



EAMAC

ÉCOLE AFRICAINE DE MÉTÉOROLOGIE & D'AVIATION

CYCLES TECHNICIEN & INGÉNIEUR

 Recueil des anciens sujets.





EAMAC

ÉCOLE AFRICAINE DE MÉTÉROLOGIE & D'AVIATION

CYCLES TECHNICIEN & INGÉNIEUR

+237 655 333 073
+237 671 544 122

Yaoundé

Dédicaces & Remerciements



Tous les lauréats des sessions antérieures depuis l'existence de MENSA Academy. Vous faites notre fierté et êtes la preuve vivante que seul le travail paye.

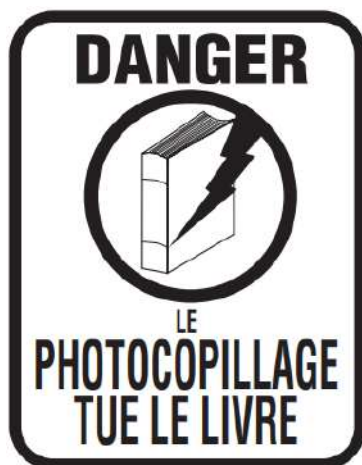
Les auteurs remercient l'Entreprise MENSA Academy constituée d'une équipe très efficace qui a permis à ce que ce livre soit publié dans plusieurs Maisons d'Édition à l'instar de Horizon + & Optimum, d'avoir mis à la disposition des autres pays africains quelques exemplaires.

*La perfection n'étant pas de ce monde, toute suggestion/erreur relevée dans ce livre est la bienvenue. Vous pourrez le faire par **mail : louishenri2018@gmail.com** ou via le moyen téléphonique suivant - WhatsApp : **+237 655 333 073**. De ce fait, le message doit se présenter comme suit : **Suggestion(s)/erreur(s) à signaler - Eamac Édition 2027 *** Vous vous présentez et enfin, vous indiquez la page, la suggestion ou l'erreur en question ***** Toute question est également la bienvenue.*

MENZA Academy
 1556 Yaoundé II, IFORD
 294 Yaoundé, ISSEA - Rue Pasteur
 08 BP 03 Abidjan, ENSEA
 45512 Dakar, ENSAE
 03 BP 1079 Cotonou, ENEAM
 1096 ASECNA, Niamey
 2067 EAMAU, Lomé
www.mensaacademy.com

Dans la même collection

Économie
Culture Générale,
Mathématiques ISE
Statistiques descriptives,
Statistiques-Probabilités,
Mathématiques pour économistes



Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle par quelque procédé que ce soit des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective. Il s'agit donc de la propriété intellectuelle de l'auteur et n'engage que lui et celle de l'Entreprise MENSA Academy.



ISBN 13 : x xxxxxxx xxxxxx

ISBN 10 : y yyy yyy yyy

BookEditions

Horizon +

Optimum

MENZA Academy

Avant-Propos

Chaque année, de centaines d'étudiants sont confrontés à des difficultés liées à leur préparation au concours de l'EAMAC et ce, pour quelques raisons dont la principale est la non-exhaustivité des cours et la quasi-absence de certaines épreuves passées et évidemment leurs corrigés. MENSA Academy met donc à votre disposition ce document qui va retracer les chapitres importants pour braver son épreuve de statistique et probabilités au concours. Il présente un résumé des anciens sujets de ce concours d'élites ■

Félicitations aux Lauréats !



ISE long/AS – En ligne (2026)

Tuo Zie Lucien
 BERE NDOBO Alexandre
 KOUMAOUDJENG BAKOR Richard
 Traore Mohamed
 Ngalaba Bey Mboro
 Moutakala jadore flodorant
 DJIMRAYAM Elvis
 HANGLINANYE Apanan
 Hugo De Frehein
 KACOU Messou Emmanuel
 Ibrahima Diallo
 Djekoundakom Succès
 IRIÉ BI Junior
 KOUAME AMANI Océane

1. ISE long/AS (2025)

CHEWO KAMDEM Hélène (ENSEA)
 GAPILI Bourdanne (ENSEA)
 SAKAM FOTSING Emmanuel (ENSEA)
 DONJIO DONGMO Yann (ISSEA)
 KUETCHE NGOUDZO Yvanna (ISSEA)
 MOHAMADOU Adama (ISSEA)
 DACI YIMETE Princilia (ENSAE)
 TEBADEGREU Tourkobba (ISSEA)
 MOFFO Boris Diamel (ENSEA)
 TEDJOU KENBOU Wildride (ENSAE)
 TSAGUE ZETSA Emard (ENSAE)
 DJOUTCHOUANG FOSTING H. (ISSEA)
 FATIMAH Allamine (ISSEA)
 KUIKOUA MBAKOP Erwan (ISSEA)
 MVONDO Cléo Gabriella (ISSEA)
 RAMLA Mohamadou (ISSEA)
 TIODA DONJIO Christ Juvenal (ISSEA)
 ZOYEM TONTOSOP Ariel (ISSEA)

2. ISE Eco (2025)

DITCHIBE DADJERE Bertrand (ISSEA)
 KEUNOU MEZANOU Doris (ISSEA)
 KOGUEM FEUSSI Hélène (ISSEA)
 KWEDJO Melaine Claudel (ISSEA)
 NGOUATIO Bricelle (ISSEA)
 OMOGO NLEND Franck (ISSEA)

3. ISE Maths (2025)

KUETCHE NOUSSI Adrien (ISSEA)
 MBA NDOUTOUME Edmond (ISSEA)
 MBIANDOU GYAMFI Anaïs (ISSEA)
 NCHARE AMATOULAH Maryam (ISSEA)
 SIME ZOUTOUOP Lionel (ISSEA)
 TONLEU NAMBOU Raim (ISSEA)
 YEMELI SAAH Eugène (ENSAE)

4. IFORD (2025)

LETCHET KAMNANG Cindy
 MAMADOU Hermann Rustan
 MOHAMADOU Aminou Abba
 WEMI NGASSAM Danielle
 MEFIRE MOHAMED Mounir
 DJAMPA NJUITCHA Anicet
 OLINGA OLINGA Dimitri
 LAGDA MADI Mathieu
 KEMBOU NOUMBI
 BAKAIWE Janvier

1. ISE long/AS (2024)

AGHOKENG Sandra (ISSEA)
 BETSI Marc (ISSEA)
 DASEBO Etienne (ENSEA)
 DJAM A BITANG (ISSEA)
 EBALA Quentin (ISSEA)
 FIRIDA Aimée Brigitte (ISSEA)
 FOTIO Yan Mayel (ISSEA)

GAPILI Kadi (ISSEA)
 KAZE Ariane Laure (ENSEA)
 LEMA Léocadie (ISSEA)
 MBIDA William (ISSEA)
 NANTIA Mégane (ENSEA)
 NDJOCKO Gaston (ISSEA)
 NOUMEN Yvan Rayan (ISSEA)
 NZAMBOU Sagesse (ISSEA)
 TAMETSA Anderson Bryan (ISSEA)
 TIENGA Marc Jorel (ISSEA)
 TOUMBA Pascal (ENSEA)
 YEMELI Horlus Boban (ISSEA)
 YEMELI SAAH Crespo (ENSAE)
 YETNA OTTO Polycarpe (ISSEA)
 ZEETSOP Boslin (ENSEA)
 ZEUNANG Fredy (ENSEA)

2. ISE Option Eco (2024)

ATEBA ONDOUA Aristide (ENSEA)
 EWOUNDJO Christian (ISSEA)
 DIMI Firsule (ENSEA)
 MALGOUBRI Abdou-Aziz (ENSEA)
 NGOLLONG Franck Nelson (ENSEA)
 NOGA Dilane Cabbel (ISSEA)

3. ISE Option Maths (2024)

FOUDJIN Karlane (ENSEA)
 KUATE Cabrel (ISSEA)
 MAKPUNE Andre (ISSEA)
 NTONGME Arsène (ENSEA)
 PAHANE Kerencia (ENSAE)
 PELAP Franck Axel (ISSEA)
 SOLANGE Difo (ISSEA)
 TCHUIDJANG Jorexe (ENSEA)

4. IFORD (2024)

AVOM Paul Antoine (3ème)
 KUATE Cabrel (7ème)
 NGUIMATSIA Henri.

1. ISE Long/AS (2023)

ABENA BALA Marc Loïc (ISSEA)
 AGNANGMA David Landry (ENSAE)
 AKONO Joseph Ariel (ISSEA)
 DAIFFERLE Marianne (ENSAE)
 DONKENG Manuelle Idrisse (ENSEA)
 HASSANA Mohamadou (ISSEA)
 MFOYET bdellatif (ISSEA)
 MOGUEM TABUE Erina Lucelle (ISSEA)
 MOUALA NGABILANG Lucrèce (ENSEA)
 NGUEAJIO DONGMO Franck (ENSAE)
 NKWA TSAMO Leslye Patricia (ENSAE)
 ZE II Jonathan Patrick (ISSEA)

2. ISE Option Eco (2023)

ATEBA Joseph Stève (ISSEA)
 IKIA AMBOYA Grace (ISSEA)
 NJIFON MOUNCHINGAM (ISSEA)
 NYANGONO AKONO Jenny (ISSEA)

ONANA ABENA Valery (ENSEA)
 SEYDOU Ferdinand (ISSEA)

3. ISE Option Maths (2023)

AWADJOU Rodrigue Pavel (ISSEA)
 KENMOGNE Marelle Ingrid (ENSEA)
 KEOUL Maab Mara (ISSEA)
 MAGUETSWET Rivalien (ISSEA)
 MATANG KUETE Josette (ENSAE)
 NGUIMGO Mikadeau (ISSEA)
 YABOYA Anicet Marius (ISSEA)

4. IFORD (2023)

AWADJOU Rodrigue Pavel (1er)
 CAROLINE EBONGUE (Voie A)
 KEOUL MAAB MARA
 MBENE NGUEDE Jessica (6ème)
 METOUKE ADIANG Vidal
 YABOYA Anicet Marius (7ème)

1. ISE Long/AS (2022)

DITCHIBE Bertrand (ISSEA)
 FARAITINI Christ Justin (ISSEA)

KAPI TCHIAWOU Blanche (ISSEA)
KENFACK Joséphine Elza (ISSEA)
MBA-NZE Stéphane Emmanuel (ISSEA)
NGOUATIO Maguy Bricelle (ISSEA)
NGOUDJO DEUMAGA Kell (ENSEA)
TOUKAM LOWE Sandra (ISSEA)

2. ISE Option Eco (2022)

MISSENGUE Exaucée (ISSEA)
MOSSE Isabelle Danielle (ENSAE)
NGAH KEDE Armel Bruno (ISSEA)
SHERIFFA MVUH (ISSEA)
TAGNE Rinel Valdy (ISSEA)

MENSA Academy

Chapitre 1

Présentation générale de l'IFORD

L'École Africaine de la Météorologie et de l'Aviation Civile (EAMAC) est un centre de formation d'excellence de l'Agence pour la Sécurité de la Navigation Aérienne en Afrique et à Madagascar (ASECNA), spécialisé dans la formation initiale et continue des cadres et personnels techniques africains dans les domaines de la navigation aérienne, du transport aérien, de la météorologie ainsi que de l'électronique et de l'informatique appliquées aux systèmes de la sécurité aérienne. Créée en 1963 à Niamey, au Niger, l'EAMAC a pour vocation de contribuer au renforcement des compétences nécessaires au fonctionnement sûr, efficace et moderne des services aéronautiques et météorologiques sur le continent africain.

À ce titre, les formations dispensées à l'EAMAC contribuent au développement des compétences des futurs ingénieurs, techniciens, contrôleurs de la circulation aérienne et spécialistes de l'exploitation aéronautique, afin qu'ils puissent participer efficacement à la gestion de la navigation aérienne, à la sécurité et à la performance du transport aérien, à la surveillance et à la prévision météorologiques, ainsi qu'à la maintenance et à l'exploitation des systèmes électroniques et informatiques aéronautiques. L'école propose notamment des cycles d'Ingénieur, d'Exploitation de l'Aéronautique Civile, de Technicien et de Contrôleur de la Circulation Aérienne, auxquels s'ajoutent de nombreuses formations continues destinées au perfectionnement et à la qualification des personnels techniques.

1.1 Conditions d'entrée à l'EAMAC

L'entrée à l'EAMAC se fait principalement sur concours. À cet effet, l'École organise chaque année un concours d'entrée dans les pays pour lesquels des besoins en formation ont été préalablement exprimés. Les candidats composent dans les centres de concours ouverts dans leur pays de résidence, sous la responsabilité du Comité Local du Concours, généralement en lien avec l'Autorité de l'Aviation Civile du pays concerné. Pour la session 2026, les inscriptions se sont déroulées en ligne du 09 au 27 mars 2026, suivies du dépôt des dossiers auprès des Comités

Locaux du Concours du 09 au 30 avril 2026.

L'EAMAC organise notamment des concours d'accès aux cycles **Ingénieur**, **Exploitation de l'Aéronautique Civile (EAC)** et **Technicien**. Les conditions d'admission varient selon le cycle concerné. Pour le **cycle Ingénieur**, le concours est ouvert aux candidats titulaires, ou en cours d'obtention, d'un diplôme scientifique ou technique de niveau requis, notamment après une deuxième année universitaire scientifique ou technique. Pour le **cycle Technicien**, il faut notamment être titulaire d'un baccalauréat scientifique des séries C, D, S ou d'un baccalauréat technologique des séries E ou F, avec une limite d'âge fixée à moins de 25 ans au 1er janvier 2026 pour les élèves, étudiants et autres candidats.

Les candidats doivent fournir un dossier comprenant notamment une copie légalisée du diplôme exigé, le relevé de notes correspondant, un extrait d'acte de naissance, deux photos d'identité récentes et une fiche individuelle de renseignements. Les candidats admis doivent également fournir, lors de leur inscription définitive, un certificat de nationalité, un extrait de casier judiciaire récent ainsi qu'un certificat de visite et de contre-visite médicale.

Le concours d'entrée comporte principalement des épreuves de **mathématiques, physique, français et anglais**, avec des modalités et des niveaux qui varient selon le cycle. Pour le cycle Ingénieur, la session 2026 comprenait notamment quatre épreuves écrites : français, physique, mathématiques et anglais. Des épreuves professionnelles peuvent également être prévues pour les agents de l'ASECNA et les professionnels de l'Aviation Civile et de la Météorologie.

L'admission est prononcée à l'issue du processus de sélection sur la base des résultats obtenus aux épreuves et des besoins exprimés par les pays. Il convient donc de souligner que l'ouverture d'un cycle n'est pas automatique dans tous les pays chaque année : l'EAMAC ne publie les résultats que pour les cycles pour lesquels les pays ont préalablement exprimé des besoins.

Pour la session 2026, les pays concernés par les concours et admissions publiés par l'EAMAC étaient notamment le **Bénin, le Burkina Faso, la Centrafrique, les Comores, la Côte d'Ivoire, le Gabon, Madagascar, le Mali, la Mauritanie, le Niger, le Rwanda, le Sénégal, le Tchad et le Togo**. Le **Cameroun** figurait dans le tableau des pays de l'EAMAC, mais aucun des cycles Ingénieur, Contrôleur, EAC ou Technicien n'y était ouvert pour la session 2026.

1.2 Les débouchés

À leur sortie de l'EAMAC, les jeunes professionnels disposent de nombreuses opportunités d'insertion professionnelle dans les domaines de l'aéronautique civile, de la météorologie, de la navigation aérienne et des systèmes électroniques et informatiques. Selon leur cycle de formation et leur spécialisation, ils peuvent notamment exercer dans les structures suivantes :

- l'ASECNA et ses différentes représentations nationales ;
- les Autorités de l'Aviation Civile des États membres ;

- les services météorologiques nationaux ;
- les aéroports et plateformes aéroportuaires ;
- les services de contrôle et de gestion de la circulation aérienne ;
- les organismes et structures chargés de la sécurité et de la navigation aérienne ;
- les administrations publiques et ministères en charge des transports, de l'aviation civile et de la météorologie ;
- les compagnies aériennes et autres entreprises du secteur aéronautique ;
- les entreprises spécialisées dans l'électronique, les télécommunications et les systèmes informatiques appliqués à l'aéronautique ;
- les organismes internationaux intervenant dans le domaine de l'aviation et de la météorologie ;
- les bureaux d'études, centres de recherche et institutions de formation ;
- le secteur privé et les entreprises spécialisées dans les technologies aéronautiques et météorologiques ;
- etc.

1.3 Les matières du concours

Les épreuves du concours d'entrée à l'EAMAC varient selon le cycle de formation visé. Pour la session 2026, les concours concernent notamment les cycles **Ingénieur**, **Exploitation de l'Aéronautique Civile (EAC)** et **Technicien**. Les épreuves portent principalement sur les **mathématiques, la physique, le français et l'anglais**. Les programmes officiels de l'EAMAC précisent les connaissances et les chapitres à maîtriser pour chaque cycle.

1.3.1 Cycle Ingénieur

Pour le cycle **Ingénieur**, le candidat doit avoir une solide maîtrise des mathématiques et de la physique, ainsi que de bonnes compétences en français et en anglais.

1. Mathématiques

Le programme de mathématiques du cycle Ingénieur comprend principalement :

- **Algèbre :**
 - théorie des ensembles : logique, ensembles, relations et applications ;
 - lois de composition internes ;
 - groupes, sous-groupes, groupes finis et groupes cycliques ;
 - anneaux et corps ;
 - nombres réels et nombres complexes ;

- espaces vectoriels et applications linéaires ;
- systèmes générateurs, familles libres et bases ;
- matrices : opérations, rang, transposée et changement de base ;
- polynômes et fonctions polynomiales ;
- fractions rationnelles ;
- déterminants ;
- systèmes d'équations linéaires ;
- réduction des endomorphismes : valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation et forme de Jordan.
- **Analyse :**
 - suites numériques ;
 - limites et continuité ;
 - dérivabilité et calcul différentiel ;
 - fonctions usuelles : logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et hyperboliques ;
 - développements limités ;
 - calcul intégral ;
 - intégrales généralisées ;
 - fonctions vectorielles d'une variable réelle ;
 - équations différentielles ;
 - fonctions de plusieurs variables ;
 - séries numériques et séries de fonctions ;
 - séries entières ;
 - séries de Fourier et transformation de Fourier.

2. Physique

Le programme de physique comprend notamment :

- **Mécanique générale :**
 - mécanique statique ;
 - forces, moments et conditions d'équilibre ;
 - centre de masse ;
 - cinématique et dynamique du point matériel ;
 - changement de référentiel ;
 - gravitation et mouvements à force centrale ;
 - oscillateur harmonique ;
 - mécanique du solide ;
 - quantité de mouvement, moment cinétique et énergie.

— **Électricité :**

- électrostatique ;
- champ et potentiel électrostatiques ;
- théorème de Gauss ;
- conducteurs, capacités et condensateurs ;
- énergie électrostatique ;
- magnétostatique ;
- champ et induction magnétiques ;
- lois de Biot–Savart, d'Ampère, de Faraday et de Lenz ;
- électrocinétique ;
- loi d'Ohm, loi de Joule et lois de Kirchhoff ;
- circuits électriques ;
- théorèmes de Thévenin et de Norton.

— **Thermodynamique :**

- systèmes thermodynamiques ;
- travail et chaleur ;
- transformations réversibles et irréversibles ;
- énergie interne ;
- premier et deuxième principes ;
- entropie ;
- cycle de Carnot ;
- moteurs thermiques et rendement ;
- troisième principe de la thermodynamique.

— **Électromagnétisme :**

- champs créés par les charges en mouvement ;
- équations de Maxwell ;
- ondes électromagnétiques ;
- propagation des ondes ;
- réflexion et réfraction ;
- ondes stationnaires.

3. Français

L'épreuve de français vise notamment à apprécier la capacité du candidat à comprendre un texte scientifique ou technique, à organiser ses idées et à les exposer dans une langue correcte.

Le programme porte principalement sur :

- lecture et compréhension d'un texte à caractère scientifique ou technique ;
- questionnaire de compréhension ;

- production écrite à partir d'une question relative au texte ;
- organisation logique des idées ;
- qualité de l'expression écrite.

4. Anglais

L'épreuve d'anglais est commune aux différents cycles et porte notamment sur :

- expression écrite ;
- rédaction et organisation logique des idées ;
- thème et version ;
- compréhension de textes ;
- lecture de textes à caractère scientifique ;
- système verbal ;
- verbes modaux ;
- comparatif et superlatif ;
- gérondif ;
- adjectifs composés ;
- pronoms relatifs ;
- adverbes et prépositions ;
- mots de liaison ;
- vocabulaire relatif aux sciences et technologies ;
- commerce, industrie et services ;
- développement ;
- tradition et culture en Afrique.

1.3.2 Cycle Exploitation de l'Aéronautique Civile (EAC)

Le concours du cycle **EAC** comporte les mêmes grandes matières que celui du cycle Ingénieur :

- **Mathématiques** ;
- **Physique** ;
- **Français** ;
- **Anglais**.

Les programmes de mathématiques et de physique sont ceux définis par l'EAMAC pour les cycles **EAC et Ingénieur**. Le candidat doit donc maîtriser notamment l'algèbre, l'analyse, les matrices, les systèmes linéaires, les fonctions, les intégrales, les équations différentielles, la mécanique, l'électricité, la thermodynamique et l'électromagnétisme.

En français, l'accent est mis sur la compréhension et l'exploitation d'un texte scientifique

ou technique ainsi que sur la capacité à produire une réponse claire, structurée et correctement rédigée. En anglais, les connaissances évaluées portent notamment sur la compréhension écrite, la grammaire, la traduction, l'expression écrite et le vocabulaire scientifique et technique.

1.3.3 Cycle Technicien

Le programme du cycle **Technicien** est davantage orienté vers le niveau secondaire scientifique et comprend également quatre matières principales :

- **Mathématiques ;**
- **Physique ;**
- **Français ;**
- **Anglais.**

1. Mathématiques

Les principaux chapitres à maîtriser sont :

- **Nombres complexes :**
 - forme algébrique ;
 - conjugué ;
 - représentation géométrique ;
 - module et argument ;
 - forme trigonométrique ;
 - formule de Moivre ;
 - racines n -ièmes ;
 - équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
- **Suites :**
 - raisonnement par récurrence ;
 - convergence ;
 - suites divergentes ;
 - théorèmes de comparaison.
- **Fonctions numériques :**
 - logarithmes ;
 - exponentielles ;
 - continuité et dérivabilité ;
 - fonctions réciproques ;
 - étude et représentation graphique des fonctions ;
 - équations et inéquations ;
 - points d'inflexion.

— Calcul intégral :

- intégrale d'une fonction continue ;
- propriétés de l'intégrale ;
- primitives ;
- changement de variable ;
- intégration par parties ;
- calcul d'aires et de volumes.

— Probabilités :

- probabilités sur un ensemble fini ;
- dénombrement ;
- probabilités conditionnelles ;
- indépendance ;
- variables aléatoires ;
- lois de probabilité ;
- espérance, variance et écart-type ;
- loi binomiale ;
- schéma de Bernoulli.

— Statistiques :

- séries statistiques à deux variables ;
- nuage de points ;
- point moyen ;
- droites de régression ;
- coefficient de corrélation.

2. Physique

Les principaux chapitres sont :

— Dynamique :

- cinématique ;
- vecteurs vitesse et accélération ;
- mouvement rectiligne uniforme ;
- mouvement rectiligne uniformément varié ;
- mouvement circulaire uniforme ;
- théorème du centre d'inertie ;
- théorème de l'énergie cinétique ;
- gravitation ;
- chute libre ;
- plan incliné ;

- mouvements de projectiles ;
- satellites ;
- mouvement de particules chargées dans un champ électrique.
- **Oscillateurs mécaniques :**
 - pendule élastique horizontal ;
 - pendule élastique vertical ;
 - mouvements sinusoïdaux ;
 - étude énergétique.
- **Vibrations et propagation :**
 - phénomènes périodiques ;
 - vibrations sinusoïdales ;
 - vecteur de Fresnel ;
 - propagation d'un ébranlement ;
 - célérité ;
 - ondes progressives ;
 - longueur d'onde ;
 - superposition et interférences ;
 - interférences lumineuses.
- **Électromagnétisme :**
 - champ magnétique ;
 - champ magnétique terrestre ;
 - champ créé par un solénoïde ;
 - force de Lorentz ;
 - force de Laplace ;
 - induction électromagnétique ;
 - loi de Lenz ;
 - loi de Faraday ;
 - auto-induction ;
 - inductance et énergie.

3. Français

L'épreuve de français du cycle Technicien propose notamment trois types d'exercices au choix :

- résumé suivi d'une discussion ;
- commentaire composé ;
- dissertation.

Le candidat doit donc maîtriser la compréhension d'un texte, l'identification et l'organisation

des idées, la construction d'un plan, l'argumentation et la rédaction correcte.

4. Anglais

Le programme d'anglais est commun aux différents cycles et comprend :

- expression écrite ;
- rédaction et organisation des idées ;
- thème et version ;
- compréhension et étude de textes scientifiques ;
- grammaire et système verbal ;
- verbes modaux ;
- comparatif et superlatif ;
- gérondif ;
- adjectifs composés ;
- pronoms relatifs ;
- adverbes, prépositions et mots de liaison ;
- vocabulaire scientifique, technologique, économique et social.

1.3.4 À retenir pour la préparation

La préparation au concours de l'EAMAC doit donc être adaptée au cycle choisi. Le candidat au **cycle Ingénieur ou EAC** doit particulièrement renforcer son niveau en **algèbre, analyse, physique et raisonnement scientifique**, tandis que le candidat au **cycle Technicien** doit maîtriser solidement le programme scientifique de niveau Terminale, notamment les **nombre complexes, suites, fonctions, intégrales, probabilités, statistiques, mécanique, vibrations et électromagnétisme**. Dans tous les cycles, une attention particulière doit être accordée au **français et à l'anglais**, qui constituent des matières importantes du concours.

1.3.5 Fonctions numériques d'une variable réelle

1. Limite, continuité d'une fonction.
2. Dérivée d'une fonction en un point ; dérivée d'une fonction composée de deux fonctions dérivables ; application à l'étude du sens de variation ; représentation graphique.
3. Exemples de fonctions numériques d'une variable réelle.
4. Primitive d'une fonction : définition, propriétés ; application ; calcul d'aire.

EAMAC

Concours EAMAC
2026

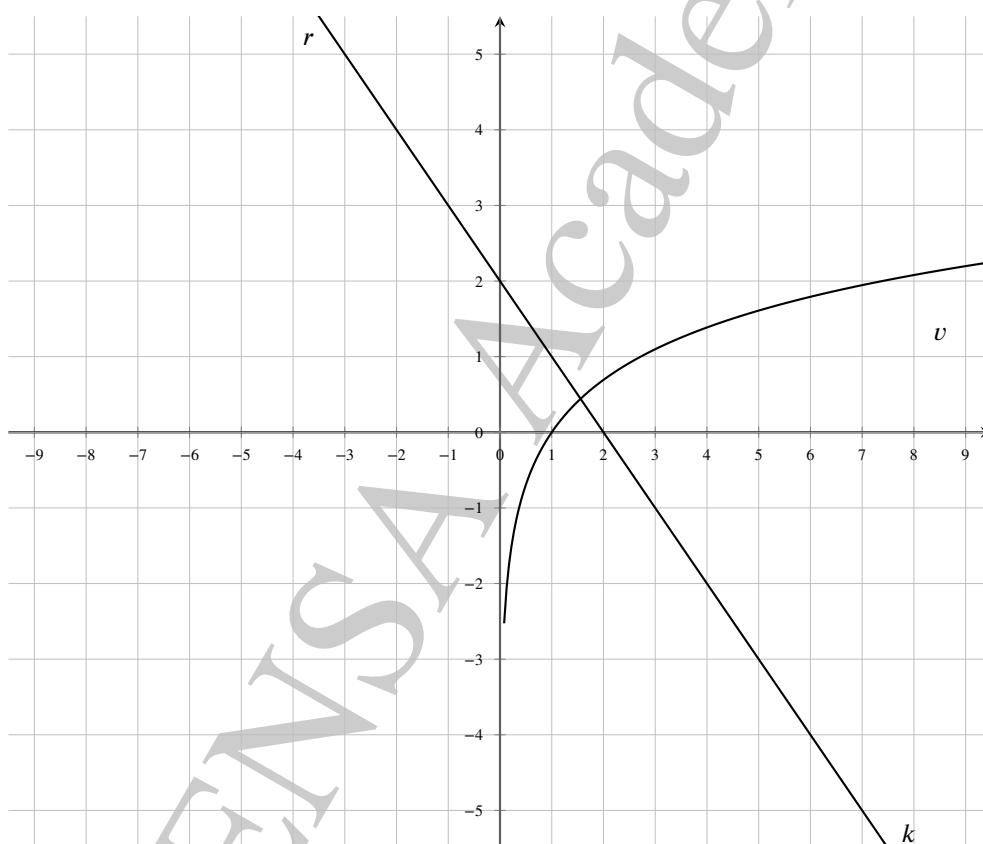
Cycle : TECHNICIEN

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 03 heures

Exercice 1 : (5points)

Soient u et v les fonctions définies par $u(x) = -x + 2$ et $v(x) = \frac{1}{2} \ln(x)$; leurs courbes représentatives sont données ci-dessous.



