H Prépa

Maths

2e année
MP-MP*

TOUT LE PROGRAMME EN UN SEUL VOLUME

- Le cours
- De nombreux exercices
- Tous les corrigés

HACHETTE Supérieur

Mensa
ACADEMY

H Prépa

Maths

2e année MP-MP*

Christine FEUILLET
Professeur en classes préparatoires au lycée Aux Lazaristes à Lyon

Isabelle SELON
Professeur en classes préparatoires
au Centre International de Valbonne à Nice

HACHETTE Supérieur

Crédits photographiques

Toutes les photographies de cet ouvrage proviennent de la photothèque HACHETTE LIVRE.

Mensa ACADEMY

Composition, mise en page et schémas : Publilog
Maquette intérieure : SG Création et Pascal Plottier
Maquette de couverture : Alain Vambacas

© HACHETTE LIVRE 2005, 43 quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15
www.hachette-education.com
ISBN : 978-2-01-181904-8
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Avant-propos

L'objectif premier de cet ouvrage est la réussite aux concours et aux examens.

Pour cela, nous avons tenté de rendre intelligible et attrayante une petite partie des mathématiques : celle du programme.

Dans cette optique, nous souhaitons que ce livre soit un outil de travail efficace et adapté aux besoins des enseignants et des étudiants de tout niveau.

Le cours est agrémenté de nombreux **Exemples** et **Applications**.

Les **Exercices** aident l'étudiant à tester sa compréhension du cours, lui permettent d'approfondir sa connaissance des notions exposées... et de préparer les oraux des concours.

Les **Exercices résolus** et **TD** sont plus axés vers les écrits des concours.

L'algorithmique et le calcul formel font partie du programme des concours.

De nombreux exercices prennent en compte cette exigence ainsi que des **TD d'Algorithmique** entièrement rédigés.

Les auteurs

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Mensa
ACADEMY

Sommaire

1 NORMES ET DISTANCES, SUITES D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ 7

2 TOPOLOGIE, ÉTUDE LOCALE DES APPLICATIONS 42

3 COMPLÉMENTS DE TOPOLOGIE 75

4 SÉRIES D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ 119

5 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS 177

6 DÉRIVATION, INTÉGRATION DES FONCTIONS VECTORIELLES 211

7 LE LIEN ENTRE DÉRIVATION ET INTÉGRATION 257

8 FONCTIONS INTÉGRABLES 292

9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES 334

10 SÉRIES ENTIÈRES 369

11 SÉRIES DE FOURIER 391

12 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES 414

13 COMPLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL 467

14 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES 499

15 COURBES ET SURFACES 517

16 STRUCTURES ALGÈBRIQUES USUELLES 549

17 FAMILLES DE VECTEURS. SOMME DE SOUS-ESPACES 602

18 DUALITÉ. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES 631

19 SOUS-ESPACES STABLES, ÉLÉMENTS PROPRES 663

20 RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES EN DIMENSION FINIE 692

21 ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS 728

22 ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS 763

Mensa ACADEMY

23 ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME 795

24 ESPACES PRÉHILBERTIENS COMPLEXES, ESPACES HERMITIENS 834

TD INDICATIONS ET RÉPONSES 857

INDICATIONS ET RÉPONSES 885

INDEX 1040

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Normes et distances, suites d'un espace vectoriel normé

1

Introduction

Le terme « limite » apparaît, en 1735, dans un livre du mathématicien anglais Robins. Mais la notion de limite, d'abord strictement géométrique, ne s'est clarifiée que lentement. En 1800, Gauss en donne une définition précise dans le cas d'une suite réelle. C'est à Weierstrass, environ un demi-siècle plus tard, que nous devons la présentation à l'aide des « epsilon ». Au XXe siècle, l'étude des espaces fonctionnels conduit à élargir cette notion hors du cadre purement numérique. En 1906, Fréchet introduit la notion d'espace métrique et Banach fonde, en 1920, dans sa thèse, la théorie des espaces vectoriels normés, cas particuliers d'espaces métriques. Cet extrait de son introduction nous montre une démarche fréquente en mathématiques :

« L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui. »

OBJECTIFS

- Norme dans un espace vectoriel.
- Produit scalaire complexe.
- Boules d'un espace métrique.
- Applications bornées, applications lipschitziennes.
- Suites convergentes.
- Normes équivalentes.
- Valeurs d'adhérence d'une suite.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Norme

1.1. Définition

Une application N du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes est appelée **norme** sur E :

1. $\forall x \in E \qquad N(x) \geqslant 0.$

2. $\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$

3. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

4. $\forall (x, y) \in E \times E \qquad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$

Un espace vectoriel E muni d'une norme N est appelé **espace vectoriel normé** et noté (E, N).

Une norme sur E vérifie donc immédiatement la propriété (*doc.* 1) :

$$\forall (x, y) \in E \times E \qquad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Démonstration

L'inégalité découle de :

$$N(y) \leqslant N(x) + N(x - y) \quad \text{et} \quad N(x) \leqslant N(x - y) + N(y).$$

Théorème 1

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de N à F est une norme sur F, appelée **norme induite** sur F.

Un vecteur x de (E, N) est dit **unitaire** si $N(x) = 1$. Si x est un vecteur non nul de E, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire. Il est appelé **vecteur unitaire associé** à x.

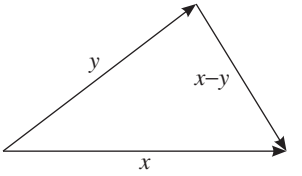
► *Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.*

Rapport CCP, 2002

« Le manque de rigueur dans l'appréhension des questions et dans la rédaction des solutions est fréquent : ceci apparaît de manière flagrante dans la vérification des propriétés de définition d'une norme. »

On utilise aussi fréquemment la notation $\| \ \|$ pour une norme sur E.

Cette inégalité et l'inégalité 4. ci-dessus généralisent la propriété bien connue :
Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés et supérieure à leur différence.



Doc. 1.

Application 1

Normes sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}$

Déterminer toutes les normes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

1) La fonction valeur absolue (ou module, dans $\mathbb{C}$) est une norme sur $\mathbb{K}$.

2) Considérons une norme N sur $\mathbb{K}$.

$\forall x \in \mathbb{K} \qquad N(x) = N(x.1) = |x| N(1) = c|x|$ en notant $c = N(1) > 0$.

Réciproquement, si c est un réel strictement positif, alors il est facile de prouver que l'application définie par :

$$N(x) = c|x|,$$

est une norme sur $\mathbb{K}$.

Les normes de $\mathbb{K}$ sont donc les multiples, par un scalaire strictement positif, de la fonction valeur absolue, (ou module)

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.2. Exemples de normes

1.2.1 Des normes sur $\mathbb{K}^n$

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$ de E, on pose :

$$N_1(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad N_\infty(X) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

Les deux applications N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vous avez vu en première année que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur E.

Vous avez défini la norme associée à ce produit scalaire en posant :

$$N_2(x) = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

Cette norme est dite norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Nous verrons que ceci peut s'étendre à $\mathbb{C}^n$.

1.2.2 Des normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

a et b sont deux réels fixés et $a < b$.

L'application : $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

La norme associée est notée N_2 et définie de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f \longmapsto \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Mais $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ peut aussi être muni de la norme N_1 définie de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f \longmapsto \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés 1, 3, 4 de la définition d'une norme s'établissent sans peine.

En ce qui concerne la deuxième propriété, si f est une fonction de E telle que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, la fonction $|f|$ est continue et positive, on peut donc en déduire que $|f| = 0$, puis que $f = 0$.

De plus, on pose, pour tout f de E, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \ ; \ t \in [a, b]\}$.

Cette définition est justifiée par le fait qu'une fonction continue sur un segment, à valeurs réelles ou complexes, est bornée.

L'application $\| \ \|_\infty$, définie sur E, vérifie les propriétés 1 et 2 d'une norme. Montrons qu'elle satisfait aussi les propriétés 3 et 4.

Soit f un élément de E et λ un scalaire. Alors :

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(t)|;\ t \in [a, b]\} = \sup\{|\lambda| |f(t)| \ ; \ t \in [a, b]\} = |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

(voir une justification plus générale dans la preuve du théorème 9).

Au VIe siècle avant J.-C., dans les cités grecques d'Asie Mineure apparaît une forme de pensée nouvelle. Dans un effort d'explication du monde, hors des mythes et de la religion, la science grecque se construit, nourrie des connaissances du monde antique.

Ainsi Thalès (environ 640-546 avant J.-C.), commerçant habile et grand voyageur, consacra la fin de sa vie à l'étude de la philosophie, de l'astronomie et des mathématiques.

Trois siècles plus tard, Euclide d'Alexandrie (environ 365-300) introduit les notions de définitions, axiomes, postulats et propositions. Son livre « les Éléments » est le premier traité logique de mathématiques. Il rassemble les résultats mathématiques de son temps, les structure en une science déductive et apporte nombre de découvertes nouvelles.

La géométrie euclidienne est la géométrie fondée sur les axiomes et postulats introduits par Euclide.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les normes de fonctions prêtent souvent à confusion, l'écriture $\|f(x)\|_\infty$ est souvent preuve que le candidat ne comprend pas bien ce qu'il fait. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit f et g deux éléments de E. On sait que :

$$\forall x \in [a,b] \quad (|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Par conséquent : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

► *Pour s'entraîner : ex. 3.*

1.3. Produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés

Théorème 2

Soit $(E_i, N_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de p espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et E l'espace vectoriel produit.

Alors l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \longmapsto N(x) = \max_{i\in[\![1,p]\!]} N_i(x_i)$$

est une norme sur E appelée **norme produit**.

Remarque : La norme produit n'est pas la seule norme sur un espace produit.

Les deux applications suivantes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ de E dans $\mathbb{R}$ sont également des normes sur E.

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \longmapsto \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} N_j(x_j)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \longmapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{p} \left(N_j(x_j)\right)^2\right)^{1/2}$$

Exemple : Nous avons déjà rencontré l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni des normes N_1, N_2 et N_∞.

Seul $(\mathbb{R}^2, N_\infty)$ est un espace vectoriel produit. Il est l'espace vectoriel produit de $(\mathbb{R}, |\ |)$ par lui-même.

2 Produit scalaire complexe

Généralisons la notion de produit scalaire à des espaces vectoriels complexes.

2.1. Définition et exemples

E étant un espace vectoriel complexe, un **produit scalaire complexe** sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ sesquilinéaire, hermitienne, définie positive, c'est-à-dire telle que :

1. $\forall (x,y) \in E^2 \qquad \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$. (hermitienne)

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2. $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$.

3. $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$ et $(\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0)$. (définie positive)

Un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**.

Une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et linéaire par rapport à la seconde variable possède la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \qquad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \overline{\lambda} \varphi(x_1, y) + \overline{\mu} \varphi(x_2, y).$$

Elle est dite semi-linéaire par rapport à la première variable.

Semi-linéaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la seconde, elle est qualifiée de sesquilinéaire.

Exemples :

■ Lorsque $E = \mathbb{C}^n$, l'application φ définie par :

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

est le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.

■ Dans le cadre du chapitre sur les séries de Fourier, nous étudierons de manière approfondie l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Sur cet espace, l'application suivante de $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$

$$(f, g) \longmapsto (f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Démonstration

Montrons que cette application est définie positive. Les autres axiomes sont faciles à vérifier.

Si f est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors $(f \mid f) \geqslant 0$.

De plus, soit f telle que : $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0$. La fonction $|f|^2$ est continue et positive sur $[0, 2\pi]$, donc $f = 0$.

La continuité est essentielle.

► *Pour s'entraîner : ex. 4.*

2.2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

L'outil essentiel pour pouvoir définir une norme à l'aide d'un produit est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette inégalité est aussi un outil fondamental et très utilisé pour construire des inégalités.

Théorème 3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x, x) \varphi(y, y).$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée :

$x = 0_E$ ou $(\exists \lambda \in \mathbb{C})(y = \lambda x)$.

Augustin-Louis Cauchy *(1789-1857), mathématicien français, catholique et légitimiste convaincu, a posé les fondements de l'Analyse moderne dans son « Cours d'analyse de l'École royale polytechnique », en 1821. Son œuvre englobe toutes les branches des mathématiques.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Fixons (x, y) dans E^2.

Si $\varphi(x, y) = 0$, l'inégalité est vérifiée.

Si $\varphi(x, y) \neq 0$, alors $y \neq 0_E$ et d'après la définition :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \varphi(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0.$$

Or : $\varphi(x + \lambda y, x + \lambda y) = \varphi(x, x) + \overline{\lambda}\varphi(y, x) + \lambda\varphi(x, y) + \lambda\overline{\lambda}\varphi(y, y)$

Donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad 0 \leqslant \varphi(x, x) + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + |\lambda|^2\varphi(y, y) \qquad (*)$$

Or, $\varphi(x, y)$ est un complexe non nul, donc il existe θ réel tel que :

$$\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Donc, en utilisant $(*)$ avec $\lambda = t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ où t est un réel, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant \varphi(x, x) + 2t|\varphi(x, y)| + t^2\varphi(y, y) \qquad (**)$$

Nous avons un trinôme du second degré en t à coefficients réels et de signe constant sur $\mathbb{R}$.

Donc :

$$\Delta' = |\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x)\varphi(y, y) \leqslant 0.$$

• Supposons que :

$$|\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x)\varphi(y, y) = 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0.$$

Le polynôme, $\varphi(x, x)+2t|\varphi(x, y)|+t^2\varphi(y, y)$, du second degré en t, admet une racine double t_0.

On pose $\lambda_0 = t_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. On obtient : $\varphi(x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y) = 0$ puis $x + \lambda_0 y = 0_E$.

La réciproque est triviale.

Hermann Schwarz *(1843-1921), mathématicien allemand, élève de Weierstrass, lui succède à l'université de Berlin en 1892. Il publie, pour le 70e anniversaire de Weierstrass, un important travail dans lequel il généralise aux intégrales de fonctions complexes, l'inégalité, démontrée en 1821 par Cauchy pour des* ***n****-uplets de réels.*

Application 2

Inégalités portant sur des intégrales

Les fonctions f et g étant continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, montrer les inégalités :

1) $\left|\int_0^1 \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 |g|^2(t)\,\mathrm{d}t.$

2) $\left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^1 |g|^2(t)\,\mathrm{d}t.$

1) L'application φ définie par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}))^2$$
$$\left|\int_0^1 \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 |g|^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) En choisissant pour fonction f la fonction constante, $x \longmapsto 1$, on obtient alors :

$$\forall g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^1 |g|^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.3. La norme associée

Théorème 4
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors la fonction $\| \ \|_2$ de E dans $\mathbb{R}^+$, définie par : $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x,x)}$, est une norme sur E, dite **norme associée** au produit scalaire.

Démonstration
De même que dans le cas réel, seule l'inégalité triangulaire demande un peu de travail.

- Fixons x et y dans E.

$$\|x+y\|_2^2 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$$
$$= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi(x,y)).$$

Or, si z est dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ z \leqslant |z|$, donc :

$$\mathrm{Re}\ (\varphi(x,y)) \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2. \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

Et nous en déduisons l'inégalité de Minkoswki :

$$\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Corollaire 4.1 (Inégalité de Minkoswki)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ.
Alors la norme associée vérifie l'inégalité :

$$\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est positivement liée :

$$x = 0_E \quad \text{ou} \quad (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+)(y = \lambda x).$$

Pour la démonstration voir l'exercice 5.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.*

Exemples :

- Sur $\mathbb{C}^n$, la norme associée au produit scalaire canonique est :

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}.$$

- La fonction $\| \ \|_2$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f \longmapsto \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t}$$

est une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 5

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel préhilbertien réel ou complexe.

Pour tout vecteur x de E, on a :

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup\{|(x \mid y)| \,;\, \|y\| \leqslant 1\}\\ &= \sup\{|(x \mid y)| \,;\, \|y\| = 1\}\\ &= \sup\left\{\frac{|(x \mid y)|}{\|y\|} \,;\, y \neq 0_E\right\}.\end{aligned}$$

Démonstration

Soit x un vecteur fixé de E non nul. On vérifie :

$$\left\{\frac{|(x \mid z)|}{\|z\|} \,;\, z \in E - \{0_E\}\right\} = \{|(x \mid y)| \,;\, \|y\| = 1\} \subset \{|(x \mid y)| \,;\, \|y\| \leqslant 1\}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer que ces ensembles non vides de $\mathbb{R}$ sont majorés par $\|x\|$. Ils admettent une borne supérieure atteinte pour $z = x$ ou $y = \dfrac{x}{\|x\|}$. Le cas $x = 0_E$ est trivial.

2.4. Autres exemples de normes

Exemples :

■ $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ pour $(a < b)$ est muni des normes :

$$N_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}\,t \,;$$

$$N_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f^2(t)|\,\mathrm{d}\,t} \,;$$

$$\|\ \|_\infty : f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \,;\, t \in [a,b]\}.$$

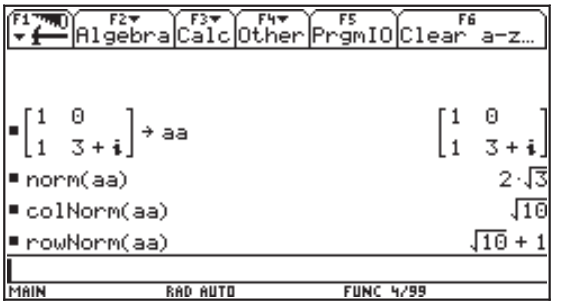
La norme N_2 découle du produit scalaire sur E défini par :

$$(f\,|\,g) = \int_a^b \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

■ La calculatrice TI propose dans le menu « Maths, matrix, normes »

$\left(\boxed{2^{nd}}, \boxed{5}, \boxed{4}, \boxed{B}\right)$, trois normes sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, des matrices réelles ou complexes. En notant $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]}$ ces normes sont :

$norm(A) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}A)}$, norme associée au produit scalaire $(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B)$ défini sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$colnorm(A) = \max_{j\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)$$

$$rownorm(A) = \max_{i\in[\![1,m]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Vous vérifierez que les fonctions *colnorm* et *rownorm* définissent bien des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que, pour tout (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$:

rownorm (AB) $\leqslant$ *rownorm(A) rownorm(B)*

colnorm (AB) $\leqslant$ *colnorm (A) colnorm(B).*

En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{n^2}$, la fonction *norm* correspond aussi à la norme N_2 de $\mathbb{K}^{n^2}$.

■ Normes sur $\mathbb{K}[X]$.

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n : $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

On pose :

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n}|a_k| \; ; N_2(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2} \; ; N_\infty(P) = \max_{i\in[\![0,n]\!]}|a_i|.$$

N_1, N_2, N_∞ sont trois normes sur $\mathbb{K}[X]$. N_2 découle d'un produit scalaire.

Mensa ACADEMY

3 Espace métrique

3.1. Distance

G étant un ensemble non vide, une **distance** sur G est une application d de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) \geqslant 0$

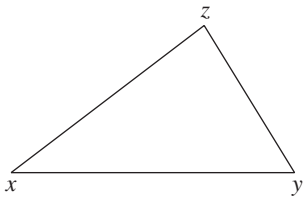
2. $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) = d(y, x)$

4. $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G \quad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Le couple (G, d) est un **espace métrique** .

• L'ensemble G n'est pas nécessairement un espace vectoriel.
• La dernière propriété est appelée **inégalité triangulaire**.



Doc. 2.

3.2. Distance associée à une norme

Théorème 6

Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. L'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E. Elle est appelée **distance associée à la norme** $\|\ \|$ sur E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$. Notons $x = (x_1, y_1)$ et $y = (x_2, y_2)$. La distance associée à :

• la norme N_1 est : $d_1(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

• la norme N_2 est : $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (distance euclidienne) ;

• la norme N_∞ est : $d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

L'intérêt de la notion de distance provient du fait qu'aucune structure algébrique n'est nécessaire pour parler d'une distance sur un ensemble, alors que, pour parler d'une norme, il faut un espace vectoriel.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

3.3. Distance induite sur une partie d'un espace métrique

Si A est une partie non vide de l'espace métrique (G, d), la restriction de d à $A \times A$ est une distance sur A appelée **distance induite** sur A.

3.4. Distance de deux parties d'un espace métrique

Soit A et B deux parties non vides de l'espace métrique (G, d). L'ensemble $\{d(x, y) \ ; \ x \in A, y \in B\}$ est une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$. Il admet une borne inférieure appelée distance de A à B, et notée $d(A, B) : d(A, B) = \inf\{d(x, y); x \in A, y \in B\}$.

Lorsque $B = \{x\}$ et A est une partie non vide de (G, d), la distance de A à B est appelée distance de x à A et notée $d(x, A)$.

4 Boules d'un espace métrique

Dans ce paragraphe, (G, d) est un espace métrique.

4.1. Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Soit a un point de G et r un réel positif, la **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l'ensemble noté $B(a, r)$ ou $BO(a, r)$ et défini par $BO(a, r) = \{y \in G \ ; \ d(a, y) < r\}$

La **boule fermée** de centre a et de rayon r est notée $BF(a, r)$ et définie par :

$$BF(a, r) = \{y \in G \ ; \ d(a, y) \leqslant r\}.$$

La **sphère** de centre a et de rayon r est notée $S(a, r)$ et définie par :

$$S(a, r) = \{y \in G \ ; \ d(a, y) = r\}.$$

En particulier, si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé, la sphère $S(0_E, 1)$ est appelée **sphère unité**, la boule $BO(0_E, 1)$ **boule unité ouverte** et la boule $BF(0_E, 1)$, **boule unité fermée**.

