^{-1} est la bijection réciproque de F . Il est évident que la valeur $\text{VaR}_\alpha(X)$ est telle que $\mathbb{P}([X \leq \text{VaR}_\alpha(X)]) = 1 - \alpha$. On a ainsi une confiance de $(1 - \alpha)\%$ que la perte du portefeuille n'excède pas la Value-at-Risk. Ainsi, plus la valeur de $\text{VaR}_\alpha(X)$ est élevée, plus l'investissement dans le portefeuille d'actifs semble risqué. En pratique la valeur de α sera choisie proche de 0 (typiquement $\alpha = 0.01$ ou $\alpha = 0.05$).

La seconde mesure de risque que l'on considère dans ce problème est la **Tail-VaR** au niveau $\alpha \in]0, 1[$ définie pour tout $X \in \mathcal{X}_1 = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}(|X|) < \infty\} \subset \mathcal{X}$ par

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(X) ds.$$

Nous montrerons dans la partie III que l'intégrale ci-dessus est bien définie pour tout $X \in \mathcal{X}_1$. La Tail-VaR peut donc être vue comme la moyenne des Value-at-Risk de niveau $s \in]0, \alpha]$. Cette mesure de risque présente l'avantage de prendre en compte l'information apportée par les valeurs de X supérieures à la Value-at-Risk de niveau α . Ici encore, une grande valeur de $\text{TVaR}_\alpha(X)$ est associée à un investissement risqué.

I – Application

Vous souhaitez choisir entre deux portefeuilles d'actifs P_1 et P_2 afin d'effectuer un investissement le moins risqué possible. La perte (en K€, sur une période de 10 jours) du portefeuille P_1 est modélisée par $X_1 \in \mathcal{X}$ et celle de P_2 par $X_2 \in \mathcal{X}$. Les fonctions de répartition F_1

1. Le cas des variables aléatoires dont la fonction de répartition est non nécessairement bijective sera traité dans la partie III.

et F_2 de X_1 et X_2 sont données par

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)^{-\lambda} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$. Pour effectuer votre choix, vous mesurez dans un premier temps le risque par la Value-at-Risk.

- I-1) Calculer en fonction de $\lambda > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ les valeurs $\text{VaR}_\alpha(X_1)$ et $\text{VaR}_\alpha(X_2)$.
- I-2) Montrer que pour tout $x > 1$, $\ln(x) < x - 1$.
- I-3) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$, $\text{VaR}_\alpha(X_1) > \text{VaR}_\alpha(X_2)$. Conclure quant au choix du portefeuille.

Vous souhaitez conforter votre choix de portefeuille en mesurant également le risque par la Tail-VaR.

- I-4) Déterminer le sous-ensemble $L \subset]0, \infty[$ tel que pour tout $\lambda \in L$, $\mathbb{E}(|X_1|) = \mathbb{E}(X_1) < \infty$.
- I-5) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{E}(|X_2|) = \mathbb{E}(X_2) < \infty$.
- I-6) Pour tout $\lambda \in L$ et $\alpha \in]0, 1[$, calculer les valeurs $\text{TVaR}_\alpha(X_1)$ et $\text{TVaR}_\alpha(X_2)$.
- I-7) Montrer que pour tout $x > 1$ et $\lambda > 1$, $\lambda/(\lambda-1)x - 1 > 1/\lambda + \ln(x)$.
- I-8) Pour tout $\lambda \in L$ et $\alpha \in]0, 1[$, comparer les valeurs $\text{TVaR}_\alpha(X_1)$ et $\text{TVaR}_\alpha(X_2)$ et conclure quant au choix du portefeuille.

Dans cette application, les fonctions de répartition F_1 et F_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec de plus $F_1^{-1}(1-\alpha) \rightarrow \infty$ et $F_2^{-1}(1-\alpha) \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. Dans ce cas, la Tail-VaR peut être écrite différemment. C'est ce que l'on se propose de montrer dans la question suivante.

- I-9) Dans le cas où la fonction de répartition F de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (éventuellement privé d'un ensemble fini de points) avec de plus $F^{-1}(1-\alpha) \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$, montrer, en effectuant un changement de variable judicieux, que

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} t f(t) dt = \mathbb{E}(X \mid X > F^{-1}(1-\alpha)),$$

où f est la dérivée de F . Pour la dernière égalité, on rappelle que pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$ où $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice².

- I-10) Vérifier l'égalité ci-dessus pour les variables aléatoires X_1 et X_2 .

II - Estimation de la Value-at-Risk

Soit $n \geq 1$ un entier et soient $x_1, \dots, x_n$ les pertes (en k€, sur 10 jours) observées pour un portefeuille d'actifs. On admet que ses valeurs sont les réalisations de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ supposées indépendantes et de même loi que $X \in \mathcal{X}$ de fonction de répartition F (ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([X_1 \leq x]) = \dots = \mathbb{P}([X_n \leq x]) = \mathbb{P}([X \leq x]) = F(x)$).

2. Pour tout $E \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_E : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction telle que $\mathbb{I}_E(x) = 1$ si $x \in E$ et $\mathbb{I}_E(x) = 0$ si $x \notin E$.

On notera $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées aux variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. Plus précisément, le vecteur aléatoire $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$ est tel que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X_{1,n}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega))$$

est le vecteur obtenu en rangeant par ordre croissant les valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$. Les quatre questions suivantes ont pour but de vous familiariser avec la notion de statistiques d'ordre.

II-1) Pour $n = 4$, le tableau suivant donne les valeurs des variables aléatoires $X_1, \dots, X_4$ aux points $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$.

$X_1(\omega_1) = 0.73$	$X_2(\omega_1) = 0.94$	$X_3(\omega_1) = 0.62$	$X_4(\omega_1) = 0.51$
$X_1(\omega_2) = 0.21$	$X_2(\omega_2) = 0.79$	$X_3(\omega_2) = 0.81$	$X_4(\omega_2) = 0.31$

Quelle est la valeur de $X_{3,4}(\omega_1)$? Celle de $X_{3,4}(\omega_2)$?

II-2) Expliquer pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $[X_{n,n} \leq x] = [X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]$.

II-3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = F^n(x)$.

II-4) Donner l'expression de $\mathbb{P}[X_{1,n} \leq x]$ en fonction de $F(x)$.

Nous souhaitons estimer la Value-at-Risk au niveau $\alpha \in]0, 1[$, c'est-à-dire trouver une variable aléatoire observable qui converge (dans un sens que l'on précisera plus loin) vers $\text{VaR}_\alpha(X)$. Nous proposons l'estimateur suivant

$$\widehat{\text{VaR}}_{n,\alpha}(X) = X_{[n(1-\alpha)],n},$$

où $[x] = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$ est la partie entière par excès de x . En notant $x_{1,n} \leq \dots \leq x_{n,n}$ les valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ rangées par ordre croissant, la valeur observée de l'estimateur est donc $x_{[n(1-\alpha)],n}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\widehat{\text{VaR}}_{n,\alpha}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{VaR}_\alpha(X)$. Pour ce faire, on doit dans un premier temps démontrer un résultat connu sous le nom de *méthode de la transformée inverse*.

On note $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes $U_1, \dots, U_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$ (i.e. pour tout $i = 1, \dots, n$, U_i est une variable aléatoire à densité de fonction densité $\mathbb{I}_{[0,1]}$).

II-5) *Méthode de la transformée inverse*: Montrer que $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Autrement dit, montrer que $F(x) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_i) \leq x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Cette égalité en loi permet notamment de simuler n'importe quelle loi de probabilité à partir d'une simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

II-6) En déduire que $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_n))$.

On admettra pour la suite que l'égalité en loi de la question II-6) implique l'égalité en loi pour les statistiques d'ordre, i.e., que $X_{i,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_{i,n})$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On admettra également que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$U_{i,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^i E_j \bigg/ \sum_{j=1}^{n+1} E_j,$$

où $E_1, \dots, E_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle standard c'est-à-dire telles que pour tout $i = 1, \dots, n+1$,

$$\mathbb{P}([E_i \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

II-7) Calculer l'espérance d'une loi exponentielle standard.

II-8) Quelle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ doit-on prendre pour que $U_{[n(1-\alpha)],n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} u_n S_n / T_n$ avec

$$S_n = \frac{1}{[n(1-\alpha)]} \sum_{j=1}^{[n(1-\alpha)]} E_j \text{ et } T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} E_j$$

II-9) Montrer que $[n(1-\alpha)] \rightarrow \infty$ et $u_n \rightarrow 1-\alpha$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour ce faire, vous pourrez utiliser le fait que $[n(1-\alpha)] - n(1-\alpha) \in [0, 1[$.

II-10) En utilisant un résultat donné en début d'énoncé ainsi que les réponses aux questions précédentes, montrer que $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

On déduit facilement des questions II-8) à II-10) que $U_{[n(1-\alpha)],n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1-\alpha$.

II-11) En déduire que $\widehat{\text{VaR}}_{n,\alpha}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{VaR}_\alpha(X)$.

Partie III – Value-at-Risk et Tail-VaR

A ce stade, nous avons défini les deux mesures de risque (Value-at-Risk et Tail-VaR) uniquement pour des variables aléatoires $X \in \mathcal{X}$ dont la fonction de répartition $F(\cdot) = \mathbb{P}([X \leq \cdot])$ est bijective (de $I \subset \mathbb{R}$ dans $]0, 1[$). Nous allons dans cette partie généraliser ces définitions au cas d'une fonction de répartition quelconque. La fonction F n'étant plus nécessairement bijective, la définition de la Value-at-Risk utilisée jusqu'à présent n'a plus de sens, la bijection réciproque F^{-1} n'existant pas forcément. On propose alors de remplacer dans la définition de la Value-at-Risk F^{-1} par l'inverse généralisée $F^{\leftarrow}$ de F . Plus précisément, pour une variable aléatoire $X \in \mathcal{X}$ de fonction de répartition F quelconque, la Value-at-Risk au niveau $\alpha \in]0, 1[$ est donnée par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{\leftarrow}(1-\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1-\alpha\}.$$

On remarque facilement que $\mathbb{P}([X \leq \text{VaR}_\alpha(X)]) \geq 1-\alpha$. On a ainsi une confiance supérieure à $(1-\alpha)\%$ que la perte du portefeuille n'excède pas la valeur $\text{VaR}_\alpha(X)$.

L'objectif des questions suivantes est de démontrer quelques propriétés de la Value-at-Risk.

III-1) Montrer que si F est bijective de I dans $]0, 1[$ alors $F^{\leftarrow}(1-\alpha) = F^{-1}(1-\alpha)$.

III-2) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $X \in \mathcal{X}$, montrer que $\text{VaR}_\alpha(\lambda X + m) = \lambda \text{VaR}_\alpha(X) + m$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

On rappelle que la Tail-VaR au niveau α est définie pour tout $X \in \mathcal{X}_1 = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}(|X|) < \infty\}$ par

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(X) ds.$$

L'objectif des questions III-3) à III-7) est de s'assurer que la Tail-VaR est bien défini pour tout $X \in \mathcal{X}_1$ c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $X \in \mathcal{X}_1$,

$$\int_0^\alpha |\text{VaR}_s(X)| ds < \infty. \quad (1)$$

III-3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1[$ tels que $F^\leftarrow(y) \leq x$ on a $y \leq F(x)$.

III-4) Réciproquement, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1[$ tels que $y \leq F(x)$ on a $F^\leftarrow(y) \leq x$. En déduire que $\{y \in \mathbb{R} \mid F^\leftarrow(y) \leq x\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq F(x)\}$.

III-5) Soit U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[F^\leftarrow(U) \leq x] = [U \leq F(x)]$. En déduire que $F^\leftarrow(U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$.

III-6) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\int_0^\alpha |\text{VaR}_s(X)| ds \leq \mathbb{E}(|F^\leftarrow(U)|),$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

III-7) En utilisant l'égalité en loi $F^\leftarrow(U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$, montrer que l'assertion (1) est vraie pour tout $X \in \mathcal{X}_1$ (aide : si $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$, $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(|Y|)$).

III-8) En utilisant les résultats des questions III-2-c) et III-3), montrer que si $Y \leq Z$ alors $\text{TVaR}_\alpha(Y) \leq \text{TVaR}_\alpha(Z)$.

Montrer également que pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, $\text{TVaR}_\alpha(\lambda X + m) = \lambda \text{TVaR}_\alpha(X) + m$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles
d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Corrigé



I – Application

I-1) Il est évident que F_1 est une bijection de $I =]0, \infty[$ dans $]0, 1[$. Ainsi, en résolvant l'équation $1 - (1+x)^{-\lambda} = 1 - \alpha$, on trouve que $\text{VaR}_\alpha(X_1) = \alpha^{-1/\lambda} - 1$. De même, F_2 est une bijection de $]0, \infty[$ dans $]0, 1[$ et en résolvant l'équation $1 - \exp(-\lambda x) = 1 - \alpha$, on trouve que $\text{VaR}_\alpha(X_2) = \log(1/\alpha)/\lambda$.

I-2) Il suffit de faire l'étude de la fonction $f(x) = \log(x) - x + 1$. La dérivée de f est donnée pour tout $x \in]1, \infty[$ par $f'(x) = 1/x - 1 < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante et donc $f(x) < f(1) = 0$ qui est le résultat demandé.

I-3) On a

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X_2) - \text{VaR}_\alpha(X_1) &= \log(1/\alpha)/\lambda - \alpha^{-1/\lambda} + 1 \\ &= \log(\alpha^{-1/\lambda}) - \alpha^{-1/\lambda} + 1 = f(\alpha^{-1/\lambda}),\end{aligned}$$

où $f(x) = \log(x) - x + 1$. Comme $\alpha^{-1/\lambda} > 1$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$, on a le résultat en utilisant la réponse à la question I-2).

I-4) La fonction de répartition F_1 étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, X_1 est une variable aléatoire de densité $f_1(x) = \lambda(1+x)^{-\lambda-1}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_1|) &= \mathbb{E}(X_1) = \lambda \int_0^\infty x(1+x)^{-\lambda-1} dx = \lambda \int_1^\infty (y-1)y^{-\lambda-1} dy \\ &= \lambda \int_1^\infty y^{-\lambda} dy - 1,\end{aligned}$$

car pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda-1} dy = \frac{1}{\lambda}$$

Il suffit donc d'étudier l'intégrale $\int_1^\infty y^{-\lambda} dy$. Si $\lambda \neq 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda} dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A y^{-\lambda} dy = \frac{1}{1-\lambda} \left(\lim_{A \rightarrow \infty} A^{1-\lambda} - 1 \right).$$

Ainsi, si $\lambda < 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda} dy = \infty,$$

et si $\lambda > 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda} dy = \frac{1}{\lambda-1}$$

Enfin, si $\lambda = 1$

$$\int_1^\infty y^{-1} dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A y^{-1} dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \log(A) = \infty.$$

En conclusion, si $\lambda \leq 1$, $\mathbb{E}(X_1) = \infty$ et si $\lambda > 1$,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} - 1 = \frac{1}{\lambda-1}.$$

L'ensemble L est donc $]1, \infty[$.

I-5) La fonction de répartition F_2 étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, X_2 est une variable aléatoire de densité $f_2(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}(X_2) = \lambda \int_0^\infty x \exp(-\lambda x) dx.$$

En faisant une intégration par parties, on trouve

$$\mathbb{E}(X_2) = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} \exp(-\lambda x) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

I-6) En utilisant la définition de l'Expected Shortfall, on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 1$,

$$\text{ES}_\alpha(X_1) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left(s^{-1/\lambda} - 1 \right) ds = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{s^{1-1/\lambda}}{1-1/\lambda} \right]_0^\alpha - 1 = \frac{\lambda}{\lambda-1} \alpha^{-1/\lambda} - 1.$$

De même, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$,

$$\text{ES}_\alpha(X_2) = -\frac{1}{\lambda\alpha} \int_0^\alpha \log(s) ds = -\frac{1}{\lambda\alpha} [s(\log(s) - 1)]_0^\alpha = \frac{1}{\lambda} (1 - \log(\alpha)).$$

I-7) D'après la question I-2), on a $x > 1 + \log(x)$. Ainsi, comme $\lambda/(\lambda-1) > 0$,

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} x - 1 > \frac{\lambda}{\lambda-1} (1 + \log(x)) - 1 = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left(\frac{1}{\lambda} + \log(x) \right).$$

Comme $\lambda > 1$, on sait que $\lambda/(\lambda-1) > 1$ et donc

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} \left(\frac{1}{\lambda} + \log(x) \right) > \frac{1}{\lambda} + \log(x),$$

qui montre le résultat annoncé. Pour résoudre cette question, on aurait également pu étudier directement la fonction $f(x) = \lambda/(\lambda-1)x - 1 - 1/\lambda - \log(x)$.

I-8) On a

$$\text{ES}_\alpha(X_2) - \text{ES}_\alpha(X_1) = \frac{1}{\lambda} + \log(\alpha^{-1/\lambda}) - \frac{\lambda}{\lambda-1} \alpha^{-1/\lambda} + 1.$$

Comme $\alpha^{-1/\lambda} > 1$, la question I-7) implique que $\text{ES}_\alpha(X_2) < \text{ES}_\alpha(X_1)$. Le portefeuille le moins risqué est donc celui associé à la variable aléatoire X_2 .

I-9) On rappelle que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(1-s) ds$$

En posant $t = F^{-1}(1-s)$, on a $s = 1 - F(t)$ pour tout $s \in]0, \alpha[$ et donc $ds = -f(t)dt$. Ainsi,

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(1-\alpha)}^\infty t f(t) dt.$$

La fonction f étant la densité de la variable aléatoire continue X , on en déduit que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{I}_{\{X > F^{-1}(1-\alpha)\}}).$$

Comme $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$ avec $A = [X > F^{-1}(1-\alpha)]$, on en déduit le résultat.

I-10) La variable aléatoire admet pour densité la fonction $f_1(x) = \lambda(1+x)^{-\lambda-1} \mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} t f_1(t) dt = \lambda \int_{\alpha^{-1/\lambda}-1}^{\infty} t(1+t)^{-\lambda-1} dt.$$

En posant $u = 1 + t$,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} t f_1(t) dt = \lambda \int_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty} (u-1) u^{-\lambda-1} du = \lambda \left(\left[\frac{u^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right]_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty} + \left[\frac{u^{-\lambda}}{\lambda} \right]_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty} \right)$$

Comme $\lambda > 1$,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} t f_1(t) dt = \lambda \frac{\alpha^{1-1/\lambda}}{\lambda-1} - \alpha$$

En divisant par α , on retrouve la même valeur que celle obtenue à la question I-6). De manière similaire, on vérifie l'égalité pour la variable aléatoire X_2 .

II - Estimation de la Value-at-Risk

II-1) En rangeant par ordre croissant les éléments de la première ligne du tableau, on trouve que $X_{3,4}(\omega_1) = X_1(\omega_1) = 0.73$. De même, $X_{3,4}(\omega_2) = X_2(\omega_2) = 0.79$.

II-2) Tout d'abord, si $\omega \in [X_{n,n} \leq x]$, alors $\max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \leq x$ et donc $X_1(\omega) \leq x, \dots, X_n(\omega) \leq x$. Autrement dit, $\omega \in [X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]$. De plus, si $\omega \in [X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]$ alors $X_1(\omega) \leq x, \dots, X_n(\omega) \leq x$ et en particulier, $\max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \leq x$ ce qui montre le résultat.

II-3) D'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]).$$

Par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = \mathbb{P}([X_1 \leq x]) \dots \mathbb{P}([X_n \leq x]) = F^n(x),$$

puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent la même fonction de répartition F .

II-4) Il fallait ici remarquer que $[X_{1,n} > x] = [X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]$. Ainsi, par indépendance et égalité des fonctions de répartition,

$$\mathbb{P}[X_{1,n} \leq x] = 1 - \mathbb{P}[X_{1,n} > x] = 1 - (1 - F(x))^n.$$

II-5) La fonction F^{-1} étant la bijection réciproque de la fonction croissante F , on a pour tout $i = 1, \dots, n$ que $[F^{-1}(U_i) \leq x] = [U_i \leq F(x)]$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([F^{-1}(U_i) \leq x]) = \mathbb{P}([U_i \leq F(x)]) = F(x),$$

la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ étant la fonction identité.

II-6) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([X_1 \leq x_1]) \dots \mathbb{P}([X_n \leq x_n]).$$

En utilisant la question précédente,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_1) \leq x_1]) \dots \mathbb{P}([F^{-1}(U_n) \leq x_n]).$$

En utilisant à présent l'indépendance des variables aléatoires U_i ,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_1) \leq x_1] \cap \dots \cap [F^{-1}(U_n) \leq x_n])$$

qui est le résultat attendu.

II-7) Ce calcul a déjà été fait lors de la question I-5).

II-8) Il est évident que $u_n = \lceil n(1 - \alpha) \rceil / (n + 1)$.

II-9) On sait que $\lceil n(1 - \alpha) \rceil = n(1 - \alpha) + \varepsilon$ où $\varepsilon \in [0, 1[$. Ainsi, $n(1 - \alpha) \leq \lceil n(1 - \alpha) \rceil < n(1 - \alpha) + 1$. Par le théorème des gendarmes, comme $n(1 - \alpha) \rightarrow \infty$, on en déduit la première partie de la question. De plus, comme $n/(n + 1) \rightarrow 1$ et $1/(n + 1) \rightarrow 0$, une autre utilisation du théorème des gendarmes nous assure que $u_n \rightarrow 1 - \alpha$.

II-10) Les variables aléatoires E_i étant indépendantes, de même loi et d'espérance commune égale à 1 et puisque $m = \lceil n(1 - \alpha) \rceil \rightarrow \infty$, la loi faible des grands nombres nous assure que

$$S_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

lorsque n (et donc m) tends vers l'infini. De même, $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

II-11) D'après le résultat admis après la question II-6), on sait que

$$\widehat{\text{VaR}}_{n,\alpha}(X) \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}).$$

De plus, $U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 - \alpha$. La fonction F^{-1} étant continue, elle conserve la convergence en probabilité et ainsi $F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} F^{-1}(1 - \alpha) = \text{VaR}_\alpha(X)$. On en déduit finalement que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{\text{VaR}}_{n,\alpha}(X) - \text{VaR}_\alpha(X)\right| \geq \varepsilon\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}\left(\left|F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}) - \text{VaR}_\alpha(X)\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration.

Partie III – Value-at-Risk et Expected Shortfall

III-1) Si F est bijective de I sur $]0, 1[$, on sait que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1 - \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq F^{-1}(1 - \alpha)\}$. Noter que l'on utilise ici le fait que F (et donc F^{-1}) est croissante. Comme $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq F^{-1}(1 - \alpha)\} = F^{-1}(1 - \alpha)$, on obtient le résultat voulu.

III-2) La fonction de répartition de $\lambda X + m$ est pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(y) = \mathbb{P}(\lambda X + m \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y - m}{\lambda}\right) = F\left(\frac{y - m}{\lambda}\right).$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(\lambda X + m) &= \inf\{y \in \mathbb{R} \mid G(y) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \lambda \inf\left\{\frac{y - m}{\lambda} \in \mathbb{R} \mid F\left(\frac{y - m}{\lambda}\right) \geq 1 - \alpha\right\} + m. \end{aligned}$$

Evidemment, si $y \in \mathbb{R}$, $z = (y - m)/\lambda \in \mathbb{R}$ et donc

$$\inf\left\{\frac{y - m}{\lambda} \in \mathbb{R} \mid F\left(\frac{y - m}{\lambda}\right) \geq 1 - \alpha\right\} = \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq 1 - \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(X).$$

III-3) Si $F^\leftarrow(y) \leq x$ alors $\inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} \leq x$. La fonction F étant croissante, on en déduit que $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\}$ et donc que $F(x) \geq y$.

III-4) – Si $y \leq F(x)$ on sait que $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\}$. Ainsi,

$$x \geq \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} = F^\leftarrow(y).$$

Ce résultat montre que $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq F(x)\} \subset \{y \in \mathbb{R} \mid F^\leftarrow(y) \leq x\}$ et la question III-4), montre l'inclusion inverse d'où l'égalité des deux ensembles.

III-5) D'après la question précédente, on sait que

$$\{\omega \in \Omega \mid F^\leftarrow(U(\omega)) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq F(x)\}$$

et ainsi que $[F^\leftarrow(U) \leq x] = [U \leq F(x)]$. On en déduit que $\mathbb{P}([F^\leftarrow(U) \leq x]) = \mathbb{P}([U \leq F(x)]) = F(x)$ ce qui conclut la démonstration.

III-6)

$$\int_0^\alpha |\text{VaR}_s(X)| ds = \int_0^\alpha |F^\leftarrow(1 - s)| ds = \int_{1-\alpha}^1 |F^\leftarrow(s)| ds \leq \int_0^1 |F^\leftarrow(s)| ds.$$

La densité d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ étant l'indicatrice sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\int_0^1 |F^\leftarrow(s)| ds = \mathbb{E}(|F^\leftarrow(U)|),$$

qui est le résultat demandé.

III-7) De la question précédente, il vient

$$\int_0^\alpha |\text{VaR}_s(X)| ds \leq \mathbb{E}(|F^{\leftarrow}(U)|) = \mathbb{E}(|X|).$$

Ainsi, si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, l'assertion (1) est vraie.

III-8) Si $Y \leq Z$, on sait que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\text{VaR}_\alpha(Y) \leq \text{VaR}_\alpha(Z)$. Par monotonie de l'intégrale,

$$\text{ES}_\alpha(Y) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(Y) ds \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(Z) ds = \text{ES}_\alpha(Z).$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, la question III-3) implique que

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(\lambda X + m) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(\lambda X + m) ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha [\lambda \text{VaR}_s(X) + m] ds \\ &= \lambda \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_s(X) ds + m = \lambda \text{ES}_\alpha(X) + m. \end{aligned}$$

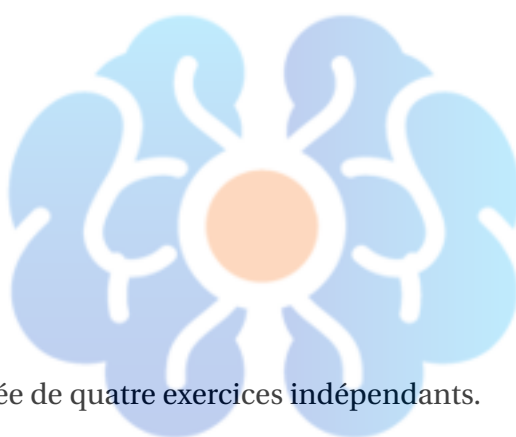


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, **indépendantes et de même loi**, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)), \quad M(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega).$$

- Montrer que I et M sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.
 - Reconnaître la loi de la variable I .
 - Calculer, pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ (qu'on pourra noter $\mathbf{P}(I = i, D = d)$).
On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.
 - Déterminer la loi de la variable D .
 - Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
- Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.

On note $b := \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$.

On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- Exprimer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}(I > k, D = 0)$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
 - Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b} p_k$.
- En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1 .

Exercice 2. Un calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

- Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n - 1)(C_{n-1} - C_n)$.

On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n$.

4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)$.

5. (a) Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.

6. Prouver l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. Trois preuves d'une égalité combinatoire

1. Avec la fonction Beta

On pose, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, $B(n, p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$.

(a) Relier, pour tout couple $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les réels $B(n, p)$ et $B(n+1, p-1)$. En déduire, pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $B(n, p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$.

(b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{(m-1)!n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

2. Avec des différences finies

On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, associe la suite

$$\Delta(u) := (u_{p+1} - u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}.$$

On note, $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta$, etc., et $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}}$.

(a) Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$(\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

(b) En utilisant la suite $u := \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ établir à nouveau l'égalité $(\mathcal{E})$.

3. Par un raisonnement probabiliste

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on dispose de la formule du crible suivante

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

- (a) Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^n A_i) = \mathbf{P}(B) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_k}^c),$$

(où l'on note E^c le complémentaire d'un événement E).

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant une boule noire notée N , n boules blanches notées $B_1, B_2, \dots, B_n$ et $m-1$ boules rouges notées $R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne, sans remise de la boule dans l'urne après tirage, jusqu'à épuisement de l'urne. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une $(m+n)$ -liste (ordonnée ...) composée des $m+n$ symboles $B_1, B_2, \dots, B_n, R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$ et N . On note B l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée avant chacune des boules rouges, et, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée après la boule blanche B_i .

- (b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B)$.

- (c) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^n A_i)$.

- (d) Prouver, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout k -liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_k}^c) = \frac{1}{m+k}.$$

- (e) i. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer – en le justifiant – le nombre de k -listes $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers telles que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
ii. En déduire à nouveau l'égalité (e).

Exercice 4. Une propriété des matrices symétriques

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n que l'on munit de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est tXY . On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$,

$$R(A) = \{ {}^tXAX; {}^tXX = 1 \}.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonalement semblable** à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (i.e. vérifiant l'égalité ${}^tPP = I_n$) pour laquelle $B = {}^tPAP$.

- Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B .
Prouver l'égalité : $R(A) = R(B)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant i.e. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.
(a) Prouver l'inclusion : $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

- (b) Établir l'égalité : $R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.
- (c) Montrer que si la matrice A est de trace nulle alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

On appelle diagonale d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \dots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

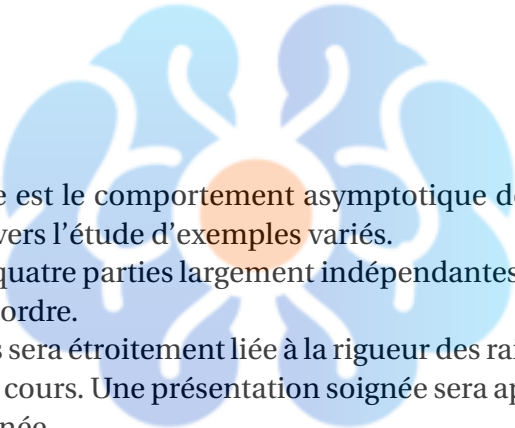
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle tPAP a pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$ (où $\text{Tr } A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\text{Tr } A$ est élément de $R(A)$.
3. (a) Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.
(b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr } A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.
4. Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Tr } A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\text{Tr } A, 0)$.
5. Soit n un entier avec $n \geq 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.
Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$.
(a) Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.
(b) Que vaut $\text{Tr } B$? En déduire que $\text{Tr } B \in R(B)$.
(c) Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.
6. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a .

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h



Le thème du problème est le comportement asymptotique des restes des séries numériques convergentes, à travers l'étude d'exemples variés.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n \geq 0}$, on notera $\sum_{n \geq 0} u_n$ la série de terme général u_n et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

Partie I Exemples de calcul explicite du reste

1. Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \text{ est convergente. Quelle est alors sa limite?}$$

2. Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

- a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme?

- b) Établir, pour tout nombre entier strictement positif n , l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \operatorname{sh}(t) dt \quad .$$

- c) Donner une expression similaire de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

3. a) Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}\right)$ est convergente.

- b) Trouver un couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases} \quad .$$

- c) Établir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls, on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y) \quad .$$

- d) Dédurre des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1) \quad .$$

- e) La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)$ est-elle convergente?

Partie II Exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

5. Dans cette question on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^x}$.

a) Pour tout réel a strictement positif, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt = \frac{a^{1-x}(1 + (x-1)\ln a)}{(x-1)^2}.$$

b) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt.$$

c) En déduire que r_n est équivalent à $\frac{\ln n}{(x-1)n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

6. Sommation des relations de comparaison

On considère deux suites $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et $w = (w_n)_{n \geq 0}$ à termes réels non nuls.

On suppose que v_n est équivalent à w_n quand n tend vers l'infini et que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

On rappelle que, si tous les termes de la suite v sont positifs, alors :

- la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est convergente.
- $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

a) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que la première de ces deux propriétés de w ne serait pas assurée si le signe des termes de la suite v n'était pas constant.

b) Montrer de même que, lorsque le signe des termes de la suite v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini. On pourra utiliser pour w la suite de terme

général $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Pour traiter la question qui suit, on pourra admettre la propriété suivante qui complète les propriétés rappelées précédemment.

Si v et w sont deux suites à termes positifs telles que $v_n = o(w_n)$ (v_n négligeable par rapport à w_n quand n tend vers l'infini) et si les séries $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} w_n$ sont convergentes, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\right).$$

7. Un exemple probabiliste

Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda (> 0)$ et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(X \geq n)$.

b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = p(1-p)^{n-1} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{1-p} \right)^k.$$

c) En déduire que $\mathbf{P}(Y \geq n)$ est négligeable devant $\mathbf{P}(X + Y \geq n)$ quand n tend vers l'infini.

d) Démontrer que $\mathbf{P}(X + Y \geq n)$ est équivalent à $e^{\lambda p/(1-p)} (1-p)^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

e) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X + Y \geq n)$ est convergente. Quelle est sa somme?

Partie III Étude du reste comme opérateur

On note L_∞ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées et $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par

$$\forall u = (u_n)_{n \geq 0}, \quad \|u\|_\infty = \sup \{|u_n|; n \in \mathbb{N}\}.$$

8. Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

9. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F .

b) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$? Quelle est son adhérence?

10. On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

a) Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.

b) Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞ , dont l'image est F .

c) On note Ψ la restriction de Φ à E , considérée comme une bijection de E sur F .

On munit E et F de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

i) L'application Ψ est-elle continue?

ii) L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue?

Partie IV Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

On rappelle que, si $v = (v_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, alors :

- la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie l'inégalité

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_n.$$

11. Établir, pour tout réel positif ou nul t , la double inégalité :

$$0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

12. Pour tout entier positif ou nul n , on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b) Pour tout entier positif ou nul n , on pose : $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n , on a :

i) $|r_n| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p)$

ii) $0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1).$

c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

d) Démontrer que, si le quotient $\frac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini alors r_n est équivalent à $\frac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini.

13. a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente?
- b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.
14. a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ est convergente.
- b) La série de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k}$ est-elle convergente?



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet est composé de quatre problèmes qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Problème I – Le facteur de Bayes

Le résultat d'une expérience aléatoire est un réel r qui est vu comme la réalisation d'une variable aléatoire R . Pour une même expérience, la loi de la variable aléatoire R peut être définie de différentes manières. Choisir une loi pour R équivaut à choisir un modèle pour l'expérience aléatoire.

Face à ces différentes possibilités de modélisation, une question naturelle est de savoir *a posteriori*, c'est-à-dire après avoir pris connaissance du résultat de l'expérience, si un modèle A est préférable à un autre modèle B . Pour répondre à cette question, on peut calculer le facteur de Bayes défini par

$$f_{A,B} := \log_{10} p_A - \log_{10} p_B,$$

où p_A est la probabilité que $R = r$ sous le modèle A et p_B est la probabilité que $R = r$ sous le modèle B . La notation $\log_{10}$ correspond au logarithme décimal (base 10).

Evidemment, une valeur positive de $f_{A,B}$ suggère que le modèle A est préférable à B . Plus précisément, l'interprétation de la valeur $f_{A,B}$ est donnée dans le tableau suivant.

$f_{A,B}$	Décision
$< -1/2$	Le modèle B est préféré au modèle A .
de $-1/2$ à $1/2$	On ne peut pas distinguer les deux modèles.
$> 1/2$	Le modèle A est préféré au modèle B .

TABLE 1 – Règle de décision du facteur de Bayes

L'objectif de ce problème est d'appliquer cette méthode de décision sur une expérience simple : le "pile ou face".

Questions préliminaires

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $q_1 \in]0, 1[$ et $q_2 \in]0, 1[$. On a donc $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q_i$ et $\mathbb{P}([X_i = 0]) = 1 - q_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

- I.1) On introduit la variable aléatoire $S_2 = X_1 + X_2$. Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs prises par la variable aléatoire S_2 .
- I.2) Pour tout $k \in E_2$, donner l'expression (en fonction de q_1 et q_2) la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([S_2 = k])$.
- I.3) Calculer l'espérance et la variance de S_2 .

On considère à présent $n > 2$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de loi de Bernoulli avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q_i \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

I.4) En fonction de $q_1, \dots, q_n$, donner les expressions de $\mathbb{P}([S_n = 0])$ et $\mathbb{P}([S_n = 1])$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des vecteurs $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

I.5) Donner en fonction de k et n le cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}_k$.

I.6) Montrer que

$$\mathbb{P}([S_n = 2]) = \sum_{(i_1, i_2) \in \mathcal{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_\ell \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_\ell}).$$

I.7) Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, donner l'expression de $\mathbb{P}([S_n = k])$.

I.8) Dans le cas où $q_1 = \dots = q_n$, simplifier l'expression de $\mathbb{P}([S_n = k])$ obtenue à la question précédente. Quel nom donne-t-on à la loi de S_n dans ce cas?

Le “pile ou face”

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une pièce de monnaie et à compter le nombre de fois où l'on obtient le côté “pile”. Le résultat r de cette expérience est la réalisation de la variable aléatoire R donnée par

$$R = S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes et telles que $X_i = 1$ si le côté “pile” est obtenu au i -ème lancer et $X_i = 0$ sinon.

On compare les modélisations suivantes.

- Modèle $M_{1/2}$: la pièce est équilibrée et donc $\mathbb{P}([X_i = 1]) = 1/2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Modèle M_q : la probabilité d'obtenir le côté “pile” est égale à $q \in]0, 1[$.

I.9) Donner l'expression de la probabilité $p_{1/2}(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque la pièce est supposée équilibrée (modèle $M_{1/2}$).

I.10) Pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$, donner l'expression de la probabilité $p_q(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_q . En déduire l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2, q}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_q(n, r).$$

I.11) Dresser le tableau de variation de la fonction $q \mapsto f_{1/2, q}(n, r)$.

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{ q \in]0, 1[\mid -\frac{1}{2} \leq f_{1/2, q}(n, r) \leq \frac{1}{2} \right\},$$

- I.12) Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, que peut-on dire sur les modèles $M_{1/2}$ et M_q ? (utiliser la règle de décision du Tableau 1).
- I.13) Application numérique : Après $n = 200$ lancers, on obtient $r = 115$ fois le côté pile. L'ensemble $\mathcal{Q}$ correspondant est $[0.483, 0.522] \cup [0.627, 0.664]$. Une personne vous assure qu'avec la pièce utilisée, la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face". Qu'en pensez-vous?

Connaissant le résultat r de l'expérience, on souhaite s'assurer que la pièce utilisée était bien équilibrée. Pour ce faire, une première méthode consiste à comparer le modèle de la pièce équilibrée au modèle le plus vraisemblable *a posteriori*. Ce modèle (noté M_{opt}) est celui pour lequel $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \hat{q}(n, r)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; la valeur $\hat{q}(n, r)$ est la probabilité $q \in [0, 1]$ maximisant la probabilité $\mathbb{P}([S_n = r])$ obtenue sous le modèle $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

- I.14) Calculer $\hat{q}(n, 0)$ et $\hat{q}(n, n)$. Donner l'expression de $\hat{q}(n, r)$.
- I.15) Donner l'expression du facteur de Bayes $f_{1/2, opt}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_{opt}(n, r)$ où $p_{opt}(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_{opt} .
- I.16) Application numérique : en prenant les mêmes valeurs que dans la question II.5), calculer la valeur du facteur de Bayes $f_{1/2, opt}(n, r)$. Conclure.

Une autre méthode pour s'assurer *a posteriori* de l'équilibre de la pièce consiste à comparer le modèle $M_{1/2}$ au modèle M_{bay} ainsi défini : pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la variable aléatoire Q_N qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{j/(N+1), j = 1, \dots, N\}$ avec $\mathbb{P}([Q_N = j/(N+1)]) = 1/N$ pour tout $j = 1, \dots, N$. On suppose que la probabilité d'obtenir le résultat r dépend de la valeur de la variable aléatoire Q_N :

$$\mathbb{P}([S_n = r] | [Q_N = j/(N+1)]) = \mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = r\right]\right),$$

avec $\mathbb{P}([X_i = 1]) = j/(N+1)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant qu'un événement B de probabilité non nulle est réalisé est donnée par $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B)$.

- I.17) En utilisant la formule des probabilités totales, donner l'expression (en fonction de n , r et N) de la probabilité $p_{bay}(n, r)$ que la variable S_n soit égale à r sous le modèle M_{bay} .
- I.18) Application numérique : Pour $n = 200$, $r = 115$ et $N = 100$ on a

$$\log_{10} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{j}{N+1} \right)^r \left(1 - \frac{j}{N+1} \right)^{n-r} \right) = -60.28$$

Calculer la valeur de facteur de Bayes et conclure.

Problème II – Estimation de la production

Lors de la mise sur le marché de son dernier véhicule, un constructeur automobile a souhaité affecter à chaque voiture vendue un numéro. Ainsi, la première voiture vendue s'est vu attribuer le numéro 1, la deuxième, le numéro 2, etc. Ce numéro est clairement visible à l'arrière du véhicule. Au bout d'un an de mise sur la marché, un concurrent souhaite savoir combien de voitures ont été vendues par ce constructeur automobile. Pour ce faire, il dispose uniquement des numéros des voitures qu'il a croisées lors de l'année écoulée.

Notations : le nombre de voitures observées par le concurrent est noté k et les numéros correspondants, rangés par ordre croissant, sont notés $x_1 < \dots < x_k$. Enfin, le nombre (inconnu) de véhicules vendus est noté N . On a donc forcément $k \leq N$.

On suppose dans la suite que le k -uplet $(x_1 < \dots < x_k)$ est le résultat de l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard et sans remise k numéros parmi $\{1, \dots, n\}$. Cette expérience est modélisée par l'espace $(\Omega_k, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω_k est l'ensemble de tous les k -uplets $(x_1 < \dots < x_k)$ possibles, $\mathcal{A}$ est la tribu de l'ensemble des parties de Ω_k et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

II.1) Quel est (en fonction de N et k) le cardinal de Ω_k .

II.2) Donner l'expression (en fonction de N et k) de la probabilité $\mathbb{P}(\{(x_1 < \dots < x_k)\})$ d'obtenir le tirage $x_1 < \dots < x_k$.

On introduit la variable aléatoire $M_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout k -uplet $(x_1 < \dots < x_k) \in \Omega_k$ associe la plus grande valeur x_k .

II.3) Pour $m < k$ ou $m > N$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}([M_k = m])$?

II.4) On suppose que m est tel que $k \leq m \leq N$. Quel est le nombre de k -uplets $(x_1 < \dots < x_k)$ pour lesquels $x_k = m$? En déduire la valeur de $\mathbb{P}([M_k = m])$.

II.5) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$C_N^k := \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{m=k}^N C_{m-1}^{k-1}$$

où pour tout entier $\ell > 0$, $\ell! = \ell \times (\ell - 1) \times \dots \times 1$ et avec la convention $0! = 1$.

II.6) Montrer que l'espérance de M_k est donnée par

$$\mathbb{E}(M_k) = \frac{k}{C_N^k} \sum_{m=k}^N C_{m-1}^{k-1}.$$

II.7) En effectuant le changement de variable $\ell = m + 1$ dans la somme ci-dessus et en utilisant le résultat de la question 5), montrer que $\mathbb{E}(M_k) = k(N+1)/(k+1)$.

II.8) On rappelle que le concurrent souhaite estimer le nombre N de véhicules vendus. En utilisant la question précédente, proposer une fonction $\Psi_k(\cdot)$ (indépendante de N évidemment) telle que $\mathbb{E}(\Psi_k(M_k)) = N$. La variable aléatoire $\Psi_k(M_k)$ est un estima-

teur sans biais de N .

II.9) Calculer $\mathbb{E}[(\Psi_k(M_k))^2]$ et en déduire la variance de l'estimateur $\Psi_k(M_k)$ (Aide : remplacer m^2 par $m(m+1) - m$).

II.10) On suppose que $k = N - \lfloor N^a \rfloor$ avec $a \in]0, 1[$, la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ étant celle de la partie entière. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir le rappel donné à la fin du sujet), montrer que dans ce cas $\Psi_k(M_k) - N$ converge en probabilité vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Problème III – Estimation de la taille d'une population

Pour estimer la taille de la population d'une espèce animale, la méthode de "capture-marquage-recapture" (CMR) est couramment utilisée.

Si on note P une population de $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ individus (le nombre N étant inconnu), la méthode CMR consiste à :

- (C) tirer au hasard et sans remise $n \in \{1, \dots, N\}$ individus dans la population P ;
- (M) marquer les n individus et les remettre dans la population P ;
- (R) tirer au hasard et sans remise $m \in \{1, \dots, N\}$ individus dans la population P .

Dans la suite, on raisonnera comme si les N individus de la population étaient numérotés de 1 à N . Ceci n'est évidemment pas le cas en pratique mais permet de simplifier la modélisation du problème sans perte de généralité.

La modélisation probabiliste de la méthode CMR est le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :

- Ω l'ensemble regroupant tous les résultats possible de la méthode CMR. On notera $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un élément de Ω avec
 - ω_1 un vecteur de taille N dont la i -ème composante $\omega_{1,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (C) et 0 sinon;
 - ω_2 un vecteur de taille N dont la i -ème composante $\omega_{2,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (R) et 0 sinon.
- $\mathcal{A}$ la tribu des parties de Ω ;
- $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

III.1) Donner la valeur des sommes

$$\sum_{i=1}^N \omega_{1,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \omega_{2,i}.$$

III.2) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω ? En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On introduit la variable aléatoire $K : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^N \omega_{1,i} \omega_{2,i}.$$

- III.3) Que peut-on dire lorsque la valeur observée de K est $k \in \mathbb{N}$?
- III.4) Si $n + m > N$, donner les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}([K = k]) = 0$.
- III.5) Donner l'ensemble $E(n, m, N) \subset \mathbb{N}$ des valeurs possibles de K .
- III.6) Pour tout $k \in E(n, m, N)$, donner, en fonction de n , m et N l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([K = k])$.
- III.7) En déduire la relation
- $$\sum_{k \in E(n, m, N)} C_n^k C_{N-n}^{m-k} = C_N^m.$$
- III.8) En remarquant que $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ et en utilisant la relation ci-dessus, donner l'expression de l'espérance de K .
- III.9) Proposer une fonction $\Psi_{n,m}(\cdot)$ telle que $1/\hat{N} := 1/\Psi_{n,m}(K)$ soit un estimateur sans biais de $1/N$. La variable aléatoire $\hat{N}$ est-elle un estimateur sans biais de N ?

On suppose à présent que $n + m > N$.

- III.10) Donner, en fonction de n , m et N , l'expression de l'espérance de $1/(K+1)$.
- III.11) Utiliser la question précédente pour proposer un estimateur sans biais de N .

Problème IV – Inégalités de Markov et de Cantelli

Dans ce problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = m \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit la variable aléatoire $Y_\varepsilon : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Y_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X(\omega)| > \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

- IV.1) En posant $p_\varepsilon := \mathbb{P}(|X| > \varepsilon)$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Y_\varepsilon)$.
- IV.2) Montrer que pour tout $a \in [0, 2]$, $\mathbb{E}(|X|^a) \geq \mathbb{E}(|X|^a Y_\varepsilon)$.
- IV.3) En déduire l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a \in [0, 2]$,

$$\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^a)}{\varepsilon^a}.$$

- IV.4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, $\mathbb{P}([X - \alpha > \varepsilon]) \leq \mathbb{P}([|X - \alpha| > \varepsilon])$.

IV.5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m + \lambda > \varepsilon + \lambda]) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\varepsilon + \lambda)^2}.$$

IV.6) Après avoir fait l'étude de la fonction $\lambda \in [0, \infty[\mapsto (\sigma^2 + \lambda^2)/(\varepsilon + \lambda)^2$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la meilleure majoration est donnée par

$$\mathbb{P}([X - m > \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.7) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m < -\varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.8) En déduire l'inégalité de Cantelli : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([|X - m| > \varepsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.9) Pour quelles valeurs de $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Cantelli est-elle préférable à celle de Bienaymé-Tchebychev?

Rappel : Pour toute variable aléatoire X de variance σ^2 et d'espérance $m \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est, pour tout $\varepsilon > 0$,

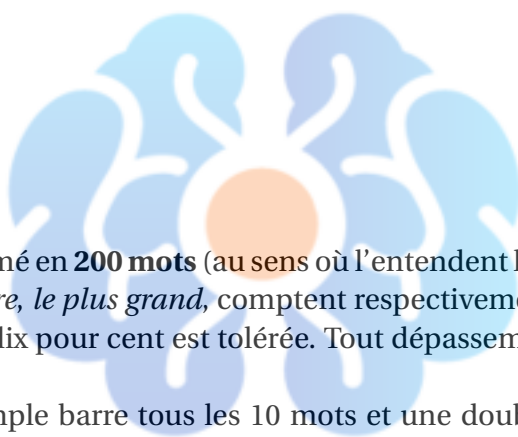
$$\mathbb{P}([|X - m| > \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrirez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

La pandémie de covid-19, suivie d'un confinement planétaire, a constitué une épreuve. Elle a frappé les corps, inquiété les esprits, révélé nos fragilités personnelles et collectives. En faisant surgir le spectre de la maladie et de la mort, elle a rappelé chacun à sa vulnérabilité fondamentale. Il a suffi de quelques jours pour que projets et routines sociales soient mis entre parenthèses. L'illusion d'immortalité, qui tient lieu de socle à nos conduites ordinaires, s'est fissurée.