- Montrer graphiquement qu'il existe un entier naturel n tel que l'abscisse l du point d'intersection des 2 courbes appartient à $]n; n + 1[$. **(0.5pt)**
- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]n; n + 1[$ où f est définie par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$. **(0.5pt)**
- Déterminer le signe de $f(x)$. **(0.5pt)**

1. Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$

$$\text{par } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Justifier que g est continue en 0 puis calculer la limite de g en $+\infty$. (1pt)
- b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de g . (1pt)
- c) Justifier que $g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$. (0.5pt)
- d) Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. (0.5pt).
- e) Tracer la courbe de g . (0.5pt)

Exercice 2 : (5 points)

Le plan sera rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit D l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tel que $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

- 1) a) Déterminer la nature de D (1pt)
- b) Représenter graphiquement l'ensemble D . (0,75pt)
- 2) Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par $f : z \rightarrow z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5\sqrt{3}$. (1,5pt)
- 3) a) Quel est l'ensemble D' , image par φ de l'ensemble D déterminé au 1) (1 pt) ?
- b) Représenter graphiquement D' . (0,75pt).

Exercice 3 : (5points)

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Déterminer I_0 et I_1 . (0.5pt)
2. Démontrer que (I_n) est décroissante. (0.75pt)
3. a) Justifier que (I_n) est convergente. (0.75pt)
- b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. (1pt)
- c) En déduire la limite de I_n . (0.5pt)
4. a) Prouver que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. (1pt)
- b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3 . (0.5pt)

Exercice 4 : (5points)

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1 , U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1 , deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3 . Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

- * s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1 , note sa couleur et la remet dans U_1 ;
- * s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2 , note sa couleur et la remet dans U_2 ;
- * si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3 , note sa couleur et la remet dans U_3 .

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ». **B** : « Le dé amène un multiple de 3 ». **C** : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

- a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$. **(1pt)**
- b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire. **(1pt)**
- c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$. **(1pt)**
- d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$. **(1pt)**

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.

Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire. **(1pt)**

EAMAC	Concours EAMAC 2026	Cycle : TECHNICIEN
--------------	--------------------------------	---------------------------

Epreuve de : Physique

Durée : 03 heures

EXERCICE 1 : (5pts)

Un mobile M se déplace sur un axe $(O; \vec{i})$ avec une accélération constante. Deux de ses positions sont repérées sur le tableau ci-dessous :

T(s)	V (m/s)	X (m)
1	-5	4
6	5	4

1-Déterminer la loi horaire du mouvement de M. (1pt)

2-A quel instant le mobile rebrousse-t-il chemin ? Quelle est alors sa position ? (1pt)

3-A la date $T=5s$, un deuxième mobile M' part de l'abscisse $X'=3m$ avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V'=10m/s$ sur le même axe que M.

a-Etablir la loi horaire du mouvement de M' dans le repère $(O; \vec{i})$. (1pt)

b-A quelle date t_R l'un des mobiles rattrapera-t-il l'autre ? Calculer l'abscisse x_R où aura lieu cette rencontre. (1pt)

c- Le solide M' doit-il augmenter ou diminuer sa vitesse pour qu'il soit rattrapé par M à l'abscisse $X=50m$? (1pt)

EXERCICE 2 : (5pts)

Un vibreur est muni d'un stylet dont les pointes distantes de 3,8cm, animé d'un mouvement sinusoïdal de fréquence $N= 50Hz$ frappant verticalement en S_1 et S_2 la surface d'une nappe d'eau initialement au repos.

S_1 et S_2 sont considérées comme deux sources synchrones, en phase, d'amplitude $a=2mm$. La célérité des ondes à la surface du liquide est $V=60cm/s$.

1-a-Expliquer le phénomène observable à la surface de l'eau. (0,5pt)

b-Déterminer l'élongation d'un point M de la surface du liquide, entre S_1 et S_2 situé à la distance d_1 de S_1 et de d_2 de S_2 . (1,25pt)

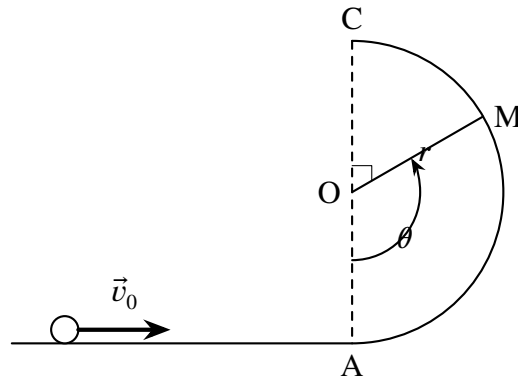
c-Déterminer l'état vibratoire des points suivants : M_1 ($d_1 = 6cm$; $d_2 = 9cm$) ; M_2 ($d_1 = 4cm$; $d_2 = 10cm$) ; M_3 ($d_1 = 7,2cm$; $d_2 = 10,2cm$) ; M_4 ($d_1 = 7cm$; $d_2 = 11cm$). (1pt)

d-Deux de ces quatre points appartiennent à la même frange d'interférence. Lesquels ? Déterminer l'intersection de cette frange avec le segment S_1S_2 par rapport à S_1 . (1,25pt)

2-Déterminer le nombre des points sur le segment S_1S_2 vibrant avec une amplitude nulle. (1pt)

EXERCICE 3 : (5pts)

Un solide ponctuel de masse m est lancé avec une vitesse $\vec{V}_0$ sur une piste rectiligne avant de rentrer dans une glissière circulaire de rayon r et de centre O . Les frottements sont négligeables. La position du mobile sur la portion de trajectoire est repérée par l'angle $\theta = (\vec{OA}; \vec{OM})$



1-Monter que la vitesse du solide en A est égale à V_0 . (0,5pt)

Faire l'inventaire des Forces qui s'exercent sur le solide une fois sur la glissière. (0,5pt)

2-Exprimer la vitesse du solide au point M de la piste en fonction de r et θ . (1pt)

3-Déterminer la norme R de la réaction $\vec{R}$ exercée par la glissière sur le solide. (1pt)

Montrer que R s'annule pour une valeur θ_0 qui est fonction de V_0 . (0,5pt)

4-Quelle est la valeur minimale de V_0 pour que le solide atteigne le sommet C de la trajectoire? (1pt)

Quelle est alors la vitesse en C? (0,5pt)

Application : $g=10 \text{ N/Kg}$; $r=1,25\text{m}$

2-On fait passer un courant d'intensité I dans le solénoïde, l'aiguille aimantée tourne d'un angle $\alpha = 60^\circ$.

a-Indiquer sur le schéma, le sens du courant et le sens de déviation de l'aiguille. (1pt)

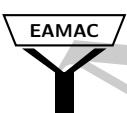
b-Calculer l'intensité du courant I qui traverse le solénoïde. (1pt)

3-Le dispositif étant maintenu, on approche la face nord d'un aimant droit de la face nord du solénoïde. Cet aimant droit crée alors un champ d'intensité $B_a = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ au centre du solénoïde dont les axes coïncident.

a-Quelle est la nouvelle déviation prise par l'aiguille aimantée? (1pt)

b-Calculer l'intensité du champ magnétique résultant matérialisé par la direction de l'aiguille. (1pt)

On donne la composante horizontale du champ magnétique terrestre : $B_h = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

	Concours EAMAC 2026	Cycle : TECHNICIEN
---	--	---------------------------

Epreuve de : Français

Durée : 04 heures

Vous voudrez bien traiter au choix un (01) des sujets ci-dessous :**Sujet N°1 : Résumé - Discussion**

Après avoir résumé le texte au 1/4 de son volume, vous discuterez l'idée selon laquelle « tous les travaux ont leur mérite et leur beauté ».

Le travail, quel qu'il soit, et celui du forgeron comme celui du paysan, et ceux de la main comme ceux de l'esprit, tous ont leur mérite et leur beauté ; et même de la forge la plus rude il jaillit un effort qui va jusqu'aux racines les plus subtiles de l'âme.

Le métier surexcite et discipline la faculté de vouloir . Forger une épée, c'est un duel contre les matières ; regards fixés ; membres tendus, mains raidies, gestes calculés et surveillés, souffrance maîtrisée et fatigue abolie, voilà une double victoire remportée par l'âme sur le corps plié à sa volonté, sur la matière façonnée à son idée.

Le métier tient l'intelligence en éveil. Même le plus humble n'est point machinal. Il faut que le charretier observe sa bête, sa voiture et le chemin, que le mineur précède de la pensée le choc du pic sur la pierre, et le pêcheur, pour scruter la surface de l'eau, déploie parfois à la même souplesse de réflexion que l'historien pour analyser le sens d'un texte. Tout métier exige une technique de l'esprit.

Le métier, enfin, fait sa place au sentiment, à la joie, la vraie joie, celle que provoque la sensation d'un devoir accompli, la vue d'un ouvrage terminé.

N'est-ce pas là un plaisir d'essence pure que celui d'un potier qui à l'heure dite, aperçoit devant lui l'œuvre achevée par ses mains, et il n'importe que cette œuvre soit une figurine d'art ou un vulgaire ustensile, c'est une œuvre bien faite, elle est finie et c'est son œuvre.

C. Jullian

Revue bleue.

Sujet N°2 Commentaire composé**«Je veux des enfants...»**

Loutaya ne dort pas aussitôt. Ce n'étaient pas les coups reçus qui lui faisaient tambouriner la tête et battre rapidement les tempes , l'avaient tenu éveillée, mais les paroles terribles de son mari. « Je veux des enfants et non de ta beauté... ». Son charme donc ne comptait plus sur son époux, ses sourires et regards ne lui plaisait plus ; il lui fallait des enfants. Des enfants ! Mais elle en voulait, elle aussi ! Elle attendait depuis des lunes l'heureux moment où elle deviendrait mère ... le jour où elle aurait un enfant... des enfants... elle en aurait, elle en était sûre. Était-ce pensable qu'elle n'en eût point ? N'était-elle pas issue de deux lignées réputées les plus productrices d'enfants ?

Sa mère était pour Loutaya le livre le plus précieux et elle y avait lu que chaque membre de ce groupement avait le devoir sacré de continuer cette œuvre. Gare à qui faillirait. Cet avertissement s'adressait surtout aux femmes. Gare à celle qui se laisserait emporter par le seul plaisir de la chair et se déroberait ainsi au devoir de la procréation est sacrée et toute personne qui s'y refuse doit subir le supplice et le châtement prévus par la coutume.

Voilà ce que Loutaya avait lu dans le livre d'histoire qu'était sa mère. Voilà pourquoi elle espérait fermement qu'elle aurait des enfants. Mais quand ? Cela devenait inquiétant car ne voilà-t-il pas plus d'une saison sèche qu'elle vivait avec Vouata ? Ne voilà-t-il pas que ce retard commençait à susciter des passions ? Qu'attendait les mânes de son clan pour lui envoyer un enfant afin de dissiper les soupçons et de barrer la route aux sarcasmes des hommes qui commençaient à murmurer ? « Je ne suis pas stérile, moi. Ma grand-mère me l'aurait dit en songe, finit-elle par murmurer tandis que les larmes mouillaient ses joues... Pourquoi veut-il m'accuser ?... » Loutaya éclata en sanglots.

Guy Menga, La palabre stérile, Clé 1968

Vous ferez un commentaire composé de ce texte. Vous pourriez par exemple montrer comment l'importance de la maternité conduit à une obsession chez Loutaya.

Sujet N°3 : Dissertation

Lors de la réception du prix Nobel de la littérature en 1957, Albert Camus affirmait dans son discours : « Le rôle de l'écrivain (...) ne le sépare pas des devoirs difficiles. Il est au service de ceux qui subissent l'histoire ».

Dans un développement argumenté et illustré d'exemples tirés d'œuvres littéraires étudiées ou lues, expliquez, puis discutez cette opinion.

2026 EAMAC 	Concours EAMAC Cycle : TECHNICIEN
--	---

Epreuve d'Anglais

Durée : 02 heures

A- Comprehension.**a- Read the text then answer to the questions. 5 points****Modern energy and human development**

Energy is prerequisite to economic development. The prosperity that economic development brings, in turn, stimulates demand for more and better energy services. Energy services also help to meet such basic human needs as food and shelter. They contribute to development by improving social education and public health. Electricity plays a particular important role in human development. Most developed countries have developed a virtuous circle of improvements in energy infrastructures and economic growth. But in the world poorest countries, the process has barely got off the ground.

Electrification rates will rise over the production period, but the total number of people without electricity will fall slightly, from one point six billion in 2002 to just under one point four billion in 2030. Most of the net decrease in number of people without electricity will occur in 2015. The rank of the electricity – deprived will fall in Asia, but will continue to swell in Africa.

Developing countries can look forward to further advances in energy and human development. According to the Energy Development Index all developing regions can expect to experience increase in per capita use and improved access to modern energy services- including electricity. Yet only a few Middle East and Latin America countries will have reached the stage of energy development in 2030. Africa and south Asia will remain far behind. [-]

Government must act decisively to accelerate the transition to modern fuels to break the vicious circle of energy and poverty and human under-development in the world's poorest countries. This will require increasing the availability and affordability of commercial energy, particularly in rural areas. Good governance in the energy sector and more generally will be critical to improving both the quantity and the quality of energy services. The rich industrialized countries have clear economic and security interests in helping developing countries along the energy development path.

Adapted from world Outlook. 2004.

- 1- In one word not more what is the key to economic development ?**
- 2- What does prosperity generate ?**
- 3- What tells you in the text that the poor countries do nothing to develop their energy infrastructures ?**
- 4- Write : one point six billion in figure.**
- 5- What is needed to develop the quantity and the quality of energy services in the poor countries ?**

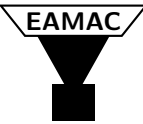
b- Vocabulary. Explain these words according to the context. 1,25 points**1- Prerequisite.(Energy is prerequisite to economic development)****2- Shelter. (basic human needs as food and shelter basic human needs as food and shelter)****3- To swell. (but will continue to swell in Africa)****4- Availability.(increasing the availability and affordability of commercial energy)****5- Affordability.(increasing the availability and affordability of commercial energy)****B- Translation.****a- Translate these sentence into English. 1,25 points****1- Vous feriez mieux d'écouter les conseils de vos parents.****2- C'est la première fois que je viens à Londres.****3- Nous t'appellerons dès que nous arriverons à la maison.****4- Je préfère les bananes aux oranges.****5- C'est le meilleur jus que je n'ai jamais bu.****b- Translate this paragraph into French. 2,50 points**

Energy services also help to meet such basic human needs as food and shelter. They contribute to development by improving social education and public health. Electricity plays a particular important role in human development. Most developed countries have developed a virtuous circle of improvements in energy infrastructures and economic growth. But in the world poorest countries, the process has barely got off the ground.

C- Grammar. Choose the correct answer a, b or c to fill in the blanks. 5 points**1- I have been a teacher—— I was 24.****a-during b-for c- since.****2- When did you——-your shirt ?****a-bought b-buying c-buy****3- After Tom ——the novel, he went to bed.****a-had read b- reads c-has read****4- The teacher usually——to school.****a-is walking b-walks c-walk****5- Have you ever —— a car ?****a-drive b- driving c-driven****6- I have never seen ——seller.****a-the most efficient b- a more efficient c- the more efficient.****7- She ——French now****a-is understanding b-understands c- understood****8- I am broke today. I don't have ——money.****a-any b- many c-no**

- 9- Could you put _____sugar in my coffee, please ?
a-many b-a few c-a little
- 10- Sani speaks three languages, and _____his brother.
a-so does b- neither is c- neither does
- 11- Where_____you go last night ?
a-do b-will c-did
- 12- You'll come to my wedding,_____ ?
a-will you b- do you c-won't you
- 13- _____When I arrived ?
a-do you sleep b-were you sleeping c-are you sleeping
- 14- She's been working here_____six months.
a-during b-since c-for
- 15- It's been five years_____I took a vacation.
a-when b-since c-for
- 16- Tom is _____than his friend.
a-not patient b- as patient c-more patient
- 17- It is _____city I have ever seen.
a-the busy b- the busiest c-the most busy
- 18- You should avoid _____in public.
a-to smoke b-you smoke c- smoking
- 19- Why do you prevent your kids _____playing cards ?
a-to b-from c-for
- 20- Who are you waiting _____ ?
a-to b-at c-for

D- Writing ; How can electricity contribute to the development of a country ? Make an essay of 15 lines to support your point of view. Please be concise and precise. 5 points

 2026	Concours EAMAC Cycle : INGENIEUR
--	--

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5pts)

On considère la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et

pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la limite de u_n est égale à $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$
- Etablir que, pour tout entier naturel non nul, on a $\frac{u_{n-1}u_{n+2}}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$
- En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n-1}u_{n+2}}{u_n^2 u_{n+1}^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 : (5pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des fonctions $f : R_+^* \rightarrow R$ de la forme $f : x \rightarrow xP(x) + x \ln(x)Q(x)$, où

P et Q sont deux polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Pour tout $k \in [1, n]$, soient les fonctions $e_k : x \rightarrow x^k$, et $f_k : x \rightarrow x^k \ln(x)$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de R_+^* dans R .
 - Montrer que $B = (e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$ est une base de E . En déduire la dimension de E .
- Pour toute fonction f de E et tout $x > 0$, montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^x f(t) dt$$

Pour tout $f \in E$ on définit la fonction $u(f)$ par :

$$\forall x > 0, (u(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

- Pour tout $k \in [1, n]$, déterminer $u(e_k)$ et $u(f_k)$.
- Montrer que u est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base B .
- Déterminer les valeurs propres de u . L'endomorphisme u est-il bijectif?
- Soit f un vecteur propre de E associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$.

Soit g définie sur R_+^* par $g(x) = x^{-\frac{1}{\lambda}} \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que g est constante sur R_+^* . En déduire une expression explicite de la fonction f .

- Pour chaque valeur propre λ de u , déterminer la dimension de l'espace propre associé. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

Exercice 3 : (5pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on pose $fn(x) = \frac{x^{2n+1} \ln(x)}{x^2 - 1}$

a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$.

b) On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Montrer que la suite (J_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Montrer que $J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 4 : (5pts)

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par $P_0 = 0, P_1 = 1$ et :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} + (1 - X) P_n$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + (X - 1)^n$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X - 2)P_n = (X - 1)^n - 1$.

Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

	Concours EAMAC 2026	Cycle : EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE
--	--------------------------------	--

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5pts)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$ est une intégrale convergente. On la note I .

L'objectif de cet exercice est de calculer I .

2. Exprimer $\sin^3(x)$ à l'aide de $\sin(x)$ et de $\sin(3x)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$$

A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I(\varepsilon) = \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$$

4. Démontrer que

$$\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad u - \frac{u^3}{6} \leq \sin(u) \leq u$$

5. Déterminer $\lim I(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et conclure.

Exercice 2 : (5pts)

Soit n , un entier supérieur ou égal à 1.

Soit $B_n = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ la base canonique $\mathbb{R}^{2n+1}$ et $V_n = e_1 + \dots + e_{2n+1}$.

On note $M_n = (m_{i,j})$ la matrice carrée de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients suivants :

$$\forall i \in [1, 2n+1], m_{i,1} = m_{i,2n+1} = 1 \text{ et } m_{n+1,n+1} = 1$$

On note également f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ dont la matrice représentative dans la base B_n est M_n .

1. On suppose dans cette question que $n = 1$, et donc :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice M_1 est-elle inversible ?
 - Calculer $f_1(e_2)$.
 - Soit un réel a . On note $u_a = (1, a, 1)$. Montrer qu'il existe une valeur de a telle que le vecteur u_a est un vecteur propre de f_1 . Quelle est la valeur propre associée ?
 - En déduire les valeurs propres de f_1 ainsi qu'une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f_1 . On revient au cas général.
2. (a) Quel est le rang de f_n ?
- (b) Montrer que la famille $F = (V_n, e_{n+1})$ est une base de $\text{Im}(f_n)$.
- (c) On note g_n la restriction de f_n à $\text{Im}(f_n)$.
- Justifier que g_n est un endomorphisme de $\text{Im}(f_n)$.
 - Écrire la matrice A_n de g_n dans la base $\text{Im}(f_n)$.
- (d) Soit λ une valeur propre non nulle de f_n et x un vecteur propre associé. Montrer que x appartient à $\text{Im}(f_n)$.
- (e) En déduire toutes les valeurs propres de f_n . La matrice M_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : (5pts)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

- a) Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ vérifiant

$$\int_0^x t f(t) dt = 0$$

- b) Déterminer les fonctions $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables, telles que $h(0) = h(1) = 0$ et $h'' = g$.

Exercice 4 : (5pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associés aux nombres $x_0, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}$ distincts

$$\text{par : pour tout } k \text{ appartenant à } [0, n], L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

1. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner l'écriture de tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Dans la suite de cet exercice, on se donne un couple (A, B) de polynômes avec A appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(B) = n + 1$.

On considère également l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour tout entier $k \in [0, n]$ on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .
 - (a) Soit $(i, j) \in [0, n]^2$. Déterminer $R_k(x_j)$.
 - (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

EAMAC	Concours EAMAC 2026	Cycle : INGENIEUR
--------------	--------------------------------	--------------------------

Epreuve de : Physique**Durée : 04 heures****Exercice 1 : (5pts)**

Un ballon sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x = \frac{z}{\tau}$ proportionnelle à l'altitude z atteinte.

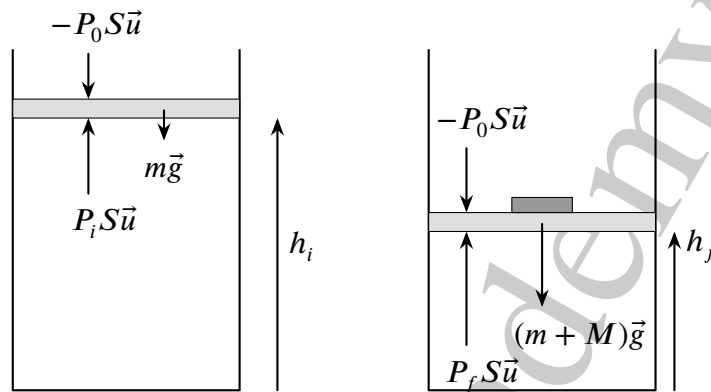
1. Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$. (3pts)
2. Calculer le vecteur accélération, ses composantes tangentielle et normale. (2pts)

Exercice 2 : (5pts)

Une mole d'un gaz parfait monoatomique de capacité molaire à volume constant $c_v = \frac{3}{2}R$, est placée dans un cylindre vertical, aux parois adiabatiques, fermé par un piston, également adiabatique, de masse $m = 1\text{ kg}$ et de section $S = 25\text{ cm}^2$. La pression atmosphérique est égale à

$P_0 = 1 \text{ bar}$. Initialement la hauteur occupée par le gaz est égale à $h_i = 80 \text{ cm}$. On ajoute brutalement sur le piston une masse

M qui diminue la hauteur de gaz de moitié : $h_f = \frac{h_i}{2}$.



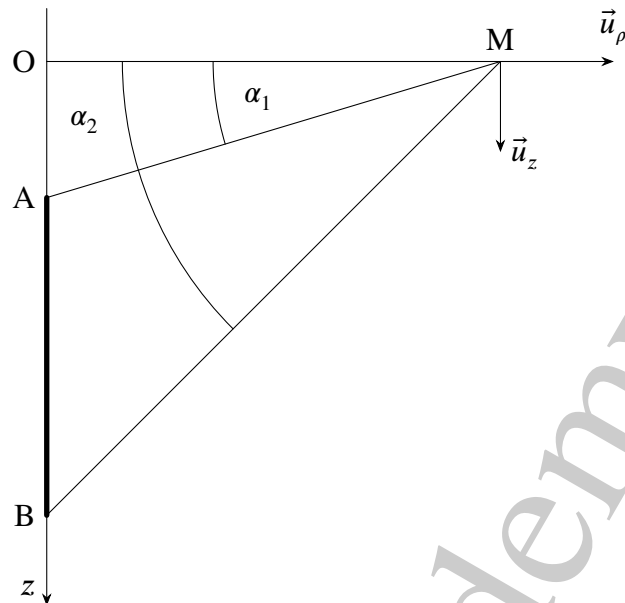
1. Calculer les volumes du gaz à l'état initial (V_i) et final (V_f). (0,5pt)
2. Déterminer l'expression du travail (W) et de la quantité (Q) de la transformation. En déduire la variation de l'énergie interne (ΔU). (1,5pts)
3. Calculer les pressions du gaz à l'état initial (P_i) et final (P_f) à l'équilibre mécanique. (1pt)
4. Calculer la valeur de la masse M que l'on a ajoutée. (0,5pt)
5. Calculer le travail (W), la quantité de chaleur (Q) et la variation de l'énergie interne (ΔU) échangés lors de cette transformation. (0,75pt)
6. Calculer la variation de l'entropie (ΔS) de la transformation. Conclure. (0,75pt)

On donne $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ et $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Exercice 3 : (5pts)

On considère un segment de droite AB uniformément chargé avec une densité linéique de charges λ ($\lambda > 0$).

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par ce segment en tout point M de l'espace. Le point M est repéré par les paramètres angulaires α_1 et α_2 . (2pts)

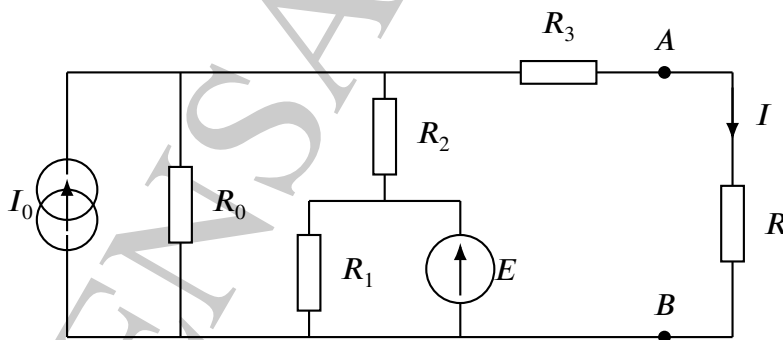


2. Etudier les deux cas particuliers suivants : (2pts)

- fil demi-infini
- fil infini

Exercice 4 : (5pts)

- 1) En utilisant le théorème de Thévenin, déterminer la tension VAB du circuit ci-dessous F (3pts)
- 2) En déduire le courant I dans la résistance R. (2pts)



Top Header Table Box

EAMAC	Concours EAMAC 2026	Cycle : EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE
--------------	--------------------------------	--

Epreuve de : Physique

Durée : 04 heures

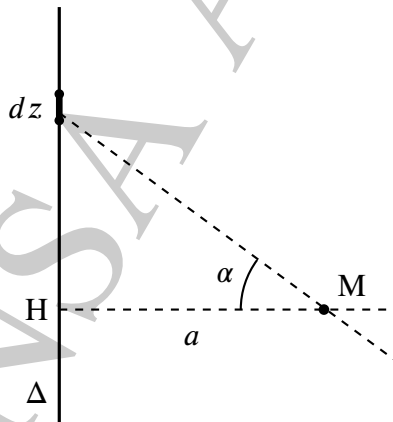
Exercice 1 : (5pts)

1. Exprimer la variation élémentaire d'entropie d'un gaz parfait en fonction des variables indépendantes T et V . (2pts)
2. En déduire la variation d'entropie d'une mole de gaz parfait lorsqu'on triple simultanément la température initiale et le volume initial du gaz. (2pts)
3. Faire l'application numérique. (1pt)

On donne $\gamma = \frac{7}{5}$; $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}$

Exercice 2 : (5pts)

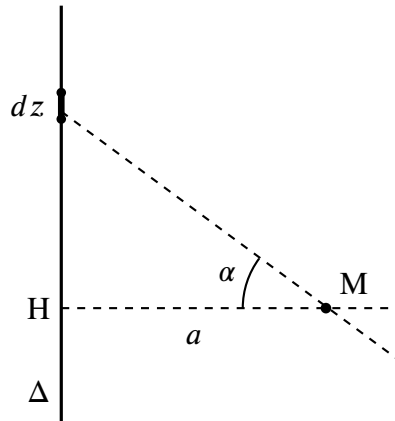
- 1) Déterminer le champ électrostatique E en un point quelconque au voisinage d'une droite illimitée Δ portant une distribution uniforme de charge de densité linéaire λ . (2pts)
- 2) Donner la différence de potentiel $V - V_0$ entre deux points M et M_0 aux distances r et r_0 .
 - a) En utilisant la relation entre le potentiel et le champ (1pt)
 - b) Par le calcul direct du potentiel (1pt)
- 3) Calculer λ pour que le potentiel soit 10 volts à la distance 0,2 m de Δ , en admettant qu'il est nul à la distance 1 m de Δ . (1pt)



Exercice 3 : (5pts)

Un véhicule, que l'on peut considérer comme un point matériel M , se déplace par rapport à un référentiel $R(0, x, y, z)$ avec un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}(M/R)$ telle que $|\vec{V}(M/R)| = v$. Le véhicule roule sur une bosse (voir figure) dont le profil peut être représenté par $y = f(x)$. On s'intéresse au segment de la route $[AB]$.

1. Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ en fonction de $\dot{x}$ et de la dérivée première $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ par rapport à x . (2pts)
2. Calculer l'accélération $\vec{a}(M/R)$. En déduire que la composante de l'accélération selon Oy peut se mettre sous la forme $a_y(M/R) = \frac{v^2 f''(x)}{(f'^2 + 1)^{3/2}}$ avec $f''(x)$ étant la dérivée seconde de $f(x)$ par rapport à x . (3pts)

**Exercice 4 : (5pts)**

Soit un solénoïde infini d'inductance L parcouru par un courant variable au cours du temps.

- 1) Calculer le coefficient d'auto-induction du solénoïde à partir du flux créé par le champ magnétique du solénoïde à travers une seule spire. (3pts)
- 2) Calculer le coefficient d'auto-induction du solénoïde, cette fois-ci, à partir de l'énergie magnétique emmagasinée dans le solénoïde. (2pts)

EAMAC	Concours EAMAC 2026	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE
-------	------------------------	--

Epreuve d'Anglais

Durée : 02 heures

A- Comprehension.

a- Read the text then answer the questions. 5points

Text ; Trafficking in persons.

Trafficking in persons is a modern day form of slavery involving the exploitation of people through force, coercion, threat and deception. It was relatively unknown in west Africa until about the late 90s. [-]

Trafficking in persons is now known for what it is. It can be the recruitment of persons through force or deception ; a person having control over another for the purpose of exploitation ; children being exploited as cheap labour in homes, farms, industrial and construction sites. There is an urgent need to arrest this crime. For this to be done, the government needs to identify and deal with the factors responsible for it.

There are various reasons for trafficking in persons. One of these is poverty. In many countries that have high rate of trafficking in persons, poverty is a major issue. Most of the citizens of these

countries are either jobless or earn low wages. The economic recession has led to scarcity of jobs. People who are even ready to take up jobs below their educational qualifications do not find any available. Thus they resort to recruiting victims or become recruited themselves. Another cause of trafficking in persons is greed. Some people who have opportunities to work and earn wages desire to earn more. [-] ignorance is another factor. Parents or guardians hand over their children or wards to traffickers believing that there are better opportunities where they are going. [-] The youth, through peer group pressure, either become victims or traffickers. They are at that age when they are ready to believe anything. Some are products of dysfunctional families. They are daring and ready to take risks.

Almost all countries are involved in human trafficking. Some are source countries, others are transit or destination countries. A source country is where the victims are recruited while the transit country is where the victims pass through before getting to the destination country. The destination country is where victims are used as labour, prostitutes or where they have their organs removed.

- 1- What is the trafficking in persons compared to ?
- 2- State four reasons responsible for the trafficking in persons.
- 3- Do west Africans know this trafficking before the 90s ?
- 4- How can a particular country be involved in trafficking in persons ?
- 5- How does the trafficking in persons affect its victims ?

b- Vocabulary. Explain these words according to the context. **1,25 points**

- 1- Coercion. [through force, coercion, threat and deception.
- 2- Threat. [, threat and deception
- 3- Scarcity. [The economic recession has led to scarcity of jobs
- 4- Deal with. [deal with the factors
- 5- Available. [do not find any available...

c- Translation.

- 1- **Translate this paragraph into French. 2,50points**

Almost all countries are involved in human trafficking. Some are source countries ; others are transit or destination countries. A source country is where the victims are recruited while the transit country is where the victims pass through before getting to the destination country. The destination country is where victims are used as labour, prostitutes or where they have their organs removed.

- 2- **Translate these sentences into English. 1,25points**

- 1- Il n'était pas plus avancé que quand il avait commencé il y'avait une heure.
- 2- Il se pourrait qu'il pleuve ce soir.
- 3- Les dernières nouvelles reçues du navire étaient un S O S.
- 4- Il ne faut pas vous surmener.
- 5- Donnez-moi d'autres livres au lieu de ceux que j'ai lus.

B- Linguistic competence. Choose a, b or c to fill in the gaps 5 points.

- 1- Did you meet _____them ? Isaac and tom.
 a-some of b- both of c- many of
- 2- The government _____ provide more equipment in schools.
 a-ought b- dare c- should
- 3- It's a pity. They have _____. They used to be friends.
 a-broken apart b- broken down c- broken up
- 4- Few students sat_____the tables in the dining hall.
 a-under b- at c- on
- 5- The dog has been barking_____.
 a-currently b- regular c- regularly
- 6- The manager to_____I wanted to talk has gone to London.
 a-whom b- who c-that
- 7- He took swimming lessons _____act the role of the swimmer in the film.
 a-because b-in order to c- due to
- 8- Yesterday she_____the sleepy baby in the bed.
 a-lay b- lied c- laid
- 9- She _____she were the first lady.

a-wishes

b- wishing

c- wish

10- The boy —————the camels now.

a-is tying

b- is tying

c- tie

11- That book —————on the table for weeks.

a-has lied

b- has lay

c- has lain

12- He————lunch if the new ambassador comes.

a-will offer

b- shall offer

c- has offered

13- It is high time he —————the oranges.

a-splits

b- split

c- splitted

14- We asked him what countries —————

a-had he visited ?

b- he had visited

c- he will visit

15- If you waited, he —————,

a-will come

b- came

c- would come

16- Oranges are said ————— better for us bananas.

a-be

b- been

c- to be

17- She is —————than she looks.

a-much old

b- much older

c- more old

18- Someone has broken the table, ————— ?

a-hasn't he

b- haven't they

c- have they

19- They objected to our —————so soon.

a-leaving

b- leave

c- left

20- He didn't get his car———yesterday.

a-washed

b- washes

c- to wash

C- Writing. 5 points

In a short composition of 12 lines tell us the consequences of illegal immigration.

MENSA Academy

	Epreuves de Mathématiques	Cycle : TECHNICIEN
---	--------------------------------------	-------------------------------

Mathématiques de 2025

Exercice 1 (5points)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1. Construire l'arbre pondéré des probabilités. **(0.5pt)**
2. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ? **(1pt)**
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ? **(1pt)**
4. On choisit 6 animaux au hasard. La taille du troupeau est telle qu'on peut assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux six animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ? **(1pt)**
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des six animaux ait un test positif ? **(1.5pt)**

Exercice 2 (5points)

Soient n un entier naturel et $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$

1. a) Calculer U_0 . **(0.5pt)**
 b) Montrer que la suite (U_n) est positive et décroissante. **(1pt)**
2. a) Pour tout entier naturel n , déterminer la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \tan^{n+1}(x)$. **(0.5pt)**
 b) En déduire que :
 (i) Pour tout entier naturel n non nul ; $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1} (*)$; **(0,5pt)**
 (ii) Pour tout entier naturel n non nul : $\frac{1}{2n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$; **(0,5pt)**
 (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ **(0.25pt)**
 c) on pose : pour tout entier naturel n non nul, $f(n) = u_{n+4} - u_n$.
 En utilisant $(*)$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$; **(0.5pt)**
3. a) Calculer U_2 . **(0.25pt)**
 b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = u_{4n+2} - u_2$ **(0.5pt)**
 c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}) = \frac{\pi}{4}$ **(0,5pt)**

Exercice 3 (5points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, u, v) . Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z ($z \neq 1$), associe le point M' d'affixe z' telle :

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

A, B et C sont des points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Déterminer, sous forme trigonométrique l'affixe c' de C' image du point C par f . **(0.5pts)**
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$ **(1pt)**
3. Pour tout nombre complexe z ($z \neq 1$), on note p le module de $z + 1$ et p' le module de $z' + i$.
 a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z ($z \neq 1$), on a $pp' = \sqrt{5}$. **(1.5pt)**
 b. Si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 2, montrer que M' appartient à un cercle (C') dont on précisera les caractéristiques. **(1pt)**
 c. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' soit un réel non nul et vérifier que le point D appartient à (E) et à (C). **(1pt)**

Exercice 4 (5points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln(x^2 - x + 1) + 1}{x}$.

1. Déterminer D le domaine de définition de f . (0.5pt)
2.
 - i. Calculer les limites de f aux bornes de D. (1pt)
 - ii. Interpréter les résultats obtenus. (0,5pt)
3. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+1)}{x^2(x^2-x+1)}$; (1pt)
4. Etudier le sens de variation de f . (0.5pt)
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty ; 0[$ et vérifier que $-0.96 < \alpha < -0.95$. (1pt)
6. Tracer la courbe représentative de f . (0.5pt)

Mathématiques de 2024

Exercice 1 (5 points)

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

(E) : Pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que, toute suite géométrique (v_n) de raison q vérifie (E) si et seulement si $q^2 = q + 1$. (1pt)
2. Pour tout n , on définit la suite (t_n) par : $t_n = A\alpha^n + B(1 - \alpha)^n$, où $A ; B$ sont des réels et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 - a) Vérifier que $1 - \alpha = -\frac{1}{\alpha}$ (0,5pt)
 - b) Montrer que la suite (t_n) vérifie (E), (1.pt)
 - c) Déterminer A et B tels que $t_0 = 1$ et $t_1 = 3$. (1pt)
3. a) Justifier que $t_n = \frac{1}{2^{n+1}} [(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (1 - \sqrt{5})^{n+1}]$; (1pt)
4. b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \alpha$. (0,5pt)

Exercice 2 (5 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. U_2 contient 5 boules blanches et une boule noire.

L'expérience (E) consiste à tirer une boule dans chaque urne. Le tirage étant équiprobable, calculer la probabilité de tirer exactement :

1. a) deux boules blanches. **(0.75pt)**

b) deux boules noires. **(0.75pt)**

c) une boule blanche et une boule noire. **(0.5pt)**

2. On appelle A l'événement « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

a) Démontrer que la probabilité de A est $\frac{17}{30}$. **(0.5pt)**

b) On répète l'expérience (E) 5 fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne d'origine.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement A ? **(1pt)**

c) On répète l'expérience (E) n fois de suite dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement A ? **(1pt)** d) Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$. **(0.5pt)**

Exercice 2 (5 points)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. a) Etudier le sens de variation de (I_n) **(1pt)**

b) Justifier que (I_n) est convergente. **(0.5pt)**

2. a) Calculer I_1 . **(0.5pt)**

b) Montrer que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$. **(1pt)**

c) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. **(0.5pt)**

d) Calculer la limite de (I_n) . **(0.5pt)**

3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall n \geq 1$, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1. \text{ (1pt)}$$

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0 ; +\infty[$. (0.5pt)
2. Etudier les variations de g . (1.5pt)
3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. (1pt)
- b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ? (0.5pt)
- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h^{-1}(x) = e$. (0.5pt)
- d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente au point d'abscisse 0. (1pt)

Mathématiques de 2022

Exercice 1 (5 points)

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 3 \end{cases}$$

- 1) Montrer que (U_n) est croissante et majorée par 6. Que peut-on en déduire ? (1pt)
- 2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + a$.

Déterminer la valeur de a pour que (V_n) soit une suite géométrique. (1pt)

- 3) On pose $a = -6$

a. Exprimer les termes V_n et U_n en fonction de n . (1pt)

b. Etudier la convergence de (U_n) . (1pt)

c. Calculer $S_n = V_0 + \dots + V_{n-1}$ et $S_n' = U_0 + \dots + U_{n-1}$. (1pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit $h_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x}$ avec a un paramètre réel.

On note C_a la courbe de la fonction h_a .

- 1) Montrer que toutes les courbes C_a passent par un même point fixe I que l'on précisera. (1pt)
- 2) a. Etudier suivant les valeurs de a , les variations de h_a . (1pt)
b. Tracer la courbe C_{-4} . (1pt)
- 3) Soit M_a le point d'abscisse $a+2$.
 - a. Calculer son ordonnée. (0,5pt)
 - b. Montrer que lorsque a varie, le point M_a décrit une courbe (Γ) que l'on précisera. (1pt)
 - c. Vérifier que (Γ) passe par le point fixe I . (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

- 1) On considère un polygone régulier de n côtés ($n > 3$) et on appelle diagonale du polygone tout segment dont les deux extrémités sont deux sommets non consécutifs du polygone. Donc tout segment constitué de deux sommets du polygone est soit un côté soit une diagonale.
 - a) Combien de segments peut-on former à partir de ce polygone ? (1pt)
 - b) En déduire le nombre d de diagonales qu'on peut tracer. (1pt)
- 2) On joint au hasard deux sommets du polygone.
 - a) Quelle est la probabilité p_1 d'obtenir une diagonale du polygone ? (1pt)
 - b) Quelle est la probabilité p_2 d'obtenir un côté du polygone ? (1pt)
- 3) Application :

Quelle est la probabilité d'obtenir une diagonale lorsqu'on joint au hasard 2 sommets :

 - a) d'un pentagone ? b) d'un hexagone ? c) d'un octogone ? (1pt)

Exercice 4 (5 points)

Pour $z \neq -i$ on pose $Z = \frac{z+2i}{1-iz}$ avec $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- 1) Z est réel (1,5pt)

- 2) Un argument de Z est $-\frac{\pi}{2}$ (0,5pt)
- 3) Le point N d'affixe Z est sur le cercle de centre A d'affixe i et de rayon $\frac{1}{2}$ (1,5pt)
- 4) Existe-t-il des points M d'affixe z telle que $Z = z$? où z est le conjugué de z (1,5pt)

Mathématiques de 2022

Exercice 1 (5 pts)

On appelle f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + (x - 2)\ln x$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. f' désigne la fonction dérivée première de f .
 - a) Etudier le sens de variation de f' .
 - b) Déterminer les limites de f' en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[1,4; 1,5]$.
 - b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Etudier le sens de variation de f puis donner son tableau de variation.
4. a) Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes à C au point d'abscisse x_0 passe par le point de coordonnées $(2; 0)$.
 - b) Tracer C ainsi que les tangentes à C en x_0 .

Exercice 2 (5 points)

On lance simultanément deux dés bien équilibrés, un blanc et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :

B : « le numéro sorti sur le dé blanc est pair »

V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair »

S : « la somme des numéros sortis sur les deux dés est paire ».

1. Calculer la probabilité des évènements B, V et S.
2. Les évènements S et V sont-ils indépendants ? 3. Les évènements S et B sont-ils indépendants ?
4. Les évènements S et $V \cap B$ sont-ils indépendants ?

Exercice 3 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $4z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 5 cm, les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d définies par $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2} - i$; $c = \frac{1}{2} + i$ et $d = \frac{1}{2}(1 + i)$.
 - a) Donner le module et un argument de d.
 - b) Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$.
 - c) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D et les points B', C' et D' d'affixes respectives $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$.
3. a) Quel est l'ensemble E des points M d'affixe $z = \frac{1}{2} + iy$ lorsque y décrit IR.
- b) Calculer le module des nombres complexes $\frac{1}{b} - 1$; $\frac{1}{c} - 1$ et $\frac{1}{d} - 1$.
- c) Calculer en fonction de y, la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe $Z = \frac{1}{z}$ avec z défini au point 3. a).
- d) En déduire l'ensemble F des points N d'affixe Z lorsque y décrit IR.

Construire E et F sur le graphique précédent.

Exercice 4 (5points)

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 15 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- 1) Montrer que cette suite est minorée par 4.
- 2) Préciser le sens de variation de (u_n)

3) Montrer que cette suite converge, puis déterminer sa limite.

Mathématiques de 2019

Exercice 1 : (5points)

A_0 et A_1 sont les points d'abscisses respectives $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ d'un axe. A_2 est le milieu du segment $[A_0A_1]$ et x_2 est son abscisse ; A_3 est le milieu du segment $[A_2A_1]$ et x_3 est son abscisse ; ...et le processus se poursuit indéfiniment.

1°/ Quelle est l'abscisse x_n de A_n en fonction des abscisses de A_{n-1} et A_{n-2} ? (0,5pt)

2°/ On se propose de savoir, lorsque n est de plus en plus grand, si les points A_n s'accumulent autour d'un point unique et d'un seul. Pour cela posons pour $n \geq 1$,

$$y_n = x_n - x_{n-1}$$

a) Montrer que (y_n) est une suite géométrique. (0,5pt)

b) Montrer que $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = x_n$ (0,5pt)

c) Déterminer d'autre part S_n en utilisant le fait que (y_n) soit une suite géométrique (1,5pt)

d) Dédurre x_n explicitement en fonction de n . (1pt)

e) Quelle est la limite de la suite (x_n) ? Quelle conclusion faites-vous? (1pt)

Exercice 2 : (5points)

1. Etude d'une équation de second degré.

a) Discuter suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) \quad x^2 + 2x - 2m = 0. \quad (0,5pt)$$

b) Montrer que si $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ alors $-2 < x' < x'' < 0$ où x' et x'' sont les solutions de (E) telles que $x' < x''$. (0,5pt)

c) Montrer que si $m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$ (0,5pt)

d) Etudier le signe de $x^2 + 2x - 2m$ suivant les valeurs du réel m (0,5pt)

2. Etude de la fonction $f_m: x \mapsto x + m \ln \left| \frac{x+2}{x} \right|$

- a) Déterminer D le domaine de définition de f_m (0,5pt)
- b) Calculer les limites de $f_m(x)$ aux bornes de D suivant les valeurs de m. (0,5pt)
- c) Justifier que $f'_m(x) = \frac{x^2+2x-2m}{x(x+2)}$. Etudier le sens de variation de f_m dans les cas suivants : (i) $m < -\frac{1}{2}$ (ii) $m = -\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ (iv) $m > 0$. (1pt)
- d) Tracer les courbes représentatives des fonctions $f_{-\frac{1}{4}}$ et f_2 . (1pt)

Exercice 3 : (5points)

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ et $I_0 = \int_1^e x dx$

1. Calculer I_0 et I_1 (0,5ptt)
2. a) Montrer que pour tout entier n, $I_{n+1} = \frac{e^2 - (n+1)I_n}{2}$ (1) (1ptt)
- b) En déduire I_2 (0,5ptt)
3. a) Justifier que pour tout n, $I_{n+1} \leq I_n$ (1ptt)
- b) En déduire en utilisant la relation (1) l'encadrement : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ (1ptt)
- c) Calculer les limites de I_n et nI_n lorsque n tend vers $+\infty$ (1pt)

Exercice 4 : (5points)

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres. On désigne par x, y, z, t respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.

On suppose que les nombres x, y, z, t sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1°/ Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, déterminer les nombres x, y, z, t . (1,5pt)

2°/ Un voleur s'infiltrer dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de vente des animaux est 250 000F pour un cheval, 200 000F pour une vache, 75 000F pour un mouton et 37 500F pour une chèvre, déterminer :

- a) La perte minimale du fermier et la probabilité de cette perte. (1,5pt)

- b) La perte maximale du fermier et la probabilité de cette perte. (1pt)
- c) La probabilité que le fermier perde 150 000F. (1pt)

Mathématiques de 2018

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. Déterminer les trois nombres a , b et c sachant que :

$$\begin{cases} abc = 15 \\ 3b = (1 + 2i)c \\ ac = 3(2 + i) \end{cases}$$

2. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $-1+2i$; $2-i$ et $-3i$.

On pose : $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de z

- a. En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 2 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $D = [-\frac{5}{2} ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x+5}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. f est-elle dérivable sur D ?
2. Etudier les variations de f .
3. Soit A le point d'abscisse $-\frac{5}{2}$, et M un point de (C) , distinct de A , d'abscisse x_0 ;
 - a) écrire une équation de la droite (AM) ;
 - b) on désigne par $\theta(x_0)$ le coefficient directeur de cette droite. Que peut-on dire de $\theta(x_0)$ lorsque x_0 tend vers $-\frac{5}{2}$? Construire la courbe (C)

On désigne par (Γ) l'ensemble des points N dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$y^2 - 2x - 5 = 0.$$

- c) Comment peut-on déduire (Γ) de la courbe (C) ? Construire (Γ) .

Exercice 3 : (5 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel, $0 \leq U_n \leq 4$.
2. Démontrer que (U_n) est une suite croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente.

Exercice 4 : (5 points)

Un laboratoire propose un test de dépistage pour une maladie.

La probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,97.

La probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,01.

La probabilité qu'une personne ait un test positif est 0,394

On procède au dépistage systématique dans la population où s'est déclenchée cette maladie. On choisit une personne au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

M : « la personne est atteinte de la maladie »

T : « la personne choisie a un test positif ».

On note p la probabilité de l'événement M.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. a. Calculer $p(M \cap T)$ et $p(\overline{M} \cap T)$ en fonction de p.
b. Montrer que $p(T) = 0,96p + 0,01$. En déduire que $p = 0,4$
3. Une personne choisie a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie.

Mathématiques de 2017

Exercice 1 : (5points)

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1. u désigne un nombre complexe.
 - a) Montrer que $P(\bar{u}) = \overline{P(u)}$
 - b) En déduire que si $P(u) = 0$ alors $P(\bar{u}) = 0$.
2. a) Calculer $P(1+i)$
 - b) En déduire les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.
3. a) Factoriser $P(z)$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2 : (5points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{nu_n+4}{n+1} \end{cases}$$

1. a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n) .
 - b) (U_n) est – elle arithmétique ? géométrique ?
2. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = nU_n$
 - a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique en donnant sa raison et son premier terme.
 - b) Donner l'expression de V_n en fonction de n .
 - c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n , puis retrouver ses quatre premiers termes
3. Montrer que la suite (U_n) est strictement monotone et bornée.
4.
 - a) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
 - b) La suite (S_n) est –elle convergente ?

Exercice 3 : (5 points)

Le but de l'exercice est d'approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note I , on pose $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^n}{(t+1)^{n+1}} dt$

- 1) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a .
- 2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a .
- 3) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}}{n+1} + I_n(a)$$

4) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

a) Calculer $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$.

c) Justifier que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5) Calculer l'intégral $J(a)$ définie par : $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$.

6) a) Démontrer que : $\forall t \in [0; a], \frac{(t-a)^5}{(t+1)^6} \geq (t-a)^5$.

c) Démontrer que : $\forall a \in [0; +\infty[, J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7) En déduire que : $\forall a \in [0; +\infty[, |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8) Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 4 (5 points)

Un sac contient 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4) et 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5).

- 1) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
 - a) Calcule la probabilité de tirer au plus 2 jetons verts.
 - b) Calcule la probabilité de ne tirer que 3 jetons verts.
- 2) On tire successivement et sans remise 3 jetons du sac.
 - a) Calcule la probabilité de tirer exactement 1 jeton vert.
 - b) Calcule la probabilité de ne tirer aucun jeton vert.

Mathématiques de 2016

Exercice 1 : (3 points)

1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
2. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$
3. a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$
 b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

Exercice 2 (5 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

1°) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2°)

- a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
- b) On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10. ». Calculer les probabilités de A et de B .

3°) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

- a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
- b) Calculer la probabilité de l'événement T .
- c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 3 : (7 points)

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (1point)
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,78 \leq \alpha \leq 0,79$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, i, j) d'unité graphique 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de cet ensemble (1,5 point)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$

b. Etudier les branches infinies de (C).

4. Construire (C) (On prendra $\alpha = 0,785$).

Exercice 4 : (5points)

1°) Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C}, z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

2°) Calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$; en déduire que l'équation précédente est équivalente à $(\frac{z}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}})^3 = 1$

3°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

4°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$

Exercice 1 : (7 points)

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue 3 tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : Si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est blanche, on ne la remet pas.

On considère les événements suivants :

A= « seule la première boule tirée est blanche »

B= « seule la deuxième boule tirée est blanche »

C= « seule la troisième boule tirée est blanche »

- 1) Calculer les probabilités des événements A, B et C.
- 2) En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.
- 3) Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

Exercice 2 : 6points

A) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x}$

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

- 1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,30 < \alpha < 1,35$.
b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

- 1) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 2) Tracer la courbe (C) .

Exercice 3 : (4 points)

Linéariser $f(x) = 4\sin^2(x)\cos^2(x)$ et donner une primitive de f

Exercice 4 : (3 points)

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + Z\sin x - \frac{1}{4} = 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Mathématiques de 2014

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ **(E)** où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle : $2y' + y = e^{\frac{-x}{2}}(x + 1)$ **(E')**

a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\frac{-x}{2}}(ax^2 + bx)$$
 soit une solution de **(E')**.

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : g est solution de **(E')** si et seulement si $f - g$ est solution de **(E)**.

c) Résoudre l'équation **(E')**.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = 1 - \ln x$.

1) Étudier le signe de $u(x)$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x(1 - \ln x)$

a) Déterminer $g'(x)$.

b) En déduire une primitive U de u sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e^2 .

3) On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \int_{e^{-n}}^{e^{-n+1}} (1 - \ln x) dx$

a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $V_n \geq 0$.

b) Calculer V_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de V_n .

4) Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$.

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) Déterminer la limite de S_n .

Exercice 3 (5 points)

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

z	$1+i$	2	$1-i$	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	$-1+i$	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	$2i$	-3
$\bar{z}$												
$\arg z$												

Une boîte contient **12** cartons, indiscernables au toucher, portant les **12** nombres complexes du tableau précédent (Chaque carton porte un seul nombre complexe):

2. On tire au hasard un carton de la boîte (On suppose l'équiprobabilité des tirages).

a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$?

c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module 3, le joueur gagne 10000 points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage ; si ce carton porte un nombre complexe de module 3, le joueur gagne 8000 points, s'il est de module 2, il gagne 5000 points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X (On pourra s'aider d'un arbre).

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 4 (points)

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a) Calculer $F(x)$, puis vérifier que $F(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+1)}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe représentative **(C)** de f dans un repère orthogonal $(O; i, j)$ avec $\|i\| = 1\text{cm}$,
 $\|j\| = 5\text{cm}$

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

Exercice 1 (4pts)

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation suivante :

$$iz^2 - 2iz + i - 2 = 0$$

2. Donner une écriture trigonométrique de la solution imaginaire pure.

Exercice 2 (6pts)

Le PDG d'une entreprise vous confie que pendant une période d'hivers, ses observations lui ont permis de dresser le tableau suivant, dans lequel désigne en degrés la température moyenne extérieure au cours de 24 heures et y la consommation en fuel (exprimée en litres) de sa chaudière au cours de ces même 24 heures.

x_i	-5	-3	0	5	10
y_i	40	38	34	27	20

Le PDG vous demande :

1. De calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
2. De déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement de y en x.
3. Quelle estimation de consommation peut-t-il faire pour la durée d'une vague de froid de température journalière de -10^0 pendant quatre jours ?

Exercice 3 (4pts)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes : $f(x) = (\sin x)^3$ et $g(x) = (\tan x)^4$

Exercice 4 (6pts)

On considère la fonction $f(x) = x - \ln|x|$

1. Etudier les variations de cette fonction et tracer son graphique (C). (unité graphique 1cm)
2. On coupe (C) par la droite d'équation $y = m$. Montrer qu'il y a toujours deux points d'intersection, M1 et M2, et trouver l'ensemble des positions du milieu, I, de [M1M2].

3. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y=x$ et, les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Mathématiques de 2012

Exercice 1 (3pts)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

2. $J = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

Exercice 2 (5pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 + (2+3i)z^2 + (4+6i)z + 8$

1. a. Calculer $f(i)$
 b. Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$ pour tout nombre complexe z .
 c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = 0$.
2. On désigne par z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 l'autre solution.

Montrer qu'il existe un nombre complexe q tel que $z_2 = qz_1$ et $z_3 = qz_2$.

Soient A_1, A_2 et A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 . Quelle est la nature du triangle $A_1A_2A_3$? (Justifier).

Exercice 3 (5pts)

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. a. Montrer que la suite de terme général v_n définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1 .

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

c. En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 4 (7pts)

Partie 1 :

Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1. Déterminer une solution de (1) de la forme $f_1(x) = e^{rx}$ où r est un nombre réel.

2. Montrer que la fonction $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi une solution de (1) (r étant la valeur trouvée précédemment)

3. a. Vérifier que pour tout couple de réels (λ_1, λ_2) la fonction $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1).

b. Calculer λ_1 et λ_2 pour que $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_\lambda(0) = \frac{1}{2}$

Partie 2 :

f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x + 1) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x + 1)$$

(C) et (Γ) leurs courbes représentatives.

On se propose de trouver les points d'intersection de (C) et (Γ) dont l'abscisse a est strictement positive.

1. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.

2. Soit φ une fonction de $]0; 1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a. Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.

b. Etudier les variations de φ .

c. En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui est comprise entre 0,95 et 0,96.