Remarque : Tout espace vectoriel normé est donc un espace métrique. Toutefois, la réciproque est fausse.
Considérons E, E' deux espaces vectoriels de dimension finie. La relation :

$$\text{rg}(f + g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

établie en algèbre permet de montrer que l'application :

$$d : \mathcal{L}(E, E'), \times \mathcal{L}(E, E'), \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longmapsto \text{rg}(f - g)$$

est une distance sur $\mathcal{L}(E, E')$.
Si cette distance était associée à une norme, N, on aurait :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, E'),$$

$$N(f) = d(0, f) = \text{rg}(f).$$

Et donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall f \in \mathcal{L}(E, E'),$$

$$N(\lambda f) = \text{rg}(\lambda f) = |\lambda| \text{rg}(f).$$

Ce qui est faux.

Ceci ne définit pas une distance sur $\mathcal{P}(E) - \varnothing$. Vous vérifierez que les propriétés **2** et **4** d'une distance ne sont pas satisfaites, en général.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

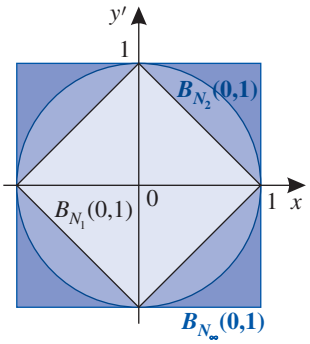
Exemples :

- $E = \mathbb{R}$. $B(a,r) =]a-r, a+r[$ pour N_1, N_2, N_∞.
- $E = \mathbb{R}^2$. $a = 0_E, r = 1$.

E est muni des normes :

$$N_1(x,y) = |x| + |y|; \quad N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}; \quad N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|).$$

Les boules $B_{N_1}(0,1), B_{N_2}(0,1), B_{N_\infty}(0,1)$ ont été représentées (*doc.* 3).
On constate que les boules obtenues dépendent de la norme choisie.



Doc. 3.

Théorème 7

Soit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ l'espace vectoriel produit des espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$, muni de la norme produit N.

Alors les boules de (E,N) sont les produits de boules des espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de même rayon.

Toute boule ouverte ou fermée de E est telle que :

$$B(a,r) = B_1(a_1,r) \times \cdots \times B_p(a_p,r).$$

► *Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.*

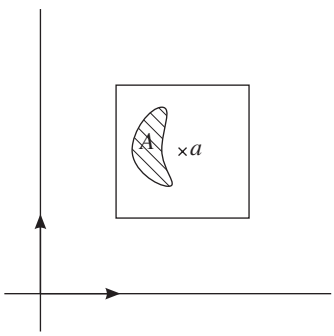
4.2. Parties bornées d'un espace métrique

Théorème 8

A étant une partie de l'espace métrique (G,d), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe un réel M tel que : $\forall (x,y) \in A^2 \quad d(x,y) \leqslant M$.
- La partie A est incluse dans une boule de l'espace métrique (G,d).
- Pour tout a de G, il existe une boule de centre a contenant A.

Une partie A de l'espace métrique (G,d) est dite **bornée** si elle vérifie l'une de ces propriétés (*doc.* 4).



Doc. 4.

Corollaire 8.1

Une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est bornée si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in E \qquad \|x\| \leqslant K.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 10.*

4.3. Applications bornées

X étant un ensemble non vide, (G,d) un espace métrique et f une application de X dans (G,d), f est dite **bornée** si l'ensemble $\{f(x); x \in X\}$ est une partie bornée de (G,d).

Remarques :

1) Toute partie d'une partie bornée est bornée.

2) Toute union finie de parties bornées est une partie bornée.

3) Toute partie finie est bornée.

4) Dans un espace vectoriel normé produit,

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$$

muni de la norme produit, tout produit de parties bornées des E_i, est une partie bornée de E. Mais la réciproque est fausse.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On définit alors l'ensemble $\mathcal{B}(X, G)$ des applications bornées de X dans G.

En particulier, lorsque l'espace métrique est un espace vectoriel normé, $(F, \|\ \|)$, l'application f de X dans F est bornée si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \qquad \|f(x)\| \leqslant K.$$

Le théorème suivant nous fournit un outil essentiel.

Théorème 9

X étant un ensemble non vide et $(F, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, alors :

- $\mathcal{B}(X, F)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, F)$.
- L'application $\|\ \|_\infty$ de $\mathcal{B}(X, F)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, F)$.

Démonstration

1. La structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, F)$ découle immédiatement de :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{F}(X, F))^2 \quad (f + g)(X) \subset f(X) + g(X).$$

2. • $\forall f \in \mathcal{B}(X, F) \qquad \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0.$

• Soit λ dans $\mathbb{K}$ et f dans $\mathcal{B}(X, F)$, alors :

$$\forall x \in X \qquad \|(\lambda f)(x)\| = |\lambda| \, \|f(x)\| \leqslant |\lambda| \, \|f\|_\infty.$$

Donc (λf) est bornée et $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \, \|f\|_\infty$.

Si $\lambda \neq 0$, cette inégalité appliquée à $\dfrac{1}{\lambda}$ et à la fonction λf donne : $\|\lambda f\|_\infty \geqslant |\lambda| \, \|f\|_\infty$

Concluez.

• Vérifiez que, si f et g sont deux applications bornées de X dans F, alors $(f + g)$ est bornée et :

$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

5 Applications k-lipschitziennes

5.1. Définitions

(E_1, d_1) et (E_2, d_2) étant deux espaces métriques, une application f de E_1 dans E_2 est dite **lipschitzienne** sur une partie X de E_1 si :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d_2(f(x), f(y)) \leqslant k d_1(x, y).$$

Remarques :

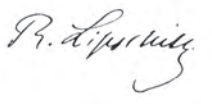
• Le réel k de la définition n'est pas unique. Si k convient, tout réel supérieur à k convient également.

k est nécessairement positif. Si $k = 0$, l'application f est constante. Et, en particulier, on peut supposer $k > 0$.

• On dit aussi que f est ***k*-lipschitzienne** (ou lipschitzienne de rapport k).

Rapport CCP, 2003

« Les candidats éprouvent beaucoup de difficultés pour prouver qu'une fonction est non bornée ; on lit beaucoup d'affirmations fausses :
– Le produit d'une fonction bornée et d'une fonction non bornée sur l'intervalle I est une fonction non bornée sur I. »



Rudolph Lipschitz (1832-1903), mathématicien allemand. Son travail sur les équations différentielles le conduit à introduire la notion de fonctions que nous appelons lipschitziennes.

Rapport Mines, 1997

« La notion d'application lipschitzienne n'est pas assimilée. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Une **isométrie** est une application f de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2) telle que :

$$\forall (x, y) \in E_1^2 \quad d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Exemples importants :

■ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, de dérivée bornée.

$$\exists M \quad \forall x \in I \quad |g'(x)| \leqslant M.$$

L'inégalité des accroissements finis nous donne :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |g(x) - g(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Réciproquement, si pour tout couple (x, y) de réels distincts, on a :

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leqslant M.$$

Puisque g est dérivable, on peut passer à la limite quand y tend vers x.
On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |g'(x)| \leqslant M.$$

Une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I si et seulement si sa dérivée est bornée.

Mensa ACADEMY

En particulier, si I est un segment de $\mathbb{R}$, toute application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I.

■ Étant donné un espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$, on a établi que :

$$\forall (x, y) \in E \qquad |\|x\|_E - \|y\|_E| \leqslant \|x - y\|_E.$$

Ceci permet de conclure que $\| \|_E$ est une application lipschitzienne de $(E, \| \|_E)$ dans $\mathbb{R}$.

■ Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E.
L'application f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

En effet : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Mais : $d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z)$.

Donc : $\forall z \in A \quad d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Puisque $d(x, A) - d(x, y)$ est un minorant de $\{d(y, z)\,;\, z \in A\}$, on a :

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A).$$

De même, en permutant x et y, on obtient : $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$.

Finalement : $\forall (x, y) \in E^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2. Deux résultats importants

Théorème 10
Soit $(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p, N)$ un espace vectoriel normé produit.
Alors, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, l'application coordonnée p_j de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans E_j
définie par $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \longmapsto x_j$ est 1-lipschitzienne.

N est la norme produit.

Théorème 11 (Composition d'applications lipschitziennes)
$(E_1, d_1), (E_2, d_2), (E_3, d_3)$ étant trois espaces métriques, si f une application lipschitzienne de E_1 dans E_2 et g une application lipschitzienne de E_2 dans E_3, alors $g \circ f$ est une application lipschitzienne de E_1 dans E_3.

► *Pour s'entraîner : ex. 11.*

Application 3

Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(d'après Centrale 1996, Math 1)

On désigne par f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) *On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouver que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f' est bornée sur $\mathbb{R}$.*

2) *On suppose que f et g sont lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction produit fg est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

3) *Le produit de deux fonctions lipschitziennes est-il une fonction lipschitzienne ?*

4) *On suppose que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

5) *On suppose que f vérifie la propriété suivante :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (0 \leqslant x - y \leqslant 1) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|).$$

Prouver que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

1) Voir l'exemple 1 du paragraphe 5.1.

2) Supposons que f et g soient respectivement k-lipschitzienne et l-lipschitzienne et bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour tout couple (x, y) de réels, on sait que :

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y)).$$

On en déduit que :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leqslant (\|f\|_\infty l + \|g\|_\infty k)|x - y|.$$

Donc fg est lipschitzienne.

3) Considérons le cas où $f = g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Les fonctions f et g sont 1-lipschitziennes. Leur produit est la fonction $(x \longmapsto x^2)$ qui est dérivable et de dérivée non bornée. Donc fg n'est pas lipschitzienne.

4) Supposons que f soit A-lipschitzienne. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En prenant $y = 0$, on trouve :

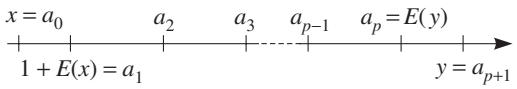
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant A|x| + |f(0)|.$$

5) Fixons x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. Pour la rédaction, supposons $x < y$.

- Si $y - x \leqslant 1$, on sait déjà que :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

- Si $y - x > 1$, l'ensemble des entiers compris entre x et y est non vide. Notons-les dans l'ordre croissant $a_1, \ldots, a_p$ et posons $a_0 = x$ et $a_{p+1} = y$.



Doc. 5.

On peut écrire :

$$|f(y) - f(x)| = |\sum_{i=0}^{p} (f(a_{i+1}) - f(a_i))| \leqslant \sum_{i=0}^{p} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Par construction, $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$, donc :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} M|a_{i+1} - a_i| = M|y - x|.$$

6 Suites convergentes d'un espace vectoriel normé

6.1. L'espace vectoriel normé des suites bornées

Une application u de $\mathbb{N}$ dans E : $n \longmapsto u_n$, est appelée **suite d'éléments** de E. On la note alors : u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement (u_n).

L'ensemble des suites d'éléments de E est un espace vectoriel noté $E^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$.

Une **suite** (u_n) d'éléments de E est dite **bornée** si $\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E. L'ensemble $l^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, normé par l'application N_∞ définie par :

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

Rapport Mines Albi, 1997
« On rencontre des majorants dépendants de l'entier naturel n. »

Rapport Centrale, 2003
« La notion de convergence relativement à une norme n'est pas acquise. »

6.2. Suites convergentes, suites divergentes

Une **suite** (u_n) d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, est dite **convergente** dans $(E, \| \ \|)$ (ou encore converge pour la norme $\| \ \|$) si :

$$\exists l \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon)$$

L'ordre des quantificateurs est fondamental.

Une **suite** (u_n) d'éléments de l'espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, qui ne converge pas, est dite **divergente**. Ceci peut se traduire par :

$$\forall l \in E \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad (p \geqslant N \text{ et } \|u_p - l\| > \varepsilon)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 12

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$. Alors l'élément l de E tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$ est unique.

Il est appelé la **limite de la suite** (u_n) et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

La suite (u_n) d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow u_n \in BF(l, \varepsilon))$$

Remarques :

Montrer que la suite (u_n) converge vers l équivaut à montrer que la suite réelle $(\|u_n - l\|)$ tend vers 0.

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Considérons la suite (f_n) définie par : $f_n(t) = t^n$.

Alors $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n+1}$.

La suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle relativement à $\|\ \|_1$.

Mais elle ne converge pas vers la fonction nulle pour $\|\ \|_\infty$ car $\|f_n\|_\infty = 1$.

La notion de convergence dépend de la norme considérée sur l'espace vectoriel.

Rapport X, ENS PSI 2000

« Nous avons aussi relevé quelques erreurs : confusion entre une suite qui ne converge pas et une suite qui tend vers l'infini. »

Rapport Mines, 1997

« La détermination de limites simples est parfois laborieuse, quand elle ne conduit pas à des affirmations proprement monstrueuses (la limite de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *est donnée comme égale à* 1 *; si* $\sqrt[n]{u_n}$ *tend vers* 1, *on en conclut que* u_n *tend vers* 1^n *(sic)). »*

Rapport CCP, 2003

« Certains candidats ont affirmé que $d(f, E_n) = 0$ *car " *E_n *tendait vers* E *" sans se soucier de donner un sens mathématique à cette dernière assertion. »*

Mensa ACADEMY

Application 4

Une suite de Ramanujan

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f(x) = x(x+2)$$

et la suite (u_n) *définie par :*

$$u_1 = f(1), u_2 = \sqrt{1+f(2)}, u_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+f(3)}}$$

et, pour tout $n \geqslant 3$ *:*

$$u_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+f(n)}}}}}.$$

Montrer que la suite (u_n) *converge et donner sa limite.*

Rapport Centrale, 2001

« L'étude classique d'une suite numérique est rarement conduite de façon efficace : est-ce parce qu'il s'agit d'une notion étudiée en première année ? »

Calculons les premiers termes :

$$u_1 = u_2 = 3 = u_3.$$

La suite serait-elle constante ?

Rapport Mines, 1997

« Quand on étudie une suite, il peut être utile d'observer le comportement des premiers termes. »

Vous vérifierez que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f(x) = x\sqrt{1+f(x+1)}.$$

Pour tout $n \geqslant 3$:

$$\sqrt{1+f(n)} = \sqrt{1+n\sqrt{1+f(n+1)}}.$$

La suite (u_n) est constante, égale à 3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Ramanujan *(1887-1920), mathématicien indien, autodidacte, est un des grands mathématiciens du XXe siècle. Son extraordinaire intuition lui fit découvrir de nombreuses formules mathématiques. Beaucoup restent à démontrer. Citons :*

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\frac{2}{\pi}$$

dont la justification n'est pas évidente.

► *Pour s'entraîner : ex. 12.*

6.3. Propriétés des suites convergentes

Deux théorèmes généralisent les propriétés des suites convergentes réelles ou complexes. La démonstration de ces théorèmes ne présente aucune difficulté.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Enfin dans les justifications, mieux vaut ne pas invoquer le mathématicien "Desgendarmes", dont l'existence est obscure. »

Théorème 13

Toute suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, est bornée.

Théorème 14

L'ensemble des suites convergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, est un sous-espace vectoriel de $l^\infty(E)$ et l'application, qui, à une suite convergente, associe sa limite, est linéaire. Autrement dit, si les suites (u_n) et (v_n) convergent :

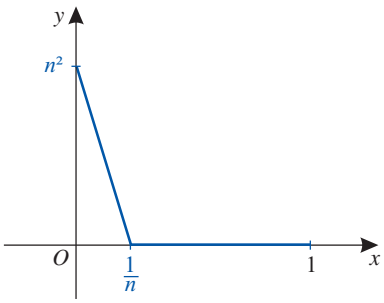
$$\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2 \quad \lim_{n\to+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\lim_{n\to+\infty}u_n+\beta\lim_{n\to+\infty}v_n.$$

Exemple :

$E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme : $\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Considérons, dans E, la suite (f_n) définie par :

$$f_n(x)=\begin{cases}-n^3x+n^2 \text{ si } x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\\ 0 \text{ si } x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]\end{cases}.$$



Doc. 6.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \|f_n\|_1=\int_0^1|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{n}}(-n^3t+n^2)\,\mathrm{d}t=\frac{n}{2}.$$

La suite (f_n) n'est pas bornée dans $(E, \|\ \|_1)$, donc elle diverge.

6.4. Convergence des suites d'un sous-espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. L'espace vectoriel F, muni de la norme induite par $\|\ \|$, est un espace vectoriel normé, $(F, \|\ \|)$. Si (u_n) est une suite d'éléments de F, cette suite

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

est dite convergente dans F si elle converge dans l'espace vectoriel normé $(F, \| \|)$, c'est-à-dire si elle converge dans $(E, \| \|)$ et si sa limite appartient à F. Dans le cas contraire, elle sera dite divergente dans F.

Exemple :

$$E = \mathbb{K}[X], F = \{P \in \mathbb{K}[X];\ P(1) = 0\}.$$

On pose, pour tout $n > 0$:

$$P_n = 1 - \frac{1}{n}(X + X^2 + \cdots + X^n); \quad Q_n = \frac{1 - X^n}{n}.$$

Alors, pour tout $n > 0$, on a :

$$P_n \in F; \quad Q_n \in F; \quad \|1 - P_n\|_\infty = \|Q_n\|_\infty = \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la suite (Q_n) converge vers le polynôme nul dans $(E, \| \|_\infty)$. Ce polynôme appartient à F. La suite converge dans $(F, \| \|_\infty)$. Quant à la suite (P_n), elle converge vers le polynôme 1 dans $(E, \| \|_\infty)$. Ce polynôme n'appartient pas à F. La suite diverge dans $(F, \| \|_\infty)$.

6.5. Convergence des suites d'un espace vectoriel normé produit

Soit $(E_i, N_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ p espaces vectoriels normés et (E, N) l'espace vectoriel normé produit.

Considérons une suite u de E. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![1, p]\!]$, il existe u_n^i dans E_i tel que $u_n = (u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^p)$. Notons, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, u^i la suite $(u_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ de E_i et $u = (u^1, \ldots, u^p)$.

Théorème 15

Si $(E_i, N_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ sont p espaces vectoriels normés, (E, N) l'espace vectoriel normé produit, alors la suite $u = (u^1, \ldots, u^p)$ converge vers $l = (l_1, \ldots, l_p)$ dans (E, N) si et seulement si, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, la suite u^i converge vers l_i dans (E_i, N_i).

Démonstration

Elle vous paraîtra aisée si vous utilisez :

$$N(u - l) = \max_{i \in [\![1,p]\!]} N_i(u^i - l_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} N_i(u^i - l_i)$$

et, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $N_i(u^i - l_i) \leqslant N(u - l)$.

7 Normes équivalentes

Sur un même espace vectoriel, on peut utiliser plusieurs normes et, à chaque norme, correspond une notion de convergence. Ainsi, si $E = \mathbb{K}$, toutes les normes étant de la forme $N(x) = c|x|$, nous avons déjà vu que les parties

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

bornées sont les mêmes pour toutes les normes et il en est de même des suites convergentes. Mais, intéressons-nous à $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

et à la suite (f_n) définie par : $f_n(t) = \sqrt{n}t^n$.

On constate :

$$\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$

La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\ \|_1$, mais pas pour $\|\ \|_2$.

La question qui se pose alors est : à quelle condition deux normes sur un même espace vectoriel donnent-elles la même notion de convergence, c'est-à-dire les mêmes suites convergentes ?

7.1. Norme et convergence des suites

Théorème 16

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall\, x \in E \quad N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$.

2. Toute suite (u_n) d'éléments de E qui converge vers 0_E relativement à la norme N_1 converge aussi vers 0_E pour la norme N_2.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Étudions seulement le deuxième point. Raisonnons par contraposée. Nous allons montrer que, si la propriété **1.** n'est pas vérifiée, alors il existe une suite de E convergeant vers 0_E pour la norme N_1, mais pas pour la norme N_2.

On suppose :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists\, x \in E \quad N_2(x) > \alpha N_1(x).$$

En particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, u_n \in E \quad N_2(u_n) > n N_1(u_n).$$

Nous en déduisons $N_2(u_n) > 0$, puis $u_n \neq 0$ et : $N_1(u_n) > 0$.

Posons alors :

$$v_n = \frac{1}{nN_1(u_n)} u_n.$$

Par construction :

$$N_2(v_n) = \frac{1}{nN_1(u_n)} N_2(u_n) > 1,$$

donc la suite (v_n) ne converge pas vers 0_E pour la norme N_2. Mais : $N_1(v_n) = \frac{1}{n}$. Donc la suite (v_n) converge vers 0_E pour la norme N_1.

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Puisque : $\forall\, t \in [0,1] \quad |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$, on a :

$$\forall\, f \in E \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Toute suite (f_n) d'éléments de E qui converge vers 0_E pour $\| \ \|_\infty$ converge aussi vers 0_E pour $\| \ \|_1$. Mais, nous avons déjà vu que la suite (f_n) définie par : $f_n(t) = t^n$ converge vers 0_E pour $\| \ \|_1$, mais pas pour $\| \ \|_\infty$. Les deux normes ne jouent pas le même rôle sur E.