Par son ampleur, cet événement a renouvelé la réflexion sur la notion d'épreuve. Ce terme polysémique, qui désigne aussi bien l'examen passé par l'étudiant, l'essai d'imprimerie, la probation du condamné ou le drame existentiel, plonge ses racines dans l'Antiquité. On le retrouve chez Sénèque, où il renvoie à la « mise à l'épreuve » de soi face à l'adversité de la vie. Dans chacune des religions monothéistes, il apparaît comme une probation envoyée par Dieu. En envoyant une série d'épreuves à Job, Dieu teste ainsi sa persévérance et sa foi. Dans la philosophie existentialiste et la psychologie de la santé, débarrassée de sa part transcendante, cette notion prend un sens plus passif. Elle est d'abord une difficulté « éprouvée » dans sa chair, une douleur ou une peine. À quoi reconnaît-on une épreuve? Le psychologue Gustave-Nicolas Fischer distingue dans *Le Ressort invisible* (2014) six catégories d'expériences extrêmes qui, toutes, ont pour point commun d'ébranler la vie : la maladie potentiellement mortelle; la guerre ou la torture; la catastrophe ou l'attentat; la privation de liberté; la perte; la dépendance liée à l'âge. Le simple fait de vivre, de continuer à exister, qui va de soi quand tout va bien, se voit brutalement questionné et menacé. Moins directement mais avec une cruauté parfois redoutable, la séparation et le deuil peuvent également engendrer une spirale mortifère. « On meurt encore d'amour », rappelle Claire Marin. Les sentiments d'isolement, de désarroi et d'abandon peuvent quant à eux briser autant qu'un virus. Les humains sont des êtres d'attachement, qui se construisent dans la relation, l'amour et l'échange. « Autrui, pièce maîtresse de mon univers... », découvre Robinson Crusoé dans la solitude de son île. Je mesure chaque jour ce que je lui devais en enregistrant de nouvelles fissures dans mon édifice personnel ». À l'échelle collective, ce sont des entreprises, des peuples ou des civilisations qui entrevoient un risque mortel sous l'effet d'une crise, d'une guerre ou d'une épidémie.

Les sciences sociales, notamment la sociologie clinique, documentent combien une maladie grave ou un licenciement peuvent entraîner une césure dans la trame existentielle. Ils font « sortir une vie sociale de sa trajectoire escomptée » (Danilo Martuccelli), enclenchent une « rupture avec les routines de l'existence » (Vincent Caradec). Certaines « blessures morales », comme les appelle Axel Honneth, peuvent apparaître. Le rapport à soi et aux autres change, tout comme se transforment nos manières de voir le monde et de nous y comporter.

C'est pourquoi les épreuves engagent toujours un processus réflexif. Qu'il s'agisse de maladie, de divorce, de deuil, de perte d'emploi, d'accident de la route, de crise sanitaire ou économique, elles font surgir de l'incertitude et du questionnement : faut-il donner sens à ce qui nous arrive? S'agit-il d'un simple accident ou d'un avertissement? d'une parenthèse ou d'une rupture? d'une chance ou d'une malédiction? Et comment s'en sortir?

Les réponses apportées à ces questions varient beaucoup selon les individus et les contextes. Certaines personnes vont se placer dans une posture de combat, se documenter intensément

ment, chercher à reprendre le contrôle de la situation; d'autres à l'inverse vont fuir ou se déconnecter. Les Anglo-Saxons ont un mot pour exprimer ces différentes manières de « faire face » (*to cope with*) : le *coping*. Ils en distinguent trois formes principales. Le *coping* centré sur le problème est orienté vers l'action. Il s'agira, par exemple, de s'informer tous azimuts sur sa maladie, de tester un nouveau traitement, de lancer un vaste plan pour reprendre le contrôle d'une situation... Le *coping* centré sur les émotions consistera plutôt à modifier son attitude face au problème, en prenant de la distance, en cherchant du soutien émotionnel, en méditant ou en prenant soin de soi. Enfin, le *coping* évitant relève de la fuite. La personne se déconnecte, fuit le problème et se réfugie ailleurs (dans des drogues, des relations sans lendemain, le sport ou le voyage). Le neurobiologiste français Henri Laborit rassemblait cette gamme d'attitudes dans *Éloge de la fuite* (1974) : « Confronté à une épreuve, l'homme ne dispose que de trois choix : combattre, fuir, ne rien faire ».

L'une de ces stratégies est-elle plus protectrice que les autres? À première vue, l'attitude de combat semble la mieux à même de nous sauver. Elle est aussi la plus valorisée. « Il faut vous battre! », dit l'avocat à sa victime ou le médecin au malade. Mais cette injonction n'est pas toujours audible. Car comment trouver la force de lutter quand on est dévasté par le chagrin ou épuisé par la maladie? Et contre qui, contre quoi, quand il n'y a pas d'ennemi tangible? Lorsque la situation est hors de contrôle, la bataille peut aussi se muer en un acharnement déraisonnable, aussi vain qu'épuisant pour celui qui la conduit.

Vaut-il alors mieux fuir? Dans nos sociétés, la fuite est souvent perçue comme une lâcheté, une forme de capitulation, un mensonge fait à soi-même. Or on peut fuir de différentes manières : errer et se perdre, ou bien rompre pour se reconstruire ailleurs, autrement. Henri Laborit rappelle que la fuite recèle des vertus dans des situations inexorables. S'enfuir d'un pays en guerre, quitter un conjoint violent, changer de cap professionnel quand l'horizon se bouche, s'extraire d'une amitié toxique sont autant de façons de prendre son destin en main. Ce sont des actes de courage plutôt que de renoncement.

De même, « ne rien faire » correspond en réalité à un vaste camaïeu de postures : la loyauté de l'épouse trompée qui reste au foyer par habitude ou sens du devoir, l'apathie de l'agent épuisé ou déclassé, dont la résistance aurait un coût psychologique trop important, le repli du malade qui préserve ce qui lui reste de forces et d'humanité. Le sociologue Vincent de Gaulejac s'est notamment intéressé aux victimes des camps de concentration, d'attentats ou de viol. Il a souvent observé un moment de « déconnexion », qui peut passer pour de la passivité, où le sujet semble comme absent à lui-même. Il s'agit plutôt selon lui d'une façon de se fabriquer un cocon protecteur, pour mieux se recentrer. La déconnexion, souligne le sociologue, permet de « ne pas avoir à réfléchir, à choisir, à se tourner vers son passé ou son avenir, mais vivre juste le moment présent, pour ne plus se poser de questions. Juste se préoccuper de savoir “comment survivre” en abandonnant la question du sens, “pourquoi vivre” »¹. On retrouve une telle posture dans les récits de Primo Lévi ou Robert Antelme, prisonniers des camps², ou dans les témoignages des victimes de torture³.

1. Vincent de Gaulejac, *Qui est « je » ? Sociologie clinique du sujet*, Seuil, 2009.

2. Primo Lévi, *Si c'est un homme*, 1947; Robert Antelme, *L'Espèce humaine*, 1947.

3. Muriel Montagut, *L'Être et la Torture*, PUF, 2014.

Que reste-t-il de telles expériences quand la menace vitale s'éloigne? Il n'existe pas de scénario type de reconstruction. Chaque sujet ouvre son propre chemin. La capacité de rebond dépend de mille facteurs : la gravité du drame enduré, son impact social, la possibilité de retrouver une estime de soi, de pouvoir compter sur des proches aimants, de donner du sens à son histoire, de se tourner vers de nouveaux projets, de refaire confiance quand l'autre nous a blessé.

Le formidable succès de la notion de résilience témoigne de cette aspiration fondamentale : tout être humain espère qu'il est possible de retrouver sa force et sa joie de vivre après la traversée d'un cataclysme. Peut-être même pourrions-nous découvrir, dans le creux de l'épreuve, les ressources pour nous inventer une vie plus belle, plus libre, plus authentique? C'est ce que postule le courant de la croissance posttraumatique. Gustave-Nicolas Fischer, qui en est le plus célèbre représentant francophone, insiste sur ce point : toute épreuve, qu'elle soit individuelle ou collective, nous permet de découvrir nos « ressorts invisibles ». La notion de ressort suggère la capacité de résistance et le potentiel de flexibilité humaine. Comme le roseau de Pascal, qui plie mais ne rompt pas, nous serions capables de plier et de nous replier face au malheur, mais aussi de nous redresser fièrement et de rebondir après l'épreuve.

L'épreuve vitale serait-elle finalement une chance? Chance de mieux se connaître, chance de s'améliorer, de repenser ses priorités? La philosophe Claire Marin, dans *Ruptures* (2019), met en garde contre ce mirage de la flexibilité généralisée. On peut également rompre après un malheur, finir en morceaux, cassé, abîmé, avec des cicatrices à jamais. On peut aussi mourir, ne jamais se relever. Ou encore se voir confronté à la chronicisation du mal, ne jamais tout à fait en sortir, alterner sur la durée les phases de répit et de crise. Le neuropsychiatre Boris Cyrulnik, qui a pourtant largement participé au succès de la notion de résilience, affirme lui-même qu'un malheur n'est jamais merveilleux. « C'est une fange glacée, une boue noire, une escarre de douleur » dont on sort sinon abîmé, du moins un peu hagar et profondément changé. « Vu de l'extérieur, la fréquence de la résilience prouve qu'on peut s'en sortir, précise le neuropsychiatre qui a perdu lui-même ses parents dans les camps de concentration lorsqu'il était enfant. Vu de l'intérieur, on est structuré comme un oxymoron qui révèle la division intime de l'homme blessé, la cohabitation du ciel et de l'enfer, le bonheur sur le fil du rasoir »⁴.

Ce « bonheur sur le fil du rasoir », c'est celui de l'orphelin, de la femme blessée qui réapprend à aimer, de la mère qui commence à revivre après la perte d'un enfant, de l'étudiant qui trouve enfin sa voie après des années de souffrance scolaire, de l'ouvrier qui sait sa précarité, du convalescent intranquille... Un indice de notre condition humaine, en somme. Mortels et conscients de l'être, nous sommes animés malgré tout d'une puissante force de vivre. Entre « avant » et « après », cet élan vital joue souvent le trait d'union; on n'est ni vraiment le même, ni tout à fait un autre.

Héloïse Lhéréty, « Revivre après une épreuve »
Revue Sciences Humaines n°328, août-septembre 2020, pages 32-35.

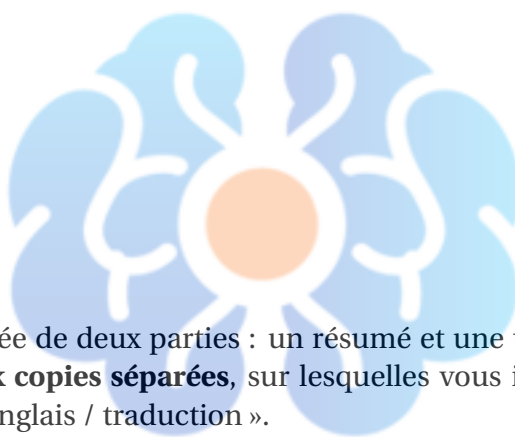
4. Boris Cyrulnik, *Un merveilleux malheur*, Paris, Odile Jacob, 2002.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 220 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

In poor countries, statistics are both undersupplied and underused

Governments often lack incentives to collect, share and use data

The Economist, April 10 2021

In the rich world, people worry that prying governments know too much about them. Popular culture valorises characters who go off the grid, like Jack Reacher (the hero of 25 novels by Lee Child and two films starring Tom Cruise). He drifts around America on Greyhound buses, eschewing a driving licence, credit cards and email. Why does he make himself so hard to find? "It started out as an exercise and became an addiction," he says.

The developing world, however, is full of unwitting Jack Reachers who leave little trace in official records. Their anonymity is not an addiction but an affliction. According to the World Bank's latest World Development Report, entitled "Data for Better Lives", about 1bn people have no official proof of their identity. More than a quarter of the world's children under five are not registered at birth. Half of the 29 poorest countries have not completed a census in the past ten years—Congo has not done one since 1984—and only 40% have three or more estimates of poverty that can be compared across time. Christopher Yeh of Stanford University and his colleagues have calculated that an African household will appear in a representative survey of living standards less than once every 1,000 years.

Given the shortage of conventional statistics, many people are enthusiastic about more novel forms of data, gleaned from mobile phones, social media and satellite imagery. In the early months of the covid-19 pandemic, patterns of mobile-phone use showed who could and could not afford to stay at home in a city like Jakarta, outlining the uneven impact of lockdown measures in many developing countries. That kind of data can help donors better target their aid efforts. Emily Aiken of the University of California, Berkeley, and her colleagues have tested whether a machine-learning algorithm can identify the poorest households in 80 Afghan villages based on mobile-phone data, such as the duration of their calls, their network of contacts, and how often they paid for more minutes of call-time. For the 80% of households that owned a mobile phone, the algorithm worked about as well as more traditional targeting methods, such as counting fridges, clothes irons, and other physical assets.

But, as the study's authors are careful to note, not everyone owns a mobile phone. And algorithms that work in one place and time may not necessarily travel well or endure for long. Joshua Blumenstock of Berkeley has pointed out that international calls may be a less reliable indicator of prosperity during the Haj pilgrimage season, when many more people travel.

Satellite imagery avoids some of these problems—cameras in orbit can see how the other half lives. Countries can sharpen poverty maps by combining household surveys with clues visible from space, including building sizes, forest cover, and the intensity of night-time lights. Tanzania was able to turn a poverty map divided into 20 mainland regions (containing populations of over 2m on average) into a higher-resolution poverty map of 169 districts (containing average populations of 300,000 or so). The extra precision provided by satellite data was equivalent to increasing the sample size of a household survey by five times, according to Takaaki Masaki of the World Bank and his co-authors.

These techniques can all improve the supply of data. But supply is not the only problem. If it were, you would expect any figures a government did collect to be highly prized, widely

disseminated and heavily used. But the opposite is too often the case. Data are rarely shared with outsiders. And they are poorly digested even within official circles. Daniel Rogger and Ravi Somani of the World Bank once asked over 1,800 officials in Ethiopia how many people lived in their districts. About half of them thought their districts were at least 50% bigger or smaller than they actually were, according to figures in their own databases. Education officials over- or underestimated primary-school enrolment numbers by 76%. When asked, less than 13% said that these administrative databases were their main source of information.

Governments often lack a strong incentive to collect data, use them well, or allow others to use them better. Bureaucrats with little discretion to make decisions have scant reason to inform themselves about what the right decision would be. And in countries that lack strong safeguards to prevent data misuse, civil servants understandably hold numbers close to their chests. Moreover, statistics can be most valuable when holding governments to account. Why should governments conspire in their own embarrassment by providing the data by which they will be judged?

For this reason, the authors of the World Development Report call for something akin to a cultural shift in the handling of data. They advocate for “political champions” who recognise data’s value in improving policies and a data-literate press and public who demand better numbers to draw on. This political commitment to data would, in turn, generate incentives for civil servants to make better use of the figures at their disposal. The mindset of ministries can be as important as a government’s financial wherewithal. According to new indicators from the World Bank, a country’s statistical performance is only loosely correlated with its prosperity. Some countries, like Kyrgyzstan or Mexico, do much better than you would expect given their level of GDP per person.

In this vision, private data and official statistics are complements, not substitutes, that can be of use for either corporate or public purposes. One current example is the Gallup World Poll, carried out by the private polling firm in over 140 economies. Every three years, it adds questions on financial inclusion instigated by the World Bank. This polling showed that 1.7bn people lacked a formal bank account in 2017. That gap is both a potential business opportunity for financial firms and a problem for governments. After all, even Jack Reacher has a bank account.

2 Translate the following text into French

The war against money-laundering is being lost

The global system for financial crime is hugely expensive and largely ineffective

The Economist / Apr 12th 2021

Yet another bank is preparing to face the music over alleged failings in its efforts to curb flows of dirty money. In the coming weeks NatWest, one of Britain's largest lenders, is set to appear in court in London to respond to charges that it failed to properly scrutinise a gold-dealing client that deposited £365m (\$502m) with the bank—£264m of it in cash.

NatWest (which has said it is co-operating with investigators) is the latest lender to be accused of falling short in the fight against dirty money. Last year global banks were hit with \$10.4bn in fines for money-laundering violations, an increase of more than 80% on 2019, according to Fenergo, a compliance-software firm. In January Capital One, an American bank, was fined \$390m for failing to report thousands of fishy transactions. Danske Bank is still dealing with the fallout of a scandal that erupted in 2018. Over \$200bn of potentially dirty money was washed through the Danish lender's Estonian branch while executives missed or ignored a sea of red flags.

These cases imply that banks remain the Achilles heel in the global war on money-laundering, despite the reams of regulations aimed at turning them into frontline soldiers in that conflict. However, closer examination suggests that the global anti-money-laundering (AML) system has serious structural flaws, largely because governments have outsourced to the private sector much of the policing they should have been doing themselves.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Corrections



Rappel : Les corrigés sont proposés à titre informatif. N'hésitez pas à contribuer et proposer des améliorations en nous contactant : contact@ceas.fr.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Corrigé Session 2021

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1 : une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes les deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)), \quad M(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega).$$

Question 1.

Montrer que I et M sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Correction

I et M sont des variables aléatoires comme fonctions de variables aléatoires.

Question 2.

Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.

Question 2. (a)

Reconnaître la loi de la variable I .

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k \wedge Y \geq k).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2.$$

X suivant une loi géométrique de paramètre p , et en posant $q = 1 - p$, on déduit :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2(k-1)}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(I = k) = \mathbb{P}(I \geq k) - \mathbb{P}(I \geq k+1) = q^{2(k-1)}(1 - q^2).$$

Ainsi, $I \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$.

Question 2. (b)

Calculer, pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([I = i] \cap [D = d])$ (qu'on pourra noter $\mathbb{P}(I = i, D = d)$).
On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.

Correction

On note une coquille dans l'énoncé : le couple (i, d) est à prendre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

On a :

$$\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i, M = d + i).$$

- Si $d = 0$:

$$\mathbb{P}(I = i, M = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \mathbb{P}(X = i)^2 = q^{2(i-1)} p^2.$$

- Si $d \neq 0$:

$$\mathbb{P}(I = i, M = d + i) = \mathbb{P}((X = i, Y = d + i) \vee (X = d + i, Y = i)) = 2\mathbb{P}(X = i, Y = d + i) = 2q^{d+2(i-1)} p^2.$$

Question 2. (c)

Déterminer la loi de la variable D .

Correction

Les événements $(I = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet, donc :

$$\mathbb{P}(D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(I = i, D = d).$$

En distinguant les deux cas précédents :

- Si $d = 0$:

$$\mathbb{P}(D = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} p^2 = \frac{p}{1+q}.$$

- Si $d \neq 0$:

$$\mathbb{P}(D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2q^{d+2(i-1)} p^2 = \frac{2q}{1+q}.$$

Question 2. (d)

Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

Correction

En reprenant les valeurs obtenues ci-dessus, on vérifie que pour tous les couples $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i) \mathbb{P}(D = d).$$

Les deux variables sont donc indépendantes.

Question 3.

Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.

On note $b := \mathbb{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.

On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Question 3. (a)

Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Correction

On a :

$$\mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^2.$$

Question 3. (ii)

Exprimer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbb{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Correction

On reprend le même calcul qu'au (2.b) :

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k \wedge Y > k).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc :

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

Question 3. (c)

Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$, établir l'égalité :

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

Correction

On calcule de deux manières différentes $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$:

- D'une part :

$$\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(X = Y, X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2.$$

- D'autre part, comme I et D sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(I > k) \mathbb{P}(D = 0) = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

On conclut donc que :

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

Question 3. (d) (i)

En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b) p_k = 2 b \mathbb{P}(X > k)$.

Correction

On fait la différence des égalités ci-dessus pour k et $k - 1$:

$$p_k^2 = b p_k \left(p_k + 2 \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right) \right) = b p_k (p_k + 2 \mathbb{P}(X > k)).$$

Ce qui, puisque les p_k sont non nuls, peut se réécrire :

$$p_k(1 - b) = 2 b \mathbb{P}(X > k).$$

Question 3. (d) (ii)

Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :

$$p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b} p_k.$$

Correction

La formule ci-dessus, pour $k = 1$, donne :

$$(1 - b) p_1 = 2 b (1 - p_1),$$

c'est-à-dire :

$$p_1 = \frac{2b}{1+b}.$$

En reprenant ensuite cette formule pour k et $k - 1$ et en les soustrayant, il vient :

$$(1 - b) p_k = (1 + b) p_{k+1}.$$

Question 3. (e)

En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1 .

Correction

Ainsi, la suite (p_k) est une suite géométrique. On en déduit que :

$$X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1-b}{1+b}\right).$$

Exercice 2 : un calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

Question 1.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$C_n = (2n - 1)(C_{n-1} - C_n).$$

On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par écrire la différence des intégrales :

$$C_{n-1} - C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \cos^{2n-2}(x) dx.$$

En réécrivant $1 - \cos^2(x)$ sous la forme $\sin^2(x)$, on obtient :

$$C_{n-1} - C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n-2}(x) dx.$$

On applique ensuite une intégration par parties avec :

$$u' = \sin(x) \cos^{2n-2}(x), \quad u = -\frac{\cos^{2n-1}(x)}{2n-1}, \quad v = \sin(x), \quad v' = \cos(x).$$

En intégrant, nous obtenons l'égalité souhaitée :

$$C_{n-1} - C_n = \frac{C_n}{2n-1}.$$

Question 2.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

Correction

La relation obtenue dans la question précédente implique immédiatement :

$$\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

En conséquence, nous obtenons bien :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n-2}(x) dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

Question 3.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n.$$

Correction

Pour établir cette relation, on applique une double intégration par parties sur l'expression de C_n . Ce procédé permet de faire apparaître les termes D_{n-1} et D_n , ce qui conduit à l'égalité :

$$C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n.$$

Question 4.

En déduire, pour tout entier n non nul, l'égalité :

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n} \right).$$

Correction

En divisant l'égalité précédente par C_n , nous obtenons immédiatement :

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n} \right).$$

Ce résultat met en évidence une somme télescopique utile pour la suite de l'exercice.

Question 5.**Question 5. (a)**

Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration :

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Correction

On utilise le fait que la fonction $\sin$ est concave sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par la propriété de concavité, la courbe est toujours au-dessus de sa corde joignant les points $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, ce qui entraîne la minoration :

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Question 5. (b)

En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration :

$$D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}.$$

Correction

En utilisant la minoration précédente dans l'expression de D_n , on obtient :

$$D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n}(x) dx.$$

Or, par les résultats obtenus précédemment, nous savons que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n}(x) dx = \frac{C_n}{2n+2}.$$

D'où la majoration souhaitée :

$$D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}.$$

Question 6.

Prouver l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction

On déduit de la majoration obtenue que :

$$\frac{D_n}{C_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En sommant les égalités obtenues dans la question 4 et en appliquant un raisonnement de type somme télescopique, nous obtenons après passage à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \frac{D_0}{C_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Exercice 3 : trois preuves d'une égalité combinatoire

Question 1. Avec la fonction Beta

On pose, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels,

$$B(n, p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt.$$

Question 1. (a)

Relier, pour tout couple $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les réels $B(n, p)$ et $B(n+1, p+1)$. En déduire, pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité :

$$B(n, p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}.$$

Correction

On note une coquille dans l'énoncé : le couple (n, p) est à prendre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

On intègre par parties :

$$B(n, p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt.$$

En utilisant l'intégration par parties, on décompose l'intégrale comme suit :

$$B(n, p) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^p \right]_0^1 + \int_0^1 p \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^{p-1} dt.$$

Le terme entre crochets s'annule aux bornes 0 et 1, ce qui donne :

$$B(n, p) = \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{p-1} dt = \frac{p}{n+1} B(n+1, p-1).$$

À partir de cette relation, on peut établir par récurrence que :

$$\forall k \leq p, \quad B(n, p) = p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1) \cdot \frac{n!}{(n+k)!} B(n+k, p-k).$$

Pour $k = p$, on obtient :

$$B(n, p) = \frac{n!p!}{(n+p)!} B(n+p, 0).$$

Or, $B(n+p, 0)$ est l'intégrale suivante :

$$B(n+p, 0) = \int_0^1 t^{n+p} dt = \left[\frac{t^{n+p+1}}{n+p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+p+1}.$$

Ainsi, on conclut que :

$$B(n, p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}.$$

Question 1. (b)

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{(m-1)!n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

Correction

$$\frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n dt.$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour développer $(1-t)^n$:

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n dt = \int_0^1 t^{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k dt.$$

On intervertit la somme et l'intégrale (ce qui est permis car la somme est finie) :

$$\int_0^1 t^{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{m-1+k} dt.$$

L'intégrale d'une puissance de t est donnée par :

$$\int_0^1 t^{m-1+k} dt = \left[\frac{t^{m+k}}{m+k} \right]_0^1 = \frac{1}{m+k}.$$

Ainsi, l'expression devient :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{m+k}.$$

Question 2. Avec des différences finies

On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, associe la suite

$$\Delta(u) := (u_{p+1} - u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}.$$

On définit récursivement Δ^n par $\Delta^0 = \text{Id}$ et $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

Question 2. (a)

Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$(\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

Correction

On montre par récurrence sur n la relation demandée.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Delta^0(u)_p = u_p = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} (-1)^k u_{p+k}.$$

- **Hérédité** : Supposons le résultat vrai à un certain rang $n \geq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \Delta^n(\Delta(u))_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(u)_{p+k}.$$

En développant $\Delta(u)_{p+k} = u_{p+k+1} - u_{p+k}$, on obtient :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (u_{p+k+1} - u_{p+k}).$$

Après décalage d'indice et utilisation de la formule de Pascal, on montre que :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} u_{p+k}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2. (b)

En utilisant la suite $u := \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$, établir à nouveau l'égalité ($\mathcal{E}$).

Correction

Prenons la suite $u = \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Par récurrence sur n , on obtient que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta^n(u)_p = \frac{(p-1)! n!}{(p+n)!} (-1)^n.$$

Par ailleurs, la question (2.a.) donne :

$$\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{p+k}.$$

Ainsi on obtient l'égalité ($\mathcal{E}$).

Question 3. Par un raisonnement probabiliste

On rappelle la formule du crible suivante : si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Question 3. (a)

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}\left(B \cap \bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(B) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_k}^c\right).$$

Correction

Posons $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. On a :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n B \cap A_i^c\right).$$

On applique la formule du crible au dernier terme de la somme, et l'on obtient le résultat demandé.

Pour la suite de l'exercice

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant une boule noire N , n boules blanches $B_1, \dots, B_n$, et $m-1$ boules rouges $R_1, \dots, R_{m-1}$. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à épuisement de l'urne.

On note B l'événement où la boule noire est tirée avant toutes les boules rouges, et A_i l'événement où la boule noire est tirée après la boule blanche B_i .

Question 3. (b)

Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B)$.

Correction

Soit S l'ensemble des $(m+n)$ -suites de valeurs distinctes dans $\{B_1, \dots, B_n, N, R_1, \dots, R_{m-1}\}$. Le cardinal de S est $(m+n)!$.

Soit T l'ensemble des suites où tous les R_i apparaissent après le N . Considérons l'application φ qui, à un élément s de S , associe l'élément s' de T obtenu en permutant N et le premier R_i de s s'il y a un R_i avant N , et s sinon.

L'application φ est surjective, et chaque élément de T admet m antécédents par φ (ceux que l'on obtient en permutant N avec chacun des R_i). D'après le lemme des bergers, on déduit que $\#S = m\#T$, donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{m}.$$

Question 3. (c)

Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^n A_i)$.

Correction

L'événement $B \cap A$ correspond aux cas où l'on tire toutes les boules blanches (il y a $n!$ façons de le faire), puis la boule noire, puis toutes les boules rouges $((m-1)!$ façons). Le nombre total de façons d'effectuer le tirage est $(m+n)!$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{(m-1)! n!}{(m+n)!}.$$

Question 3. (d)

Prouver que pour tout entier k et toute k -liste $(i_1, \dots, i_k)$,

$$\mathbb{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_k}^c) = \frac{1}{m+k}.$$

Correction

On réitère la démarche du (3.b.) en considérant que les B_{i_j} sont des R , donc en faisant comme s'il y avait $m + k$ boules rouges. On obtient ainsi le résultat souhaité.

Question 3. (e) (i)

Déterminer le nombre de k -listes $(i_1, \dots, i_k)$ telles que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Correction

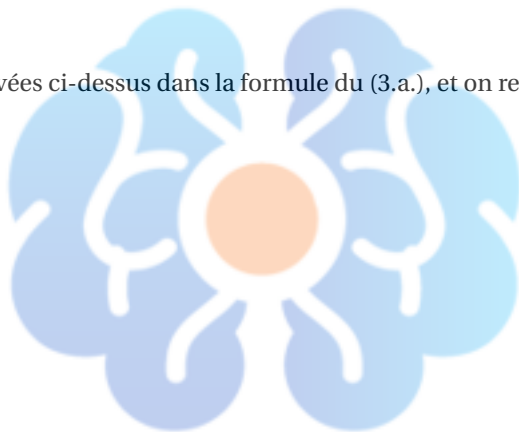
Les k -suites de ce type sont en bijection avec les parties à k éléments d'un ensemble de n éléments. Elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$.

Question 3. (e) (ii)

En déduire à nouveau l'égalité ($\mathcal{E}$).

Correction

On reporte les quantités trouvées ci-dessus dans la formule du (3.a.), et on retrouve alors l'égalité ($\mathcal{E}$).



Exercice 4 : une propriété des matrices symétriques

Soit, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n , muni de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est défini par tXY . Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$,

$$R(A) = \{{}^tXAX; {}^tXX = 1\}.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (i.e. vérifiant l'égalité ${}^tPP = I_n$) pour laquelle $B = {}^tPAP$.

Question 1.

Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B . Prouver l'égalité :

$$R(A) = R(B).$$

Correction

Soit $(A, B) \in SO_n(\mathbb{R})^2$, et soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^TBP$. L'application $X \mapsto PX$ définit une bijection de $S(0, 1)$ dans lui-même.

Donc :

$$R(B) = \{X^TBX \mid X^TX = 1\} = \{(PX)^TB(PX) \mid X^TX = 1\} = \{X^TP^TBPX \mid X^TP^TPX = 1\} = R(A).$$

Question 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Question 2. (a)

Prouver l'inclusion :

$$R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n].$$

Correction

A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Elle est donc orthogonalement semblable à $B = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit X telle que $X^TX = 1$. Alors :

$$X^TBX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Donc $R(A) = R(B) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

Question 2. (b)

Établir l'égalité :

$$R(A) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

Correction

Considérons l'application X définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$X : \theta \mapsto (\cos(\theta), 0, \dots, 0, \sin(\theta))^T.$$

Elle est continue à valeurs dans $S(0, 1)$. L'application $\theta \mapsto X(\theta)^T B X(\theta)$ est continue, vaut λ_1 en 0 et λ_n en $\frac{\pi}{2}$. Donc :

$$R(A) = R(B) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

Question 2. (c)

Montrer que si la matrice A est de trace nulle, alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

Correction

$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Si $\text{Tr } A = 0$, alors $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n \geq 0$. Donc $0 \in R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

La réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, si $A = \text{Diag}(-1, 0, 2)$, alors $0 \in R(A)$ mais $\text{Tr } A = 1 \neq 0$.

Diagonale d'une matrice

On appelle diagonale d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \dots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

Question 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle ${}^t P A P$ a pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$ (où $\text{Tr } A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\text{Tr } A$ est élément de $R(A)$.

Correction

Supposons que $P^T A P$ ait pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$. Prenons X tel que $X = P^{-1}(1, 0, \dots, 0)^T$. Alors :

$$(PX)^T A(PX) = \text{Tr } A.$$

Donc $\text{Tr } A \in R(A)$.

Question 4. (a)

Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.

Correction

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Donc :

$$\text{Tr } A = 4 \notin \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] = R(A).$$

Question 4. (b)

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr } A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.

Correction

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres λ_1 et λ_2 . Alors $\text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$. Ainsi :

$$\text{Tr } A \in R(A) \iff \lambda_1 \leq 0 \text{ et } \lambda_2 \geq 0,$$

ce qui est équivalent à $0 \in R(A)$.

Question 5.

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Tr } A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\text{Tr } A, 0)$.

Correction

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$. Alors $0 \in R(A)$ et $\det(A) \leq 0$. Considérons :

$$B = \begin{pmatrix} \text{Tr } A & \sqrt{-\det(A)} \\ \sqrt{-\det(A)} & 0 \end{pmatrix}.$$

A et B sont symétriques et ont le même polynôme caractéristique. Elles sont donc orthogonalement semblables à la même matrice diagonale, et donc orthogonalement semblables entre elles.

Question 6.

Soit n un entier avec $n \geq 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$.

Question 6. (a)

Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Correction

Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$. Soit X de norme 1 telle que $X^T A X = \text{Tr } A$. On complète X en une base orthonormée. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. P est orthogonale, et $P^T A P$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Question 6. (b)

Que vaut $\text{Tr } B$? En déduire que $\text{Tr } B \in R(B)$.

Correction

Par conservation de la trace par similitude, $\text{Tr } B = 0$. D'après la question (1.c.), on déduit que $\text{Tr } B \in R(B)$.

Question 6. (c)

Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

Correction

On applique à B la propriété supposée dans cette question : il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T B Q$ soit de diagonale nulle. Posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

$P \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, et $P^T A P$ a pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

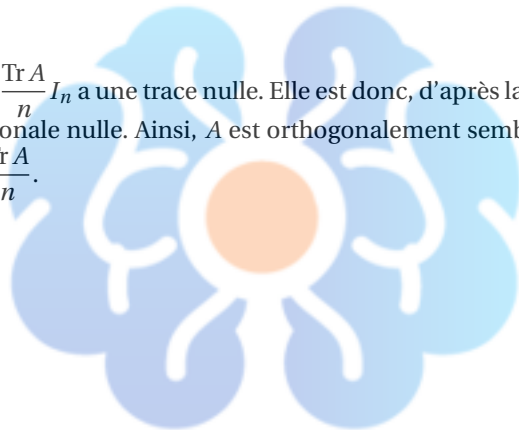
On a ainsi montré par récurrence que toute matrice A telle que $\text{Tr } A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

Question 7.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a .

Correction

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. La matrice $A - \frac{\text{Tr } A}{n} I_n$ a une trace nulle. Elle est donc, d'après la question (5.c.), orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle. Ainsi, A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont égaux à $\frac{\text{Tr } A}{n}$.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : Exemples de calcul explicite du reste

Question 1.

Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?

Correction

Question 2.

Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

Question 2. (a)

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Correction

Les termes de la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ sont tous non nuls, donc on peut vérifier la convergence par application de la règle de d'Alembert :

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0, \quad \text{et } 0 < 1.$$

Ainsi, $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est une série convergente.

D'après les séries entières usuelles,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x).$$

Question 2. (b)

Établir, pour tout nombre entier strictement positif n , l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \sinh(t) dt.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\cosh$ est de classe C^{2n-1} sur $\mathbb{R}$ et $\cosh^{(2n-1)} = \sinh$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \sinh(t) dt &= \cosh(x) - \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{\cosh^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}. \end{aligned}$$

Question 2. (c)

Donner une expression similaire de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\cos$ est de classe C^{2n-1} sur $\mathbb{R}$ et $\cos^{(2n-1)} = (-1)^n \sin$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral et le développement en série entière de $\cos$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} &= \cos(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cos(x) - \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{\cos^{(i)}(0) x^i}{i!} \\ &= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2} \sin(t)}{(2n-2)!} dt. \end{aligned}$$

Question 3. (a)

Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

Correction

Par équivalents simples usuels, $a_n \sim \frac{2}{n^3}$ puis $a_n = O(1/n^3)$.

Par comparaison à une série de Riemann (absolument convergente), $\sum a_n$ est une série convergente.

Question 3. (b)

Trouver un couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X, \\ P(X)Q(X) = X^4 + X^2 + 1. \end{cases}$$

Correction

Factorisation :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

On pose $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - X + 1$. Alors $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $PQ = X^4 + X^2 + 1$ et $P - Q = 2X$.

Question 3. (c)

Établir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls, on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y).$$

Correction

Fixons $y \in \mathbb{R}_+$ et posons f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \arctan\frac{x-y}{1+xy} - \arctan(x) + \arctan(y).$$

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \times \frac{(1+xy) - y(x-y)}{(1+xy)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+xy)^2 + (x-y)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f(y) = 0$ et $\mathbb{R}_+$ est un intervalle. Par théorème, f est la fonction nulle, ce qui conclut.

Question 3. (d)

Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1).$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n$. On calcule :

$$\begin{aligned} a_k &= \arctan \frac{P(k) - Q(k)}{1 + P(k)Q(k)} \\ &= \arctan(P(k)) - \arctan(Q(k)) \quad (\text{car } P(k), Q(k) \text{ sont positifs ou nuls}) \\ &= \arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k)). \end{aligned}$$

Ensuite, en sommant et en observant que $\arctan(n^2 - n + 1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} a_k &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k)) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(Q(n)) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

Question 3. (e)

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)$ est-elle convergente?

Correction

Fixons $y > 0$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan \frac{x-y}{1+xy} = \arctan(x) - \arctan(y),$$

on obtient par unicité de la limite :

$$\arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 1 > 0$ donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \arctan \frac{1}{n^2 - n + 1}.$$

Par équivalents simples usuels, $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \sim \frac{1}{n^2}$.

Par comparaison de termes généraux positifs, la série $\sum \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ est convergente.

Partie 2 : Exemples d'évaluation asymptotique du reste**Question 4.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

Correction

Soit $x > 1$. Posons $y = \frac{1+x}{2}$. Alors $y > 1$ et, par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n^x} = o(1/n^y)$. Par comparaison à un exemple de Riemann, on conclut que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^x}$ est convergente.

Soit $x \leq 1$. On a :

$$\forall n \geq 3, \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n^x}$$

Par comparaison avec la série harmonique divergente, on conclut que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^x}$ est divergente.

Question 5.

Dans cette question on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^x}.$$

Question 5. (a)

Pour tout réel $a > 0$, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt = \frac{a^{1-x}(1 + (x-1) \ln a)}{(x-1)^2}.$$

Correction

Soit $a > 0$. On pose $y = \frac{1+x}{2}$ avec $y > 1$ et $\frac{\ln(t)}{t^x} = o(1/t^y)$. Par comparaison avec un exemple de Riemann et par continuité de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ sur $[a, +\infty[$, cette fonction est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Effectuons une intégration par parties avec :

$$u(t) = \ln(t), \quad v'(t) = \frac{-1}{(x-1)t^{x-1}}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt &= \left[\frac{-\ln(t)}{(x-1)t^{x-1}} \right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{-1}{(x-1)t^x} dt \\ &= \frac{\ln(a)}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}}. \end{aligned}$$

Question 5. (b)

Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt.$$

Correction

Posons $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$ définie et dérivable sur $[3, +\infty[$ avec :

$$\forall t \geq 3, \quad f'(t) = \frac{1/t - x \ln(t)}{t^{x+1}}.$$

Puisque $0 < 1/x < 1$ et $\forall t \geq 3, \ln(t) > 1$, alors $f'(t) > 0$ donc f est décroissante sur $[3, +\infty[$.

Par croissance de l'intégrale et décroissance de f , on obtient :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \leq \frac{\ln(k)}{k^x}.$$

En sommant ces inégalités de $n-1$ à $+\infty$, on obtient un encadrement permettant d'appliquer le théorème des gendarmes :

$$r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}.$$

Question 5. (c)

En déduire que r_n est équivalent à : $\frac{\ln n}{(x-1)n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

D'après les questions précédentes, nous avons l'encadrement suivant :

$$\frac{(x-1)\ln(n)+1}{(x-1)^2 n^{x-1}} \leq r_n \leq \frac{(x-1)\ln(n-1)+1}{(x-1)^2 (n-1)^{x-1}}.$$

Par des équivalents simples, les suites majorantes et minorantes sont équivalentes à

$$\frac{(x-1)\ln(n)}{(x-1)^2 n^{x-1}} = \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}.$$

En divisant l'inégalité précédente par ce dernier terme (qui est strictement positif), on obtient un encadrement permettant d'appliquer le théorème des gendarmes. Les suites majorante et minorante convergent toutes deux vers 1, ce qui permet de conclure que

$$r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}.$$

Question 6.

On considère deux suites $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et $w = (w_n)_{n \geq 0}$ à termes réels non nuls. On suppose que v_n est équivalent à w_n quand n tend vers l'infini et que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

On rappelle que, si tous les termes de la suite v sont positifs, alors :

- La série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est convergente.
- $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

Question 6. (a)

Comme indiqué dans l'énoncé de la question suivante, pour notre contre-exemple, nous présenterons des suites indexées par $\mathbb{N}^*$.

On définit ainsi les suites v et w :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad w_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_n$ est convergente.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la série $\sum w_n$ est convergente.

Alors, la série $\sum (w_n - v_n)$ est également convergente, ce qui implique la convergence de $\sum \frac{1}{n}$, une absurdité.

De plus, on a :

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(v_n),$$

d'où $w_n \sim v_n$.

Ce couple de suites constitue donc le contre-exemple demandé.

Question 6. (b)

Montrer de même que, lorsque le signe des termes de v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

On pourra utiliser pour w la suite de terme général : $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$

Correction

La suite w est déjà définie dans l'énoncé (sur $\mathbb{N}^*$). Définissons la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

Introduisons également la suite des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}.$$

La suite $\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{k \geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées, qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |r_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \text{d'où} \quad v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ensuite, observons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = v_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

En sommant cette relation (de manière partiellement télescopique), on pose :

$$r'_n := \sum_{k=n}^{\infty} w_k = r_n + \frac{1}{n}.$$

Il en découle :

$$r'_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que $r'_n \sim \frac{1}{n}$, tandis que r_n n'est pas équivalente à $\frac{1}{n}$ car elle est négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Enfin, comme précédemment, on observe que $w_n \sim v_n$ car :

$$\frac{1}{n(n+1)} = o(v_n).$$

Pour la suite de l'exercice

Pour traiter la question qui suit, on pourra admettre la propriété suivante qui complète les propriétés rappelées précédemment.

Si v et w sont deux suites à termes positifs telles que $v_n = o(w_n)$ (v_n négligeable par rapport à w_n quand n tend vers l'infini) et si les séries $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} w_n$ sont convergentes, alors :

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\right).$$

Question 7.

Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda (> 0)$ et que les variables X et Y sont indépendantes.

Correction

Dans les réponses à ces questions, posons $q = 1 - p$ et notons que $q \in]0, 1[$ car $p \in]0, 1[$.

Question 7. (a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X \geq n)$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}.$$

De plus, on a $P(X \geq 0) = 1$ (ce qui n'est pas inclus dans le résultat précédent).

Question 7. (b)

Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$P(X + Y = n) = p(1-p)^{n-1} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{1-p} \right)^k.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'événement $\{X + Y = n\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X = k, Y = n - k\}$ pour k parcourant $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^n P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X = k) P(Y = n - k) && \text{(par indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^n pq^{k-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} pq^{n-j-1} \frac{\lambda^j}{j!} && \text{(changement d'indice } j = n - k) \\ &= e^{-\lambda} p(1-p)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{1-p} \right)^j. \end{aligned}$$

Question 7. (c)

En déduire que $P(Y \geq n)$ est négligeable devant $P(X + Y \geq n)$ quand n tend vers l'infini.

Correction

D'après une série entière vue en cours,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{1-p} \right)^k \rightarrow e^{\frac{\lambda}{1-p}},$$

et cette limite est non nulle.

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{P(Y = n)}{P(X + Y = n)} &\sim \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times \frac{1}{p(1-p)^{n-1} e^{-\lambda} e^{\lambda/(1-p)}} \\ &\sim \frac{e^{-\lambda/q} q}{p} \times \frac{(\lambda/q)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Par conservation de limite et croissance comparée, on obtient $P(Y = n) = o(P(X + Y = n))$.

Les deux probabilités étant positives et termes généraux de séries convergentes, on en déduit par un théorème classique :

$$P(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(Y = k) = o(P(X + Y \geq n)).$$

Question 7. (d)

Démontrer que : $P(X + Y \geq n)$ est équivalent à $\frac{e^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}}{1-p}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

On a vu précédemment que :

$$P(X + Y = n) \sim p(1-p)^{n-1} e^{-\lambda} e^{\lambda/q} = p(1-p)^{n-1} e^{\frac{\lambda p}{1-p}}.$$

Comme les termes sont positifs et termes généraux de séries convergentes, on applique un théorème de sommabilité :

$$\begin{aligned} P(X + Y \geq n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(X + Y = k) \\ &\sim \sum_{k=n}^{\infty} \mu(1-p)^{k-1} \\ &\sim \frac{\mu(1-p)^{n-1}}{p} \quad (\text{en posant } \mu = pe^{\lambda p/(1-p)}) \\ &\sim e^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$

Question 7. (e)

En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} P(X + Y \geq n)$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Correction

Par comparaison avec une série géométrique convergente (donc absolument convergente car $|1-p| < 1$), on obtient la convergence de la série $\sum P(X + Y \geq n)$.

Retrouvons tout d'abord un résultat classique en posant $Z = X + Y$, qui est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(Z > n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(Z = k) \\ &= \sum_{0 \leq n < k} P(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} P(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(Z = k) \\ &= E(Z) \\ &= E(X) + E(Y) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= \frac{1}{p} + \lambda. \end{aligned}$$

Les échanges de sommes sont justifiés par la théorie de la sommabilité (tous les termes sommés sont positifs ou nuls).

On peut maintenant calculer la somme demandée :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X+Y=n) = P(X+Y \geq 0) + \frac{1}{p} + \lambda = 1 + \frac{1}{p} + \lambda.$$

Partie 3 : Étude du reste comme opérateur

On note L_{∞} le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées et $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme sur L_{∞} définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n \geq 0}, \quad \|u\|_{\infty} = \sup\{|u_n|; n \in \mathbb{N}\}.$$

Question 8.

Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$.

Correction

Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On suppose que $u \rightarrow \ell$, c'est-à-dire que $\|u - \ell\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Alors, la suite de fonctions $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{N}$ vers la fonction $\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u(n)$ converge vers 0 par hypothèse.

Par le théorème de double limite, la fonction ℓ converge donc aussi vers 0, ce qui montre que $\ell \in F$ et permet de conclure.

Question 9.

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Question 9. (a)

Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F .

Correction

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de F .

Stabilité par addition :

Si $u, v \in E$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Par linéarité de la somme des séries, $\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n$ est convergente, donc $u + v \in E$.

Stabilité par multiplication par un scalaire :

Si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\sum u_n$ est convergente. Or, $\sum (\lambda u_n) = \lambda \sum u_n$ est convergente, donc $\lambda u \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de F .

Question 9. (b)

L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$? Quelle est son adhérence?

Correction

On a $E \subset F$, donc par passage à l'adhérence : $\text{adh}(E) \subset \text{adh}(F) = F$.

Soit $u \in F$. Vérifions que $u \in \text{adh}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la suite $v(n)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v(n)_k = \begin{cases} u_k & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, $v(n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\|u - v(n)\|_\infty = \sup\{|u_k|, k \geq n+1\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u \rightarrow 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_0, |u_k| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors $\|u - v(n)\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ainsi, $v(n) \rightarrow u$ dans L_∞ , donc $u \in \text{adh}(E)$.

On en conclut que $\text{adh}(E) = F$.

En particulier, E n'est pas fermé, sinon on aurait $E = F$, ce qui contredirait la convergence de la série définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{n+1}.$$

Question 10.

On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Question 10. (a)

Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.

Correction

Soit $q \in]-1, 1[$ la raison de la suite (u_n) .

Comme $(|q^n|)$ est décroissante, on a $\|u\|_\infty = 1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}.$$

On en déduit :

$$\|\Phi(u)\|_\infty = \frac{1}{|1-q|} = \frac{1}{1-q}.$$

Question 10. (b)

Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞ , dont l'image est F .

Correction

Soit $u \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n est bien défini et appartient à $F \subset L_\infty$ (cf. première question du sujet).

Donc Φ est bien définie de E dans L_∞ et son image est incluse dans F .

Soit $u \in \ker(\Phi)$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r_n - r_{n+1} = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, Φ est injective.

Soit $v \in F$. Définissons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = v_k - v_{k+1}.$$

D'après la relation série-somme, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} u_k = v_n - \lim v = v_n.$$

On a donc $v = \Phi(u)$ avec $u \in E$, ce qui achève la question.

Question 10. (c)

On note Ψ la restriction de Φ à E , considérée comme une bijection de E sur F . On munit E et F de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Question 10. (c) (i)

L'application Ψ est-elle continue?