3. Conclure.

Mathématiques de 2011

Exercice 1

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} e^t (\cos t)^2 dt \text{ et } J = \int_0^{\pi} e^t (\sin t)^2 dt$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$
2. En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 2

Soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1)$$

où $-1 \leq a \leq 1$ et $\log$ désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

A) Dans cette partie du problème on suppose $a = -1$.

1. Etudier les variations de f_{-1} et tracer la courbe représentative C_{-1} .
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie par : $g(x) = \log(x+1)$.
b) Calculer l'aire de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) satisfaisant aux conditions $0 \leq x \leq e - 1$ et $0 \leq y \leq f_{-1}(x)$

B) Dans cette partie, on suppose $0 < a < 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_a .
2. Etudier les variations de la fonction f_a .
3. Montrer que la courbe C_a admet la droite d'équation $x=a$ pour axe de symétrie.

4. Soit h la fonction définie par : $h(x) = 2 \log x, x > 0$.

Donner, selon la valeur de x , le signe de l'expression : $f_a(x) - h(x)$.

Cette expression admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

5. Tracer la courbe représentative de h et utiliser ce qui précède pour tracer $C_{\frac{2}{3}}$ dans le même repère.

C) Montrer que les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=0$.

Mathématiques de 2010

Exercice 1

Soit z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre nombres complexes non nuls. Les modules de ces quatre nombres forment une suite géométrique et leurs arguments une suite arithmétique. Déterminer z_2 et z_3 sachant que $z_1 = \sqrt{2}$ et $z_4 = 4i$.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs du paramètre réel a , l'équation (E) :

1. N'admet pas de racines ?
2. Admet une seule racine ?
3. Admet deux racines ?
4. Admet trois racines ?
5. Admet quatre racines ?

Exercice 3

Soit la fonction f_b définie par:

$f_b(x) = x + b(x + 1)e^{-x}$, où b est un paramètre réel et C_b la courbe représentative de f_b

1. Montrer que toutes les courbes C_b ont un point en commun dont on précisera les coordonnées et qu'elles ont une asymptote commune (Δ) ; Préciser la position relative de C_b et (Δ)
2. Déterminer l'équation de l'ensemble (H) des points des courbes C_b où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. On suppose que $b=e$.
 - i) Etudier les variations de f_e et tracer la courbe C_b .
 - ii) Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $D(m) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq e, x \leq y \leq f_e(x)\}$
Calculer l'aire $S(m)$ de $D(m)$ et en déduire $\lim_{m \rightarrow +\infty} S(m)$

Mathématiques de 2009

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|2+5iz-z^2| + z^2 + 3 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{1 + \log_{0,04} x} + \sqrt{3 + \log_{0,2} x} = 1$.

Exercice 2

Un jeu réunissant n personnes (n entier supérieur ou égal à 3) comporte des parties successives. Dans chaque partie, les n joueurs jettent simultanément une pièce de monnaie. (Dans chaque jet, on supposera égales les probabilités des résultats "pile" et "face".) Si toutes les pièces sauf une donnent le même résultat (par exemple : "face" pour $n-1$ pièces, et "pile" pour une pièce), le joueur ayant obtenu le résultat singulier est déclaré 'perdant'.

1. Quelle est la probabilité p pour que cette circonstance se produise dans une partie donnée ?
2. Calculer en fonction de ce nombre p la probabilité pour que l'on obtienne un perdant pour la première fois à la $k^{\text{ième}}$ partie. Soit K un entier naturel supérieur à 1.
Calculer la somme $S_k = p_1 + \dots + p_k$.

Montrer que, lorsque K tend vers $+\infty$, S_k tend vers une limite.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x + \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

- 1) Déterminer son domaine de définition et sa parité.
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$. Etudier les asymptotes de (Γ) . On précisera l'équation de chaque asymptote.
- 4) Quelle est la tangente à (Γ) à l'origine du repère ?
- 5) Tracer (Γ)
- 6) Calculer l'aire $S(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (Γ) , la droite $x'x$ et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$, où $-2 < \lambda < 0$.
- 7) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -2} S(\lambda)$.
- 8) Soit D la droite d'équation $y = x + m$, m étant un paramètre réel non nul.
Déterminer les points d'intersection entre D et (Γ) .

Mathématiques de 2008

Exercice 1

Soit un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$: 4cm. Au point d'affixe

$z = x + iy$ est associé, s'il existe, le point M' d'affixe : $z' = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$

- 1) On définit ainsi les fonctions f et T telles que : $z' = f(z)$ et $M' = T(M)$.
Préciser les ensembles de définition de f et T .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$f(z) = i$$
- 3) Calculer (x', y') , coordonnées de M' en fonction de (x, y) , coordonnées de M .
- 4) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.
- 5) Démontrer que, si $|z'| = \sqrt{2}$, alors :
$$4y^2 - 8xy - 1 = 0.$$

Exercice 2

- 1) On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = U_0 + \dots + U_n = \frac{1}{3}(n^2 + n)$$

- a) Calculer U_1, U_2 et U_3 . Calculer U_n en fonction de U_{n+1} et de n .
 b) En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 2) On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = V_0 \times \dots \times V_n = \frac{1}{3^{n^2+n}}$
- a) Calculer V_1, V_2 et V_3 . Calculer V_n en fonction de V_{n+1} et de n .
 b) En déduire que (V_n) est une suite géométrique à préciser.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2}$$

- 1) Quel est le domaine de définition E de f ?
 2) Déterminer la fonction dérivée de f
 3) Montrer que la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x) = 0$ se ramène à rechercher des points d'intersection de la courbe Γ_1 d'équation $y = \ln x$ et de la courbe Γ_2 d'équation $y = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$.
 4) Tracer Γ_1 et Γ_2 sur un même graphique et montrer qu'il existe x_1 et x_2 tels que :

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

 5) Montrer que :

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < x_2 < 2.$$

 6) Etudier le sens de variation de la fonction f .
 7) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

 8) Représenter graphiquement la fonction f . On précisera les points d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4 (On prendra pour unité : 2cm en abscisse, et 20cm en ordonnées).

Mathématiques de 2006

Exercice 1

Dans le plan complexe, on considère la transformation F d'écriture analytique :

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

- 1) Donner l'écriture complexe de F puis caractérisez entièrement la transformation F .
- 2) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et G la transformation d'écriture complexe $z' = az + b$. Déterminer a et b pour que $G \circ F$ soit une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

Exercice 2

On considère la série statistique suivante où α et β sont deux entiers naturels :

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

- 1) Sachant que la moyenne des x_i est de 100 et leur écart type $\frac{20\sqrt{46}}{3}$, calculer α et β .
- 2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
- 3) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de x en y .

Exercice 3

On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{e^{mx} + 1}{e^x}$ où m est un paramètre réel.

I- Etude générale de la fonction f_m :

On désigne par C_m la courbe représentative de la fonction f_m

- 1) Montrer que toutes les courbes C_m passent par un unique point fixe.
- 2) Calculer suivant les valeurs de m , les limites de $f_m(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3) Pour quelles valeurs de m les courbes C_m admettent-elles un extrémum M_m ? donner les coordonnées de cet extrémum.
- 4) Parmi les courbes C_m , déterminer celles dont la tangente au point $E(0,2)$ est parallèle à la première bissectrice. Donner l'équation de cette tangente.

II- Etude des fonctions f_{-1} et f_2 .

- 1) Etudier les variations de f_{-1} et f_2 puis tracer C_{-1} et C_2 .
- 2) Montrer que la restriction de f_2 à $[0; +\infty[$ admet une fonction réciproque dont on donnera le tableau de variation et dont on tracera la courbe.
- 3) Donner l'expression de $f_2^{-1}(x)$.
- 4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'aire $S(\alpha)$ du domaine du plan délimité par les courbes C_1, C_2 et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

Mathématiques de 2003

Exercice 1

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0=1$ et $3nU_{n+1}=2(n+1)U_n$, $n \geq 1$.

Question 1

On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$ pour $n \geq 1$; V_n étant une suite :

- A) Arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $V_1=1$.
- B) Géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et premier terme $V_0=1$.
- C) Géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme $V_1=1$.

Question 2

L'expression de V_n en fonction de n est :

- A) $1+2n$
- B) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$
- C) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

D) *Autre*

Question 3

L'expression de U_n en fonction de n est :

- A) $n(\frac{2}{3})^{n+1}$
- B) $n(\frac{2}{3})^n$
- C) $n+2n^2$
- D) Autres

Question 4

L'expression de $\sum_{k=0}^n V_k$ est :

- A) $n(n-1)[\frac{1}{2} + \frac{2n+3}{3}]$
- B) $2[1-(\frac{2}{3})^{n+1}]$
- C) $3[1-(\frac{2}{3})^{n-1}]$
- D) Autres

Question 5

Soit la suite W_n définie par : $W_1=0$; $W_n=nU_n-\frac{2}{3(n-1)}U_{n-1}$, $n \geq 2$

Quelle est l'expression de W_n en fonction de n ?

- A) $n(n+1)(\frac{2}{3})^{n-1}$, $n \geq 1$
- B) $n(n+1)(\frac{2}{3})^n$, $n \geq 1$
- C) $(n-1)(n+1)(\frac{2}{3})^{n-1}$, $n \geq 1$

D) Autres

Question 6

Soit la suite (T_n) définie par : $T_1=3$; $T_n=\frac{w_n}{2(n-1)v_n}+2, n \geq 2$.

Quelle est l'expression de la somme $\sum_{k=2}^n T_k$?

A) $\frac{n}{4}(n+11) + 3$

B) $\frac{n}{4}(n+11) - 3$

C) $\frac{n}{4}(n-11) + 3$

D) Autres

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ définie par : $P(X)=X^4+\frac{1}{3}X^3-\frac{17}{3}X^2+\frac{19}{3}X-2$

Question 7

Déterminer la valeur de $P(\frac{2}{3})$

A) $\frac{24}{81}$

B) $\frac{12}{81}$

C) 0

D) Autres

Question 8

Déterminer la valeur de $P(1)$:

- A) $\frac{4}{3}$
- B) 0
- C) $\frac{14}{3}$
- D) Autres

Question 9

Solution de l'équation $P(X)=0$:

- A) $X=-3$ ou $X=1$ ou $X=\frac{2}{3}$
- B) $X=3$ ou $X=1$ ou $X=\frac{2}{3}$
- C) $X=3$ ou $X=1$ ou $X=-\frac{2}{3}$
- D) Autres

Question 10

Solution de l'équation : $(\ln X)^4 + \frac{1}{3}(\ln X)^3 - \frac{17}{3}(\ln X)^2 + \frac{19}{3}(\ln X) - 2 = 0$

- A) $X=e^{-3}$ ou $X=e^{\frac{2}{3}}$ ou $X=e$
- B) $X=e^3$ ou $X=e^{\frac{2}{3}}$ ou $X=e$
- C) $X=e^3$ ou $X=e^{-\frac{2}{3}}$ ou $X=e$
- D) Autres

Question 11

Solution de l'équation : $X^8 + \frac{1}{3}X^6 - \frac{17}{3}X^4 + \frac{19}{3}X^2 - 2 = 0$

- A) $X=\sqrt{3}$ ou $X=1$
- B) $X=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $X=1$

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $4y' + 49y = 0$ où y est une fonction numérique de la variable réelle x .
2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie : $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $bf(0) = -\sqrt{2}$
3. Calculer pour tout réel x , $f(x)$

Exercice 2

Soit $p(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$ où z est un nombre complexe.

- a) Vérifier que $p(4) = 0$
- b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$$
- c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. On donnera la forme algébrique des solutions. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$

PROBLEME

Partie A :

On considère la fonction numérique f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x} + ae^{-x} + b$ où a et b sont des réels. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer a et b pour que la courbe de f passe par le point $A(-\ln 3; 1)$ et possède en ce point une tangente de coefficient directeur -6 .

Partie B :

1)

- a) déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en déduire que la courbe de f admet une asymptote horizontale (D) que l'on précisera.

b) Calculer les coordonnées de B, intersection de (C) et de (D)

2) Soit f' la dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(x) = -2e^{-x}(e^{-x} - 2)$ et déterminer son signe.
Etablir le tableau des variations de f .

3) Déterminer les coordonnées de E intersection de C_f et de l'axe des ordonnées. Puis déterminer une équation de la tangente (T) à C_f en E.

4) Préciser la position de C_f par rapport à (T). Tracer (D), (T) et C_f dans le plan P.

Mathématiques de 1998 (I)

I. Etudier la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

II. Soit E l'espace euclidien. Soient A et B deux points distincts de E. Soit C le milieu du segment [AB].

Etudier suivant les valeurs des nombres réels m et k l'ensemble des points M de E tels que :

$$MA^2 + mMB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner le cas $m=3$ et $AB^2=1$

III.

1) Etudier la fonction numérique f telle que

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

2) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) représentative de la fonction f .

3) Ecrire l'équation de la droite (D) qui passe par le point A(1 ; 0) et qui a pour pente le réel m . Discuter, lorsque m varie, le nombre des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

4) Lorsqu'il existe trois points d'intersection, on les désigne par A, M', M''. Calculer en fonction de m , les coordonnées (x, y) du point N, conjugué harmonique de A par rapport à M' et M''.

5) Montrer qu'il existe une relation, indépendante de m , de la forme $y=g(x)$ entre x et y . Construire dans le même repère la courbe (C_1) d'équation $y=g(x)$ et en déduire l'ensemble des points N lorsque m varie.

- 6) Les courbes (C) et (C₁) sont-elles tangentes au point A ?

Mathématiques de 1998 (II)

- I. Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

(Représentation graphique sur le papier millimétré unité : 1cm)

- II. Soit a un nombre réel strictement positif. Soit ABC le triangle tel que :

$$AB=3a ; AC=4a ; BC=5a$$

- 1) Déterminer le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients :
A(-5) ; B(4) ; C(3)
- 2) Déterminer l'ensemble des points M du plan (euclidien) du triangle ABC tels que, k désignant un nombre donné, l'on ait :

$$4MB^2 + 3MC^2 - 5MA^2 = ka^2.$$

Discuter. Envisager le cas k=12.

- III. Soit l'équation du second degré en t (nombre réel) :

$$t^2 - 2(x+1)t + y + x^2 = 0 \quad (1)$$

Où t désigne l'inconnue et x, y les coordonnées d'un point M dans un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormé.

- 1) Etablir la relation qui doit lier x et y pour que l'équation (1) admette deux racines égales. Quelle est l'équation de l'ensemble (C₁) des points M pour lesquels l'équation (1) a ses racines égales. Construire (C₁).
- 2) Dans quelles régions du plan euclidien (P) doit être situé M pour que l'équation (1) ait deux racines distinctes ?
- 3) Quelle est l'équation de l'ensemble (C₂) des points M pour lesquels l'équation (1) associe possède, au moins, une racine nulle ?
Construire (C₂) dans le repère. Démontrer que (C₁) et (C₂) sont tangentes.
- 4) Quelle est l'équation de l'ensemble (C₃) des points M pour lesquels l'équation (1) associée admet deux racines opposées ? Construire (C₃) dans le repère et déterminer l'intersection de (C₁), (C₂) et (C₃).

- 5) Discuter suivant la position du point M relativement aux trois courbes, discuter également sur l'existence et le signe des racines de l'équation (1) associée.

Mathématiques de 1998 (III)

Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a=i-1, b=1+i, c=-1+i$$

On note Γ le cercle de diamètre [AB]

1)

- Placer sur une figure les points A, B, C et le cercle Γ .
- Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.
- Soit R la rotation de centre O telle que $R(A)=B$.

Déterminer l'angle de R et le point R(B), image de B par R.

- Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par R ; placer Γ' sur la figure.

2) On considère un nombre $\theta \in [0; 2\pi[$ distinct de π .

On note M le point d'affixe $z=1+ie^{i\theta}$. On désigne M' l'image de M par la rotation R et on appelle z' l'affixe de M'.

- Montrer que M est un point de Γ distinct de A et B.
- Exprimer z' en fonction de z
- Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$
- Etablir la relation $u=u'\tan(\frac{\theta}{2})$.
- Prouver que les points B, M et M' sont alignés.
- Placer sur la figure un point M et son transformé M'

Problème

Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

- Etudier le sens de variation de f_n suivant les valeurs de n.
- Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que (C_n) possède un axe de symétrie parallèle à $(O, \vec{j})$ et que (C_n) passe par quatre points dont les coordonnées (que l'on calculera) ne dépendent pas de n .

- 3) Tracer dans un même repère les courbes (C_2) et (C_7) .
- 4) On pose $I_k = \int_0^2 x^{7-k} (x-2)^{7+k} dx$ où $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
 - i) Calculer I_7
 - ii) En intégrant par partie, trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1} , $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. En déduire I_0 .
 - iii) Calculer l'aire de la partie Δ du plan définie par : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f_7(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.

Mathématiques de 1998 (IV)

Exercice 1

Soit u un nombre complexe différent de -1 , de module 1 et d'argument θ .

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1-u}{1+u}$.
2. En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que : $\frac{2+iz}{2-iz} = u$
3. Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation : $(2+iz)^4 = (2-iz)^5$

Problème

I.

- On note f_0 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = e^{-x}$.
- Pour tout réel $\alpha > 0$, On note f_α la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ Par :

$$\begin{cases} f_\alpha(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x} \end{cases}$$

Pour tout réel α , on note (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormal du plan.

- 1) Etudier les variations de f_0 et f_1 .

2) Représenter les courbes de ces deux fonctions sur une même figure (unité = 5cm). On précisera la position de (C_0) *par rapport* à (C_1) .

3) Soit α un réel strictement positif et différent de 1.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_α en 0.

b) Etudier les variations de f_α .

Soit α un réel strictement positif.

c) Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_0) et (C_α) .

d) Soit deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.

i. Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_α) et (C_β) .

ii. Démontrer que toutes les courbes (C_α) passent par un même point et préciser l'équation de la tangente à la courbe (C_α) en ce point.

e) Représenter les courbes $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_e) sur une même figure (unité = 5cm), distinctes de celles demandée à la question 2).

f) α étant un réel strictement positif, on note g_α la restriction de f_α à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

i. Démontrer que g_α admet une fonction réciproque h_α .

ii. On précisera l'ensemble de définition, la sens de variation de h_α , ainsi que les propriétés de continuité et de dérivabilité de h_α .

iii. Représenter graphiquement la courbe représentative de $h_{\frac{1}{2}}$.

II.

Dans cette partie, on pose $\alpha = n$ un entier naturel.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

1) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer les limites des fonctions F_0 et F_1 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2) Pour $n \geq 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = -x^n e^{-x} + nF_{n-1}(x)$.

3) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On notera cette limite u_n .

Quelle relation existe entre u_n et u_{n-1} ?

En déduire la valeur de $u_n \forall n \in \mathbb{N}$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de F_n . On donnera l'allure de la courbe représentative de F_3 .

5)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1}(\sum_{p=0}^n p!)$

c) En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur $[0;1]$ pour $n \geq 1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{e}$

d) En déduire la limite de $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ en $+\infty$.

Mathématiques de 1998 (V)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

- 1) Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire les asymptotes à (C).
- 2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
- 3) Démontrer que le point d'intersection A de (C) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour (C).
- 4) Donner une équation de la tangente à (C) en A.
- 5) Tracer sur un même graphique : la courbe (C), sa tangente au point A et ses droites asymptotes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$$

- 1) Etudier les variations de f

- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 4) Construire dans un repère orthogonal (unité : 10cm en abscisse 5cm en ordonnée) la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $]0 ; 1[$
- 5) Soit a un réel strictement positif.
 - A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_a^1 \ln t dt$
 - En déduire $I(a) = \int_a^1 f(t) dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.
 - Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$.

Exercice 3

On donne trois points A, B et C distincts non alignés du plan et on note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a=BC$, $b=CA$ et $c=AB$

On se propose d'étudier l'ensemble E des M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

- 1) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC]
 - a. Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et BC^2 . En déduire :

$$AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2

- b. Montrer que :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

- 2) Déterminer l'ensemble (E)
- 3) On choisit $a=5$, $b=4$ et $c=3$. Placer trois points A, B et C puis dessiner E dans ce cas particulier.

Mathématiques de 1998 (VI)

- I. Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}.$$

(Représentation graphique sur un papier millimétré unité : 1cm)

II. Soit E l'espace euclidien. Soient A et B deux points distincts de E.

Soit C le milieu du segment [AB].

Etudier suivant les valeurs des nombres réels m et k l'ensemble des points M de E tels que :

$$MA^2 + mMB^2 - MC^2 = k$$

Examiner le cas $m=3$ et $AB^2=1$.

III.

1) Etudier la fonction numérique f telle que

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

2) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) d'équation $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

(unité de longueur : 2cm)

3) Ecrire l'équation de la droite (D) qui passe par le point A(1 ; 0) et qui a pour pente le réel m. Discuter, lorsque m varie, le nombre des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

4) Lorsqu'il existe trois points d'intersection, on les désignera par A, M', M''. Calculer en fonction de m, les coordonnées (x ; y) du point N, conjugué harmonique de A par rapport à M' et M''.

5) Montrer qu'il existe une relation, indépendante de m, de la forme $y=g(x)$ entre x et y. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_1) d'équation $y=g(x)$ et en déduire l'ensemble des points M lorsque m varie.

6) Les courbes (C) et (C_1) sont tangentes en A ?

Mathématiques de 1997

Exercice

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (U_n) est constante si, et seulement si, U_0 prend deux valeurs que l'on précisera.
2. On prend U_0 dans l'intervalle $] -1 ; 0[$
 - a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$, et que (U_n) est une suite décroissante.
 - b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1+U_0^2}}(U_n + 1)$
 - c) On pose $k = \frac{1}{\sqrt{1+U_0^2}}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < U_n + 1 < k^n(U_0 + 1)$$

En déduire que la suite (U_n) admet une limite l , que l'on précisera.

Problème

Partie A

Dans cette partie on se propose de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété :

Pour tout $x > 0$: $xf'(x) - 3f(x) = 3\ln(x)$ (E) où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel :
 $xP'(x) - 3P(x) = 0$
2. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1)=0$, soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$
 - a) Calculer $h(1)$
 - b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
 - c) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$$
 - d) On suppose que f vérifie la propriété (E). Montrer que h est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$$

Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

Partie B

Soit f la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$

4.

- a. Etudier les variations de f .
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 - c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - d. Construire dans un repère orthogonal (unités : 10 cm en abscisse, 5 cm en ordonnées), la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $]0; 1]$
5. Soit λ un réel strictement positif
- a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^\lambda \ln t dt$$

- b. En déduire $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t) dt$

Donner une interprétation graphique du résultat.

- c. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

6.

- a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$, montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- b) En déduire les inégalités :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \quad (1)$$

- c) En utilisant la courbe (C) et en prenant $n=0$, interpréter graphiquement cet encadrement.

7. Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Déduire des inégalités (1) l'encadrement

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Mathématiques de 1996

Exercice

Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, u, v) .

Pour tout nombre réel m , on considère l'application f_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)z + \frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1)$$

- 1) a) on pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x, y, x' et y' des réels)
 - i. Calculer x' et y' en fonction de x et y .
 - b. Démontrer que, quel que soit le réel m , l'image O' de O par f_m appartient à une droite dont on donnera l'équation cartésienne.
- 2) Est-il possible de déterminer m pour que l'application f_m soit :
 - a) Une translation ?
 - b) Une rotation de centre O ?

Dans le cas d'une réponse positive, préciser la ou les valeurs de m et donner les éléments géométriques de la transformation correspondante.

- 3) On considère le cas particulier où $m=1$ et on désigne par Δ la droite d'équation $x+y=0$.
 Déterminer l'image Δ' de Δ par f_1 (faire la figure)
 Quelle est l'image de la droite Δ par l'application f_1^4 ?

Problème

On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

- I. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln(x)$$

- 1) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x-1)(x - \frac{1}{2})^2}$$

- 2) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
- 3) Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.
- 4) Dresser le tableau de variation de f sur $]1 ; +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]1 ; +\infty[$.
- 5) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4cm)

II. Soit (V_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $V_n = \ln(U_n)$

- 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $V_n - V_{n-1} = (n - \frac{1}{2})f(n)$ (1)
Où f est la fonction étudiée à la partie I.
- 2) Etudier le sens de variation de la suite (V_n) , puis le sens de variation de la suite (U_n) .
- 3) Montrer que, la suite (U_n) converge vers un réel positif ou nul noté l .

III. Soit g la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})} \text{ où } f \text{ est la fonction définie à la partie I.}$$

- 1) Calculer la dérivée g' de g et vérifier que pour tout x dans $[2 ; +\infty[$, on a :
$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)(x - \frac{1}{2})^2}$$
- 2) Dresser le tableau de variation de g , calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2 ; +\infty[$ $g(x)$ est strictement positif.
(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g)

IV. Soit (W_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq 2$ on a :
$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx \quad (2)$$
- 2) Dédire de (2) l'inégalité pour n entier supérieur ou égal à 2,
$$W_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).
- 3) Pour $n \geq 2$, Calculer $\int_1^n \frac{1}{x^2} dx$ et montrer que $W_n \leq 1$.
- 4) Montrer que la suite (W_n) converge vers un réel w vérifiant $w \leq 1$.

- 5) A l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie II et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie III, montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$V_k - V_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$V_n \geq -\frac{1}{5}W_n + 1$$

- 6) Montrer enfin que la limite l de la suite (U_n) est supérieure ou égale à $l^{\frac{4}{5}}$ et donc est strictement positive.

	Concours EAMAC	Cycle : INGENIEUR
---	-----------------------	--------------------------

Mathématiques de 2024

EXERCICE 1

- a) Etablir $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.
- b) En déduire que $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que a est une valeur propre non réelle de A et Z un vecteur propre associé appartenant à $\mathbb{C}^n$.

On note X et Y les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z .

- a) Montrer que X et Y sont non colinéaires.
- b) Montrer que le sous-espace engendré par X et Y est stable par f .
- c) On suppose que la matrice de f est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les plans stables par f .

EXERCICE 3

- 1) Déterminer la nature et la somme des séries de terme général

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}; V_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

- 2) Soit la série de terme général

$$U_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) \quad (n \geq 1)$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquels la série de termes général U_n converge et dans ce cas calculer sa somme.

EXERCICE 4

Soient E un $\mathbb{R}$ – *espace* vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 + f = 0$$

- 1) Montrer que l'espace $\text{Im}(f)$ est stable par f .
- 2) Pour x appartenant à $\text{Im}(f)$, calculer $f^2(x)$.
- 3) Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}(f)$. Montrer que g est un isomorphisme.
- 4) En déduire que le rang de l'endomorphisme f est un entier pair.

EXERCICE 1

Soit Δ_n le déterminant de la matrice de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+2} , Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \geq 1$.
- 2) En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

EXERCICE 2

Pour tout $x \in I = [0; 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $U_n(x) = n^a x^n (1 - x)$.

- 1) Etudier la convergence simple sur I de la série de terme général U_n . On notera dans la suite S la somme de la série.
- 2) Etudier la convergence normale sur I de la série de terme général U_n .
- 3) On suppose dans cette question que $a=0$. Calculer S sur $[0; 1]$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0; 1]$.
- 4) On suppose $a>0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I .

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, soit f l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Quel est le rang de A ?
- 2) Calculer A^2 en fonction de A . En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A . Trouver le polynôme minimal de A .

- 3) Calculer $\dim(\text{Ker}A)$ et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A .
- 4) Trouver une base des vecteurs propres.

EXERCICE 4

Etudier la nature des séries numériques dont les termes généraux sont :

- 1) $U_n = \frac{n^{3^2}((2n+1)!)^2}{(n!)((3n-1)!)}, n \in \mathbb{N}^*$
- 2) $V_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}, n \in \mathbb{N}^*$
- 3) $W_n = (a + \frac{1}{n^2})^{-n^2}, n \in \mathbb{N}^* (a \text{ réel} > 0).$

Mathématiques de 2022

EXERCICE 1

On considère la matrice dans le sous espace vectoriel $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A .
- 2) Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
- 3) En déduire si A est diagonalisable.
- 4) On note $t_n = \text{tr}(A^n)$ où tr désigne la trace. Exprimer t_n en fonction de t_{n-1} , t_{n-2} , t_{n-3} .
- 5) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

EXERCICE 2

Soit z le nombre complexe défini par :

$$Z = \frac{1}{2}(\sin\theta + i(1 - \cos\theta)) \text{ où } \theta \text{ est un réel de } [-\pi; \pi]$$

- 1) Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de z
- 2) Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de $-i$.
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point M d'affixe $z-i$.

Déterminer la nature géométrique de l'ensemble décrit par le point M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0; \pi[$.