7.2. Normes équivalentes

Deux **normes** N_1 et N_2 sur le même espace vectoriel E sont dites **équivalentes** si :

$$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad \forall x \in E \quad aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x).$$

a et b sont indépendants de x.

Théorème 17

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la relation définie sur l'ensemble des normes de E, « N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes », est une relation d'équivalence.

Théorème 18

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2. Une suite (u_n) d'éléments de E converge vers un élément l de E relativement à la norme N_1 si et seulement si elle converge vers l pour la norme N_2.

Mersa ACADEMY

Corollaire 18.1

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2. Toute boule de l'espace vectoriel normé (E, N_1) contient une boule de l'espace vectoriel normé (E, N_2) de même centre et réciproquement.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Savoir tracer les boules unité dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pour les normes, permet de mieux comprendre ce que sont des normes équivalentes. »

Démonstration

- Soit a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $aN_1 \leqslant N_2 \leqslant bN_1$. Pour tout x de E, on a :

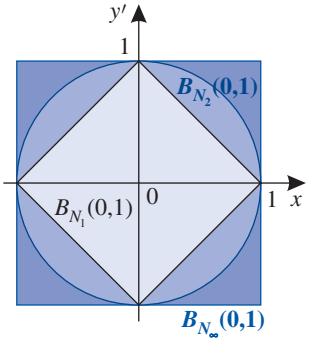
$$B_1\left(x, \frac{r}{b}\right) \subset B_2(x,r) \subset B_1\left(x, \frac{r}{a}\right).$$

- Réciproquement, soit (x_n) une suite de E qui converge vers l dans (E, N_1). Montrons que la suite (x_n) converge vers l dans (E, N_2). Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B_2(l, \varepsilon)$ contienne la boule $B_1(l, \varepsilon_1)$. Il existe P dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant P \quad x_n \in B_1(l, \varepsilon_1).$$

Donc :

$$\forall n \geqslant P \quad x_n \in B_2(l, \varepsilon).$$



► *Pour s'entraîner : ex. 13.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Cas de $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, posons :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2};$$

$$N_\infty(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

Montrer que ces normes sont équivalentes.

1) On peut écrire :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad |x_i| \leqslant N_\infty(x).$$

Donc :

$$N_1(x) \leqslant n N_\infty(x).$$

Il existe i_0 tel que :

$$|x_0| = N_\infty(x),$$

alors :

$$N_1(x) \geqslant |x_0| = N_\infty(x).$$

Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^n \quad N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant n N_\infty(x).$$

Les deux normes N_1 et N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

2) Avec N_2, on a aussi :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad |x_i|^2 \leqslant N_\infty^2(x).$$

Donc :

$$N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_\infty(x).$$

De même, il existe $|x_0| = N_\infty(x)$. Donc :

$$N_2(x) \geqslant |x_0| = N_\infty(x).$$

Les normes N_2 et N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^n \quad N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_\infty(x).$$

3) Et, par conséquent :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^n \quad \frac{1}{n} N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_1(x).$$

Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes. En réalité, pour comparer N_1 et N_2, nous avons simplement utilisé la transitivité de la relation d'équivalence.

7.3. Exemples

■ *Exemple 1 :*

Soit (E, N) l'espace vectoriel normé produit des (E_i, N_i) $(i \in [\![1, p]\!])$.

L'espace vectoriel E peut également être muni des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.

Ces normes sont équivalentes car :

$$\forall\, x \in E \quad N(x) \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant p N(x).$$

■ *Exemple 2 :* $E = \mathbb{K}[X]$.

Nous remarquons d'abord que :

$$N_\infty \leqslant N_2 \leqslant N_1.$$

Considérons alors la suite de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k.$$

Alors :

$$N_1(P_n) = n + 1 ; \quad N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad N_\infty(P_n) = 1.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si N_1 et N_∞ étaient équivalentes, il existerait $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_\infty$. On aurait, pour tout n : $\alpha \geqslant n+1$. Ceci est faux.

Si N_2 et N_∞ étaient équivalentes, il existerait $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_\infty$. On aurait, pour tout n : $\beta \geqslant \sqrt{n+1}$. Faux.

Et enfin, de la même manière, si N_1 et N_2 étaient équivalentes, il existerait $\delta > 0$ tel que : $N_2 \leqslant \delta N_\infty$. On aurait donc, pour tout n : $\delta \geqslant \sqrt{n+1}$. Faux.

Sur $\mathbb{K}[X]$, les normes N_1, N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes, mais : $N_\infty \leqslant N_2 \leqslant N_1$.

■ *Exemple 3 :*

Reprenons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. Nous avons rencontré les normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

La norme N_1 est appelée **norme de la convergence en moyenne**, la norme N_2 est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique** et le norme N_∞ **norme de la convergence uniforme**.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \quad \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 |1|^2\,\mathrm{d}t}.$$

On en déduit $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2$. De plus, on a déjà vu que : $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_\infty$.

En outre :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \quad \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\|f\|_\infty^2 \int_0^1 \mathrm{d}t} = \|f\|_\infty.$$

Par conséquent : $\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$.

Toutefois, la suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$ est telle que :

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \qquad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$$

Elle converge vers 0_E pour $\|\ \|_1$ et pour $\|\ \|_2$, mais pas pour $\|\ \|_\infty$.

Les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Les normes $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

D'autre part, si $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ étaient équivalentes, il existerait $\alpha > 0$ tel que :

$$\|\ \|_2 \leqslant \alpha \|\ \|_1.$$

On aurait donc, pour tout n : $\alpha \geqslant \dfrac{n+1}{\sqrt{2n+1}}$.

Ce qui est faux. Les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ ne sont donc pas équivalentes.

Dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, les normes $\|\ \|_1, \|\ \|_2, \|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes, mais :

$$\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

8 Suites extraites, valeur d'adhérence

8.1. Suite extraite d'une suite u

Soit u une suite d'éléments de E et φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors l'application $v = u \circ \varphi : n \longmapsto v_n = u_{\varphi(n)}$, est appelée une **suite extraite** de u. Elle est notée $v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement $(u_{\varphi(n)})$.

Remarque : Il est aisé de montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leqslant \varphi(n)$.

Si $v = (u_{\varphi(n)})$ et $w = v \circ \psi$, alors : $w_n = u_{\varphi(\psi(n))}$. Attention à l'ordre : $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ et $(u_{\psi\circ\varphi(n)})_n$ ne sont pas les mêmes suites extraites.

Théorème 19

Soit u une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$. Toute suite extraite d'une suite extraite de u est une suite extraite de u.

Théorème 20

Si (u_n) est une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ convergeant vers la limite l, alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers l.

La réciproque est manifestement fausse. Il suffit de regarder la suite $(-1)^n$ pour s'en convaincre.

Théorème 21

Soit (u_n) une suite telle que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite l. Alors, la suite (u_n) converge vers l.

Mensa ACADEMY

► *Pour s'entraîner : ex. 14 et 15.*

8.2. Valeur d'adhérence d'une suite

Soit u une suite d'éléments de E. Un vecteur a de E est appelé **valeur d'adhérence** de la suite u s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Théorème 22

L'élément a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si toute boule de centre a, non vide, contient une infinité de termes de la suite :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad u_n \in B(a, \varepsilon)).$$

Démonstration

Soit u une suite d'éléments de E et a tel que toute boule de centre a, non vide, contient une infinité de termes de la suite. Il existe donc un entier n_1 tel que $u_{n_1} \in B(a, 1)$.

Supposons que, pour un certain $p \geqslant 1$ fixé, nous ayons établi l'existence de p termes de la suite $u_{n_1}, \ldots, u_{n_p}$ tels que : $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ et, pour tout i de $[\![1, p]\!]$:

$$u_{n_i} \in B\left(a, \frac{1}{i}\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il existe alors un entier $n_{p+1} > n_p$ tel que : $u_{n_{p+1}} \in B\left(a, \frac{1}{p+1}\right)$.

La suite (u_{n_p}), ainsi construite par récurrence, est une suite extraite de (u_n), qui converge vers a.

La réciproque est immédiate.

Théorème 23

Si (u_n) est une suite d'éléments de E convergeant vers l, alors l est l'unique valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Corollaire 23.1

Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Théorème 24

Une suite bornée de réels ou de complexes converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration

Nous savons, depuis la première année, que toute suite (u_n) bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence a. On suppose cette valeur d'adhérence unique. Montrons par l'absurde que la suite (u_n) converge vers a.

Si elle ne converge pas vers a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{n | u_n \notin B(a, \varepsilon)\}$ est infini. Il est alors possible de construire par récurrence une suite bornée extraite de la suite u dont aucun élément n'appartient à $B(a, \varepsilon)$. Cette suite extraite admet une valeur d'adhérence $b \neq a$. La suite (u_n) admet alors au moins deux valeurs d'adhérence.

► ***Pour s'entraîner : ex. 16.***

Application 6

Valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))$ *est* $[-1, 1]$.

On admettra que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *(voir Application 4, chapitre 2).*

Considérons un élément a de $]-1, 1]$.

Montrons d'abord que tout intervalle de la forme $]a-\alpha, a[$ $(\alpha > 0)$ contenu dans $[-1, 1]$ contient au moins un terme de la suite. En effet, il existe u et v dans $]0, \pi[$ tels que $\cos u = a - \alpha$ et $\cos v = a$. Or $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe m et p dans $\mathbb{Z}$ tels que $m + 2\pi p \in]v, u[$.

Nous en déduisons : $\cos(m) \in]a - \alpha, a[$ car la fonction *cosinus* est strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Or, $\cos(m) = \cos(|m|)$.

Ce qui précède permet d'affirmer que l'intervalle $]a - \alpha, a[$ contient un terme, $\cos(n_1)$, de la suite $(\cos(n))$. Or, l'ensemble $\{\cos(n); n \leqslant n_1\}$ est fini. Il existe alors $\beta > 0$ tel que, pour tout $n \leqslant n_1$:

$$\cos(n) \notin]a - \beta, a[.$$

Posons $\alpha_1 < \min\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que :

$$\cos(n_2) \in]a - \alpha_1, a[.$$

Supposons que, pour un certain $m \geqslant 1$, on ait déterminé m entiers naturels $n_1, n_2, \ldots, n_m$ et m réels $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que :

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_m, \alpha_0 = \alpha$$

et, pour tout j de $[\![1, m]\!]$, pour tout $n \leqslant n_j$:

$$\cos(n) \notin]a - \alpha_j, a[, \cos(n_j) \in]a - \alpha_{j-1}, a[$$

et $\alpha_j < \dfrac{\alpha_{j-1}}{2}$.

L'ensemble $\{\cos(n); n \leqslant n_m\}$ est fini.

Il existe alors $\beta > 0$ tel que, pour tout $n \leqslant n_m$:

$$\cos(n) \notin]a - \beta, a[.$$

Posons $\alpha_m < \min\left(\dfrac{\alpha_{m-1}}{2}, \beta\right)$.

Il existe un entier $n_{m+1} > n_m$ tel que :

$$\cos(n_{m+1}) \in]a - \alpha_m, a[.$$

On a construit par récurrence une suite extraite de la suite $(\cos(n))$ qui converge vers a.

Nous en déduisons que a est une valeur d'adhérence de la suite $(\cos(n))$.

On procède de manière analogue avec $a = -1$ en travaillant sur $]a, a + \alpha[$.

Application 7

Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite

1) *Soit u une suite réelle telle que :*

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Montrer que l'ensemble $Vad(u)$ des valeurs d'adhérence de u est un intervalle fermé.

2) *Étudier la suite $(\cos\sqrt{n})$.*

3) *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ $(a < b)$. On considère la suite définie par :*

$$a_0 \in [a, b] \quad et \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (a_{n+1} = f(a_n)).$$

Montrer que, si $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, la suite (a_n) converge.

1) Soit $a < b$ deux valeurs d'adhérence de la suite u et $c \in]a, b[$. Nous allons montrer que $c \in Vad(u)$. Fixons alors un entier $p > 0$ et un réel $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ entraîne :

$$\exists q \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant q \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons l'intervalle $]-\infty, c[$. Il contient a, donc :

$$\exists r \geqslant \max(p, q) \quad u_r \in]-\infty, c[.$$

De même, l'intervalle $]c, +\infty[$ contient b, donc :

$$\exists s \geqslant r \quad u_s \in]c, +\infty[.$$

L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}; r \leqslant n \leqslant s \text{ et } u_n < c\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{N}$. Il admet donc un plus grand élément t. Nous en déduisons : $u_t < c$ et $u_{t+1} \geqslant c$. Or, $t > q$, ce qui entraîne $|u_{t+1} - u_t| < \varepsilon$. D'où : $u_t \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Nous avons donc établi :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists t \in \mathbb{N}$$
$$t \geqslant p \quad \text{et} \quad u_t \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[.$$

Supposons l'intervalle $Vad(u)$ majoré et notons $b = \sup Vad(u)$. Si $b \notin Vad(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et N dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \notin]b - \varepsilon, b[.$$

Aucun réel de $]b - \varepsilon, b[$ n'appartient alors à $Vad(u)$, ce qui contredit le choix de b. On procède de même pour la borne inférieure de $Vad(u)$ lorsque $Vad(u)$ est minoré. (Voir également l'exercice 5, chapitre 2.)

2) Regardons si la suite (u_n) vérifie les hypothèses de la première question.

$$u_{n+1} - u_n = -2 \sin \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2} \sin \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2}.$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est donc un intervalle contenu dans $[-1,1]$.

L'application ρ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\rho(n) = n^2$ est strictement croissante, donc :

$$Vad(u \circ \rho) \subset Vad(u) \subset [-1,1].$$

Or, nous savons que :

$$Vad(u \circ \rho) = [-1,1].$$

Nous pouvons conclure :

$$Vad(u) = [-1,1].$$

3) La suite (a_n) est bornée. Montrons qu'elle a une unique valeur d'adhérence. La suite (a_n) admet une valeur d'adhérence l, limite d'une suite extraite, $(a_{\varphi(n)})$. La suite $(a_{\varphi(n)+1}) = (f(a_{\varphi(n)}))$ converge alors vers $f(l)$, grâce à la continuité de la fonction f. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{\varphi(n)+1} - a_{\varphi(n)}) = 0$. Donc : $f(l) = l$.

Si $Vad(u) = [c,d] \subset [a,b]$ avec $c < d$, alors il existe p tel que :

$$a_p \in]c,d[.$$

On a : $f(a_p) = a_p$ car a_p est une valeur d'adhérence de u. La suite est alors stationnaire à partir du rang p, ce qui contredit $Vad(u) = [c,d]$. Donc $Vad(u) = \{l\}$. La suite (a_n) converge donc vers l.

9 Comparaison de suites

Dans ce paragraphe, (u_n) est une suite d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ et (α_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

9.1. Relation de domination

La **suite** (u_n) est dite **dominée** par la suite (α_n) si :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n\| \leqslant K|\alpha_n|.$$

On écrit alors :

$$u_n = O(\alpha_n).$$

Lorsque la suite scalaire (α_n) ne s'annule pas, $u_n = O(\alpha_n)$ équivaut à dire que la suite vectorielle $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}u_n\right)$ est une suite bornée de $(E, \|\ \|)$.

9.2. Relation de négligeabilité

La **suite** (u_n) est dite **négligeable** devant (α_n) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n\| \leqslant \varepsilon|\alpha_n|.$$

On écrit alors :

$$u_n = o(\alpha_n).$$

Lorsque la suite scalaire (α_n) ne s'annule pas, $u_n = o(\alpha_n)$ équivaut à dire que la suite vectorielle $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}u_n\right)$ converge vers 0_E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Propriétés : (u_n) et (v_n) étant deux suites d'éléments de E, $(a_n), (\alpha_n)$ et (β_n) trois suites d'éléments de $\mathbb{K}$, alors :

1. $u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n) \Rightarrow u_n + v_n = O(\alpha_n)$.
2. $u_n = O(\alpha_n)$ et $k \in \mathbb{K} \Rightarrow ku_n = O(\alpha_n)$.
3. $a_n = O(\beta_n)$ et $u_n = O(\alpha_n) \Rightarrow a_n u_n = O(\alpha_n \beta_n)$.
4. $u_n = o(\alpha_n) \Rightarrow u_n = O(\alpha_n)$.
5. $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n) \Rightarrow u_n + v_n = o(\alpha_n)$.
6. $u_n = o(\alpha_n)$ et $k \in \mathbb{K} \Rightarrow ku_n = o(\alpha_n)$.
7. $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\beta_n) \Rightarrow u_n = o(\beta_n)$.
8. $u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\beta_n) \Rightarrow u_n = o(\beta_n)$.

9.3. Équivalence de deux suites

Soit u et v deux suites d'éléments de E. La **suite** u est dite **équivalente** à la suite v, et on note $u_n \sim v_n$, si la suite $u - v$ est négligeable devant la suite réelle $\|v\|$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n - v_n\| \leqslant \varepsilon \|v_n\|.$$

Théorème 25

La relation définie sur l'ensemble des suites d'éléments de E par « la suite u est équivalente à la suite v » est une relation d'équivalence :

réflexive : $\forall u \in E^{\mathbb{N}} \quad u_n \sim u_n$;

symétrique : $\forall u \in E^{\mathbb{N}} \quad \forall v \in E^{\mathbb{N}} \quad u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$;

transitive : $\forall u \in E^{\mathbb{N}} \quad \forall v \in E^{\mathbb{N}} \quad \forall w \in E^{\mathbb{N}}$

$$u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \Rightarrow u_n \sim w_n.$$

Rapport Mines Albi, 1997

« L'erreur la plus classique est d'ajouter des équivalents. »

« En fait, on fait toutes sortes de choses avec les équivalents : on les ajoute, on les intègre, le but semblant être d'arriver au résultat demandé plutôt que d'être rigoureux. »

Rapport X, ENS 2000

« Erreurs étonnantes, et pourtant trop persistantes... si $a_n \sim b_n$ alors le module de $a_n - b_n$ tend vers 0. »

« Nous avons aussi relevé quelques erreurs : manipulation erronée d'équivalents... »

Démonstration

Cette relation est clairement réflexive. Montrons qu'elle est symétrique.

Soit u et v deux suites telles que : $u_n \sim v_n$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - v_n\| = \|v_n - u_n\| \leqslant \varepsilon \|v_n\|.$$

Mais :

$$\|v_n\| = \|u_n + (v_n - u_n)\| \leqslant \|u_n\| + \|v_n - u_n\| \leqslant \|u_n\| + \varepsilon \|v_n\|.$$

Et donc : $(1 - \varepsilon)\|v_n\| \leqslant \|u_n\|$. On choisit $\varepsilon < 1$ et on en déduit :

$$\|v_n\| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon} \|u_n\|.$$

D'où : $\|v_n\| = O(\|u_n\|)$. D'après la propriété 7 ci-dessus :

$$v_n - u_n = o(\|u_n\|).$$

v est donc équivalente à u et la relation est symétrique.

Soit u, v et w trois suites telles que : $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|u_n - v_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|v_n\| \quad \text{et} \quad \|v_n - w_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|v_n\|.$$

Donc, pour tout $n \geqslant N$, on a : $\|u_n - w_n\| \leqslant \varepsilon \|v_n\|$. Or : $\|w_n\| = O(\|v_n\|)$.

Donc $\|u_n - w_n\| = o(\|w_n\|)$, puis $u_n \sim w_n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Remarquons que nous avons établi dans cette démonstration le résultat suivant :

Théorème 26
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes d'éléments de E, alors :

$$u_n = O(\|v_n\|) \quad \text{et} \quad v_n = O(\|u_n\|).$$

La réciproque est fausse. Considérez les suites définies par :

$$u_n = n \quad \text{et} \quad v_n = -n.$$

Théorème 27
Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes d'éléments de E. Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (v_n) converge aussi vers l.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La convergence de la suite (u_n) vers l se traduit par :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Puisqu'elle converge, cette suite est bornée, donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| \leqslant M.$$

Enfin, les suites u et v étant équivalentes :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow \|u_n - v_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}\|u_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Récapitulons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant \sup(N_1, N_2) \Rightarrow \|v_n - l\| \leqslant \|u_n - v_n\| + \|u_n - l\| \leqslant 2\varepsilon.$$

La suite v converge donc vers l.

Théorème 28
Soit (u_n) une suite d'éléments de E convergeant vers l.
Si $l \neq 0_E$, la suite (u_n) est équivalente à la suite constante (l) : $u_n \sim l$.

Dans ce cas, il est essentiel que l soit non nulle. (Considérer la suite $(1/n)$).
D'autre part, $u_n \sim 0_E$ ne signifie pas que la limite de (u_n) soit nulle, mais que la suite (u_n) est identiquement nulle à partir d'un certain rang.

9.4. Cas des suites numériques

Les suites numériques (ou scalaires) sont les suites de réels ou de complexes.

Théorème 29
Deux **suites** scalaires (α_n) et (β_n) ne s'annulant pas, sont **équivalentes** si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003
« On trouve des abus du type $x(x+1)...(x+n) \sim n!$ ce qui est manifestement absurde si $x = 1$, par exemple. »

Attention : Les équivalents ne s'additionnent pas !

$$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n}.$$

Notons $u_n = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes.