Correction

Supposons que Ψ soit continue. Alors, par linéarité, il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall u \in E, \quad \|\Psi(u)\|_\infty \leq \lambda \|u\|_\infty.$$

En particulier, d'après la question précédente :

$$\forall q \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-q} \leq \lambda.$$

En faisant tendre q vers 1^- , on trouve une contradiction, donc Ψ n'est pas continue.

Question 10. (c) (ii)

L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue?

Correction

L'application Ψ^{-1} est définie de F dans E par :

$$\forall u \in F, \quad \Psi^{-1}(u) = (u_k - u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Ainsi, pour tout $u \in F$:

$$\|\Psi^{-1}(u)\|_\infty \leq 2 \|u\|_\infty,$$

ce qui montre que Ψ^{-1} est continue.

Partie 4 : Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

On rappelle que si $v = (v_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, alors :

- la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie l'inégalité

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_n$$

Question 11.

Établir, pour tout réel positif ou nul t , la double inégalité :

$$0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité de convexité, on a :

$$f(t+1) \geq f'(t)(t+1-t) + f(t)$$

puis, en divisant par $f(t) > 0$:

$$\frac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} \geq \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Par décroissance de f , on obtient directement l'autre inégalité.

Question 12.

Pour tout entier positif ou nul n , on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

Question 12. (a)

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Correction

La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, positive et converge vers 0.

Par le critère des séries alternées, la série $\sum (-1)^n f(n)$ est convergente.

Question 12. (b)

Pour tout entier positif ou nul n , on pose :

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n , on a :

$$(i) \quad |r_n| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p).$$

$$(ii) \quad 0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1).$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration de (i)

Par le critère spécial des séries alternées, r_n est du signe de $(-1)^n f(n)$, donc de celui de $(-1)^n$.

On a :

$$|r_n| = (-1)^n r_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{n+k} f(k).$$

En effectuant un changement d'indice [$k = n + p$], on obtient :

$$|r_n| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p).$$

Démonstration de (ii)

Vérifions que la suite $(f(n+p) - f(n+p+1))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante, positive et converge vers 0.

Le troisième point est une conséquence directe de la limite $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

La positivité découle de la décroissance de f .

Enfin, en utilisant la convexité de f , on obtient :

$$f(n+p+1) \leq \frac{f(n+p) + f(n+p+2)}{2}.$$

Ce qui donne :

$$f(n+p+1) - f(n+p+2) \leq f(n+p) - f(n+p+1).$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (f(n+p) - f(n+p+1))$$

est du signe de son premier terme et majoré (en valeur absolue) par ce dernier.

Question 12. (c)

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

Correction

La suite $(|r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0 (suite des restes d'une série convergente).

De plus, r_n est du signe de $(-1)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = (-1)^n |r_n|.$$

Par le critère des séries alternées, la série $\sum r_n$ est convergente.

Question 12. (d)

Démontrer que, si le quotient $\frac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini alors r_n est équivalent à $\frac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq n$, on a :

$$(-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1) = 2(-1)^k f(k) - (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

En sommant de n à ∞ , il vient :

$$(-1)^n f(n) - 0 = 2r_n - \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

On pose :

$$v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

D'après le critère des séries alternées :

$$|v_n| \leq f(n) - f(n+1) \leq \frac{-f'(n)}{f(n)} f(n).$$

L'hypothèse faite sur f permet d'en déduire que $v_n = o(f_n)$.

Ainsi, on obtient :

$$r_n = \frac{(-1)^n f(n)}{2} + o(f(n)).$$

Ce qui donne l'équivalent asymptotique :

$$r_n \sim \frac{u_n}{2}.$$

Question 13. (a)

Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente?

Correction

Pour $x > 1$, la série est absolument convergente, donc convergente.

Pour $x \in]0, 1]$, la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n \geq 3}$ est décroissante (l'étude de la fonction a été faite plus haut), positive et converge vers 0 par croissance comparée. La série est donc convergente.

Pour $x \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 (il diverge même vers $+\infty$), donc la série est grossièrement divergente.

Question 13. (b)

Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

Soit $x > 0$. Pour tout $t \geq 3$, on pose :

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}.$$

Cette fonction est dérivable avec :

$$\forall t \geq 3, \quad f'(t) = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{x \ln(t)}{t^{x+1}} = \frac{1}{t^{x+1}} (1 - x \ln(t)).$$

De plus, nous avons :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t \ln(t)} - \frac{x}{t} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

La fonction f' est aussi dérivable, et son expression est :

$$\forall t \geq 3, \quad f''(t) = \frac{-x-1}{t^{x+2}} (1 - x \ln(t)) + \frac{1}{t^{x+1}} \frac{-x}{t}.$$

On peut réécrire :

$$f''(t) = \frac{x(x+1)}{t^{x+2}} \left(\ln(t) - \frac{1+2x}{x^2+x} \right).$$

En adaptant les résultats précédents, on montre que la restriction de f à $\left[\frac{1+2x}{x^2+x}, +\infty \right[$ est dérivable, convexe, décroissante, positive et tend vers 0 en $+\infty$, tout comme $\frac{f'(t)}{f(t)}$.

On en déduit :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \sim \frac{(-1)^n \ln(n)}{2n^x}.$$

Question 14. (a)

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Correction

On effectue un développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + O(1/n^3).$$

Cela peut aussi s'écrire sous forme de différence :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + O(1/n^3).$$

Comme somme de termes généraux de séries convergentes, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Question 14. (b)

La série de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

Correction

Pour tout $t \geq 1$, on pose :

$$f(t) = \frac{1}{t}.$$

Cette fonction est décroissante, dérivable, convexe, tend vers 0 en $+\infty$, et on a :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-1}{t} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

D'après un résultat démontré plus haut, on a :

$$r_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2n}.$$

En reprenant le développement limité de la question précédente et par sommation des $O(1/n^3)$ (cas convergent), on obtient :

$$\begin{aligned} w_n &:= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k} = r_n - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + o(1/n) - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + o(1/n) - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'équivalent simple :

$$\frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{2n} - w_n.$$

Comme $1/n > 0$, par conservation du signe strict, ces deux suites équivalentes sont de signe constant (strictement positif) à partir d'un certain rang.

En raisonnant par l'absurde et en supposant que $\sum w_n$ est une série convergente, on en déduit que $\sum \frac{1}{n}$ est une série convergente, ce qui est absurde.

La série $\sum w_n$ est divergente.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Problème I – Le facteur de Bayes

Introduction

Le résultat d'une expérience aléatoire est un réel r qui est vu comme la réalisation d'une variable aléatoire R . Pour une même expérience, la loi de la variable aléatoire R peut être définie de différentes manières. Choisir une loi pour R équivaut à choisir un modèle pour l'expérience aléatoire.

Face à ces différentes possibilités de modélisation, une question naturelle est de savoir a posteriori, c'est-à-dire après avoir pris connaissance du résultat de l'expérience, si un modèle A est préférable à un autre modèle B . Pour répondre à cette question, on peut calculer le facteur de Bayes défini par

$$f_{A,B} := \log_{10} p_A - \log_{10} p_B,$$

où p_A est la probabilité que $R = r$ sous le modèle A et p_B est la probabilité que $R = r$ sous le modèle B . La notation $\log_{10}$ correspond au logarithme décimal (base 10).

Évidemment, une valeur positive de $f_{A,B}$ suggère que le modèle A est préférable à B . Plus précisément, l'interprétation de la valeur $f_{A,B}$ est donnée dans le tableau suivant :

$f_{A,B}$	Décision
$< -\frac{1}{2}$	Le modèle B est préféré au modèle A.
de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$	On ne peut pas distinguer les deux modèles.
$> \frac{1}{2}$	Le modèle A est préféré au modèle B.

L'objectif de ce problème est d'appliquer cette méthode de décision sur une expérience simple : le "pile ou face".

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $q_1 \in]0, 1[$ et $q_2 \in]0, 1[$. On a donc $P([X_i = 1]) = q_i$ et $P([X_i = 0]) = 1 - q_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Question 1.

On introduit la variable aléatoire $S_2 = X_1 + X_2$. Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs prises par la variable aléatoire S_2 .

Correction

On a : $E_2 = \{0, 1, 2\}$

Question 2.

Pour tout $k \in E_2$, donner l'expression (en fonction de q_1 et q_2) la valeur de la probabilité $P([S_2 = k])$.

Correction

- On a $P([S_2 = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1 - q_1)(1 - q_2)$
- On a $P([S_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) \cup P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2)$
- On a $P([S_2 = 2]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = q_1 q_2$

Question 3.

Calculer l'espérance et la variance de S_2 .

Correction**Calcul de l'espérance****Première méthode**

Par définition de l'espérance, on a :

$$E(S_2) = 0 \times P([S_2 = 0]) + 1 \times P([S_2 = 1]) + 2 \times P([S_2 = 2]) = q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2) + 2q_1 q_2 = q_1 + q_2$$

Deuxième méthode

On remarque que l'espérance de la somme de deux variable aléatoire indépendantes est égale à la somme de leur espérances respectives. On a donc :

$$E(S_2) = E(X_1) + E(X_2) = q_1 + q_2$$

Calcul de la variance**Première méthode**

Par définition de la variance, on a :

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= E(S_2^2) - E(S_2)^2 \\ &= q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2) + 4q_1 q_2 - (q_1 + q_2)^2 \\ &= q_1 + q_2 + 2q_1 q_2 - q_1^2 - q_2^2 - 2q_1 q_2 \\ &= q_1 + q_2 - q_1^2 - q_2^2 \\ &= q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2) \end{aligned}$$

Deuxième méthode

On remarque que la variance de la somme de deux variable aléatoire indépendantes est égale à la somme de leur variances respectives. On a donc :

$$Var(S_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2)$$

Question 4.

On considère à présent $n > 2$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de loi de Bernoulli avec pour tout $i \in 1, \dots, n, P([X_i = 1]) = q_i \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

En fonction de $q_1, \dots, q_n$, donner les expressions de $P([S_n = 0])$ et $P([S_n = 1])$.

Correction**Calcul de $P([S_n = 0])$**

Par définition, on a :

$$P([S_n = 0]) = \prod_{i=1}^n P([X_i = 0]) = \prod_{i=1}^n (1 - q_i)$$

Calcul de $P([S_n = 1])$

De même, on a :

$$P([S_n = 0]) = \prod_i^n q_i$$

Question 5.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathbb{S}_k$ l'ensemble des vecteurs $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
Donner en fonction de k et n le cardinal de l'ensemble $\mathbb{S}_k$.

Correction

On a :

$$\text{Card}(\mathbb{S}_k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Question 6.

Montrer que

$$P([S_n = 2]) = \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_l}).$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned} P([S_n = 2]) &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} P([X_1 \neq 1] \cap \dots \cap [X_{i_1-1} \neq 1] \cap [X_{i_1} = 1] \cap \dots \cap [X_{i_2-1} \neq 1] \cap [X_{i_2} = 1]) \\ &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} P([X_{i_1} = 1] \cap [X_{i_2} = 1] \cap [X_1 \neq 1] \cap \dots \cap [X_{i_1-1} \neq 1] \cap \dots \cap [X_{i_2-1} \neq 1]) \\ &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} P([X_{i_l} \neq 1]) \\ &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_l}) \end{aligned}$$

Question 7.Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, donner l'expression de $P([S_n = k])$.**Correction**

Par calcul analogue à la question 6, on a :

$$P([S_n = k]) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^k q_{i_j} \prod_{i_l \neq i_1, \dots, i_k} (1 - q_{i_l}).$$

Question 8.

Dans le cas où $q_1 = \dots = q_n$, simplifier l'expression de $P([S_n = k])$ obtenue à la question précédente. Quel nom donne-t-on à la loi de S_n dans ce cas ?

Correction

Si $q_1 = \dots = q_n = q$, on a :

$$P([S_n = k]) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^k q_{i_j} \prod_{i_l \neq i_1, \dots, i_k} (1 - q_{i_l}) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^k q \prod_{i_l \neq i_1, \dots, i_k} (1 - q) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{S}_k} q^k (1 - q)^{n-k} = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}$$

C'est donc une loi binomiale de paramètres n et q .

Le "pile ou face"

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une pièce de monnaie et à compter le nombre de fois où l'on obtient le côté "pile". Le résultat r de cette expérience est la réalisation de la variable aléatoire R donnée par

$$R = S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes et telles que $X_i = 1$ si le côté "pile" est obtenu au i -ème lancer et $X_i = 0$ sinon.

On compare les modélisations suivantes.

- Modèle $M_{1/2}$: la pièce est équilibrée et donc $P([X_i = 1]) = 1/2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Modèle M_q : la probabilité d'obtenir le côté "pile" est égale à $q \in]0, 1[$.

Question 9.

Donner l'expression de la probabilité $p_{1/2}(n, r) := P([S_n = r])$ lorsque la pièce est supposée équilibrée (modèle $M_{1/2}$).

Correction

On a :

$$p_{1/2}(n, r) = P([S_n = r]) = \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{r} 2^{-n}$$

Question 10.

Pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$, donner l'expression de la probabilité $p_q(n, r) := P([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_q . En déduire l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2, q}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_q(n, r).$$

Correction

On a :

$$p_q(n, r) = \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r}$$

Par définition et en réduisant on a :

$$\begin{aligned} f_{1/2,q}(n, r) &= \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_q(n, r) \\ &= \log_{10} \frac{p_{1/2}(n, r)}{p_q(n, r)} \\ &= \log_{10} \frac{\binom{n}{r} 2^{-n}}{\binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r}} \\ &= \log_{10} \frac{2^{-n}}{q^r (1-q)^{n-r}} \\ &= \log_{10} 2^{-n} - r \log_{10} q - (n-r) \log_{10} (1-q) \end{aligned}$$

Question 11.

Dresser le tableau de variation de la fonction $q \mapsto f_{1/2,q}(n, r)$.

Correction

On dérive $g(q) = f_{1/2,q}(n, r)$, on a :

$$\begin{aligned} g'(q) &= \frac{-r}{q \ln(10)} + \frac{n-r}{(1-q) \ln(10)} \\ &= \frac{q(n-r) - r(1-q)}{q(1-q) \ln(10)} \\ &= \frac{nq - r}{q(1-q) \ln(10)} \end{aligned}$$

On sait que $q(1-q) \ln(10)$ est toujours positif.

D'où :

- Si $nq - r < 0$, c'est à dire que $q < \frac{r}{n}$, alors $g(q)$ est décroissante.
- De même, si $nq - r > 0$, c'est à dire que $q > \frac{r}{n}$, alors $g(q)$ est croissante

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{r}{n}$	1
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Question 12.

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ q \in]0, 1[\mid -\frac{1}{2} \leq f_{1/2,q}(n, r) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Pour tout $q \in \mathcal{D}$, que peut-on dire sur les modèles $M_{1/2}$ et M_q ? (utiliser la règle de décision du Tableau 1).

Correction

On ne peut pas distinguer les deux modèles.

Question 13.

Application numérique : Après $n = 200$ lancers, on obtient $r = 115$ fois le côté pile. L'ensemble $\mathcal{D}$ correspondant est $[0.483, 0.522] \cup [0.627, 0.664]$. Une personne vous assure qu'avec la pièce utilisée, la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face". Qu'en pensez-vous?

Correction

Il s'agit ici de comparer les modèles $M_{1/2}$ et M_q avec q tel que :

$$\begin{aligned} q &= \frac{3}{2}(1 - q) \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}q &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow q &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow q &= 0.6 \end{aligned}$$

Donc $q \notin D$. De plus, on sait d'après le tableau de variations que $f_{1/2, 3/5}(n, r) < -1/2$.

Donc on préfère le modèle $M_{3/5}$ c'est à dire le fait que la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face".

Tester si une pièce était bien équilibrée : première méthode

Connaissant le résultat r de l'expérience, on souhaite s'assurer que la pièce utilisée était bien équilibrée. Pour ce faire, une première méthode consiste à comparer le modèle de la pièce équilibrée au modèle le plus vraisemblable a posteriori. Ce modèle (noté M_{opt}) est celui pour lequel $P([X_i = 1]) = \hat{q}(n, r)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; la valeur $\hat{q}(n, r)$ est la probabilité $q \in [0, 1]$ maximisant la probabilité $P([S_n = r])$ obtenue sous le modèle $P([X_i = 1]) = q$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Question 14.

Calculer $\hat{q}(n, 0)$ et $\hat{q}(n, n)$. Donner l'expression de $\hat{q}(n, r)$.

Correction

La valeur $\hat{q}(n, r)$ est obtenue en maximisant :

$$\log_{10} P([S_n = r]) = \log_{10} \binom{n}{r} - r \log_{10} q - (n - r) \log_{10} (1 - q)$$

En dérivant puis en annulant, on a :

$$\begin{aligned}\frac{r}{q} - \frac{n-r}{1-q} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r}{q} &= \frac{n-r}{1-q} \\ \Leftrightarrow q(n-r) &= r - rq \\ \Leftrightarrow qn &= r \\ \Leftrightarrow q &= \frac{r}{n}\end{aligned}$$

Ainsi, si $q = 0$ alors $r = 0$

D'où $\hat{q}(n, 0) = 0$ et $\hat{q}(n, n) = 1$

Question 15.

Donner l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2, \text{opt}}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_{\text{opt}}(n, r),$$

où $p_{\text{opt}}(n, r) := P([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_{opt} .

Correction

On a :

$$\begin{aligned}f_{1/2, \text{opt}}(n, r) &= \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_{\text{opt}}(n, r) \\ &= \log_{10} \frac{p_{1/2}(n, r)}{p_{\text{opt}}(n, r)} \\ &= \log_{10} \frac{2^{-n}}{\left(\frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r}} \\ &= \log_{10} \frac{n2^{-n}}{r^r (n-r)^{n-r}}\end{aligned}$$

Question 16.

Application numérique : en prenant les mêmes valeurs que dans la question 1.5), calculer la valeur du facteur de Bayes $f_{1/2, \text{opt}}(n, r)$. Conclure.

Correction

On a :

$$f_{1/2, \text{opt}}(n, r) = 1,3201 > \frac{1}{2}$$

On préfère donc dire que le modèle "pièce équilibrée" est préférable.

Tester si une pièce était bien équilibrée : deuxième méthode

Une autre méthode pour s'assurer a posteriori de l'équilibre de la pièce consiste à comparer le modèle $M_{1/2}$ au modèle M_{bay} ainsi défini : pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la variable aléatoire Q_N qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\left\{\frac{j}{N+1}, j = 1, \dots, N\right\}$ avec $P([Q_N = \frac{j}{N+1}]) = \frac{1}{N}$ pour tout $j = 1, \dots, N$. On suppose que la probabilité d'obtenir le résultat r dépend de la valeur de la variable aléatoire Q_N :

$$P([S_n = r] | [Q_N = \frac{j}{N+1}]) = P\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i = r\right]\right),$$

avec $P([X_i = 1]) = \frac{j}{N+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant qu'un événement B de probabilité non nulle est réalisé est donnée par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Question 17.

En utilisant la formule des probabilités totales, donner l'expression (en fonction de n, r et N) de la probabilité $p_{\text{bay}}(n, r)$ que la variable S_n soit égale à r sous le modèle M_{bay} .

Correction

On a :

$$\begin{aligned} P([S_n = r]) &= \sum_{j=1}^N P([S_n = r] \cap [Q_N = \frac{j}{N+1}]) \\ &= \sum_{j=1}^N \binom{n}{r} \left(\frac{j}{N+1}\right)^r \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-r} \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Question 18.

Application numérique : Pour $n = 200$, $r = 115$ et $N = 100$, on a

$$\log_{10} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{j}{N+1}\right)^r \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-r} \right) = -60.28.$$

Calculer la valeur du facteur de Bayes et conclure.

Correction

On a $\log_{10}(2^{-r}) = -60,206$ donc le facteur de Bayes est de 0,074. La pièce semble donc équilibrée.

Problème II – Estimation de la production

Lors de la mise sur le marché de son dernier véhicule, un constructeur automobile a souhaité affecter à chaque voiture vendue un numéro. Ainsi, la première voiture vendue s'est vue attribuer le numéro 1, la deuxième, le numéro 2, etc. Ce numéro est clairement visible à l'arrière du véhicule. Au bout d'un an de mise sur le marché, un concurrent souhaite savoir combien de voitures ont été vendues par ce constructeur automobile. Pour ce faire, il dispose uniquement des numéros des voitures qu'il a croisées lors de l'année écoulée.

Notations : le nombre de voitures observées par le concurrent est noté k et les numéros correspondants, rangés par ordre croissant, sont notés $x_1 < \dots < x_k$. Enfin, le nombre (inconnu) de véhicules vendus est noté N . On a donc forcément $k \leq N$.

On suppose dans la suite que le k -uplet $(x_1 < \dots < x_k)$ est le résultat de l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard et sans remise k numéros parmi $\{1, \dots, N\}$. Cette expérience est modélisée par l'espace $(\Omega_k, \mathcal{A}, P)$, où Ω_k est l'ensemble de tous les k -uplets $(x_1 < \dots < x_k)$ possibles, $\mathcal{A}$ est la tribu de l'ensemble des parties de Ω_k et P est la probabilité uniforme.

Question 1.

Quel est (en fonction de N et k) le cardinal de Ω_k .

Correction

On a :

$$\text{Card}(\Omega_k) = \binom{N}{k}$$

Question 2.

Donner l'expression (en fonction de N et k) de la probabilité $P(\{(x_1 < \dots < x_k)\})$ d'obtenir le tirage $x_1 < \dots < x_k$.

Correction

On a :

$$P(\{(x_1 < \dots < x_k)\}) = \frac{1}{\binom{N}{k}}$$

Question 3.

On introduit la variable aléatoire $M_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout k -uplet $(x_1 < \dots < x_k) \in \Omega_k$ associe la plus grande valeur x_k .

Pour $m < k$ ou $m > N$, quelle est la valeur de $P([M_k = m])$?

Correction

- Si $m < k$, on a $P([M_k = m]) = 0$
- Si $m > N$, on a $P([M_k = m]) = 0$

Question 4.

On suppose que m est tel que $k \leq m \leq N$.

Quel est le nombre de k -uplets $(x_1 < \dots < x_k)$ pour lesquels $x_k = m$? En déduire la valeur de $P([M_k = m])$.

Correction

Il y a $\binom{m-1}{k-1}$ possibilités donc :

$$P([M_k = m]) = \frac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

Question 5.

En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$C_N^k := \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{m=k}^N C_{m-1}^{k-1}.$$

où pour tout entier $l > 0$, $l! = l \times (l-1) \times \dots \times 1$ et avec la convention $0! = 1$.

Correction

par somme des probabilités totales, on sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^N P([M_k = m]) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{m=k}^N \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{k}{N}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N \binom{k-1}{m-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{m=k}^N \binom{k-1}{m-1} &= \binom{k}{N} \end{aligned}$$

Question 6.

Montrer que l'espérance de M_k est donnée par

$$E(M_k) = \frac{k}{C_N^k} \sum_{m=k}^N C_m^k.$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned} E(M_k) &= \sum_{m=k}^N m \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{k}{N}} \\ &= \frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-1-(k-1))!} \\ &= \frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} \\ &= \frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N k \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{k}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^N \binom{m}{k} \end{aligned}$$

Question 7.

En effectuant le changement de variable $l = m + 1$ dans la somme ci-dessus et en utilisant le résultat de la question 5), montrer que $E(M_k) = k \frac{N+1}{k+1}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned} E(M_k) &= \frac{k}{\binom{N}{k}} \sum_{l=k+1}^{N+1} \binom{l-1}{k} \\ &= \frac{k}{\binom{N}{k}} \frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!} \\ &= \frac{k k! (N-k)!}{N!} \frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!} \\ &= \frac{(N+1)k}{(k+1)} \end{aligned}$$

Question 8.

On rappelle que le concurrent souhaite estimer le nombre N de véhicules vendus.

En utilisant la question précédente, proposer une fonction $\Psi_k(\cdot)$ (indépendante de N évidemment) telle que $E(\Psi_k(M_k)) = N$. La variable aléatoire $\Psi_k(M_k)$ est un estimateur sans biais de N ?

Correction

En prenant $\Psi_k(M_k) = \frac{k+1}{k} M_k - 1$

Question 9.

Calculer $E[(\Psi_k(M_k))^2]$ et en déduire la variance de l'estimateur $\Psi_k(M_k)$ (Aide : remplacer m^2 par $m(m+1) - m$).

Correction

On a :

$$E[(\Psi_k(M_k))^2] = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 E(M_k^2) + 1 - 2(N+1)$$

.

Or :

$$\begin{aligned}
 E(M_k^2) &= \sum_{m=k}^N m^2 \frac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^N m(m+1) \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^N \frac{(m+1)!k(k+1)}{(k+1)!(m-k)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^N \binom{m+1}{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \sum_{l=k+2}^{N+2} \binom{l-1}{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \binom{N+2}{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{k(k+1)k!(N-k)!}{N!} \frac{(N+2)!}{(N-k)!(k+2)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
 &= \frac{k(N+2)(N+1)}{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 E[(\Psi_k(M_k))^2] &= \frac{(k+1)^2(N+2)(N+1)}{k(k+2)} - \frac{(k+1)(N-1)}{k} - 1 - 2N \\
 &= \frac{(N+1)(k+1)[(k+1)(N+2) - k - 2]}{k(k+2)} - 1 - 2N \\
 &= \frac{(N+1)(k+1)[Nk + 2k + N + 2 - k - 2]}{k(k+2)} - 1 - 2N \\
 &= \frac{(N+1)(k+1)[Nk + k + N]}{k(k+2)} - 1 - 2N
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 Var(\Psi_k(M_k)) &= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - 1 - 2N - N^2 \\
 &= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - (N+1)^2 \\
 &= (N+1) \left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+2) - \frac{k+1}{k} - (N+1) \right] \\
 &= (N+1) \left[\frac{(k+1)^2(N+2) - (k+1)(k+2) - k(k+2)(N+1)}{k(k+2)} \right] \\
 &= \frac{N+1}{k(k+2)} [(k^2 + 2k + 1)(N+2) - (k+2)(kN+k) - (k+1)(k+2)] \\
 &= \frac{N+1}{k(k+2)} [Nk^2 + 2k^2 + 2kN + 4k + N + 2 - k^2N - k^2 - 2kN - 2k - k^2 - 2k - k - 2] \\
 &= \frac{N+1}{k(k+2)} [N - k]
 \end{aligned}$$

Question 10.

On suppose que $k = N - \lfloor N^a \rfloor$ avec $a \in]0, 1[$, la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ étant celle de la partie entière. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir le rappel donné à la fin du sujet), montrer que dans ce cas, $\Psi_k(M_k) - N$ converge en probabilité vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Correction

D'après la question précédente, on a :

$$\text{Var}(\Psi_k(M_k)) = \frac{N+1}{k(k+2)} [N-k] \sim \frac{\lfloor N^a \rfloor N}{N^2} \sim N^{a-1}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \epsilon > 0$, on a :

$$P(|\Psi_k(M_k) - N| > \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(\Psi_k(M_k))}{\epsilon^2} \sim \frac{N^{a-1}}{\epsilon^2} \rightarrow 0$$

Problème III – Estimation de la taille d'une population

Pour estimer la taille de la population d'une espèce animale, la méthode de "capture-marquage-recapture" (CMR) est couramment utilisée.

Si on note P une population de $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ individus (le nombre N étant inconnu), la méthode CMR consiste à :

- (C) tirer au hasard et sans remise $n \in \{1, \dots, N\}$ individus dans la population P ;
- (M) marquer les n individus et les remettre dans la population P ;
- (R) tirer au hasard et sans remise $m \in \{1, \dots, N\}$ individus dans la population P .

Dans la suite, on raisonnera comme si les N individus de la population étaient numérotés de 1 à N . Ceci n'est évidemment pas le cas en pratique mais permet de simplifier la modélisation du problème sans perte de généralité.

La modélisation probabiliste de la méthode CMR est le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec :

- Ω l'ensemble regroupant tous les résultats possibles de la méthode CMR. On notera $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un élément de Ω avec :
 - ω_1 un vecteur de taille N dont la i -ème composante $\omega_{1,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (C) et 0 sinon
 - ω_2 un vecteur de taille N dont la i -ème composante $\omega_{2,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (R) et 0 sinon.
- $\mathcal{A}$ la tribu des parties de Ω ;
- P la probabilité uniforme.

Question 1.

Donner la valeur des sommes

$$\sum_{i=1}^N \omega_{1,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \omega_{2,i}.$$

Correction

Par définition, on a :

- $\sum_{i=1}^N \omega_{1,i} = n$
- $\sum_{i=1}^N \omega_{2,i} = m$

Question 2.

Quel est le cardinal de l'ensemble Ω ? En déduire la valeur de la probabilité $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Correction

On a $\text{Card}(\omega) = \binom{N}{n} \binom{N}{m}$ d'où $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\binom{N}{n} \binom{N}{m}}$

Question 3.

On introduit la variable aléatoire $K : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^N \omega_{1,i} \omega_{2,i}.$$

Que peut-on dire lorsque la valeur observée de K est $k \in \mathbb{N}$?

Correction

Si $K(\omega) = k$ cela signifie que k individus marqués ont été capturés.

Question 4.

Si $n + m > N$, donner les valeurs de k pour lesquelles $P([K = k]) = 0$.

Correction

Il n'est pas possible que k soit strictement supérieur à $\min(n, m)$. De même, il n'est pas possible que k soit strictement inférieur à $n + m - N$

Question 5.

Donner l'ensemble $E(n, m, N) \subset \mathbb{N}$ des valeurs possibles de K .

Correction

On a :

$$E(n, m, N) = \{\max(0, m + n - N), \min(n, m)\}$$

Question 6.

Pour tout $k \in E(n, m, N)$, donner, en fonction de n, m et N , l'expression de la probabilité $P([K = k])$.

Correction

Il y a $\binom{N}{n}\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}$ possibilités pour que $K = k$.

Ainsi :

$$P([K = k]) = \frac{\binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

Question 7.

En déduire la relation

$$\sum_{k \in E(n, m, N)} C_n^k C_{N-n}^{m-k} = C_N^m.$$

Correction

Par la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E(n, m, N)} P([K = k]) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{k \in E(n, m, N)} \frac{\binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k \in E(n, m, N)} \binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{k \in E(n, m, N)} \binom{n}{k}\binom{m-k}{N-n} &= \binom{N}{m} \end{aligned}$$

Question 8.

En remarquant que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, et en utilisant la relation ci-dessus, donner l'expression de l'espérance de K .

Correction

On a :

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k \in E(n, m, N)} k \binom{n}{k} \binom{N-n}{m-k} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k \in E(n, m, N)} n \binom{n-1}{k-1} \binom{N-n}{m-k} \\ &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{k=\max(0, m+n-N)}^{\min(n, m)} \binom{n-1}{k-1} \binom{N-n}{m-k} \\ &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{k=\max(0, m+n-N)}^{\min(n, m)} \binom{n-1}{k-1} \binom{(N-1)-(n-1)}{(m-1)-(k-1)} \end{aligned}$$

Posons $l = k - 1$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 E(k) &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{l=\max(0, n+m-N-1)}^{\min(n-1, m-1)} \binom{n-1}{l} \binom{(N-1)-(n-1)}{(m-1)-l} \\
 &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{l=\max(0, (n-1)+(m-1)-(N-1))}^{\min(n-1, m-1)} \binom{n-1}{l} \binom{N-1-(n-1)}{(m-1)-l} \\
 &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \binom{N-1}{m-1} \\
 &= \frac{n(N-1)!}{(m-1)!(N-m)!} \frac{(N-n)!m!}{N!} \\
 &= \frac{nm}{N}
 \end{aligned}$$

Question 9.

Proposer une fonction $\Psi_{n,m}(\cdot)$ telle que $\frac{1}{\hat{N}} = \frac{1}{\Psi_{n,m}(K)}$ soit un estimateur sans biais de $\frac{1}{N}$. La variable aléatoire $\hat{N}$ est-elle un estimateur sans biais de N ?

Correction

Prenons

$$\Psi_{n,m}(K) = \left(\frac{K}{mn} \right)$$

On a :

$$E\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \frac{1}{N}$$

Question 10.

On suppose à présent que $n + m > N$.

Donner, en fonction de n, m et N , l'expression de l'espérance de $\frac{1}{K+1}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{K+1}\right) &= \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{N-n}{m-k} \frac{1}{\binom{N}{m}} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \binom{N-n}{m-k} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} \binom{n+1}{k+1} \binom{N-n}{m-k} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \sum_{l=m+n-N+1}^{\min(n+1, m+1)} \binom{n+1}{l} \binom{N+1-(n+1)}{m+1-l} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \binom{N+1}{m+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{N+1}{m+1}
 \end{aligned}$$

Question 11.

Utiliser la question précédente pour proposer un estimateur sans biais de N .

Correction

En prenant $\hat{N} = \frac{(n+1)(m+1)}{k+1} - 1$, on a un estimateur sans biais de N .

Problème IV – Inégalités de Markov et de Cantelli

Dans ce problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $E(X) = m \in \mathbb{R}$ et $E(X^2) = \sigma^2 + m^2$. Pour tout $\epsilon > 0$, on introduit la variable aléatoire $Y_\epsilon : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Y_\epsilon(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X(\omega)| > \epsilon, \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Question 1.

En posant $p_\epsilon := P(|X| > \epsilon)$, donner l'expression de $E(Y_\epsilon)$.

Correction

La variable aléatoire Y_ϵ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_ϵ . Donc $E(Y_\epsilon) = p_\epsilon$.

Question 2.

Montrer que pour tout $a \in [0, 2]$, $E(|X|^a) \geq E(|X|^a Y_\epsilon)$.

Correction

Par croissance de l'espérance.

Question 3.

En déduire l'inégalité de Markov : pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $a \in [0, 2]$,

$$P(|X| > \epsilon) \leq \frac{E(|X|^a)}{\epsilon^a}.$$

Correction

Par définition de Y_ϵ , on a $|X|^a Y_\epsilon = |X|^a$ sur $\{|X| > \epsilon\}$ et 0 ailleurs.

En prenant l'espérance on obtient :

$$E(|X|^a Y_\epsilon) = E(|X|^a \mathbb{1}_{|X| > \epsilon}).$$

Comme $|X|^a \geq \epsilon^a$ sur $\{|X| > \epsilon\}$, on obtient

$$E(|X|^a \mathbb{1}_{|X| > \epsilon}) \geq \epsilon^a P(|X| > \epsilon).$$

D'après la question 2, on sait que $E(|X|^a Y_\epsilon) \leq E(|X|^a)$, donc

$$E(|X|^a) \geq \epsilon^a P(|X| > \epsilon).$$

D'où

$$P(|X| > \epsilon) \leq \frac{E(|X|^a)}{\epsilon^a}.$$

Question 4.

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$,

$$P([X - \alpha > \epsilon]) \leq P(|X - \alpha| > \epsilon).$$

Correction

On a :

$$P(|X - \alpha| > \epsilon) = P([X - \alpha > \epsilon]) + P([X - \alpha < -\epsilon]) \geq P([X - \alpha > \epsilon])$$

Question 5.

En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et $\lambda > 0$,

$$P([X - m + \lambda > \epsilon + \lambda]) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\epsilon + \lambda)^2}.$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned} P([X - m + \lambda > \epsilon + \lambda]) &\leq P(|X - m + \lambda| > \epsilon + \lambda) \\ &\leq \frac{E(X - m + \lambda)^2}{(\epsilon + \lambda)^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\epsilon + \lambda)^2} \end{aligned}$$

Question 6.

Après avoir fait l'étude de la fonction $\lambda \in [0, \infty[\mapsto \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\epsilon + \lambda)^2}$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, la meilleure majoration est donnée par

$$P([X - m > \epsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}.$$

Correction

Soit $f(\lambda) = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\epsilon + \lambda)^2}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{2\lambda(\epsilon + \lambda)^2 - (\sigma^2 + \lambda^2)2(\epsilon + \lambda)}{(\epsilon + \lambda)^4} \\ &= \frac{2(\epsilon + \lambda)[\lambda(\epsilon + \lambda) - \sigma^2 - \lambda^2]}{(\epsilon + \lambda)^4} \\ &= \frac{2(\epsilon + \lambda)[\lambda\epsilon - \sigma^2]}{(\epsilon + \lambda)^4} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\sigma^2}{\epsilon}$	$+\infty$
$f'(\lambda)$		-	+
$f(\lambda)$		$\searrow$	$\nearrow$

Ainsi, en prenant : $\lambda = \frac{\sigma^2}{\epsilon}$, on a :

$$P([X - m > \epsilon]) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon}}{(\epsilon + \frac{\sigma^2}{\epsilon})^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 7.

En vous inspirant des questions précédentes, montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$P([X - m < -\epsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}.$$

Correction

On a :

$$P([X - m - \lambda < -\epsilon - \lambda]) \leq P([|X - m - \lambda| > \epsilon + \lambda]) \leq \frac{E((X - m - \lambda)^2)}{(\epsilon + \lambda)\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 8.

En déduire l'inégalité de Cantelli : pour tout $\epsilon > 0$,

$$P([|X - m| > \epsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}.$$

Correction

On a :

$$P([|X - m| > \epsilon]) = P([X - m > \epsilon]) + P([X - m < -\epsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 9.

Pour quelles valeurs de $\epsilon > 0$, l'inégalité de Cantelli est-elle préférable à celle de Bienaymé-Tchebychev?

Correction

Il faut trouver la valeur de $\epsilon > 0$ pour laquelle :

$$\frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \Leftrightarrow 2\epsilon^2 \leq \epsilon^2 + \sigma^2 \Leftrightarrow \epsilon^2 < \sigma^2 \Leftrightarrow \epsilon \in]0, \sigma[$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de français

Éléments de correction

Proposition de résumé en 179 mots

La pandémie de Covid-19 a été une épreuve mondiale. Elle a rappelé la fragilité humaine et bouleversé nos certitudes. L'idée même d'« épreuve » a été questionnée. Historiquement, elle renvoie à un test, une difficulté, voire une mise à l'épreuve divine. En philosophie et psychologie, elle symbolise douleur et transformation.

Gustave-Nicolas Fischer distingue six types d'expériences extrêmes : maladies, guerres, catastrophes, privation de liberté, pertes et dépendances. Ces épreuves fragilisent autant physiquement que psychologiquement. La séparation, le deuil ou l'isolement brisent aussi. Robinson Crusoé illustre l'importance d'autrui dans la construction personnelle. Collectivement, entreprises et civilisations connaissent aussi des épreuves fatales.

Face à l'adversité, trois attitudes existent : combattre, fuir ou ne rien faire. La lutte est valorisée mais épuise parfois. La fuite est vue comme une lâcheté, bien qu'elle puisse être salvatrice. L'inaction, loin d'être passive, permet parfois de survivre. Chaque individu reconstruit différemment après l'épreuve.

La résilience est un espoir mais n'est pas garantie. Si certains trouvent dans l'épreuve une force nouvelle, d'autres en ressortent brisés. Comme le roseau de Pascal, l'être humain oscille entre chute et redressement.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve d'anglais

Éléments de correction

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

In the developing world, a lack of reliable statistics hinders economic and social progress. Unlike wealthier countries, where individuals worry about excessive government surveillance, many poorer nations struggle with insufficient data collection. Around a billion people lack official identification, and many countries have outdated or incomplete census data. This scarcity of reliable statistics limits effective policymaking and aid distribution.

To compensate, researchers explore alternative data sources like mobile phone usage and satellite imagery. For example, mobile data helped map lockdown inequalities during COVID-19, and machine-learning algorithms identified poverty levels in Afghanistan based on phone usage patterns. Satellite images have also improved poverty mapping, as seen in Tanzania, where high-resolution data refined economic insights.

However, improving data collection is only part of the solution. Governments often fail to share or utilize existing statistics effectively. Bureaucrats lack incentives to collect accurate data, and political concerns discourage transparency. Many officials even misunderstand basic demographic statistics in their own districts.

To address these issues, the World Development Report calls for a cultural shift in data governance. Strong political leadership and public demand for better statistics could improve data usage. A mix of private and public data could enhance decision-making, as seen with the Gallup World Poll. Ultimately, better data handling is crucial for informed policymaking and economic growth.

2 Translate the following text into French

Comment les frères Barclay ont construit et détruit un empire

La guerre contre le blanchiment d'argent est en train d'être perdue Le système mondial de lutte contre la criminalité financière est extrêmement coûteux et largement inefficace

Par The Economist le 12 avril 2021

Une banque de plus se prépare à faire face à la musique en raison de prétendues défaillances dans ses efforts pour freiner les flux d'argent sale. les flux d'argent sale. Dans les semaines à venir, NatWest, l'un des plus grands prêteurs britanniques, devrait comparaître devant un tribunal de Londres pour répondre aux accusations selon lesquelles elle n'a pas correctement d'or qui a déposé 365 millions de livres sterling (502 millions de dollars) auprès de la banque, dont 264 millions de livres sterling en espèces. NatWest (qui a déclaré coopérer avec les enquêteurs) est le dernier prêteur en date à être accusé d'avoir failli dans la lutte contre l'argent sale. L'année dernière, les banques du monde entier se sont vu infliger des amendes d'un montant de 10,4 milliards de dollars. 10,4 milliards de dollars d'amendes pour des infractions liées au blanchiment d'argent, soit une augmentation de plus de 80 % par rapport à 2019, selon Fenargo, une société de logiciels de conformité. En janvier, Capital One, une banque américaine, a été condamnée à une amende de 390 millions de dollars pour avoir omis de signaler des milliers de transactions douteuses. La Danske Bank toujours en train de gérer les retombées d'un scandale qui a éclaté en 2018. Plus de

200 milliards de dollars d'argent potentiellement sale ont transité par la succursale estonienne du prêteur danois, tandis que les dirigeants ont manqué ou ignoré une multitude de signaux d'alarme. ou ignoré une multitude de signaux d'alarme. Ces affaires montrent que les banques restent le talon d'Achille dans la guerre mondiale contre le blanchiment d'argent, malgré les nombreuses réglementations visant à les transformer en soldats de première ligne dans ce conflit. Cependant, un examen plus approfondi suggère que le système mondial de lutte contre le blanchiment d'argent (AML) présente de graves lacunes structurelles, en grande partie parce que les gouvernements ont confié au secteur privé une grande partie du contrôle qu'ils devraient exercer. au secteur privé une grande partie du travail de police qu'ils auraient dû effectuer eux-mêmes.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Exercice 1. Valeurs prises par une fonction

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{C} := \left\{ f \in E; \forall t \in [0, 1] f(t) \geq 0 \text{ et } f \text{ est non nulle} \right\}$$

$$\text{et } \mathcal{C}' := \left\{ f \in E; \forall t \in [0, 1] f(t) \geq 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}.$$

On considère, pour tout élément g de E , l'application Φ_g suivante :

$$\Phi_g: \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \frac{\int_0^1 f(t)g(t) dt}{\int_0^1 f(t) dt}. \end{array}$$

L'objet de l'exercice est de déterminer les valeurs prises par l'application Φ_g .

1. Soit $g \in E$.

(a) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathcal{C}) = \Phi_g(\mathcal{C}')$.

(b) Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{C}'$ avec $a_1 = \Phi_g(f_1)$ et $a_2 = \Phi_g(f_2)$.

On suppose $a_1 \leq a_2$. Prouver l'inclusion $[a_1, a_2] \subset \Phi_g(\mathcal{C})$.

2. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $g(t) = t$.

(a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathcal{C}) \subset [0, 1]$. Les réels 0 et 1 sont-ils éléments de Φ_g ?

(b) Montrer que $\sup \Phi_g(\mathcal{C}) = 1$.

On pourra, pour tout entier naturel n , calculer $\Phi_g(f_n)$ où $f_n: t \mapsto t^n$.

(c) i. Calculer, pour tout entier naturel n , $\int_0^1 t(1-t)^n dt$.

ii. En déduire que $\inf \Phi_g(\mathcal{C}) = 0$.

(d) Conclure que $\Phi_g(\mathcal{C}) =]0, 1[$.

3. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $g(t) = e^t$.

(a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathcal{C}) \subset]1, e[$.

(b) On considère la fonction

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{e^{\alpha+1} - 1}{e^\alpha - 1}. \end{array}$$

i. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 0.

ii. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} h(\alpha)$.

(c) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathcal{C}) =]1, e[$.

4. Dans cette question on traite le cas général où l'application g est élément de E et supposée non constante.

- (a) Justifier l'existence d'un couple (a, b) de réels distincts de $[0, 1]$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, $g(a) \leq g(t) \leq g(b)$.
On suppose désormais que a et b sont dans $]0, 1[$ et on note N un entier naturel tel que $0 < b - \frac{2}{N} < b + \frac{2}{N} < 1$.

On considère, pour tout entier $n \geq N$, la fonction f_n qui vaut

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq b - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \text{ ou } b + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } b - \frac{1}{n} \leq t \leq b + \frac{1}{n} \end{cases}$$

et qui est affine sur les segments $\left[b - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, b - \frac{1}{n}\right]$ et $\left[b + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$.

- (b) Représenter le graphe de la fonction f_n .
(c) Prouver, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\int_0^1 f_n(t) dt \sim \frac{2}{n}$.
(d) Prouver l'existence d'un réel $K > 0$ (ne dépendant que de g) tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$\int_0^{b-\frac{1}{n}} f_n(t) g(t) dt \leq \frac{K}{n^2} \text{ et } \int_{b+\frac{1}{n}}^1 f_n(t) g(t) dt \leq \frac{K}{n^2}.$$

- (e) Soit G une fonction réelle définie au voisinage de b et dérivable en b .

Que vaut $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(b+h) - G(b-h)}{h}$?

- (f) Prouver l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \int_{b-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} g(t) dt = g(b)$.

- (g) En déduire que $\sup \Phi_g(\mathcal{C}) = g(b)$.

On montrerait de même, et on l'admet, que $\inf \Phi_g(\mathcal{C}) = g(a)$.

5. Soit $g \in E$. Que vaut $\Phi_g(\mathcal{C})$?

On cherchera à quelle condition $\max_{t \in [0,1]} g(t)$ est élément de $\Phi_g(\mathcal{C})$.

Exercice 2. Une suite binomiale

Soit n un entier naturel non nul. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n et E^* son dual c'est-à-dire le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur E . On note, pour tout entier naturel k , $P^{(k)}$ le polynôme dérivé k -ième d'un polynôme P (avec $P^{(0)} = P$).

On note $P_0 = 1$ et, pour tout entier naturel k non nul, $P_k = X(X-k)^{k-1}$ (on a donc $P_1 = X$).

- Montrer que la famille $\mathcal{B} := (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
- On note, pour tout entier r de $\llbracket 0, n \rrbracket$, φ_r l'application qui, à chaque polynôme P de E , associe $\varphi_r(P) = \frac{1}{r!} P^{(r)}(r)$ (on a donc $\varphi_0(P) = P(0)$).

(a) Soit $(k, r) \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $P_k^{(r)}$.

On distinguera les cas $k > r$, $k < r$ et $k = r$.

(b) Calculer, pour tout couple (k, r) d'entiers distincts de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $\varphi_r(P_k)$.

(c) Calculer, pour tout entier k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $\varphi_k(P_k)$.

(d) Soit $P \in E$. Établir l'égalité : $P = \sum_{k=0}^n \varphi_k(P) P_k$.

(e) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

3. Établir, pour tout couple (x, y) de nombres réels, l'égalité :

$$(x+y)^n = y^n + x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (x-k)^{k-1} (y+k)^{n-k}.$$

On pourra considérer le polynôme $(X+y)^n$.

4. Établir, pour tout couple (x, y) de réels, l'égalité :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(y).$$

Exercice 3. Étude d'une variable aléatoire

On note, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $a(n, p)$ le nombre de p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ telles que $\sum_{i=1}^p x_i = n$. On a donc $a(n, 1) = 1$.

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n , la valeur de $a(n, 2)$.

(b) Prouver, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{n}{k}$.

2. Établir, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n, p+1) = \sum_{k=0}^n a(n-k, p)$.

3. Établir, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n, p) = \binom{n+p-1}{p-1}$.

4. En déduire que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, le nombre de p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ telles que $\sum_{i=1}^p x_i = n$ vaut $\binom{n-1}{p-1}$.

On munit, pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble Ω des parties à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ de la tribu pleine et de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

On appelle **bloc** d'une partie A élément de Ω , tout sous-ensemble de A de la forme $\llbracket a, b \rrbracket$ où

$$1 \leq a \leq b \leq 2n \text{ avec } (a=1 \text{ ou } a-1 \notin A) \text{ et } (b=2n \text{ ou } b+1 \notin A).$$

Par exemple, dans le cas où $n=3$, la partie (de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$) $\{1, 2, 5\}$ a deux blocs ($\llbracket 1, 2 \rrbracket$ et $\{5\}$) alors que, dans le cas où $n=4$ la partie (de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$) $\{2, 4, 6, 7\}$ a trois blocs ($\{2\}$, $\{4\}$ et $\llbracket 6, 7 \rrbracket$).