EXERCICE 3

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- 1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
- 2) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$

EXERCICE 4

$$\text{Soit } f(x,y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$$

- 1) Étudier les extrema locaux de f
- 2) Quelle est l'image par f de $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On pose $w = \exp(i \frac{2\pi}{n})$ et on considère la matrice carrée M , d'ordre n , dont le terme général situé sur la ligne p et la colonne q est :

$$m_{pq} = w^{(p-1)(q-1)}$$

- 1) Calculer M^2
- 2) En déduire $|\det(M)|$

EXERCICE 2

On note E l'ensemble des suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

On note $(a_n), (b_n)$ les éléments de E définis par : $(a_0 = 1, a_1 = 0), (b_0 = 0, b_1 = 1)$, et on note $r = (2^n), s = (3^n), n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que (a_n, b_n) et (r, s) sont des bases de E
- 2) Déterminer la matrice M de la famille (a_n, b_n) dans la base (r, s) de E et calculer M^{-1}
- 3) Montrer que l'application f qui à tout $u = (u_n)$ de E associe (u_{n+1}) est un endomorphisme de E , et préciser la matrice de f dans la base (a_n, b_n) de E et la matrice de f dans la base (r, s) de E .

EXERCICE 3

- 1) Donner une décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x}$
- 2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$ converge et calculer sa somme.

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x \ln(|x|).$$

- 1) Etudier les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.
- 2) Etudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

- 3) En déduire la convergence de la suite numérique (u_n) telle que :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Mathématiques de 2019

EXERCICE 1

Soit $*$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par $x * y = x + y - xy$.

- 1) Montrer que la loi $*$ est une loi commutative et associative.
- 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
- 3) Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour inverse $\frac{x}{x-1}$.
- 4) L'ensemble $(\mathbb{R}, *, e)$ est-il un groupe ?
- 5) L'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *, e)$ est-il un groupe ?

EXERCICE 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$.

- 1) Montrer que f est linéaire.
- 2) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 3) En déduire que f est une bijection
- 4) Calculer $f \circ f$.
- 5) En déduire l'expression de f^{-1} .

EXERCICE 3

Etudier la convergence et calculer la somme des séries dont les termes généraux sont définis par :

1) $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$

2) $V_n = \frac{n+4}{n(n^2-4)}, \quad (n \geq 3)$

3) $W_n = \frac{n^3}{n!}, \quad (n \geq 1)$

EXERCICE 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Où k est un réel.

- 1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
- 2) Pour $k=2$, calculer l'exponentielle de la matrice A et A^n où $n \geq 1$ est un entier naturel.

Mathématiques de 2018

EXERCICE 1

Soit (p, q) appartenant à $\mathbb{C}^2$. On note x_1, x_2, x_3 les zéros de $x^3 + px + q$ dans $\mathbb{C}$ de sorte que $x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

On note : $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

On note, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$: $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$

- 1) Montrer que $\sigma_1=0, \sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = q$.
- 2) Calculer S_0, S_1, S_2 en fonction de p et q .
- 3) Etablir que, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, $S_{k+3} + pS_{k+1} + qS_k = 0$
- 4) En déduire S_3 et S_4 en fonction de p et q
- 5) Calculer $A = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2$.

EXERCICE 2

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$\phi: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie par $\phi(M) = AMB$.

- 1) Vérifier que ϕ est linéaire.
- 2) Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1}
- 3) Montrer que $\mathcal{F} = (I, A, B, AB)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les matrices de ϕ et ϕ^{-1} .

EXERCICE 3

Soit a un nombre réel et $f: [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

- 1) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2) Que peut-on dire de l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$?

On suppose à présent que pour tout $x \in [a; +\infty[$, $f(x)$ est strictement positif.

- 3) Soit $g: [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ et que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^{+\infty} g(x) dx}{\int_a^{+\infty} f(x) dx} = 0$

EXERCICE 4

Soit a un nombre réel qui n'est pas entier et soit f une fonction 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$, telle que

$$f(t) = \sin at \text{ pour } -\pi \leq t \leq \pi$$

- 1) Déterminer la série de Fourier de la fonction f . La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
- 2) On considère à présent la fonction g , 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$g(t) = \cos at \text{ pour } -\pi \leq t \leq \pi$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction g . La fonction g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

- 3) A partir des séries de Fourier de f et de g , expliciter la série de Fourier complexe de la fonction h , 2π – *périodique*, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$h(t) = e^{iat} \text{ pour } -\pi \leq t \leq \pi$$

- 4) En déduire l'égalité : $\frac{\pi^2}{\sin(\pi a)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2}$.

Mathématiques de 2017

EXERCICE 1

On considère le système (S) suivant

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = 1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + y + z + mt = 1 \end{cases}$$

- 1) Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
- 2) Lorsqu'il est de Cramer, Résoudre (S).

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f telle que : $f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
- 2) Exprimer sur $D \setminus \{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$
- 3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g .
- 4) Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE 3

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

- 1) On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
- 2) On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
- 3) On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\frac{1}{x}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

EXERCICE 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A et calculer A^n pour tout n entier naturel.

Mathématiques de 2017

EXERCICE 1

soit a un nombre réel. On définit la fonction f_a d'une variable réelle t telle que

$$f_a(t) = \frac{1}{a^2 - 2acost + 1}$$

- 1) Montrer que f_a est définie pour tout réel t si et seulement si $|a| \neq 1$.
- 2) On suppose que $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$. Calculer $f_{\frac{1}{a}}$ en fonction de f_a .
- 3) On suppose $a = \frac{1}{2}$. Etudier $f_{\frac{1}{2}}$.
- 4) On suppose $|a| \neq 1$. Calculer $\int_0^x f_a(t) dt$.

EXERCICE 2

On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

1) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2+n^2}{n!}$

EXERCICE 3

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre $n > 0$, non nulle. Si A est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de A l'entier k défini par $k = \inf\{r \in \mathbb{N}^* | A^r = 0\}$

- 1) Montrer que $k \leq n$
- 2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$
- 3) On suppose dans cette question que $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i, j \leq n$ est triangulaire supérieure stricte. Montrer que A est nilpotente.
- 4) On donne la matrice d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice nilpotente B telle que $A = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.

Calculer B^m pour m entier, $m > 0$ et en déduire A^m .

EXERCICE 4

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer A^2 en fonction de A . En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A . Trouver le polynôme minimal de A .
- 2) Calculer $\dim(\text{Ker} f)$ et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A .
- 3) Trouver une base B' de vecteurs propres de f .

Mathématiques de 2016

EXERCICE 1

Soit k appartenant à $\mathbb{R}$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles A_k est inversible.
- 2) Déterminer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire que A_k est diagonalisable.
- 3) Quel est le polynôme minimal de A_k ?
- 4) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.

Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_k^n en fonction de n .

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

- 1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
- 2) Calculer I_n
- 3) En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt; J(n) = \int_0^{\pi} (\sin t)^n; K(n) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$J(n)=K(n)=2I(n)$$

- 2) Calculer $I(0)$, $I(1)$ et $I(2)$
- 3) En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n+2)$ et $I(n)$ pour tout entier naturel n .
- 4) Montrer que la suite $(I(n))$ est une suite décroissante à termes positifs.

EXERCICE 4

On définit pour n entier naturel non nul le polynôme à coefficients réels P_n par :

$$P_n(x) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \dots + \frac{X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)}{n!}$$

- 1) Déterminer explicitement les polynômes P_1, P_2 et P_3 .
- 2) Montrer que P_n est un polynôme de degré n .
- 3) Soit λ_n le coefficient dominant de P_n . Démontrer que $\lambda_n = \frac{1}{n!}$.
- 4) Démontrer que $\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j = 0$

En déduire que pour tout entier k , tel que $1 \leq k \leq n$, on a $P_n(-k) = 0$

- 5) Factoriser P_n .

Mathématiques de 2015

EXERCICE 1

- 1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^4$ muni de l'addition et de la multiplication externe est un espace vectoriel.
- 2) Désigner au moins deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$
- 3) L'ensemble des nombres complexes est-il un espace vectoriel réel ? si oui, quels sont les vecteurs de base ?

EXERCICE 2

1) On donne le système
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

- a) Etudier la compatibilité de ce système
- b) Le résoudre au cas où il est compatible

2) Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

EXERCICE 3

- 1) a) Vérifier que les fonctions $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \arctan(x)$ admettent les mêmes dérivées sur l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
- b) Etablir la relation qui existe entre ces fonctions.
- 2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2\cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}$

EXERCICE 4

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$

b) $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx$

c) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

d) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

- 2) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2 = x^3$ compris entre $x=0$, $x=1$ et $y \geq 0$.

EXERCICE 1

On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- $Q(x)$ admet une racine réelle.
- $Q(x)$ admet deux racines réelles distinctes.
- $Q(x)$ admet aucune racine réelle.

EXERCICE 2

Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

Converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

EXERCICE 3

- Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$
- Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t^2}{n})^n & \text{si } t \in [0; \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \in]\sqrt{n}; +\infty[\end{cases}$$

Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0; +\infty[$

- Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

- Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt$$

5) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On admettra que : $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

EXERCICE 4

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\log n}$.

- 1) Montrer que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$.
- 2) Etudier la continuité de f sur $[0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
- 4) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

MENSA Academy

EXERCICE 1

- 1) Montrer que si $f \in \mathcal{R}[a; b]$, alors $\exists \theta \in]a; b[$ tel que $\int_a^\theta f(t)dt = \int_\theta^b f(t)dt$.
- 2) Soit $f \in \mathcal{C}[a; b]$, $a > 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in]a; b[$ tel que :

$$\int_a^\theta f(x)dx = \theta f(\theta).$$

EXERCICE 2

Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$, $U_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^{n+1}$

EXERCICE 3

Déterminer l'extremum de la fonction f définie par : $f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

EXERCICE 4

- 1) Exprimer $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ et $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$ en fonction de $\cos \alpha$.
- 2) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

et on désigne par $P_n(\lambda)$ son polynôme caractéristique.

- 3) Déterminer une relation de récurrence liant P_n, P_{n-1} et P_{n-2} ($n \geq 4$).
- 4) On pose $\lambda = a + 2b \cos \alpha$. Calculer directement $P_2(\lambda)$ et $P_3(\lambda)$ en fonction de α . En déduire $P_n(\lambda)$ en fonction de α .
- 5) Déterminer les vecteurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A .

Montrer que le vecteur propre V_k associé à λ_k a pour composantes $(\sin \omega, \sin 2\omega, \dots, \sin n\omega)$ en précisant la valeur propre de ω .

EXERCICE 1

- 1) Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions $(\cos x)^3$ et $(\cos x)^4$ sur $[-\pi, \pi]$.
- 2) En déduire les valeurs des intégrales suivantes : $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^6 dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^8 dx$.

EXERCICE 2

- 1) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante : Soit f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a; b]$, alors $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b f(x)^2 dx)(\int_a^b g(x)^2 dx)$
- 2) On pose $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}^2[0; 1] / f(0) = f(1) = 0\}$
 - a) Déterminer $\min_{f \in \mathcal{H}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$
 - b) Déterminer la fonction f pour laquelle ce minimum est atteint.

EXERCICE 3

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- 2) Calculer les nombres u_n, v_n, w_n définis pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$$

Avec u_0, v_0, w_0 donnés.

EXERCICE 4

Soit X une variable aléatoire continue de fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{si } x \in]-a; a[, a > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion de la variable X.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X.

MENSA Academy

EXERCICE 1

Calculer la valeur moyenne de la fonction :

$$f(x) = \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 4(\cos x)^2}$$

sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

EXERCICE 2

Etudier la convergence de l'intégrale suivante, et lorsqu'elle converge, calculer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx, \beta \geq 0.$$

EXERCICE 3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x, \text{ avec } \int_1^2 (x - y)^2 dx = 1$$

EXERCICE 4

On considère la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

- 1) Déterminer son rayon de convergence.
- 2) Montrer que f vérifie une équation différentielle du troisième ordre à coefficient constant, puis résoudre l'équation différentielle obtenue.
- 3) En déduire la somme S de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}$.

EXERCICE 1

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx}x^3 \sin y + 2y = x \frac{dy}{dx}.$$

EXERCICE 2

Dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère la forme bilinéaire f définie par : $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4$.

Soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$.

- 1) Déterminer la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}'$.
- 2) Cette matrice est-elle diagonalisable ? calculer ses puissances $n^{\text{ième}}$.

EXERCICE 3

Soit la série de fonctions f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.

EXERCICE 4

Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_C xy^2 dy - x^2 dx.$$

EXERCICE 5

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1) Montrer que

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

Où $0 < r < R$, $f(z) = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la somme de la série.

2) On suppose que $R=1$ et que $\operatorname{Re} f(z) > 0 \forall z \in D$, où D est le disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq 2u_0$, où $u_0 = \operatorname{Re} f(0)$.

Mathématiques de 2009

EXERCICE 1

Calculer du, dv, d^2u et d^2v pour $x = y = 1, u = 0$ et $v = \frac{\pi}{4}$, si $e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ et $e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose $F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta$, $h > 0$

Calculer $F''(x)$.

EXERCICE 3

Résoudre l'équation : $\int_0^x (x-t)t^2 \sqrt{y(t)} dt + \frac{1}{2} \int_0^x (5x-6t)y(t) dt + 2x = 0$.

EXERCICE 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 6 à coefficients dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice carrée X d'ordre 3 à coefficients réels telle que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} M$$

Soit une matrice triangulaire par blocs, I étant la matrice identité d'ordre 3.

En déduire $\det M$.

EXERCICE 5

Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique $E(u) = \frac{1-iu}{1+u^2}$.

- 1) Déterminer la densité de la variable aléatoire X.
- 2) Déterminer les différents moments de X.

MENSA Academy

EXERCICE 1

Déterminer les extremums liés de la fonction :

$$f(x, y) = e^{axy}, a \neq 0.$$

Sous la contrainte : $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle :

$$y'' - 3y = f(x), \quad f(x) = |x| \text{ pour } |x| \leq \pi, f(x + 2\pi) = f(x).$$

- 1) Montrer que f est développable en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi; \pi]$ et déterminer cette série.
- 2) Déterminer une solution de l'équation (1) qui est développable en série trigonométrique de Fourier.

EXERCICE 3

Etudier suivant les valeurs du paramètre réel α la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$$

EXERCICE 4

Soit f une fonction holomorphe sur le disque :

$$K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$$

Montrer que pour $0 < r < R$, $f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta$.

Ici $\operatorname{Re} f$ désigne la partie réelle de f .

EXERCICE 5

Soit f une fonction continue sur $[0; \pi]$ et admettant une dérivée dont le carré est intégrable sur $[0; \pi]$. Montrer que si $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, alors $\int_0^\pi (f(x))^2 dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$.

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} e^{2i\varphi} \operatorname{ctg}(\varphi - ia) d\varphi, a > 0.$$

EXERCICE 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}}.$$

EXERCICE 3

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2 dx}{x^2(x^2+1)}.$$

EXERCICE 4

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\gamma} z \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right) dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$$

EXERCICE 5

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

EXERCICE 2

En utilisant la méthode des résidus, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi t g(x + i\alpha) dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 3

α étant un nombre réel donné, t et x des variables réelles.

- 1) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(t) = \cos at \text{ si } -\pi < t < \pi.$$

Expliquer pourquoi la somme de la série est égale à $f(t)$ si $-\pi < t < \pi$ et déterminer la valeur de cette somme pour $t = \pi$. Dédire du résultat précédent que :

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

- 2) Montrer que si $|x| \leq M$ et si $N > \frac{M}{\pi}$ la fonction :

$$x \rightarrow \sum_N^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

est une fonction continue. Calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

- 3) Montrer que si $0 < x < \pi$: $\ln(\sin x) = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

- 4) Montrer que si x n'est pas un multiple entier de π :

$$\frac{1}{(\sin x)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}$$

EXERCICE 1

Soit P_n et Q_n les polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ donnés par :

$$P_n(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2n} \text{ et } Q_n(X) = 1 + X^n$$

Question 1.1

Le quotient $H(x)$ de la division euclidienne de P par Q est :

- A. $H(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$
- B. $H(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x^i$
- C. $H(x) = \sum_{i=0}^n x^{n-i}$
- D. Autre

Question 1.2

Le reste R de la division euclidienne de P par Q est :

- A. $R(x) = 1 + x$
- B. $R(x) = 3 - x$
- C. $R(x) = 4$
- D. Autre

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n .

Question 2.1

Soit U un endomorphisme de E , F un sous espace vectoriel de E et U' la restriction de U à F .

Alors, on a :

- A. $\dim \ker U' = \dim \ker U$
- B. $\dim \ker U' \geq \dim \ker U$

C. $\dim \ker U' \leq \dim \ker U$

D. Autre

Question 2.2

Si U et V sont deux endomorphismes de E alors on a :

A. $rg(U \circ V) = rg(U) + rg(V)$

B. $rg(U \circ V) = rg(U) + rg(V) - n$

C. $rg(U \circ V) \geq rg(U) + rg(V) - n$

D. Autre

EXERCICE 3

$\mathbb{R}_2[x]$ (respectivement $\mathbb{R}_3[x]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (respectivement inférieur ou égal à 3)

Soit $\varphi: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'application linéaire définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \varphi(P)(x) = P(x + \alpha) - P(x + \beta)$, α et β sont deux constantes réelles fixées.

Question 3.1

Le noyau de φ est :

A. $\text{Ker } \varphi = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$

B. $\text{Ker } \varphi = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(x) = \text{constante}\}$

C. $\text{Ker } \varphi = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(x) = ax + b\}$

Question 3.2

L'image de φ est :

A. $\text{Im } \varphi = \{p \in \mathbb{R}_2[x], p(x) = ax + b\}$

B. $\text{Im } \varphi = \{p \in \mathbb{R}_2[x], p(x) = \text{constante}\}$

C. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_2[x]$

EXERCICE 4

Le rayon de convergence R , des séries entières dont les termes généraux u_n sont les suivants est :

Question 4.1

Pour $u_n = z^{2n}$, on a :

- A. $R=0$
- B. $R=1$
- C. $R=+\infty$
- D. Autre

Question 4.2

Pour $u_n = a^n z^{n+1}$, $a \in \mathbb{C}$ on a :

- A. $R=+\infty$
- B. $R=|a|$
- C. $R=\frac{1}{\sqrt{|a|}}$
- D. Autre

EXERCICE 5

On considère la série de terme général $\frac{\sin^3 nx}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cette série est convergente et sa somme S est de classe $\mathbb{C}^\infty$

Question 5.1

La série de Fourier de S est : $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ avec

- A. $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$, $b_n = \frac{3}{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{(2n+1)!}$, $\forall n \geq 1$

B. $a_0 = 0, a_n = 0 \forall n \geq 1$ et
$$\begin{cases} b_{3p} = \frac{3}{4(3p)!} - \frac{1}{4(p)!} \\ b_{3p+1} = \frac{3}{4(3p+1)!} \\ b_{3p+2} = \frac{3}{4(3p+2)!} \end{cases}$$

C. $a_0 = 0, a_n = 0 \forall n \geq 1$ et
$$\begin{cases} b_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \text{ si } n \text{ pair} \\ b_n = \frac{1}{2(n!)} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

D. Autre.

Question 5.2

La valeur explicite de S est :

A. $S(x) = \frac{3}{4} \sin(\sin x) e^{\sin x} + \frac{1}{2} \sin(\cos x) e^{\cos x}$

B. $S(x) = \frac{3}{4} \sin(\sin x) e^{\cos x} - \frac{1}{4} \sin(\sin 3x) e^{\cos 3x}$

C. $S(x) = \frac{3}{4} \cos(\sin x) e^{\cos x} + \frac{1}{4} \cos(\cos x) e^{\cos 3x}$

D. Autre

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $B = (i, j, k)$.

On désigne par $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E , par id_E l'application identique de E et par ρ l'élément de $L(E)$ qui a pour matrice dans B :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que ρ est une isométrie. Préciser ses caractéristiques géométriques.
- 2) Soit F le sous-espace vectoriel de $L(E)$ engendré par les trois applications id_E, ρ, ρ^2 .
Quelle est la dimension de F ? F est-il stable par la composition des applications ?
- 3) Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = i + j + k$. Montrer que F contient toutes les rotations d'axes D . (Il pourra être utile de choisir une nouvelle base de E).

Exercice 2

- 1) a étant un réel strictement supérieur à 1, montrer que :

$$\iiint_k \frac{dudvdw}{\sqrt{u^2+v^2+(w-a)^2}} = \frac{4\pi}{3a}$$

avec $k = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$

Il pourra être commode de faire le changement de variable défini par :

$$u = r \cos \theta \sin \lambda, v = r \sin \theta \sin \lambda, w = r \cos \lambda.$$

On considère maintenant l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne définie par :

$$||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\mathbb{R}^3$ sera aussi considéré comme un espace affine sur lui-même, le vecteur nul étant choisi comme origine et noté O.

Soit $B = \{M \in \mathbb{R}^3 / ||OM|| \leq 1\}$ et $\Omega = \{M \in \mathbb{R}^3 / ||OM|| > 1\}$

pour tout point P de Ω on pose :

$$V(P) = \iiint_B \frac{dx dy dz}{||MP||} \quad x, y \text{ et } z \text{ désignant les coordonnées du point } M \text{ qui décrit}$$

B.

2) Soit $P \in \Omega$ et P_0 le point de coordonnées $(0, 0, ||OP||)$.

Montrer que $V(P) = V(P_0)$ et calculer $V(P_0)$.

3) Calculer $W = \text{grad } V$ et $\text{div } W$.

Exercice 3

1) On considère l'application $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ si } -\pi \leq x \leq 0$$

$$F(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ si } 0 \leq x \leq \pi$$

Montrer que F est paire. F est-elle dérivable sur $[-\pi, \pi]$?

Tracer la courbe représentative de F.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , dont F est la restriction à $[-\pi, \pi]$.

On désigne par $U_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ le terme général de la série de Fourier f .

Calculer les coefficients a_n et b_n . (on distinguera soigneusement les différents cas).

Quelle est la somme de la série de Fourier de f ?

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E) \quad xy''(x) + xy'(x) - xy(x) = 0$$

On cherche les solutions développables en série entière. On pose

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- 1) Former une relation de récurrence entre les coefficients. Exprimer a_n en fonction de n .
- 2) Calculer le domaine de convergence de ces séries.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

$B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

1) On définit sur E un ensemble de n vecteurs :

$$V_m = \sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{mj\pi}{n+1}\right) e_j \text{ où } m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$$

a) h désignant un nombre réel, on pose : $C_n(h) = \sum_{j=1}^n \cos(jh)$

En utilisant une somme d'exponentielles complexes, déterminer la valeur de $C_n(h)$ dans les deux cas particuliers suivants :

- $h = \frac{2m\pi}{n+1}$
- $h = \frac{(2m-1)\pi}{n+1}$

avec $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$

b) Calculer $\|V_m\|$, norme euclidienne du vecteur V_m .

c) On définit sur E l'ensemble des n vecteurs : $\varepsilon_m = \frac{V_m}{\|V_m\|}$

Soit $B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

Montrer que B' est une base orthonormée de E .

2) Soit P la matrice de passage de B vers B'.

a) Quelle est la matrice transposée de P ? Quelle est la matrice inverse de P ?

b) Soit U un vecteur de E. On pose :

$$U = \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n y_j e_j; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Calculer X en fonction de Y et P.

Calculer Y en fonction de X et P.

3) On complète l'ensemble des n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ en posant, par définition :

$$e_0 = 0 \text{ et } e_{n+1} = 0$$

Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_j) = \frac{1}{2}[e_{j-1} + e_{j+1}] \text{ avec } 1 \leq j \leq n$$

a) Ecrire M(f, B) matrice associée à f dans la base B.

b) Calculer les composantes du vecteur f(Vm) ($1 \leq j \leq n$) sur la base B.

En déduire que Vm est vecteur propre de f et donner la valeur propre correspondante.

c) Ecrire M(f, B') matrice associée à f dans la base B'.

d) l'endomorphisme f est-il un endomorphisme de E ? (On discutera suivant les valeurs de n).

Exercice 2

1) On considère la série numérique de terme général : $U_n = \frac{\cos nx}{2^n}$.

On désigne par Sn la somme partielle d'ordre n.

- a) Montrer que la série est convergente.
 - b) Déterminer sa somme en utilisant une expression de S_n .
- 2) Pour tout entier $\geq$ on considère la fonction $f_n: x \rightarrow (x \sin x) e^{-nx}$

- a) Pour quelles valeurs de n l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est-elle convergente ?
- b) Calculer I_n et étudier la convergence de la série de terme général I_n .

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(E) (1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha y = 0$$

où y est fonction réelle inconnue, 2 fois continûment dérivable, de la variable réelle x , et α une constante.

On impose la condition supplémentaire $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ et on cherche les solutions de (E) développables en série entière.

- 1) Ecrire la relation de récurrence permettant de déterminer les coefficients des séries entières solutions de (E) (que l'on ne cherche pas à calculer explicitement) et vérifier qu'il y a unicité de la solution.
- 2) Dans le cas où α n'est pas de la forme $\alpha = \frac{2k}{2k+1}, k \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence.



Epreuves de Physique

Cycle :
TECHNICIEN

Physique 2024

Exercice 1 (5points)

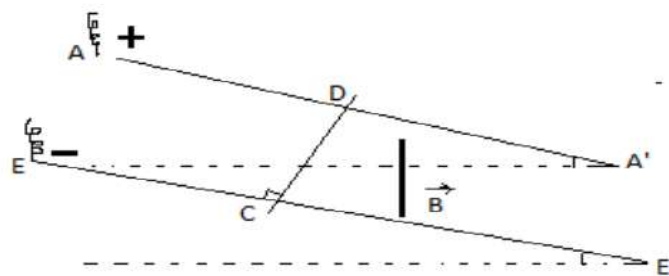
Un ressort à spires non jointives est suspendu verticalement à un support fixe. Sa longueur à vide est $L_0 = 30\text{cm}$. On fixe un objet ponctuel de masse $m=45\text{g}$ à son extrémité inférieure libre. A l'équilibre, le ressort a une longueur $L=33\text{cm}$.

- 1- Déterminer la constante de raideur K du ressort. (1pt)
- 2- L'ensemble ressort-masse accroché au support fixe tourne autour d'un axe vertical OZ avec une vitesse angulaire constante $w= 6\text{rads/s}$. L'axe du ressort fait alors un angle θ avec la verticale. Le ressort a une longueur ℓ et l'objet ponctuel décrit un cercle de rayon r dans un plan horizontal.
 - a) Faire l'inventaire des forces qui agissent sur l'objet et les représenter sur un schéma. On donne $g=10\text{N/kg}$. (1pt)
 - b) Quelles sont les caractéristiques du vecteur-accélération ? (1pt)
 - c) Montrer que $\ell = \frac{KL_0}{(K-mw^2)}$. (1pt)
 - d) Calculer ℓ , θ et la tension T du ressort. (1pt)

Exercice 2 (5pts)

Deux rails de cuivre AA' et EE' parallèles, sont inclinés par rapport au plan horizontal d'un angle α . Une tige en cuivre CD de masse m peut se déplacer sans frottement le long de ces deux rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique B , uniforme et vertical. La tige CD reste perpendiculaire aux rails



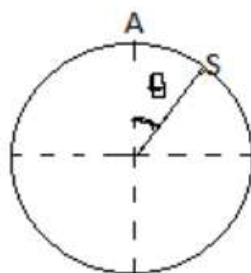
L'ensemble est plongé dans un champ magnétique B, uniforme et vertical.

- 1) Quel doit être le sens de B pour que la tige CD puisse rester immobile lorsqu'un courant électrique passe dans le circuit comme indiquer sur le schéma ? (1pt)
- 2) Calculer alors l'intensité du courant électrique. (1pt)
- 3) On alimente maintenant le circuit par un courant d'intensité $I = 3\text{A}$ et le dispositif reste inchangé.
 - a) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la tige CD ; (0,5pt)
 - b) Calculer l'accélération prise par la tige et en déduire la nature de son mouvement. (1,5pt)
 - c) Calculer la vitesse de la tige lorsqu'elle est montée d'une hauteur $h = 1\text{m}$ sur les rails en partant du repos. (1pt)

Données : $m = 10\text{g}$; $CD = l = 18\text{cm}$; $g = 10\text{N/Kg}$; $B = 9,3 \times 10^{-2}\text{T}$; $\alpha = 15^\circ$

Exercice 3 (5pts)

Un solide S de petite dimension et de masse m, assimilable à un point matériel, est placé au sommet A d'une sphère de rayon r et de centre O. On déplace légèrement le point matériel S pour qu'il quitte la position A sans vitesse initiale et glisse sur la sphère. La position repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OS})$.