Comparaison des suites de référence

Rappelons les résultats vus en première année :

- Avec $a > 1$ et $\alpha > 0$: $n^\alpha = o(a^n)$ et $a^n = o(n!)$.
- Avec $a > 0$ et $b > 0$: $(\ln n)^b = o(n^a)$.
- Avec a, b, c, d :

$n^a(\ln n)^b = o(n^c(\ln n)^d) \Leftrightarrow (a > c)$ ou $(a = c$ et $b > d)$

Rapport TPE, 1997

« La notation O est souvent confondue avec la notation o. Pour de nombreux candidats, on a : $u_n \sim v_n \Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$ »

► *Pour s'entraîner : ex. 17 et 18.*

Application 8

Exponentielles et logarithmes de suites équivalentes

1) *On pose* $u_n = n$ *et* $v_n = n - \ln(n)$. *Prouver que les deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes et que les suites* $(\exp(u_n))$ *et* $(\exp(v_n))$ *ne le sont pas.*

2) *Étant donné deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n), *prouver que les deux suites* $(\exp(u_n))$ *et* $(\exp(v_n))$ *sont équivalentes si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

3) *On pose* $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ *et* $y_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. *Prouver que les deux suites* (x_n) *et* (y_n) *sont équivalentes et que les suites* $(\ln(x_n))$ *et* $(\ln(y_n))$ *ne le sont pas.*

4) *Soit* (x_n) *et* (y_n) *deux suites équivalentes de réels strictement positifs.*

Prouver que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l \in \overline{\mathbb{R}} - \{1\}$, *alors les suites* $(\ln(x_n))$ *et* $(\ln(y_n))$ *sont équivalentes.*

1) On constate que $\dfrac{v_n}{u_n} = 1 - \dfrac{\ln n}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

En revanche, $\dfrac{\exp(v_n)}{\exp(u_n)} = \exp(-\ln(n)) = \dfrac{1}{n}$.

Les suites $(\exp(u_n))$ et $(\exp(v_n))$ ne sont pas équivalentes.

2) Puisque $\dfrac{\exp(v_n)}{\exp(u_n)} = \exp(u_n - v_n)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\exp(v_n)}{\exp(u_n)} = 1.$$

3) Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 1$.

De plus $\ln(x_n) \sim \dfrac{1}{n}$ et $\ln(y_n) \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln x_n}{\ln y_n} = +\infty$.

4) Puisque les suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes, on peut écrire $x_n = y_n(1 + \varepsilon(n))$ où $\varepsilon(n) = 0$.

Donc $\ln(x_n) = \ln(y_n) + \ln(1 + \varepsilon(n))$ et :

$$\frac{\ln x_n}{\ln y_n} = 1 + \frac{\ln(1 + \varepsilon(n))}{\ln y_n}$$

(le quotient par $\ln(y_n)$ est possible pour n assez grand).

On conclut aisément que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln x_n}{\ln y_n} = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer que l'application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme, on peut :

– si N se présente sous la forme d'une racine, regarder si elle dérive d'un produit scalaire.

– sinon, montrer qu'elle vérifie les quatre axiomes de la définition d'une norme.

● Pour montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel normé, $(E, \| \|)$, est bornée, on cherche :

– un réel $M > 0$ tel que : $\forall x \in A \quad \|x\| \leqslant M$.

– une boule $B(a, r)$ telle que : $A \subset B(a, r)$.

● Pour montrer qu'une fonction f de X dans $(E, \| \|)$ est bornée, on cherche M tel que, pour tout x de X, on ait : $\|f(x)\| \leqslant M$.

● Pour prouver qu'une fonction f de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2) est lipschitzienne sur une partie X de E_1, on peut :

– si $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ et X est un intervalle, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et à dérivée bornée sur X.

– majorer l'expression $d_2(f(x), f(y))$ sur X^2 par un terme de la forme $K d_1(x, y)$.

● Pour montrer que la suite (u_n) converge vers l : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - l\| = 0$.

● Pour montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, on cherche deux réels a et $b > 0$, tels que : $\forall x \in E \quad aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x)$.

● Pour montrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on peut :

– chercher une suite (u_n) d'éléments de E, convergeant vers 0_E pour l'une, mais pas pour l'autre.

– chercher une suite (u_n) d'éléments de $E - \{0_E\}$, telle que $\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.

● Pour montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), on peut :

– chercher une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

– montrer que toute boule non vide de centre a contient une infinité de termes de la suite (u_n).

● Soit (α_n) et (β_n) deux suites numériques ne s'annulant pas et (u_n) une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$.

– Pour vérifier que la suite (u_n) est dominée par la suite (α_n), il suffit de montrer que la suite $\left(\left(\dfrac{1}{\alpha_n} u_n\right)\right)$ est bornée.

– Pour vérifier que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (α_n), il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} u_n\right) = 0.$$

– Pour vérifier que les deux suites (α_n) et (β_n) sont équivalentes, il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1.$$

Si les suites s'annulent, revenir à la définition.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

Une curieuse boule dans $\mathbb{R}^2$

ÉNONCÉ

1) Montrer que l'application $(x, y) \to N(x, y) = \int_0^1 |x + \sqrt{2}\ ty\ |\,\mathrm{d}\,t$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer la boule unité $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; N(x, y) \leqslant 1\}$.

3) La représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On montrera que B est délimitée par des segments et deux courbes dont l'équation se simplifie en effectuant une rotation du repère.

CONSEILS

La seule difficulté réside dans :

$$N(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0.$$

SOLUTION

1) Soit (x, y) tel que $N(x, y) = 0$. La fonction :

$$t \longmapsto |x + \sqrt{2}ty|$$

est continue et positive sur $[0, 1]$.

Donc, pour tout t de $[0, 1]$, on a $x + \sqrt{2}ty = 0$.

Cette fonction polynomiale s'annulant sur $[0, 1]$ est l'application nulle :

$$x = y = 0.$$

2) Déterminons l'ensemble :

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad N(x, y) \leqslant 1\}.$$

Puisque $N(x, y) = N(-x, -y)$, il suffit de déterminer $B \cap \{(x, y); y \geqslant 0\}$.

- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors :

$$N(x, y) = \int_0^1 (x + \sqrt{2}ty)\,\mathrm{d}\,t = x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

- Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors :

Si $x + \sqrt{2}y \leqslant 0$, $\quad N(x, y) = \int_0^1 -(x + \sqrt{2}ty)\,\mathrm{d}\,t = -\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$.

Si $x + \sqrt{2}y > 0$, $\quad N(x, y) = \int_0^{\frac{-x}{\sqrt{2}y}} -(x + \sqrt{2}ty)\,\mathrm{d}\,t + \int_{\frac{-x}{\sqrt{2}y}}^1 (x + \sqrt{2}ty)\,\mathrm{d}\,t$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{y} + x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

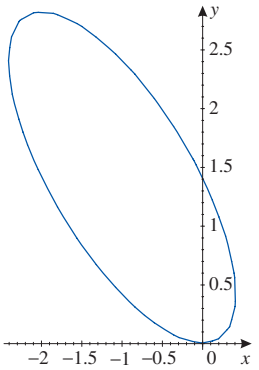
3) - Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, les points de B sont caractérisés par :

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \leqslant 1.$$

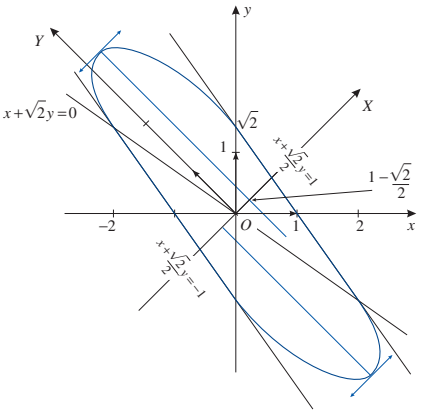
- Si $x \leqslant 0, y \geqslant 0$ et $x + \sqrt{2}y \leqslant 0$, les points de B sont caractérisés par :

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \geqslant -1.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



Doc. 1.
```
> with(plots) :
> implicitplot(x^2
  +sqrt(2)*x*y+y^2
  -sqrt(2)*y,
  x=-3..3,y=-3..3) ;
```



• Si $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + \sqrt{2}y > 0$, les points de B sont caractérisés par :

$$x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 - \sqrt{2}y \leqslant 0.$$

Notons (C) la courbe d'équation : $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 - \sqrt{2}y = 0$.

Considérons la rotation d'angle α. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont transformés en les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$. La matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle est :

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$M \in (C) \Leftrightarrow (\cos\alpha X - \sin\alpha Y)^2 + \sqrt{2}(\cos\alpha X - \sin\alpha Y)(\sin\alpha X + \cos\alpha Y) + (\sin\alpha X + \cos\alpha Y)^2 - \sqrt{2}(\sin\alpha X + \cos\alpha Y) = 0.$$

Le terme en XY a pour coefficient : $\sqrt{2}\cos 2\alpha$.

Il disparaît pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

L'équation se simplifie et on obtient :

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(Y - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre le point

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

de grand axe $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et de petit axe $b = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Doc. 2.
```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=1,x^2+sqrt(2)*x*y+y^2-sqrt(2)*y=0},{x,y});
```
$$\left\{y = \sqrt{2}, x = 0\right\}, \left\{y = \sqrt{2}, x = 0\right\}$$
```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=-1,x^2+sqrt(2)*x*y+y^2-sqrt(2)*y=0},{x,y});
```
$$\left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}, \left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}$$
```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=-1,x+sqrt(2)*y=0},{x,y});
```
$$\left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

L'algorithme de Héron

HÉRON d'ALEXANDRIE utilisait une suite pour déterminer des valeurs approchées des racines des entiers. Nous allons étudier cette méthode et l'appliquer ensuite à des complexes, puis à des matrices.

1) a) a désignant un réel fixé, étudier la suite (u_n) définie par :

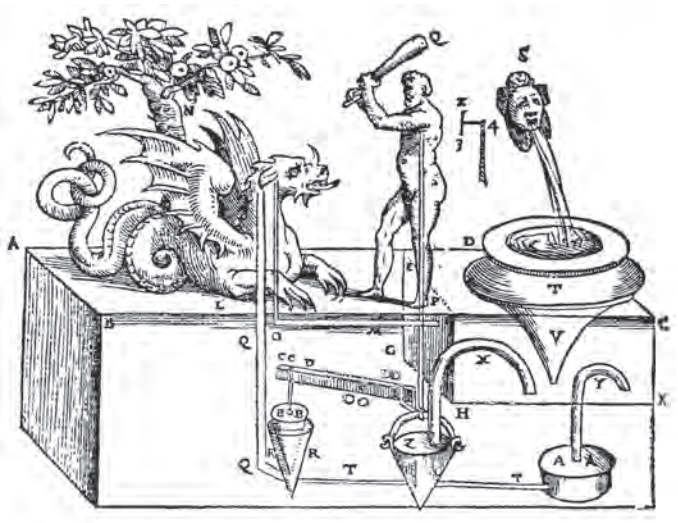
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}^*.$$

Dans la suite de la question **1)**, on prendra :

$$a > 0 \quad \text{et} \quad u_0 > 0.$$

b) Afin de préciser la vitesse de convergence de la suite (u_n), on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{a}}, \quad \text{puis} \quad e_n = v_n - 1.$$



HÉRON D'ALEXANDRIE (1er siècle après J.-C.), *mathématicien grec. Nous lui devons la formule liant l'aire, le périmètre et les trois côtés d'un triangle :* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $e_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}e_n^2$. La convergence est alors dite quadratique.

c) On fixe $a = 7$ et $u_0 = 1$. Déterminer n pour que u_n fournisse une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à $2 \cdot 10^{-5}$ près. Donner une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-5} près.

2) a désigne maintenant un complexe fixé non nul, et α et $-\alpha$ ses racines carrées.

La suite (z_n) est définie par : $z_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right)$.

a) On suppose que la suite (z_n) ne s'annule pas. En utilisant la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{z_n - \alpha}{z_n + \alpha}$, montrer qu'il est possible de choisir z_0 tel que la suite (z_n) converge vers α (respectivement $-\alpha$).

Interpréter géométriquement ce choix.

b) Montrer que, si la suite (z_n) s'annule, le point d'affixe z_0 appartient à une droite d'origine O que vous décrirez géométriquement. Précisez les points de cette droite dont l'affixe conduit à une suite stationnaire nulle.

c) Décrire, en fonction de la position du point d'affixe z_0, la nature de la suite (z_n).

d) On fixe $a = \mathrm{i}$ et $z_0 = 1$. Déterminer la limite de la suite (z_n).

3) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni d'une norme N telle que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on ait :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B) \quad \text{et} \quad N(I_2) = 1.$$

A désigne une matrice carrée non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La suite (X_n) est définie par :

$$X_0 = I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\left(X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)\right)$$

On suppose que la suite (X_n) ne s'annule pas.

a) Étudier la nature de la suite (X_n) lorsque A est diagonale.

b) Même question lorsque A est semblable à une matrice diagonale.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Montrer que, dans un espace vectoriel normé, l'application norme est convexe, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall t \in [0,1]$$
$$N(tx + (1-t)y) \leqslant tN(x) + (1-t)N(y).$$

En déduire que $B(0_E, 1)$ est convexe.

2 Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E. On définit l'application N sur E en posant $N(X) = \|f(X)\|$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N définisse une norme sur E.

3 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et, pour tout $x = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

4 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et φ une forme sesquilinéaire sur E. Montrer :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}.$$

5 Montrer que, si la norme de l'espace vectoriel $(E, \| \|)$ est associée à un produit scalaire complexe φ, on a, pour tous x et y de E :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (\exists \lambda \geqslant 0) \quad (x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x).$$

Et si la norme n'est pas associée à un produit scalaire ?

6 **1)** Donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes u et v pour que : $|u+v| = |u| + |v|$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes $(u_j)_{j \in [\![1,p]\!]} (p \geqslant 1)$ pour que : $|\sum_{j=1}^{p} u_j| = \sum_{j=1}^{p} |u_j|$.

7 Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé, et d la distance associée à la norme. Montrer que :

1) $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,y) = d(x+z, y+z)$.

2) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

8 Montrer que, dans l'espace vectoriel normé, $(E, \| \|)$:

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall r \in \mathbb{R}^{+*} \quad x + B(y,r) = B(x+y, r).$$

9 Montrer que, dans l'espace vectoriel normé, $(E, \| \|)$:

$$\forall x \in E \quad \forall r \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$$
$$\lambda B(x,r) = B(\lambda x, |\lambda| r).$$

10 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme :

$$\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|, |y|).$$

On considère l'application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = (y + 2f(x), x - f(y))$$

où f est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie : $|f'| \leqslant \frac{1}{3}$. Montrer que, pour toute partie bornée P de $\mathbb{R}^2$, la partie $F^{-1}(P)$ est bornée.

11 $(E, \| \|)$ étant un espace vectoriel normé, on munit l'espace vectoriel E^2 de la norme N définie par $N(x,y) = \|x\| + \|y\|$. Montrer que la distance associée à la norme est 1-lipschitzienne.

12 Montrer que l'équation : $\tan \frac{\pi}{2} x = \frac{\pi}{2nx}, x \in]0,1[$ admet une unique solution notée x_n. Étudier la suite (x_n) et donner un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

13 f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère l'application : N_f de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$N_f(P) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)P(x)|.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que N_f soit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

2) Montrer que, s'il existe deux réels a, b strictement positifs tels que : $af \leqslant g \leqslant bf$, alors les normes N_f et N_g sont équivalentes.

14 **1)** Montrer qu'une suite (u_n) de réels ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si on peut en extraire une suite majorée.

2) Montrer que, de toute suite (q_n) d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire une suite constante.

3) Soit x un irrationnel et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. Pour tout n, on écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $\lim_{n \to +\infty} q_n = +\infty$.

15 Une suite (u_n) de $\mathbb{R}^m$ telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence admet-elle une valeur d'adhérence ?

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

16 Soit une suite (u_n) de complexes telle que la suite $(|u_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. Montrer que la suite (u_n) a au moins une valeur d'adhérence.

17 Est-il vrai que, si la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0, alors : $u_n \sim v_n$?

18 Soit (u_n) une suite de réels telle que, pour tout n, on ait : $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

Étudier la suite (u_n). Donner un développement asymptotique de (u_n) avec deux termes.

19 ** **1)** Montrer que l'application définie par $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appellera N la norme associée.

2) Comparer $N(A)$ et $N({}^tA)$.

3) a) Montrer que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$, pour tous A et B.

b) Caractériser les couples (A,B) pour lesquels $N(AB) = N(A)N(B)$.

4) Comment étendre la norme N à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

20 **1)** Déterminer une application f non nulle de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, qui admette, pour tout λ complexe, la matrice λA dans une base appropriée.

2) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ \|PAP^{-1}\| = \|A\|$.

21 ** Soit $(E, <\ |\ >)$ un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E^n vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant 2$

1) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|^2 = n\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

2) On suppose qu'il existe une boule fermée $BF(c,r)$ contenant les x_i.

Montrer que : $r \geqslant \sqrt{2\dfrac{n-1}{n}}$.

22 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout x de E, on pose $g(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$.

1) Montrer que g définit une bijection de E dans la boule ouverte $BO(0_E, 1)$.

2) Montrer que g est 1-lipschitzienne.

23 Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note L l'ensemble des applications lipschitziennes de $(E, \|\ \|)$ dans lui-même qui s'annulent en 0_E. Pour tout élément f de L, on note I_f l'ensemble des réels $k \geqslant 0$ tels que f soit k-lipschitzienne.

1) Prouver que, pour tout f de L, I_f est un intervalle.

2) Montrer que : $\forall (f,g) \in L^2 \quad I_f + I_g \subset I_{f+g}$.

3) Pour tout f de L, on pose $N(f) = \inf I_f$. Montrer que N est une norme sur L.

24 Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|v_n - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes. Quelles sont leurs limites ?

25 Soit (z_n) la suite complexe définie par

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

Montrer la convergence de la suite de terme général $(|z_n|)$.

Montrer la convergence et donner la limite de (z_n).

26 (d'après Concours général) Étudier la suite définie par :

$$u_0 \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n+1}}.$$

27 **1)** Montrer le lemme de d'Alembert : si (a_n) est une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, alors la suite (a_n) tend vers $+\infty$.

2) Étudier la suite définie par :

u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{a(a^2+1)}{x^2+1}$.

28 On considère deux suites complexes convergeant respectivement vers l et l'. Montrer que la suite :

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k v_{n-k}}{n+1}\right)$$

converge vers ll'.

29 Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = [f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t]^{1/2}.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer que $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.

3) N et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

30 On pose $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout f de E, on définit :

$$N(f) = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer que ces 3 applications sont des normes.

2) Prouver que pour tout f de E, $N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f)$.

3) Prouver que, deux à deux, ces normes ne sont pas équivalentes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Topologie, étude locale des applications

2

Introduction

Leibniz, en 1692, utilise, dans un cadre géométrique, le terme de fonction. En étudiant la solution de l'équation des cordes vibrantes donnée par d'Alembert en 1747, Euler, en 1748, libère la notion de fonction de ce cadre et introduit la notation $f(x)$. L'idée intuitive suivant laquelle une fonction est continue si son graphe peut être tracé sans lever le crayon, est attribuée à Euler.

Bolzano et Cauchy, vers 1820, définissent correctement les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Au début du XXe siècle, cette définition sera généralisée à des fonctions vectorielles d'une variable vectorielle.

Le vocabulaire actuel de la topologie commence à apparaître avec la construction, par Cantor vers 1870, de l'ensemble $\mathbb{R}$. La topologie réelle et l'introduction, au début du XXe siècle, des espaces métriques vont permettre la naissance de la topologie métrique. En 1914, Hausdorff (qui se suicide en 1942, avec sa femme et sa belle-sœur pour échapper aux camps de concentration) explicite les axiomes caractérisant l'ensemble des ouverts d'une topologie indépendamment de toute distance.

OBJECTIFS

- Vocabulaire topologique de base : voisinage, ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière.
- Suites et topologie.
- Limite en un point d'une fonction d'un espace vectoriel normé dans un autre.
- Opérations sur les limites.
- Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.
- Continuité en un point, continuité sur une partie.
- Utilisation de la continuité : images réciproques d'ouverts et de fermés.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Nous noterons $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r, respectivement $BF(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r.

Topologie

1.1. Voisinage d'un point

Soit a un point de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$. Une partie V de E est appelée **voisinage** de a quand elle contient une boule ouverte non vide de centre a :

$$\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset V.$$

On notera $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Propriétés :

1. Tout voisinage de a contient a.

2. E est un voisinage de a.

3. $V(a)$ est non vide.

4. Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

5. Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

6. Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

Démonstration

Seule la cinquième propriété mérite une démonstration. Soit $V_1, \dots, V_m$, m voisinages de a. Appelons $r_1, \dots, r_m$, m réels > 0 tels que, pour tout i de $[\![1, m]\!]$, la boule $B(a, r_i)$ soit contenue dans V_i. Posons $r = \min\{r_1, \dots, r_m\}$. Alors $r > 0$ et :

$$B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} V_i.$$

Georg Cantor *(1845-1918), mathématicien allemand, introduit les notions d'ouvert, de fermé. Ami de Dedekind, il construit la théorie des ensembles. Il montre que $\mathbb{R}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$, mais qu'il est équipotent à $\mathbb{R}^n$. Il écrit d'ailleurs à ce sujet « je le vois mais ne le crois pas ». Ses travaux sur les ensembles infinis sont alors violemment contestés et il meurt dans un asile d'aliénés.*

Exemple : Topologie induite sur un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E. La norme induite, $\| \|_F$, sur F par celle de E permet de munir F d'une structure d'espace vectoriel normé. Cherchons les voisinages d'un point a de F, dans $(F, \| \|_F)$.

Les intersections de F avec les voisinages, dans $(E, \| \|)$, d'un point a de F sont des voisinages de a dans F. Réciproquement, soit V un voisinage de a dans F. Il existe $r > 0$ tel que : $B_F(a,r) \subset V$. L'ensemble $W = V \cup B_E(a,r)$ est un voisinage de a dans E. Et : $W \cap F = V$.

Si $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont deux normes sur l'espace vectoriel E les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont équivalentes si et seulement si, pour tout a de E, tout voisinage de a dans $(E, \| \|_1)$ est voisinage de a dans $(E, \| \|_2)$ et réciproquement.

Rapport X, 2001

« Une translation de vecteur x permettait de transporter un voisinage de 0 en un voisinage de x. »

⚠ *La famille* $\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right)_n$ *est une famille infinie de voisinages de 0 dans $(\mathbb{R}, |\,|)$. Mais cette famille est infinie et son intersection est $\{0\}$. Ce n'est pas un voisinage de 0.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En conclusion, les voisinages d'un point a de F dans $(F, \| \|_F)$ sont les intersections avec F des voisinages de a dans $(E, \| \|_E)$.

1.2. Ouverts, fermés d'un espace vectoriel normé

Une partie O de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est appelée un **ouvert** de E lorsqu'elle est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in O \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subset O.$$

L'ensemble des ouverts de l'espace vectoriel normé E est appelé **topologie** de E.

Une partie F de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est appelée un **fermé** de E lorsque son complémentaire dans E, $\complement_E F$, est un ouvert de E.

Si $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont deux normes sur E, elles sont équivalentes si et seulement si tout ouvert de $(E, \| \|_1)$ est un ouvert de $(E, \| \|_2)$ et réciproquement.

Exemple :

$\varnothing$ et E sont des ouverts et des fermés de $(E, \| \|)$.

Théorème 1

Dans un espace vectoriel normé,

- toute réunion d'ouverts est un ouvert,
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

⚠ *Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert :*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$

Corollaire 1.1

Dans un espace vectoriel normé,

- toute intersection de fermés est un fermé,
- toute réunion finie de fermés est un fermé.

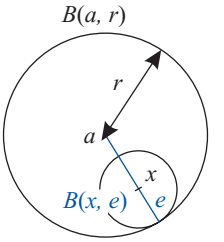
Rapport X, 2001

« Dans certaines mauvaises copies, on trouve que L est fermé car c'est une « réunion de fermés », toute partie de E serait fermée comme réunion de points. »

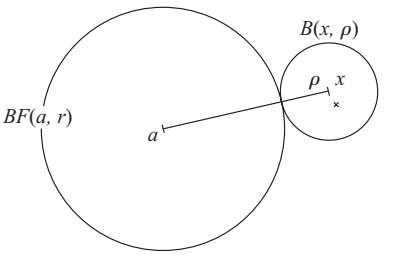
Théorème 2

Dans un espace vectoriel normé :

- toute boule ouverte est un ouvert,
- toute boule fermée est un fermé.



Doc. 1.



Doc. 2.

Démonstration

1. Considérons, pour un réel $r \geqslant 0$ fixé, la boule ouverte $B = B(a, r)$ et montrons qu'elle est voisinage de chacun de ses points (*doc.* 1).

Si $r = 0$, alors $B = \varnothing$ et le résultat est établi. Supposons maintenant $r > 0$.

Soit x un élément de B. Considérons le réel strictement positif $\rho = r - d(a, x)$.

De plus : $\forall y \in B(x, \rho) \quad d(x, y) < r - d(a, x)$.

On en déduit : $d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y) < r$.

Et, par conséquent : $B(x, \rho) \subset B(a, r) = B$. L'ensemble B est donc un voisinage de x.

2. Soit $BF(a, r)$ $(r \geqslant 0)$ la boule fermée de centre a et de rayon r.

Montrons que son complémentaire dans E est un ouvert de E (*doc.* 2).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

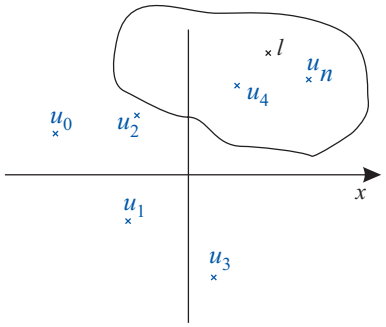
Soit x n'appartenant pas à $BF(a,r)$, on a : $d(a,x) > r$.
Appelons ρ le réel $d(a,x) - r$. Alors : $\forall\, y \in B(x,\rho) \quad d(x,y) < d(a,x) - r$.
Or : $r < d(x,a) - d(x,y) \leqslant d(y,a)$.
La boule ouverte $B(x,\rho)$ est contenue dans $\complement_E(BF(a,r))$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1, 2 et 3.***

Les notions de convergence et d'ouvert sont en relation par le résultat suivant que nous vous laissons démontrer à titre d'exercice.

Théorème 3

Si (u_n) est une suite convergente de E, de limite l, alors tout ouvert de E contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



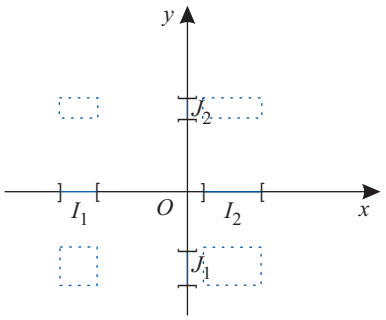
Doc. 3.

Théorème 4. Topologie d'un espace vectoriel normé produit

Considérons l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, produit de $(E_i, \|\ \|_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$.

Tout produit d'ouverts des espaces vectoriels normés $(E_i, \|\ \|_i)$ est un ouvert de $(E, \|\ \|)$.

Tout produit de fermés des espaces vectoriels normés $(E_i, \|\ \|_i)$ est un fermé de $(E, \|\ \|)$.



Doc. 4.

⚠ *Les réciproques sont fausses.*

L'intérieur de la parabole d'équation : $y = -x^2$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x,y)\ ;\ y + x^2 < 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

La droite d'équation : $y = 5x$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

1.3. Intérieur d'une partie

A étant une partie de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, un élément a de A est appelé point intérieur à la partie A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs à la partie A de E est appelé **intérieur de la partie** A et noté $\overset{\circ}{A}$.

Propriétés

A et B étant deux parties de E, on a :

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2. $\forall\, a \in E \quad a \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow (\exists\, r > 0) \quad (B(a,r) \subset A)$.

3. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

4. $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

5. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

6. A ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

7. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

8. $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

9. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

10. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. (égalité fausse en général)

Démonstration

3. Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points.

Si $\overset{\circ}{A}$ est non vide, soit a un élément quelconque de $\overset{\circ}{A}$. D'après la définition :

$$\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset A.$$

Montrons que cette boule est contenue dans $\overset{\circ}{A}$. Nous pourrons en déduire que $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de a, donc un ouvert de E.

Soit alors y un élément de $B(a,r)$. Nous avons établi que $B(a,r)$ est un ouvert, donc :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B(y,\varepsilon) \subset B(a,r) \subset A.$$

D'où : $y \in \overset{\circ}{A}$.

4. Soit O un ouvert contenu dans A.

Si a est un élément de O, O est un voisinage de a. A est donc aussi un voisinage de a, a est un élément de $\overset{\circ}{A}$. On obtient : $O \subset \overset{\circ}{A}$.

$\overset{\circ}{A}$ contient tout ouvert contenu dans A. Il contient alors la réunion de ces ouverts. Étant lui-même ouvert, il est la réunion de ces ouverts.

5. Il en résulte que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

7. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\overset{\circ}{A}$, c'est donc $\overset{\circ}{A}$.

8. Si A est contenu dans B, le plus grand ouvert contenu dans A est nécessairement contenu dans B, c'est-à-dire : $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

9. On a : $A \cap B \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$. On procède de même avec $A \cap B \subset B$.

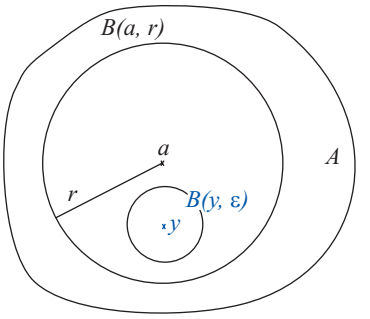
On en déduit $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

De plus, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, donc : $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

10. On procède de même que ci-dessus.

Mais, l'inclusion réciproque est fausse. Il suffit de considérer, dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, les parties $A =]0,1]$ et $B =]1,2[$.

Exemple : Vérifiez que : $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}} = \varnothing$.



Doc. 5.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

1.4. Adhérence d'une partie

A étant une partie de $(E, \|\ \|)$ et a un élément de E, on dit que a est un **point adhérent** à la partie A si tout voisinage de a rencontre A : $\forall V \in V(a) \quad V \cap A \neq \varnothing$.

On dit alors aussi simplement que a est adhérent à A.
L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et noté $\overline{A}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Propriétés

A et B étant deux parties de $(E, \| \|)$ et a un élément de E, on a :

1. $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad B(a,r) \cap A \neq \emptyset$.

2. $A \subset \overline{A}$.

3. $\overline{A}$ est un fermé.

4. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

5. $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.

6. $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\complement A}$.

7. $\complement \overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$.

8. A fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.

9. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

11. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

12. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

13. $a \in \overline{A} \Leftrightarrow d(a, A) = 0$.

Démonstration

Ces propriétés se déduisent de celle des intérieurs. Il suffit de montrer au préalable la propriété 6.

$$\begin{aligned} x \in \complement\overline{A} &\Leftrightarrow \exists r > 0 \quad B(x,r) \cap A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists r > 0 \quad B(x,r) \subset \complement A \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\complement A}. \end{aligned}$$

On montre ensuite la propriété 13.

$$\begin{aligned} d(a, A) = 0 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad d(a,x) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow a \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Exemple : Vérifiez que : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Un exemple important dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie majorée (respectivement minorée) non vide de $\mathbb{R}$, la borne supérieure (respectivement inférieure) de A est un point adhérent à A.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Application 1

Les boules

Montrer que, si $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé, alors :

1) $\forall a \in E \quad \forall r > 0 \quad \overline{BO(a,r)} = BF(a,r)$.

2) $\forall a \in E \quad \forall r > 0 \quad \overset{\circ}{BF(a,r)} = BO(a,r)$.

Soit a dans E et $r > 0$.

1) $\overline{BO(a,r)}$ est le plus petit fermé contenant $BO(a,r)$, donc : $\overline{BO(a,r)} \subset BF(a,r)$.

Soit x tel que : $\|x - a\| = r$.

On va montrer que :

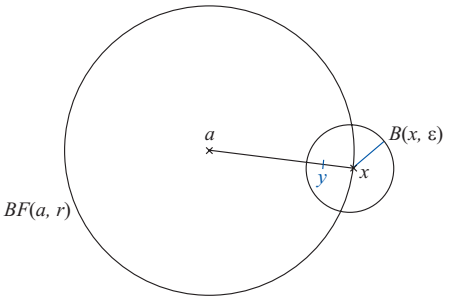
$$\forall \varepsilon > 0 \quad BO(a,r) \cap BO(x,\varepsilon) \neq \emptyset.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit ε dans $]0, r[$. L'élément $y = \frac{\varepsilon}{r}(a - x) + x$ appartient à $BO(a,r) \cap BO(x,\varepsilon)$.

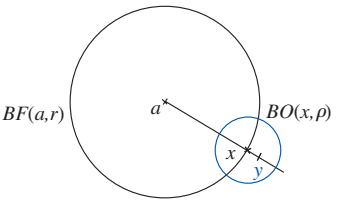
Donc : $BF(a,r) \subset \overline{BO(a,r)}$.

Puis : $BF(a,r) = \overline{BO(a,r)}$.



2) $\overset{\circ}{\overline{BF(a,r)}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $BF(a,r)$, donc : $BO(a,r) \subset \overset{\circ}{\overline{BF(a,r)}}$.

Soit x tel que $\|x - a\| = r$ et $\rho > 0$.



Montrons que x ne peut être intérieur à $BF(a,r)$, c'est-à-dire que : $BO(x,\rho)$ n'est pas incluse dans $BF(a,r)$.

En effet, $y = x + \frac{\rho}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} \in BO(x,\rho)$.

Mais $\|y - a\| = r + \frac{\rho}{2} > r$.

D'où : $\overset{\circ}{\overline{BF(a,r)}} = BO(a,r)$.

Remarque : Dans un espace métrique, (G,d) quelconque, ces deux propriétés ne sont plus vraies. Il suffit de considérer, avec $n \geqslant 1$ fixé, $G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et la distance d définie par :

$$d(f,g) = \text{rg}\,(f - g).$$

1.5. Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, d'une partie fermée

Les suites d'éléments de E fournissent un puissant outil pour manipuler la topologie de E.

Théorème 5

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Un point a de E est adhérent à A si et seulement si a est limite d'une suite de points de A.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite de A convergeant vers l.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n \in B(l,\varepsilon)$.

Donc : $B(l,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

D'où : $l \in \overline{A}$.

- Soit $a \in \overline{A}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$.

Soit u_n un point de $B\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap A$. On construit ainsi une suite d'éléments de A convergeant vers l.

Théorème 6

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E.

A est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de A, convergente dans E, converge dans A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 2

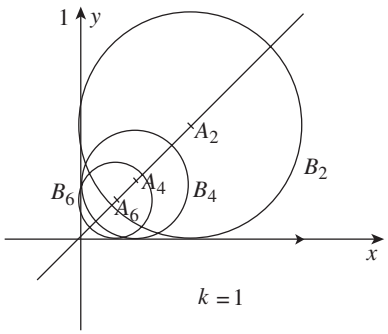
Une réunion de fermés

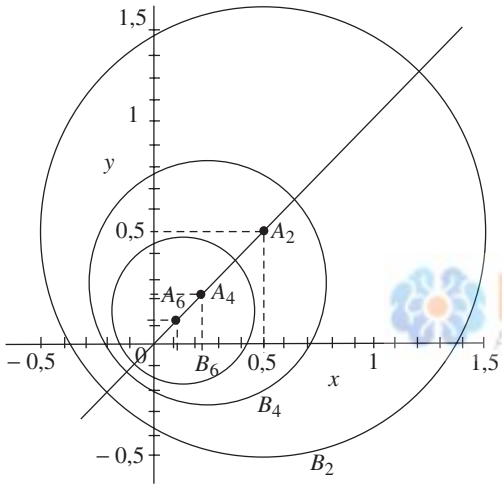
Soit $k \in \mathbb{R}^+$. *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2}\}$$

et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* k *pour que* B *soit fermé.*

Notons $A_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ le centre de la boule B_n et faisons une figure. Nous constatons alors deux cas différents.





Vous savez que deux cercles de centre C et C' sont emboîtés si et seulement si $d(C, C') \leqslant |R - R'|$.

Si

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \leqslant \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1},$$

c'est-à-dire si $k \geqslant \sqrt{2}$, les boules B_n sont emboîtées.

Alors $B = B_1$ et B est fermé. Si $k < \sqrt{2}$, les boules ne contiennent pas O. Or, O est la limite des points A_n. Il n'appartient pas à B. B n'est pas fermé.

1.6. Parties denses

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que : $A \subset B$. A est dite **dense** dans B si B est contenu dans l'adhérence de A, c'est-à-dire : $B \subset \overline{A}$.

En particulier, une partie A de E est dite dense dans E si son adhérence est E, c'est-à-dire si : $\overline{A} = E$.

Exemples :

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Du paragraphe précédent, il découle immédiatement :

Théorème 7

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dense dans B si et seulement si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

Rapport, CCP 2003

« Toutefois on relève un nombre important d'étudiants qui ne savent pas ce qu'est la densité. »

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Les fermés et les sous-espaces vectoriels

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que :

1) *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

2) *Si H est un hyperplan de E, alors H est fermé ou H est dense dans E.*

1) La démonstration est triviale à l'aide du théorème 5.

2) Soit H un hyperplan de E. Alors : $H \subset \overline{H}$ et $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Si $H = \overline{H}, H$ est fermé.

Si $H \neq \overline{H}$, soit a dans $\overline{H} - H$. Alors : $E = H \oplus \mathbb{K}a$, puis $E \subset \overline{H}$.

Application 4

Les sous-groupes de $\mathbb{R}$

1) *Soit $(G, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ ou de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a > 0$.*

2) *En déduire que, pour $ab \neq 0$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.*

1) Soit g non nul dans G, alors $-g$ appartient à G. La partie $\{x \in G | x > 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0. Elle admet une borne inférieure a.

Montrons maintenant que, si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ et, si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.

• Supposons $a = 0$. Soit x réel et $r > 0$.

Il existe g dans G tel que : $0 < g < r$.

Posons $n = E\left(\dfrac{x}{g}\right)$. Nous avons :

$$n \leqslant \frac{x}{g} < n + 1.$$

Donc : $ng \in]x - r, x + r[$.

Puis : $]\ x - r, x + r[\cap G \neq \varnothing$. G est dense dans $\mathbb{R}$.

• Supposons $a > 0$. Établissons d'abord que : $a \in G$.

Si a n'est pas dans G, on peut trouver g_1 dans G tel que : $a < g_1 < 2a$, puis g_2 dans G tel que : $a < g_2 < g_1 < 2a$. On en déduit : $0 < g_1 - g_2 < a$. Or, $g_1 - g_2$ est dans G.

Ce n'est pas possible.

Il est alors immédiat que : $a\mathbb{Z} \subset G$.

Soit g dans G. Écrivons : $g = na + r$, avec :

$$n = E\left(\frac{g}{a}\right) \quad \text{et} \quad r \in [0, a[.$$

Alors r appartient à G, donc $r = 0$.

Nous en déduisons : $a\mathbb{Z} = G$.

2) Soit a et b deux réels non nuls. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe x réel tel que :

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = x\mathbb{Z}.$$

Nous en déduisons l'existence de deux entiers relatifs p et q tels que : $a = xp$ et $b = xq$.

$\dfrac{a}{b}$ est alors un rationnel.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel $\dfrac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux. Nous savons qu'il existe deux entiers u et v tels que : $pu + qv = 1$. Puis :

$$\{am + bn\ ;m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\frac{b}{q}(pm + qn)\ ;m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{b}{q}\mathbb{Z}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.7. Frontière d'une partie

A étant une partie de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$:

un **point frontière** de A est un point adhérent à A mais n'appartenant pas à l'intérieur de A.

La **frontière** de A est l'ensemble des points frontière de A, c'est-à-dire : $\overline{A} - \overset{\circ}{A}$, ou encore, ce qui revient au même : $\overline{A} \cap \overline{\complement A}$.

Conséquences :

- La frontière de A est une partie fermée de E.
- La frontière de A est la frontière du complémentaire de A.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$, la frontière de $]a, b[$ est $\{a, b\}$.
- Dans $\mathbb{R}$, la frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.
- Dans un espace vectoriel normé, la frontière de $B(a, r)$ est $S(a, r)$.

1.8. Topologie induite

Les notions rencontrées dans ce chapitre se généralisent à une partie A, qui n'est pas un espace vectoriel. Cette extension, bien que légère, nous sera indispensable lors de l'étude de la continuité.

Si $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E, la restriction de $\| \|$ à A possède les propriétés d'une norme. Nous ne parlerons pas de norme sur A, car A n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Mais nous savons que la distance d sur E, associée à la norme $\| \|$, définit sur A une distance induite (que nous noterons encore d, pour simplifier) et que l'espace (A, d) est alors un espace métrique. Les boules de l'espace A sont alors les intersections de A avec des boules de E. Plus précisément, en notant B_A une boule de A :

$$\forall a \in A \quad \forall r > 0 \quad B_A(a, r) = A \cap B(a, r).$$

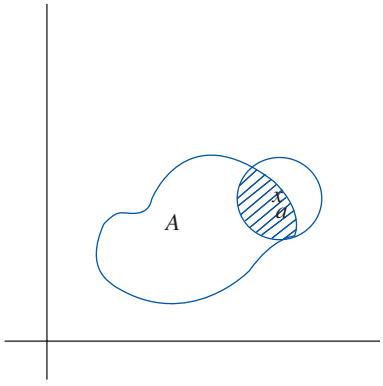
Il est alors possible, en utilisant les boules de A, de définir sur A une topologie, dite topologie induite sur A.

Une partie O de A est un ouvert pour la topologie induite de A si :

$\forall a \in O \ \exists r > 0 \qquad B_A(a, r) \subset O$.

On dit que O est un **ouvert relatif** à A.

Attention : Un ouvert relatif à A n'est pas nécessairement un ouvert de E.]1,2] est un ouvert de [0,2], mais n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.