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie A à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, associe le nombre de blocs de A . La variable X_1 est donc constante égale à 1.

5. (a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

(b) Déterminer la loi de X_3 et son espérance.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que la donnée d'une partie A à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ avec k blocs équivaut à la donnée d'une liste $(j_0, i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}, i_k, j_k)$ où $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ sont des entiers naturels non nuls et j_0 et j_k des entiers naturels vérifiant les conditions

$$\sum_{r=1}^k i_r = n \quad \text{et} \quad \sum_{r=0}^k j_r = n.$$

(c) En déduire, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1} \binom{n+1}{k}}{\binom{2n}{n}}$.

(d) i. Calculer l'espérance de la variable X_n .

ii. Calculer la variance de la variable X_n .

7. Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce équilibrée et on note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n})$ la suite de résultats obtenus (avec $\varepsilon_i = 1$ (resp. 0) si le i -ème lancer a donné pile (resp. face)). Quelle est la probabilité d'obtenir une telle suite comportant n fois le 1 avec exactement k blocs de 1?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

On rappelle que la **fonction Gamma** d'Euler est définie par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie la formule récursive $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valable pour tout réel strictement positif x .

Cette fonction intervient à maintes reprises dans la suite.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I Un lien avec loi de Poisson

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre n .

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([X_n > k])$ tend vers 0 quand l'entier k tend vers l'infini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Justifier, pour tout entier naturel k , l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_n > k]) = \mathbf{P}([X_n > k-1]) - \frac{n^k}{k!} e^{-n}.$$

- b) En utilisant le résultat précédent et une intégration par parties, établir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X_n > k]) = \frac{1}{k!} \int_0^n t^k e^{-t} dt \quad (2)$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- a) Préciser la limite de $\mathbf{P}([X_n > k])$ quand n tend vers l'infini.

- b) En utilisant (2), justifier que $\mathbf{P}([X_n \leq k])$ est équivalent à $\frac{n^k}{k!} e^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^n t^{2n} e^{-t} dt$.

- a) Justifier l'encadrement : $\frac{n^{2n+1}}{2n+1} e^{-n} \leq I_n \leq \frac{n^{2n+1}}{2n+1}.$

- b) En déduire la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

- c) Démontrer que I_n est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers l'infini (on pourra utiliser la propriété (2)).

Partie II La fonction Γ comme transformée intégrale

On note S l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, telles que, pour tout couple (n, p) de nombres entiers positifs ou nuls, la fonction $t \mapsto t^p f^{(n)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour quelles valeurs réelles de a la fonction $t \mapsto e^{at}$ est-elle un élément de S ?

6. Soit k un nombre entier strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad f_k(t) = \exp(-t^k).$$

a) Montrer que, pour tout entier positif n , il existe un polynôme $P_{k,n}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que la dérivée n -ième de f_k vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad f_k^{(n)}(t) = P_{k,n}(t) f_k(t).$$

b) En déduire que f_k est un élément de S .

7. Montrer que, pour tout élément f de S et tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1} f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $f \in S$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $G(f)$ par :

$$\forall x > 0, \quad G(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t) dt \quad (3)$$

8. a) Exprimer, pour tout entier strictement positif k , la fonction $G(f_k)$ à l'aide de la fonction Gamma.

b) Donner un équivalent de la fonction Γ en 0 et en déduire que, pour tout $x > 0$, $G(f_k)(x)$ tend vers $\frac{1}{x}$ lorsque k tend vers l'infini.

9. Montrer que, pour tout élément f de S , la fonction $G(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

10. Dans cette question, on suppose que f est une fonction à valeurs strictement positives qui appartient à S .

a) Montrer que $(G(f))(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $(G(f))(x)$ est équivalent à $f(0)/x$ quand x tend vers 0.

c) Montrer que la fonction $G(f)$ admet un minimum global, atteint en un point unique.

Partie III Application au prolongement de la fonction ζ de Riemann

Pour tout élément f de l'espace S défini dans la deuxième partie du problème, on associe la fonction $Z(f)$ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad Z(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t) dt \quad (4)$$

11. Soit f un élément de S .

a) Montrer que la dérivée f' de f appartient à S et vérifie :

$$\forall x > 0, \quad G(f')(x+1) = -x G(f)(x).$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x > 0, \quad Z(f^{(n)})(x+n) = (-1)^n Z(f)(x).$$

c) Montrer qu'on peut définir, de manière cohérente, un prolongement $\overline{Z(f)}$ de $Z(f)$ à $\mathbb{R}$, en posant, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n tel que $n > -x$:

$$\overline{Z(f)}(x) = (-1)^n Z(f^{(n)})(x+n).$$

d) Montrer que $\overline{Z(f)}$, ainsi défini, est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{Z(f)}(-n) = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

12. Dans cette question, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

a) Justifier la validité des deux développements en série suivants :

$$(i) \quad \forall t > 0, \quad f(t) = t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

$$(ii) \quad \forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}}.$$

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour tout nombre entier strictement positif k , montrer que la série de terme général $n^k e^{-n}$ est convergente et que sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k e^{-n}$ majore la valeur absolue de la dérivée k -ième de la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$ sur l'intervalle fermé $[1, +\infty[$.

d) En déduire que f est un élément de S .

13. On rappelle que la **fonction Zêta** de Riemann est définie par :

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad (5)$$

a) Démontrer que, pour l'élément f de S défini dans la question précédente, on a :

$$\forall x > 0, \quad Z(f)(x) = x \zeta(x+1).$$

b) La propriété précédente permet de prolonger la fonction ζ à la droite réelle privée de 1 en posant :

$$\forall x \neq 1, \quad \bar{\zeta}(x) = \frac{1}{x-1} \overline{Z(f)}(x-1).$$

En utilisant un développement limité de f , calculer ses valeurs en $\overline{Z(f)}(0)$ et $\overline{Z(f)}(-1)$.

Partie IV Un autre prolongement

Dans cette partie, P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, non nuls et **premiers entre eux**, et on note $E(P, Q)$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$P y'' + Q y' + (Q - P) y = 0 \quad (6)$$

Autrement dit, $E(P, Q)$ est l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) f''(x) + Q(x) f'(x) + (Q(x) - P(x)) f(x) = 0.$$

14. a) Montrer que $E(P, Q)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel qui contient la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Montrer que, si $E(P, Q)$ contient une fonction de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq -1$, les polynômes P et Q sont nécessairement constants.

c) Trouver $E(P, Q)$ lorsque P et Q sont constants (non nuls).

15. On suppose, dans cette question, que le polynôme P possède une unique racine réelle a et on note Φ l'application linéaire de $E(P, Q)$ dans $\mathbb{R}^4$ qui associe à tout élément f de $E(P, Q)$ le vecteur :

$$\Phi(f) = (f(a-1), f'(a-1), f(a+1), f'(a+1)).$$

a) En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer que l'application Φ est injective.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément f de $E(P, Q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(a-1) = f'(a-1) = 0 \\ f(a+1) = -f'(a+1) = e^{-(a+1)} \end{cases}.$$

c) Dédurre des résultats précédents que la dimension de l'espace vectoriel $E(P, Q)$ est au plus égale à 3.

d) Montrer que, si $P(X) = X^3$ et $Q(X) = -1$, la dimension de l'espace vectoriel $E(P, Q)$ est égale à 3.

16. a) Montrer que la fonction $\Delta : x \mapsto \frac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$, définie sur $]0, +\infty[$, vérifie la formule réursive :

$$\forall x > 0, \quad \Delta(x+2) = \frac{\Delta(x)}{2(x+1)}.$$

b) En utilisant la fonction $f_2 : t \mapsto \exp(-t^2)$ définie dans la deuxième partie, montrer que la fonction Δ admet un prolongement $\bar{\Delta}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \bar{\Delta}(x) = 2(x+1)\bar{\Delta}(x+2).$$

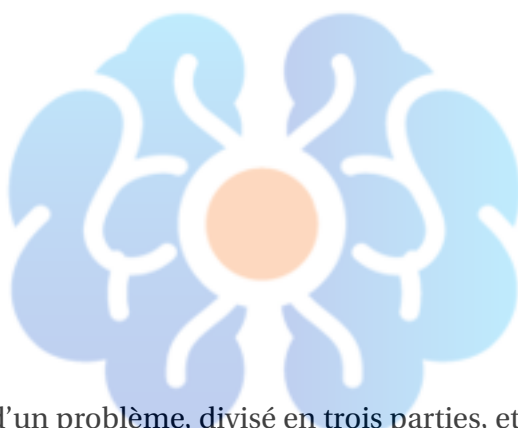
c) Comment utiliser une équation différentielle de la forme (6) pour trouver une formule réursive satisfaite à la fois par les fonctions constantes et par la fonction $\bar{\Delta}$?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet est composé d'un problème, divisé en trois parties, et d'un exercice qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Quelques rappels

- Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble quelconque appelé l'univers, $\mathcal{A}$ est une tribu de partie de Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des sous-ensembles de Ω appelés événements.
- Dans le cas où l'univers Ω est de cardinal fini, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de Ω . Il est à noter que l'ensemble vide $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors entièrement caractérisée par l'ensemble des valeurs $\{\mathbb{P}(\{\omega\}) \mid \omega \in \Omega\}$ et on a

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$

- Une variable aléatoire discrète X est une fonction de Ω dans un ensemble fini ou dénombrable E et telle que pour tout $x \in E$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$. Son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).$$

- **Inégalité de Markov** – Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^k)}{\varepsilon^k}.$$

Problème – Estimation d'une moyenne par plan de sondage

Dans ce problème, on note $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ une population de $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ individus. Par exemple, U peut être l'ensemble des $N = 16,7$ millions retraités en France (pour l'année 2021). A chaque individu u_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, est associée une valeur numérique y_i (par exemple le revenu annuel perçut en 2021 par le retraité u_i). La moyenne des valeurs $\{y_i \mid i = 1, \dots, N\}$ est donnée par

$$\bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Cette valeur n'est la plupart du temps pas accessible en pratique. Dans l'exemple du revenu annuel des retraités, il est difficile voire impossible de croiser les différentes sources de revenu d'un individu donné et donc de connaître l'ensemble des valeurs $\{y_i \mid i = 1, \dots, N\}$. On doit donc se contenter d'estimer la moyenne en effectuant un sondage auprès de la population. Plus précisément, on choisit aléatoirement un échantillon (ou base de sondage) $S \subset U$ et on estime le revenu moyen $\bar{y}$ sur la base des valeurs y_i fournies par les individus appartenant à la base de sondage S .

De manière plus formelle, l'échantillon S est choisi selon un plan de sondage qui est un espace probabilisé $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où l'univers $\mathcal{P}(U)$ est l'ensemble des parties de U (c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles de U), $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(U)$ et enfin $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A})$. La probabilité de choisir un échantillon $S \subset U$ donné est donc $\mathbb{P}(\{S\})$.

Important – Il faut bien comprendre que dans un sondage, les valeurs $y_i, i = 1, \dots, N$ ne sont pas aléatoires. L'aléa provient uniquement de choix de l'échantillon par le plan de sondage.

Partie I : Quelques plans de sondage

Exemple 1 On suppose pour commencer que $U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

- I.1) Donner les 8 éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(U)$.
- I.2) Donner un élément de $\mathcal{A}$ (celui que vous voulez)
- I.3) Quelle est la valeur de la somme

$$\sum_{S \in \mathcal{P}(U)} \mathbb{P}(\{S\}).$$

On suppose que pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$, $\mathbb{P}(\{S\}) = \text{card}(S)/c_3$ où c_3 est une constante strictement positive.

- I.4) Donner la valeur de c_3 .

On se place à présent dans le cas plus général où $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ avec $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- I.5) Quel est, en fonction de N , le cardinal de $\mathcal{P}(U)$?

On suppose que pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$, $\mathbb{P}(\{S\}) = \text{card}(S)/c_N$.

- I.6) Donner, en fonction de N , la valeur de c_N où c_N est une constante strictement positive (vous donnerez l'expression la plus simple possible de cette constante).

Exemple 2 – Plan de sondage aléatoire simple (plan SAS) Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. Le plan SAS est l'espace probabilisé $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P}_n^{(SAS)})$ où la probabilité $\mathbb{P}_n^{(SAS)}$ est définie pour tout échantillon $S \subset U$ par

$$\mathbb{P}_n^{(SAS)}(\{S\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{card}(S) \neq n, \\ p_n & \text{si } \text{card}(S) = n. \end{cases}$$

- I.7) Donner la valeur de p_1 (pour le cas $n = 1$) ainsi que la valeur de p_N (pour le cas $n = N$) qu'il faut prendre pour que $\mathbb{P}_n^{(SAS)}$ soit bien une mesure de probabilité.
- I.8) Donner, en fonction de N et n , la valeur de p_n .

Une méthode pour choisir aléatoirement un échantillon $S \subset U$ selon le plan SAS est décrite dans l'algorithme suivant :

Etape 1 – On choisit au hasard un individu dans la population U , chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_1^ .*

Etape 2 – On choisit au hasard un individu dans la population $U \setminus \{u_1^\}$, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_2^* .*

...

Etape n – On choisit au hasard un individu dans la population $U \setminus \{u_1^, \dots, u_{n-1}^*\}$, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_n^* .*

A l'issue de l'étape n , on obtient donc l'échantillon $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ de taille n .

I.9) Calculer la probabilité de choisir l'individu u_1 lors de la première étape.

I.10) Calculer la probabilité de choisir l'individu u_1 lors de la première étape et l'individu u_2 lors de la deuxième étape.

I.11) Calculer la probabilité que les individus u_1 et u_2 soient choisis à l'issue de la deuxième étape.

I.12) En déduire que la probabilité que l'échantillon $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ soit choisi par cet algorithme est égale à p_n .

Exemple 3 – Plan de sondage de Bernoulli L'algorithme suivant permet de choisir aléatoirement un échantillon selon le plan de sondage de Bernoulli.

Etape 1 – On note $x_1, \dots, x_N$ les réalisations de N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Etape 2 – On construit l'échantillon $S \subset U$ en prenant les individus u_i pour lesquels $x_i = 1$. La taille de l'échantillon ainsi obtenu est évidemment aléatoire.

I.13) Quelle est la probabilité d'obtenir l'ensemble vide à l'issue de cet algorithme?

I.14) Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, donner l'expression de la probabilité d'obtenir un échantillon de taille k en fonction de N , p et k (justifier votre réponse).

I.15) Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, quelle est la probabilité d'obtenir l'échantillon $\{u_1, \dots, u_k\}$?

Le plan de sondage de Bernoulli est donc l'espace probabilisé $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P}_p^{(Ber)})$ où la probabilité $\mathbb{P}_p^{(Ber)}$ est définie pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$ par

$$\mathbb{P}_p^{(Ber)}(\{S\}) = p^{\text{card}(S)}(1-p)^{N-\text{card}(S)}.$$

On introduit la variable aléatoire Z_p définie sur l'espace probabilisé $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P}_p^{(Ber)})$ et telle que pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$, $Z_p(S) = \text{card}(S)$.

I.16) Calculer l'espérance de Z_p (vous donnerez le résultat sous sa forme la plus simple possible).

Exemple 4 – Plan de sondage systématique Pour ce plan de sondage, l'échantillon est choisi aléatoirement de la façon suivante : pour un pas d'échantillonnage $a \in \{1, \dots, N\}$ fixé par l'utilisateur, on choisit aléatoirement avec équiprobabilité un entier r dans l'ensemble $\{1, \dots, a\}$. On obtient alors l'échantillon

$$\{u_r, u_{r+a}, \dots, u_{r+(n-1)a}\} = \{u_{r+ja} \mid j \in \{0, \dots, n-1\}\},$$

où $n = \lfloor (N - r) / a \rfloor + 1$, la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ étant la partie entière inférieure.

Afin de se familiariser avec ce plan de sondage, on suppose dans un premier temps que $U = \{u_1, \dots, u_{10}\}$ et que le pas d'échantillonnage est $a = 3$.

I.17) Donner l'ensemble des échantillons que l'on peut obtenir avec le plan de sondage systématique.

I.18) Quelle est la probabilité d'obtenir l'échantillon $\{u_1, u_5, u_8\}$? Celle d'obtenir l'échantillon $\{u_2, u_5, u_8\}$?

On se place à présent dans le cadre général d'une population U de taille N et d'un plan systématique de pas d'échantillonnage $a \in \{1, \dots, N\}$.

I.19) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_a^{(Sys)}(\{S\})$ d'obtenir l'échantillon $S \subset U$.

Partie II – Probabilité d'inclusion

On s'intéresse ici au calcul de la probabilité d'inclusion d'un ou plusieurs individus pour un plan de sondage $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour un individu $u_k \in U$ donné, sa probabilité d'inclusion est la probabilité $\pi^{(k)}$ qu'un échantillon S tiré selon le plan de sondage contienne u_k . Autrement dit,

$$\pi^{(k)} := \mathbb{P}(\{S \in \mathcal{P}(U) \mid u_k \in S\}).$$

On note $A_k \in \mathcal{A}$ l'événement $\{S \in \mathcal{P}(U) \mid u_k \in S\}$. On rappelle que $\pi^{(k)} = \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_k})$ où $\mathbb{I}_{A_k}$ est la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telle que pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$,

$$\mathbb{I}_{A_k}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in A_k, \\ 0 & \text{si } S \notin A_k. \end{cases}$$

Pour tout couple $(k, \ell) \in \{1, \dots, N\}^2$ avec $k \neq \ell$, la probabilité d'inclusion des individus u_k et u_ℓ est donnée par

$$\pi^{(k, \ell)} := \mathbb{P}(\{S \in \mathcal{P}(U) \mid \{u_k, u_\ell\} \subset S\}) = \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_k \cap A_\ell}).$$

II.1) En utilisant la formule donnant l'espérance d'une variable aléatoire (voir les rappels en début de sujet) donner, pour tout $(k, \ell) \in \{1, \dots, N\}^2$ avec $k \neq \ell$, les expressions des probabilités $\pi^{(k)}$ et $\pi^{(k, \ell)}$.

II.2) Pour le plan de sondage SAS (exemple 2), donner les expressions de $\pi^{(k)}$ et $\pi^{(k, \ell)}$ en fonction de n et N .

II.3) Pour le plan de sondage de Bernoulli (exemple 3), montrer en utilisant la réponse à la question II.1) que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$\pi^{(k)} = \sum_{n=1}^N p^n (1-p)^{N-n} \sum_{S \in B_n} \mathbb{I}_{A_k}(S),$$

où $B_n = \{S \in \mathcal{P}(U) \mid \text{card}(S) = n\} \in \mathcal{A}$.

II.4) Donner, en fonction de n et N , l'expression de la somme

$$\sum_{S \in B_n} \mathbb{I}_{A_k}(S),$$

et en déduire l'expression de $\pi^{(k)}$ pour le plan de sondage de Bernoulli.

II.5) En vous inspirant des questions II.3) et II.4), donner l'expression de $\pi^{(k,\ell)}$ pour le plan de sondage de Bernoulli.

II.6) Pour le plan de sondage systématique (exemple 4), donner l'expression de $\pi^{(k)}$ en fonction du pas d'échantillonnage a .

Partie III – Estimation de la moyenne

L'estimation de la moyenne $\bar{y}$ définie dans l'introduction du problème passe par l'estimation de la somme

$$t_N = \sum_{i=1}^N y_i.$$

Pour estimer t_N , on dispose uniquement des valeurs y_i pour les individus u_i qui appartiennent à l'échantillon choisi selon le plan de sondage $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On introduit dans un premier temps la variable aléatoire $\tilde{t}_N$ définie sur l'espace probabilisé $(\mathcal{P}(U), \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $S \in \mathcal{P}(U)$,

$$\tilde{t}_N(S) = \sum_{u_k \in S} y_k = \sum_{k=1}^N y_k \mathbb{I}_{A_k}(S),$$

où $A_k = \{S \in \mathcal{P}(U) \mid u_k \in S\}$. On suppose dans toute la suite que $\pi^{(k)} = \mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$.

III.1) Montrer que

$$\mathbb{E}(\tilde{t}_N) = \sum_{k=1}^N \pi^{(k)} y_k$$

III.2) En déduire un estimateur sans biais de la moyenne $\bar{y}$.

III.3) Donner l'expression de la variance de l'estimateur sans biais trouvé à la question précédente.

Exercice – Inégalité de Hoeffding

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose pour cet exercice que

- Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$.

- Il existe $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ tels que

$$a \leq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) < \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq b.$$

En posant $S_n = X_1 + \dots + X_n$, l'objectif de cet exercice est d'obtenir l'inégalité de Hoeffding donnée pour tout $\varepsilon > 0$ par

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

- a) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$,

$$\exp(tx) \leq \frac{b-x}{b-a} \exp(ta) + \frac{x-a}{b-a} \exp(tb)$$

- b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\exp(tX_i)) \leq \exp(g((b-a)t)),$$

où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$g(y) = \frac{a}{b-a}y + \log\left(\frac{b - a \exp(y)}{b-a}\right)$$

- c) En utilisant un développement limité, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$g(y) \leq \frac{y^2}{2} \sup_{y \in \mathbb{R}} g''(y),$$

où g'' est la dérivée seconde de g .

On admettra pour la suite que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} g''(y) \leq \frac{1}{4}.$$

- d) Déduire des questions précédentes que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{nt^2(b-a)^2}{8}\right).$$

- e) En utilisant l'inégalité de Markov (voir les rappels au début du sujet), montrer que pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(tS_n))}{\exp(t\varepsilon)}.$$

- f) En prenant $t = d\varepsilon/n$ avec $d > 0$, trouver la constante $M_n(a, b, d, \varepsilon)$ telle que

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq M_n(a, b, d, \varepsilon).$$

g) Quelle valeur de $d > 0$ (qui dépendra de a et b) faut-il prendre pour obtenir l'inégalité

$$\mathbb{P}([S_n \geq \varepsilon]) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

h) Expliquer pourquoi on a également l'inégalité

$$\mathbb{P}([S_n \leq -\varepsilon]) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

i) Dédurre l'inégalité de Hoeffding des questions précédentes.

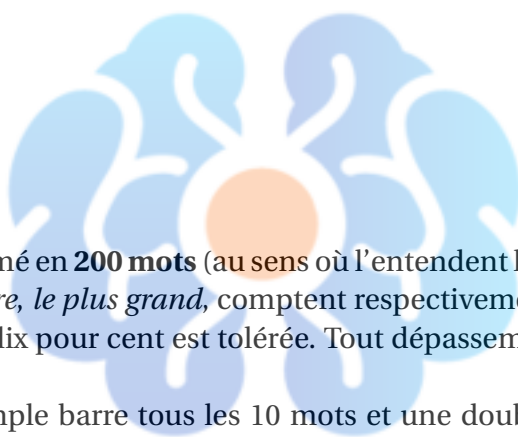


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrierez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

« Ce que tu soulèves (les enfants ne doivent pas être reconnaissants de leur existence envers leurs parents) n'est pas le point central chez Swift. D'ailleurs, nul ne prétend cela de façon aussi sommaire. L'essentiel est dans la phrase finale : « Les parents sont, parmi tous les êtres humains, les derniers à qui l'on devrait confier l'éducation des enfants ». Il est vrai que cela, tout comme la démonstration conduisant à cette phrase, est formulé d'une façon bien trop dense, et je vais donc chercher à te l'expliquer plus en détail, mais, je te répète que tout ceci n'est que l'opinion de Swift (qui était d'ailleurs père de famille) ; mon opinion va certes aussi dans ce sens, mais je n'ose pas être si catégorique.

Swift, donc pense : « Toute famille ne représente au départ qu'un lien animal, pour ainsi dire un seul organisme, une seule circulation sanguine ». Elle ne peut donc, ne dépendant que d'elle-même, se transcender, ne peut former un nouvel être humain à partir d'elle-même ; si elle s'y essaie à travers l'éducation familiale, il s'agit d'une sorte d'inceste spirituel.

La famille est donc un organisme, mais extrêmement compliqué et déséquilibré, et comme tout organisme, elle aspire elle aussi continûment à l'équilibre. Dans la mesure où cette aspiration à l'équilibre intervient entre parents et enfants (l'équilibre entre les parents n'a pas sa place ici), elle est nommée éducation. Ce pourquoi on l'appelle ainsi est incompréhensible, car il n'y a pas trace d'une véritable éducation, à savoir d'un déploiement tranquille, désintéressé et affectueux des capacités d'un être en devenir, ou ne serait-ce que d'une tolérance calme pour un épanouissement autonome. Il s'agit davantage d'une tentative au déroulement bien souvent crispé d'équilibrer un organisme animal condamné durant de longues années au plus sévère des déséquilibres, organisme que l'on pourra nommer, par contraste avec l'animal humain individuel, « l'animal-famille ».

La raison de l'absolue impossibilité d'un équilibre instantané et juste (et seul un équilibre juste est un véritable équilibre, lui seul est durable) au sein de cet animal-famille est l'inégalité fondamentale entre ses parties, en particulier la monstrueuse supériorité en puissance du couple parental face aux enfants pendant de nombreuses années. En conséquence de quoi, tant que les enfants sont des enfants, les parents s'octroient le droit exclusif de représenter la famille, non seulement vis-à-vis de l'extérieur, mais aussi dans son organisation morale interne, retirant ainsi pas à pas aux enfants leurs droits de la personnalité, pouvant à partir de là les rendre incapables de jamais faire valoir ces droits en bonne et due forme ; un malheur qui, plus tard, ne frappera pas moins les parents que leurs enfants.

La différence essentielle entre éducation véritable et éducation familiale est que la première est une affaire humaine, la seconde une affaire familiale. Au sein de l'humanité, chaque être humain a sa place, ou *a minima* la possibilité de dépérir à sa façon ; dans la famille circonscrite par les parents, seuls certains êtres très particuliers ont leur place, lorsqu'ils répondent à des exigences bien précises et respectent de surcroît des échéances dictées par les parents. S'ils n'y répondent pas, ils ne sont pas rejetés – ce serait très bien, mais c'est impossible, car il s'agit d'un seul organisme –, mais maudits, ou dévorés, ou les deux. Cette dévoration n'a pas lieu physiquement comme dans le vieux modèle parental de mythologie grecque (Cronos qui engloutit ses fils – le plus honnête des pères), mais peut-être Cronos a-t-il privilégié sa méthode par rapport à celle communément en vigueur par pitié pour ses enfants.

L'égoïsme des parents – sentiment parental par excellence – ne reconnaît pas de limites. Le plus grand amour des parents est en matière d'éducation plus égoïste que le plus petit amour d'un éducateur appointé. Ce n'est pas possible autrement. Car les parents ne sont pas libres vis-à-vis de leurs enfants, comme l'est d'ordinaire un adulte face à un enfant, il s'agit de son propre sang et, lourde complication, du sang de chacun d'eux. Quand le père (et l'équivalent est vrai pour la mère) « éduque », il rencontre chez l'enfant des choses qu'il a déjà détestées en lui-même et n'a pas su surmonter et que, certainement, il espère désormais surmonter, car le faible enfant paraît plus en son pouvoir que lui-même. Et c'est ainsi qu'il plonge à pleines mains et avec une brutalité aveugle dans l'être en devenir, sans attendre son développement, ou alors il reconnaît par exemple avec effroi qu'un trait qui lui est propre et qu'il considère comme un signe distinctif, et qui donc (donc!) ne peut pas manquer dans la famille (la famille!), manque chez l'enfant, et il commence à le lui faire entrer dans le crâne à coups de marteau, ce qu'il réussit, mais qu'il rate en même temps, car ce faisant il démolit l'enfant; ou alors il trouve chez l'enfant des choses qu'il a aimées chez son épouse, mais qu'il déteste chez l'enfant (qu'il ne cesse de confondre avec lui-même, tous les parents font ça), comme on peut aimer beaucoup les yeux bleus azur de sa femme, mais être saisi d'un profond dégoût si l'on se retrouve soudain avec de pareils yeux, ou bien il trouve par exemple chez l'enfant des choses qu'il aime en lui ou auxquelles il aspire ou considère comme essentielles à la famille, et tout le reste lui indiffère alors chez l'enfant, il ne voit chez celui-ci que l'être aimé, il s'accroche à l'être aimé, il se rabaisse et devient son esclave, il le dévore par amour.

Voilà, enfantées par l'égoïsme, les deux méthodes éducatives des parents : tyrannie et esclavage à divers degrés, la tyrannie pouvant se manifester de façon très tendre (« tu dois me croire, je suis ta mère! ») et l'esclavage de façon très fière (« Tu es mon fils, c'est pourquoi je vais faire de toi mon sauveur! »), mais ce sont deux méthodes éducatives, bonnes à écrabouiller l'enfant à coups de talon pour le faire entrer dans le sol dont il est issu. Les parents n'ont pour les enfants qu'un amour animal, insensé, se confondant toujours avec eux, tandis que l'éducateur a pour l'enfant de l'attention, ce qui est sans commune mesure en termes d'éducation, même si elle devait être dépourvue d'amour. Je le répète : en termes d'éducation, quand je qualifie l'amour parental d'animal et d'insensé, ce n'est pas en soi une dépréciation, il n'en reste pas moins un mystère insondable au même titre que l'amour créateur et sensé de l'éducateur, mais en revanche, dans une perspective éducative, cette dépréciation ne saurait être trop forte ».

Franz Kafka, « Comment ne pas éduquer les enfants – Lettres sur la famille et autre monstruosité »

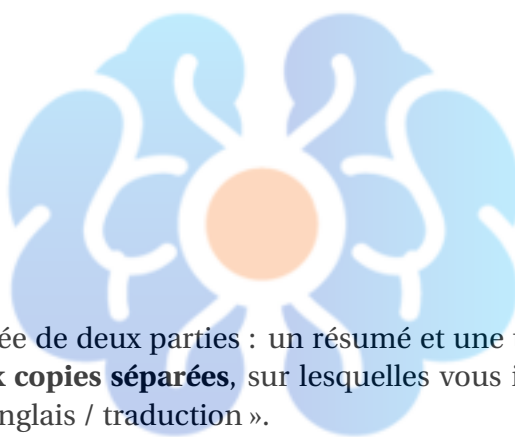
Lettre à sa sœur Elli, datée d'automne 1921.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 220 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Omicron is dealing a big blow to China's economy

For a timely take, analysts are turning to unconventional indicators

The Economist, Apr 4th 2022

Omicron moves fast. That makes it difficult to contain—even for China, which tries to stomp promptly on any outbreak. A cluster of infections in Shanghai, for example, has shattered the city's reputation for deft handling of the pandemic, forcing the government to impose a staggered lockdown, of uncertain duration, for which it seems surprisingly ill prepared.

The variant's speed also means that China's economic prospects are unusually hard to track. A lot can happen in the time between a data point's release and its reference period. The most recent hard numbers on China's economy refer to the two months of January and February. Those (surprisingly good) figures already look dated, even quaint. For much of that period, there was no war in Europe. And new covid-19 cases in mainland China averaged fewer than 200 per day, compared with the 13,267 infections reported on April 4th. Relying on these official economic figures is like using a rear-view mirror to steer through a chicane.

For a more timely take on China's fast-deteriorating economy, some analysts are turning to less conventional indicators. For example, Baidu, a popular search engine and mapping tool, provides a daily mobility index, based on tracking the movement of smartphones. Over the seven days to April 3rd, this index was more than 48% below its level a year ago.

The Baidu index is best suited to tracking movement between cities, says Ting Lu of Nomura, a bank. To gauge the hustle and bustle within cities, he uses other indicators, such as subway trips. Over the week ending April 2nd, the number of metro journeys in eight big Chinese cities was nearly 34% below its level from a year ago. In locked-down Shanghai, where many subway lines are now closed, the number of trips was down by nearly 93%, a worse drop than the city suffered in early 2020.

The two numbers that worry Mr Lu the most track the economy's distribution system, specifically couriers and lorries. In the week ending April 1st, an index of express deliveries by courier companies was nearly 27% below its level at a similar point last year. Over the same period, an index of road freight compiled by Wind, a data provider, shows a fall of 12.8%. The decline looks especially stark because this indicator was increasing by more than 7% at the end of last year.

Unconventional indicators are all the more valuable in China because of doubts about the official data. The strong figures for January and February, for example, are not only old but odd. They suggest that investment in "fixed" assets, like infrastructure, manufacturing facilities and property, grew by 12.2% in nominal terms, compared with a year earlier. But that is hard to square with double-digit declines in the output of steel and cement. The recovery in property investment also looks peculiar alongside the fall in housing sales, starts and land purchases. When local governments in the provinces of Shanxi, Guizhou and Inner Mongolia said that they were double-checking their figures at the behest of the National Bureau of Statistics (NBS) it became clear that the official statistics look odd even to the official statisticians.

China's high-frequency indicators proved their worth in the spring of 2020, during the fog of the early pandemic. Although everyone knew the economy would suffer, forecasters were at first timid in cutting their growth forecasts. No one knew exactly how the economy would

react or what the NBS would be prepared to report. With the accumulation of evidence from high-frequency data, forecasters were eventually brave enough to predict negative growth for the first quarter of 2020. Indeed, GDP shrank by 6.8%, according to even the official figures.

The timeliness of these indicators makes them valuable in periods of flux. But they must still be interpreted with care. “There are many traps in those numbers,” says Mr Lu. Any short period of seven days can be distorted by idiosyncratic events, such as bad weather or holidays. And annual growth rates can be skewed by similar idiosyncrasies a year ago. Moreover, many of these indicators have a history of only a couple of years. Interpreting them is therefore more art than science. What does a dramatic weekly decline in road freight mean for quarterly GDP growth? It is impossible to say with any precision. Mr Lu was heavily trained in econometrics when he was a PhD student at the University of California, Berkeley. “But with only one or two years of data, if I used the kind of techniques I learned at school, people would laugh at me.”

To help avoid some of the traps lurking in these unconventional indicators, Mr Lu and his team watch “a bunch of numbers, instead of just one”. In a recent report he highlighted 20 indicators, ranging from asphalt production to movie-ticket sales. “If seven or eight out of ten indicators are worsening, then we can be confident that GDP growth is getting worse,” he says. Right now, he thinks, the direction is clear. “Something must be going very wrong.”

2 Translate the following text into French

How one oligarch used shell companies and Wall Street ties to invest in the U.S.

The New York Times, March 21, 2022

Using a network of banks, law firms and advisers in multiple countries, Roman Abramovich invested billions in American hedge funds.

In July 2012, a shell company registered in the British Virgin Islands wired \$20 million to an investment vehicle in the Cayman Islands that was controlled by a large American hedge fund firm.

The wire transfer was the culmination of months of work by a small army of handlers and enablers in the United States, Europe and the Caribbean. It was a stealth operation intended, at least in part, to mask the source of the funds: Roman Abramovich.

For two decades, the Russian oligarch has relied on this circuitous investment strategy — deploying a string of shell companies, routing money through a small Austrian bank and tapping the connections of leading Wall Street firms — to quietly place billions of dollars with prominent U.S. hedge funds and private equity firms, according to people with knowledge of the transactions.

The key was that every lawyer, corporate director, hedge fund manager and investment adviser involved in the process could honestly say he or she wasn't working directly for Mr. Abramovich. In some cases, participants weren't even aware of whose money they were helping to manage.

Wealthy foreign investors like Mr. Abramovich have long been able to move money into American funds using such secretive, roundabout setups, taking advantage of a lightly regulated investment industry and Wall Street's willingness to ask few questions about the origins of the money.

Now, as the United States and other countries impose sanctions on those close to President Vladimir V. Putin of Russia, hunting down these fortunes could pose significant challenges.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1. Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. Un premier exemple

On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n .
ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. Un second exemple

Soit q un réel de $]0, 1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

- (a) Indiquer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n .
- (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n -uplets de nombres réels.

(a) Prouver l'égalité : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$

(b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{2k^2}.$

On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$

5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathcal{E}$.

- (a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right).$$

- (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^p h_n \leq 4 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k\right).$$

- (c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\sum_{n=1}^p h_n \leq 2 \sum_{k=1}^p a_k.$

- (d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

On va montrer que C est au moins égal à 2.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

(a) Prouver l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}.$

(b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geq (\alpha+1) \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}.$

(c) Prouver l'égalité : $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$

(d) Conclure que $C \geq 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

(a) Justifier l'inégalité : $K \geq 1$.

On pourra utiliser le résultat de la question 2.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \frac{4}{2^n} & \text{si } \exists p \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad n = p^2 \\ \frac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

ii. Prouver les inégalités : $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 2N$.

(c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \prod_{k=1}^n a_k$.

(d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leq g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

Exercice 2. Premier numéro manquant

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq n < N$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires **indépendantes** toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et toutes de loi uniforme sur l'intervalle entier $\llbracket 1, N \rrbracket$. On note, pour tout entier naturel n non nul, T l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe

$$T(\omega) = \min \{k \in \llbracket 1, N \rrbracket ; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad X_i(\omega) \neq k\}.$$

Si on se représente l'expérience aléatoire consistant à tirer n fois successivement, avec remise, une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , la valeur $T(\omega)$ serait le numéro aléatoire du plus petit numéro qui **n'est pas** apparu dans la liste ω des numéros tirés au cours de la succession de ces n tirages.

Partie A : Deux cas particuliers

Soit N un entier au moins égal à 4 et X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes trois de loi uniforme sur l'intervalle entier $\llbracket 1, N \rrbracket$. On note U et V les applications qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associent

$$U(\omega) = \min \{k \in \llbracket 1, N \rrbracket ; X(\omega) \neq k \text{ et } Y(\omega) \neq k\}.$$

et

$$V(\omega) = \min \{k \in \llbracket 1, N \rrbracket ; X(\omega) \neq k, Y(\omega) \neq k \text{ et } Z(\omega) \neq k\}.$$

1. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire U ?

- (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire U .
- (c) Calculer l'espérance de U .
2. (a) Calculer $\mathbf{P}(V = 1)$ et $\mathbf{P}(V = 4)$.
- (b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(V = 3) = \frac{6N - 12}{N^3}$.
- (c) En déduire que l'espérance de V vaut $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^3$.

Partie B : Des égalités

On note Δ l'application qui, à tout polynôme réel $P(X)$, associe le polynôme

$$\Delta(P)(X) = P(X + 1) - P(X).$$

On observera que l'application Δ est linéaire.

On note, pour tout entier naturel k non nul, Δ^k l'application $\underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta}_{k \text{ fois } \Delta}$

et on pose $\Delta^0 = \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$.

1. Soit $(j, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $j \leq n$. Établir l'égalité : $\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P := \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Prouver, pour tout entier naturel m , l'égalité :

$$\Delta^m(P)(X) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} P(X + j).$$

On pourra procéder par récurrence sur l'entier m .

3. (a) Soit $q \in \mathbb{N}$ et $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré q .
Quel est, pour tout entier $r \in \llbracket 0, q \rrbracket$, le degré de $\Delta^r(Q)(X)$?
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q = X^n$. Que vaut $\Delta^n(Q)(X)$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P := \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme réel de degré n .

- (a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$a_n n! = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j).$$

- (b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n = \frac{n!}{N^n}.$$

On utilisera le résultat précédent pour un polynôme P bien choisi.

5. Soit $(n, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout entier $m \geq n+1$, l'égalité :

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n = 0.$$

(b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n+1}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n$.

Partie C : Le cas général

On reprend maintenant les notations du préambule.

Soit $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq n < N$.

1. (a) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T = 1)$.
- (b) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T = n+1)$.
- (c) Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(T = 2) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{N}\right)^i \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i} \quad \text{puis l'égalité} \quad \mathbf{P}(T = 2) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n.$$

(d) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T = 3) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{3}{N}\right)^n$.

2. On admet que si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ alors on dispose de la formule du crible suivante :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}).$$

On pose, pour tout entier $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_p = \bigcap_{i=1}^n [X_i \neq p]$.

- (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que vaut la probabilité de l'intersection de j événements distincts pris parmi $A_1, A_2, \dots, A_n$?
 - (b) On note E^c le complémentaire d'un événement E . Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $[T > k] = \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)^c$.
 - (c) Obtenir, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, une expression de $\mathbf{P}(T > k)$ faisant intervenir un symbole de sommation.
3. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$.
 - (b) Retrouver, à l'aide du résultat précédent, les valeurs trouvées en fin de **partie A** pour les sommes

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j+1}{N}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n.$$

4. Calcul de l'espérance de T

Soit $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq n < N$.

(a) Établir, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité :

$$\mathbf{P}(T > k) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{N+1-j}{N+1}\right)^n.$$

(b) En utilisant le résultat de la question **B-5-b)** (avec $N \leftarrow N+1$) conclure à l'égalité :

$$\mathbf{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n.$$

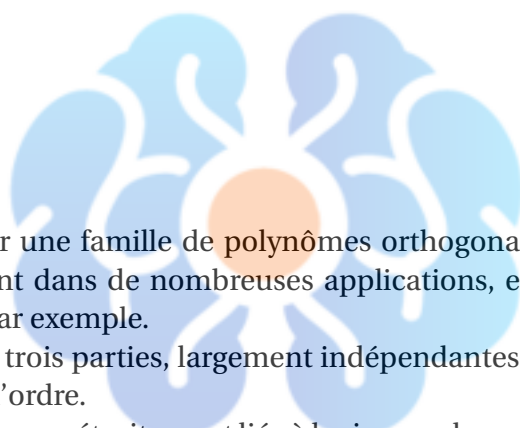


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h



Le problème porte sur une famille de polynômes orthogonaux, appelés polynômes de Hermite, qui interviennent dans de nombreuses applications, en physique, en théorie du signal et en probabilité, par exemple.

L'énoncé est divisé en trois parties, largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

On note $\mathcal{L}_2$ l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge.

On note $\mathcal{R}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on peut confondre avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour en définir les coefficients et le degré (égal à $-\infty$ pour la fonction nulle).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_n$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n .

Partie 1 Étude et développements en séries d'une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = e^{2xy - x^2}.$$

- Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que son seul point critique est l'origine $(0, 0)$. La fonction f admet-elle un extremum local en ce point?

- On note K l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

a) Justifier que f admet un maximum et un minimum sur K .

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Justifier qu'il existe un réel t tel que, pour cette valeur de t , $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ et :

$$2xy - x^2 = 2\sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

c) En déduire le maximum et le minimum de f sur K , puis les points de K où ils sont atteints.

- Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en donner le développement en série entière.
- On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = e^{-x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de w .

En particulier : $H_0(x) = 1$.

a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n et trouver son coefficient dominant.

5. a) Compléter l'avant-dernière ligne du code Python suivant (en substituant une expression convenable aux trois points d'interrogation) pour que la fonction "coefH" calcule les coefficients du polynôme P_n pour la valeur de n entrée en paramètre.

```
def coefH(n):
    coeff=numpy.zeros((n+1,n+1))
    coeff[0,0]=1
    coeff[1,1]=2
    for k in range(1,n):
        coeff[k+1,0]=-coeff[k,1]
        coeff[k+1,k+1]=2**k
        for i in range(1,k+1):
            coeff[k+1,i]=2*coeff[k,i-1]- ??? # ligne à modifier
    return coeff[n,:]

coefH(4) # exemple: les coefficients de H4, égal à 16 X^4 - 48 X^2 + 12
Out: array([ 12., -0., -48.,  0., 16.] )
```

b) Qu'obtiendrait-on pour "coefH(5)" après avoir modifié le code de la fonction "coefH" en insérant avant sa dernière ligne ("return coeff[n, :]") l'instruction suivante?

```
print(coeff)
```

6. a) Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, établir l'égalité : $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(y)}{n!} x^n$.

Partie 2 Un produit scalaire sur $\mathcal{L}_2$

1. a) Justifier que, pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}_2^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ converge.

On note $(.|.)$ l'application de $\mathcal{L}_2^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}_2^2, \quad (u|v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx.$$

b) Justifier que $\mathcal{L}_2$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que l'application $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_2$.

On note $\|.\|$ la norme sur $\mathcal{L}_2$ associée au produit scalaire $(.|.)$, définie par :

$$\forall u \in \mathcal{L}_2, \quad \|u\| = \sqrt{(u|u)}.$$

2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{L}_2$.

a) Justifier l'égalité :

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I} . \quad (1)$$

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathcal{R}_n$ et $\mathcal{I}_n = \mathcal{I} \cap \mathcal{R}_n$.

Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dimension de $\mathcal{P}_n$ et la dimension de $\mathcal{I}_n$ (on distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair).

c) Pour tout $u \in \mathcal{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\min \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x) - P(x))^2 e^{-x^2} dx; P \in \mathcal{P}_n \right\}$.

3. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}_2$ qui sont nulles hors d'un segment inclus dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$:

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{L}_2; \exists \alpha > 0, \exists A > \alpha, \forall x \notin [\alpha, A], v(x) = 0\} .$$

Soit u une fonction bornée appartenant à $\mathcal{L}_2$ et ε un nombre réel strictement positif.

a) Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on pose :

$$v_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ (nx - 1) u\left(\frac{2}{n}\right) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ u(x) & \text{si } \frac{2}{n} < x < n - \frac{1}{n} \\ n(n - x) u\left(n - \frac{1}{n}\right) & \text{si } n - \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} .$$

Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (u(x) - v_n(x))^2 e^{-x^2} dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

b) Justifier l'existence d'un élément v de $\mathcal{K}$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} (u(x) - v(x))^2 e^{-x^2} dx \leq \varepsilon .$$

c) Justifier que si la fonction u est paire, alors il existe un élément v de $\mathcal{K}$ tel que :

$$\|u - v_p\|^2 \leq 2\varepsilon \quad \text{où} \quad v_p(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \geq 0 \\ v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

On démontre de même, et on pourra l'admettre, que si la fonction u est impaire, alors il existe un élément v de $\mathcal{K}$ tel que :

$$\|u - v_i\|^2 \leq 2\varepsilon \quad \text{où} \quad v_i(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Partie 3 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{R}$

On note g et h les endomorphismes de $\mathcal{R}$ définis par :

$$\forall P \in \mathcal{R}, \quad \begin{cases} g(P) = -P'' + 2XP' + P \\ h(P) = 2XP - P' \end{cases}.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in \mathcal{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $(h(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. a) Établir l'égalité : $g \circ h - h \circ g = 2h$.
b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathcal{R}$, si $g(P) = \lambda P$, alors

$$g(h(P)) = (\lambda + 2)h(P) \quad (*)$$

2. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathcal{R}^2$:

$$(P'|Q') = (g(P)|Q) - (P|Q).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer : $\forall P \in \mathcal{R}_n, \quad g(P) \in \mathcal{R}_n$.

b) On note g_n l'endomorphisme de $\mathcal{R}_n$ défini par :

$$\forall P \in \mathcal{R}_n, \quad g_n(P) = g(P).$$

Montrer que g_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{R}_n$, pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

4. Les polynômes H_n utilisés dans la suite sont ceux de la partie 1.

a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h(H_k)$, et en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(H_k) = (2k + 1)H_k.$$

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.

c) En déduire, pour tout $u \in \mathcal{L}_2$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(u|H_n)^2}{\|H_n\|^2}$ et l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\|H_n\|^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx. \quad (2)$$

5. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note e_p la fonction $x \mapsto e^{-px}$.

a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, les inégalités :

$$|e^{-2x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k e^{-x}| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \leq \frac{(n+1)^n}{n!} e^{-n-1}.$$

b) En déduire une suite de polynômes $(Q_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \mapsto Q_{2,n}(x)e^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_2 .

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, il existe une suite de polynômes $(Q_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \mapsto Q_{p,n}(x)e^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_p .

On pourra utiliser les fonctions polynomiales $x \mapsto Q_{p,n}(\frac{x}{2}) \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (p+1)^k}{k! 2^k} x^k \right)$.

d) En déduire que, pour toute fonction polynomiale P , il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que la suite des fonctions $x \mapsto Q_n(x)e^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $x \mapsto P(e^{-x})$.

6. Soit v une fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{K}$ défini dans la partie 2.

a) En utilisant le théorème de Weierstrass et le changement de variable $x = -\ln(t)$, justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un polynôme P tel que :

$$\forall x \geq 0, |\nu(x) - P(e^{-x})| \leq \varepsilon.$$

b) En déduire qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes (éléments de $\mathcal{R}$) telle que la suite des fonctions $x \mapsto Q_n(x)e^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction v .

c) On note w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$w(x) = \begin{cases} v(\frac{x^2}{4}) e^{x^2/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{cases} w_p(x) = w(x) + w(-x) \\ w_i(x) = w(x) - w(-x) \end{cases}.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de deux polynômes Q et R vérifiant les inégalités

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (w_p(x) - Q(\frac{x^2}{4}))^2 e^{-x^2} dx \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (w_i(x) - x R(\frac{x^2}{4}))^2 e^{-x^2} dx \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \end{cases}.$$

Pour parvenir à la seconde inégalité, on pourra, en lieu et place de v , utiliser la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{w(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Soit $\eta > 0$.