1-Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide en supposant les frottements négligeables et les représenter. (1pt)

2-Montrer que la vitesse du mobile pour une position d'angle θ est donnée par :

$$V = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta)} \quad (1\text{pt})$$

3-Exprimer l'intensité de la réaction de la sphère sur le mobile à cette position d'angle θ (1pt)

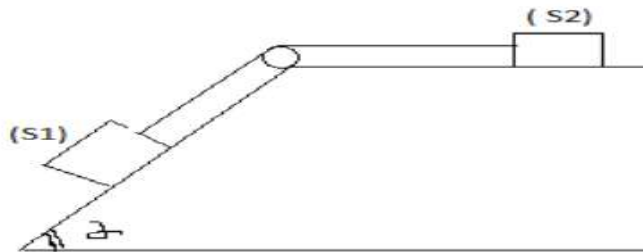
4-Déterminer la vitesse du mobile au moment où il quitte la sphère. (1pt)

5-Calculer l'intensité de son accélération au moment où il quittera la sphère. (1pt)

Données : $r=1\text{m}$, $g=10\text{m/s}^2$

Exercice 4 (5pts)

On considère le système de la figure ci-dessous constitué du solide S_1 , de masse $m_1 = 10\text{kg}$ et du solide S_2 , m_2 de masse $= 5\text{kg}$ reliés par un fil inextensible passant sur une poulie de masse négligeable et dont le mouvement ne génère aucun frottement. L'angle du plan incliné vaut $\alpha = 40^\circ$. Il existe des frottements entre les supports et les deux solides ; les forces de frottement que l'on notera $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, sont supposées de valeurs constantes $f_1 = 20\text{N}$ et $f_2 = 15\text{N}$.



1- Inventaire des forces sur S_1 et S_2 . (1pt)

2- En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide S_1 , puis au solide S_2 , trouver deux relations à partir desquelles on déduira l'expression de l'accélération du système en fonction de m_1 , m_2 , g , f_1 et f_2 . Calculer sa valeur (1,5pt)

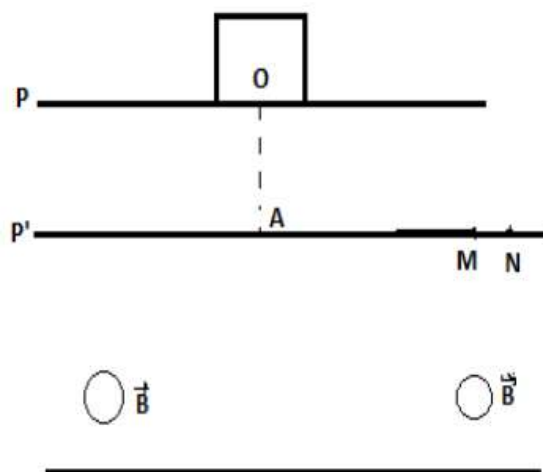
3- Calculer la tension T du fil. (1pt)

4- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système formé par les deux solides, déterminer la valeur de la vitesse lorsque le solide S_1 est descendu verticalement d'une hauteur $h=1,5m$. On prendra $g=10N/kg$. (1,5pt)

Physique 2022

Exercice 1 : (5 points)

Dans le spectrographe de masse schématisé ci-dessous, des ions uranium U^+ des isotopes uranium 235 et 238 sortent en O d'une chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable. Ils sont ensuite accélérés entre deux plaques P et P' entre lesquelles on maintient une tension $U_0 = (V_P - V_{P'})$.



1.

a) Représenter sur un schéma le champ accélérateur $\vec{E}$. (0,5 pt)

b) Quel est le signe de la tension U_0 ? (0,5 pt)

2. Calculer les vitesses V_1 et V_2 acquises par les ions uranium 235 et uranium 238 au point A. (1pt)

3. Les ions pénètrent ensuite dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal au vecteur-vitesse $\vec{V}_A$ des particules, à la sortie du champ électrique $\vec{E}$.

a) Préciser le sens de $\vec{B}$ pour que les ions puissent parvenir en M et N. (0,5 pt)

b) Déterminer la nature du mouvement des particules dans le champ magnétique. (1,5pt)

c) Calculer la distance MN séparant les impacts en M et en N des deux types d'ions. (1pt)

Données :

$$|U_0| = 8.10^3 \text{ V} ; B = 0,2 \text{ T} ; e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$$

$$m_1 (\text{ion uranium 235}) = 3,9.10^{-25} \text{ kg}$$

$$m_2 (\text{ion uranium 238}) = 2,95.10^{-25} \text{ kg}$$

Exercice 2 : (5 points)

L'extrémité A d'une corde élastique est reliée à un vibreur qui lui communique un mouvement vibratoire sinusoïdal de fréquence $N = 50 \text{ Hz}$. L'autre extrémité B de la corde est immobilisée et la corde est tendue de façon que la célérité des ondes soit $C = 15 \text{ m/s}$.

1. Définir la longueur d'onde d'un mouvement vibratoire et calculer sa valeur. **(1,5pt)**

2. Sur une longueur de 120 cm de la corde, on observe que celle-ci vibre en présentant des fuseaux.

a) Comment appelle-t-on le phénomène observé ? **(1pt)**

b) Calculer le nombre de fuseaux observé. **(1pt)**

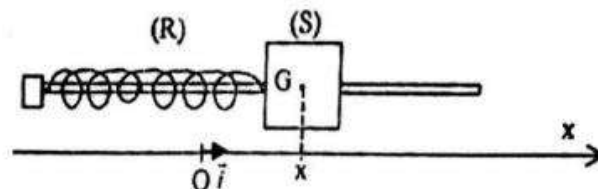
3. La longueur de la partie vibrante de la corde est L :

a) Établir la relation entre le nombre n de fuseaux ; la fréquence N ; la célérité C et la longueur L de la corde. **(1pt)**

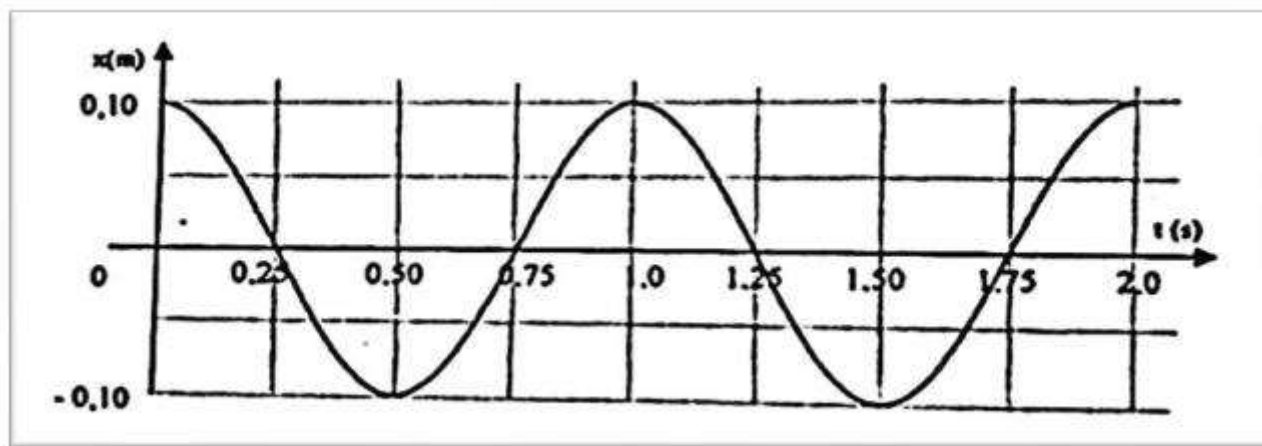
b) Calculer n pour $L = 90 \text{ cm}$. **(0,5pt)**

Exercice 3 : (5 points)

Un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, peut glisser sans frottement sur une tige horizontale. Il est accroché à un ressort (R) à spires non jointives, de raideur $k = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Lorsque le solide (S) est à l'équilibre, son centre d'inertie G se situe à la verticale du point O, origine de l'axe des abscisses. Le solide est écarté de 10 cm de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à la date $t = 0 \text{ s}$.



On procède à l'enregistrement des positions successives de G au cours du temps par un dispositif approprié. On obtient la courbe ci-dessus :

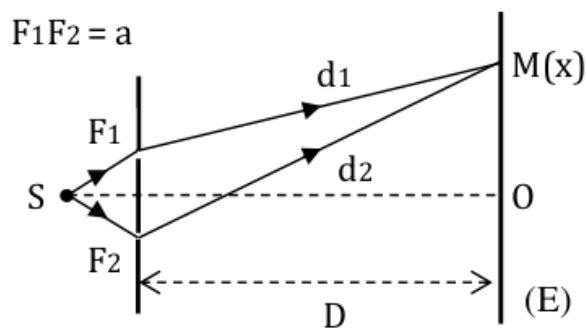


1. Reproduire le schéma du dispositif expérimental et faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide (S). **(0,75pt)**
2. Établir l'équation différentielle régissant le mouvement de son centre d'inertie G. **(1pt)**
3. Une solution de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$x = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
(X_m est l'amplitude et φ la phase initiale)
 - a) Retrouver l'expression de la période T_0 en fonction de m et de k . **(1pt)**
 - b) Déterminer X_m , T_0 et φ . **(1,5pt)**
 - c) Calculer la valeur de la masse m du solide (S). **(0,75pt)**

Exercice 4 : (5 points)

On réalise des interférences lumineuses à l'aide des fentes de YOUNG. Les fentes F_1 et F_2 sont distantes de a et les interférences sont observées sur un écran situé à la distance $D = 1$ m de ces fentes (voir figure).



- Donner les conditions d'obtention du phénomène d'interférences. **(0,5pt)**
- Le point O de l'écran, origine de l'axe parallèle à F_1F_2 , est sur la droite bissectrice de F_1F_2 . M est un point de l'écran (E) d'abscisse x.
 - Établir l'expression de la différence de marche δ entre deux rayons lumineux issus de F_1 et F_2 arrivant en un point M en fonction de a, D et x. **(1pt)**
 - Établir l'expression donnant les abscisses des points de l'écran situés sur une frange obscure et celles des points situés sur une frange brillante. **(1pt)**
 - En déduire l'expression de l'interfrange i. **(0,5pt)**
- La longueur correspondant à 6 interfranges est $\ell = 17,4 \text{ mm}$. Sachant que la longueur d'onde est de $0,58 \mu\text{m}$, calculer :
 - La valeur de l'interfrange. **(0,5pt)**
 - La distance a entre F_1 et F_2 . **(0,5pt)**
- Quel est l'état lumineux d'un point N situé à $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ de O ? **(1pt)**

Physique 2016

Exercice N°S-PT5-1 (5 pts)

On se propose de séparer les ions ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ de masses m_1 et m_2 à l'aide d'un spectrographe de masse.

- Les ions pénètrent en O dans le champ électrique uniforme E existant entre deux plaques verticales P_1 et P_2 pour y être accélérés jusqu'en O'. Les plaques P_1 et P_2 , distantes de $d = 10 \text{ cm}$, sont soumises à la tension $U = V_{P1} - V_{P2} = 2000 \text{ V}$.
 - Quelle est la nature du mouvement des ions Li^+ entre les plaques P_1 et P_2 ?
 - Les ions ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ sortent en O' du champ électrique avec des vitesses respectives

V_1 et V_2 , leur vitesse en O étant négligeable.
Établir la relation :

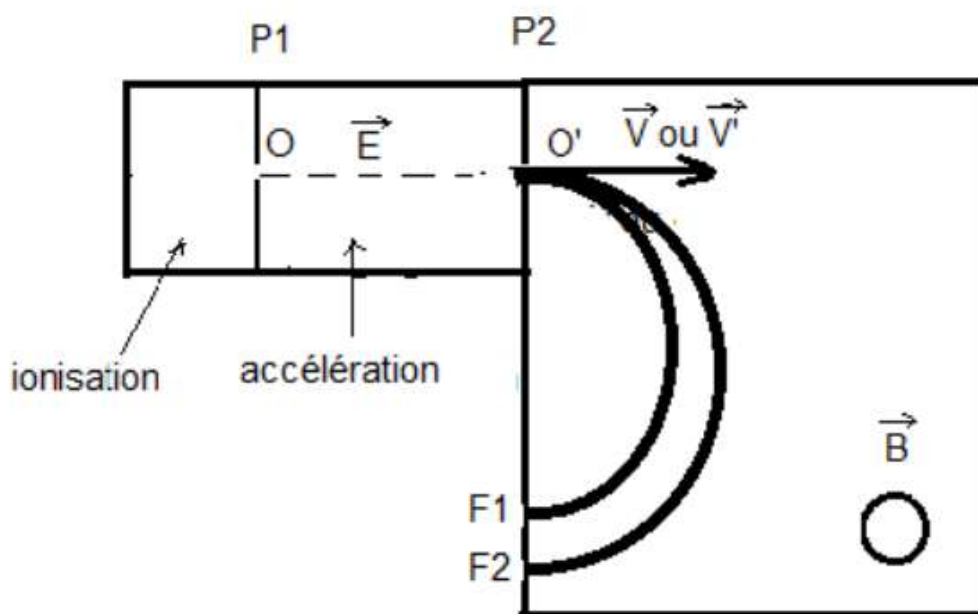
$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

2. À leur sortie en O', les ions pénètrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme B normal au plan du schéma.
 - a) Préciser et justifier le sens du vecteur $\vec{B}$.
 - b) Montrer que le mouvement d'un ion Li^+ s'effectue dans le plan du schéma
 - c) Montrer que la valeur de la vitesse est constante
 - d) Montrer que la trajectoire est circulaire. Exprimer son rayon R
3. Après leurs déviations, les ions $^6\text{Li}^+$ et $^7\text{Li}^+$ arrivent en F_1 et F_2 .
Exprimer la distance F_1F_2 entre les deux types d'ions en fonction de B, m_1 , m_2 , U et e.

Données :

$$m_1 = 6u ; m_2 = 7u ; q = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} ;$$

$$1u = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$



Exercice N°S-PT5-2 (5 pts)

I. Étude stroboscopique d'un mouvement

1. Sous éclairage stroboscopique, une roue paraît immobile lorsque la fréquence des éclairs vaut : 100 Hz, 50 Hz ou 33 Hz.
Expliquer le phénomène.
2. Calculer, en tours par minute, la vitesse de rotation de la roue sachant que $N_e = 100 \text{ Hz}$ est la fréquence la plus élevée permettant l'immobilité apparente.

3. Quelle est la vitesse apparente de la roue si la fréquence des éclairs est $N_e = 101 \text{ Hz}$?

II. Interférence mécanique à la surface d'un liquide

Les deux extrémités S_1 et S_2 d'un vibrant sont distantes de 6 cm. La fréquence des vibrations est $N = 10 \text{ Hz}$.

La célérité des ondes transversales à la surface de l'eau vaut $C = 24 \text{ cm/s}$.

1. Calculer la longueur d'onde λ des vibrations.
2. Combien de franges d'amplitude maximale observe-t-on sur le segment S_1S_2 si les deux sources sont en phase ?
3. Préciser l'état vibratoire des points suivants :
 - a) M tel que $S_1M = 2,5 \text{ cm}$ et $S_2M = 4,9 \text{ cm}$
 - b) N tel que $S_1N = 3 \text{ cm}$ et $S_2N = 6,6 \text{ cm}$

Exercice N°S-PT5-3 (5 pts)

Pendule élastique horizontal

Un solide S de masse $m = 130 \text{ g}$ est accroché à un ressort à spires non jointives de masse négligeable, de constante de raideur k .

Il peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Le centre d'inertie G de S est repéré sur un axe horizontal (Ox) dont l'origine correspond à la position de repos de S .

Le ressort est allongé d'une longueur x_0 , et le solide S est lâché à $t = 0$. Un dispositif permet d'enregistrer les variations de $x(t)$.

D'après la courbe :

- $x_0 = 1 \text{ cm}$ (amplitude maximale)
 - $V_0 = 0$ (vitesse initiale)
 - $T_0 = 0,8 \text{ s}$ (période)
1. Faire un schéma du pendule et représenter les forces s'exerçant sur le solide.
 2. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur.
 3. Calculer la constante de raideur k du ressort.
 4. Établir l'équation horaire du mouvement.
 5. Indiquer le sens du déplacement lors du passage par la position d'équilibre pour la première fois.
 6. Calculer l'énergie potentielle élastique du pendule lorsque x est maximal.
En déduire l'énergie cinétique correspondante et l'énergie mécanique.

Exercice N°S-PT5-4 (5 pts)

Une automobile roule à vitesse constante de **108 km/h** sur une route droite.

Soudain, le conducteur perçoit à **150 m** devant lui un panneau de limitation à **60 km/h**.

Il freine et atteint le panneau à **45 km/h**.

1. a) Donner les caractéristiques (sens et intensité) du vecteur accélération **a** (supposé constant) pendant le freinage.
b) Calculer le **temps mis** pour atteindre le panneau à partir du début du freinage.
2. a) Quelles devraient être l'**accélération algébrique** et la **durée du freinage** pour atteindre **60 km/h** exactement au niveau du panneau ?
3. a) En réalité, le conducteur commence à freiner **0,8 s** après avoir vu le panneau. Il impose l'accélération calculée en 1.a).
Avec quelle **vitesse** arrive-t-il au panneau ?
Est-il en infraction ?
4. a) Après le panneau, il maintient sa vitesse constante à **60 km/h**.
À cette vitesse, il aborde un **virage de rayon R = 150 m**.
Déterminer les caractéristiques (sens et intensité) du **vecteur accélération** pendant le virage.
b) Calculer la **durée du virage** si on l'assimile à un **quart de cercle**.

Physique 2015

Exercice 1 : Mouvement du centre d'inertie-chute libre (04 points)

Les frottements sont négligeables.

Une bille supposée ponctuelle de masse m est abandonnée en un point A d'une piste dont la figure représente le tracé AOBC dans un plan vertical. La bille passe par le point O avec une vitesse V_0 . AO fait un angle α avec l'horizontale ; OBC circulaire, de rayon r , tangente en O à AO (voir fig 1).

1. a) Etablir en fonction de V_0, r, θ, g et α , l'expression de la vitesse V_M du mobile en un point M défini par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. (0,75 pt)

b) En déduire l'expression de l'intensité de la réaction R_M de la piste sur la bille en M. (075 pt)

2. a) Quelle doit être la vitesse minimale notée V_{01} que doit avoir la bille lors de son passage en O pour qu'elle puisse atteindre le point C. (0,5 pt)

b) Quelle est la vitesse V_C correspondant ? (0,5 pt)

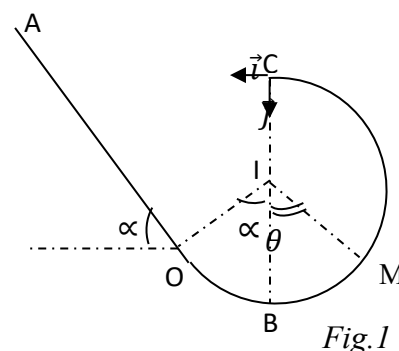
c) A quelle distance minimale ℓ_1 du point O telle que $\ell_1 = AO$ la bille a été abandonnée sans vitesse initiale ? (0,5pt)

3. On suppose que la bille possède en C la vitesse calculée en 2. b).

a) Etudier le mouvement de la bille après son passage en C. (0,5 pt)

b) Etablir l'équation de sa trajectoire. (0,5 pt)

On donne : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $m = 25 \text{ g}$; $r = 20 \text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$



Exercice 2 : Mouvement de particules chargées (06 points)

On néglige le poids des particules et on assimilera la masse d'un ion à la somme des masses des nucléons. On donne la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Masse du proton = masse du neutron = $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

1. Des ions potassium, K^+ sortent d'une chambre d'ionisation et pénètrent avec une vitesse négligeable par un trou O_1 dans l'espace entre deux plaques P_1 et P_2 . Quand une tension U_0 est appliquée entre les plaques, les ions atteignent le trou O_2 avec une vitesse v_0 .

a) Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c d'un ion de masse m au point O_2 en fonction des potentiels V_{P_1} et V_{P_2} de P_1 et P_2 . (1pt)

b) En déduire laquelle des deux plaques est au plus grand potentiel et donner l'expression de v_0 en fonction de e , m et U_0 . (1pt)

c) Calculer la valeur de v_0 pour les ions ${}^{39}_{19}\text{K}^+$ dans le cas où $U_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ V}$. (1pt)

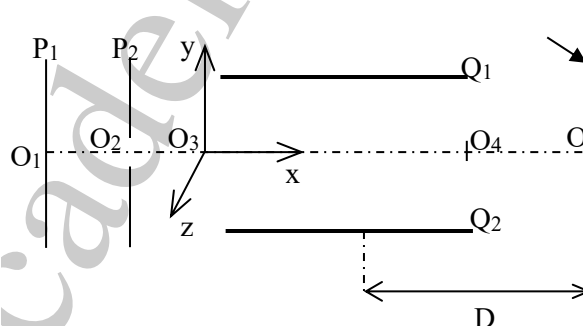


Figure 2

2. Les ions sortent de O_2 et pénètrent en O_3 entre les armatures horizontales Q_1 et Q_2 d'un condensateur plan avec la vitesse $\vec{v}_0$ parallèle aux armatures (figure 2); d est la distance entre Q_1 et Q_2 dont la longueur est $\ell = O_3O_4$. La tension $U_{Q_2Q_1}$ est constante et positive.

a) Etablir l'équation de la trajectoire de l'ion à l'intérieur du condensateur. (1pt)

b) Montrer que hors du condensateur (Q_1 , Q_2) la trajectoire d'un ion est une droite dont le prolongement coupe le segment $[O_3O_4]$ en son milieu. (1pt)

c) (E) est un écran luminescent situé à la distance D du milieu de $[O_3O_4]$. Etablir la déflexion électrique Y de l'ion sur l'écran en fonction de e , m , v_0 , ℓ , d , U et D . (0,5pt)

d) Quel est l'aspect de l'écran dans le cas où le potassium utilisé contient 3 isotopes ${}^{39}\text{K}$, ${}^{41}\text{K}$ et ${}^{42}\text{K}$?

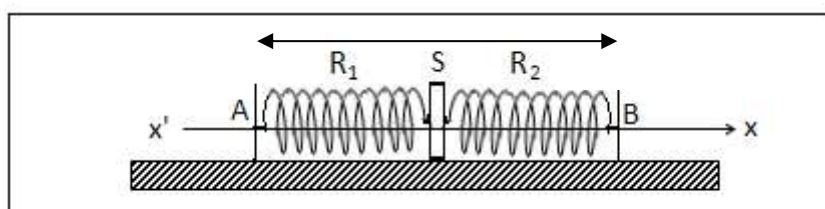
Application numérique : $\ell = 10 \text{ cm}$; $d = 4 \text{ cm}$; $D = 40 \text{ cm}$; $U_{Q_2Q_1} = 200 \text{ V}$. (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

Un solide ponctuel S de masse $m = 0,20 \text{ kg}$ mobile sur une table à coussin d'air horizontale, est accroché à deux ressorts R_1 et R_2 identiques de masse négligeable entre deux points A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

La longueur à vide de chaque ressort est $\ell_0 = 15 \text{ cm}$ et la constante de raideur $k = 10 \text{ N/m}$. la distance des points d'attache A et B vaut $L = 40 \text{ cm}$.

L

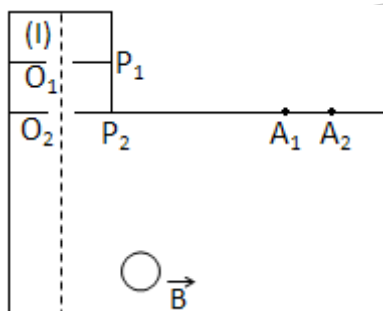


- 1-) Déterminer à l'équilibre l'allongement x_0 de chaque ressort. (1,5 points)
- 2-) Le solide S étant en équilibre, on l'écarte horizontalement de 3 cm vers B et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$; l'origine O des abscisses coïncidant avec la position du centre d'inertie G du solide S à l'équilibre. On néglige les frottements.
 - a-) Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie du solide. (0,75 point)
 - b-) Ecrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie du solide en précisant les valeurs numériques de l'amplitude X_m , de la pulsation ω et de la phase initiale φ_0 (1,75 points)
 - c-) A quel instant le solide passe-t-il par l'abscisse 1,5 cm en allant dans le sens négatif des elongations pour la première fois ? (1 point)

Exercice 4 (5 points)

On envisage la séparation d'un mélange naturel d'isotopes du nickel à l'aide d'un spectrographe de masse. On néglige le poids des ions devant les forces magnétiques.

L'échantillon est introduit dans la chambre d'ionisation (I). Les ions Ni^{2+} produits sont accélérés dans le vide entre 2 plaques parallèles P1 et P2 par une tension U de valeur absolue 3880V.



- 1-) Préciser sur un schéma, justification à l'appui, le sens du vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre P1 et P2 et représenter la tension U. (2 points)
- 2-) Déterminer la vitesse v_1 des ions $^{58}_{28}Ni^{2+}$ à leur passage par le trou O2 (1,5 points).

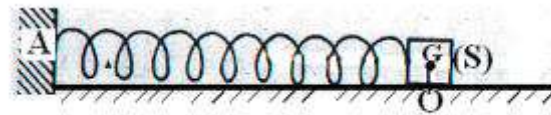
3) Déterminer la distance A_1A_2 séparant les points d'impact des ions ${}^{58}_{28}\text{Ni}^{2+}$ et ${}^{60}_{28}\text{Ni}^{2+}$. (1,5 points)

On donne : $1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $B = 0,50 \text{ T}$; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Physique 2014

Exercice 1 (5 pts)

Les frottements sont négligeables. On considère un ressort très long à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K . Le ressort est placé sur une table horizontale. On fixe l'une des extrémités du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel de masse m .



On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance $x_0 = 5 \text{ cm}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1.1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide et montrer que le système {ressort + solide + terre} est conservatif. (1 pt)

1.2 Pour une position x quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de K , m , x et de la vitesse V du solide. (1 pt)

1.3 Donner cette expression en fonction de K et x_0 . Dédurre l'expression de V en fonction de K , m , x_0 et x . (0,75 pt)

2.1 Montrer que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire sous la forme : $E_{pe} = aV^2 + b$ (0,75 pt)

2.2 L'expérience montre que $E_{pe} = -0,1V^2 + 2,5 \times 10^{-2}$. Dédurre les valeurs de m et de K . (0,75pt)

2.3 Calculer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre. (0,75 pt)

Exercice 2 (5 pts)

On relie l'extrémité O d'une lame vibrante à une corde tendue de longueur $OO' = 2 \text{ m}$. La lame vibrante subit des oscillations sinusoïdales verticales de fréquence $N = 100 \text{ Hz}$ et d'amplitude $a = 3 \text{ mm}$. Ces vibrations se propagent le long de la corde avec une célérité $c = 20 \text{ m/s}$.

1. Calculer la longueur d'onde λ . (0,5 pt)

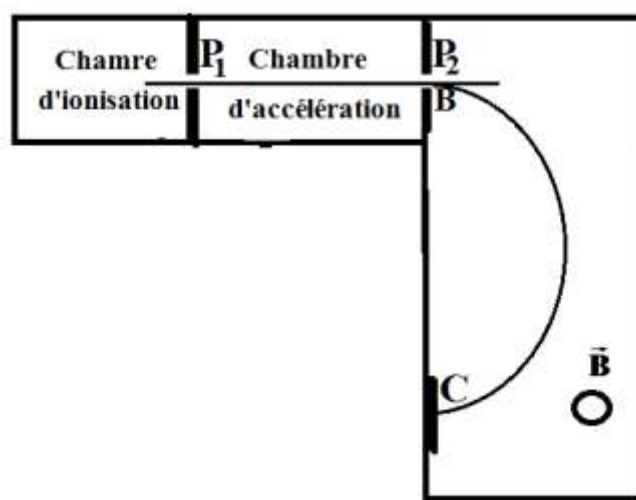
2. Décrire le phénomène observé au moment où la corde est éclairée par un stroboscope dont les fréquences prennent les valeurs : $N_e = 200 \text{ Hz}$; $N_e = 25 \text{ Hz}$; $N_e = 50 \text{ Hz}$ et $N_e = 102 \text{ Hz}$. (1 pt)

3. En considérant l'origine des temps l'instant où O passe par sa position d'équilibre dans le sens positif ; écrire l'équation horaire y_0 du mouvement de la source O et donner l'élongation y_M d'un point M situé à la distance x de la source O . (1,5 pt)

4. Déterminer l'expression des abscisses des points qui vibrent en phase avec la source O, préciser leur nombre et la valeur de l'abscisse du point le plus proche de O. (0,75 pt)
5. Mêmes questions pour les points qui vibrent en opposition de phase avec O. (0,75 pt)
6. Présenter l'aspect de la corde à l'instant $t=0,03s$. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 pts)

On place un élément chimique inconnu X dans une chambre d'ionisation. Elle produit des ions X^{n+} qui sont introduits avec une vitesse nulle en P_1 . La masse des ions est notée m et on donne $e=1,6 \times 10^{-19}C$.