Doc. 6.

Théorème 8

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Une partie O de A est un ouvert relatif à A si et seulement si O est l'intersection d'un ouvert de E avec A.

Une partie F de A telle que $A \backslash F$ soit un ouvert relatif à A est un **fermé relatif** à A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 9
Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Une partie F de A est un fermé relatif à A si et seulement si F est l'intersection d'un fermé de E avec A.

Attention : Un fermé relatif à A n'est pas nécessairement un fermé de E.

$[1,2[$ est un fermé de $[0,2[$, mais n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Soit $a \in A$ et V une partie de A contenant a. S'il existe $r > 0$ tel que $B_A(a,r) \subset V$, on dit que V est un **voisinage** de a **relatif** à A.

Théorème 10
Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E contenant a. Une partie V de A contenant a est un voisinage de a relatif à A si et seulement si V est l'intersection d'un voisinage de a dans E avec A.

2 Limites

Soit A une partie de E et f une application de A dans F.

Dans tout ce qui suit, a désigne un point adhérent à A et b, c des points de F.

Nous adopterons les conventions suivantes :

• Si a est un point de E adhérent à A, on dit que f possède la propriété P au voisinage de a si P est vraie sur l'intersection de A avec une boule de rayon non nul de centre A.

Exemple : la fonction $x \to \sin\dfrac{1}{x}$ est bornée au voisinage de 0.

• Si $E = \mathbb{R}$, on dit que f possède la propriété P au voisinage de $+\infty$ si P est vraie sur un intervalle du type $]c, +\infty[$. On procède de manière similaire en $-\infty$.

Exemple : la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

2.1. Définitions

On dit que f admet b comme **limite** au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a.

Théorème 11
La limite de f en a, lorsqu'elle existe, est unique.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Lorsque f admet b comme **limite** au point a, on note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = b.$$

Théorème 12
f admet b comme limite en a si et seulement si :

$$\forall V \in V(b) \quad \exists W \in V(a) \quad f(W \cap A) \subset V.$$

Vous remarquerez que $W \cap A$ est un voisinage de a relatif à A.

Corollaire 12.1
Si f admet en a la limite b, alors b est adhérent à $f(A)$.

Démonstration
Soit a dans $\overline{A}$ et V un voisinage de b.
Il existe donc un voisinage W de a tel que : $f(W \cap A) \subset V$.
L'élément a étant adhérent à A, nous avons : $W \cap A \neq \emptyset$.
Donc : $V \cap f(A) \neq \emptyset$ et $b \in \overline{f(A)}$.

P étant une partie de A, a un point de E adhérent à P, on dit que f admet une **limite** au point a selon P lorsque la restriction de f à P admet une limite en a :

$$\exists b \in F \quad \forall V \in V(b) \quad \exists W \in V(a) \quad f(W \cap P) \subset V.$$

Si f admet une limite en a, alors f admet une limite en a selon P.

Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

On suppose ici que $E = \mathbb{R}$ et on note b un point de F. Lorsque f est définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$, on dit que f admet b comme limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad (x \geqslant y) \Rightarrow (\|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon).$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = b$.
On définit de même une limite en $-\infty$.

Exemple :
Lorsque $E = \mathbb{R}$, a est un réel, f est définie sur A et $P =]a, +\infty[$, on retrouve la définition de la limite de f en a à droite rencontrée en première année. De même, avec $P =]-\infty, a[$, on obtient la limite à gauche de f en a.
Prenons :
$E = F = \mathbb{R}$, $A =]0, +\infty[$ et définissons f en posant $f(x) = x^x$. La limite à droite de f en 0 est 1.

$+\infty$ ou $-\infty$ comme limite

Ici, $F = \mathbb{R}$ et a est un point adhérent à A.
On dit que f admet $+\infty$ comme limite au point a si :

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (f(x) \geqslant K).$$

Et l'on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
On définit de même une limite $-\infty$ au point a.

Extension au cas d'une variable vectorielle dont la norme tend vers $+\infty$

Soit f une fonction d'une partie A non bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\ \|)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- On dit que f tend vers 0 lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x\| \geqslant K \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que $|f|$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x\| \geqslant K \Rightarrow |f(x)| \geqslant M.$$

Exemple : Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x, y) = x \exp(-(x^2+y^2))$.
Cette fonction tend vers 0 lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7, 8 et 9.***

2.2. Limites d'applications et suites convergentes

Théorème 13

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'application f admet une limite en a.
- Il existe un élément b de F tel que, pour toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(u_n))$ converge vers b dans $(F, \| \|_F)$.
- Pour toute suite (u_n) d'éléments de A, convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge.

Démonstration

Seule l'implication (3) $\Rightarrow$ (2) nécessite un peu de rigueur. Supposons que f possède la troisième propriété. Soit alors deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de A, convergeant vers a. La suite (x_n) définie par : $x_{2n} = u_n$ et $x_{2n+1} = v_n$ converge aussi vers a. La suite $(f(x_n))$ converge. On en déduit l'égalité des limites des suites extraites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ de la suite $(f(x_n))$.

Soit b la limite commune des suites $(f(x_n))$ lorsque (x_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers a. Par l'absurde, supposons que f n'admette pas b comme limite en a, alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \|f(x) - b\|_F > \varepsilon.$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{p+1}$, on obtient :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists x_p \in A \quad \|x_p - a\|_E \leqslant \frac{1}{p+1} \quad \text{et} \quad \|f(x_p) - b\|_F > \varepsilon.$$

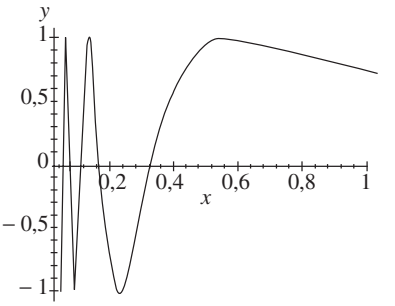
La suite (x_p) converge donc vers a dans $(E, \| \|_E)$, mais la suite $(f(x_p))$ ne converge pas vers b dans $(F, \| \|_F)$. Faux.

Remarque : De nombreux résultats sur les limites découleront des résultats analogues sur les suites. Nous laisserons les démonstrations aux soins du lecteur.

Exemple :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

En effet, pour p dans $\mathbb{N}$, posons $x_p = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + p\pi}$, $f(x_p) = (-1)^p$.

La suite (x_p) converge vers 0 et la suite $(f(x_p))$ diverge.



Doc. 7. *Avec Maple : graphe de la fonction* $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.3. Limites d'applications à valeurs dans un espace vectoriel normé produit

Soit $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ un espace vectoriel normé produit, chaque F_i étant muni d'une norme N_i. f est une application de A dans F.

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, il existe une application f_i de A dans F_i telle que :

$$\forall x \in A \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)).$$

Nous noterons $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ et, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, f_i est appelée $i^{\text{ème}}$ **application composante** de f.

Théorème 14

Soit $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ un espace vectoriel normé produit et $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une application de A dans F.

L'application f admet au point a la limite $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ si et seulement si, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, l'application f_i admet au point a la limite b_i.

Démonstration

Cette démonstration simple utilise les inégalités :

$$(\|f(x) - b\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f_i(x) - b_i\|_i) \quad \text{et} \quad (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \|f_i(x) - b_i\|_i \leqslant \|f(x) - b\|).$$

2.4. Combinaison linéaire de limites

Mensa ACADEMY

Théorème 15

L'ensemble des applications de A dans F qui admettent une limite en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$. L'application de cet ensemble dans F qui, à f associe $\lim\limits_a f$, est linéaire.

Si f et g admettent au point a une limite, pour tout couple (α, β) de $\mathbb{K}^2$:

$$\lim_a(\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_a f + \beta \lim_a g.$$

2.5. Produit de limites

Théorème 16

Soit f une application de A dans F admettant b comme limite en a et u une application de A dans $\mathbb{K}$ ayant α comme limite en a. Alors, le produit uf admet αb comme limite au point a :

$$\lim_a uf = \lim_a u \lim_a f.$$

Corollaire 16.1

L'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$ qui admettent une limite en a est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, F)$. L'application de cette algèbre dans $\mathbb{K}$ qui, à f associe $\lim\limits_a f$, est un morphisme d'algèbre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.6. Inverse de limites

Théorème 17

Étant donné une fonction u de A dans $\mathbb{K}$, de limite β en a, avec : $\beta \neq 0$. Alors :

- $\exists r > 0 \quad \forall x \in BF(a,r) \cap A \quad u(x) \neq 0$,
- en posant $B = BF(a,r) \cap A$, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie sur B, a est un point adhérent à B et $\dfrac{1}{u}$ admet pour limite $\dfrac{1}{\beta}$ au point a :

$$\lim_a \frac{1}{u} = \frac{1}{\lim\limits_a u}.$$

Démonstration

- Puisque $\beta \neq 0$, $\left|\dfrac{\beta}{2}\right| > 0$. Il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant r \Rightarrow |u(x) - \beta| \leqslant \left|\frac{\beta}{2}\right|.$$

$$\forall x \in B \quad 0 < \left|\frac{\beta}{2}\right| \leqslant |u(x)| \leqslant 3\left|\frac{\beta}{2}\right|.$$

- Montrer que a est adhérent à B est un exercice élémentaire. De plus :

$$\forall x \in B \quad 0 \leqslant \left|\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{u(x) - \beta}{u(x)\beta}\right| \leqslant 2\left|\frac{u(x) - \beta}{\beta^2}\right|.$$

Ceci permet de conclure.

Rappelons qu'un quotient de termes positifs se majore en majorant son numérateur ou en minorant son dénominateur.

2.7. Composition des applications

Dans ce paragraphe, $(G, \| \ \|_G)$ est un espace vectoriel normé, B une partie de F.

Théorème 18

Si f est une application de A dans B qui admet comme limite b au point a, alors :

- le point b est adhérent à B,
- si, de plus, l'application $g : B \longrightarrow G$ admet la limite c en b, l'application $g \circ f$ admet c comme limite en a.

En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to b} g(y).$$

Rapport CCP, 2002

« Le langage est très souvent d'une rare imprécision : par exemple, sur une indétermination du type l'infini à la puissance 0, un candidat dira que la limite est 1 car "l'exposant l'emporte sur la limite" ».

Démonstration

1. Établi dans le corollaire 12.1.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. g admet c comme limite en b donc :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall y \in B \quad \|y - b\|_F \leqslant \delta \Rightarrow \|g(y) - c\|_G \leqslant \varepsilon.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Un tel $\delta > 0$ étant déterminé, on sait aussi que :

$$\exists \mu > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \delta.$$

On en déduit :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|g(f(x)) - c\|_G \leqslant \varepsilon.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 10.*

3 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

La comparaison de fonctions au voisinage d'un point est un outil permettant de préciser le comportement de ces fonctions de manière plus fine que la seule étude des limites.

Dans ce paragraphe, f désigne toujours une application de A dans F, φ une application de A dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à A.

3.1. Relation de domination

La **fonction** f est dite **dominée** par φ au point a si :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \exists V \in V(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad \|f(x)\| \leqslant K|\varphi(x)|.$$

Cette notation est due à Landau (1877-1938), mathématicien allemand.

On écrit alors : $f = O(\varphi)$ ou, s'il est nécessaire de préciser le point a, $f =_a O(\varphi)$.

Propriétés :

1. Si φ ne s'annule pas au voisinage de a, $f = O(\varphi)$ si et seulement si la fonction $\dfrac{1}{\varphi} f$ est une fonction bornée au voisinage de a.

2. $(f = O(\varphi)$ et $g = O(\varphi)) \Rightarrow f + g = O(\varphi)$.
$(f = O(\varphi)$ et $\alpha \in \mathbb{K}) \Rightarrow \alpha f = O(\varphi)$.

L'ensemble des applications de A dans F, dominées par φ au voisinage de a, est donc un sous-espace vectoriel de F^A.

3. Si u est une application scalaire dominée par ψ, et f une application vectorielle dominée par φ, alors l'application vectorielle uf est dominée par $\varphi\psi$.

3.2. Relation de négligeabilité

La **fonction** f est dite **négligeable** devant φ au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in V(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|.$$

La notation $f = o(\varphi)$ n'est pas une égalité, mais une relation d'appartenance. Elle signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant φ au point a. Elle est aussi due à Landau.

On écrit alors : $f = o(\varphi)$, ou, s'il est nécessaire de préciser le point a : $f =_a o(\varphi)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 20. Théorème de caractérisation

f étant une application de A dans F, φ une fonction de A dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à A :

1. f est négligeable devant φ en a si et seulement s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε de A dans F, de limite nulle en a, telle que : $f = \varepsilon\varphi$.

2. Si φ ne s'annule pas sur un voisinage de a, sauf peut-être en a, $f = o(\varphi)$ si et seulement si la fonction $\dfrac{1}{\varphi}f$ a pour limite 0_F lorsque x tend vers a : $f =_a o(\varphi) \Leftrightarrow \lim\limits_a \dfrac{1}{\varphi}f = 0_F$.

Propriétés :

1. $f = o(\varphi) \Rightarrow f = O(\varphi)$.

2. $f = o(\varphi)$ et $\varphi = O(\psi) \Rightarrow f = o(\psi)$.

3. $f = O(\varphi)$ et $\varphi = o(\psi) \Rightarrow f = o(\psi)$.

4. $f = o(\varphi)$ et $g = o(\varphi) \Rightarrow f + g = o(\varphi)$.

$f = o(\varphi)$ et $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha f = o(\varphi)$.

L'ensemble des fonctions négligeables devant φ en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

5. Si u est une application scalaire négligeable devant ψ, et f une application vectorielle négligeable devant φ, alors l'application vectorielle uf est négligeable devant $\varphi\psi$.

Nienso ACADEMY

3.3. Fonctions vectorielles équivalentes en un point

Pour toute application f de $\mathcal{F}(A, F)$, on note $\|f\|$ l'application de A dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\|f(x)\|$.

Théorème 21

La relation définie sur $\mathcal{F}(A, F)$ par : $f \sim_a g \Leftrightarrow f - g =_a o(\|g\|)$ est

- réflexive : $f \sim_a f$;
- symétrique : $f \sim_a g \Rightarrow g \sim_a f$;
- transitive : $f \sim_a g$ et $g \sim_a h \Rightarrow f \sim_a h$.

Les fonctions f et g sont alors dites **équivalentes** en a.

On note aussi : $f(x) \sim_a g(x)$, ou $f(x) \sim g(x)$.

Démonstration

La relation est :

• **symétrique :** Soit f et g deux fonctions de A dans F telles que : $f - g = o(\|g\|)$. Montrons que : $g - f = o(\|f\|)$. Pour cela, nous allons d'abord établir que $g = O(\|f\|)$.

D'après l'hypothèse : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in V(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad \|f(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon\|g(x)\|$.

Or : $\|g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x) - f(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \varepsilon\|g(x)\|$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les notions de limite et d'équivalent sont vagues, il semble qu'un $o(f)$ soit quelque chose de "petit", que :

$(f \sim_a g) \Leftrightarrow (f - g \to_a 0)$. »

$\lim\limits_a (f - g) = 0$ n'entraîne pas : $f \sim_a g$. Cherchez un contre-exemple.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Et donc : $\forall x \in V \cap A \quad (1-\varepsilon)\|g(x)\| \leqslant \|f(x)\|$.

Prenons $\varepsilon < 1$, il vient : $\forall x \in V \cap A \quad \|g(x)\| \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}\|f(x)\|$.

Par conséquent : $g = O(\|f\|)$ et $\|g\| = O(\|f\|)$.

Ainsi : $f - g = o(\|g\|)$ et $\|g\| = O(\|f\|)$, d'où : $f - g = o(\|f\|)$.

• **Transitive :** Soit f, g, h telles que : $f - g = o(\|g\|)$ et $g - h = o(\|h\|)$.

D'après la démonstration ci-dessus, nous savons que : $g-h = o(\|g\|)$ et $\|g\| = O(\|h\|)$,

Donc : $(f-g)+(g-h) = o(\|g\|)$ et $\|g\| = O(\|h\|)$, soit : $f - h = o(\|h\|)$.

La démonstration précédente nous a permis de montrer la propriété suivante :

Propriété :

Soit f et g des fonctions de A dans F et a un point adhérent à A. Alors :

$$f \sim g \Rightarrow \left(g = O(\|f\|) \quad \text{et} \quad f = O(\|g\|)\right).$$

La réciproque est fausse. Cherchez un contre-exemple.

Théorème 22

Soit f et g des fonctions de A dans F et a un point adhérent à A. Si f et g sont équivalentes en a et si f admet la limite l en a, la fonction g admet aussi la limite l en a :

$$\left(f \sim_a g \quad \text{et} \quad \lim_a f = l\right) \Rightarrow \lim_a g = l.$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

Exploitons nos différentes hypothèses :

$\lim\limits_a f = l$ donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_1 \in V(a) \quad \forall x \in V_1 \cap A \quad \|f(x) - l\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\lim\limits_a f = l$, donc f est bornée sur un voisinage V_2 de a : $\exists M > 0 \quad \forall x \in V_2 \quad \|f(x)\| \leqslant M$.

$f \sim g$ soit : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_3 \in V(a) \quad \forall x \in V_3 \cap A \quad \|f(x)-g(x)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}\|f(x)\|$.

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est un voisinage de a. Pour tout x dans $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A$, on a :

$\|g(x) - l\| \leqslant \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon$. Ceci permet de conclure.

Mais la réciproque n'est vraie que si la limite l est non nulle, ainsi que le précise le théorème suivant dont la démonstration est immédiate :

Théorème 23

Soit f une application de A dans F, de limite l non nulle en un point a adhérent à A. Alors f est équivalente en a à la fonction constante, notée l, définie sur A par $l(x) = l$:

$$\left(\lim_a f = l \quad \text{et} \quad l \neq 0_F\right) \Rightarrow f \underset{a}{\sim} l.$$

Dire que f est équivalente en a à la fonction nulle, notée 0, signifie que f est identiquement nulle sur un voisinage de a.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 24

f et g désignant des fonctions vectorielles définies sur A, u et v des fonctions scalaires définies sur A et a un point adhérent à A, alors :

1. $u \sim v$ et $f \sim g \Rightarrow uf \sim vg$,

2. si u et v ne s'annulent pas sur un voisinage de a :

$$\left(u \underset{a}{\sim} v \quad \text{et} \quad f \underset{a}{\sim} g\right) \Rightarrow \frac{f}{u} \underset{a}{\sim} \frac{g}{v}.$$

Théorème 25

Soit f et g deux fonctions de A dans F équivalentes en a, point adhérent à A. Alors les fonctions scalaires $\|f\|$ et $\|g\|$ sont équivalentes en a, c'est-à-dire :

$$f \sim_a g \Rightarrow \|f\| \underset{a}{\sim} \|g\|.$$

Exercice : Montrer que, dans chacune des relations o et O, on peut remplacer une fonction par toute autre fonction équivalente. Ainsi, par exemple :

$f = o(\varphi)$ et $\varphi \sim \psi \Rightarrow f = o(\psi)$.

3.4. Cas particulier des fonctions numériques équivalentes en un point

Les fonctions f et g étant définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a étant un point de A adhérent à A, les définitions et théorèmes vus dans le paragraphe précédent s'appliquent toujours. Il est toutefois possible de compléter ces résultats par les théorèmes suivants utilisant le fait que f et g sont à valeurs numériques.

Rapport Mines Albi, 1997

« De nombreux candidats ignorent la signification de $O\left(\dfrac{\exp(x^2)}{2x}\right)$. *»*

Théorème 26

f et g étant deux fonctions numériques définies sur A et a un point adhérent à A, alors :

$$f \sim_a g \Leftrightarrow \exists V \in V(a) \quad \exists w \in \mathcal{F}(V \cap A, \mathbb{K}) \quad f = (1+w)g$$

et

$$\lim_a w = 0.$$

Conséquences :

1. Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur A et s'il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas, alors :

$$f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 1.$$

2. Soit f et g deux fonctions réelles, équivalentes en a. On suppose que g est de signe constant sur un voisinage de a. Alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g ont le même signe.

Rapport Centrale, 2003

« Les techniques de base ne sont pas assimilées : la manipulation des équivalents et des fonctions « ∘ » se fait sans aucune précaution, ce qui conduit à des erreurs fatales, beaucoup ayant cru résoudre la question par l'utilisation des équivalents. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Propriétés :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad f_i \sim g_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} f_i \sim \prod_{i=1}^{n} g_i$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f \sim g \Rightarrow f^n \sim g^n$.

3. f et g étant équivalentes en a et telles qu'il existe un voisinage de a sur lequel f (et donc g) ne prenne que des valeurs positives (respectivement strictement positives), alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad f^\alpha \sim g^\alpha (\text{resp. } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^\alpha \sim g^\alpha).$$

4. $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g \Leftrightarrow \lim_a (f-g) = 0$.

5. f et g étant équivalentes en a, à valeurs strictement positives et telles que g admet en a une limite l, élément de $\mathbb{R}^+\backslash\{1\} \cup \{+\infty\}$, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a, c'est-à-dire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,F) \ (f \underset{a}{\sim} g, \lim_a g = l \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\} \cup \{+\infty\}) \Rightarrow \ln f \underset{a}{\sim} \ln g.$$

6. $\lim_a f = l$ et $l \neq 0 \Rightarrow f \underset{a}{\sim} l$.