Déduire des résultats précédents que :

- pour toute fonction paire w_p telle que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} w_p(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{K}$, il existe un polynôme pair P_p tel que

$$\|w_p - P_p\| \leq \eta$$

- pour toute fonction impaire w_i telle que la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} w_i(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{K}$, il existe un polynôme impair P_i tel que

$$\|w_i - P_i\| \leq \eta.$$

7. Soit u une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

a) En s'appuyant sur les derniers résultats de la partie 2 et sur ce qui précède, démontrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ qui converge vers u pour la norme $\|\cdot\|$.

b) Justifier l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| u - \sum_{k=0}^n \frac{(u|H_k)}{\|H_k\|^2} H_k \right\| = 0.$$

c) Justifier que l'inégalité (2) démontrée en question 4 est en fait une égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\|H_n\|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx. \quad (3)$$

d) Ces propriétés restent-elles vraies si u appartient à $\mathcal{L}_2$ sans être bornée?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet comporte un problème et un exercice qui peuvent être traités indépendamment.
La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Quelques notations et rappels

Les notations et rappels ci-dessous vous seront utiles pour la résolution du problème et de l'exercice. Pensez à vous y référer.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce sujet seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

- Soit E un ensemble quelconque. Pour tout $A \subset E$ et $B \subset E$, on note

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- **[Formule des espérances totales]** Soient Y et N deux variables aléatoires. Si la variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si Y est intégrable (i.e., $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$) alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}([N = k]) \mathbb{E}(Y \mid N = k).$$

- La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ suit également une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
- **[Théorème des valeurs intermédiaires]** Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x tel que $\min(g(a), g(b)) \leq x \leq \max(g(a), g(b))$, il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = x$.
- Une fonction φ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est strictement convexe si pour tout $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0, 1[$, on a $\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$.
- Le développement en série entière de l'exponentielle est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$e^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

Problème – Processus de Galton-Watson

On souhaite dans ce problème modéliser l'évolution de la taille d'une population de bactéries. On adopte pour se faire le modèle suivant.

- La population initiale (génération 0) est composée d'une seule bactérie.
- Cette bactérie va engendrer un nombre aléatoire de nouvelles bactéries. Ce nombre est modélisé par une variable aléatoire $X_{1,0}$ à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. La taille de la population de la génération 1 est donc $Z_1 := X_{1,0}$.
- Les Z_1 bactéries de la première génération vont à leur tour engendrer de nouvelles bactéries. Pour $i = 1, \dots, Z_1$, on notera $X_{i,1}$ la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N}$) modélisant le nombre de descendants de la i -ème bactérie. Ainsi, la taille de la population de la génération 2 est $Z_2 = 0$ si $Z_1 = 0$ et

$$Z_2 := \sum_{i=1}^{Z_1} X_{i,1} \text{ si } Z_1 > 0.$$

- De manière plus générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera Z_n la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de la génération n . On a donc $Z_0 = 1$ et

$$Z_n := \begin{cases} 0 & \text{si } Z_{n-1} = 0, \\ \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{i,n-1} & \text{si } Z_{n-1} > 0, \end{cases} \quad (1)$$

où pour tout $i = 1, \dots, Z_{n-1}$, la variable aléatoire $X_{i,n-1}$ est le nombre de descendants de la i -ème bactérie de la génération $n-1$.

- On supposera pour finir que les variables aléatoires $\{X_{i,n}; i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}\}$ sont indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire intégrable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est déterminée par les valeurs $\{p_k := \mathbb{P}([X = k]); k \in \mathbb{N}\}$ et on a donc

$$\mu := \mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k < \infty.$$

Le processus $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ ainsi construit est connu sous le nom de *processus de Galton-Watson*. L'objectif de ce problème est d'étudier la probabilité d'extinction

$$\bar{\pi} := \mathbb{P}([\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Z_n = 0]),$$

de la population de bactéries.

Nous allons dans un premier temps calculer la probabilité d'extinction dans des cas simples.

- 1) Quelle est la valeur de $\bar{\pi}$ lorsque $p_0 = \mathbb{P}([X = 0]) = 0$? Même question lorsque $p_0 = 1$.

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera π_n la probabilité que la population soit éteinte à la génération n . On a donc $\pi_n = \mathbb{P}([Z_n = 0])$.

- 2) Montrer que $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et en déduire qu'elle converge vers une limite finie.
- 3) On introduit les événements $B_1 = [Z_1 = 0]$ et $\{B_i := [Z_i = 0] \setminus [Z_{i-1} = 0]; i \geq 2\}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\pi_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i).$$

- 4) En déduire que $\bar{\pi} = \lim \pi_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- 5) Pour cette question, on suppose que $p_0 + p_1 = 1$ avec $p_0 \in]0, 1[$.
 - 5.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire Z_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$.
 - 5.2) Donner, en fonction de n et p_1 , la valeur de π_n .
 - 5.3) En déduire la valeur de $\bar{\pi}$.

Pour déterminer la probabilité d'extinction, on doit étudier la *fonction génératrice des probabilités* de la variable aléatoire X modélisant le nombre de descendants d'une bactérie. Cette fonction est définie pour tout $s \in [0, 1]$ par $G_X(s) := \mathbb{E}(s^X)$.

- 6) Donner, en fonction des probabilités $\{p_k; k \in \mathbb{N}\}$, les expressions de la suite positive $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des fonctions positives f_k telles que pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k f_k(s).$$

- 7) Montrer que la série ci-dessus est absolument convergente.
- 8) Dans le cas particulier où X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, donner l'expression de $G_X(s)$ (vous devrez expliciter les calculs faits pour trouver cette expression).
- 9) Donner l'expression de $G_X(0)$ en fonction des $\{p_k; k \in \mathbb{N}\}$ (on utilisera la convention $0^0 = 1$). Quelle est la valeur de $G_X(1)$?

On admettra que la fonction G_X est indéfiniment dérivable sur $]0, 1[$. Pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la dérivée d'ordre j est donnée par

$$G_X^{(j)}(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k f_k^{(j)}(s), \quad s \in]0, 1[.$$

On admettra enfin que les fonctions G_X et $G_X^{(1)}$ sont continues à droite en 0 et à gauche en 1.

- 10) Que représente la valeur $G_X^{(1)}(1)$?

- 11) Que faut-il imposer sur la valeur de p_0 pour assurer que G_X est strictement croissante sur $]0, 1[$?
- 12) Montrer que si $p_0 + p_1 < 1$ alors G_X est strictement convexe.

On souhaite à présent trouver l'expression de la fonction génératrice des probabilités G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n définie par l'équation 1. Remarquons tout d'abord que puisque $Z_1 = X_{1,0}$, la variable aléatoire Z_1 a même loi que X et donc $G_{Z_1}(s) = G_X(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$.

- 13) Montrer que pour tout $n \geq 2$, la variable aléatoire Z_{n-1} est indépendante des variables aléatoires $\{X_{i,n-1}; i \geq 1\}$.
- 14) En utilisant la question précédente ainsi que la formule des espérances totales, montrer que pour tout $n \geq 1$ et $s \in [0, 1]$ on a $G_{Z_n}(s) = G_{Z_{n-1}}(G_X(s))$.
- 15) Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ et $s \in [0, 1]$ on a $G_{Z_n}(s) = G_X(G_{Z_{n-1}}(s))$. En déduire que $\pi_n = G_X(\pi_{n-1})$.
- 16) En utilisant la question 4), montrer que $\bar{\pi} = G_X(\bar{\pi})$.

On s'intéresse à présent à l'équation

$$G_X(s) = s, \quad s \in [0, 1]. \quad (2)$$

- 17) Donner une solution évidente de l'équation (2).
- 18) Montrer que si $u \in [0, 1]$ est solution de (2) alors $\pi_n \leq u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Aide : vous pourrez démontrer ce résultat par récurrence.)
- 19) En déduire que $\bar{\pi}$ est la plus petite solution de (2).
- 20) Pour cette question on suppose que $p_0 + p_1 < 1$ et qu'il existe au moins un point $x_0 \in]0, 1[$ tel que $G_X(x_0) < x_0$.
 - 20.1) Montrer qu'il existe au moins un point $x_1 \in [0, 1[$ solution de (2). (Aide : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(s) := G_X(s) - s$.)
 - 20.2) Montrer que x_1 est l'unique élément de $[0, 1[$ solution de (2). (Aide : montrer que si G_X est une fonction strictement convexe alors pour tout $x_2 \in]x_1, 1[$ on a $G_X(x_2) < x_2$.)
 - 20.3) Montrer que si $G_X^{(1)}(1) \leq 1$ alors pour tout $s \in [0, 1[$ on a $G_X(s) > s$. (Aide : utiliser le fait que le graphe d'une fonction strictement convexe est au dessus de toutes ses tangentes).
 - 20.4) Démontrer que la réciproque du résultat établi dans la question précédente est vraie. Vous pourrez utiliser le fait que

$$G_X^{(1)}(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{G_X(1) - G_X(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

- 21) Utiliser les résultats de la question 20) pour montrer le résultat suivant.

Proposition – i) Si $p_0 + p_1 < 1$ et $\mu := \mathbb{E}(X) \in [0, 1]$ alors $\bar{\pi} = 1$.

ii) Si $p_0 + p_1 < 1$ et $\mu > 1$ alors $\bar{\pi} \in [0, 1[$ est l'unique solution sur $[0, 1[$ de l'équation $G_X(s) = s$.

On s'intéresse à présent au nombre de générations de bactéries observées avant l'extinction de la population. Plus précisément, on introduit la variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et telle que $Z_\tau > 0$ et $Z_{\tau+1} = 0$.

22) Montrer que $\mathbb{P}(\tau \geq n) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$.

23) En utilisant l'indépendance entre Z_n et les variables aléatoires $(X_{i,n}, i \in \mathbb{N})$, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | Z_n = k) = k\mu.$$

24) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n = [\mathbb{E}(X)]^n$ (Aide : utiliser la formule des espérances totales).

25) En déduire que $\mathbb{P}(\tau \geq n) \leq \mu^n$.

Exercice – Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

L'objectif de cet exercice est de démontrer un résultat sur l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Ce résultat, établi par Lucien Le Cam, s'énonce ainsi.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soient S_n et T_n deux variables aléatoires distribuées respectivement selon une loi de poisson de paramètres np avec $p \in]0, 1[$ et une loi binomiale de paramètres n et p . Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in]0, 1[$,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}([S_n = k]) - \mathbb{P}([T_n = k])| \leq 4np^2. \quad (3)$$

En particulier, si $p = p_n = \lambda/n$ avec $\lambda > 0$, l'inégalité ci-dessus implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbb{P}([T_n = k]) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| = 0.$$

En d'autres termes, la loi binomiale de paramètres n et λ/n peut être approchée pour n suffisamment grand par une loi de Poisson de paramètre λ .

Les questions ci-dessus reprennent le schéma de la démonstration de L. Le Cam. On intro-

duit tout d'abord le couple aléatoire $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ tel que, pour $p \in]0, 1[$,

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} e^{-p} - p + pe^{-p} & \text{si } i = j = 0, \\ p - pe^{-p} & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1, \\ pe^{-p} & \text{si } i = j = 1, \\ e^{-p} p^i / i! & \text{si } i \geq 2 \text{ et } j = 0 \end{cases}$$

- 1) Donner l'expression, en fonction de p , de la probabilité $\mathbb{P}([X \geq 2] \cap [Y = 0])$.
- 2) Déterminer l'ensemble $E \subset \mathbb{N}^2$ des valeurs prises par le couple aléatoire (X, Y) .
- 3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner en fonction de p l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([X = k])$.
Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
- 4) Donner les expressions des probabilités $\mathbb{P}([Y = 0])$ et $\mathbb{P}([Y = 1])$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
- 5) Justifier le fait que $\mathbb{P}([X = Y]) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$.
- 6) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a l'inégalité $e^{-x} \geq 1 - x$.
- 7) Dédire des questions 5) et 6) que $\mathbb{P}([X = Y]) \geq 1 - 2p^2$.

On introduit à présent les $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ couples aléatoires $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$ que l'on suppose indépendants et de même loi que le couple aléatoire (X, Y) introduit en début d'exercice. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } T_n := \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- 8) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire S_n ? Même question pour la variable aléatoire T_n .
- 9) En utilisant le fait que si $X_i = Y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ alors $S_n = T_n$, montrer que

$$[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{i=1}^n [X_i \neq Y_i].$$

- 10) En déduire que $\mathbb{P}([S_n \neq T_n]) \leq 2np^2$.
- 11) Montrer que $\mathbb{P}([S_n \in A]) \leq \mathbb{P}([T_n \in A]) + \mathbb{P}([S_n \neq T_n])$ pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$.
(Aide : exprimer la probabilité $\mathbb{P}([S_n \in A])$ en utilisant la formule des probabilités totales avec la partition de Ω suivante : $\{[S_n = T_n], [S_n \neq T_n]\}$).
- 12) En déduire que pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([S_n \in A]) - \mathbb{P}([T_n \in A]) \leq 2np^2$.
- 13) Montrer que l'on a également $\mathbb{P}([T_n \in A]) - \mathbb{P}([S_n \in A]) \leq 2np^2$.

On introduit l'ensemble $A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P}([S_n = k]) > \mathbb{P}([T_n = k])\} \subset \mathbb{N}$.

14) Montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}([S_n = k]) - \mathbb{P}([T_n = k])| &= \mathbb{P}([S_n \in A_n]) - \mathbb{P}([T_n \in A_n]) \\ &+ \mathbb{P}([T_n \in \mathbb{N} \setminus A_n]) - \mathbb{P}([S_n \in \mathbb{N} \setminus A_n]). \end{aligned}$$

15) Dédurre l'inégalité (3) des questions précédentes.

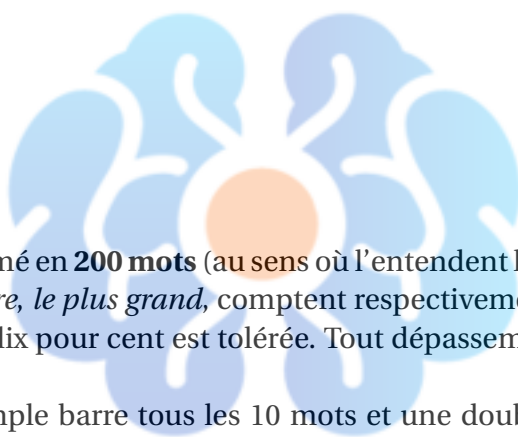


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrirez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

« Déclassement » : le mot est aujourd'hui sur toutes les lèvres. Il désigne un phénomène de rupture qui conduit un individu à perdre sa position sociale. Plus de 300.000 salariés, hier encore protégés par un contrat à durée indéterminée, ont été licenciés au cours de l'année 2009 et sont aujourd'hui au chômage, sans autre perspective que de longs mois d'incertitude financière et psychologique.

[...] Aujourd'hui omniprésente, la notion de déclassement traduit donc une réalité pressante et sensible, dont de nombreux travaux ont tenté récemment de prendre la mesure. Mais elle doit être distinguée d'un autre phénomène, encore plus décisif : la peur du déclassement.

Cette angoisse sourde, qui tараude un nombre croissant de Français, repose sur la conviction que personne n'est « à l'abri », qu'une épée de Damoclès pèse sur les salariés et leurs familles, que tout un chacun risque à tout moment de perdre son emploi, son salaire, ses prérogatives, en un mot son statut. La peur du déclassement ne règne pas tant aux marges de la société qu'en son cœur. Elle assiège les ouvriers, les employés, les travailleurs précaires, mais, plus encore, les classes moyennes et supérieures, celles qui bénéficient des meilleurs statuts et des protections les plus efficaces et qui ont donc beaucoup à perdre. Elle commande la perception de soi, les formes de la confiance, les attentes, la représentation que l'on se fait de l'avenir.

Le déclassement et la peur du déclassement : les deux phénomènes ne sont ni de même nature, ni de même ampleur, et il est essentiel de ne pas les confondre si l'on veut comprendre les problèmes dont souffre aujourd'hui la société française. Un exemple suffira à montrer tout ce qui les distingue. En 2007, l'INSEE recensait 14.600 sans-abri ; si l'on retient le chiffre de 100.000 personnes, avancé par les associations d'aide aux SDF, on peut calculer que 0,16 % de la population vit dans la rue. Or, d'après un sondage réalisé en 2006, 48 % des Français pensent qu'ils pourraient un jour devenir SDF ; deux ans plus tard, avec la récession, cette peur s'est encore accrue, 60 % des personnes s'estimant désormais menacées.

Si le déclassement est un fait que l'on peut mesurer statistiquement et qui touche d'abord les populations fragiles, la peur du déclassement est d'un autre ordre : elle est un phénomène global et diffus qui, en gouvernant l'imaginaire des individus et des groupes, commande de très nombreux comportements et mouvements sociaux. Elle n'a rien d'une idéologie abstraite ; au contraire, elle repose sur un ensemble de faits bien réels, mais elle en extrapole le sens et en redouble l'ampleur. Elle est une variable-clé pour rendre compte du fonctionnement de la politique, de l'économie et de la société françaises.

Avant de comprendre pourquoi cette angoisse est devenue aussi répandue, il faut prendre la mesure du drame personnel et familial que constitue le déclassement dans la France d'aujourd'hui, tout particulièrement quand il frappe des salariés au beau milieu de leur carrière. Dans un rapport remis en juillet 2009 à la secrétaire d'État à la prospective, les chercheurs du Centre d'analyse stratégique ont bien mis en lumière la complexité du phénomène. Être licencié, en France, c'est d'abord subir une période de chômage parmi les plus longues des pays développés ; c'est ensuite être condamné à ne retrouver que des formes précaires et dégradées d'emploi, sans rapport avec le statut initialement perdu ; et il va sans dire qu'une telle relégation est lourde de conséquences financières et psychologiques. Ainsi entendu, le déclassement frappe en priorité les ouvriers et les employés, notamment dans les PME ; mais il touche de plus en plus les cadres du privé, dont les statuts, naguère si solides, se sont fragilisés à mesure que leurs emplois se banalisaient. Les fonctionnaires restent à l'abri de ces

formes radicales de déclassement, mais ils ne sont pas protégés contre les remises en cause rampantes de leurs avantages statutaires (en termes de retraite par exemple), ni contre la progressive détérioration de leurs conditions de travail, aggravée par les départs à la retraite non renouvelés et les baisses d'effectifs.

Qu'elles travaillent dans le public ou le privé, qu'elles soient salariées ou indépendantes, les familles sont menacées par une autre forme de déclassement : celle qui survient lorsque les enfants ne parviennent pas à se faire une place sur le marché du travail et dans la société. [...] En 2008, parmi les jeunes sortis de l'école depuis moins de 5 ans, 47 % des non-diplômés étaient au chômage contre à peine 7 % des diplômés du supérieur, soit un écart de 40 points encore jamais atteint par le passé. Échouer à l'école n'a jamais été aussi disqualifiant.

Il y a donc une réalité du déclassement, et celle-ci est terrible : elle affecte l'équilibre des individus et des familles tout en minant les fondements du pacte social. Et pourtant, l'immense majorité des Français reste à l'abri d'un déclassement effectif. Si le déclassement est au cœur des préoccupations d'un si grand nombre de personnes, ce n'est pas parce qu'elles ou leurs proches l'ont subi; c'est parce que son coût potentiel n'a jamais été aussi important. Ce que l'on pourrait perdre est tellement fondamental, constitue à tel point le socle de tout notre être social, que ce seul risque suffit à nourrir une anxiété d'ordre existentiel. Les pays où les pertes d'emploi suscitent la plus grande peur sont paradoxalement ceux où les emplois sont les mieux protégés et les statuts les plus difficiles à perdre : la probabilité de retrouver un emploi protégé y étant mécaniquement plus faible, ce qui se perd est beaucoup plus précieux qu'ailleurs. [...]

La notion française de déclassement n'a guère d'équivalent aujourd'hui dans les pays anglo-saxons et scandinaves. Elle est symptomatique de notre vieille société inégalitaire et hiérarchique, encore aristocratique à de nombreux égards, où rangs et dignités s'accordent pour la vie et ont vocation à rester dans la famille. [...] Ce qui se développe en premier lieu aujourd'hui n'est pas le déclassement effectif des classes populaires, mais la peur du déclassement au sein des classes moyennes et supérieures, avec tout ce que cela implique de comportements séparatistes en matière résidentielle et scolaire. [...]

Les découvertes scientifiques, les progrès techniques, la croissance économique sont des facteurs de changement social; mais les périodes de stagnation jouent aussi un rôle primordial dans l'élaboration des sociétés. Quand elles surviennent, les récessions ont pour conséquence première d'augmenter la polarisation sociale et le coût que représente la perte d'un statut protégé. Cet effet social entraîne la diffusion, dans toute la société, d'une peur du déclassement (effet psychologique), laquelle déclenche à son tour un ensemble de décisions et de comportements qui remodelent de fond en comble le paysage idéologique (effet politique), même longtemps après que la récession a pris fin. Ici résident ses effets les plus durables. L'expérience universellement partagée n'est donc pas celle du déclassement (qui ne survient qu'au prix d'une destruction de la société, comme dans l'Allemagne des années 1920), mais celle de la peur du déclassement. [...]

Pour étudier ce phénomène, observable lors des grandes crises que la France a traversées (par exemple en 1974 et en 1993), il faut esquisser une sociologie des récessions, qui ne peut se déployer que sur le long terme et dans un triple registre social, psychologique et politique... L'Enquête emploi de l'INSEE qui couvre la période 1975-2008 livre des informations capitales sur le rôle respectif de l'origine sociale et des diplômes au moment de l'insertion sur le marché du travail. On voit alors à quel point les récessions influencent les comporte-

ments et infléchissent les attentes, tout particulièrement au sein des générations qui les ont subies au moment d'entrer sur le marché du travail; en un mot, à quel point les récessions, en raison de leur caractère profondément anxiogène, façonnent les sociétés en accentuant leur propension au pessimisme et au conservatisme social.

Éric Maurin, « La peur du déclassement. Une sociologie des récessions ».
Seuil (La République des Idées) 2009, pp. 5-11.

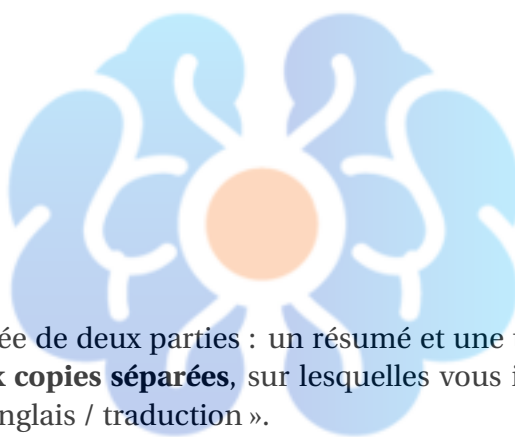


Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The Real World Costs of the digital race for bitcoin

By Gabriel J.X. Dance. April 9, 2023

Texas was gasping for electricity. Winter Storm Uri had knocked out power plants across the state, leaving tens of thousands of homes in icy darkness. By the end of Feb. 14, 2021, nearly 40 people had died, some from the freezing cold.

Meanwhile, in the husk of a onetime aluminum smelting plant an hour outside of Austin, row upon row of computers were using enough electricity to power about 6,500 homes as they raced to earn Bitcoin, the world's largest cryptocurrency.

The computers were performing trillions of calculations per second, hunting for an elusive combination of numbers that Bitcoin's algorithm would accept. About every 10 minutes, a computer somewhere guesses correctly and wins a small number of Bitcoins worth, in recent weeks, about \$170,000. Anyone can try, but to make a business of it can require as much electricity as a small city.

In Texas, the computers kept running until just after midnight. Then the state's power grid operator ordered them shut off, under an agreement that allowed it to do so if the system was about to fail. In return, it began paying the Bitcoin company, Bitdeer, an average of \$175,000 an hour to keep the computers offline. Over the next four days, Bitdeer would make more than \$18 million for not operating, from fees ultimately paid by Texans who had endured the storm.

The New York Times has identified 34 such large-scale operations, known as Bitcoin mines, in the United States, all putting immense pressure on the power grid and most finding novel ways to profit from doing so. Their operations can create costs — including higher electricity bills and enormous carbon pollution — for everyone around them, most of whom have nothing to do with Bitcoin.

Until June 2021, most Bitcoin mining was in China. Then it drove out Bitcoin operations, at least for a time, citing their power use among other reasons. The United States quickly became the industry's global leader.

Since then, precisely how much electricity Bitcoin mines are using in America and their effect on energy markets and the environment have been unclear. The Times, using both public and confidential records as well as the results of studies it commissioned, put the most comprehensive estimates to date on the largest operations' power use and the ripple effects of their voracious demand. It is as if another New York City's worth of residences were now drawing on the nation's power supply, The Times found.

In some areas, this has led prices to surge. In Texas, where 10 of the 34 mines are connected to the state's grid, the increased demand has caused electric bills for power customers to rise nearly 5 percent, or \$1.8 billion per year, according to a simulation performed for The Times by the energy research and consulting firm Wood Mackenzie.

The additional power use across the country also causes as much carbon pollution as adding 3.5 million gas-powered cars to America's roads, according to an analysis by WattTime, a nonprofit tech company. Many of the Bitcoin operations promote themselves as environmentally friendly and set up in areas rich with renewable energy, but their power needs are far too great to be satisfied by those sources alone. As a result, they have become a boon for the fossil fuel industry: WattTime found that coal and natural gas plants kick in to meet 85 percent of the demand these Bitcoin operations add to their grids.

Their massive energy consumption combined with their ability to shut off almost instantly allows some companies to save money and make money by deftly pulling the levers of U.S. power markets. They can avoid fees charged during peak demand, resell their electricity at a premium when prices spike and even be paid for offering to turn off. Other major energy users, like factories and hospitals, cannot reduce their power use as routinely or dramatically without severe consequences.

In some states, notably New York, Pennsylvania and Texas, Bitcoin operators' revenue can ultimately come from other power customers. The clearest example is Texas, where Bitcoin companies are paid by the grid operator for promising to quickly power down if necessary to prevent blackouts. In practice, they rarely are asked to shut down and instead earn additional money while doing exactly what they would have been doing anyway: seeking Bitcoin. Five operations have collectively made at least \$60 million from that program since 2020, records show.

Several of the companies are being paid through these agreements a majority of the time they operate. Most years, they are asked to turn off for only a few hours, at which point they are paid even more.

The windfall for Bitdeer during Winter Storm Uri came through this program, in exchange for a fraction of the power it typically used. The company did not respond to requests for comment. Another Bitcoin company made tens of millions of dollars reselling electricity during the storm — and ultimately stands to earn as much as \$125 million — according to its financial filings, which were previously reported by the Tech Transparency Project. A third company told investors that another natural disaster like Uri could be a significant business opportunity.

“Ironically, when people are paying the most for their power, or losing it altogether, the miners are making money selling energy back to Texans at rates 100 times what they paid,” said Ed Hirs, who teaches energy economics at the University of Houston and has been critical of the industry. In interviews and statements, many of the companies said they were no different from other large power users except for their willingness to shut off quickly to benefit the grid. Several objected to the method The Times and WattTime used to estimate their emissions, which calculated the pollution caused by the additional power generated to satisfy the mines' demand, showing it to overwhelmingly come from fossil fuels.

The companies said this method held them to an unfair standard. “The analysis cited could be used to attack any industry that consumes power,” said David Fogel, the chief executive of Coinmint, which operates in upstate New York. “I think the entire notion of singling out specific industries like this is unfair.”

But WattTime's method is the one many energy and climate experts recommend for measuring the environmental effects of increased power use by any industry, particularly one that grows so large so suddenly.

Some in the industry have pushed back against suggestions that it is directly responsible for any environmental harm.

A May 2022 letter to the Environmental Protection Agency, signed by many of the biggest companies, said their operations “released” no pollutants. “Bitcoin miners have no emissions whatsoever,” it said. “Associated emissions are a function of electricity generation.”

Nic Carter, a partner at a crypto-focused venture capital firm and a prominent Bitcoin advocate who told The Times he was the letter's primary author, said he was playing a “language game” when he wrote that Bitcoin mining has no emissions. At the time, he said, he felt the industry was being unfairly singled out.

“Maybe the more sincere point is like, we're already fully aware of the emissions associ-

ated with utilities generating grid power," he said.

Many academics who study the energy industry said Bitcoin mining was undoubtedly having significant environmental effects.

"They're adding hundreds of megawatts of new demand when we already face the need to rapidly cut fossil power," said Jesse Jenkins, a Princeton professor who studies electrical grid emissions. "If you care about climate change," he added, "then that's a problem."

2 Translate the following text into French

FTX founder Sam Bankman-Fried to be released on \$250 million bail and will live with his parents

By Associated Press. Updated: 23/12/2022

Cryptocurrency entrepreneur Sam Bankman-Fried walked out of a Manhattan courthouse on Thursday with his parents after they agreed to sign a \$250 million bond and keep him at their California home while he awaits trial on charges that he swindled investors and looted customer deposits on his FTX trading platform.

Assistant US Attorney Nicolas Roos said in federal court that Bankman-Fried, 30, "perpetrated a fraud of epic proportions".

Roos proposed strict bail terms, including the \$250 million bond — which he said is believed to be the largest federal pretrial bond ever — and house arrest at his parents' home in Palo Alto. An important reason for allowing bail was that Bankman-Fried, who had been jailed in the Bahamas, agreed to be extradited to the US, Roos said.

Reunited with his parents and lawyers inside the courthouse, an apparently silent Bankman-Fried shook the hands of a supporter before heading out the door, where photographers and video crews rushed him until he left in a car.

Magistrate Judge Gabriel W Gorenstein agreed to the bond and house arrest, though he required that an electronic monitoring bracelet be affixed to Bankman-Fried before he left the courthouse. Roos had asked it be attached Friday in California.

Bankman-Fried was shackled at the ankles when he entered the courtroom in a suit and tie to take a seat between his attorneys. Near the end of the hearing, he was asked by Gorenstein whether he understood he would face arrest and owe \$250 million if he chose to flee.

"Yes, I do," Bankman-Fried answered.

Soon afterwards, the hearing ended and Bankman-Fried, his hands in his front pants pockets, was led out by two US marshals. His next court date was scheduled for Jan. 3, when he is to appear before the judge who will preside over the case.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h



L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Exercice 1. Probabilités.

Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice, définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n,$$

lorsque la série converge.

1. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ en fonction de celles de X et Y et en déduire une relation entre G_{X+Y} , G_X et G_Y .
- (b) Généraliser le résultat précédent à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
2. On veut montrer qu'il n'est pas possible de construire un dé faussé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) tel que si on le lance deux fois, la somme des deux résultats obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$.
 - (a) Soit U la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Déterminer sa fonction génératrice G_U et déterminer toutes les racines réelles de G_U ainsi que leur multiplicité.
 - (b) Supposons que l'on ait un dé à 6 faces tel que la probabilité d'apparition de la face $i \in \{1, \dots, 6\}$ soit égale à p_i , avec $p_i \in]0, 1[$. Soit X la loi d'apparition de la face i . Montrer que G_X admet une racine non-nulle.
 - (c) Conclure.
3. Un commerçant reçoit dans son magasin N clients par jour, où N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client repart avec un produit avec une probabilité $p \in [0, 1]$. On supposera que les comportements de deux clients distincts sont indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de produits vendus par jour.
 - (a) Préciser la fonction caractéristique de N .
 - (b) Déterminer la fonction caractéristique de Y et montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

◇

Exercice 2. autour de la constante d'Euler.

Dans ce problème on étudie plusieurs propriétés et expressions de la constante γ d'Euler. Les parties 2 et 3 sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie 1.

On rappelle l'énoncé du théorème de convergence dominée :

Théorème. Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I . On suppose qu'il existe une fonction positive g telle que l'intégrale $\int_I g(x) dx$ converge et pour tout n on a $|f_n| \leq g$. Alors les intégrales $\int_I f_n(x) dx$ et $\int_I f(x) dx$ convergent absolument et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Partie 1 : Préambule

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

la n^{e} somme partielle de la série harmonique.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, et utiliser cette inégalité pour montrer que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$ converge, puis qu'il existe une constante γ telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Cette constante γ s'appelle la constante d'Euler, dont nous allons étudier certaines propriétés dans les parties suivantes.

Partie 2 : Une expression intégrale de la constante d'Euler.

L'objet de cette partie est d'établir la formule

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma.$$

3. Montrer que les intégrales impropres $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$ et $\int_1^{\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ sont convergentes.
4. (a) Montrer que pour tout $u \in]-1, \infty[$ on a $\ln(1+u) \leq u$
(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $t \in [0, n]$ on a

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

5. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} dt = \int_0^{\infty} \ln(t) e^{-t} dt.$$

6. Montrer successivement les égalités

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} dt = \ln n + \int_0^1 n \ln(u) (1-u)^{n-1} du = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

7. En déduire la formule (1)

Partie 3 : Lien avec la fonction ζ .

Pour tout $s > 1$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (qui se prononce "dzêta").

8. Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien définie et vérifie

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^s}.$$

En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.

9. (a) Montrer que pour $s > 1$ la série

$$\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

converge.

(b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$.

(c) En déduire la formule

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt$$

où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière.

10. Démontrer que pour tout entier $N \geq 2$, on a

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = H_N - \ln(N) - 1,$$

et en déduire la formule

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

11. En justifiant l'égalité $\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt$, conclure que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

◇

Exercice 3. Sous-espaces de matrices nilpotentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On rappelle qu'une matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$, et on note $N_n \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes. On identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes de taille n , et une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé. On note M^T la transposée d'une matrice M .

L'objet de ce problème est de démontrer le théorème suivant, dû à Gerstenhaber.

Théorème. Si V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes, alors

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

On note T_n^+ (resp. T_n^-) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) et T_n^{++} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que T_n^+ , T_n^- et T_n^{++} sont des sous-espaces vectoriels (on pourra se contenter de rédiger les détails pour T_n^+) et préciser leur dimension.
2. Montrer que $T_n^- \oplus T_n^{++} = M_n(\mathbb{R})$.
3. Pour $1 \leq k \leq n$, on note $E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \forall i \geq k, x_i = 0\}$. On note également $E_{n+1} = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in T_n^{++}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .
 - (a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n+1$, on a $u(E_k) \subset E_{k-1}$.
 - (b) En déduire que A est nilpotente. On a ainsi montré que $T_n^{++} \subset N_n$.
 - (c) Montrer que $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$.
4. N_n est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
5. Montrer que si $A \in N_n$, alors $\text{Tr}(A) = 0$. (*Indication : on pourra étudier les valeurs propres complexes de A .*)
6. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A , B et $A+B$ sont nilpotentes alors $\text{Tr}(AB) = 0$.

Dans la suite du problème on fixe un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n .

On note π la projection de $M_n(\mathbb{R})$ sur T_n^{++} parallèlement à T_n^- (qui est bien définie grâce à la question 2). On note également τ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par la transposition, i.e. pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\tau(M) = M^T$.

7.
 - (a) Montrer que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$.
 - (b) En déduire que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.
8. Montrer que $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++} .
9. Soit $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$ et on fixe $N \in V$ telle que $A = \pi(N)$.
 - (a) Montrer que $A^T + N$ appartient à V . En déduire que $\text{Tr}(A^T N) = 0$.
 - (b) Montrer que $N - A$ appartient à T_n^- et en déduire que $A(N^T - A^T) \in T_n^{++}$.
 - (c) Montrer que $\text{Tr}(AA^T) = 0$.
 - (d) Conclure que $A = 0$.
10. En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer le théorème de Gershtenhaber.

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h



Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Ce problème est consacré à des questions d'approximation uniforme des fonctions sur un intervalle.

L'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ est noté $\mathcal{C}([a, b])$.

La transposée d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est notée M^T et son rang est noté $\text{rg}(M)$. L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel V est noté $\text{Vect}(A)$. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$ la distance d'un point $x \in E$ à une partie A de E .

Le problème est composé de quatre parties. Les trois premières parties sont indépendantes, et la quatrième utilise les résultats établis dans les parties précédentes. On attachera la plus grande importance au soin, à la clarté et à la précision de la rédaction.

Partie 1 : Déterminant de Cauchy.

On fixe un entier $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. L'objet de cette partie est de calculer le déterminant de Cauchy

$$D_n = \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Pour cela on suppose dans un premier temps que les (a_i) sont distincts, de même que les (b_i) , et on introduit la fraction rationnelle

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ \frac{1}{X + b_1} & \frac{1}{X + b_2} & \cdots & \frac{1}{X + b_n} \end{vmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $F(X)$ s'écrive sous la forme

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)}.$$

2. On pose $G(X) = (X + b_n)F(X)$. Montrer que $G(-b_n) = D_{n-1}$ et en déduire une relation entre D_n et D_{n-1} .
3. Conclure que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)},$$

dans le cas où les (a_i) et les (b_i) sont distincts, puis dans le cas général.

Partie 2 : Matrices de Gram.

Dans cette partie on fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (qui munit donc E d'une structure d'espace préhilbertien). La norme associée est notée $\|\cdot\|$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un n -uplet de vecteurs de E on définit la *matrice de Gram* de $(x_1, \dots, x_n)$ par

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On pose également $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m = \dim(V)$.

4. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de V et M la matrice de taille $m \times n$ définie par $M = (\langle e_i | x_j \rangle)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

(a) Montrer que

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = M^T M.$$

(b) Montrer que $\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \dim V$.

(c) Montrer que toute valeur propre réelle de $M^T M$ est positive ou nulle.

(d) En déduire que $\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée.

5. On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur V . Montrer que

$$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}}.$$

(on pourra considérer le déterminant $\det(\text{Gram}(x - p(x), x_1, \dots, x_n))$)

Partie 3 : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Dans cette partie on s'intéresse au théorème d'approximation de Weierstrass (1885) : si $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

Pour tous $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$ on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes de Bernstein*. On note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n .

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre x : $\mathbb{P}(X_i = 1) = x$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$. On fixe $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et on pose

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] \text{ où } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on définit son module de continuité ω par

$$\omega(\delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)|, (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \delta \}.$$

6. Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini, et qu'il vérifie

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0.$$

7. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la famille $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

8. Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré n , que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

9. Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)$$

puis que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Pour $a < b$ deux nombres réels quelconques, considérons maintenant l'espace $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{[a, b]} |f|$ (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme). On fixe $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

10. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un polynôme $T_n(f)$ tel que

$$\|f - T_n(f)\|_\infty = d(f, \mathcal{P}_n),$$

où la distance est relative à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

11. En utilisant les polynômes de Bernstein, montrer que $\|f - T_n(f)\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi nous avons établi le théorème de Weierstrass.

12. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout entier $n \geq 1$, $d(f, \mathcal{P}_n) \leq Cn^{-1/3}$.

13. Dans cette question, on se place sur $[a, b] = [-1, 1]$ et on considère la fonction valeur absolue $V : x \mapsto V(x)$. On admettra l'inégalité suivante dite des frères Markov (1890) : si P est un polynôme de degré au plus n , alors sur $[-1, 1]$ on a $\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme pair T_n^* tel que $d(V, \mathcal{P}_n) = \|V - T_n^*\|$.

(b) En minorant $|T_n^* - T_n^*(0) - V|$ sur un voisinage de 0, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $d(V, \mathcal{P}_n) \geq cn^{-4}$.

Partie 4 : Théorème de Müntz.

Pour $\alpha \geq 0$ on se permettra de noter simplement x^α la fonction définie sur $[0, 1]$ par $x \mapsto x^\alpha$.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant, dû à H. Müntz (1914) : soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0 = 0$ et V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1])$ engendré par la famille de fonctions x^{λ_n} , $n \geq 0$. Alors V est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Dans la suite on fixe $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0 = 0$.

11. Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ on pose

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{C}([0, 1])$ associée à un produit scalaire que l'on explicitera et que l'on pourra noter $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dans la suite.

12. Montrer que $\text{Vect}(\{x^m, m \in \mathbb{N}\})$ est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2)$.
13. Pour $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ comme ci-dessus, démontrer que la famille de fonctions (x^{λ_n}) est libre dans $\mathcal{C}([0, 1])$ (on pourra utiliser la question 4).
14. Soit $V_N = \text{Vect}(x^{\lambda_n}, 0 \leq n \leq N)$ et m un réel positif.

(a) Montrer que

$$d_2(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^N \frac{|\lambda_i - m|}{|\lambda_i + m + 1|},$$

où d_2 désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

(b) Montrer que si la suite (λ_n) est bornée alors $\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(x^m, V_N) = 0$.

(c) Montrer que si (λ_n) est non-bornée et $m \notin \{\lambda_n, n \geq 0\}$ alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(x^m, V_N) = 0 \text{ si et seulement si } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \text{ diverge.}$$

15. Montrer que V est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

16. Montrer que si V est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

17. (a) Prouver que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ on a

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

(b) Conclure que si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge alors V est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Le théorème de Müntz reste-t'il vrai si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$?

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h



Le sujet comporte deux problèmes qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Problème de la ruine du joueur

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de hasard dont le principe est décrit ci-après. On note $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ le montant global (en euro) mis en jeu. Au début de la partie, le joueur A dispose de $i \in \mathbb{N}$ euros. Le joueur B dispose donc de $k - i$ euros. Une tierce personne lance une pièce de monnaie : si elle tombe sur « face », le joueur A prend 1 euro au joueur B sinon, c'est le joueur B qui prend 1 euro au joueur A . Le jeu se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Dans toute la suite du problème on notera $p \in]0, 1[$ la probabilité que la pièce tombe sur « face ».

L'objectif est de calculer (en fonction de p , k et i) la probabilité que le joueur A gagne la partie i.e., que le joueur B soit ruiné.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $S_{i,k}^A(\ell)$ le montant dont dispose le joueur A au bout de ℓ lancers avec la condition initiale $S_{i,k}^A(0) = i$. Pour les 3 questions suivantes, on suppose que $k \geq 4$ et $i \in \{2, \dots, k-2\}$.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$? Même question pour la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.
- 2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.
- 3) Dans le cas où $p = 1/2$, quelle est l'espérance de $S_{i,k}^A(2)$?

On pose $\tau_{i,k}^A := \min \left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid S_{i,k}^A(\ell) \in \{0, k\} \right\}$. La probabilité que le joueur A gagne est donc

$$w_{i,k}^A := \mathbb{P} \left(\left[S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \right] \right).$$

Pour tout $\ell \geq \tau_{i,k}^A$, on a $S_{i,k}^A(\ell) = S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) \in \{0, k\}$. Autrement dit, dès lors que le joueur A a gagné ou perdu, le jeu s'arrête et la somme dont dispose le joueur A ne change plus.

- 4) Quelle est la valeur de la probabilité $w_{0,k}^A$ (i.e., la probabilité que le joueur A gagne s'il dispose de 0 euro en début de partie)?
- 5) Quelle est la valeur de la probabilité $w_{k,k}^A$?

Dans les questions 6) à 9), on se place dans le cas simple $i = 2$ et $k = 3$.

- 6) Calculer la probabilité pour que $\tau_{2,3}^A$ soit égal à 1.
- 7) Expliquer pourquoi $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.
- 8) Montrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P} \left(\left[\tau_{2,3}^A = 2m + 1 \right] \right) = p^{m+1} (1-p)^m.$$

- 9) En déduire l'expression (en fonction de p) de $w_{2,3}^A$. Vous vérifierez que lorsque $p = 1/2$

(i.e., pour une pièce équilibrée), le joueur A a 2 chances sur 3 de remporter le jeu.

On se propose à présent de calculer la probabilité $w_{i,k}^A$ dans le cas général. Pour ce faire, on commence par faire l'étude de la suite $(a_{i,r})_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour $r > 0$ et tout $i \geq 1$ la relation de récurrence $a_{i+1,r} - a_{i,r} = r(a_{i,r} - a_{i-1,r})$.

10) Pour tout $i \geq 2$, donner l'expression de la fonction $g(i, r) > 0$ pour laquelle

$$a_{i,r} - a_{0,r} = g(i, r)(a_{1,r} - a_{0,r}).$$

(attention au cas $r = 1$).

11) Soit $n > 1$ un entier. En utilisant la question précédente, montrer que

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)} + a_{0,r}.$$

Le calcul de $w_{i,k}^A$ est basé sur la remarque suivante. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et $(r_0, \dots, r_{\ell+1}) \in \{0, \dots, k\}^{\ell+2}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1) = r_{\ell+1}\right] \mid \left[S_{i,k}^A(\ell) = r_\ell\right] \cap \dots \cap \left[S_{i,k}^A(0) = r_0\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1) = r_{\ell+1}\right] \mid \left[S_{i,k}^A(\ell) = r_\ell\right]\right). \end{aligned}$$

Ainsi, à partir du $(\ell+1)$ -ième lancer, la probabilité que le joueur A gagne la partie ne dépend que de la somme $S_{i,k}^A(\ell)$ dont il dispose après ℓ lancers de la pièce. Autrement dit pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \mid S_{i,k}^A(\ell) = j\right) = \mathbb{P}\left(S_{j,k}^A(\tau_{j,k}^A) = k\right).$$

12) En utilisant l'égalité ci-dessus, justifier la relation de récurrence

$$w_{i,k}^A = pw_{i+1,k}^A + (1-p)w_{i-1,k}^A, \text{ pour tout } i \geq 1.$$

13) En utilisant les réponses aux questions 10), 11) et 12), donner l'expression (en fonction de p , k et i) de la probabilité $w_{i,k}^A$.

14) Vérifier que le résultat ci-dessus coïncide lorsque $i = 2$ et $k = 3$ à la réponse donnée à la question 9). Vous pourrez dans un premier temps montrer l'égalité ci-dessous qui est vraie pour tout $p \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$

$$\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^2 - (1-p)^2} = 1 - p(1-p).$$

Une autre méthode pour estimer la probabilité que le joueur A gagne est de faire l'étude du processus $\{S_{i,k}^A(\ell); \ell \in \mathbb{N}\}$. Comme nous l'avons remarqué précédemment, sa loi dépend uniquement des probabilités (appelées « probabilités de transition ») définies pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ par

$$p_{r,s} := \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1) = s\right] \mid \left[S_{i,k}^A(\ell) = r\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(1) = s\right] \mid \left[S_{i,k}^A(0) = r\right]\right), \quad (r, s) \in \{0, \dots, k\}^2.$$

La matrice de transition $\mathbf{P}$ est la matrice de dimension $(k+1) \times (k+1)$ dont l'élément de la ligne u et de la colonne v avec $(u, v) \in \{1, \dots, k+1\}^2$ est $\mathbf{P}_{u,v} := p_{u-1, v-1}$.

- 15) Quelle est la première ligne de $\mathbf{P}$? La dernière ligne de $\mathbf{P}$?
- 16) Pour tout $u \in \{2, \dots, k\}$ donner les expressions, en fonction de p , de $\mathbf{P}_{u,u-1}$, $\mathbf{P}_{u,u+1}$ et $\mathbf{P}_{u,v}$ pour tout $v \notin \{u-1, u+1\}$.
- 17) On rappelle qu'une matrice stochastique est une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls et dont la somme des éléments de chaque ligne est égal à 1. La matrice $\mathbf{P}$ est-elle une matrice stochastique?
- 18) Pour tout couple $(r, s) \in \{0, \dots, k\}^2$, donner l'expression, en fonction des probabilités $p_{r,t}$ et $p_{t,s}$ avec $t \in \{0, \dots, k\}$, de la probabilité

$$\mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+2) = s\right] \mid \left[S_{i,k}^A(\ell) = r\right]\right), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

- 19) Soit $(u, v) \in \{1, \dots, k+1\}^2$. A l'aide de la question précédente, expliciter la probabilité donné par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la ligne u et de la colonne v de la matrice $\mathbf{P}^2$? De manière plus générale, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que représente l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$?
- 20) La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique? (justifier votre réponse).

On admettra que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice stochastique $\mathbf{Q}$.

- 21) Comment interprétez vous les éléments de la $(k+1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$? Justifier votre réponse.

Pour les questions suivantes, on considère le cas $k = 3$.

- 22) Donner la matrice de transition $\mathbf{P}$.
- 23) Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner la première et la dernière ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$.
- 24) On pose $q := 1 - p$. Dans le cas où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est pair, montrer par récurrence que la deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est le vecteur ligne

$$\left(q \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, (pq)^{m/2}, 0, p^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right),$$

et que la troisième ligne est le vecteur ligne

$$\left(q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{m/2}, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right).$$

- 25) En utilisant la question précédente, donner la deuxième et la troisième ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$ lorsque m est impair.
- 26) Montrer que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vous vérifierez également que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.
- 27) Avant de commencer le jeu, une tierce personne lance la pièce : si elle tombe sur « face », le joueur A reçoit la somme de 1 euro (et donc le joueur B reçoit 2 euros) sinon il reçoit 2 euros. Calculer la probabilité que le joueur A gagne en fonction de p .

Problème du char d'assaut allemand

Lors de la seconde guerre mondiale, les chars allemands étaient identifiables par un numéro de série visible sur le châssis. Les numéros de série étaient des entiers consécutifs et celui du premier char fabriqué était inconnu. En utilisant simplement les numéros de série des quelques chars capturés, les alliés souhaitaient connaître le nombre de chars d'assaut produits par les allemands.