1. Entre P_1 et P_2 on applique une différence de potentiel $U=U_{P_1P_2}$. Exprimer la vitesse V_B des ions au trou B de la plaque P_2 en fonction de n,e,m et $U_{P_1P_2}$.
 - 2.1 Indiquer le sens du champ magnétique.
 - 2.2 Déterminer la nature du mouvement dans le champ magnétique.
 - 2.3 Quelle est la vitesse en C ?
3. Exprimer la distance BC en fonction de m, n, e, $U_{P_1P_2}$ et B (où B est la norme du champ magnétique).
4. On sait que X est : soit l'isotope de masse atomique 59 du nickel qui conduit à l'ion Ni^{2+} , soit de l'aluminium (isotope de masse atomique 27) qui conduit à l'ion Al^{3+} , soit de l'argent (isotope de masse atomique 108) qui conduit à Ag^+ . Calculer numériquement les distances BC correspondant à chacun des trois ions. Données : $B=1T$, $U_{P_1P_2}=1000V$ et $m_p=1,67 \times 10^{-27}kg$
5. On trouve approximativement $BC=27,4mm$. Quel est l'élément X ?

Exercice 4 (5 pts)

Une bobine sans noyau de fer est formée de 2000 spires de 6cm de diamètre, réparties uniformément sur une longueur de 40 cm. Cette bobine est placée en série avec un condensateur de capacité réglable (boîte de condensateur) une résistance $R = 60\Omega$ et un milliampèremètre de résistance négligeable.

L'ensemble est branché aux bornes d'une prise de courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50Hz, de tension efficace 120V. L'intensité efficace passe par un maximum 1,5A pour $C = 318\mu F$.

On demande :

1.1 Donner la valeur théorique de l'inductance de la bobine ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{SI}$). (0,5 pt)

1.2 Calculer la valeur expérimentale de l'inductance. (0,5 pt)

1.3 Déterminer la résistance R' de la bobine. (0,5 pt)

2. 2 On considère maintenant une bobine dont on ne connaît ni la résistance R ni l'inductance L .

On se propose de déterminer ces deux grandeurs. Pour cela on réalise le montage suivant : entre deux bornes A et B d'une prise de courant alternatif sinusoïdal, on branche en série, dans l'ordre une résistance connue $r = 25 \Omega$ et la bobine à étudier. On appelle C le point de connexion de la résistance à la bobine.

On dispose alors de trois voltmètres : V entre les bornes A et B ; V_1 entre A et C et V_2 entre C et B. Ils indiquent respectivement les valeurs efficaces : $U = 110V$, $U_1 = 45,5V$ et $U_2 = 80V$ des trois tensions : $u = V_A - V_B$; $u_1 = V_A - V_C$ et $u_2 = V_C - V_B$.

On appelle i la valeur instantanée de l'intensité du courant de fréquence $f = 50\text{Hz}$.

2.1 Faire le schéma du montage. (0,5pt)

2.2 Construire le diagramme de Fresnel relatif à cette expérience représentant les trois tensions u_1 , u_2 et u . (0,5pt)

2.3 Calculer l'impédance de la bobine. (0,5pt)

2.4 Déterminer la phase de u_2 par rapport à i . (0,5pt)

2.5 Calculer les valeurs des grandeurs R et L . (0,5pt)

2.6 Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit. (1 pt)

Physique 2013

Exercice 1 :

Un joueur de tennis frappe la balle à une hauteur $h = 2,40\text{m}$. Le vecteur vitesse de la balle est dirigé vers le bas, fait un angle $\alpha = 10^\circ$ avec l'horizontale et a valeur $V_0 = 30\text{m/s}$.

1. Faire le schéma en représentant le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ dans un repère (O, x, y) . (1 pt)
2. Calculer les équations horaires du mouvement de la balle $x(t)$ et $y(t)$. (1 pt)
3. En déduire l'équation de la trajectoire. (0,5 pt)

4. La balle passera-t-elle au-dessus du filet de 0,91 m situé à 11,89 m du joueur ? (1,5 pt)
5. Quelle sera la vitesse de la balle en touchant le ? (1 pt)

On donne $g = 10 \text{ N/Kg}$.

Exercice 2 :

Dans une expérience de Melde, un vibreur de fréquence $N = 100\text{Hz}$, produit sur une corde AB de longueur $l = 1\text{m}$, des ondes stationnaires avec un nœud à chaque extrémité (il n'y a pas d'autres nœuds). La corde est soumise à la tension $F = 400\text{N}$.

1. Qu'appelle-t-on ondes stationnaires ? (0,5 pt)
2. Schématiser l'aspect de la corde. (0,5 pt)
3. Calculer la masse M de la corde. (1 pt)
4. La largeur maximale d'un fuseau ou ventre est de 4mm. Etablir l'expression de l'élongation d'un point M de la corde, situé à la distance x de l'extrémité fixe B. Faire l'application numérique pour $x = 25 \text{ cm}$. (1,5 pt)
5. Quelles valeurs faut-il donner à la tension F pour obtenir K fuseaux. Faire une application numérique pour $K = 4$. (1,5 pt)

Exercice 3 :

Une bobine de section circulaire est constituée par un fil de cuivre de longueur λ bobiné régulièrement. On suppose que les spires sont pratiquement situées dans un plan perpendiculaire à l'axe de du solénoïde. La longueur de la bobine vaut $l = 1000\text{mm}$, son inductance a pour valeur $L = 85 \text{ mH}$.

1. Calculer la longueur λ du fil de cuivre. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$. (1 pt)
2. Cette bobine est montée en série avec un condensateur ohmique aux bornes d'un générateur de tension continue. Lorsqu'on ferme le circuit par l'intermédiaire d'un interrupteur K l'intensité du courant passe de 0 à sa valeur maximale $I_{\max} = 2\text{A}$ en une durée $t_1 = 50\text{ms}$. Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice fém d'auto-induction. (1 pt)
3. On ouvre maintenant l'interrupteur K.
 - a) Que peut observer ? (0,5 pt)
 - b) Comment annuler cet inconvénient en utilisant une diode et un conducteur ohmique ? (0,5 pt)
 - c) Montrer que la dérivation introduite ne modifie pas le fonctionnement en régime permanent. (0,5 pt)
4. Calculer l'énergie électromagnétique libérée dans le circuit lors de l'ouverture de l'interrupteur. (1,5 pt)

Exercice 4 :

1. On branche un voltmètre aux bornes d'une source de courant alternatif. Il indique 220V. La fréquence du courant est 50Hz. Quelle est la valeur maximale de la tension de la source ? (0,5 pt)
2. On dispose en série aux bornes de la source précédente un conducteur ohmique de résistance R , une bobine B de résistance r et d'inductance L et un ampèremètre. L'ampèremètre indique $I = 3,5\text{A}$. un voltmètre branché aux bornes du conducteur R indique $U_R = 140\text{V}$ et aux bornes de la bobines B, $U_B = 120,8\text{V}$.
 - a) Déterminer l'impédance Z_R du conducteur ohmique, Z_B de la bobine et Z de l'ensemble de la bobine et du conducteur. (1,5 pt)
 - b) Calculer les valeurs R , r et L . (1,5 pt)
 - c) Déterminer le déphasage entre la tension aux bornes de la source d'intensité du courant. (1 pt)
 - d) Ecrire l'expression de l'intensité du courant en prenant comme origine des temps, l'instant où la tension est maximale. (0,5 pt)

Exercice n°1 (5 pts)

La Terre est assimilable à une sphère homogène de masse M et de rayon R .

Un satellite géostationnaire est en orbite à l'altitude h au-dessus de la Terre.

1. a) Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement d'un satellite ?
b) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?
2. Faire un schéma en représentant la Terre, la trajectoire du satellite et la force exercée par la Terre sur le satellite.
3. a) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
b) Déterminer l'expression de sa vitesse en fonction de $r = R + h$, G (constante de gravitation) et M .
c) Le mouvement du satellite est-il indépendant de sa masse m ?
4. a) Exprimer l'altitude h en fonction de R , de la période T de rotation de la Terre autour de son axe, de la masse M de la Terre et de la constante G de gravitation.
b) Calculer l'altitude h du satellite.

Données :

$R=6375\text{km}$,

$G=6,67\times 10^{-11}\text{SI}$,

$T=86400\text{s}$,

$M=6\times 10^{24}\text{kg}$.

Exercice n°2 (5 pts)

Deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , cohérentes et synchrones, produisent des interférences lumineuses à l'aide des fentes de Young.

La longueur d'onde de l'onde lumineuse est $\lambda=0,589\mu\text{m}$.

Sur l'écran E , on numérote les franges brillantes successivement et on mesure la distance entre le milieu de la frange brillante numéro zéro et celui de la frange brillante numéro 15. On trouve $1,77\text{mm}$. Sachant que $D=0,60\text{m}$ (distance entre les sources et l'écran E), déterminer a , distance entre les fentes. (1,5 pts)

1. Les sources S_1 et S_2 sont éclairées par une onde lumineuse de longueur d'onde $\lambda_1=0,480\mu\text{m}$.
Calculer la fréquence N_1 de l'onde lumineuse. (0,5 pt)
2. Calculer la distance i_1 séparant deux franges sombres consécutives sur l'écran E . (1 pt)
3. S_1 et S_2 sont maintenant éclairées par une onde lumineuse de longueur d'onde λ_2 .
On constate que le milieu de la seconde frange sombre occupe la place qu'occupait le milieu de la seconde frange brillante du système précédent. La frange centrale est notée zéro.
Dédurre de cette expérience la longueur d'onde λ_2 et la fréquence N_2 de l'onde. (2 pts)

Exercice n°3 (5 pts)

On considère une bobine de longueur $l=12\text{cm}$, de rayon moyen $r=1\text{cm}$, comportant $n=2500$ spires par mètre.

Cette bobine est un solénoïde long par rapport au rayon des spires.

1. La bobine est traversée par un courant d'intensité I . Le champ magnétique $\vec{B}_b$ au centre de la bobine a une intensité de $0,01\text{T}$.
Calculer I .
2. Après avoir choisi un sens de parcours du courant, indiquer sur un schéma comment se placerait une petite aiguille aimantée au centre de la bobine.
3. La bobine d'axe horizontal, toujours traversée par le courant I , est placée dans un champ magnétique horizontal $\vec{B}_0$ uniforme d'intensité $0,01\text{T}$. La direction de ce champ est orthogonale à l'axe de la bobine.
 - a) Dessiner les vecteurs $\vec{B}_b$ et $\vec{B}_0$ dans le plan horizontal. Quelle est l'intensité du champ magnétique total existant à l'intérieur de la bobine ?
 - b) De quel angle a tourné la petite aiguille par rapport à la position trouvée à la première question ?
4. La bobine est maintenant en circuit ouvert. Dans le champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}_0$, un dispositif permet de faire tourner librement la bobine autour d'un axe vertical passant par son centre, avec une vitesse angulaire constante $\omega=4\text{rad/s}$.
 - a) À l'instant $t=0$, l'axe de la bobine est parallèle à $\vec{B}_0$. La normale aux spires étant orientée dans le sens de $\vec{B}_0$, calculer le flux Φ_0 à travers la bobine.
 - b) À un instant t , la bobine a tourné d'un angle α . Exprimer le flux $\Phi(t)$ à travers la bobine.
 - c) Calculer le flux $\Phi(t)$ à travers la bobine à la date $t=0,25\text{s}$.

Montrer que la bobine est le siège d'une force électromotrice d'induction $e(t)$ à la date t . Calculer sa valeur maximale.

Donnée : $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{SI}$.

Exercice n°4 (5 pts)

Un condensateur de capacité $C=12\text{nF}$, préalablement chargé sous une tension $U_0=12\text{V}$, est branché à l'instant $t=0$ aux bornes d'une bobine d'inductance $L=9,0\text{mH}$.

1. a) Schématiser le circuit (L , C). (0,5 pt)
 b) L'orienter et désigner l'armature qui porte la charge positive $+q$. (1 pt)
2. a) Exprimer en fonction de la charge q les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine. (0,5 pt)
 b) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de q au cours du temps. (1 pt)

3. a) Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge q en fonction du temps. Expliciter les différents termes de cette solution. (0,5 pt)

b) Donner l'expression de la période T_0 du circuit oscillant. (0,5 pt)

c) Déterminer $q(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

d) Donner avec des valeurs numériques les équations décrivant l'évolution en fonction du temps de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant. (0,5 pt)

Physique 2011

Exercice N°1

Dans ce problème, nous étudions le mouvement d'un satellite de Mars nommé Phobos. On supposera que tous les objets étudiés sont à répartition sphérique de masse.

On donne :

- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ est la constante de gravitation universelle.
- Distance entre le centre de Mars et celui de Phobos : $r = 9,38 \times 10^3 \text{ km}$.
- Masse de Mars : $m_M = 6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$.
- La masse de Phobos sera notée m_P .
- Période de rotation de Mars : $T_M = 24 \text{ h } 37 \text{ min}$.

On supposera que Phobos a un mouvement circulaire uniforme autour de Mars de vitesse v et on supposera que l'on travaille dans un référentiel galiléen centré sur Mars.

1. Donner la définition d'un mouvement circulaire uniforme.
2. **Représenter le point d'application, la direction et le sens du vecteur accélération de Phobos sur un schéma.**
3. Donner l'expression (sans justification) de la norme du vecteur accélération de Phobos en fonction de v et r .
4. Appliquer la deuxième loi de Newton à ce satellite.
5. En déduire que l'expression de sa vitesse de révolution autour de Mars est :

$$v = \sqrt{\frac{Gm_M}{r}}$$

6. Déterminer l'expression reliant v , r et T_P (période de révolution de Phobos autour de Mars).
7. Montrer que : $\frac{T_P^2}{r^3} = 9,22 \times 10^{-13} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$. Cette relation définit une loi. Donner son nom.
8. En déduire la valeur de T_P
9. Dans quel plan faut-il placer un satellite pour qu'il soit immobile par rapport à la base relais sur Mars ? Justifier votre réponse sans calcul.
10. Quelle est la période T_S de révolution d'un tel satellite ?
11. Étudier l'expression de l'énergie mécanique du système Phobos-Mars. Déduire qu'elle est constante au cours du temps.

Exercice N°2

1. On établit une tension constante U aux bornes (A et B) des armatures d'un condensateur de capacité C_1 . Calculer la charge maximale Q_{max} du condensateur.
2. Le condensateur étant chargé, on isole ses armatures et on le décharge dans une bobine d'inductance L_1 et de résistance R_1 .
 - a) Établir l'équation différentielle des oscillations électriques dans le circuit.
 - b) Donner l'expression de l'énergie totale électrique (condensateur) et magnétique (bobine) du circuit.
 - c) Montrer que l'énergie totale du circuit varie au cours du temps et préciser la forme sous laquelle se manifeste cette variation.
 - d) Quelle est la nature des oscillations électriques ainsi obtenues. Que se passera-t-il dans le circuit pendant un temps suffisamment long ?
 - e) Si la résistance de la bobine est négligeable, quelle serait la nature des oscillations ? Calculer la valeur de leur fréquence propre.

On donne : $C_1 = 6,28 \mu\text{F}$, $U = 50 \text{ V}$ et $L_1 = 0,318 \text{ H}$.

Physique 2008

Exercice 1 :

L'espace vide rapporté à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans cet espace règne un champ de pesanteur terrestre g supposé uniforme. Un projectile est lancé à partir du point O avec une vitesse $V_0 = 200 \text{ m/s}$ faisant un angle θ avec l'horizontal $(O, \vec{e}_x)$. On rappelle que $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ définit le plan horizontal. Le projectile est soumis uniquement à son poids.

- 1) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au projectile, établir les équations horaires du mouvement, suivant les axes du plan contenant le projectile. En déduire la nature du mouvement.
- 2) Calculer, pour une cible placée au point C se situant à une distance $\overline{OC} = d = 2500 \text{ m}$ du point O sur l'axe $(O, \vec{e}_x)$:
 - a) Les angles de tir possibles pour atteindre la cible ;
 - b) L'altitude maximale atteinte par le projectile ;
 - c) La durée minimale de tir ;
 - d) La vitesse lors de la collision du projectile avec la cible.

Exercice 2 :

Partie A :

On considère un dipôle série (R, L, C) aux bornes duquel on applique une tension sinusoïdale de valeur efficace constante et à fréquence N variable. La bande passante à trois décibels « -3db » du circuit RLC correspond aux fréquences pour lesquelles l'intensité $I(N)$ est supérieur à $\frac{I(N_0)}{\sqrt{2}}$ où $I(N_0)$ l'intensité efficace à la résonnance.

- 1) Déterminer les fréquences N_1 et N_2 limitant cette bande passante. Et en déduire la largeur de la bande passante $\Delta N = N_2 - N_1$.

- 2) L'acuité de la résonance est caractérisée par une grandeur appelée facteur de qualité du circuit RLC noté Q défini par le rapport de la fréquence à la résonance N_0 par la largeur de la bande passante.
- Donner l'expression de Q .
 - Donner l'allure de la courbe de la résonance et dire quelle est l'influence de la résistance R sur la qualité de cette courbe ?

Partie B :

On considère un circuit (R, L, C) aux bornes duquel est appliqué une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_{eff} = 24V$.

- Déterminer pour la fréquence de la résonance d'intensité N_0 et pour la fréquence $N = 50Hz$:
 - L'intensité efficace du courant ;
 - La puissance apparente ;
 - La puissance moyenne consommée
- Pour quelles fréquences la puissance moyenne consommée vaut-elle la moitié de celle absorbée à la résonance ?
- A la résonance, faire le rapport entre l'énergie accumulée et l'énergie dissipée par effet joule pendant chaque période et exprimer ce rapport en fonction du facteur de qualité du circuit.

Données : $R = 20\Omega$; $L = 0,5 H$; $C = 5\mu F$.

	Epreuves de Physique	Cycle : INGENIEUR
---	----------------------	-------------------

Physique 2024

CONCOURS SPI-1 - CYCLE INGÉNIEUR

Exercice 1 (5pts)

L'espace est rapporté à un système d'axes (Oxyz).

Aux points A et B de coordonnées respectives $(0, -a, 0)$ et $(0, +a, 0)$ sont placées deux charges identiques positives $(+q)$. Le point C $(0,0, r)$ porte une charge mobile $(+q)$.

- Calculer le champ électrique créé au point C par les charges placées en A et B. **(1pt)**

- 2) Calculer la force électrostatique $\vec{F}_e(C)$ que subit la charge mobile (+q) au point C. **(1pt)**
- 3) Calculer les positions de la charge mobile pour que $\vec{F}_e(C)$ soit maximal. **(1pt)**
- 4) Calculer la position d'équilibre. **(0,5pt)**
- 5) Calculer l'énergie potentielle électrostatique de ce système à la position d'équilibre. **(1pt)**
- 6) Montrez qu'elle est minimale dans cette position **(0,5pt)**

Exercice 2 (5pts)

On dispose de n moles d'un gaz parfait monoatomique à la température $T_0 = 1000K$ et à la pression $P_0 = 10^6 Pa$ et on cherche à extraire de ce fluide une énergie mécanique maximale.

Le rapport des chaleurs massiques : $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ et $R = 8,32 J.K^{-1}mol^{-1}$

1. Donner l'expression de l'énergie interne U d'un gaz parfait monoatomique en fonction de n, R et T. **(0,5pt)**
2. Enoncer le premier principe de la thermodynamique. **(0,5pt)**
3. Montrer qu'une transformation adiabatique qui amènerait ce gaz de T_0 à '0K' permettrait de récupérer entièrement l'énergie interne du fluide sous de travail mécanique. **(0,5pt)**
4. On fait subir à une mole ($n = 1$) de ce fluide une détente adiabatique réversible l'amenant de l'état initial (T_0, P_0) à l'état final (T_1, P_1).

On rappelle que la chaleur échangée : $\delta Q = C_v dT + PdV$

- 4.a Montrer que la loi d'évolution du rapport des températures : $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ **(1pt)**
- 4.b Déduire le rapport $\frac{P_1}{P_0}$ en fonction T_0, T_1 et γ . **(0,5pt)**
- 4.c Déterminer le travail mécanique W échangé par ce fluide. **(1pt)**
- 4.d. Calculer numériquement T_1 et l'énergie extraite W pour une mole ($n = 1$) et pour $P_1 = 10^5 Pa$. **(1pt)**

Exercice 3 (5pts)

L'espace est rapporté à un système d'axes (Oxyz).

1. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide loin des sources de charges et de courants. **(1pt)**
2. On superpose deux ondes planes qui se propagent dans le vide et qui ne diffèrent que par leurs vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$: $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ et $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$.

Les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ associés à ces deux ondes sont polarisés rectilignement suivant $\vec{Ox}$, de même amplitude E_0 , de même pulsation ω et de même phase à l'origine des coordonnées.

- 2.1 Ecrire les expressions en notation réelle de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$. **(1pt)**
- 2.2 En déduire les expressions en notations réelles des champs magnétiques correspondants $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$. **(1pt)**
- 2.3 Déterminer en notation réelle les expressions des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ résultants de cette superposition. **(1pt)**
- 2.4 Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont constamment nuls dans certains plans que l'on précisera. **(1pt)**

Exercice 4 (5pts)

On désire chauffer une maison avec une pompe à chaleur décrivant un cycle ditherme de transformations réversibles.

La température extérieure est $\theta_2 = 5^\circ\text{C}$. Pour maintenir la température de la maison à $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$, il faut lui fournir une quantité de chaleur de $2 \times 10^8 \text{ J}$ à l'heure.

- 1- Calculer en degré Kelvin les températures T_1 et T_2 correspondants respectivement à θ_1 et θ_2 . **(0,5pt)**
- 2- Quelles sont les sources chaude (1) et froide (2). **(0,5pt)**
- 3- Donner le schéma de principe de la pompe en indiquant par des flèches, le sens des échanges de chaleur et de travail. On appellera Q_1 la chaleur échangée avec la source chaude, Q_2 la chaleur échangée avec la source froide et W le travail échangé durant le cycle. Quel est le signe de W , Q_1 et de Q_2 ? **(1,25pts)**
- 4- Calculer la valeur de Q_1 ? **(0,5pt)**
- 5- Enoncer le premier principe de la thermodynamique et donner l'expression de l'énergie interne du cycle ΔU en fonction de W , Q_1 et Q_2 . En déduire l'expression de W en fonction de Q_1 et Q_2 . **(0,75pt)**

- 6- Ecrire la relation de Clausius pour ce cycle pour ce cycle ditherme et réversible. (0,5pt)
- 7- En déduire l'expression de W en fonction de Q_1 , T_1 et T_2 . (0,5pt)
- 8- Calculer la puissance consommée par la pompe. (0,5pt)
- 9- Définir et calculer l'efficacité e_p de la pompe en fonction de T_1 et T_2 . (0,5pt)

CONCOURS SPE-1 - CYCLE EXPLOITATION EN AÉRONAUTIQUE CIVILE

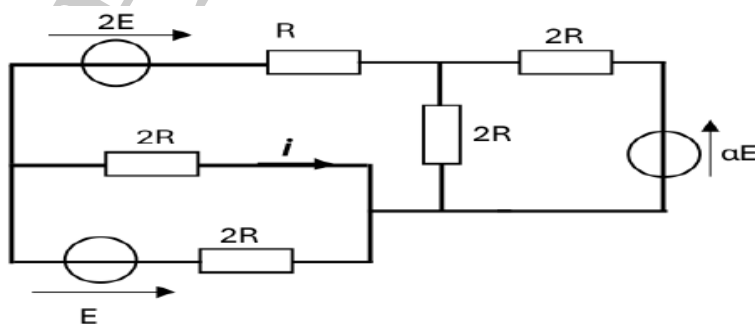
Exercice 1 (5pts)

Dans un référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées d'un point matériel M sont données par les fonctions du temps $x(t) = t$, $y(t) = t(t - 1)$ et $z(t) = 0$ où t est le temps.

- 1) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M . En déduire sa nature. (0,5pt)
- 2) Déterminer les composantes et le module de la vitesse $\vec{V}(M/R)$ à l'instant t . (0,5pt)
- 3) Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$. (0,5pt)
- 4) Discuter la nature du mouvement de M en fonction de t . (1pt)
- 5) Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, sachant que $\vec{b} = \vec{k}$. (1pt)
- 6) En déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point M . (1pt)
- 7) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de t . (0,5pt)

Exercice 2 (5pts)

Déterminer l'intensité i sur le schéma ci-dessous



Exercice 3 (5pts)

Un fil infini est parcouru par un courant d'intensité I . Nous nous proposons de calculer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant en tout point M de l'espace.

1. Préciser le système de coordonnées à utiliser. (1pt)
2. De quelles variables d'espace dépend le champ magnétostatique $\vec{B}$? Justifier votre réponse. (1pt)
3. Quelles est la composante non nulle du champ magnétique $\vec{B}$? Justifier votre réponse. (1pt)
4. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. (2pts)

Exercice 4 (5pts)

L'espace est rapporté à un système d'axes (Oxyz).

1. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide loin des sources de charges et de courants. (1pt)
2. En déduire l'équation de propagation de $\vec{E}$. (0,5pt)
3. On considère la propagation dans le vide d'une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, de pulsation ω dans la direction du plan (xOy) faisant un angle θ avec l'axe

(Ox). Le champ électrique polarisé rectilignement suivant l'axe (Oz) a pour expression complexe en un point M(x, y, z) et à l'instant t :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - ax - by)} \vec{u}_z, E_0 \text{ est une constante et } a \text{ et } b \text{ deux nombres réels.}$$

3.1 Montrer que $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est bien une solution de l'équation de propagation obtenue à la question 2 à condition que a, b, ω et c (célérité de la lumière dans le vide) obéissent à une relation que l'on précisera. (1pt)

3.2. Déterminer en fonction de a et b la longueur d'onde λ et la direction θ de propagation de l'onde (1pt)

4. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ de l'onde. (1pt)

5. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ (0,5pt)

Physique 2023

Exercice 1 (5pts)

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.
2. Établir les équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide.
3. Les équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide admettent comme solutions dans le cas de propagation d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

où $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont des constantes.

- a) Montrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses.
- b) Montrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires.
4. On considère une onde plane électromagnétique suivante :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_2 \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y$$

Préciser :

- c) le sens et la vitesse de propagation,
- d) la nature de la polarisation de $\vec{E}$.

e) Déterminer $\vec{B}$.

f) Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$.

Exercice 2 (5 pts)

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point quelconque de l'espace. La charge volumique $\rho(M)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \text{ avec } \rho_0 \text{ une constante positive.}$$

1. Préciser le système de coordonnées à utiliser.

2. Exprimer la charge totale Q du noyau.

3. Nous nous proposons de calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel scalaire V créés par cette sphère en tout point M de l'espace.

a) De quelles variables d'espace dépend le champ électrostatique $\vec{E}$? Justifier votre réponse.

b) Quelle est la composante non nulle du champ électrostatique $\vec{E}$? Justifier votre réponse.

c) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

4. En déduire le potentiel scalaire V en tout point de l'espace. En coordonnées sphériques :

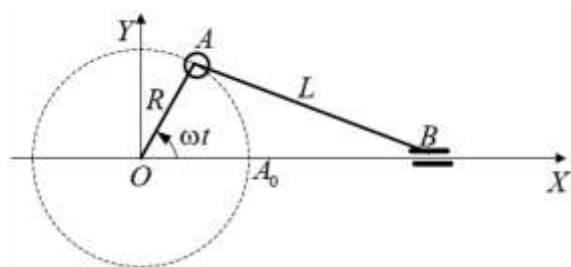
$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Exercice 3 (5 pts)

Un bras OA tournant avec une vitesse autour d'un axe O, est articulé en A avec une tige AB. La tige AB est solidaire d'un curseur B pouvant coulisser le long de l'axe Ox. Le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en O. Sachant que AB = L et OA = R :

1. Trouver l'équation horaire du mouvement de B, sachant que B passe en A₀ au temps t = 0.

2. À quel instant la vitesse s'annule-t-elle ?



Exercice 4 (5pts)

On considère 1 kg d'air (considéré comme un gaz parfait), subissant un cycle de Carnot ABCDA : AB et CD isotherme et BC et DA adiabatiques réversibles. A (T_A, P_A), B (T_B, P_B), C (T_C, P_C), et D (T_D, P_D).

La température au point A est $T_A = 300$ K et son volume est $V_A = 0,86$ m³. Les pressions aux points A, B et C sont respectivement $P_A = 1$ bar, $P_B = 3$ bars et $P_C = 9$ bars.

On donne $C_p = 10^3$ J K⁻¹ kg⁻¹ et $\gamma = 7/5$.

1. Remplir le tableau suivant :

Points	Pression P	Volume	Température
A			
B			
C			
D			

2. Représenter le cycle dans les diagrammes (P, V) et (T, S).
3. Calculer le rendement thermodynamique du cycle.

Physique 2022

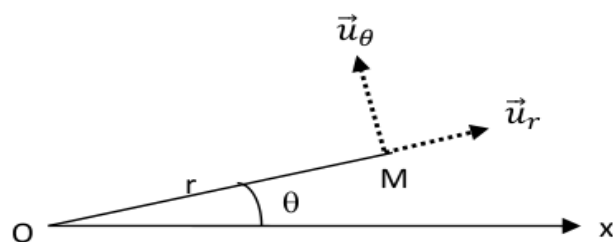
Exercice 1 (5 points)

Le mouvement d'un point matériel M dans un plan est défini par les équations paramétriques suivantes :

$$r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right); \theta(t) = \frac{t^2}{\tau^2}$$

où r_0 et τ sont deux constantes positives.