$f \sim g$ n'entraîne pas $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g$.

Ainsi que vous l'avez déjà rencontré en première année, la relation d'équivalence n'est compatible ni avec l'addition, ni avec la soustraction. C'est une source d'erreurs fréquentes et graves.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« ...il y a des abus concernant l'addition des $\sim$, qui n'est pas valable en général et doit être justifiée. »

Théorème 27

φ étant une application de A dans B, à valeurs réelles, a (respectivement b) un point adhérent à A (respectivement B), f et g deux fonctions de B dans F, alors :

1. $\lim_a \varphi = b$ et $f =_b O(\|g\|) \Rightarrow f \circ \varphi =_a O(\|g \circ \varphi\|)$.

2. $\lim_a \varphi = b$ et $f =_b o(\|g\|) \Rightarrow f \circ \varphi =_a o(\|g \circ \varphi\|)$.

3. $\lim_a \varphi = b$ et $f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow f \circ \varphi \underset{a}{\sim} g \circ \varphi$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« De nombreux étudiants confondent développements limités et équivalents, ainsi il n'est pas rare de rencontrer par exemple : $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$. De plus, la recherche d'équivalents, même simples, pose souvent problème. Il en est de même du choix de l'ordre auquel doit se faire un développement limité. »

Exemple :

$$\text{Arccos } x \sim_{1^-} \sin(\text{Arccos } x) \sim_{1^-} \sqrt{1-x^2} \sim_{1^-} \sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a(\ln x)^b}{x^c(\ln x)^d} = \lim_{x\to+\infty} x^{a-c}(\ln x)^{b-d} = \begin{cases} 0 \text{ si } a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b < d) \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$$x^a(\ln x)^b = o(x^c(\ln x)^d) \Leftrightarrow [(a < c) \quad \text{ou} \quad (a = c \quad \text{et} \quad b < d)].$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« On rencontre « $t^x \mathrm{e}^{-t} \sim \mathrm{e}^{-t}$, $t \to +\infty$ ». De tels abus ne peuvent être acceptés et il est souhaitable de rappeler la définition des $\circ, \sim$. »

► ***Pour s'entraîner : revoir les exercices de première année.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Étude d'une fonction décroissante

(extrait de Centrale 1993 math 1)

On désigne par f une application continue, positive et décroissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

1) *Dans cette question, on suppose que :*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Montrer que :

$$\int_x^{x+1} f =_{0^+} o(f(x)).$$

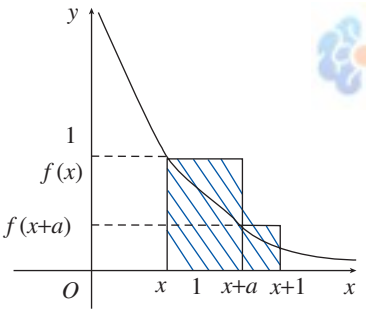
2) *Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.*

- *Montrer que :*

$$(f' =_{+\infty} o(f)) \Rightarrow (f(x) \sim_{+\infty} f(x+1)).$$

- *En supposant de plus que f est convexe, prouver la réciproque.*

1)



Pour tout $a \in]0,1[$ et $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} f &= \int_x^{x+a} f + \int_{x+a}^{x+1} f \\ &\leqslant af(x) + (1-a)f(x+a) \\ &\leqslant af(x) + f(a).\end{aligned} \qquad (*)$$

Fixons ε dans $]0,1[$. D'après (*), on a :

$$0 \leqslant \int_x^{x+1} f \leqslant \frac{\varepsilon}{2} f(x) + f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = f(x)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{f(x)}\right).$$

Or $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0,\delta[\quad \frac{f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{f(x)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit : $\forall x \in]0,\delta[\quad 0 \leqslant \int_x^{x+1} f \leqslant f(x)\varepsilon$.

2) Nous allons établir que $f(x) - f(x+1) = o(f(x))$.

- Puisque f est décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant f(x) - f(x+1) &= -\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $f' =_{+\infty} o(f)$, il existe $A > 0$ tel que : $(t \geqslant A) \Rightarrow (|f'(t)| \leqslant \varepsilon f(t))$.

On en déduit que, pour $x \geqslant A$ et t dans $]x, x+1[$,

$$-f'(t) = |f'(t)| \leqslant \varepsilon f(t) \leqslant \varepsilon f(x).$$

Intégrons sur $[x, x+1]$:

$$\begin{aligned}0 \leqslant -\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t &= f(x) - f(x+1) \\ &\leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon f(x)\,\mathrm{d}t = \varepsilon f(x).\end{aligned}$$

On a donc :

$$(x \geqslant A) \Rightarrow (0 \leqslant f(x) - f(x+1) \leqslant \varepsilon f(x)).$$

On a prouvé que $f(x) - f(x+1) =_{+\infty} o(f(x))$, c'est-à-dire : $f(x) \sim_{+\infty} f(x+1)$.

- L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et le théorème des accroissements finis permet de dire que :

$$\forall x > 0, \ \exists c \in]x, x+1[\quad f(x+1) - f(x) = f'(c).$$

De plus, f est convexe et décroissante, donc :

$$f'(c) \leqslant f'(x+1) \leqslant 0 \text{ et } |f'(x+1)| \leqslant f(x) - f(x+1).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \sim_{+\infty} f(x+1)$, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant A, 0 \leqslant f(x) - f(x+1) \leqslant \varepsilon f(x+1).$$

D'où, $(x \geqslant A) \Rightarrow (|f'(x+1)| \leqslant \varepsilon f(x+1))$.

On a prouvé que : $f'(x+1) =_{+\infty} o(f(x+1))$.

Donc : $f' =_{+\infty} o(f)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4 Continuité en un point

4.1. Définition et caractérisations

Lorsque a est dans A et f admet en a la limite b, d'après la définition de la limite, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

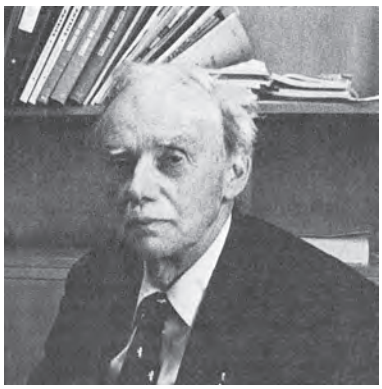
En particulier, on obtient : $f(a) = b$. Dans ce cas, on dit que f est **continue au point a.**

Ainsi, si f est définie au point a, f admet la limite b en a si et seulement si f est continue en a. Mathématiquement, l'application f est **continue au point a** de A si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

ou, ce qui revient au même, si :

$$\forall W \in V(f(a)) \quad \exists V \in V(a) \quad f(V \cap A) \subset W.$$



Paul Dirac *(1902-1984), mathématicien et physicien anglais, fonde la théorie complète de la mécanique quantique et publie « The principles of quantum mechanics » en 1930. Pour ce travail, il reçoit le prix Nobel de physique en 1933. Après avoir enseigné les mathématiques à Cambridge pendant 37 ans, il devient, à 69 ans, professeur de physique à Florida State University.*

Remarque :

La définition de la continuité en un point dépend des normes considérées sur E et sur F. Toutefois la substitution à l'une de ces normes d'une norme équivalente ne modifie pas l'ensemble des fonctions continues en ce point.

Exemple : Définissons la fonction de Dirac δ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

L'application δ n'a pas de limite en 0. Elle n'est pas continue. Toutefois, en 0, elle admet 0 comme limite à gauche et 0 comme limite à droite.

Théorème 28

L'application f est continue au point a de A si et seulement si, pour toute suite (x_p) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_p))$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \| \|_F)$.

Théorème 29

Soit $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ un espace vectoriel normé produit. Une application f de A dans F est continue en a si et seulement si ses p applications composantes sont continues en a.

Rapport Mines Albi, 1997

« La continuité de g pour obtenir les limites éventuelles de (u_n) n'a presque jamais été signalée. »

► *Pour s'entraîner : ex. 11.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.2. Prolongement par continuité

Théorème 30
Soit f une application de A dans $(F, \|\ \|_F)$ et a un point de A. Alors l'application f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

Si a est un point adhérent à A n'appartenant pas à A, l'application f n'est pas définie en a. Cependant, si f admet b comme limite au point a, alors on peut définir l'application $\widetilde{f}$ de $A \cup \{a\}$ dans F en posant :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ b \text{ si } x = a \end{cases}$$

Par construction, $\widetilde{f}$ est continue au point a. L'application $\widetilde{f}$ est appelée le **prolongement** par **continuité** de f au point a.

Exemples :

- Soit l'application f de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Vérifiez que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Nous pouvons donc prolonger par continuité f en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.

- L'application f de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Les deux suites $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ et $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$ convergent vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Si f était prolongeable par continuité, alors les suites $\left(f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ et $\left(f\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$ auraient la même limite et ce n'est pas le cas.

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Rapport CCP, 2001
*« On peut signaler pour anecdote, qu'il n'y a pas **prolongation** de la fonction (il ne faut pas exagérer des matchs de football). »*

En pratique, et bien que ceci soit un abus de notation (car on modifie l'ensemble de départ de f) on s'autorise à dire simplement que l'on prolonge f par continuité en posant $f(a) = b$, et sans utiliser la notation $\widetilde{f}$.

5 Application continue sur une partie

5.1. Définition et propriétés algébriques

On dit que l'application f est **continue sur** A (ou **continue** de A **dans** F) si f est continue en tout point de A.

Une application f continue, bijective de A sur une partie B de F dont la réciproque f^{-1} est continue sur B est appelée un **homéomorphisme** de A sur B.

Rapport Ensi, 1997
« De nombreux raisonnements faux ou absurdes liés à la notion de fonction continue sur un intervalle. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notation : On désigne par $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F. Lorsque $F = \mathbb{K}$, on abrège $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ en $\mathcal{C}(A)$.

- $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^A = \mathcal{F}(A, F)$.

- $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^A$.

- Si u est une fonction continue de A dans $\mathbb{K}$ et f une fonction continue de A dans F, alors la fonction uf est une fonction continue de A dans F.

- Si F est de dimension n et si l'on note B une base de F, $f_1, \dots, f_n$ les applications composantes de f dans la base B, alors :

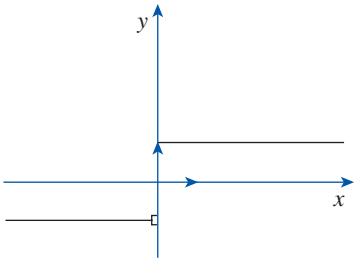
$$(f \in \mathcal{C}(A, F)) \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f_i \in \mathcal{C}(A)).$$

- Si f est une fonction continue de A dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annule en aucun point de A, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur A.

- Notons B une partie de F. Si f est continue de A dans F, g continue de B dans G, et si $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue de A dans G.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 12.*

f continue sur A et $f_{|A}$ continue n'ont pas le même sens. Trouvez A.



Rapport Mines-Ponts, 2003

« Bien que cette difficulté ait déjà été mentionnée dans les précédents rapports, certains candidats continuent de confondre la notion de continuité de la restriction d'une fonction à un sous-ensemble, et la continuité de cette fonction sur ce sous-ensemble. »

Cherchez une bijection continue qui ne soit pas un homéomorphisme.

5.2. Exemples importants

5.2.1 Applications lipschitziennes

Théorème 31. Continuité des applications lipschitziennes

Toute application lipschitzienne d'une partie A de $E = \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue sur A.

■ Nous avons vu que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\|x\|_E - \|y\|_E| \leqslant \|x - y\|_E.$$

L'application $\| \ \|_E$ est une application 1-lipschitzienne de $(E, \| \ \|_E)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$.

Elle est donc continue sur $(E, \| \ \|_E)$.

■ Soit $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $\|\|$ la norme produit sur l'espace vectoriel E^2 et d la distance associée. L'application d est lipschitzienne, donc continue.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En effet :

$$\forall (x_1,y_1)\in E^2 \quad \forall (x_2,y_2)\in E^2 \quad |d(x_1,y_1)-d(x_2,y_2)| \leqslant |\|x_1-y_1\|_E-\|x_2-y_2\|_E|$$
$$\leqslant \|x_1-y_1-x_2+y_2\|_E$$
$$\leqslant \|x_1-x_2\|_E+\|y_1-y_2\|_E$$
$$\leqslant 2\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|$$

■ Soit $F=F_1\times F_2\times\cdots\times F_p$ un espace vectoriel normé produit. Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, la projection p_i de F sur F_i est 1-lipschitzienne, donc continue.

5.2.2 Fonctions du type : $\varphi(x,t)=g(t)$

On considère $(E,\|\ \|_E),(F,\|\ \|_F)$ et $(G,\|\ \|_G)$ trois espaces vectoriels normés, I une partie non vide de G et g une application continue de I dans F. L'application suivante φ de $E\times I$ dans F définie par $\varphi(x,t)=g(t)$ est continue sur $I\times E$.

Exemple : L'application h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par $h(x,t)=(t+t^2,1+x)$, est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5.2.3 Fonctions du type : $H(x,t)=f(x)g(t)$

On considère $(E,\|\ \|_E)$ et $(G,\|\ \|_G)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, I une partie non vide de G. Étant donné f dans $\mathcal{C}(A)$ et g dans $\mathcal{C}(I)$, l'application H de $A\times I$ dans $\mathbb{K}$ définie par $H(x,t)=f(x)g(t)$ est continue sur $A\times I$.

Exemple : l'application $(x,y)\longmapsto \cos(x)e^y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5.2.4 Fonctions polynomiales

On appelle **fonction monôme** des n variables $(x_1,\dots,x_n)$ toute application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ pouvant se mettre sous la forme :

$$f(x_1,\dots,x_n)=c\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_i}$$

où c est un élément de $\mathbb{K}$ et $r_1,\dots,r_n$ sont des entiers positifs ou nuls. On appelle **fonction polynomiale** des n variables $(x_1,\dots,x_n)$ toute combinaison linéaire de fonctions monômes des n variables $(x_1,\dots,x_n)$.

Toute **fonction polynomiale** des n variables $(x_1,\dots,x_n)$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple :

La fonction Det de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{K}$, est continue en tant que composée de fonctions continues. En effet, l'application f de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\|\ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}^{n^2},\|\ \|_\infty)$, définie par $f(M)=(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est 1-lipschitzienne et le déterminant est une fonction polynomiale des m_{ij}.

Il existe des applications continues, non lipschitziennes comme la fonction f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x\longmapsto \frac{1}{x}.$$

En effet :

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{|xy|}$$

et pour tout réel M, il existe $(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que :

$$\frac{1}{|xy|}\geqslant M.$$

On en déduit que f n'est pas lipschitzienne.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2.5 Fonctions rationnelles de n variables

On appelle **fonction rationnelle** des n variables $(x_1, \dots, x_n)$ toute fonction f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ pouvant se mettre sous la forme : $f = \dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales des n variables $(x_1, \dots, x_n)$, le dénominateur Q n'étant pas le polynôme nul. Le domaine de définition de f est l'ensemble D des points de $\mathbb{K}^n$ en lesquels Q ne s'annule pas.

Toute fonction rationnelle f des n variables $(x_1, \dots, x_n)$ est continue sur son domaine de définition D.

Rapport ENS Lyon, 2000

« Rappelons aussi que la continuité partielle n'entraîne pas forcément la continuité au sens de la norme en général. »

Application 6

Trois exemples de fonctions continues

1) *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x,y,z) = (x^2+y^2, \sin(xy), z-2x)$, est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

2) *Montrer que l'application g :*

$$(x,t) \longmapsto \frac{t^n e^{tx}}{1+t^2+x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) *Montrer que l'application h définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ par : $h(x,y) = y^x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.*

Peut-on prolonger h en un point $(x_0, 0)$?

1) Notons f_1, f_2 et f_3 les applications composantes de f. On remarque que f_1 et f_3 sont des fonctions polynomiales en (x,y,z). De même l'application $(x,y,z) \longmapsto xy$ est une fonction polynôme en (x,y,z) et la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de composition des applications continues permet d'en déduire que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^3$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2) L'application g est le produit des deux applications $(x,t) \longmapsto \dfrac{t^n}{1+t^2+x^2}$ et $(x,t) \longmapsto e^{xt}$.

La première est une fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x,t) \longmapsto e^{xt}$ est la composée de l'application exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de $(x,t) \longmapsto xt$ qui est une fonction polynomiale, continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) Comme $h(x,y) = \exp(x\ln(y))$, un raisonnement similaire aux deux précédents permet de conclure.

Si $x_0 < 0$, alors $x\ln(y)$ tend vers $+\infty$, lorsque (x,y) tend vers $(x_0, 0)$, donc h ne peut être prolongée par continuité en $(x_0, 0)$.

Si $x_0 > 0$, alors $x\ln(y)$ tend vers $-\infty$, lorsque (x,y) tend vers $(x_0, 0)$, donc h peut être prolongée par continuité en $(x_0, 0)$ en posant $h(x_0, 0) = 0$.

Qu'en est-il lorsque $x_0 = 0$?

Choisissons $y = x > 0$, et faisons tendre x vers 0, alors $h(x,y) = h(x,x) = e^{x\ln(x)}$ tend vers 1. Donc $h(x,y)$ tend vers 1 si l'on s'approche de (0,0) en restant sur la droite d'équation $y = x$.

Mais, si l'on s'approche de (0,0) en restant sur la courbe d'équation $y = e^{-2/x}$, alors :

$h(x,y) = e^{-2}$. On ne peut donc pas prolonger h par continuité en (0,0).

Attention : Cette fonction se rencontre souvent dans les problèmes de concours. Il faut se méfier du point (0,0) (voir Centrale 1995).

► *Pour s'entraîner : ex. 13.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.3. Topologie et applications continues

Théorème 32

Soit f une application d'une partie A de E, à valeurs dans F. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue ;

2. l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif à A ;

3. l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif à A.

Le terme « relatif à » est essentiel. Pensez à la fonction Arctan.

$$\text{Arctan}(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Démonstration

• Montrons que : $1 \Rightarrow 2$. Soit W un fermé de F. Montrons que tout point x de A adhérent à $f^{-1}(W)$ est dans $f^{-1}(W)$. Soit x un tel point, il existe une suite (x_p) d'éléments de $f^{-1}(W) \cap A$ qui converge vers x dans $(E, \| \|_E)$. Or f est continue sur A, donc la suite $(f(x_p))$ converge vers $f(x)$ dans $(F, \| \|_F)$. De plus, pour tout p, $f(x_p)$ est dans W, car x_p appartient à $f^{-1}(W)$.

Donc $f(x)$ est la limite d'une suite d'éléments de W. Il est alors adhérent à W, qui est fermé. $f(x)$ est dans W et x dans $f^{-1}(W)$.

• Montrons que : $2 \Rightarrow 3$. Soit W un ouvert de F. Rappelons que :

$$f^{-1}(\complement_F W) = \{x \in A | f(x) \in \complement_F W\} = \{x \in A | f(x) \notin W\} = \complement_A(f^{-1}(W)).$$

W étant un ouvert de F, $\complement_F W$ est un fermé de F, donc :

$$f^{-1}(\complement_F W) = \complement_A(f^{-1}(W))$$

est un fermé relatif à A et, finalement, $f^{-1}(W)$ est un ouvert relatif à A.

• Montrons que : $3 \Rightarrow 1$. Soit a un point de A. Montrons que f est continue en a, c'est-à-dire que :

$$\forall W \in V(f(a)) \quad \exists V \in V(a) q f(V \cap A) \subset W.$$

Soit W un voisinage de $f(a)$. Il existe U, ouvert de F, tel que :

$$\{f(a)\} \subset U \subset W.$$

a est donc dans $f^{-1}(U)$. Par hypothèse, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à A. Il existe donc un ouvert O de E, tel que :

$$f^{-1}(U) = O \cap A.$$

L'élément a appartient à O et O est un ouvert de E. Donc O est un voisinage de a tel que :

$$f(O \cap D) \subset W.$$

On choisit $V = O$.

Exemple :

Soit $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $\{x ; f(x) = \alpha\}$ est un fermé de $(E, \| \|_E)$.

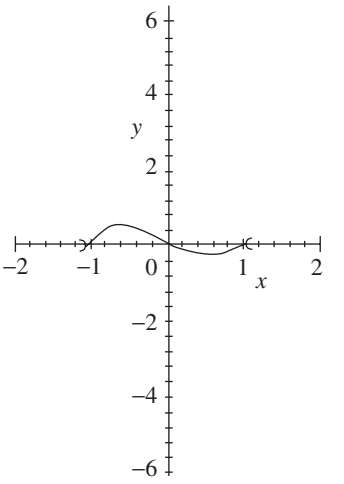
L'ensemble $\{x ; f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de $(E, \| \|_E)$.

L'ensemble $\{x ; f(x) \leqslant \alpha\}$ est un fermé de $(E, \| \|_E)$.

Rappelons que la notation :

$$f^{-1}(W) = \{x \in E | f(x) \in W\},$$

ne signifie pas que f est bijective, mais désigne l'image réciproque par f de la partie W de F.