L'énoncé mathématique de ce problème est le suivant. Soient $s \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $n \in \{1, \dots, N\}$. Les valeurs s et N sont inconnues. Dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$, on tire simultanément n éléments $x_1, \dots, x_n$. Les valeurs ordonnées correspondantes seront notées $x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$. Le n -uplet $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ peut être vu comme la réalisation d'une variable aléatoire

$$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E_n, \mathcal{P}(E_n)),$$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probablisé, $E_n = \{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, N\}^n \mid i_1 < \dots < i_n\}$ et $\mathcal{P}(E_n)$ est la tribu des parties de E_n . En utilisant uniquement les observations $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$, il s'agit donc de proposer une estimation de l'entier N .

- 1) A quoi correspondent les entiers s , N et n dans le problème des chars d'assaut ?
- 2) Quel est le cardinal de l'ensemble E_n ?
- 3) Quelle est la loi de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$? Autrement dit, quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = (i_1, \dots, i_n)]$ où $(i_1, \dots, i_n) \in E_n$?

Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ et $m \in \{1, \dots, n\}$. Une variable aléatoire Y suit une loi **hypergéométrique inverse** de paramètres (N, n, m) (notation : $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$) si pour tout $i \in \{m, \dots, N - n + m\}$

$$\mathbb{P}([Y = i]) := \frac{\binom{i-1}{m-1} \binom{N-i}{n-m}}{\binom{N}{n}}.$$

La somme des probabilités étant égale à 1, on a

$$\sum_{i=m}^{N-n+m} \binom{i-1}{m-1} \binom{N-i}{n-m} = \binom{N}{n}.$$

4) En utilisant l'égalité ci-dessus et la relation

$$i \binom{i-1}{m-1} = m \binom{i}{m},$$

montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$ alors $\mathbb{E}(Y) = m(N+1)/(n+1)$.

5) Montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$ alors

$$\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)}{(n+1)^2(n+2)} (N-n)(n-m+1).$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X_{(k)}$ qui est la k -ième composante de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$.

6) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_{(k)}$?

7) Montrer que $X_{(k)} - s$ suit une loi hyper-géométrique inverse dont vous préciserez les paramètres.

8) Montrer que pour tout $1 \leq k < \ell \leq n$,

$$\hat{N}(n, k, \ell) := \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1,$$

est un estimateur sans biais de N (i.e., d'espérance N).

9) Quelle est la valeur de l'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ lorsque $n = N$ (i.e., lorsqu'on tire tous les éléments de $\{s+1, \dots, s+N\}$) ?

Afin de calculer la variance de l'estimateur ci-dessus, on s'intéresse à présent à la loi du couple aléatoire $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$ avec $1 \leq k < \ell \leq n$.

Pour simplifier, on supposera que $s = 0$ dans toute la suite.

10) Justifier l'équivalence : l'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si $k \leq i$, $j - i \geq \ell - k$ et $N - j \geq n - \ell$. Vous pourrez vous aider du schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & N \\ \cdots x_{(1)} \cdots & x_{(k)} & \cdots & x_{(\ell)} & \cdots & x_{(n)} \cdots \end{array}$$

11) Que faut-il mettre à la place des points d'interrogation pour que

$$E^*(N, n, k, \ell) = E^* := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq ? \text{ et } \ell - k + i \leq j \leq ?\},$$

soit l'ensemble des valeurs prises par le couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$?

12) Pour tout $(i, j) \in E^*$, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j])$.

13) En déduire que

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

14) Montrer que pour tout $1 \leq k < \ell \leq n$,

$$\mathbb{E}(X_{(k)}(X_{(\ell)} - X_{(k)})) = \frac{\ell - k}{n - k + 1} \left((N + 1)\mathbb{E}(X_{(k)}) - \mathbb{E}(X_{(k)}^2) \right).$$

15) En déduire l'expression de la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ lorsque $1 \leq k < \ell \leq n$.

Vous devez donner une expression de la forme $\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell)\text{Var}(X_{(k)})$, où $r(n, k, \ell)$ est à préciser.

16) Utiliser les résultats précédents pour montrer que

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \frac{(N + 1)(N - n)}{(\ell - k)^2(n + 2)} [k(n - k + 1) + (\ell - 2k)(n - \ell + 1)].$$

Il reste maintenant à choisir les valeurs de k et ℓ avec $1 \leq k < \ell \leq n$ pour obtenir le « meilleur » estimateur de N . Il paraît naturel d'utiliser la plus grande observation pour estimer au mieux la valeur N . On prend donc $\ell = n$. Reste à choisir $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ pour avoir un estimateur avec la plus petite variance $\sigma_n^2(k) := \text{Var}(\hat{N}(n, k, n))$ possible.

17) Après avoir fait l'étude de la fonction $k \in \{1, \dots, n - 1\} \mapsto \sigma_n^2(k)$, que proposez-vous comme choix pour k ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de français

Durée : 2h



Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous utiliserez la feuille préremplie facilitant le comptage des mots. N'oubliez pas d'ajouter votre N° BÉCÉAS en haut de chaque page.

Nous sommes dans une situation étrange : alors que la persuasion est partout, que ses procédés nous assaillent de toute part, élèves et étudiants ne sont préparés ni à la pratiquer ni à la décoder. Malgré la volonté de quelques enseignants et la ténacité de quelques chercheurs en communication, il n'y a nulle part de véritable programme de sensibilisation à l'argumentation, c'est-à-dire à un convaincre non-manipulatoire.

Car le XXème siècle est témoin d'un paradoxe qui a été peu souligné jusqu'à présent. D'un côté on a vu se développer, d'une manière qui n'a pas de précédent, toute sorte de pratiques de la persuasion. Les batailles idéologiques se sont succédé par vagues, mobilisant des foules immenses. Les ressources de la propagande, de la désinformation, de la manipulation psychologique ont été massivement utilisées tout au long de ce siècle, en période de guerre comme en période de paix. Le développement du secteur marchand, lui aussi sans précédent, se nourrit de l'emprise majeure de la publicité sur les consciences, vaste entreprise de conviction peu regardante sur les moyens qui fait penser au jugement de Roland Barthes : « Parler, et à plus forte raison discourir, ce n'est pas communiquer, comme on le répète trop souvent, c'est assujettir : toute la langue est une réaction généralisée. » D'un autre côté, malgré cette présence massive, la parole pour convaincre se déploie dans un vide presque total de réflexion, d'enseignement, de culture, et pour tout dire, d'éthique. Il n'y a pas de véritable « culture du convaincre » à la mesure d'une civilisation qui ne cherche plus les normes du passé et de la tradition les raisons de son destin.

La conséquence de ce paradoxe est que l'exercice de la parole, presque uniquement soumis à la règle de l'efficacité, décline au profit de ses formes les plus manipulatoires. On peut se demander si nous n'assistons pas à un véritable déclin de la parole et de la fonction qu'elle remplit dans le progrès de la civilisation. D'autres périodes de l'histoire humaine ont connu un tel déclin. L'historien romain Tacite se demande, dans un texte écrit aux alentours de l'an 80 si la rhétorique n'est pas en train de disparaître sous ses yeux. « Aujourd'hui, écrit-il, il faut faire court : fini le temps où les orateurs pouvaient s'exprimer librement devant un public attentif et qui prend part aux débats. » Aujourd'hui, dit-il encore, « la culture des orateurs, qui avait nourri la République, ne sert plus à rien : l'Empire s'impose et avec lui la démocratie de la parole disparaît. » Tacite voyait déjà dans l'esthétisation du discours – et la naissance d'un genre, la littérature – la conséquence de cette fin d'une époque inaugurée par Athènes. En restant prudent sur la comparaison, ne vivons-nous pas une période équivalente, où la parole est tout aussi malmenée ? Aujourd'hui aussi, il faut faire court : le « clip » est devenu l'unité de mesure du discours. Le débat vivant est remplacé par des procédures manipulatoires au service le plus souvent d'une pensée unique à l'échelle mondiale. Les nouveaux jeux du cirque, le spectacle télévisuel, sont l'unique sujet de conversation. Mesure-t-on les conséquences sur une société où l'on ne parle plus que de choses que l'on n'a pas vécues, sinon par procuration virtuelle ?

Le premier signe, mais pas le plus visible, du déclin de la parole est la tentative de restriction du champ où elle s'applique. La gigantesque bataille idéologique qui a pour objet d'imposer le libéralisme à l'échelle mondiale, a comme caractéristique de se mener sur un mode manipulatoire. Loin de se présenter comme un choix possible, discutable dans l'espace public, le libéralisme se présente comme une évolution naturelle, une loi à laquelle nous serions soumis. La parole est dessaisie de sa possibilité d'intervention, et l'essentiel de ce qui nous arrive est présenté comme non discutable, échappant à la parole, c'est-à-dire comme un phénomène sur lequel nous n'aurions aucune prise.

Un autre signe du déclin de la parole est l'absence de référence, dans l'espace public, à

des normes qui réguleraient l'emploi de tel ou tel type de procédés visant à convaincre. Il est frappant de voir l'absence de disjonction, dans les démocraties modernes, entre l'univers des fins et celui des moyens. Si les fins sont bonnes, alors tous les moyens peuvent être mis à leur service. La fascination pour la technique n'est pas étrangère à ce curieux blanc-seing donné aux moyens de communication. Ainsi, pour ne prendre que cet exemple, la propagande est diabolique lorsqu'elle est au service des régimes totalitaires, mais devient d'une certaine façon respectable lorsqu'elle est mise au service d'idéaux démocratiques. Le sommet de cette confusion entre les fins et les moyens est la publicité moderne. Objet complexe par le mélange des genres qu'elle opère, la publicité reste un formidable outil de manipulation des esprits. Les générations futures jugeront peut-être que nous aurons été de ce point de vue autant sous influence que les habitants des pays totalitaires que nous plaignons d'avoir été irradiés par la propagande. Mais comme la cause est bonne, du moins du point de vue du secteur marchand, les moyens le seraient aussi.

Un autre signe du déclin de la parole est la désaffection des systèmes d'enseignement et de recherche vis-à-vis de ce que Roland Barthes avait qualifié d'« empire rhétorique. » En 1902 disparaissait des programmes d'enseignement français cette matière qui avait été, depuis deux mille cinq cents ans, la base de toute scolarité. Bien sûr, la rhétorique s'était progressivement dégradée, pour n'être plus qu'une coquille en partie vidée du contenu citoyen qu'elle avait à la période classique. Une des fonctions civiques essentielles de l'enseignement ne serait-elle pas de montrer que les grandes valeurs démocratiques ne sont rien si les moyens pour les défendre ne sont pas, eux aussi, au service du recul de la violence et de la construction d'un lien social solidaire, c'est-à-dire respectueux de la relation à autrui?

Pour obvier à tous ces risques, ne faudrait-il pas réfléchir à cette disjonction entre une éthique des fins et une éthique des moyens, qui partirait du principe que toute parole, quelle qu'elle soit, se corrompt d'être diffusée à l'aide de procédés manipulatoires qui ne respectent ni celui qui émet ni celui qui la reçoit? Les normes qui permettraient d'opérer une partition entre ce qui relève du respect et ce qui émerge à la violence manipulatoire existent. Déjà la culture grecque de l'argumentation, à peine inventée, les discutait. Depuis cette époque, tout homme politique qui franchit par exemple la ligne rouge de la démagogie sait qu'il le fait. Ces normes, qui sont des normes de civilisation, sont connues de tous. Mais leur portée est atténuée, voire niée dans un climat où le laisser-faire s'applique aussi à la parole et aux procédés de communication.

Tout rappel de ces normes est pris dans la fausse alternative liberté/censure qui est le credo des sociétés libérales. Il en est de ces normes comme de toute parole dans l'espace public : on peut tout dire, tout faire. Toute idée qui trouve preneur serait légitime du fait même qu'elle trouve preneur. C'est ainsi que les lois du marché contaminent jusqu'au monde des idées et des moyens de les communiquer. Il faut rappeler que de la même façon que nous avons renoncé, en signe de civilisation, à l'exercice de la violence et de la vengeance privée, nous avons reconnu, au moment même de la naissance de la démocratie, des normes qui permettent de renoncer à la fin de la violence psychologique que constitue la manipulation de la parole. Il est peut-être temps de les réactiver, d'en souligner l'importance pour la démocratie et de montrer l'intérêt que chaque citoyen pourrait en retirer.

Philippe Breton, *Le Culte d'Internet. Une menace pour le lien social?*
La Découverte, collection « Sur le vif », Paris, 2000.

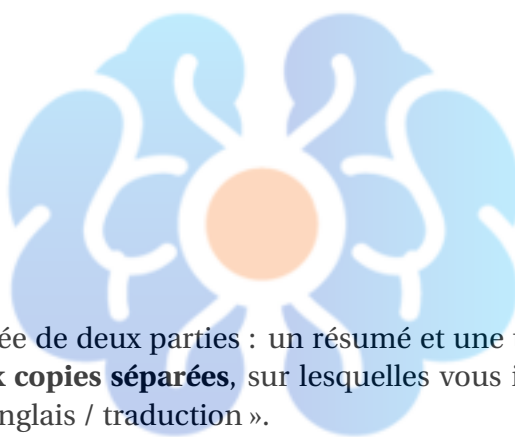
Ce texte comporte environ 1280 mots.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve d'anglais

Durée : 2h



L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Sustainability schemes deployed by business most often ineffective, research reveals

Published in The Conversation.com on December 1, 2023

If you ever wondered what the weather might look like should global average temperatures rise 2C degrees above pre-industrial levels – the critical warming threshold the Paris Agreement seeks to prevent us from reaching – take your mind's eye back to Friday 17 November. That day, for the first time since records began, global surface air temperature briefly reached 2.07C above pre-industrial levels. While this does not mean that we have breached the global climate agreement's target, the frequency at which the mercury jumps over that line raises serious concern.

As this year's global annual climate talks, COP28, unfolds, one could hope that this would shock governments into strengthening their climate goals. But this point in time ought to be a moment of reckoning for companies, too. The data, however, indicates otherwise, as executives lie about their environmental, social and governance (ESG) efforts and cut green spending further.

Thankfully, there are many ways in which companies can change course, starting at an internal level with sustainability schemes. For the sake of clarity, we define the latter as organised initiatives to provide sustainability guidance to companies through principles, frameworks, guidelines, and standards. My recent research with James Demastus assessed 20 of the most used environmental sustainability schemes for their effectiveness in advancing sustainability, including the UN Sustainable Development Goals, the Global Reporting Initiative, and Certified B Corporations.

The United Nations' Sustainable Development Goals (SDG) are among the most famous. By contrast to other schemes, SDGs are country-level initiatives to which businesses can choose to contribute to or not. Companies are free to identify any of the 17 SDG that are aligned with their goals, such as affordable and clean energy, climate action, or sustainable cities and communities, and carry out sustainable practices that will contribute to reaching the global SDG goal. Note that participating companies are not held up to any SDG requirements or accountability frameworks, instead enjoying the warm glow of taking part in a global movement for sustainability.

Sustainability reporting guidelines are another type of scheme. In the EU, annual sustainability reporting is required for all large companies. When a company writes a sustainability report to share its sustainability activities, such as its public commitment to help achieve the SDG, they often use a reporting template, such as the Global Reporting Initiative (GRI). The GRI template has been adopted by more than 10,000 companies worldwide and is the most widely used sustainability reporting framework. The GRI specifies what non-financial information that companies should disclose, such as energy usage, waste production, greenhouse gas emissions, impact on biodiversity, and environmental compliance. However, there are numerous other sustainability reporting templates and it is not mandatory to follow the GRI format.

As an example, Unilever uses the GRI reporting guidelines. In its environmental sustainability disclosure, Unilever's 2021 sustainability report states that it has achieved a 64% reduction in operational carbon emissions and is pursuing a target of zero operational carbon emissions by 2030.

Company sustainability certification standards are another type of scheme. Certified B

Corporation (B Corp) guides companies to prioritise workers, community, and the environment alongside profit. The Body Shop and Tony's Chocolonely are both Certified B Corps. B Lab, the organisation that oversees B Corp certification, reports that Tony's Chocolonely does quite well in meeting the B Corp standards for environmental management, air and climate impacts, and land and biodiversity impacts, but has room for improvement in the area of water impacts.

Our research concluded that all 20 of the commonly used schemes in our study aligned with various forms of weak sustainability that promote incremental sustainability progress and continue to advocate for a growth-oriented economy.

For example, most schemes only consider a company's internal or operational carbon emissions and ignore the supply-chain emissions generated by a company's choice of materials, suppliers, and transit options – which they can account for more than 90% of a company's carbon emissions.

Furthermore, many schemes are vague and offer no guidance on how to reduce operational carbon emissions. Coming back to the three schemes cited at the top of the article, SDG requires countries to “take urgent action” to address climate change, the GRI requires companies to simply calculate and report greenhouse gas emissions, and B Corp certification demands that companies to “take action in accordance with science”. In practice, companies are left to navigate the options available and decide on the best course of action.

As a result, companies often take the easy route of buying carbon offsets, which have come under great scrutiny as being worthless or even downright polluting, instead of companies tackling the hard work of reducing internal operational emissions. Aware of such trends, the EU has recently passed legislation that requires companies making climate-related claims to disclose if they are slashing internal operational emissions or relying on carbon offsets.

On a positive note, our research identified five schemes that performed better than others, including frameworks centred on concepts such as the circular economy, doughnut economics or planetary boundaries, and The Natural Step framework, and the certification standard scheme ISO 14001.

The circular economy seeks to minimise companies' carbon footprint by reducing demand for new materials, slash waste and increase products' durability overall. Doughnut economics is a theoretical model that defines maximum ecological limits that we should not exceed and minimum basic social needs that we should meet; the goal is to stay between these two limits to maintain a flourishing and healthy planet and society. Amsterdam, Copenhagen, Brussels, and Berlin are among its early adopters. Meanwhile, the model is proving a harder sell for businesses, who are just beginning to explore how it could help them (re)design business for sustainability.

Planetary boundaries is a framework that identifies nine processes that regulate earth systems, such as climate change and ocean acidification, and researchers quantified those processes to determine the boundaries within which humans can comfortably live. Governments and businesses have taken interest in how to stay within those boundaries and, more importantly, how to prepare for future impacts from breached boundaries. Hitachi has publicly committed to keeping its corporate activities within planetary boundaries with a focus on “growth within the limits”.

The Natural Step (TNS) framework was started over 30 years ago in Sweden and was the first to develop a shared definition, vision, principles, framework, and process for companies to begin the sustainability journey. Nike was an early adopter of The Natural Step through its Reuse-a-Shoe program to take back worn shoes for recycling; the program continues today. Scandic Hotels also began its sustainability work under the advisement of The Natural

Step and continues to follow TNS principles: do not degrade the earth, over-extract from the Earth's surface, produce too much waste, or interfere with individuals' capacity to meet their own needs.

The other schemes not mentioned in the study, such as the European Commission's Eco-Management and Audit Scheme (EMAS), the United Nations' Global Compact, and the Carbon Disclosure Project, were more oriented toward sustaining business rather than sustaining our human habitat.

2 Translate the following text into French

How the Barclay brothers built and wrecked an empire

The twins accrued hotels, newspapers and a fortress on their own island – then their fortune vanished. By Pippa Bailey

Source: <https://www.newstatesman.com/culture/books/2023/10/the-barclay-brothers-built-wrecked-empire>

In the summer of 2022, the Sunday Times Rich List billionaire Frederick Barclay, then 87, appeared at the High Court, accused by his ex-wife of contempt for failing to pay out on their £100m divorce settlement. Frederick's nephews, the sons of his twin brother David, had more lawyers in the courtroom than either their uncle or aunt, and attempted – unsuccessfully – to prevent proceedings from being reported. This was typical of the family, who were notoriously publicity-shy. “After a lifetime of secrecy,” writes Jane Martinson in her account of the twins and their business dealings, “suddenly stories of family fallouts and crises filled the pages of the newspapers.”

The court's problem was that the Barclays' business network was so complex that no one seemed to understand it, even within the family. “The case kept coming back to two issues: the search for huge sums of money in ownership structures that were still entirely opaque, and the search for the ultimate controller.” This is a problem for Martinson, too, for though *You May Never See Us Again* follows the leads as well as any detective, the whole picture feels tantalisingly just out of view. The problem, Frederick told the judge, wasn't that he was unwilling to pay, but he was unable to. One half of a partnership once said to be worth £6bn now claimed to have no money. Where had it gone?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Corrections



L'Épreuve est constitué de trois exercices indépendants.

Rappel : Les corrigés sont proposés à titre informatif. N'hésitez pas à contribuer et proposer des améliorations en nous contactant : contact@ceas.fr.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Corrigé Session 2024

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1. Probabilités

Question 1. (a)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ en fonction de celles de X et Y , et en déduire une relation entre G_{X+Y} , G_X et G_Y .

Solution

1. Détermination de la loi de $X + Y$

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Pour une valeur donnée k , la probabilité que $X + Y = k$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{n=0}^k P(X = n)P(Y = k - n).$$

Cela découle de l'indépendance des deux variables et de la formule des probabilités totales.

2. Relation entre les fonctions génératrices

Par définition, la fonction génératrice $G_{X+Y}(t)$ est donnée par :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X + Y = k) t^k.$$

En substituant $P(X + Y = k)$, on obtient :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k P(X = n)P(Y = k - n) \right) t^k.$$

En réorganisant les termes et en utilisant la linéarité des sommes :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) t^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P(Y = m) t^m.$$

Ici, $m = k - n$, donc cette somme devient le produit des séries infinies :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Question 1. (b)

Généraliser le résultat précédent à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Solution

1. Détermination de la loi de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

La probabilité que $S_n = k$ est donnée par :

$$P(S_n = k) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} P(X_1 = k_1) P(X_2 = k_2) \dots P(X_n = k_n).$$

Cela découle de l'indépendance mutuelle des variables aléatoires et de la formule des probabilités totales appliquée récursivement.

2. Relation entre les fonctions génératrices

Par définition, la fonction génératrice de S_n , notée $G_{S_n}(t)$, est :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k) t^k.$$

En utilisant la relation de convolution pour la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, et par récurrence sur n , on obtient :

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(t).$$

En particulier, si toutes les variables aléatoires X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ont la même loi (i.e., $X_1 \sim X_2 \sim \dots \sim X_n$), avec une fonction génératrice commune $G_X(t)$, alors :

$$G_{S_n}(t) = [G_X(t)]^n.$$

Question 2. (a)

Soit U la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Déterminer sa fonction génératrice $G_U(t)$ et déterminer toutes les racines réelles de $G_U(t)$ ainsi que leur multiplicité.

Solution

1. Détermination de la fonction génératrice $G_U(t)$

La loi U est uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, \dots, 12\}$. Cela signifie que chaque valeur k dans cet ensemble a une probabilité égale à :

$$P(U = k) = \frac{1}{11} \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots, 12.$$

Par définition, la fonction génératrice $G_U(t)$ est donnée par :

$$G_U(t) = \sum_{k=2}^{12} P(U = k) t^k.$$

En substituant $P(U = k) = \frac{1}{11}$, on obtient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k.$$

Cette somme est une somme partielle d'une série géométrique. En factorisant t^2 , on obtient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} t^2 \sum_{k=0}^{10} t^k.$$

La somme $\sum_{k=0}^{10} t^k$ est une somme géométrique dont la formule est :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, \quad \text{pour } t \neq 1.$$

En appliquant cette formule avec $n = 10$, on a :

$$\sum_{k=0}^{10} t^k = \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.$$

Ainsi, la fonction génératrice devient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^2(1 - t^{11})}{1 - t}, \quad \text{pour } t \neq 1.$$

2. Détermination des racines réelles de $G_U(t)$

Les racines de $G_U(t)$ sont les valeurs de t qui annulent le numérateur $t^2(1 - t^{11})$, à l'exception de celles qui annuleraient le dénominateur $1 - t$.

1. Racines provenant de t^2 :

$$t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad (\text{racine double}).$$

2. Racines provenant de $1 - t^{11}$:

$$1 - t^{11} = 0 \Rightarrow t^{11} = 1.$$

Les racines sont donc les 11-èmes racines de l'unité :

$$t = e^{2i\pi k/11}, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

Parmi ces racines, seules $t = 1$ ($k = 0$) est réelle.

3. Racine provenant de $1 - t$:

$$1 - t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Cependant, cette racine est annulée par la simplification du dénominateur.

3. Multiplicité des racines

- $t = 0$ a une multiplicité de 2, car elle provient de t^2 .

Question 2. (b)

Supposons que l'on ait un dé à 6 faces tel que la probabilité d'apparition de la face $i \in \{1, \dots, 6\}$ soit égale à p_i , avec $p_i \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire associée à l'apparition d'une face. Montrer que G_X admet une racine non nulle.

Solution

1. Définition de la fonction génératrice $G_X(t)$

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec des probabilités associées $P(X = i) = p_i$. La fonction génératrice $G_X(t)$ est donnée par :

$$G_X(t) = \sum_{i=1}^6 p_i t^i.$$

2. Étude des racines de $G_X(t)$

Le polynôme $G_X(t)$ est de degré 6 :

$$G_X(t) = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5 + p_6 t^6,$$

où les coefficients p_i sont strictement positifs ($p_i > 0$) car $p_i \in]0, 1[$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

3. Argument pour l'existence d'une racine non nulle

Le polynôme $G_X(t)$ est défini sur $\mathbb{R}$, mais il peut être considéré comme un polynôme sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Tout polynôme non constant de degré n a exactement n racines complexes (comptées avec multiplicité). Les racines de $G_X(t)$ peuvent être :

- réelles (positives ou négatives) ;
- complexes non réelles (apparaissant par paires conjuguées si les coefficients du polynôme sont réels).

Étant donné que $G_X(t)$ est de degré 6, il a précisément 6 racines complexes. Parmi elles :

- $t = 0$ est une racine triviale due au terme t^i pour $i \geq 1$.
- Les autres racines $t \neq 0$ satisfont $G_X(t) = 0$.

4. Existence d'une racine réelle non nulle

Le polynôme $G_X(t)$ satisfait les conditions suivantes : $G_X(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, et $G'_X(0) = p_1 > 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} G_X(t) = +\infty$. Au voisinage de 0, $G_X(t)$ devient négative pour $t < 0$. Il est clair que $G_X(t) = 0$ pour au moins un $t < 0$, et ainsi, $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle.

Question 2. (c)

On veut montrer qu'il n'est pas possible de construire un dé faussé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) tel que si on le lance deux fois, la somme des deux résultats obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$.

Solution

Synthèse des réponses aux questions 2.(a) et 2.(b)

1. Fonction génératrice de la loi uniforme U (Question 2.(a)) La fonction génératrice de la loi uniforme U sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ est donnée par :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^2(1 - t^{11})}{1 - t}.$$

Les racines réelles de $G_U(t)$ sont : $t = 0$ avec une multiplicité de 2.

2. Fonction génératrice du dé à 6 faces (Question 2.(b)) La fonction génératrice associée au dé est :

$$G_X(t) = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5 + p_6 t^6,$$

où $p_i > 0$ pour $i = 1, \dots, 6$, et $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$.

Nous avons démontré que $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle.

Démonstration que U ne peut pas être obtenu par deux lancers

Si un dé faussé à 6 faces pouvait générer une loi uniforme U sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ par la somme de deux lancers, alors la fonction génératrice $G_U(t)$ de cette loi uniforme serait donnée par le carré de la fonction génératrice du dé :

$$G_U(t) = [G_X(t)]^2.$$

1. Analyse des racines :

- $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle réelle.
- Cela implique que $[G_X(t)]^2$ admet également des racines non nulles réelles, mais avec des multiplicités doublées.

2. Incompatibilité avec $G_U(t)$:

- Les seules racines réelles de $G_U(t)$ sont $t = 0$ (multiplicité 2).
- Si $G_U(t) = [G_X(t)]^2$, alors les racines de $G_U(t)$ proviendraient uniquement des racines de $G_X(t)$. Or, $G_X(t)$ ne peut pas produire une structure des racines cohérente avec $G_U(t)$.

Conclusion

Il est impossible de construire un dé à 6 faces avec des probabilités $p_i > 0$ pour lesquelles la somme de deux lancers suit une loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. La structure des fonctions génératrices $G_X(t)$ et $G_U(t)$ est incompatible.

Question 3. (a)

Préciser la fonction caractéristique de N , où N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution

Définition de la fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire N est définie par :

$$\phi_N(t) = \mathbb{E}[e^{itN}],$$

où $t \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la loi de Poisson

La variable N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité qu'elle prenne la valeur k est donnée par :

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcul de la fonction caractéristique

La fonction caractéristique s'écrit alors :

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(N = k).$$

En substituant $P(N = k)$, on obtient :

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

En regroupant les termes $e^{-\lambda}$ et $\frac{\lambda^k}{k!}$, cela devient :

$$\phi_N(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}.$$

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est le développement en série de Taylor de e^z . En utilisant cette propriété, on a :

$$\phi_N(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

Cela peut être simplifié en :

$$\phi_N(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Question 3. (b)

Déterminer la fonction caractéristique de Y , où Y est la variable aléatoire correspondant au nombre de produits vendus par jour. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution

Modèle pour Y

- N , le nombre de clients par jour, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- Chaque client achète un produit avec une probabilité $p \in [0, 1]$, et ces décisions sont indépendantes entre les clients.

La variable Y (le nombre total de produits vendus par jour) est alors la somme de N variables indicatrices indépendantes :

$$Y = \sum_{i=1}^N Z_i,$$

où Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p (i.e., $P(Z_i = 1) = p$, $P(Z_i = 0) = 1 - p$).

Fonction caractéristique de Y

La fonction caractéristique de Y , notée $\phi_Y(t)$, est donnée par :

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}].$$

Étape 1 : Conditionnement sur N En conditionnant sur $N = n$, Y est la somme de n variables indicatrices indépendantes :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n].$$

Si $N = n$, alors $Y = \sum_{i=1}^n Z_i$, où chaque Z_i est indépendante. On a :

$$\mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n] = \mathbb{E}[e^{itZ_1}]^n,$$

car les Z_i sont indépendantes et identiquement distribuées.

Pour une variable de Bernoulli Z_i , la fonction caractéristique est :

$$\mathbb{E}[e^{itZ_i}] = (1 - p) + pe^{it}.$$

Donc :

$$\mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n] = [(1 - p) + pe^{it}]^n.$$

Étape 2 : Expression non conditionnée La probabilité $P(N = n)$ pour N suivant une loi de Poisson est donnée par :

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

En substituant :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} [(1 - p) + pe^{it}]^n.$$

Regroupons les termes :

$$\phi_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda((1 - p) + pe^{it})]^n}{n!}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, donc :

$$\phi_Y(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda((1-p) + pe^{it})}.$$

Simplifions :

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda(-1 + (1-p) + pe^{it})}.$$

Finalement, on obtient :

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda(p(e^{it}-1))}.$$

Loi de Y

La fonction caractéristique obtenue est celle d'une loi de Poisson avec paramètre $\lambda_Y = \lambda p$. Par conséquent :

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda p).$$

Exercice 2. Autour de la constante d'Euler.

Partie 1 - Question 1

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, et utiliser cette inégalité pour montrer que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Solution

1. Montrons que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

Définition des termes La somme partielle H_n de la série harmonique est définie comme :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

La différence $H_{2n} - H_n$ est donnée par :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Minoration de la somme Dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, tous les k sont compris entre $n+1$ et $2n$. Ainsi :

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}, \quad \text{pour tout } k \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}.$$

Il y a n termes dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Par conséquent :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n}.$$

En simplifiant :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2. Montrons que la série harmonique diverge

H_n est une somme partielle de la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. En répétant l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ à chaque étape, on observe que H_{2n} croît d'au moins $\frac{1}{2}$ à chaque doublement de n . Cela montre que H_n n'est pas bornée et donc que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Partie 1 - Question 2. (a)

Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Solution

Analyse de l'expression

Développement en série de $\ln(1+x)$ Pour $|x| < 1$, la fonction logarithme naturel $\ln(1+x)$ admet le développement en série suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots.$$

En tronquant après le premier terme, nous obtenons une approximation : $\ln(1+x) \approx x$. L'erreur d'approximation est donnée par :

$$R(x) = \ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots.$$

Application avec $x = \frac{1}{n}$ En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots.$$

L'ordre dominant de l'erreur est donc $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Majoration de l'erreur

Pour majorer l'erreur, utilisons une borne supérieure sur la série restante. Le reste $R(x)$ peut être écrit comme :

$$R(x) = \ln(1+x) - x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Pour $x = \frac{1}{n}$, cela devient :

$$R\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k n^{k-2}}.$$

Comme $n^{k-2} = e^{(k-2)\ln(n)} \geq e^{(k-2)\ln(2)}$, pour $n \geq 2$, on en déduit que la série $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k n^{k-2})$ est convergente. On peut donc écrire :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2},$$

où C est une constante positive.

Remarque : On pourra aussi utiliser la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0, 1/n]$.

Partie 1 - Question 2. (b)

En déduire que la série :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

converge, puis qu'il existe une constante γ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Solution

1. Convergence de la série

Expression de la différence dans la somme La différence dans la somme est donnée par :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, la série devient :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right).$$

Majoration des termes de la série D'après la question 2.(a), nous savons que :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2},$$

où $C > 0$ est une constante.

Ainsi, les termes de la série sont majorés en valeur absolue par $\frac{C}{n^2}$.

Convergence de la série La série $\sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^2}$ est une série de type p -série avec $p = 2 > 1$, qui converge. Par le critère de majoration, la série donnée converge également.

2. Approximation asymptotique de H_n

Décomposition de H_n Par définition, H_n est la somme harmonique partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On peut la décomposer en :

$$H_n = \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right).$$

Convergence de la correction La somme corrective :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right)$$

converge, comme démontré dans la première partie. Sa limite définit une constante, appelée la constante d'Euler-Mascheroni et est notée γ .

Expression asymptotique En regroupant, on obtient l'approximation asymptotique de H_n :

$$\begin{aligned} H_n &= \ln n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Partie 2 - Question 3

Montrer que les intégrales impropres

$$\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

sont convergentes.

Solution

Étape 1 : Intégrale sur $[0, 1]$

Analysons l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$.

Comportement de $\ln(t)$ près de $t = 0$

- La fonction $\ln(t)$ diverge négativement lorsque $t \rightarrow 0^+$.
- Le facteur e^{-t} tend vers 1 pour $t \rightarrow 0^+$.

Convergence Dans cette région, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|\ln(t) e^{-t}| = |\ln(t)| \cdot e^{-t}.$$

On utilise une majoration : $|\ln(t)| \leq -\ln(t)$ (car $\ln(t)$ est négatif pour $t \in (0, 1)$).

Pour tester la convergence :

- $\ln(t)$ diverge en $t \rightarrow 0^+$, mais le produit $|\ln(t)| \cdot t^a$ converge vers 0 pour tout $a > 0$.
- Prenons $0 < a < 1$: l'intégrale de t^{-a} est convergente, donc l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$ converge sur $[0, 1]$.

Étape 2 : Intégrale sur $[1, \infty]$

Analysons l'intégrale $\int_1^\infty \ln(t) e^{-t} dt$.

Comportement de $\ln(t) e^{-t}$ pour $t \rightarrow \infty$

- Pour t grand, $\ln(t)$ croît lentement, mais e^{-t} décroît exponentiellement plus vite.
- Par comparaison avec $\frac{\ln(t)}{e^t}$, cette intégrale est dominée par une fonction qui converge rapidement vers 0.

Convergence Pour tester la convergence :

$$|\ln(t) e^{-t}| \leq \ln(t) \cdot e^{-t}.$$

La convergence est assurée car $e^{-t} = e^{-t/2} e^{-t/2}$ et $e^{-t/2}$ domine tout terme polynomial et aussi $\ln(t)$.

Conclusion

Les deux intégrales impropres sont convergentes :

$$\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \ln(t) e^{-t} dt.$$

Partie 2 - Questions 4. (a) et 4. (b)

Question 4. (a)

Montrer que, pour tout $u \in]-1, \infty[$,

$$\ln(1 + u) \leq u.$$

Solution

1. Considérons la fonction $f(u) = \ln(1+u) - u$, définie sur $u \in]-1, \infty[$.

2. Calculons sa dérivée :

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{1 - (1+u)}{1+u} = -\frac{u}{1+u}.$$

3. Observons les propriétés de $f'(u)$:

- Lorsque $u \in]-1, 0]$, $f'(u) \geq 0$, donc $f(u)$ est croissante sur cet intervalle.
- Lorsque $u \in [0, \infty[$, $f'(u) \leq 0$, donc $f(u)$ est décroissante sur cet intervalle.

4. Calculons $f(0)$:

$$f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0.$$

5. Puisque $f(u)$ est croissante pour $u < 0$ et décroissante pour $u > 0$, et que $f(0) = 0$, on a $f(u) \leq 0$ pour tout $u \in]-1, \infty[$.

En conclusion :

$$\ln(1+u) \leq u \quad \text{pour tout } u \in]-1, \infty[.$$

Question 4. (b)

En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Solution Examinons $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ pour $t \in [0, n]$. Tout d'abord, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ est bien définie et positive car $t \in [0, n]$, donc $1 - \frac{t}{n} \geq 0$.

Prenons le logarithme de cette expression :

$$\ln \left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \right) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Par la question 4(a), pour $u = -\frac{t}{n}$, on a :

$$\ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}.$$

Donc,

$$(n-1) \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -(n-1) \frac{t}{n}.$$

Par exponentiation, on obtient :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \exp \left(-(n-1) \frac{t}{n} \right).$$

Simplifions l'exposant :

$$-(n-1) \frac{t}{n} = -t + \frac{t}{n}.$$

Ainsi,

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e^{-t} \cdot e^{\frac{t}{n}}.$$

Pour $t \in [0, n]$, on a $e^{\frac{t}{n}} \leq e$, donc :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Partie 2 - Question 5

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt.$$

Solution

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt &= \int_0^\infty \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathbb{I}_{\{t \leq n\}} dt \\ &= \int_0^\infty \ln(t) f_n(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la question 4,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathbb{I}_{\{t \leq n\}} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Il est également facile de montrer que f_n converge simplement vers f avec $f(t) = e^{-t}$. Enfin, d'après la question 3, $\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt$ est bien définie. On déduit le résultat par le théorème de convergence dominée rappelé dans l'énoncé.

Partie 2 - Question 6

Montrer successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt &= \ln(n) + \int_0^1 n \ln(u) (1-u)^{n-1} du \\ &= \ln(n) + \int_0^1 \frac{1}{u} [(1-u)^{n-1} - 1] du. \end{aligned}$$

Solution

1. **Première égalité :** On part de l'intégrale donnée :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

En utilisant le changement de variable $t = nu$, où $u \in [0, 1]$, on a $dt = n du$ et $t = nu$. L'intégrale devient :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^1 \ln(nu) (1-u)^{n-1} n du.$$

On utilise la propriété du logarithme $\ln(nu) = \ln(n) + \ln(u)$ pour réécrire l'intégrale comme suit :

$$\int_0^1 \ln(nu) (1-u)^{n-1} n du = n \int_0^1 [\ln(n) + \ln(u)] (1-u)^{n-1} du.$$

En séparant les termes, on obtient :

$$n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du + n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du.$$

Le premier terme est :

$$n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du.$$

L'intégrale $\int_0^1 (1-u)^{n-1} du$ est bien connue et vaut $\frac{1}{n}$. Ainsi, ce terme devient :

$$n \ln(n) \cdot \frac{1}{n} = \ln(n).$$

2. **Seconde égalité :** Le second terme est :

$$n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du.$$

Par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du \\ &= -n \left[\ln(u) \frac{(1-u)^n - 1}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du \\ &= \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du, \end{aligned}$$

ce qui montre la deuxième égalité.

Partie 2 - Question 7

Retrouver la formule de la constante d'Euler γ donnée en début de la partie 2 :

$$\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma.$$

Solution

De la question 6, nous savons que :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du.$$

Or

$$\frac{(1-u)^n - 1}{u} = -\frac{(1-u)^n - 1}{(1-u) - 1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-u)^k$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= -H_n. \end{aligned}$$

On déduit le résultat à partir du résultat obtenu de la partie 1.

Partie 3 - Question 8

Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien définie et vérifie

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt.$$

En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.

Solution

1. **Définition de $\zeta(s)$** La fonction zêta de Riemann est définie pour $s > 1$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La série converge pour $s > 1$ car la somme partielle $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$ est dominée par une intégrale convergente (démontré ci-dessous).

2. **Encadrement par une intégrale** Pour $s > 1$, $\frac{1}{t^s}$ est décroissante, ce qui permet d'encadrer la somme par une intégrale (méthode des sommes de Riemann) :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{n^s}.$$

En sommant sur n , on obtient :

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s).$$

et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt.$$

3. **Calcul de l'intégrale** La primitive de $\frac{1}{t^s}$ pour $s > 1$ est donnée par :

$$\frac{t^{1-s}}{s-1}.$$

Ainsi, pour $t \in [1, \infty[$, l'intégrale devient :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{(s-1)t^{s-1}} \right]_1^T = \frac{1}{s-1}.$$

4. **Encadrement de $\zeta(s)$** Substituons $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}$ dans l'encadrement de $\zeta(s)$:

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

5. **Équivalent lorsque $s \rightarrow 1^+$** Lorsque $s \rightarrow 1^+$, on remarque que la divergence de $\zeta(s)$ est dominée par le terme $\frac{1}{s-1}$, car $1 + \frac{1}{s-1}$ tend aussi vers ∞ . Par conséquent :

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}, \quad \text{lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

Partie 3 - Question 9

- (a) Montrer que, pour $s > 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

converge.

- (b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$.
 (c) En déduire la formule :

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt,$$

où $E(t)$ désigne la fonction partie entière.

Solution

(a) **Convergence de la série** Considérons le terme général de la série donnée :

$$a_n = n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

1. **Simplification du terme général** : En factorisant par $\frac{1}{n^s}$, on obtient :

$$a_n = n \cdot \frac{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^s}{n^s}.$$

Or, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s$, et en développant au premier ordre avec le développement de Taylor :

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s \approx 1 - \frac{s}{n+1}.$$

Ainsi :

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \approx \frac{s}{n+1}.$$

2. **Comportement asymptotique** : Substituons cette approximation dans a_n :

$$a_n \approx n \cdot \frac{\frac{s}{n+1}}{n^s}.$$

Pour n grand, cela donne :

$$a_n \sim \frac{s}{n^s}.$$

Comme $s > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge. Par conséquent, la série donnée converge également.

(b) **Évaluation de la somme** Évaluons les sommes partielles :

$$S_N = \sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

1. **Réécriture** : Posons

$$A_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^s},$$

et $A_0 = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N n(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^N nA_n - \sum_{n=1}^N nA_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^N nA_n - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)A_n = - \sum_{n=1}^{N-1} A_n + NA_N \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} - (N-1) + NA_N \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + N(A_N - 1) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N}{(N+1)^s} \end{aligned}$$

2. **Limite lorsque $N \rightarrow \infty$** : Lorsque $N \rightarrow \infty$, le terme $-\frac{N}{(N+1)^s}$ tend vers 0. Par conséquent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \zeta(s).$$

(c) Formule intégrale Pour établir la formule intégrale, utilisons la fonction partie entière $E(t)$, définie comme le plus grand entier inférieur ou égal à t .

La somme partielle de la série peut être exprimée en termes de la fonction partie entière :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt &= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{n}{t^{s+1}} dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \zeta(s).\end{aligned}$$

Partie 3 - Question 10

Démontrer que, pour tout entier $N \geq 2$, on a :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = H_N - \ln(N) - 1,$$

et en déduire la formule :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Solution

1. Analyse de l'intégrale L'intégrale donnée est :

$$I_N = \int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt,$$

où $E(t)$ est la fonction partie entière de t .

2. Décomposition de $E(t) - t$ Pour $t \in [n, n+1)$, où n est un entier, la fonction partie entière $E(t)$ est constante et égale à n . Ainsi :

$$E(t) - t = n - t.$$

Donc, l'intégrale sur $[n, n+1)$ devient :

$$\int_n^{n+1} \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt.$$

3. Calcul de l'intégrale élémentaire Décomposons :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = n \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt - \int_n^{n+1} \frac{t}{t^2} dt.$$

• **Premier terme :**

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

• **Deuxième terme :**

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Substituons ces résultats dans l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = n \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Simplifions :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

4. Somme de $[1, N]$ En sommant pour $n = 1$ à $N - 1$, l'intégrale devient :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \right).$$

- Les termes $\ln(n)$ se télescopent dans la somme, laissant $-\ln(N)$.
- La somme des termes $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donne $H_N - 1$.

Ainsi :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = H_N - \ln(N) - 1.$$

5. Passage à la limite Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a :

$$H_N - \ln(N) \rightarrow \gamma,$$

où γ est la constante d'Euler. Donc :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Partie 3 - Question 11

Justifier l'égalité :

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

et conclure que :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

Solution

1. Décomposition de $\zeta(s)$ Par définition, la fonction zêta est donnée par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

D'après la question précédente, on peut exprimer cette somme comme une intégrale :

$$\zeta(s) = \int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt,$$

où $E(t)$ est la fonction partie entière de t .

2. Substraction de $\frac{s}{s-1}$ En ajoutant et en soustrayant le terme intégral correspondant à $\frac{t}{t^{s+1}}$, on obtient :

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = s \int_1^\infty \frac{t}{t^{s+1}} dt + s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

La première intégrale est simple à calculer :

$$\int_1^\infty \frac{t}{t^{s+1}} dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}.$$

En substituant, nous avons :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

ou encore

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

3. Comportement asymptotique lorsque $s \rightarrow 1^+$ Lorsque $s \rightarrow 1^+$, on sait que :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt \rightarrow \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Ainsi, pour $s \rightarrow 1^+$:

$$s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt \rightarrow (\gamma - 1).$$

En regroupant les termes, on trouve :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1), \quad \text{lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

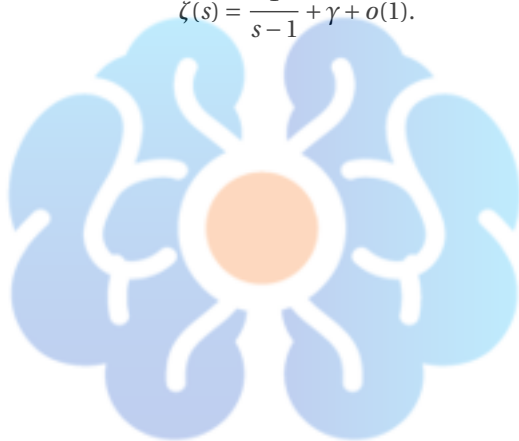
Conclusion

1. Nous avons montré que :

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

2. Lorsque $s \rightarrow 1^+$, $\zeta(s)$ admet l'équivalent :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$



Exercice 3. Sous-espaces de matrices nilpotentes.

Question 1

Montrer que T_n^+ , T_n^- et T_n^{++} sont des sous-espaces vectoriels (on pourra se contenter de rédiger les détails pour T_n^+) et préciser leur dimension.

Solution

1. T_n^+ est un sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel si :

1. W est non vide.
2. W est stable par addition : si $A, B \in W$, alors $A + B \in W$.
3. W est stable par multiplication scalaire : si $A \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda A \in W$.

Pour T_n^+ , qui est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_n(\mathbb{R})$:

- **Non-vide** : La matrice nulle appartient à T_n^+ , donc $T_n^+ \neq \emptyset$.
- **Stabilité par addition** : Si $A, B \in T_n^+$, alors la somme $(A + B)$ est aussi une matrice triangulaire supérieure car les coefficients sous la diagonale restent nuls.
- **Stabilité par multiplication scalaire** : Si $A \in T_n^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λA est encore une matrice triangulaire supérieure car les coefficients sous la diagonale restent nuls.

Ainsi, T_n^+ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Dimension de T_n^+

Les matrices triangulaires supérieures ont $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients non nuls (tous ceux situés sur ou au-dessus de la diagonale). Par conséquent, la dimension de T_n^+ est $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. Dimension de T_n^-

De manière similaire, T_n^- (matrices triangulaires inférieures) a également $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients non nuls, donc la même dimension.

4. Dimension de T_n^{++}

Les matrices triangulaires strictement supérieures ont des zéros sur la diagonale et $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients non nuls (ceux au-dessus de la diagonale). Ainsi, la dimension de T_n^{++} est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Question 2

Montrer que $T_n^- \oplus T_n^{++} = M_n(\mathbb{R})$.

Solution

Définition des ensembles

- T_n^- : Ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- T_n^{++} : Ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (n'ayant que des 0 sur la diagonale).
- $M_n(\mathbb{R})$: Ensemble de toutes les matrices $n \times n$ à coefficients réels.