On appellera $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur qui lui est directement perpendiculaire (voir figure).



1. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ ainsi que son module. (1 pt)
2. Evaluer l'angle entre le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire en M et le vecteur unitaire radial. Que peut-on dire de cet angle ? (1 pt)
3. Calculer l'accélération $\vec{a}(M)$. En déduire ses composantes tangentielle et normale dans la base de Serret-Frenet $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{b})$. (1 pt)
4. Calculer le rayon de courbure ainsi que le centre de courbure de la trajectoire à l'instant t. (2 pts)

Exercice 2 (5 points)

Un moteur fonctionne en suivant le cycle de transformations réversibles suivant :

- État 1 à l'état 2 : Compression adiabatique
- État 2 à l'état 3 : Compression isochore
- État 3 à l'état 4 : Détente adiabatique
- État 4 à l'état 1 : Refroidissement isochore

On suppose que le cycle est étudié pour une mole d'air assimilé à un gaz parfait.

1. Tracer le diagramme (P, V) du cycle
2. Déterminer V_1 et V_2 si $V_1 = 7 V_2$
3. Calculer P_2 et T_2
4. Calculer les quantités de chaleur échangées au cours de chacune des transformations en fonction des températures T_1, T_2, T_3, T_4 . Commenter et calculer leurs valeurs numériques
5. Évaluer le travail fourni à l'air au cours du cycle en utilisant le premier principe
6. Déterminer le rendement du cycle

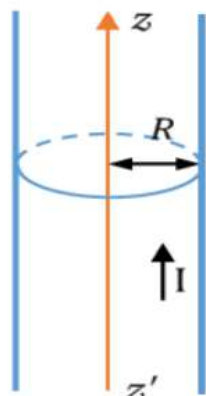
On donne : $\gamma = 1,4$; $C_p = 29 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

	État 1 :	État 2 :	État 3 :	État 4 :
Pression [Pa]	10^5		62×10^5	$4,08 \times 10^5$
Température [°K]	300		$2,65 \times 10^3$	$1,63 \times 10^3$

Exercice 3 (5 points)

Un cylindre conducteur de conductivité γ , de rayon R, de longueur h, est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité I.

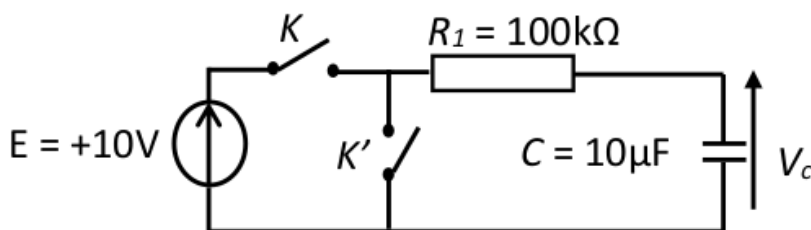
1. Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace. (1 pt)
2. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace. (1 pt)
3. En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat. (3 pts)



Exercice 4 (5 points)

Le circuit représenté ci-dessous fait apparaître un condensateur C dont la l'interrupteur K. À $t = 0$, déchargé, on ferme alors

dessous fait apparaître un charge est possible à la fermeture de on considère le condensateur K.



1. Sans aucun calcul, préciser quelles sont les valeurs de $v_c(0)$, $v_c(\infty)$, $i_c(0^+)$, $i_c(\infty)$. (2 pts)
2. En utilisant les lois fondamentales des circuits, écrire l'équation différentielle qui en découle sous la forme la plus adaptée au problème (pour $t \geq 0$). (1 pt)
3. Résoudre cette équation et écrire l'expression de $v_c(t)$ et $i_c(t)$. (1 pt)
4. Représenter ces deux grandeurs sur un graphique en fonction du temps et retrouver les résultats de la question 1. Préciser quelle est la valeur de la tension v_c à $t = 0,1s$, $t = 1s$, $t = 10s$. Conclure. (1 pt)

Physique 2018

Exercice S-PI3.1 (5 points)

Énoncé :

Dans le plan (Oxy), le mouvement d'un point P est déterminé par les équations paramétriques :

$$x = v_0 t \cos(\alpha)$$

$$y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

où v_0 est la vitesse initiale de P et α est l'angle que fait v_0 avec l'axe Ox.

1. Quelle est la nature de la trajectoire ? (1 pt)

2. Déterminer : (3,5 pt)
 - a) Les accélérations normales et tangentielles.
 - b) Le rayon de courbure $\rho(t)$ ainsi que le centre de courbure $C(t)$.
 - c) Les expressions des vecteurs unitaires de Serret-Frenet.
3. Trouver l'angle entre les vecteurs vitesses et accélérations au point où la trajectoire recoupe l'axe Ox . (0,5 pt)

Exercice S-PI3.2 (5 points)

Une mole de gaz parfait ($\gamma = 1,4$) subit la succession de transformations suivantes :

- Détente isotherme de $P_A = 2$ bar et $T_A = 300$ K jusqu'à $P_B = 1$ bar, en restant en contact avec un thermostat à $T_T = 300$ K ;
- Évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5$ L toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T ;
- Compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A.

1. Calculer V_B et représenter ce cycle en diagramme (P, V). S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ? (1 pt)
2. a) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{AB} du gaz entre A et B. (0,5 pt)
 b) Déterminer l'entropie S_{ech} échangée avec le thermostat. (0,75 pt)
 c) En déduire l'entropie créée $S_{crée}$. Conclure. (1,25 pt)
3. Calculer la température en C, le travail W_{BC} et la quantité de chaleur Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC. Calculer l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que la variation d'entropie du gaz entre B et C. (0,75 pt)
4. Calculer la valeur numérique de l'entropie créée au cours du cycle. Le cycle proposé est-il réalisable ? (0,75 pt)

Exercice S-PI3.3 (5 points)

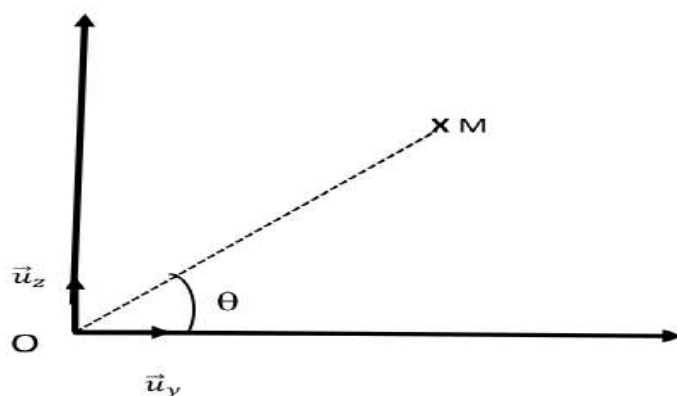
On considère une onde électromagnétique plane, progressive, sinusoïdale et monochromatique de pulsation ω , se propageant dans le vide de perméabilité magnétique μ_0 . L'espace est rapporté à un repère cartésien Oxyz de base orthonormée. L'onde se propage dans le plan yOz le long d'un axe faisant un angle θ avec la direction Oy. Le vecteur champ électrique a comme expression :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{u}_x$$

1. Écrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes k_y et k_z du vecteur d'onde $\vec{k}$ au point M de coordonnées (x, y, z) tel que $\vec{r} = \vec{OM}$ et à l'instant t, en fonction de son module k et de θ . (1 pt)
2. Écrire les équations de Maxwell dans le vide. (1 pt)
3. Écrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point M à l'instant t. En déduire, à l'aide des équations de Maxwell dans le vide, les composantes du vecteur champ magnétique de l'onde $\vec{B}$ au point M. (1 pt)
4. Représenter les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$. (1 pt)
5. Déterminer en notation réelle les composantes du vecteur de Poynting.

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

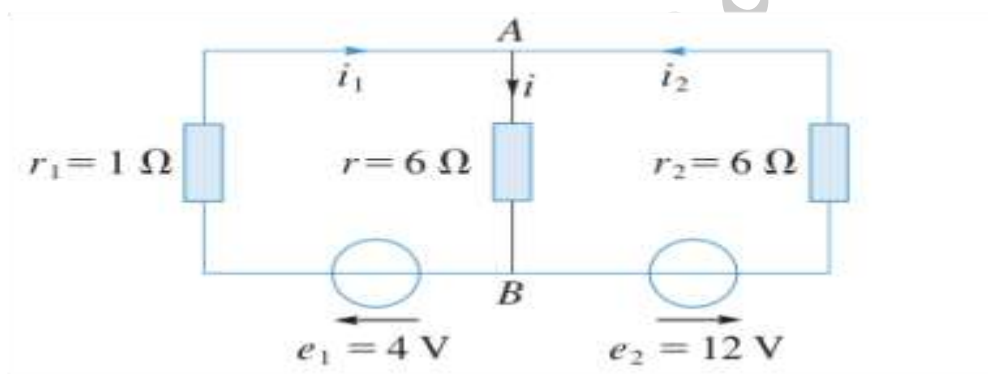
associé à l'onde électromagnétique en fonction de E_0 , μ_0 , $\vec{k}$ et ω . (1 pt)



Exercice S-PI3.4 (5pts)

Déterminer le courant i en utilisant deux des trois lois ci-dessous :

- Les lois de Kirchhoff ;
- En remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.



Physique 2016

Exercice S-PI4-1 (5pts)

Un conducteur cylindrique creux, de rayons R_1 et R_2 de la figure ci-dessous est parcouru par un courant I tel que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ soit uniforme sur toute sa section et soit parallèle à l'axe du cylindre.

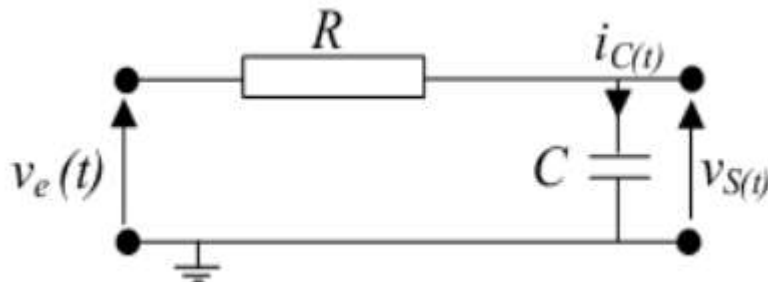
- Donner la relation entre j et I .
- Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ en un point M de l'espace, qu'il soit extérieur ou intérieur au cylindre.
- (M) en un point M de l'espace, qu'il soit extérieur ou intérieur au cylindre.
- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.



Exercice S-PI4-2 (6pts)

Les circuits passifs qui utilisent des condensateurs et des inductances, lorsqu'ils sont destinés à des signaux (tensions) alternatifs, présentent des caractéristiques qui dépendent de la fréquence des signaux d'entrée. En cela, ils forment naturellement des « filtres » qui atténuent ou pas, ou « coupent » ou pas, certaines plages de fréquence. Ils ont ainsi un rôle de discrimination en fonction de la fréquence, ce qui correspond bien à une sorte de filtrage. Cette fonction est très importante en électronique et donc assez présente dans les sujets de problèmes.

Pour comprendre la notion de « filtre » prenons comme exemple simple un « filtre passe bas passif » représenté sur la figure ci-après :



1. Quelle équation relie la tension $v_S(t)$ et le courant $i_C(t)$?
2. Si on suppose que $v_S = V_{\text{max}} \cos(\omega t)$, quelle sera l'expression littérale de i_C ?
3. Que représente la valeur ω ? Par quoi est-elle fixée ?
4. A quoi est équivalent le circuit si ω est très petit, c'est-à-dire dans un domaine de "basses fréquences" ?
5. A quoi est équivalent le circuit si ω est très grand, c'est-à-dire dans un domaine de "hautes fréquences" ? Justifier alors l'appellation "passe bas".
6. Montrer que l'équation de maille de ce circuit revient à :

$$v_e = RC \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t).$$

7. A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \gg 1/RC$?
8. A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \ll 1/RC$?

Exercice S-PI4-3 (5pts)

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (OPR) de pulsation ω se propage dans le vide dans la direction de l'axe Oz.

1. Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point de l'espace.
2. Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Exercice S-PI4-4 (5pts)

Soit un point matériel repéré par ces coordonnées cylindriques ϱ , φ , et z telles que :

$\varrho = at^2$, $z = at$, $\varphi = \omega t$, où a et ω sont des constantes.

1. Calculer les composantes cylindriques du vecteur vitesse.
2. En déduire les composantes cylindriques du vecteur accélération.

Calculer les modules des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$.

Physique 2015

EXERCICE I : Electromagnétisme (5 pts)

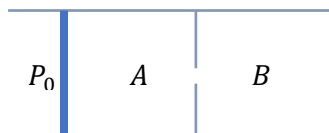
Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans l'air qu'on assimilera au vide. Le champ magnétique $\vec{B}$ est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$:

$$B_x = 0, B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), B_z = 0.$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de B_0 . (3 pts)
2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. (1 pt)
3. Quelle est la puissance moyenne $\langle P \rangle$ rayonnée à travers une surface (S) perpendiculaire à la direction de propagation. (1 pt)

EXERCICE II : Thermodynamique (Détente irréversible d'un gaz parfait) (5 pts)

Soit le dispositif de la figure ci-contre. Les parois et le piston sont adiabatiques. La paroi interne est fixe et diatherme (elle permet les échanges thermique). Elle est percée d'un trou et fermée par une fenêtre amovible.



La pression extérieure est $P_0 = 1 \text{ bar}$. Initialement le volume A est rempli d'un gaz parfait ($P_0 = 1 \text{ bar}, T_0 = 300 \text{ K}, n = 1 \text{ mol}$) et le volume B est vide.

Le rapport des capacités thermiques du gaz γ vaut 1,4.

1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la taille de l'enceinte B . En déduire sans toutefois la calculer, l'existence d'un volume critique V_c de B . (1 pt)
2. On suppose que $V_B < V_c$.
 - a. On appelle V_1 le volume occupé par le gaz. Déterminer le travail reçu par le gaz. (0,5 pt)
 - b. Déterminer l'état final du gaz (P_1, V_1, T_1) en fonction de P_0, V_A et V_B . (1 pt)
 - c. Calculer l'entropie créée. Conclure. Quelle est la cause de la création d'entropie ? (1 pt)
 - d. Déterminer V_c . Effectuer l'application numérique. (0,5 pt)
3. Reprendre la question 2. dans le cas $V_B > V_c$. (1 pt)

EXERCICE III : Mécanique du point : Satellite terrestre (4,5 pts)

Dans ce problème les satellites ou engins spatiaux artificiels sont assimilés à des points matériels de masse m , et les influences perturbatrices dues aux mouvements de la Terre, supposée sphérique et homogène, à son atmosphère et aux champs de gravitation des autres composants du système solaire (soleil, planètes, ...) sont négligées.

On désigne par R le rayon de la terre et par g_0 le module du vecteur du champ de pesanteur au niveau du sol. On donne : $R = 6400 \text{ km}$; $g_0 = 10 \text{ ms}^{-2}$

1. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_1 dont dérive la force $\vec{F}$ attractive exercée par la Terre sur un engin spatial lorsqu'il se trouve à la distance r du centre O de la Terre. On admet que E_1 tend vers 0 quand r tend vers l'infini. (1 pt)
2. Si on lançait un tel engin depuis la Terre, en lui communiquant à partir du sol une vitesse initiale V_i ascendante et verticale, de façon qu'il atteigne avec une vitesse nulle un point M d'altitude h , quelle devrait alors être la relation entre cette altitude h et le module V_i de la vitesse de lancement ?
Application numérique : $h = 600 \text{ km}$. (1 pt)

3. Quelle valeur numérique minimale V_2 devrait avoir la vitesse initiale pour que l'engin s'éloigne indéfiniment ? (0,5 pt)

4. Une fois atteinte cette altitude h de la question N°2 ci-dessus, quelle devrait être la vitesse V_i qu'il faudrait communiquer à cet engin à partir du point M pour qu'il devienne un satellite circulaire d'altitude $R + h$? Préciser la direction et le module de $\vec{V}_1$.

Quelles seraient dans ces conditions :

- la valeur numérique de V_1 ? (0,5 pt)
- la période T_1 de révolution de ce satellite ? (0,5 pt)
- la valeur numérique du module L_1 de son moment cinétique par rapport à O et son énergie mécanique E_2 dans le cas particulier où m est de 1 tonne ? (1 pt)

EXERCICE IV : Circuit R, L, C (5,5 pts)

Soit le circuit suivant où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω . On étudie la variation de l'impédance réelle du circuit.

1. Exprimer l'impédance complexe du circuit. (1 pt)

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

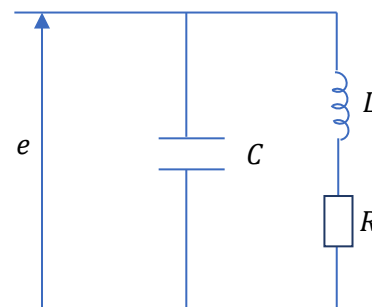
Donner l'expression de l'impédance en fonction de x , Q et R .

(1 pt)

3. Etablir l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera. (1,5 pt)

4. Donner l'expression de la pulsation correspondante à l'extremum. (1 pt)

5. En étudiant les limites du module de l'impédance, en déduire qu'il s'agit d'un maximum. (1 pt)



Physique 2014

EXERCICE I (5 points)

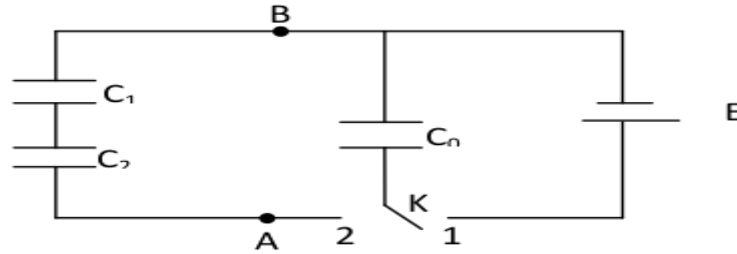
Un point se déplace sur une hélice circulaire représentée paramétriquement dans le repère orthonormé direct $Oxyz$ par les relations suivantes :

1. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe Oz .

2. Déterminer les composantes du vecteur accélération et en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

EXERCICE II (5 points)

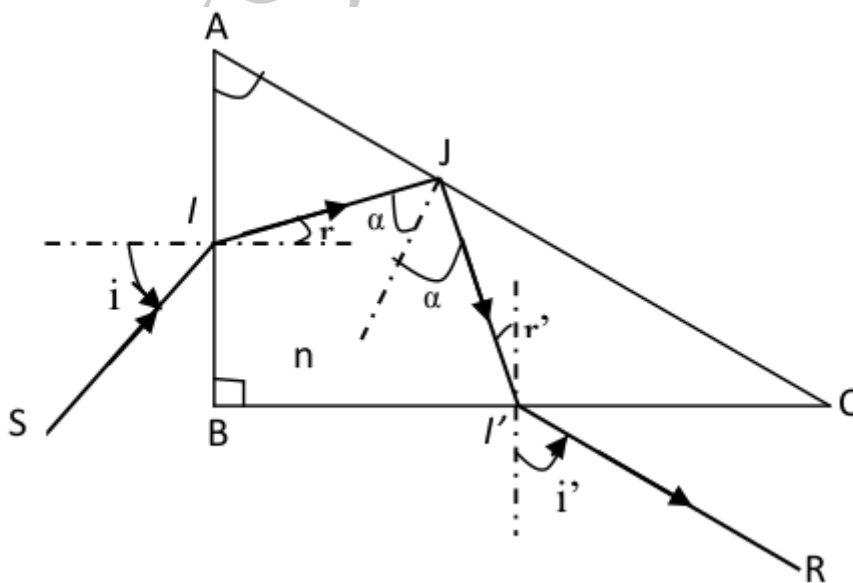
Soit le montage du schéma ci-dessous :



- 1) On place l'interrupteur en position 1. Quelle est la charge Q_0 de C_0 ?
- 2) On place l'interrupteur dans la position 2. Calculer $V_A - V_B$ à l'équilibre et les charges Q_0' , Q_1 et Q_2 des condensateurs C_0 , C_1 , C_2 .
- 3) Montrer la répartition des charges sur chaque condensateur et vérifier si le principe de conservation de la charge est respecté.

EXERCICE III (5 points)

Un prisme de verre, d'indice $n = 1,60$ pour la radiation jaune utilisée, a pour section droite un triangle rectangle ABC. Un rayon lumineux SI, situé dans le plan de section droite, pénètre par la face AB sous l'angle d'incidence i , se réfléchit totalement sur l'hypoténuse AC et émerge à travers BC ; on notera i' l'angle d'émergence.



1. Calculer la déviation totale du rayon lumineux SI en fonction de i et i' .

2. On donne $A=60^\circ$.

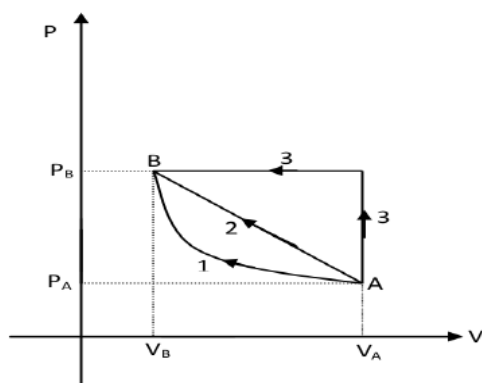
Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i le rayon émergent I'R est-il perpendiculaire au rayon incident SI ?

En déduire les valeurs des angles de réfraction et de réflexion.

3. Le prisme et le rayon incident demeurent fixes ; on utilise une lumière bleue pour laquelle l'indice du prisme devient $n + dn$.

Exprimer en fonction de l'angle A le pouvoir dispersif.

EXERCICE IV (5 points)



On considère deux moles d'oxygène supposé gaz parfait que l'on fait passer de l'état initial A (P_A , V_A , T_A) à l'état final B ($P_B=3P_A$, V_B , T) par trois chemins distincts :

- A1B (Transformation isotherme)
- A2B (représenté par une droite)
- A3B (voir figure)

Calculer les travaux et quantités de chaleur mises en jeu durant ces trois transformations en fonction de R et T .

Application numérique : $T=300K$.

Physique 2012

Exercice 1

On considère un gaz parfait enfermé dans une enceinte diatherme ayant la forme d'un cylindre dont l'une des bases est un piston mobile. Le milieu extérieur est à la température constante T_0 et à la pression constante P_0 .

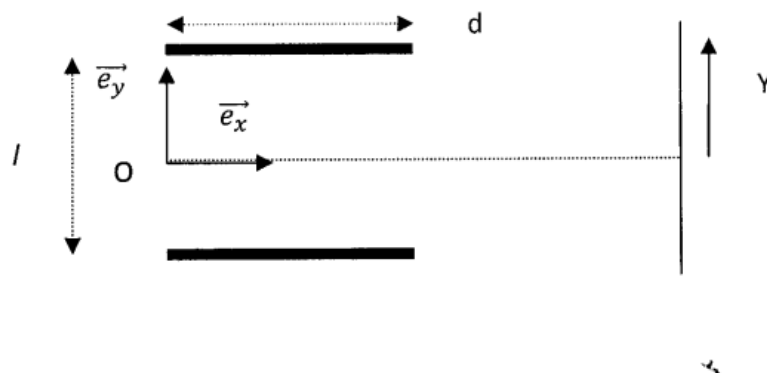
- 1) Déterminer l'expression du volume V_0 occupé par le gaz lorsqu'il est en équilibre avec le milieu extérieur.
- 2) On prépare le système de manière que son volume soit égale $\frac{V_0}{4}$ et on bloque le piston. Quel est le nouvel état d'équilibre du système ?
- 3) A partir cet état imposé au système, on débloquent le piston ; décrire l'évolution de l'état du gaz.

Exercice 2

Un canon à électrons est formé par deux plans métalliques parallèles ; le premier plan, appelé cathode C comporte un filament chauffé qui émet des électrons. L'autre plan appelé anode A est percé d'un trou qui laisse passer les électrons accélérés. Le canon à électrons permet donc d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons. Ce faisceau peut être dévié à travers les plaques d'un condensateur plan ; c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope cathodique.

- 1) En supposant que la différence de potentiel électrique $U = V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode est positive, déterminer l'expression de la vitesse v des électrons à la sortie de l'anode ; on admet que les électrons sont émis sans vitesse initiale.
 - 2) On considère un condensateur plan à plaques horizontales et on définit un repère cartésien d'étude $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que les plaques soient parallèles au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et l'épaisseur du condensateur est parallèle à l'axe $(O, \vec{e}_y)$. On suppose que l'axe $(O, \vec{e}_x)$ passe par le milieu des plaques avec le point O situé juste à l'entrée du champ électrique uniforme $\vec{E} = -E \vec{e}_y$ entre les plaques. A partir du point O, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_y$, un électron issu d'un canon à électrons, traverse le champ avant d'en sortir. La distance horizontale des plaques suivant l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est d ; voir le schéma de la figure 1 ci-dessous.
- a) Montrer que la trajectoire de l'électron est parabolique à l'intérieur des plaques
 - b) On s'intéresse au point d'impact de l'électron, sur un écran perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Si Y est la distance de ce point par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$, montrer que Y est proportionnel à la tension U appliquée entre les plaques du condensateur.

Figure 1 :



Exercice 3

On considère une sphère, de centre O et de rayon R, dont la charge électrique totale Q est uniformément répartie dans le volume de la sphère.

- 1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé par cette sphère en tout M de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
- 2) Dédurre du calcul précédent le potentiel électrique V créé par la sphère en tout point M de l'espace.

Exercice 4

Les niveaux d'énergie E_n de l'atome d'hydrogène ont des valeurs discrètes données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dans cette expression, n est un entier tel que $n \geq 1$ et $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- 1) Déterminer le niveau fondamental de l'atome
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie d'un niveau excité
- 3) Quel est le niveau d'énergie de l'atome ionisé ?
- 4) Quelle énergie faut-il fournir à l'atome pour l'ioniser depuis son niveau fondamental ?
- 5) L'atome étant au niveau fondamental, il absorbe un photon pour passer à un niveau excité ; déterminer l'expression de la fréquence du photon absorbé.

Physique 2010

Exercice 1 :

On considère un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos L, reliant deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 . Le système est en équilibre sur un plan horizontal. A l'instant $t = 0$, on rapproche les points matériels de sorte que $M_1 M_2 = \frac{L}{2}$, et on les lâche sans vitesse initiale. Le mouvement sur le plan horizontal s'effectue sans frottement.

1. Soit O un point fixe du plan. Montrer que le centre de masse G du système est immobile.
2. On pose $\overrightarrow{GM_1} = x_1(t)\vec{l}$ et $\overrightarrow{GM_2} = x_2(t)\vec{l}$, où $\vec{l}$ est un vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Trouver la relation entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
3. Exprimer en fonction de $x_1(t)$, $x_2(t)$, k et L, la force exercée par le ressort sur le point matériel M_2 .

4. Trouver l'équation différentielle donnant $x_2(t)$ et la résoudre avec les conditions initiales données. Quelle est la pulsation propre ω du système ?
5. En déduire l'équation horaire $x_1(t)$.
6. Calculer l'énergie cinétique $E_c(t)$.
7. On pose $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Montrer que l'énergie potentielle $E_p(t)$ du système peut se mettre sous la forme $E_p = \frac{1}{2}k(x - L)^2 + C$, où C est une constante que l'on précisera. En déduire l'énergie mécanique E du système.

Exercice 2 :

Un gaz réel a pour coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} - \frac{b}{VT}$ et pour le coefficient de compression isotherme $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} - \frac{b}{PV}$ avec $b = 5.10^{-5} m^3/mole$. De plus l'énergie interne de ce gaz ne dépend que de la température, $U = cT$ avec $c = 28,2$ Joules/degré/mole.

1. On fait subir à une mole de ce gaz à partir d'un état ($P_1 = 100atm$; $V_1 = 0,5litre$; $T_1 = 545K$), une détente isotherme qui l'amène à l'état ($P'_1 = 10atm$; V'_1).
 - a) Calculer le volume finale V'_1 .
 - b) Quel est le travail échangé au cours de cette transformation ? préciser s'il a été reçu ou fourni par le gaz.
 - c) Quelle est la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur ?
2. Le gaz pris à l'état (P'_1 ; V'_1 ; T_1) est ensuite détendu de façon adiabatique jusqu'à l'état final (P_2 ; $V_2 = 20litres$; T_2).
 - a) Etablir l'équation d'état du gaz, en y faisant figurer la constante R des gaz parfaits.
 - b) Déterminer la température T_2 à la fin de la détente.
 - c) Calculer le travail échangé dans cette transformation. On prendra $R = 8,32$ J/mol/k.
 - d) Représenter les transformations subies par le gaz dans le diagramme de Clapeyron.