L'objectif est de montrer que chaque matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut être exprimée comme la somme d'une matrice $B \in T_n^-$ et d'une matrice $C \in T_n^{++}$, c'est-à-dire :

$$A = B + C \quad \text{avec } B \in T_n^- \text{ et } C \in T_n^{++}.$$

Construction des matrices B et C

Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Construisons $B \in T_n^-$ et $C \in T_n^{++}$ de la manière suivante :

- Pour $B = (b_{ij}) \in T_n^-$ (triangulaire inférieure), définissons :

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Ainsi, B contient les éléments de A situés sur ou sous la diagonale, avec des 0 au-dessus de la diagonale.

- Pour $C = (c_{ij}) \in T_n^{++}$ (triangulaire supérieure stricte), définissons :

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Ainsi, C contient les éléments de A situés au-dessus de la diagonale, avec des 0 ailleurs.

Somme des matrices B et C

En sommant ces deux matrices, nous obtenons :

$$(B + C)_{ij} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij} = a_{ij} & \text{dans tous les cas,} \end{cases}$$

car les termes b_{ij} et c_{ij} sont complémentaires et couvrent exactement tous les coefficients de A .

Question 3

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \geq k, x_i = 0\}$. On note également $E_{n+1} = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in T_n^{++}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

- Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n+1$, on a $u(E_k) \subseteq E_{k-1}$.
- En déduire que A est nilpotente.
- Montrer que $T_n^{++} \subseteq N_n$, où N_n est l'ensemble des matrices nilpotentes.

Solution

(a) Montrons que $u(E_k) \subseteq E_{k-1}$

- Par définition de T_n^{++} , A est une matrice triangulaire supérieure stricte. Ainsi, A a des coefficients nuls sur et sous la diagonale, et les éléments non nuls se situent uniquement au-dessus de la diagonale.
- Considérons $x \in E_k$. Par définition, $x_i = 0$ pour tout $i \geq k$. En calculant $u(x) = Ax$, chaque composante $(u(x))_i$ de $u(x)$ est donnée par :

$$(u(x))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

où a_{ij} sont les coefficients de A . Étant donné que A est triangulaire stricte, $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$. Si $i \geq k$, alors $x_j = 0$ pour $j \geq k$. Ainsi, pour $i \geq k-1$, on a $(u(x))_i = 0$.

- Par conséquent, $u(x) \in E_{k-1}$, car les seules composantes non nulles de $u(x)$ sont celles avec $i < k-1$.

(b) Montrons que A est nilpotente

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En appliquant successivement u , on observe que les éléments non nuls de $u(x)$ “descendent” dans les indices à chaque itération, grâce à la propriété triangulaire stricte de A .
- En particulier, après au plus n applications de u , tout vecteur devient nul :

$$u^n(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

- Cela montre que u est nilpotent, et donc que A est nilpotente.

(c) Montrons que $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$

- Par définition, N_n est l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$. Nous avons montré en (b) que toute matrice $A \in T_n^{++}$ est nilpotente. Par conséquent, $T_n^{++} \subseteq N_n$. De plus $T_n^{++} \subseteq T_n^+$ et donc $T_n^{++} \subseteq T_n^+ \cap N_n$.
- Réciproquement, si $A \in T_n^+ \cap N_n$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments sur la diagonale sont égaux aux produits des coefficients diagonaux. On déduit que si A est nilpotente, les éléments diagonaux sont nécessairement nuls et $A \in T_n^{++}$.
- $T_n^{++} \subseteq T_n^+ \cap N_n$ et $T_n^+ \cap N_n \subseteq T_n^{++}$, et donc $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$.

Question 4

N_n est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?

Solution

Définitions

- N_n : Ensemble des matrices nilpotentes, c'est-à-dire les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel $A^k = 0$.
- Sous-espace vectoriel : Un sous-ensemble W de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel si :
 - W est non vide.
 - W est stable par addition : $A, B \in W \implies A + B \in W$.
 - W est stable par multiplication scalaire : $A \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A \in W$.

Vérification des propriétés

1. N_n est non vide La matrice nulle 0 appartient à N_n , car $0^k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Donc $N_n \neq \emptyset$.

2. Stabilité par multiplication scalaire Si $A \in N_n$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k = 0$. Donc, $\lambda A \in N_n$.

3. Stabilité par addition Considérons $A, B \in N_n$. Il existe $k_1, k_2 \geq 1$ tels que $A^{k_1} = 0$ et $B^{k_2} = 0$. Cependant, $(A + B)^k \neq 0$ en général, même si A et B sont nilpotentes. Prenons l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont nilpotentes car $A^2 = 0$ et $B^2 = 0$. Cependant :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc, $A + B \notin N_n$.

Conclusion

N_n n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, car il n'est pas stable par addition.

Question 5

Si $A \in N_n$, montrer que $\text{Tr}(A) = 0$. (Indication : on pourra étudier les valeurs propres complexes de A .)

Solution

Propriétés de la trace

- La trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, notée $\text{Tr}(A)$, est la somme de ses valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes et leur multiplicité).
- Si A est nilpotente ($A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$), alors toutes les valeurs propres de A sont égales à zéro. Cela découle de la définition des valeurs propres.

Étape 1 : Rappel sur les valeurs propres

Une valeur propre λ de A satisfait l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

où I est la matrice identité. Si A est nilpotente, alors $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$. Cela implique que toutes les valeurs propres λ de A satisfont $\lambda^k = 0$, donc $\lambda = 0$.

Étape 2 : La trace comme somme des valeurs propres

La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

où λ_i sont les valeurs propres (réelles ou complexes) de A .

Puisque toutes les valeurs propres de A sont nulles ($\lambda_i = 0$ pour tout i), il en découle que :

$$\text{Tr}(A) = 0.$$

Question 6

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A , B , et $A + B$ sont nilpotentes, alors $\text{Tr}(AB) = 0$.

Solution

Hypothèses

- $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$: A est nilpotente.
- $B^m = 0$ pour un certain $m \geq 1$: B est nilpotente.
- $(A + B)^p = 0$ pour un certain $p \geq 1$: $A + B$ est nilpotente.

Nous devons montrer que $\text{Tr}(AB) = 0$. $A + B$ est nilpotent, donc aussi $(A + B)^2$. On a donc

$$0 = \text{Tr}((A + B)^2) = \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(AB + BA) + \text{Tr}(B^2) = 0 + 2\text{Tr}(AB) + 0$$

car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Question 7

- Montrer que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$.
- En déduire que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.

Solution

(a) Montrons que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$

Hypothèses et définition

- V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n , l'ensemble des matrices nilpotentes.
- T_n^- : Ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- π est la projection de $M_n(\mathbb{R})$ sur T_n^{++} parallèlement à T_n^- .

Décomposition de V Toute matrice $M \in V$ peut s'écrire de manière unique comme une somme :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{avec } M_1 \in T_n^- \text{ et } M_2 \in T_n^{++}.$$

Par construction, $\pi(M) = M_2$ est l'image de M dans T_n^{++} . De plus, $M_1 = M - \pi(M) \in T_n^-$.

Interprétation dimensionnelle Les composantes $M_1 \in T_n^-$ et $M_2 \in T_n^{++}$ sont indépendantes. Ainsi, l'espace V se décompose en une somme directe :

$$V = (V \cap T_n^-) \oplus \pi(V).$$

Par la propriété classique des espaces vectoriels, on a alors :

$$\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V)).$$

(b) Montrons que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$

Hypothèses et définition

- τ est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par la transposition : $\tau(M) = M^\top$, où $M^\top$ est la transposée de M .

Application à $V \cap T_n^-$ L'application τ agit sur $V \cap T_n^-$ pour produire une image contenue dans T_n^{++} . En effet, la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure stricte.

Puisque τ est un isomorphisme entre T_n^- et T_n^{++} , la dimension de $\tau(V \cap T_n^-)$ est la même que celle de $V \cap T_n^-$. Ainsi :

$$\dim(V \cap T_n^-) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)).$$

Conclusion En substituant dans le résultat de (a), on obtient :

$$\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V)).$$

Question 8

Montrer que $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++} .

Solution

Hypothèses et définitions

- V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n , l'ensemble des matrices nilpotentes.
- T_n^- est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- T_n^{++} est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire ayant des 0 sur la diagonale.
- τ est l'endomorphisme de transposition : pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\tau(M) = M^\top$, où $M^\top$ est la transposée de M .

Propriété clé

La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure stricte si cette matrice appartient à $T_n^- \cap N_n$. Cela découle directement des définitions des ensembles.

Étape 1 : Inclusion de $V \cap T_n^-$ dans T_n^-

Par définition, $V \cap T_n^- \subseteq T_n^-$. Ainsi, toute matrice $A \in V \cap T_n^-$ est triangulaire inférieure.

Étape 2 : Transposée d'une matrice triangulaire inférieure

Si $A \in T_n^-$, alors $\tau(A) = A^\top$ est une matrice triangulaire supérieure. Si A est nilpotente (car $A \in V$), alors $A^\top$ est également nilpotente, car les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont identiques.

De plus, comme A est nilpotente et triangulaire inférieure, les coefficients diagonaux de A sont nuls. Par conséquent, $A^\top$ est triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire $A^\top \in T_n^{++}$.

Étape 3 : Inclusion finale

Pour tout $A \in V \cap T_n^-$, on a $\tau(A) = A^\top \in T_n^{++}$. Par conséquent :

$$\tau(V \cap T_n^-) \subseteq T_n^{++}.$$

Question 9

Soit $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$ et $N \in V$ tel que $A = \pi(N)$.

- Montrer que $A^\top + N \in V$ et en déduire que $\text{Tr}(A^\top N) = 0$.
- Montrer que $N - A \in T_n^-$ et en déduire que $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$.
- Montrer que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$.
- Conclure que $A = 0$.

Solution

(a) Montrons que $A^\top + N \in V$ et déduisons que $\text{Tr}(A^\top N) = 0$

1. $A^\top + N \in V$:

- Par hypothèse, $N \in V$, et $A = \pi(N)$ implique que $A \in T_n^{++}$.
- Par définition de τ , $A^\top \in \tau(V \cap T_n^-) \subseteq T_n^{++}$.
- La somme $A^\top + N$ appartient à V car V est un sous-espace vectoriel : $N \in V$ et $A^\top \in \tau(V \cap T_n^-) \subseteq V$.

2. $\text{Tr}(A^\top N) = 0$:

- $A^\top N$ est une matrice résultant du produit d'une matrice triangulaire supérieure stricte ($A^\top$) avec une matrice nilpotente (N).
- Par une propriété des matrices nilpotentes et triangulaires strictes, les termes diagonaux de $A^\top N$ sont tous nuls. Ainsi, $\text{Tr}(A^\top N) = 0$.

(b) Montrons que $N - A \in T_n^-$ et $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$

1. $N - A \in T_n^-$:

- Par hypothèse, $N \in V$, donc $\pi(N) = A$. Cela signifie que $N - A$ est une composante de N dans T_n^- .
- Par construction, $\pi(N - A) = 0$, ce qui implique $N - A \in T_n^-$.

2. $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$:

- Par définition, $A \in T_n^{++}$ et $N - A \in T_n^-$.
- La matrice $N^\top - A^\top$ est triangulaire supérieure stricte car $N - A \in T_n^-$.
- Le produit $A(N^\top - A^\top)$ est une matrice triangulaire supérieure stricte, donc $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$.

(c) Montrons que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$

D'après la question (b) précédente, $\text{Tr}(AN^\top) - \text{Tr}(AA^\top) = 0$. Or d'après la question (a), $\text{Tr}(AN^\top) = \text{Tr}(NA^\top) = \text{Tr}(A^\top N) = 0$. On en déduit que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$.

(d) Concluons que $A = 0$

- Si $\text{Tr}(AA^\top) = 0$, cela implique que tous les termes de A sont nuls, car

$$\text{Tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

- Par conséquent, $A = 0$.

Question 10 Théorème de Gerstenhaber

Énoncé : Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes. Alors :

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Solution

1. Résultats préliminaires obtenus

- **Question 7 :** $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.
- **Question 8 :** $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++} .
- **Question 9 :** Si $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$, alors $A = 0$.

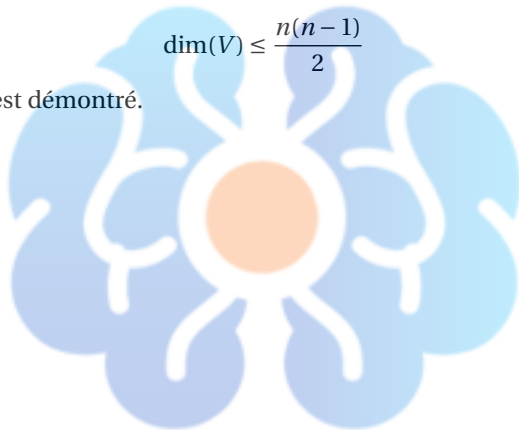
Comme $\pi(V)$ est aussi inclus dans T_n^{++} , et que l'intersection avec $\tau(V \cap T_n^-)$ est réduite à 0, on déduit que

$$\dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V)) \leq \dim(T_n^{++}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Par conséquent

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

et le théorème de Gerstenhaber est démontré.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : Déterminant de Cauchy

Question 1

Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)}.$$

Solution

Étapes de résolution

1. Définition de $F(X)$:

$F(X)$ est la fraction rationnelle associée à une matrice de Cauchy augmentée :

$$F(X) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{X + b_1} & \cdots & \frac{1}{X + b_n} \end{vmatrix}}.$$

2. Utilisation des propriétés des déterminants :

En développant par rapport à la dernière ligne, $F(X)$ est une combinaison linéaire des mineurs obtenus en supprimant successivement les colonnes associées à $\frac{1}{X + b_j}$. Ces mineurs ne dépendent que des termes $a_i + b_j$, où $i = 1, \dots, n - 1$.

3. Factorisation :

Le déterminant $F(X)$ est un polynôme en X au numérateur et au dénominateur. Les zéros au numérateur proviennent de $X = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, car $F(X)$ s'annule lorsque X coïncide avec ces valeurs (chaque colonne devient dépendante d'une autre).

4. Structure de $F(X)$:

On peut alors écrire $F(X)$ comme suit :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)},$$

où λ est un facteur constant dépendant des valeurs a_i et b_j .

5. Conclusion :

Le facteur λ peut être déterminé explicitement en calculant le coefficient dominant de $F(X)$, mais l'énoncé demande simplement de prouver son existence, ce qui est établi grâce à la factorisation ci-dessus.

Question 2

On pose $G(X) = (X + b_n)F(X)$. Montrer que $G(-b_n) = D_{n-1}$ et en déduire une relation entre D_n et D_{n-1} .

Solution

On peut calculer $F(X)$ en développant par rapport à la dernière ligne. En multipliant par $(X + b_n)$, on obtient

$$G(X) = D_{n-1} + (X + b_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{X + b_i} \beta_i$$

où les β_i sont des constantes indépendantes de X . On en déduit que

$$G(-b_n) = D_{n-1}.$$

De plus, avec $F(X)$ exprimé précédemment :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)},$$

on obtient :

$$G(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_{n-1})}.$$

Comme

$$F(a_n) = D_n = \lambda \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)}$$

et en remplaçant X par $-b_n$ dans $G(X)$, on a :

$$G(-b_n) = \lambda \frac{((-b_n) - a_1)((-b_n) - a_2) \cdots ((-b_n) - a_{n-1})}{((-b_n) + b_1)((-b_n) + b_2) \cdots ((-b_n) + b_{n-1})} = D_{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} D_n &= \lambda \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \\ &= \frac{((-b_n) + b_1)((-b_n) + b_2) \cdots ((-b_n) + b_{n-1})}{((-b_n) - a_1)((-b_n) - a_2) \cdots ((-b_n) - a_{n-1})} \\ &\quad \times \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} D_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} D_{n-1}. \end{aligned}$$

Question 3

Conclure que :

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)},$$

dans le cas où les a_i et b_i sont distincts, puis dans le cas général.

Solution

Etapas de la solution

1. Relation de récurrence

D'après la question 2, on a montré que :

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} D_{n-1}.$$

2. Cas de base ($n = 1$)

Pour $n = 1$, la matrice est de taille 1×1 avec un seul terme $\frac{1}{a_1 + b_1}$. Le déterminant est directement :

$$D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}.$$

3. Hypothèse de récurrence

Supposons que pour $n - 1$, la formule suivante est vraie :

$$D_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}, \end{aligned}$$

et l'hypothèse est vraie pour n . Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Si les a_i ou b_i ne sont pas distincts, alors des termes comme $a_j - a_i$ ou $b_j - b_i$ deviennent nuls dans le numérateur. Cela rend $D_n = 0$, ce qui est cohérent avec le fait qu'une matrice de Cauchy avec des lignes ou colonnes identiques est singulière.

Conclusion

La formule finale est donc :

$$D_n = \begin{cases} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)} & \text{si les } a_i \text{ et } b_i \text{ sont distincts,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie 2 : Matrices de Gram

Question 4

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de V et M la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$M = (\langle e_i | x_j \rangle)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

1. Montrer que $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = M^T M$.

2. Montrer que $\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \dim V$.
3. Montrer que toute valeur propre réelle de $M^\top M$ est positive ou nulle.
4. En déduire que $\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée.

Solution

1. Expression de la matrice de Gram

La matrice de Gram est définie comme :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Utilisant la base orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$ de V , chaque vecteur x_j s'écrit dans cette base comme :

$$x_j = \sum_{i=1}^m \langle e_i | x_j \rangle e_i.$$

En notant M la matrice $m \times n$ dont les coefficients sont $M_{ij} = \langle e_i | x_j \rangle$, on peut donc écrire :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = M^\top M.$$

2. Rang de la matrice de Gram

Le rang de la matrice M correspond au nombre de vecteurs $x_1, \dots, x_n$ linéairement indépendants dans V , car M est construite à partir des coordonnées des x_j dans la base $(e_1, \dots, e_m)$.

Ainsi, $\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(M)$, ce qui est égal à la dimension de V , soit :

$$\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \dim V.$$

3. Valeurs propres de $M^\top M$

Le produit $M^\top M$ est une matrice symétrique positive semi-définie. Cela signifie que :

1. Toutes les valeurs propres de $M^\top M$ sont réelles (car $M^\top M$ est symétrique).
2. Toute valeur propre λ de $M^\top M$ satisfait $\lambda \geq 0$.

Ceci provient de la propriété que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$:

$$u^\top (M^\top M) u = (Mu)^\top (Mu) = \|Mu\|^2 \geq 0.$$

En particulier si u est un vecteur propre de $M^\top M$ associé à la valeur propre λ , on obtient

$$u^\top (M^\top M) u = \lambda u^\top u = \lambda \|u\|^2 = \|Mu\|^2.$$

4. Déterminant de la matrice de Gram

Le déterminant de la matrice de Gram est donné par le produit des valeurs propres de $M^\top M$. Puisque toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, on a :

$$\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) \geq 0.$$

De plus, $\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = 0$ si et seulement si $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)$ est singulière, ce qui se produit lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille linéairement dépendante.

Question 5

On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que :

$$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}},$$

où $d(x, V)$ désigne la distance de x au sous-espace V .

Solution

1. Distance et projection orthogonale

La distance d'un vecteur $x \in E$ au sous-espace V est donnée par :

$$d(x, V) = \|x - p(x)\|,$$

où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur V .

Par définition, $p(x)$ est l'unique vecteur de V tel que :

$$\langle x - p(x) | v \rangle = 0, \quad \forall v \in V.$$

Si $p(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, alors les coefficients λ_i sont déterminés par :

$$\langle x - p(x) | x_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

2. Système linéaire pour les coefficients de $p(x)$

En substituant $p(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, on obtient :

$$x - p(x) = x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

L'orthogonalité impose :

$$\langle x | x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i | x_j \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad |$$

Cela donne un système linéaire de n équations pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sous forme matricielle :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x | x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

3. Distance $\|x - p(x)\|^2$

En utilisant $x = p(x) + (x - p(x))$, et le fait que $x - p(x)$ est orthogonal à V , on a :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2,$$

ou encore

$$\|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

4. Matrices de Gram étendues

La matrice de Gram étendue $\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)$ est donnée par :

$$\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x|x \rangle & \langle x|x_1 \rangle & \dots & \langle x|x_n \rangle \\ \langle x_1|x \rangle & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n|x \rangle & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

On peut de plus écrire, car $x - p(x)$ est orthogonal à V ,

$$\begin{aligned} & \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) \\ &= \begin{pmatrix} \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 & \langle p(x)|x_1 \rangle & \dots & \langle p(x)|x_n \rangle \\ \langle x_1|p(x) \rangle & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n|p(x) \rangle & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le $\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))$ se calcule par exemple en développant par rapport à la première colonne. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)) \\ &= \det(\text{Gram}(p(x), x_1, \dots, x_n)) \\ &+ \det \begin{pmatrix} \|x - p(x)\|^2 & \langle p(x)|x_1 \rangle & \dots & \langle p(x)|x_n \rangle \\ 0 & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= \|x - p(x)\|^2 \det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

En effet, comme $(p(x), x_1, \dots, x_n)$ forme une famille liée, on a

$$\det(\text{Gram}(p(x), x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Nous avons donc établi que :

$$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}}.$$

Cette formule relie la distance d'un vecteur à un sous-espace aux déterminants des matrices de Gram.

Partie 3 : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Question 6

Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini et qu'il vérifie :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0,$$

où $\omega(\delta)$ est défini par :

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}.$$

Solution

1. Définition de $\omega(\delta)$

Le module de continuité $\omega(\delta)$ est une borne supérieure prise sur les différences des valeurs de f pour des points $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq \delta$.

- **Bornes de $\omega(\delta)$** : f étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle est uniformément continue. Cela signifie qu'il existe un contrôle uniforme sur $|f(x) - f(y)|$ pour $|x - y| \leq \delta$. Par continuité de f , $\omega(\delta)$ est un nombre réel (fini).
- **Croissance de $\omega(\delta)$** : Lorsque δ augmente, la condition $|x - y| \leq \delta$ devient moins restrictive. Ainsi, $\omega(\delta)$ est croissante :

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \quad \text{si } \delta_1 \leq \delta_2.$$

2. Limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta)$

- **Comportement pour $\delta \rightarrow 0$** : Pour $\delta = 0$, on impose $x = y$, ce qui donne $|f(x) - f(y)| = 0$. Ainsi, $\omega(0) = 0$.
- **Uniformité de la continuité** : Pour $\delta > 0$, la continuité de f assure que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $|x - y| \leq \delta_0$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Cela implique que :

$$\omega(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

3. Conclusion

- $\omega(\delta)$ est bien défini car f est continue sur un compact, assurant que $|f(x) - f(y)|$ est borné pour $|x - y| \leq \delta$.
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ découle de la continuité de f , qui impose que les variations de f tendent vers 0 lorsque x et y deviennent arbitrairement proches.

Question 7

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, la famille $\{B_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n , noté P_n .

Solution

1. Définition des polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont définis par :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad x \in [0, 1].$$

Ces polynômes sont de degré n . Ainsi, chaque $B_{n,k}(x)$ appartient à P_n , l'espace des polynômes de degré au plus n .

2. Vérification de la linéarité

L'espace P_n est un espace vectoriel de dimension $n+1$, avec comme base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Pour prouver que $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est une base de P_n , il faut montrer qu'elle :

1. génère P_n ,
2. est une famille libre.

3. Génération de P_n

Pour tout $p(x) \in P_n$, il existe une combinaison linéaire des $B_{n,k}$ telle que :

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x),$$

où $c_k \in \mathbb{R}$. Cela découle du fait que chaque $B_{n,k}(x)$ est une combinaison de monômes x^i (pour $0 \leq i \leq n$), et que $\{1, x, \dots, x^n\}$ est une base de P_n .

4. Indépendance linéaire

Supposons une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

En développant $B_{n,k}(x)$, cela devient :

$$\sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Evaluons ce polynôme à des points spécifiques :

- $x = 0$: Seul $B_{n,0}(x)$ est non nul, donc $c_0 = 0$.
- $x = 1$: Seul $B_{n,n}(x)$ est non nul, donc $c_n = 0$.

En divisant par $x(1-x)$ et par induction, on montre que tous les $c_k = 0$. Ainsi, la famille $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est libre.

La famille $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ génère P_n , et est linéairement indépendante. Par conséquent, $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est une base de P_n .

Question 8

Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré n , que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

Solution

1. Définition de $B_n(f)$

Pour $f \in C([0, 1])$, le polynôme de Bernstein associé est défini par :

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right],$$

où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_i = 1) = x$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$).

2. Calcul de $\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right]$

La variable S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, donc :

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n} \right) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

L'espérance $B_n(f)(x)$ s'écrit donc :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. Expression en fonction des $B_{n,k}$

Rappelons que les polynômes de Bernstein $B_{n,k}$ sont définis par :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Substituons cette définition dans $B_n(f)(x)$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Ainsi, $B_n(f)(x)$ est une combinaison linéaire des $B_{n,k}(x)$, avec les coefficients $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

4. Degré du polynôme $B_n(f)$

Chaque $B_{n,k}(x)$ est un polynôme de degré n . Une somme finie de polynômes de degré n est elle-même un polynôme de degré au plus n . Donc $B_n(f)(x)$ est un polynôme de degré n .

Question 9

Montrer que :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right),$$

puis que :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Solution

1. Décomposition de l'erreur $|B_n(f)(x) - f(x)|$

On commence par écrire $B_n(f)(x)$:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right],$$

où S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

L'erreur $|B_n(f)(x) - f(x)|$ est donnée par :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right] \right|$$

et donc

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right].$$

2. Partition des cas selon $\left|\frac{S_n}{n} - x\right|$

Introduisons un seuil $\delta > 0$ pour distinguer deux cas :

1. Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$,
2. Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$.

On décompose :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}}\right]. \end{aligned}$$

3. Premier terme ($\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$)

Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$, la définition du module de continuité $\omega(\delta)$ donne :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \omega(\delta).$$

Ainsi :

$$\mathbb{E} \left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \right] \leq \omega(\delta).$$

4. Deuxième terme ($\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$)

Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$, on majore $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|$ par $2\|f\|_\infty$:

$$\mathbb{E} \left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}} \right] \leq 2\|f\|_\infty \cdot \mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right).$$

5. Probabilité $\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right)$

La variable $\frac{S_n}{n}$ suit une loi binomiale centrée réduite avec moyenne x et variance $\frac{x(1-x)}{n}$. En appliquant l'inégalité de Chebyshev, on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right) \leq \frac{\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Comme $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

6. Résultat final

En combinant les deux termes :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{4n\delta^2}.$$

En simplifiant le second terme :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Question 10

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $T_n(f)$ tel que :

$$\|f - T_n(f)\|_\infty = d(f, P_n),$$

où $d(f, P_n)$ est la distance entre f et l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , mesurée avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Solution

1. Distance à un sous-espace de dimension finie

L'espace P_n des polynômes de degré inférieur à n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace $C([a, b])$, muni de la norme infinie :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

La distance $d(f, P_n)$ est définie comme :

$$d(f, P_n) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty.$$

La compacité de $[a, b]$ garantit que $\|f - p\|_\infty$ atteint une borne inférieure, car $\|f - p\|_\infty$ est une fonction continue de p , définie sur le sous-espace compact P_n .

2. Existence de $T_n(f)$

La propriété ci-dessus garantit l'existence d'un polynôme $T_n(f) \in P_n$ tel que :

$$\|f - T_n(f)\|_\infty = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty = d(f, P_n).$$

En d'autres termes, $T_n(f)$ est le polynôme minimisant la distance entre f et P_n pour la norme infinie. Cette existence repose sur les propriétés suivantes :

1. **Compacité** : L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$, noté P_n , est compact lorsqu'il est restreint à $C([a, b])$.
2. **Continuité de $\|f - p\|_\infty$** : Cette norme est une fonction continue de p dans l'espace vectoriel normé.

Question 11

Montrer que si $f \in C([a, b])$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_\infty = 0,$$

Solution

On se ramène sur le segment $[0, 1]$ par translation et homothétie. De plus, par définition

$$\|T_n(f) - f\|_\infty \leq \|B_n(f) - f\|_\infty.$$

Par la question 9,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

A δ fixé, on fait tendre n vers l'infini, pour déduire

$$\limsup_{n \geq 1} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

puis on fait tendre δ vers 0 pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0,$$

et enfin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Question 12

Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{1/3}}.$$

Solution

1. Définition de la condition lipschitzienne

La fonction f est dite lipschitzienne s'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

On en déduit que le module de continuité satisfait $\omega(\delta) \leq L\delta$.

2. Décomposition de l'erreur $\|B_n(f) - f\|_\infty$

Par la question 9,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \leq L\delta + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

3. Résultat final

En prenant $\delta = \delta_n = n^{-1/3}$, on déduit l'existence d'une constante positive C telle que :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{1/3}}.$$

Question 13

(a) Montrer qu'il existe un polynôme pair T_n tel que :

$$d(V, P_n) = \|V - T_n\|_\infty.$$

(b) En minorant $|T_n - T_n(0) - V|$ près de $x = 0$, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $d(V, P_n) \geq cn^{-4}$.

Solution

On considère la fonction $V(x) = |x|$ et l'inégalité des frères Markov (1890) :

$$\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty,$$

où P est un polynôme de degré au plus n et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $[-1, 1]$.

(a) Existence d'un polynôme pair T_n

Pour toute approximation T_n de $V(x) = |x|$ dans l'espace des polynômes pairs de degré $\leq n$, on cherche à minimiser la distance :

$$d(V, P_n) = \inf_{P \in P_n} \|V - P\|_\infty.$$

Symétrie de V et T_n

- La fonction $V(x) = |x|$ est paire : $V(-x) = V(x)$.
- Toute approximation optimale T_n de V doit être paire, car si T_n n'est pas pair, on peut la remplacer par le polynôme $\tilde{T}_n(x)$ pair :

$$= \frac{T_n(x) + T_n(-x)}{2},$$

qui satisfera $\|V - \tilde{T}_n\|_\infty \leq \|V - T_n\|_\infty$.

(b) Minoration de $\|T_n - T_n(0) - V\|_\infty$ près de $x = 0$ **Approximation locale autour de $x = 0$**

- La fonction $V(x) = |x|$ est non différentiable en $x = 0$.
- Le polynôme $T_n(x)$ est différentiable partout. En particulier, $T'_n(0) = 0$ car T_n est pair.
- On considère la différence $T_n(x) - T_n(0) - V(x)$ près de $x = 0$. Pour $x > 0$, on a :

$$V(x) - T_n(x) \sim |x| - T_n(0) - T'_n(0)x - \frac{1}{2}T''_n(0)x^2.$$

Puisque $T'_n(0) = 0$, cette différence est dominée par un terme quadratique.

Minoration locale

Sur un voisinage $|x| \leq \frac{1}{n^2}$, on peut approximer $T_n(x)$ comme un polynôme quadratique, et on obtient :

$$|V(x) - T_n(x)| \gtrsim \frac{|x|}{n^4}.$$

Pour $x \approx 0$, la contribution quadratique domine, et on a une borne inférieure sur $\|T_n - V\|_\infty$.

Résultat final

En prenant en compte cette approximation locale et en utilisant la norme infinie sur $[-1, 1]$, on obtient :

$$d(V, P_n) \geq cn^{-4},$$

où $c > 0$ est une constante.

Partie 4 : Théorème de Müntz**Question 11 : Norme et produit scalaire associés à $\|\cdot\|_2$**

Pour $f \in C([0, 1])$, on pose :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_2$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on explicitera et que l'on pourra noter $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dans la suite.

Solution

Pour $f \in C([0, 1])$, on définit la norme $\|\cdot\|_2$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

(a) Vérification que $\|\cdot\|_2$ est une norme

Pour montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme, on doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. **Positivité** : $\|f\|_2 \geq 0$ et $\|f\|_2 = 0 \iff f = 0$.
2. **Homogénéité** : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$.
3. **Inégalité triangulaire** : $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

1. Positivité

Par définition,

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

L'intégrale $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq 0$ car $|f(t)|^2 \geq 0$ pour tout t . Si $\|f\|_2 = 0$, alors $\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0$, ce qui implique que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

2. Homogénéité

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|\alpha f\|_2 = \left(\int_0^1 |\alpha f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

En factorisant $|\alpha|^2$ dans l'intégrale :

$$\|\alpha f\|_2 = \left(|\alpha|^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|f\|_2.$$

3. Inégalité triangulaire

Pour $f, g \in C([0, 1])$, on a :

$$\|f + g\|_2^2 = \int_0^1 |f(t) + g(t)|^2 dt.$$

En développant $|f(t) + g(t)|^2$, on obtient :

$$|f(t) + g(t)|^2 = |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2f(t)g(t).$$

En intégrant, cela donne :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

on en déduit que :

$$\|f + g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

Ainsi :

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

(b) Produit scalaire associé

La norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire suivant :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Les propriétés suivantes du produit scalaire sont faciles à vérifier :

1. **Linéarité** : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g, h \in C([0, 1])$,

$$\langle \alpha f + \beta g | h \rangle = \alpha \langle f | h \rangle + \beta \langle g | h \rangle.$$

2. **Symétrie** : $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$.

3. **Positivité** : $\langle f | f \rangle \geq 0$ et $\langle f | f \rangle = 0 \iff f = 0$.

La norme $\|\cdot\|_2$ est liée au produit scalaire par :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}.$$

Conclusion

1. La norme $\|\cdot\|_2$ est bien une norme sur $C([0, 1])$. 2. Elle est associée au produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Question 12

Montrer que l'espace vectoriel :

$$\text{Vect}(\{x^m \mid m \in \mathbb{N}\})$$

est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, où la norme $\|\cdot\|_2$ est donnée par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Solution

1. Densité dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

Le théorème d'approximation de Weierstrass affirme que les polynômes sont denses dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Cela signifie que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m$ tel que :

$$\|f - P\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

2. Relation entre $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$

Pour toute fonction $f \in C([0, 1])$, la norme $\|\cdot\|_2$ est liée à $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty \cdot \sqrt{\int_0^1 1 dt} = \|f\|_\infty.$$

Cela montre que si une suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f , alors elle converge également en norme $\|\cdot\|_2$, car :

$$\|f - P_n\|_2 \leq \|f - P_n\|_\infty.$$

3. Approximation en norme $\|\cdot\|_2$

Soit $f \in C([0, 1])$ et $\epsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme $P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m$ tel que :

$$\|f - P\|_\infty < \epsilon.$$

Puisque $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty$, on obtient :

$$\|f - P\|_2 < \epsilon.$$

Cela prouve que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x) \in \text{Vect}(\{x^m\})$ tel que $\|f - P\|_2 < \epsilon$.

Question 13

On considère une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ avec $\lambda_n \geq 0$ pour tout n . Montrer que la famille de fonctions $\{x^{\lambda_n}\}_{n \geq 0}$ est libre dans $C([0, 1])$. Cela signifie que si :

$$\sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n} = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

alors $c_n = 0$ pour tout n .

Solution

Considérons une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme x^{λ_n} :

$$\sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n} = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

où $(c_n)_{n=0}^N \in \mathbb{R}^{N+1}$. Nous devons montrer que cette égalité implique $c_n = 0$ pour tout n .

En prenant la limite en 0, nous obtenons que c_0 est égal à 0 à partir de la limite en 0. Ensuite il suffit de diviser par x^{λ_1} pour $x \in]0, 1]$ et de prendre la limite en 0 pour obtenir $c_1 = 0$, et d'itérer jusqu'à c_N .

Question 14

Soit $V_N = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid 0 \leq n \leq N\}$ et m un réel positif. On étudie la distance entre x^m et V_N dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, où la norme $\|\cdot\|_2$ est définie par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

(a) Formule pour $d_2(x^m, V_N)$

La distance au carré entre x^m et V_N est donnée par :

$$d_2^2(x^m, V_N) = \inf_{P \in V_N} \|x^m - P\|_2^2.$$

Par orthogonalité, la projection optimale de x^m sur V_N minimise la norme. Étant donné que la suite (λ_n) est strictement croissante, la famille $(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N})$ est une base de V_N et on peut donc utiliser les résultats de la Partie 2. Calculons donc les matrices de Gram intervenant dans le calcul :

$$\text{Gram}(x^m, x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}) = \begin{pmatrix} \langle x^m | x^m \rangle & \langle x^m | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^m | x^{\lambda_N} \rangle \\ \langle x^{\lambda_0} | x^m \rangle & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_N} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^{\lambda_N} | x^m \rangle & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_N} \rangle \end{pmatrix}.$$

et

$$\text{Gram}(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}) = \begin{pmatrix} \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_N} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_N} \rangle \end{pmatrix}.$$

Nous avons établi que :

$$d_2(x^m, V_N) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x^m, x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}))}{\det(\text{Gram}(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}))}}.$$

Après calculs, cela conduit à l'expression de $d_2(x^m, V_N)$ comme :

$$d_2(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^N \frac{|m - \lambda_i|}{|m + \lambda_i + 1|}.$$

(b) Cas où (λ_n) est bornée

Si (λ_n) est bornée, elle est convergente car croissante vers λ_∞ . De plus, quand $i \rightarrow \infty$

$$\frac{|m - \lambda_i|}{|m + \lambda_i + 1|} \rightarrow \frac{|m - \lambda_\infty|}{|m + \lambda_\infty + 1|} < 1.$$

On peut donc conclure, en passant au logarithme, que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(x^m, V_N) = 0.$$

(c) Cas où (λ_n) est non-bornée

Si (λ_n) est non-bornée et si $m \notin \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$, on veut montrer que $d_2(x^m, V_N) \rightarrow 0$ si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \text{ diverge.}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n > m$ pour tout $n \geq N_0$. On a alors, pour n grand,

$$u_n := \ln \left(\frac{\lambda_n - m}{m + \lambda_n + 1} \right) \sim -\frac{2m+1}{m + \lambda_n + 1} \sim -\frac{2m+1}{\lambda_n}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge vers $-\infty$, $d_2(x^m, V_N) \rightarrow 0$ et réciproquement.

Question 15

Soit $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid n \geq 0\}$ dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$. Montrer que V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

diverge.

Solution

1. Densité et approximation

Pour que V soit dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, il faut que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une combinaison finie de la forme :

$$P(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n},$$

telle que :

$$\|f - P\|_2 < \epsilon,$$

où la norme $\|\cdot\|_2$ est donnée par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

2. Condition nécessaire et suffisante sur $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$

(a) Condition nécessaire : Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ converge, alors V n'est pas dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$.

- Lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, cela signifie que la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ ne peut pas fournir suffisamment d'“information” pour approximer toutes les fonctions $f \in C([0, 1])$ en norme $\|\cdot\|_2$.
- En particulier, la convergence de la série limite l'étendue des fonctions pouvant être construites par des combinaisons linéaires des x^{λ_n} .

Ainsi, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ converge, V n'est pas dense.

(b) Condition suffisante : Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, alors V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$.

- Lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, les x^{λ_n} couvrent une gamme suffisamment large d'exposants pour permettre une approximation arbitrairement précise de toute fonction $f \in C([0, 1])$.
- Ce résultat découle directement de la question 14.

Question 16

Soit $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid n \geq 0\}$ dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$, où la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est définie par :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Montrer que si V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$, alors la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

diverge.

Solution

La densité de V dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ signifie que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une combinaison finie de la forme :

$$P(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n},$$

telle que :

$$\|f - P\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Mais

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_{\infty},$$

ce qui implique que V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$ d'après la question précédente.

Question 17

(a) Prouver l'inégalité pour $\|f - g\|_\infty$

Montrer que si f et g sont des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, alors :

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

Preuve

1. Par définition, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est donnée par :

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

2. Puisque f et g sont de classe C^1 , par le théorème fondamental du calcul différentiel, on peut écrire pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f(t) - g(t) = (f(0) - g(0)) + \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds.$$

3. En prenant la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(0) - g(0)| + \left| \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds \right|.$$

4. Par la borne supérieure de l'intégrale et l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds \right| &\leq \int_0^t |f'(s) - g'(s)| ds \leq \sqrt{\int_0^t |f'(s) - g'(s)|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |f'(s) - g'(s)|^2 ds} = \|f' - g'\|_2. \end{aligned}$$

5. Comme $t \in [0, 1]$, on a $t \leq 1$, donc :

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

En prenant le supremum sur $t \in [0, 1]$, on obtient l'inégalité finale :

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

(b) Conclure que si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, alors V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

1. L'inégalité (a) montre que pour approximer une fonction $f \in C([0, 1])$ en norme $\|\cdot\|_\infty$, il suffit d'approcher :

- $f(0)$ avec x^0 en $x = 0$,
- $f'(t)$ par des combinaisons linéaires des dérivées x^{λ_n} sur $[0, 1]$.

2. Si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, la question 16 garantit que $\{x^{\lambda_n}\}$ est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Cela signifie qu'on peut approximer $f(0)$ et $f'(t)$ à volonté par des éléments de V .

3. Conclusion : Si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, alors $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n}\}$ est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Le théorème de Müntz reste-t-il valable si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$?

1. **Rôle de $\lambda_0 = 0$:** - L'hypothèse $\lambda_0 = 0$ garantit que la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ contient la constante $x^0 = 1$. - La fonction constante 1 est essentielle pour approximer les termes constants dans une fonction continue sur $[0, 1]$.

2. **Conséquence si $\lambda_0 \neq 0$:** - Si $\lambda_0 > 0$, alors $1 \notin V$, et la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ ne peut pas approximer toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$. - Cela rend le théorème de Müntz invalide dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, car V ne sera pas dense.

3. **Conclusion :** Le théorème de Müntz n'est pas valide si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$, car $1 \notin V$ empêcherait d'approcher toutes les fonctions continues.



Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (B) : Probabilités

Éléments de correction

Problème de la ruine du joueur

Question 1

Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$? Même question pour la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.

Solution

Analyse des valeurs prises par les variables aléatoires

1. Variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$

- **Définition** : $S_{i,k}^A(1)$ représente le montant dont dispose le joueur A après le *premier lancer* de la pièce.
- **Initialisation** : Le joueur A commence avec i euros.
- **Résultats possibles** :
 - Si la pièce tombe sur “face” (probabilité p), A gagne 1 euro : $S_{i,k}^A(1) = i + 1$.
 - Si la pièce tombe sur “pile” (probabilité $1 - p$), A perd 1 euro : $S_{i,k}^A(1) = i - 1$.
- **Valeurs prises** : $S_{i,k}^A(1) \in \{i - 1, i + 1\}$.

2. Variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$

- **Définition** : $S_{i,k}^A(2)$ représente le montant dont dispose le joueur A après *deux lancers* de la pièce.
- **Etapas possibles** :
 - **Premier lancer** : $S_{i,k}^A(1) = i + 1$ ou $S_{i,k}^A(1) = i - 1$.
 - **Deuxième lancer** :
 - * Si $S_{i,k}^A(1) = i + 1$, alors :
 - Si la pièce tombe sur “face” : $S_{i,k}^A(2) = i + 2$.
 - Si la pièce tombe sur “pile” : $S_{i,k}^A(2) = i$.
 - * Si $S_{i,k}^A(1) = i - 1$, alors :

- Si la pièce tombe sur “face” : $S_{i,k}^A(2) = i$.
- Si la pièce tombe sur “pile” : $S_{i,k}^A(2) = i - 2$.

• **Valeurs prises** : $S_{i,k}^A(2) \in \{i - 2, i, i + 2\}$.

Question 2

Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.

Solution

Détermination de la loi de $S_{i,k}^A(2)$

1. Rappels des valeurs possibles

Après deux lancers de la pièce, la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$ peut prendre les valeurs suivantes :

$$S_{i,k}^A(2) \in \{i - 2, i, i + 2\}.$$

2. Cas possibles et probabilités associées

- **Cas 1** : $S_{i,k}^A(2) = i + 2$
Ce cas se produit si la pièce tombe deux fois sur “ face ”.
Probabilité : $P(S_{i,k}^A(2) = i + 2) = p^2$.
- **Cas 2** : $S_{i,k}^A(2) = i$
Ce cas se produit si :
 - La pièce tombe une fois sur “ face ” puis une fois sur “ pile ”.
 - La pièce tombe une fois sur “ pile ” puis une fois sur “ face ”.

Probabilité :

$$P(S_{i,k}^A(2) = i) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p).$$

- **Cas 3** : $S_{i,k}^A(2) = i - 2$
Ce cas se produit si la pièce tombe deux fois sur “ pile ”.
Probabilité : $P(S_{i,k}^A(2) = i - 2) = (1 - p)^2$.

3. Loi de $S_{i,k}^A(2)$

La variable $S_{i,k}^A(2)$ suit une loi discrète donnée par :

$$P(S_{i,k}^A(2) = x) = \begin{cases} p^2 & \text{si } x = i + 2, \\ 2p(1 - p) & \text{si } x = i, \\ (1 - p)^2 & \text{si } x = i - 2. \end{cases}$$

Question 3

Dans le cas où $p = 1/2$, quelle est l'espérance de $S_{i,k}^A(2)$?

Solution

Espérance de $S_{i,k}^A(2)$ pour $p = \frac{1}{2}$

1. Rappel des valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$

Les valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$ sont :

$$S_{i,k}^A(2) \in \{i-2, i, i+2\}.$$

2. Probabilités associées pour $p = \frac{1}{2}$

Lorsque la pièce est équilibrée ($p = \frac{1}{2}$), les probabilités associées sont :

- $P(S_{i,k}^A(2) = i+2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
- $P(S_{i,k}^A(2) = i) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
- $P(S_{i,k}^A(2) = i-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

3. Calcul de l'espérance

L'espérance est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}[S_{i,k}^A(2)] = \sum_x x \cdot P(S_{i,k}^A(2) = x),$$

où x parcourt les valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$.

Substituons les valeurs et les probabilités :

$$\mathbb{E}[S_{i,k}^A(2)] = (i+2) \cdot \frac{1}{4} + i \cdot \frac{1}{2} + (i-2) \cdot \frac{1}{4} = i.$$

Question 4

Quelle est la valeur de la probabilité $w_{0,k}^A$ (i.e., la probabilité que le joueur A gagne s'il dispose de 0 euro en début de partie) ?

Solution

Si le joueur A commence avec 0 euro :

- Il est déjà ruiné au début de la partie.
- Par définition, lorsqu'un joueur est ruiné, il ne peut plus participer au jeu et perd automatiquement.

Ainsi, la probabilité que A gagne la partie dans cette situation est :

$$w_A^{0,k} = 0.$$

Question 5

Quelle est la valeur de la probabilité $w_{k,k}^A$?

Solution

Si le joueur A commence avec k euros :

- Cela signifie que le joueur B commence avec 0 euro.
- Dans ce cas, B est déjà ruiné dès le début de la partie.
- Par conséquent, A a déjà gagné la partie.

La probabilité que A gagne la partie dans cette situation est donc :

$$w_A^{k,k} = 1.$$

Questions 6 à 9 : Cas $i = 2, k = 3$

6. Calculer la probabilité pour que $\tau_{2,3}^A$ soit égal à 1.
7. Expliquer pourquoi $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.
8. Montrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(\tau_{2,3}^A = 2m + 1) = p^{m+1}(1-p)^m.$$

9. En déduire l'expression (en fonction de p) de $w_{2,3}^A$. Vous vérifierez que lorsque $p = 1/2$, le joueur A a 2 chances sur 3 de remporter le jeu.

Question 6 : Probabilité que $\tau_{2,3}^A = 1$

- $\tau_{2,3}^A = 1$ signifie que la ruine pour B se produit après le premier lancer.
- Pour que A gagne immédiatement ($S_{2,3}^A(1) = 3$), la pièce doit tomber sur "face" avec probabilité p .

La probabilité totale est donc :

$$P(\tau_{2,3}^A = 1) = p.$$

Question 7 : Pourquoi $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair ?

- $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ signifie que A gagne la partie.
- Pour atteindre 3 à partir de $S_{2,3}^A(0) = 2$, A doit gagner un nombre impair de fois car les transitions entre i et $i + 1$ alternent.
- De manière similaire, A atteint $S_{2,3}^A = 0$ (ruine) uniquement après un nombre pair de lancers.

Donc, $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.

Question 8 : Montrer que $P(\tau_{2,3}^A = 2m + 1) = p^{m+1}(1-p)^m$

Hypothèse initiale ($m = 0$) : Pour $m = 0$, c'est la question - :

$$P(\tau_{2,3}^A = 1) = p = p^{0+1}(1-p)^0.$$

Hérédité ($m \rightarrow m+1$) : Si c'est vrai au rang m , la probabilité qu'il ait 2 chances au bout de $2m$ lancers est de

$$p^m(1-p)^m,$$

et donc

$$\mathbb{P}(\tau_{2,3}^A = 2(m+1) + 1) = p^{m+1}(1-p)^{m+1} \times p = p^{m+2}(1-p)^{m+1}.$$

La formule est démontrée par récurrence.

Question 9 : Expression de $w_A^{2,3}$

$w_{2,3}^A$ est la probabilité que A gagne, soit $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$. D'après la question 8 : $w_{2,3}^A = \sum_{m=0}^{\infty} P(\tau_{2,3}^A = 2m+1)$. En substituant :

$$\begin{aligned} w_{2,3}^A &= \sum_{m=0}^{\infty} p^{m+1}(1-p)^m \\ &= p \sum_{m=0}^{\infty} (p(1-p))^m. \end{aligned}$$

La série géométrique converge pour $|p(1-p)| < 1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad x = p(1-p).$$

Donc :

$$w_{2,3}^A = p \cdot \frac{1}{1-p(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p^2 + (1-p)^2}.$$

Si $p = \frac{1}{2}$ (pièce équilibrée) :

$$w_{2,3}^A = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, A a deux chances sur trois de gagner.

Question 10

Pour tout $i \geq 2$, donner l'expression de la fonction $g(i, r) > 0$ pour laquelle :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = g(i, r)(a_{1,r} - a_{0,r}).$$

Solution

Détermination de $g(i, r)$

1. Relation de récurrence donnée

On considère la relation suivante pour $r > 0$ et tout $i \geq 1$:

$$a_{i+1,r} - a_{i,r} = r \cdot (a_{i,r} - a_{i-1,r}).$$

En posant $b_i = a_{i,r} - a_{i-1,r}$, la relation devient :

$$b_{i+1} = r \cdot b_i.$$

2. Solution explicite pour b_i

La récurrence $b_{i+1} = r \cdot b_i$ est une progression géométrique, donc :

$$b_i = b_1 \cdot r^{i-1},$$

où $b_1 = a_{1,r} - a_{0,r}$.

3. Expression pour $a_{i,r} - a_{0,r}$

En utilisant $b_i = a_{i,r} - a_{i-1,r}$, on a :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = \sum_{j=1}^i b_j.$$

Substituons $b_j = b_1 \cdot r^{j-1}$ dans la somme :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = \sum_{j=1}^i b_1 \cdot r^{j-1}.$$

Factorisons b_1 et utilisons la formule de la somme d'une série géométrique :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = b_1 \cdot \sum_{j=1}^i r^{j-1} = b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

4. Définition de $g(i, r)$

Par définition, $g(i, r)$ est donné par :

$$g(i, r) = \frac{a_{i,r} - a_{0,r}}{a_{1,r} - a_{0,r}}.$$

Substituons $a_{i,r} - a_{0,r} = b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}$ et $a_{1,r} - a_{0,r} = b_1$:

$$g(i, r) = \frac{b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}}{b_1} = \frac{1-r^i}{1-r}.$$

5. Résultat final

$$g(i, r) = \frac{1-r^i}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

6. Cas particulier : $r = 1$

Si $r = 1$, la progression géométrique devient une somme arithmétique, et on obtient :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = i \cdot b_1,$$

donc :

$$g(i, r) = i.$$

Question 11

Montrer que :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)} + a_{0,r}.$$

Solution

D'après la question précédente, nous savons que :

$$a_{n,r} - a_{0,r} = g(n,r) \cdot (a_{1,r} - a_{0,r}),$$

où $g(n,r)$ est donné par :

$$g(n,r) = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r}, & \text{si } r \neq 1, \\ n, & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

En réarrangeant l'équation, nous obtenons :

$$a_{1,r} - a_{0,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n,r)}.$$

En ajoutant $a_{0,r}$ des deux côtés de l'équation, on obtient :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n,r)} + a_{0,r}.$$

La formule demandée est donc démontrée :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n,r)} + a_{0,r}.$$

Question 12

Justifier la relation de récurrence :

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A, \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Solution

On a

$$\begin{aligned} w_{i,k}^A &= \mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \mid 1^{ier} \text{ lancer} = \text{"pile"}\right) p \\ &\quad + \mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \mid 1^{ier} \text{ lancer} = \text{"face"}\right) (1-p). \end{aligned}$$

Donc

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A.$$

Question 13

Donner l'expression (en fonction de p, k, i) de la probabilité $w_{i,k}^A$.

Solution

Expression de $w_{i,k}^A$ en fonction de p, k , et i

1. Relation de récurrence

D'après la question précédente, la relation de récurrence pour $w_{i,k}^A$ est donnée par :

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A, \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Avec les conditions aux limites :

$$w_{0,k}^A = 0, \quad w_{k,k}^A = 1.$$

On obtient alors

$$w_{i+1,k}^A - w_{i,k}^A = \frac{(1-p)}{p} (w_{i,k}^A - w_{i-1,k}^A).$$

2. Cas général : $p \neq \frac{1}{2}$

Pour $p \neq \frac{1}{2}$, posons $r = \frac{1-p}{p}$. D'après les questions 4, 5 et 11, on obtient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1-r^i}{1-r^k}.$$

Cherchons une solution sous la forme :

3. Cas particulier : $p = \frac{1}{2}$

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$. La solution précédente n'est pas directement applicable. L'équation de récurrence devient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1}{2} \cdot w_{i+1,k}^A + \frac{1}{2} \cdot w_{i-2,k}^A.$$

La solution est alors linéaire :

$$w_{i,k}^A = \frac{i}{k}.$$

Question 14

Vérifier que le résultat ci-dessus coïncide lorsque $i = 2$ et $k = 3$ à la réponse donnée à la question 9. Vous pourrez dans un premier temps montrer que pour tout $p \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$:

$$\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^2 - (1-p)^2} = 1 - p(1-p).$$

Solution

Vérification de l'égalité

La question demande de vérifier que l'expression générale de $w_A^{i,k}$ obtenue en question 13 coïncide avec le résultat spécifique pour $i = 2$, $k = 3$, et $p \neq \frac{1}{2}$:

$$\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^2 - (1-p)^2} = \frac{1 - (1-p)^2}{1 - (1-p)^3}.$$

1. Rappel de l'expression de $w_A^{i,k}$

L'expression générale de $w_{i,k}^A$ pour $p \neq \frac{1}{2}$ est :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}.$$

Pour $i = 2$ et $k = 3$, cela devient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3}.$$

2. Développement de $w_A^{2,3}$

Développons explicitement :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \frac{(1-p)^2}{p^2}}{1 - \frac{(1-p)^3}{p^3}}.$$

Réécrivons en termes d'un dénominateur commun :

$$w_{i,k}^A = \frac{\frac{p^2 - (1-p)^2}{p^2}}{\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^3}}.$$

Simplifions davantage :

$$w_{i,k}^A = \frac{p^3 \cdot (p^2 - (1-p)^2)}{p^2 \cdot (p^3 - (1-p)^3)}.$$

Ce qui donne :

$$w_{i,k}^A = \frac{p \cdot (p^2 - (1-p)^2)}{p^3 - (1-p)^3} = \frac{p}{1 - p(1-p)}.$$

Question 15

Quelle est la première ligne de la matrice de transition **P**? La dernière ligne?

Solution

Première ligne et dernière ligne de la matrice de transition **P**

La matrice de transition **P** est une matrice stochastique décrivant les transitions possibles entre les différents états de la marche aléatoire. Chaque état i représente le nombre d'euros que le joueur A possède, avec :

- 0 correspondant à la ruine de A ,
- k correspondant à la ruine de B .

1. Structure de la matrice **P**

Pour tout $1 \leq i \leq k-1$, les transitions sont définies par :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1-p, \quad \mathbf{P}_{i,i+1} = p, \quad \mathbf{P}_{i,i} = 0.$$

Les conditions aux bords sont les suivantes :

- Si $i = 0$ (ruine de A) :

$$\mathbf{P}_{0,0} = 1, \quad \mathbf{P}_{0,j} = 0 \quad \text{pour } j \neq 0.$$

- Si $i = k$ (ruine de B) :

$$\mathbf{P}_{k,k} = 1, \quad \mathbf{P}_{k,j} = 0 \quad \text{pour } j \neq k.$$

2. Première ligne de **P**

La première ligne correspond à $i = 0$ (ruine de A). Dans cet état, A ne peut plus jouer, donc :

$$\mathbf{P}_0 = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

3. Dernière ligne de $\mathbf{P}$

La dernière ligne correspond à $i = k$ (ruine de B). Dans cet état, B ne peut plus jouer, donc :

$$\mathbf{P}_k = [0, 0, 0, \dots, 1].$$

4. Résultat final

La matrice $\mathbf{P}$ a les propriétés suivantes pour ses premières et dernières lignes :

- Première ligne ($i = 0$) :

$$\mathbf{P}(0) = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

- Dernière ligne ($i = k$) :

$$\mathbf{P}(k) = [0, 0, 0, \dots, 1].$$

Question 16

Pour tout $u \in \{2, \dots, k\}$, donner les expressions, en fonction de p , de $\mathbf{P}_{u,u-1}$, $\mathbf{P}_{u,u+1}$ et $\mathbf{P}_{u,v}$ pour tout $v \notin \{u-1, u+1\}$.

Solution

Expressions des probabilités de transition $\mathbf{P}_{u,v}$

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice de transition stochastique décrivant les probabilités de passer d'un état u à un autre état v lors d'une étape de la marche aléatoire. Pour un état $u \in \{2, \dots, k-1\}$, les transitions possibles sont :

- Vers $u-1$: la pièce tombe sur "pile" ($1-p$),
- Vers $u+1$: la pièce tombe sur "face" (p),
- Vers tout autre état $v \notin \{u-1, u+1\}$: cela est impossible dans ce modèle.

Expressions des probabilités

- Probabilité de transition vers $u-1$:

$$\mathbf{P}_{u,u-1} = 1-p.$$

- Probabilité de transition vers $u+1$:

$$\mathbf{P}_{u,u+1} = p.$$

- Probabilité de transition vers tout autre état $v \notin \{u-1, u+1\}$:

$$\mathbf{P}_{u,v} = 0, \quad \text{pour tout } v \notin \{u-1, u+1\}.$$

Question 17

La matrice $\mathbf{P}$ est-elle une matrice stochastique? Justifier votre réponse.

Solution

1. Rappel des propriétés d'une matrice stochastique

Une matrice est dite **stochastique** si :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_j \mathbf{P}_{i,j} = 1 \quad \text{pour tout } i.$$

2. Structure de la matrice $\mathbf{P}$

La matrice $\mathbf{P}$ représente les transitions d'une marche aléatoire. Chaque ligne de $\mathbf{P}$ correspond aux transitions possibles depuis un état donné i . En fonction de i , nous avons les cas suivants :

Première ligne ($i = 0$) :

- Si A est ruiné, il reste dans cet état :

$$\mathbf{P}_{0,0} = 1, \quad \mathbf{P}_{0,j} = 0 \text{ pour } j \neq 0.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{0,j} = 1.$$

Dernière ligne ($i = k$) :

- Si B est ruiné, A reste dans cet état :

$$\mathbf{P}_{k,k} = 1, \quad \mathbf{P}_{k,j} = 0 \text{ pour } j \neq k.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{k,j} = 1.$$

Lignes intermédiaires ($1 \leq i \leq k-1$) :

- Les transitions possibles sont :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p, \quad \mathbf{P}_{i,i+1} = p, \quad \mathbf{P}_{i,j} = 0 \text{ pour tout autre } j.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{i,i-1} + \mathbf{P}_{i,i+1} = (1 - p) + p = 1.$$

3. Vérification des propriétés

Positivité des éléments :

- Tous les éléments de $\mathbf{P}$ sont ≥ 0 :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p \geq 0 \text{ (car } 0 \leq p \leq 1),$$

$$\mathbf{P}_{i,i+1} = p \geq 0,$$

Les autres éléments sont 0.

Somme des lignes :

- La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, comme montré ci-dessus.

4. Conclusion

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice **stochastique**, car elle satisfait les deux propriétés nécessaires :

Question 18

Pour tout couple $(r, s) \in \{0, \dots, k\}^2$, donner l'expression de la probabilité $P(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r)$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Solution**Probabilité de transition en deux étapes**

Nous devons exprimer la probabilité suivante :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right),$$

en fonction des probabilités $\mathbf{P}_{r,t}$ et $\mathbf{P}_{t,s}$ avec $t \in \{0, \dots, k\}$.

1. Rappel de la probabilité de transition en deux étapes

Pour une chaîne de Markov, la probabilité de transition en deux étapes est donnée par :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

Ici :

- $\mathbf{P}_{r,t}$ est la probabilité de passer de l'état r à l'état t en une étape.
- $\mathbf{P}_{t,s}$ est la probabilité de passer de l'état t à l'état s en une étape.

2. Formule finale

En utilisant la règle de probabilité de transition sur deux étapes, nous avons :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

3. Interprétation

- L'état intermédiaire t correspond à tous les états possibles où le système peut être après une étape depuis r .
- Chaque t contribue à la probabilité totale en fonction des probabilités $\mathbf{P}_{r,t}$ et $\mathbf{P}_{t,s}$.
- La probabilité totale prend en compte toutes les transitions possibles via les états intermédiaires t .

4. Résultat final

La probabilité de passer de r à s en deux étapes est donnée par :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

Question 19

Expliciter la probabilité donnée par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la ligne u et de la colonne v de la matrice $\mathbf{P}^2$. Plus généralement, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que représente l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$?

Solution

Calcul de $\mathbf{P}_{u,v}^2$ et interprétation de $\mathbf{P}_{u,v}^m$

1. Probabilité donnée par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$

L'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la matrice $\mathbf{P}^2$ correspond à la probabilité de passer de l'état u à l'état v en **deux étapes**. Selon la définition des puissances d'une matrice de transition, cette probabilité est donnée par :

$$\mathbf{P}_{u,v}^2 = P\left(S_{i,k}^A(\ell+2) = v-1 \mid S_{i,k}^A(\ell) = v-1\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{u,t} \cdot \mathbf{P}_{t,v},$$

où :

- $\mathbf{P}_{u,t}$ est la probabilité de passer de u à un état intermédiaire t en une étape,
- $\mathbf{P}_{t,v}$ est la probabilité de passer de t à v en une étape.

Ainsi, $\mathbf{P}_{u,v}^2$ est obtenu en sommant, pour tous les états intermédiaires t , les contributions des probabilités de transition via t .

2. Interprétation de $\mathbf{P}_{u,v}^m$ pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

De manière générale, l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$ représente la **probabilité** de passer de l'état u à l'état v en **exactement** m **étapes**. Cette probabilité est calculée à partir des puissances de la matrice de transition $\mathbf{P}$, en utilisant la relation :

$$\mathbf{P}_{u,v}^m = P\left(S_{i,k}^A(\ell+m) = v-1 \mid S_{i,k}^A(\ell) = v-1\right) = \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{m-1}} \mathbf{P}_{u,t_1} \cdot \mathbf{P}_{t_1,t_2} \cdots \mathbf{P}_{t_{m-1},v}.$$

Ici :

- $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ représentent les états intermédiaires successifs visités entre u et v ,
- La somme est effectuée sur tous les chemins possibles passant par ces états intermédiaires.

3. Résumé des résultats

- Pour $m = 2$:

$$\mathbf{P}_{u,v}^2 = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{u,t} \cdot \mathbf{P}_{t,v}.$$

- Pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$\mathbf{P}_{u,v}^m$ représente la probabilité de passer de l'état u à l'état v en exactement m étapes.

Question 20

La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique ? Justifier votre réponse.

Solution

La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique?

1. Rappel : Propriétés d'une matrice stochastique

Une matrice est dite **stochastique** si :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$ pour tout u, v),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_v \mathbf{P}_{u,v}^m = 1 \quad \text{pour tout } u.$$

2. Analyse de la matrice $\mathbf{P}^m$

La matrice $\mathbf{P}^m$ représente les probabilités de transition en exactement m étapes. Elle est obtenue par le produit matriciel :

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} \quad (m \text{ fois}).$$

Nous analysons les deux propriétés nécessaires pour déterminer si $\mathbf{P}^m$ est stochastique.

1. Positivité des éléments :

- La matrice $\mathbf{P}$ est stochastique, donc tous ses éléments $\mathbf{P}_{u,v} \geq 0$.
- Lorsqu'on multiplie des matrices de transition, les éléments résultants $\mathbf{P}_{u,v}^m$ sont des sommes pondérées de produits d'éléments de $\mathbf{P}$, donc $\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$.
- Par conséquent, tous les éléments de $\mathbf{P}^m$ sont non négatifs.

2. Somme des lignes :

- Dans une chaîne de Markov, la somme des probabilités de transition à partir d'un état u doit être égale à 1, quel que soit le nombre d'étapes.
- Pour $\mathbf{P}$, la somme des lignes est 1. Lorsqu'on élève $\mathbf{P}$ à la puissance m , les propriétés de multiplication matricielle garantissent que la somme des lignes de $\mathbf{P}^m$ reste égale à 1, car la probabilité totale de transition depuis un état donné est conservée.

3. Conclusion

La matrice $\mathbf{P}^m$ est une matrice **stochastique**, car elle satisfait les deux propriétés nécessaires :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 ($\sum_v \mathbf{P}_{u,v}^m = 1$ pour tout u).

Question 21

Comment interprétez-vous les éléments de la $(k+1)$ -ième colonne de la matrice limite $\mathbf{Q}$ obtenue lorsque $m \rightarrow \infty$? Justifier votre réponse.

Solution

Interprétation de la $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$

1. Convergence de $\mathbf{P}^m$ vers $\mathbf{Q}$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers une matrice $\mathbf{Q}$, appelée la **matrice limite**. Les éléments de $\mathbf{Q}$, notés $Q_{u,v}$, représentent les **probabilités limites** de se trouver dans l'état v en partant de l'état u après un nombre infini d'étapes.

2. Interprétation des éléments de la $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$

La $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$ contient les probabilités limites $Q_{u,k+1}$, qui peuvent être interprétées comme suit :

$Q_{u,k+1}$ = Probabilité que le joueur A gagne si la partie commence dans l'état u .

Question 22

Donner la matrice de transition $\mathbf{P}$ dans le cas $k = 3$.

Solution

Matrice de transition $\mathbf{P}$ pour $k = 3$

1. Structure de la matrice $\mathbf{P}$

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice $(k + 1) \times (k + 1)$, ici 4×4 , décrivant les probabilités de transition entre les états $\{0, 1, 2, 3\}$. Les transitions possibles sont définies comme suit :

- **Etat 0 (ruine de A) :**
 - Probabilité de rester dans cet état : $\mathbf{P}_{0,0} = 1$,
 - Toutes les autres probabilités sont nulles : $\mathbf{P}_{0,j} = 0$ pour $j \neq 0$.
- **Etats intermédiaires $1 \leq i \leq k - 1$:**
 - Probabilité de transition vers $i - 1$: $\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p$,
 - Probabilité de transition vers $i + 1$: $\mathbf{P}_{i,i+1} = p$,
 - Probabilité de rester dans i : $\mathbf{P}_{i,i} = 0$.
- **Etat k (ruine de B) :**
 - Probabilité de rester dans cet état : $\mathbf{P}_{k,k} = 1$,
 - Toutes les autres probabilités sont nulles : $\mathbf{P}_{k,j} = 0$ pour $j \neq k$.

2. Matrice de transition $\mathbf{P}$

En combinant ces informations, la matrice $\mathbf{P}$ est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Interprétation

- La première ligne représente l'état 0 (ruine de A) : le système reste bloqué dans cet état.
- Les lignes intermédiaires représentent les transitions entre les états 1 et 2, où le joueur A peut gagner ou perdre selon la probabilité p et $1 - p$, respectivement.
- La dernière ligne représente l'état 3 (ruine de B) : le système reste bloqué dans cet état.

Question 23

Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner la première et la dernière ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$.

Solution

Première et dernière ligne de $\mathbf{P}^m$ pour $k = 3$

Pour $k = 3$, la matrice $\mathbf{P}^m$ est de dimension 4×4 . Les premières et dernières lignes de cette matrice pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont données comme suit :

1. Première ligne ($u = 0$)

L'état 0 correspond à la ruine de A . Cet état est absorbant, ce qui signifie qu'une fois dans cet état, il est impossible d'en sortir. Par conséquent, la première ligne de $\mathbf{P}^m$ est :

$$\mathbf{P}_0^m = [1, 0, 0, 0].$$

2. Dernière ligne ($u = 3$)

L'état 3 correspond à la ruine de B . Cet état est également absorbant, ce qui signifie qu'une fois dans cet état, il est impossible d'en sortir. Par conséquent, la dernière ligne de $\mathbf{P}^m$ est :

$$\mathbf{P}_3^m = [0, 0, 0, 1].$$

Question 24

Montrer que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vérifier que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.

Solution

Deuxième et troisième lignes de $\mathbf{P}^m$ pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, m pair

1. Propriété à démontrer

Nous devons montrer par récurrence que, lorsque m est pair :

- La deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, (pq)^{m/2}, 0, p^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

- La troisième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{m/2}, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

2. Initialisation ($m = 2$)

La matrice $\mathbf{P}$ pour $k = 3$ est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $q = 1 - p$. Calculons $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^2 & pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & pq & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- La deuxième ligne est :

$$[q^2, pq, 0, p^2],$$

ce qui correspond à l'expression donnée avec $m = 2$:

$$q \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = q \cdot 1, \quad (pq)^{2/2} = pq, \quad p^2 \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = p^2 \cdot 1.$$

- La troisième ligne est :

$$[q^2, 0, pq, p],$$

ce qui correspond à l'expression donnée avec $m = 2$:

$$q^2 \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = q^2 \cdot 1, \quad (pq)^{2/2} = pq, \quad p \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = p \cdot 1.$$

L'initialisation est vérifiée.

3. Hérité

Supposons que l'assertion est vraie pour $m = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est vraie pour $m = 2(k + 1)$.

Deuxième ligne de $\mathbf{P}^{2(k+1)}$: La deuxième ligne de $\mathbf{P}^{2k}$ est donnée par l'hypothèse de récurrence :

$$\left[q \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j, (pq)^k, 0, p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \right].$$

En multipliant cette ligne par $\mathbf{P}^2$, la nouvelle deuxième ligne devient :

$$\left[q \sum_{j=0}^k (pq)^j, (pq)^{k+1}, 0, p^2 \sum_{j=0}^k (pq)^j \right].$$

Troisième ligne de $\mathbf{P}^{2(k+1)}$: La troisième ligne de $\mathbf{P}^{2k}$ est donnée par l'hypothèse de récurrence :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j, 0, (pq)^k, p \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \right].$$

En multipliant cette ligne par $\mathbf{P}^2$, la nouvelle troisième ligne devient :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^k (pq)^j, 0, (pq)^{k+1}, p \sum_{j=0}^k (pq)^j \right].$$

L'hérité est vérifiée.

4. Conclusion

Par récurrence, nous avons montré que pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pair :

- La deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, (pq)^{m/2}, 0, p^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

- La troisième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{m/2}, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

Question 25

En utilisant la question précédente, donner la deuxième et la troisième ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$ lorsque m est impair.

Solution

Pour $\mathbf{P}^m$, lorsque m est impair, nous avons :

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^{m-1} \cdot \mathbf{P},$$

où $\mathbf{P}^{m-1}$ est la matrice obtenue après $m-1$ étapes (avec $m-1$ pair), et $\mathbf{P}$ est la matrice de transition initiale.

Lorsque m est impair, les deuxièmes et troisièmes lignes de $\mathbf{P}^m$ sont données par :

- Deuxième ligne de $\mathbf{P}^{m-1}$:

$$\left[q \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{(m-1)/2}, p^2 \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j \right].$$

- Troisième ligne de $\mathbf{P}^{m-1}$:

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j, (pq)^{(m-1)/2}, 0, p \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j \right].$$

Question 26

Montrer que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vous vérifierez également que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.

Solution

Convergence de $\mathbf{P}^m$ vers $\mathbf{Q}$

1. Comportement de $\mathbf{P}^m$ lorsque $m \rightarrow \infty$

- **Absorbance des états 0 et k :** Les états 0 (ruine de A) et k (ruine de B) sont absorbants. Cela signifie que les premières et dernières lignes de $\mathbf{P}^m$ sont constantes :

$$\mathbf{P}_0^m = [1, 0, \dots, 0], \quad \mathbf{P}_k^m = [0, 0, \dots, 1].$$

- **Comportement des autres lignes :** Pour $1 \leq i \leq k-1$, lorsque $m \rightarrow \infty$, les probabilités de transition convergent vers les probabilités limites dépendant des chances d'atteindre 0 ou k .

- **Forme de Q** : En utilisant la question précédente, la matrice limite Q est donnée par :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{1-pq} & 0 & 0 & \frac{p^2}{1-pq} \\ \frac{q^2}{1-pq} & 0 & 0 & \frac{p}{1-pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $q = 1 - p$.

2. Vérification que Q est une matrice stochastique

La matrice Q est stochastique, car tous ses éléments sont positifs ou nuls et la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

Question 27

Avant de commencer le jeu, une tierce personne lance la pièce : si elle tombe sur “face”, le joueur A reçoit la somme de 1 euro (et donc le joueur B reçoit 2 euros) sinon il reçoit 2 euros. Calculer la probabilité que le joueur A gagne en fonction de p .

Solution à la Question 27

La probabilité que le joueur A gagne est :

$$\begin{aligned} & p \times Q_{2,4} + (1-p) \times Q_{3,4} \\ &= \frac{p^3}{1-pq} + \frac{pq}{1-pq} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} & \text{si } p = \frac{1}{3}. \end{cases} \\ &= \frac{p^3 + pq}{1-pq} = p \frac{p^2 + q}{1-pq} = p \frac{p^2 + 1 - p}{1 - p + p^2} = p. \end{aligned}$$

Problème du char d'assaut allemand

Question 1

A quoi correspondent les entiers s , N , et n dans le problème des chars d'assaut ?

Solution

- s : il s'agit du numéro de série du premier char produit. Ce numéro est inconnu, et tous les numéros de série ultérieurs sont incrémentés de 1 à partir de s .
- N : il s'agit du nombre total de chars produits par les Allemands, dont la valeur est également inconnue. Les numéros de série vont de $s + 1$ à $s + N$.
- n : il s'agit du nombre de chars capturés par les Alliés et dont les numéros de série ont été observés. Ces numéros permettent d'estimer N .

Question 2

Quel est le cardinal de l'ensemble E_n ?

Solution

L'ensemble E_n est défini comme :

$$E_n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{1, \dots, N\}^n \mid i_1 < i_2 < \dots < i_n\}.$$

Cela représente l'ensemble des n -uplets croissants distincts que l'on peut former à partir de N entiers consécutifs. Le cardinal de cet ensemble correspond au nombre de façons de choisir n éléments distincts parmi N . Ce cardinal est donné par le coefficient binomial :

$$|E_n| = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Explication

- Le choix de n éléments parmi N est une combinaison, car l'ordre des éléments sélectionnés n'a pas d'importance.
- Le cardinal est donc le nombre de sous-ensembles de taille n que l'on peut former parmi les N entiers.

Question 3

Quelle est la loi de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$?

Solution

La variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ correspond aux n -uplets ordonnés des numéros de série capturés. Ces n -uplets sont tirés de manière uniforme parmi tous les n -uplets ordonnés possibles dans $\{s + 1, \dots, s + N\}$.

La probabilité associée à chaque réalisation $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ est donnée par :

$$P[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = \frac{1}{\binom{N}{n}},$$

où $\binom{N}{n}$ est le nombre total de combinaisons de n éléments parmi N .

Justification

- L'ensemble des numéros capturés est tiré de manière uniforme et aléatoire parmi les N entiers.
- Chaque réalisation de $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ a une probabilité identique, car toutes les combinaisons sont équiprobables dans un tirage aléatoire sans remise.

Question 4

Montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, alors $E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}$.

Solution

La variable aléatoire Y suit une loi hypergéométrique inverse de paramètres N , n , et m , notée $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$. La définition de cette loi donne :

$$P(Y = i) = \frac{\binom{i-1}{m-1} \binom{N-i}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{pour } i \in \{m, \dots, N - n + m\}.$$

Espérance de Y

L'espérance $E(Y)$ est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{i=m}^{N-n+m} i \cdot P(Y = i)$$

Substituons $i \binom{i-1}{m-1}$ par $m \binom{i}{m}$ dans l'expression de $P(Y = i)$:

$$E(Y) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=m}^{N-n+m} \binom{i}{m} \binom{N-i}{n-m}.$$

La somme dans cette expression correspond au coefficient binomial étendu $\binom{N+1}{n+1}$. Donc, après simplification :

$$E(Y) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N+1}{n+1}.$$

Enfin, en utilisant $\binom{N+1}{n+1} = \frac{(N+1)\binom{N}{n}}{n+1}$, on obtient :

$$E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}.$$

Question 5

Montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, alors $\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N-n)(n-m+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

Solution

Formule de la variance

Pour une variable $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, la variance est donnée par :

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2.$$

Nous savons déjà que :

$$E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}.$$

Il reste à déterminer $E(Y^2)$.

Calcul de $E(Y^2)$

Utilisons la relation suivante entre l'espérance quadratique et les coefficients binomiaux :

$$i^2 \binom{i-1}{m-1} = m \left[\binom{i}{m} + (m-1) \binom{i}{m+1} \right].$$

En substituant cette expression dans la somme pour $E(Y^2)$, on obtient :

$$E(Y^2) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=m}^{N-n+m} \left[\binom{i}{m} + (m-1) \binom{i}{m+1} \right] \binom{N-i}{n-m}.$$

Cette somme se simplifie grâce aux propriétés des coefficients binomiaux, donnant finalement :

$$E(Y^2) = \frac{m(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

Calcul de la variance

Substituons les expressions trouvées dans la formule de la variance :

$$\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{m(N+1)}{n+1} \right)^2.$$

Après simplification, on obtient :

$$\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N-n)(n-m+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Question 6

Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_{(k)}$?

Solution

La variable aléatoire $X_{(k)}$ représente la k -ième valeur minimale parmi les n valeurs tirées aléatoirement dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$. En d'autres termes, c'est la k -ième plus petite valeur parmi les n numéros de série capturés.

Ensemble des valeurs possibles pour $X_{(k)}$

Pour $X_{(k)}$, les valeurs possibles dépendent de sa position k et des contraintes imposées par la structure des tirages :

$$X_{(k)} \in \{s+k, s+k+1, \dots, s+N-n+k\}.$$

- $s+k$: C'est la valeur minimale que peut prendre $X_{(k)}$, car les $k-1$ valeurs précédentes doivent être inférieures.
- $s+N-n+k$: C'est la valeur maximale que peut prendre $X_{(k)}$, car les $n-k$ valeurs restantes doivent être supérieures.

Question 7

Montrer que $X_{(k)} - s$ suit une loi hypergéométrique inverse dont vous préciserez les paramètres.

Solution

La variable aléatoire $X_{(k)} - s$ représente la k -ième plus petite valeur parmi les n tirages dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Elle suit une loi hypergéométrique inverse avec les paramètres N (taille de l'ensemble), n (nombre de tirages), et k (position de la valeur minimale).

Définition des probabilités élémentaires

Pour une loi hypergéométrique inverse, la probabilité que $X_{(k)} - s = i$ est donnée par :

$$P(X_{(k)} - s = i) = \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{N-i}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

où :

- $i \in \{k, k+1, \dots, N-n+k\}$,
- $\binom{i-1}{k-1}$ est le nombre de façons de choisir $k-1$ éléments parmi les $i-1$ premiers,
- $\binom{N-i}{n-k}$ est le nombre de façons de choisir les $n-k$ éléments parmi les $N-i$ derniers,
- $\binom{N}{n}$ est le nombre total de combinaisons de n éléments parmi N .

Interprétation

- $i-1$: Correspond aux $i-1$ premiers éléments de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
- $k-1$: Représente les $k-1$ éléments qui précèdent la k -ième plus petite valeur.
- $N-i$: Correspond aux $N-i$ éléments après le i -ième élément.
- $n-k$: Représente les $n-k$ valeurs restantes tirées.

Question 8

Montrer que $\hat{N}(n, k, \ell)$ est un estimateur sans biais de N

Solution

On considère l'estimateur :

$$\hat{N}(n, k, \ell) := \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

Nous devons montrer que cet estimateur est sans biais, c'est-à-dire que :

$$E[\hat{N}(n, k, \ell)] = N.$$

Espérance de $\hat{N}(n, k, \ell)$

1. Expression de $\hat{N}(n, k, \ell)$:

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

2. Espérance de $X_{(\ell)} - X_{(k)}$:

Les variables $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ sont respectivement les k -ième et ℓ -ième plus petites valeurs parmi les n tirages. La différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$ mesure l'écart entre ces deux rangs dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$. Par propriété des lois hypergéométriques inverses, l'espérance de $X_{(\ell)} - X_{(k)}$ est donnée par :

$$E[X_{(\ell)} - X_{(k)}] = \frac{\ell-k}{n+1} (N+1).$$

3. **Espérance de $\hat{N}(n, k, \ell)$:**

En substituant $E[X_{(\ell)} - X_{(k)}]$ dans l'expression de $\hat{N}(n, k, \ell)$:

$$E[\hat{N}(n, k, \ell)] = \frac{n+1}{\ell-k} \cdot \frac{\ell-k}{n+1} (N+1) - 1 = N.$$

0.1 Question 9

Quelle est la valeur de l'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ lorsque $n = N$ (i.e., lorsqu'on tire tous les éléments de $\{s+1, \dots, s+N\}$) ?

Solution

Lorsqu'on tire tous les éléments de l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$, cela signifie que $n = N$. Nous déterminons alors la valeur de l'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ dans ce cas.

Etapes de la démonstration

1. **Propriété de $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$:**

- Si tous les éléments sont observés ($n = N$), alors :

$$X_{(k)} = s + k \quad \text{et} \quad X_{(\ell)} = s + \ell,$$

car les k -ième et ℓ -ième plus petites valeurs correspondent exactement à leur rang dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$.

2. **Différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$:**

$$X_{(\ell)} - X_{(k)} = (s + \ell) - (s + k) = \ell - k.$$

3. **Substitution dans $\hat{N}(n, k, \ell)$:** Par définition :

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

En substituant $X_{(\ell)} - X_{(k)} = \ell - k$ et $n = N$:

$$\hat{N}(N, k, \ell) = \frac{N+1}{\ell-k} (\ell - k) - 1.$$

4. **Simplification :**

$$\hat{N}(N, k, \ell) = N + 1 - 1 = N.$$

Question 10

Justifier l'équivalence : l'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si :

$$k \leq i, \quad j - i \geq \ell - k, \quad \text{et} \quad N - j \geq n - \ell.$$

Solution

Analyse et justification

L'objectif est de comprendre les conditions sur i et j pour que $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ soit possible, c'est-à-dire que i soit la k -ième plus petite valeur et j soit la ℓ -ième plus petite valeur parmi les n tirages dans $\{1, \dots, N\}$.

1. **Condition $k \leq i$:**

- i est la k -ième plus petite valeur, donc il doit y avoir au moins $k - 1$ valeurs strictement inférieures à i .
- Cela impose $k \leq i$.

2. **Condition $j - i \geq \ell - k$:**

- j est la ℓ -ième plus petite valeur. Entre i (la k -ième) et j , il doit y avoir exactement $(\ell - k - 1)$ valeurs intermédiaires.
- Cela impose $j - i \geq \ell - k$.

3. **Condition $N - j \geq n - \ell$:**

- j est la ℓ -ième plus petite valeur. Il doit donc rester au moins $(n - \ell)$ valeurs strictement supérieures à j dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
- Cela impose $N - j \geq n - \ell$.

Conclusion

L'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si :

$$k \leq i, \quad j - i \geq \ell - k, \quad \text{et} \quad N - j \geq n - \ell.$$

Question 11

Que faut-il mettre à la place des points d'interrogation pour que :

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq ?, \ell - k + i \leq j \leq ?\}$$

soit l'ensemble des valeurs prises par le couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$?

Solution

Nous devons compléter l'expression suivante pour que $E^*(N, n, k, \ell)$ représente l'ensemble des valeurs possibles du couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$:

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq ?, \ell - k + i \leq j \leq ?\}.$$

Etape 1 : Déterminer les bornes pour i

- $X_{(k)} = i$ implique que $i \geq k$, car il doit y avoir $k - 1$ valeurs strictement inférieures à i .
- La valeur maximale de i est imposée par la condition que $j = X_{(\ell)}$ reste dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Cela impose :

$$i \leq N - n + k.$$

Ainsi, la borne supérieure pour i est $N - n + k$.

Etape 2 : Déterminer les bornes pour j

- j doit être supérieur ou égal à $\ell - k + i$, car il doit y avoir au moins $(\ell - k - 1)$ valeurs entre i et j .
- La valeur maximale de j est imposée par la condition qu'il reste au moins $(n - \ell)$ valeurs après j , ce qui donne :

$$j \leq N - n + \ell.$$

Ainsi, la borne supérieure pour j est $N - n + \ell$.

Conclusion

L'ensemble des valeurs possibles pour $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$ est donné par :

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq N - n + k, \ell - k + i \leq j \leq N - n + \ell\}.$$

Question 12

Donner l'expression de la probabilité $P([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j])$, où $(i, j) \in E^*(N, n, k, \ell)$.

Solution

La probabilité est donnée par :

$$P([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]) = \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}.$$

Justification des termes

- $\binom{i-1}{k-1}$: Nombre de façons de choisir $k - 1$ valeurs parmi les $i - 1$ premières valeurs de $\{1, \dots, N\}$ pour que $X_{(k)} = i$.
- $\binom{j-i-1}{\ell-k-1}$: Nombre de façons de choisir les $\ell - k - 1$ valeurs intermédiaires entre i et j pour que $X_{(\ell)} = j$.
- $\binom{N-j}{n-\ell}$: Nombre de façons de choisir les $n - \ell$ valeurs restantes parmi les $N - j$ valeurs strictement supérieures à j .
- $\binom{N}{n}$: Nombre total de façons de tirer n valeurs parmi les N possibles, représentant l'espace des événements.

Domaine de validité

Cette probabilité est définie uniquement lorsque $(i, j) \in E^*(N, n, k, \ell)$, soit :

$$k \leq i \leq N - n + k, \quad \ell - k + i \leq j \leq N - n + \ell.$$

Question 13

Montrer que :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Solution

Nous devons montrer que :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Interprétation combinatoire

- La gauche de l'égalité représente une sommation sur toutes les paires (i, j) possibles où $X_{(k)} = i$ et $X_{(\ell)} = j$.
- Chaque terme $\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}$ décompose le choix des n valeurs tirées parmi N :
 - $\binom{i-1}{k-1}$: Nombre de façons de choisir les $k-1$ valeurs inférieures à i ,
 - $\binom{j-i-1}{\ell-k-1}$: Nombre de façons de choisir les $\ell-k-1$ valeurs entre i et j ,
 - $\binom{N-j}{n-\ell}$: Nombre de façons de choisir les $n-\ell$ valeurs supérieures à j .

Construction du tirage

Le tirage total des n valeurs parmi $\{1, \dots, N\}$ peut être décomposé en trois parties :

- $k-1$ valeurs inférieures à i ,
- $\ell-k-1$ valeurs entre i et j ,
- $n-\ell$ valeurs supérieures à j .

La somme sur tous les $(i, j) \in E^*$ recouvre tous les choix possibles pour ces trois parties.

Regroupement combinatoire

La somme des termes couvre exactement tous les sous-ensembles de taille n parmi les N éléments, indépendamment de l'ordre. Par construction :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Question 14

Montrer que pour tout $1 \leq k < \ell \leq n$,

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = \frac{\ell - k}{n - k + 1} \cdot \left[(N+1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right].$$

Solution

D'après la définition de l'espérance et la loi jointe $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$, nous avons

$$\begin{aligned} E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] &= \sum_{i=k}^{N-n+k} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} i(j-i) \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{i=k}^{N-n+k} i \binom{i-1}{k-1} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \frac{\binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}. \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = (\ell-k) \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} \binom{j-i}{\ell-k} \binom{N-j}{n-\ell}.$$

Posons $x = j - i + 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} \\ &= (\ell-k) \sum_{x=\ell-k+1}^{N-n+\ell-i+1} \binom{x-1}{\ell-k-1} \binom{N-x-i+1}{n-\ell} \\ &= (\ell-k) \sum_{x=\ell-k+1}^{N-n+\ell-i+1} \binom{x-1}{\ell-k-1} \binom{N-x-i+1}{n-(\ell-k+1)-h+1} \\ &= (\ell-k) \binom{N-i+1}{n-k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espérance est donnée par :

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = (\ell-k) \sum_{i=k}^{N-n-k} i \binom{i-1}{k-1} \binom{N-i+1}{n-k+1} / \binom{N}{n}.$$

Or

$$E(X_{(k)}) = \sum_{i=h}^{N-n-k} i \binom{i-1}{k-1} \binom{N-i}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

En combinant, nous obtenons :

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = \frac{\ell-k}{n-k+1} \{(N+1)E(X_{(k)}) - E[(X_{(k)})^2]\}.$$

Question 15

En déduire la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ lorsque $1 \leq k < \ell \leq n$, sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où $r(n, k, \ell)$ est une expression à déterminer.

Solution

Nous devons montrer que la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$, avec $1 \leq k < \ell \leq n$, peut être exprimée sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où $r(n, k, \ell)$ est un facteur à déterminer.

Définition de la covariance

La covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ est définie comme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}] - E[X_{(k)}] \cdot E[X_{(\ell)}].$$

Calcul de $E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}]$

En utilisant les résultats de la question précédente, nous savons que :

$$E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}] = \frac{\ell-k}{n-k+1} \cdot \left[(N+1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right] + E[X_{(k)}^2].$$

Expression de la covariance

Substituons cette expression dans la définition de la covariance :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = \frac{\ell - k}{n - k + 1} \cdot \left[(N + 1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right] + E[X_{(k)}^2] - E[X_{(k)}] \cdot E[X_{(\ell)}].$$

Simplifions cette expression et exprimons-la en termes de la variance $\text{Var}(X_{(k)})$.

Facteur de proportionnalité

La covariance peut être réécrite sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où :

$$r(n, k, \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n - k + 1}.$$

Question 16

Utiliser les résultats précédents pour montrer que :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \frac{(N + 1)(N - n)}{(\ell - k)^2(n + 2)} \cdot [k(n - k + 1) + (\ell - 2k)(n - \ell + 1)].$$

Solution

Etapes de la démonstration

1. **Définition de $\hat{N}(n, k, \ell)$:** L'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ est donné par :

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n + 1}{\ell - k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

Sa variance est donc :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \left(\frac{n + 1}{\ell - k} \right)^2 \cdot \text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)}).$$

2. **Variance de la différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$:** En utilisant les propriétés de la variance et de la covariance :

$$\text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)}) = \text{Var}(X_{(\ell)}) + \text{Var}(X_{(k)}) - 2 \cdot \text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}).$$

3. **Substitution des expressions :** Nous utilisons les formules suivantes :

- $\text{Var}(X_{(k)}) = \frac{k(N + 1)(N - n)}{(n + 1)^2(n + 2)},$
- $\text{Var}(X_{(\ell)}) = \frac{\ell(N + 1)(N - n)}{(n + 1)^2(n + 2)},$
- $\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = \frac{n - \ell + 1}{n - k + 1} \cdot \text{Var}(X_{(k)}).$

Substituons ces termes dans l'expression de $\text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)})$.

4. **Simplification :** Après simplifications, la variance $\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell))$ devient :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \frac{(N + 1)(N - n)}{(\ell - k)^2(n + 2)} \cdot [k(n - k + 1) + (\ell - 2k)(n - \ell + 1)].$$

Question 17

Après avoir étudié la fonction $k \mapsto \sigma_n^2(k)$, quel choix proposer pour k afin de minimiser la variance de l'estimateur $\hat{N}(n, k, n)$?

Solution

Nous devons minimiser la variance de l'estimateur $\hat{N}(n, k, n)$, donnée par :

$$\sigma_n^2(k) := \text{Var}(\hat{N}(n, k, n)) = \frac{(N+1)(N-n)}{(n-k)^2(n+2)} \cdot [k(n-k+1) + (n-2k)].$$

1. **Expression simplifiée :** La variance dépend de k selon :

$$\sigma_n^2(k) = \frac{(N+1)(N-n)}{(n+2)} \cdot \frac{k(n-k+1) + n-2k}{(n-k)^2}.$$

Les termes constants par rapport à k sont $(N+1)(N-n)$ et $(n+2)$. La minimisation revient donc à étudier la fonction :

$$f(k) = \frac{k(n-k+1) + n-2k}{(n-k)^2}.$$

En dérivant par rapport à k ,

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{(n-2k+1-2)(n-k)^2 + 2(n-k)(k(n-k+1) + n-2k)}{(n-k)^4} \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [(n-k)(n-2k-1) + 2k(n-k+1) + 2n-4k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [n^2 - 2nk - n - nk + 2k^2 + k + 2nk - 2k^2 + 2n - 4k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [n^2 - nk + n - k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^2} [1 + n] > 0. \end{aligned}$$

2. **Etude de $f(k)$:**

- La fonction $f(k)$ est définie pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
- $f(k)$ est une fonction rationnelle, croissante.

3. **Minimum de $\sigma_n^2(k)$:**

- La fonction $f(k)$ atteint son minimum lorsque $k = 1$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de français

Éléments de correction

Proposition de résumé en 214 mots

Les sociétés modernes se retrouvent face à un paradoxe : la parole manipulatoire est présente partout or rien n'est fait - y compris dans les programmes scolaires - pour permettre de la repérer et s'en défendre. Et pourtant tous les domaines sont touchés ; la publicité en particulier.

L'absence de réflexion sur ce phénomène conduit à une régression civilisationnelle. Dans l'Antiquité, Tacite regrettait déjà le déclin de la bonne rhétorique qui autorisait les débats au profit d'interventions rapides. De nos jours, le problème est plus prégnant encore, facilité par les médias, la télévision notamment, qui diffusent une pensée unique. Ainsi le libéralisme nous est imposé ; la propagande est installée dans les pays démocratiques (qui pourtant osent critiquer les régimes totalitaires !) servant des discours jugés respectables ; le slogan publicitaire est banalisé.

Face à ce phénomène les citoyens ne sont pas éduqués. On prône les valeurs démocratiques mais on supprime les moyens de lutter contre les paroles manipulatoires trompeuses.

La solution est désormais de ne plus accepter la justification de ces discours fallacieux au service d'un but considéré comme légitime. Une parole éthique est seule garante du respect du destinataire mais aussi du locuteur. Elle est également nécessaire car toute violence - et la parole qui manipule est une violence faite à autrui - est aujourd'hui condamnée.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve d'anglais

Éléments de correction

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

The text critiques the effectiveness of corporate sustainability schemes in addressing climate challenges. Despite the Paris Agreement's 2°C threshold, briefly surpassed on November 17, 2023, many companies fail to align their Environmental, Social, and Governance (ESG) goals with substantive action. Research assessing 20 major sustainability frameworks, such as the UN Sustainable Development Goals (SDGs), Global Reporting Initiative (GRI), and Certified B Corporations, found them insufficient.

Most schemes promote incremental progress while ignoring supply-chain emissions, which often account for over 90% of a company's carbon footprint. For example, companies favor carbon offsets, criticized for ineffectiveness, over reducing operational emissions. Frameworks like SDGs lack enforceability, leaving companies free to decide their actions. Similarly, the GRI focuses on reporting, not reducing emissions, while B Corps vaguely require "science-based action."

Some frameworks perform better. The circular economy minimizes waste and extends product life cycles. Doughnut economics balances ecological limits with societal needs, yet remains underused by businesses. Planetary boundaries identify safe environmental thresholds for human activity, and The Natural Step (TNS) offers principles to guide sustainable practices, adopted by companies like Nike. These models show promise but require broader adoption to transition businesses from growth-driven to sustainability-focused practices.

2 Translate the following text into French

Comment les frères Barclay ont construit et détruit un empire Les jumeaux ont accumulé hôtels, journaux et même une forteresse sur leur propre île – puis leur fortune a disparu.

Par Pippa Bailey. Source : New Statesman

Au cours de l'été 2022, le milliardaire Frederick Barclay, alors âgé de 87 ans et présent sur la Rich List du Sunday Times, a comparu devant la Haute Cour, accusé par son ex-épouse de ne pas avoir respecté leur accord de divorce d'un montant de 100 millions de livres. Les neveux de Frederick, fils de son frère jumeau David, étaient représentés par plus d'avocats dans la salle d'audience que leur oncle ou tante et ont tenté, sans succès, d'empêcher la publication des informations sur l'affaire. Cela reflète bien la famille, notoirement avare de publicité. "Après une vie de discrétion", écrit Jane Martinson dans son récit sur les jumeaux et leurs affaires, "des histoires de disputes familiales et de crises ont soudainement envahi les pages des journaux."

Le problème du tribunal était que le réseau d'entreprises des Barclay était si complexe que personne, même au sein de la famille, ne semblait le comprendre. "L'affaire revenait sans cesse à deux questions : la recherche de sommes d'argent colossales dans des structures de propriété opaques et l'identification du contrôleur ultime." Cela pose également un problème à Martinson, car bien que You May Never See Us Again suive les indices comme un

détective, le tableau général reste frustrant, juste hors de portée. Frederick a déclaré au juge que le problème n'était pas qu'il refusait de payer, mais qu'il en était incapable. La moitié d'un partenariat autrefois estimé à 6 milliards de livres affirmait désormais ne plus avoir d'argent. Où était-il passé?