L'image directe d'un ouvert n'est pas un ouvert en général. Ainsi, si nous considérons la fonction g de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^3 - x$.

$$f(]-1,1[) = \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$$

► *Pour s'entraîner : ex. 14, 15, 16 et 17.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 7

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$

1) *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *est une partie dense de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) *Montrer que* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *En déduire la frontière de* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *dans* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$.

1) Soit M une matrice singulière de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque. Considérons les matrices $M+\lambda I_n$. On sait que $\text{Det}(M+\lambda I_n)$ est un polynôme en λ, qui s'annule en 0. Ce polynôme admet au plus n racines. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a dans $]0, \varepsilon[$ tel que $\text{Det}(M + aI_n) \neq 0$.

La matrice $M + aI_n$ appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\|(M + aI_n) - M\|_\infty = a < \varepsilon.$$

Donc M appartient à l'adhérence de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

2) L'application Déterminant est continue et $\mathbb{K}^*$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \text{Det}^{-1}(\mathbb{K}^*)$.

Donc $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{Fr}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) = \overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

La frontière de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc l'ensemble des matrices singulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.4. Continuité et parties denses

Théorème 33

Soit f une application continue d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ dans un espace vectoriel normé $(F, |||)$. L'image de toute partie A dense dans E par f est une partie dense dans $f(E)$.

Démonstration

Soit $y = f(x)$ un point de $f(E)$ n'appartenant pas à $f(A)$ et V un voisinage de y. La continuité de f entraîne l'existence d'un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. Or U rencontre A, $f(U)$ rencontre $f(A)$. Donc V rencontre $f(A)$.

Exemple : **Une partie dense de l'ensemble des complexes unitaires**

Soit α un réel tel que $\dfrac{\alpha}{\pi}$ soit irrationnel. L'application $f : t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$ car $\dfrac{\alpha}{\pi}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Son image par f : $G = \{e^{ian} | n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie dense de U. Enfin, $\alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$. Donc G est distinct de U.

Exemple : $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. L'application *cosinus* est continue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\cos(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1, 1]$.

Théorème 34

Soit f et g deux applications continues de A dans F et D une partie dense de A. Si f et g coïncident sur D, elles coïncident sur A.

Démonstration

Soit a dans A. D est dense dans A, donc il existe une suite (u_n) de points de D convergeant vers a. Pour tout n, nous avons : $f(u_n) = g(u_n)$. La continuité de f et de g en a permet de conclure : $f(a) = g(a)$.

Exemple : Cherchons les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Vous montrerez par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{Z}$: $f(n) = nf(1)$.

Pour tout (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, le calcul de $f\left(q\dfrac{p}{q}\right)$ permet d'établir que :

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = rf(1).$$

Les applications f et $(x \longmapsto xf(1))$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Elles coïncident sur $\mathbb{Q}$, dense dans $\mathbb{R}$.

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1).$$

Réciproquement, toute fonction linéaire convient.

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer qu'un point x de A est intérieur à A, on peut chercher une boule ouverte de centre x, contenue dans A.

- Pour prouver qu'un point x de E est adhérent à A, on peut :
  - chercher une suite d'éléments de A convergeant vers x ;
  - montrer que toute boule ouverte de centre x rencontre A.

- Pour établir que A est ouvert, on peut montrer que :
  - A est voisinage de chacun de ses points ;
  - $\complement_E A$ est fermé.

- Pour montrer que A est fermé, on peut :
  - considérer une suite quelconque de A, convergente dans E et prouver que sa limite appartient à A ;
  - montrer que tout point adhérent à A est dans A ;
  - montrer que $\complement_E A$ est ouvert.

- Pour montrer que A est dense, on peut prouver que :
  - A est l'image d'une partie dense par une application continue ;
  - tout élément x de E est limite d'une suite d'éléments de A ;
  - toute boule ouverte de E a une intersection avec A non vide.

- Pour prouver que la fonction f admet b comme limite au point a, on pourra :
  - décomposer f et utiliser les opérations sur les limites ;
  - utiliser les fonctions composantes de f lorsque l'espace F est un espace vectoriel normé produit ;
  - trouver une fonction g, définie sur un ouvert contenant a, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que :

$$\lim_a g = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \|f(x) - b\|_F \leqslant g(x) ;$$

  - prouver que : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour prouver que la fonction f n'admet pas b comme limite au point a, on pourra trouver une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers b.

● Pour prouver que la fonction f n'admet pas de limite au point a, on pourra :

• trouver une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ n'ait pas de limite ;

• prouver que f n'est bornée dans aucune boule de centre a ;

• construire deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de E qui convergent vers a et telles que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ne convergent pas vers la même limite.

● Pour prouver que la fonction f est continue au point a, on pourra :

• décomposer f en fonctions plus simples (polynômes, fractions rationnelles, produits, composées,...) et utiliser les opérations sur les fonctions continues en un point ;

• utiliser les fonctions composantes de f lorsque l'espace F est un espace vectoriel normé produit ;

• montrer que pour toute suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \| \|_F)$;

• en désespoir de cause, sortir les ε, δ de la définition.

● Pour prouver que la fonction f n'est pas continue au point a, il suffit de trouver une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

● Pour prouver qu'une fonction f est continue sur A, on pourra :

• décomposer f en fonctions plus simples (polynômes, fractions rationnelles, produits, composées,...) et utiliser les opérations sur les fonctions continues ;

• montrer que f est continue en chaque point de A ;

• montrer que f est lipschitzienne sur A ;

• montrer que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A ;

• montrer que l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de A.

TD

1. L'égalité du parallélogramme

$(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ dont la norme vérifie l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

On pose :

$$f(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

L'objectif de cet exercice est d'établir que f est un produit scalaire et que $\| \|$ est la norme associée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Prouver que :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z)$$

2) En déduire que :

$$\forall (x, z) \in E^2 \qquad f(2x, z) = 2f(x, z)$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$$

3) Montrer que l'application : Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\alpha \longmapsto \Phi(\alpha) = f(\alpha x, z)$ est continue et en déduire :

$$\forall (\alpha, x, z) \in \mathbb{R} \times E \times E \qquad f(\alpha x, z) = \alpha f(x, z).$$

Conseil : Montrez d'abord la propriété pour α dans $\mathbb{Q}$.

4) Prouver que f est un produit scalaire dont la norme associée est $\| \ \|$.

5) Établir que, si $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé tel que, pour tout sous-espace vectoriel F de dimension 2, la restriction de la norme à F découle d'un produit scalaire sur F, alors la norme $\| \ \|$ découle d'un produit scalaire.

2. Une équation fonctionnelle

Nous allons déterminer l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en au moins un point et vérifiant la relation suivante dans laquelle a désigne une constante réelle :

$$(*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) + f(x - y) = af(x)f(y)$$

1) Que remarquez-vous ?

2) Prouver que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(2u) + f(2v) = af(u + v)f(u - v).$$

En déduire la continuité de f en 0.

3) On fixe x. Calculer :

$$\lim_{y \to 0}[f(x + y) + f(x - y)] \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0}[f(x + y)f(x - y)].$$

En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x)f(y) = f''(y)f(x).$$

6) Déterminer toutes les solutions de (*).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Montrer que, si A est une partie de $(E, \|\ \|)$ et O un ouvert de E, alors $A + O$ est un ouvert de E.

2 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E vérifiant : $\forall x \in A \quad \forall t \geqslant 0 \quad tx \in A$.
Montrer que, si A est ouvert : $A = E$.
Le résultat analogue est-il vrai si A est supposé fermé ?

3 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Déterminer les sous-espaces vectoriels ouverts et fermés dans E.

4 Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F admet un point intérieur. Montrer que $F = E$.

5 Soit (u_n) une suite d'un espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $U_n = \{u_p ; p \geqslant n\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

6 Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que A est dense dans E si et seulement si A rencontre tout ouvert non vide U de E.

7 On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

En quels points l'application f admet-elle une limite ?

8 Soit a un réel. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on pose :

$$f(x) = \frac{a + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Étudier, en fonction de a, les limites à droite et à gauche de f en 0.

9 On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par :

$$g(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

Calculer la limite de g en $(0, 0)$.

10 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et h une application de E dans E. On suppose que : h admet une limite, L, en 0_E et que $\forall x \in E \quad h\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$. Prouver que h est constante.

11 Soit $(E, \|\ \|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés, et f une application linéaire de E dans F telle que, pour toute suite bornée (u_n) de E, la suite $(f(u_n))$ soit bornée. Montrer que f est continue sur E.

12 Considérons la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer son domaine de définition et prouver qu'elle est continue sur ce domaine.

13 Soit $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et f une application de E dans F telle que :

- $\forall (x, y) \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- f est bornée sur $BF(0_E, 1)$:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in E \quad (\|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M).$$

1) Prouver que f est lipschitzienne.

2) En déduire que f est linéaire.

14 Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace préhilbertien complexe.

Montrer que l'orthogonal de toute partie A de E est un sous-espace vectoriel fermé de E.

15 Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) > g(x)$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) > \lambda + g(x).$$

16 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ muni d'une norme $\|\ \|_E$. Montrer que :

$$A = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E^n \ ; (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ libre } \}$$

est un ouvert de E^n, pour la norme produit $\|\ \|$.

17 Montrer que, si n est un entier > 0 et p dans $[\![1, n]\!]$, l'ensemble : $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \text{rg}\ (A) \leqslant p\}$ est un fermé de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

18 Soit A un convexe d'un espace vectoriel normé.

1) Montrer que l'adhérence de A et son intérieur sont convexes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Montrer que l'application φ définie sur E par :

$$\varphi(x) = d(x, A),$$

est convexe.

19 $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\| \|_\infty$ et on considère l'ensemble A des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang n. Montrer que A est vide ou dense dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

20 **1)** Montrer qu'une boule d'un espace vectoriel normé est convexe.

L'objectif de l'exercice est de montrer que certaines parties convexes, fermées de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sont une boule unité fermée pour une certaine norme de $\mathbb{R}^n$ que nous préciserons.

2) Soit C une partie de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ convexe, fermée, bornée, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide.

a) Montrer que C est un voisinage de 0.

b) On fixe x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$A(x) = \{l \in \mathbb{R}^{+*} | x \in lC\}$$

n'est pas vide.

Dans la suite, on pose $j_C(x) = \inf A(x)$.

c) Montrer que j_C est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer que C est la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^n, j_C)$.

21 Soit (U_n) une suite d'ouverts denses de $\mathbb{R}^p$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}^p$. En déduire que $\mathbb{R}^p$ ne peut être la réunion d'une suite (F_n) de fermés d'intérieurs vides.

22 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2}{xy} \text{ si } xy \neq 0 \\ 0 \text{ si } xy = 0 \end{cases}.$$

1) Calculer $f(x, \alpha x)$.

2) L'application f a-t-elle une limite en $(0, 0)$?

23 * Soit f une application convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout a de $\mathbb{R}^+$, la fonction :

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est croissante sur $]a, +\infty[$.

2) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) On suppose que la limite l de $\dfrac{f(x)}{x}$ est réelle. Montrer que $f(x) - lx$ admet une limite l' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

24 * Déterminer toutes les applications h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en 0 et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(2t) = h(t)\cos(t).$$

25 Étudier la continuité en un point x_0 quelconque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \text{ si } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } p \wedge q = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

26 **1)** Soit A et B deux fermés non vides de $(E, \| \|)$.

Prouver que :

$$(A \cap B = \varnothing) \Leftrightarrow (\forall x \in E \quad d(x, A) + d(x, B) \neq 0).$$

2) Soit A et B deux fermés non vides et disjoints de $(E, \| \|)$.

- Construire une application f, continue de E dans $\mathbb{R}$ et telle que : $f_{|A} = 0, f_{|B} = 1$.
- En déduire l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que : $A \subset U$ et $B \subset V$.

27 ** Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 dans $\mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par u_0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite u converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.

28 * **Le théorème du graphe fermé**

1) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Prouver que son graphe est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$.

2) Construire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ et qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3) Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont le graphe est fermé dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

29 Soit f une application de $(E, \| \|_E)$ dans $(F, \| \|_F)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est continue ;

2) $\forall A \subset E \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

3) $\forall B \subset F \quad f^{-1}(\mathring{B}) \subset \mathring{f^{-1}}(B)$;

4) $\forall B \subset F \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Compléments de topologie

3

Introduction

Comment caractériser une suite convergente lorsqu'on ignore sa limite ? Le critère de Cauchy le permet, dans certains espaces vectoriels normés. Ces espaces seront dits complets.

Alors qu'une application continue ne transforme pas nécessairement une suite de Cauchy en une suite de Cauchy, une application uniformément continue le fait.

Vous avez vu en première année que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Afin de généraliser ce théorème à des espaces vectoriels normés, nous allons substituer à la notion intuitive de partie « d'un seul tenant » celle de partie connexe par arcs.

Nous retrouvons, pour les suites d'une partie compacte, le théorème de Bolzano-Weierstrass, rencontré en première année pour les suites complexes bornées.

Pourquoi ce théorème se généralise-t-il aux espaces vectoriels normés de dimension finie ? L'équivalence des normes sur de tels espaces en est la raison.

Un cas particulier d'application entre espaces vectoriels normés est celui d'application linéaire. La linéarité fournit plusieurs caractérisations très simples de la continuité et permet de définir la norme d'une telle application.

OBJECTIFS

- Notions de suites de Cauchy, d'espace complet.
- Continuité uniforme.
- Parties connexes par arcs.
- Notion de partie compacte.
- Le théorème de Bolzano-Weierstass.
- Cas des espaces vectoriels normé de dimension finie.
- Continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés.
- Définition d'une norme d'application linéaire.
- Continuité des applications bilinéaires entre espaces vectoriels normés.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre $(E, \|\ \|)$ désigne un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces complets

1.1. Suites de Cauchy

Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, est appelée **suite de Cauchy** de E lorsqu'elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon).$$

Remarques :

• Si deux normes sont équivalentes sur E, toute suite de Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre.

• La condition de Cauchy peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad (p \geqslant N \Rightarrow \|u_{p+k} - u_p\| \leqslant \varepsilon).$$

Théorème 1
Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration
(u_n) est une suite convergente de limite l. Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \qquad \|u_p - l\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que, pour tout couple (p,k) de $\mathbb{N}^2$:

$$p \geqslant N \Rightarrow \|u_{p+k} - u_p\| \leqslant \|u_{p+k} - l\| + \|u_p - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 2
Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration
(u_n) est une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|)$. Prenons $\varepsilon = 1$, il existe N_1 dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad (p \geqslant N_1 \Rightarrow \|u_{p+k} - u_p\| \leqslant 1).$$

L'ensemble $\{u_q\ ;\ q \geqslant N_1\}$ est borné, car inclus dans la boule de centre u_{N_1} et de rayon 1.

Par ailleurs, $\{u_p\ ;\ 0 \leqslant p \leqslant N_1\}$ est fini, donc borné. La réunion de deux ensembles bornés est bornée.

Le concept de suite de Cauchy apparaît, en 1817, dans un article de Bolzano, quatre ans avant sa définition par Cauchy. Il ne semble pas que Cauchy ait eu connaissance de cet article de Bolzano.
Une théorie complète des nombres réels a été nécessaire pour que le critère de Cauchy, d'abord admis, puisse être démontré. Ces théories datent des années 1860-1870 environ et sont l'œuvre de Dedekind, Weierstrass et Cantor.

⚠ *La réciproque est fausse. Cherchez un contre-exemple.*

Rapport X, 2001
« Le critère de Cauchy est rarement utilisé ou cité spontanément pour étudier la convergence d'une suite ou d'une série. »

Rapport ENS Lyon, 2000
« Dans le même ordre d'idées, la condition $\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$ *tend vers 0 n'assure pas que la suite* $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ *soit de Cauchy. »*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 3
Toute suite de Cauchy qui possède au moins une valeur d'adhérence l converge vers l.

Démonstration

Soit (u_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|)$ possédant une valeur d'adhérence l, et $(u_{\psi(n)})$ une suite extraite de (u_n) convergeant vers l.

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad \|u_p - l\| \leqslant \|u_p - u_{\psi(p)}\| + \|u_{\psi(p)} - l\|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. La suite $(u_{\psi(n)})$ converge vers l. Il existe N_1 dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, p \geqslant N_1 \qquad \|u_{\psi(p)} - l\| \leqslant \varepsilon.$$

La suite (u_n) est une suite de Cauchy. Il existe N_2 dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, p \geqslant N_2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_{p+k} - u_p\| \leqslant \varepsilon.$$

Or, $\psi(p) \geqslant p$. Donc pour tout $p \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a : $\|u_p - l\| \leqslant 2\varepsilon$.
La suite (u_n) converge.

Corollaire 3.1
Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente, converge.

1.2. Espace vectoriel normé complet

Un **espace vectoriel normé** est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge. Un espace vectoriel normé complet est appelé un **espace de Banach** .

Stefan Banach *(1892-1945), mathématicien polonais, est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Enseignant, à partir de 1920, à l'université de Lwow, il retrouve régulièrement des étudiants et des collègues à la table d'un café. Les discussions vont bon train, sans crainte de blâme du professeur. Les idées fusent, les plus intéressantes sont notées dans un cahier.*

Théorème 4
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Démonstration

Soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$. D'après le théorème 2, elle est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass vu en première année assure qu'on peut extraire une suite convergente.

D'après le corollaire 3.1, la suite (u_n) converge.

Exemple :

Soit $(E_1, \|\ \|_1), \ldots, (E_p, \|\ \|_p)$ des espaces vectoriels normés et $(E, \|\ \|)$ l'espace vectoriel normé produit. L'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est complet si et seulement si, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, l'espace vectoriel normé $(E_i, \|\ \|_i)$ est complet.

Ainsi $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets pour la norme $\|\ \|_\infty$.

Un espace vectoriel normé dont la norme est associée à un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien** (réel ou complexe). Si, de plus, cet espace est complet, il est appelé **espace de Hilbert**.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1, 2 et 3.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^3$

On considère, dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ la suite $(Z_n) = (u_n, v_n, w_n)$ définie par :

$$Z_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$$

et, pour tout n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n - 61 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3}w_n + 61 \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3}w_n + 61 \end{cases}.$$

On note A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1) *Montrer que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a : $\|AX\|_2 \leqslant k\|X\|_2$, où k est un réel de $]0, 1[$.*

2) *En déduire que la suite (Z_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^3$.*

3) *Montrer qu'elle converge et calculer sa limite.*

1) Posons $X = (x, y, z)$.

On a :

$$\|AX\|_2 = \frac{1}{6}\sqrt{(2x - z)^2 + (2x + 3y - 2z)^2 + 4(x + y - z)^2}.$$

En majorant $2xy$ par $x^2+y^2, \ldots,$ nous obtenons :

$$\|AX\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{33}}{6}\|X\|_2.$$

Posons $k = \frac{\sqrt{33}}{6}$.

2) Il suffit de remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$Z_{n+1} - Z_n = A(Z_n - Z_{n-1}),$$

puis, par récurrence :

$$\|Z_{n+1} - Z_n\|_2 \leqslant k\|Z_n - Z_{n-1}\|_2 \leqslant k^n\|Z_1 - Z_0\|_2.$$

On en déduit, pour tout entier n et pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \|Z_{n+p} - Z_n\|_2 &= \Big\|\sum_{j=1}^{p}(Z_{n+j} - Z_{n+j-1})\Big\|_2 \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p}\|Z_{n+j} - Z_{n+j-1}\|_2 \\ &\leqslant \frac{k^{n+1}}{1-k}\|Z_1 - Z_0\|_2. \end{aligned}$$

La suite (Z_n) est donc une suite de Cauchy pour la norme $\|\ \|_2$.

3) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est complet pour la norme $\|\ \|_\infty$. Les normes $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^3$. Donc la suite (Z_n) converge vers (a, b, c). En utilisant les opérations sur les limites de suites convergentes, on trouve : $a = -99$, $b = 36$, $c = 30$.

1.3. Parties complètes d'un espace vectoriel normé

$(E, \|\ \|)$ étant un espace vectoriel normé, et A une partie de E, la partie A est dite **complète** si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.

Théorème 5

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie complète de E, alors A est une partie fermée de E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit (u_n) une suite d'éléments de A, qui converge vers a. Puisque cette suite converge, elle est une suite de Cauchy. Or A est complet, donc la limite a appartient à A. Ainsi A est une partie fermée de E.

Théorème 6

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, et A, B deux parties de E telles que :

- B est une partie complète de E,
- A est une partie fermée de E,
- $A \subset B$.

Alors A est une partie complète de E.

Démonstration

Soit (u_n) une suite de Cauchy de A, elle est donc aussi une suite de Cauchy de B. La partie B étant complète, la suite (u_n) converge dans B. Sa limite est dans A puisque A est une partie fermée de B. La partie A est complète.

Corollaire 6.1

Les parties complètes d'un espace de Banach sont les parties fermées de cet espace.

Mensa ACADEMY

Exemple :

Tout intervalle $[a, b] (a < b)$ est une partie complète de $\mathbb{R}$.

Toute boule fermée est une partie complète de $(\mathbb{K}^n, \| \|)$.

Application 2

Suite décroissante de fermés dans un espace de Banach

Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach et (E_n) une suite décroissante de fermés non vides de E telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} D(E_n) = 0$, où $D(E_n)$ désigne le diamètre de E_n.

1) *Montrer qu'il existe a dans E tel que :*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{a\}.$$

2) *Soit f continue de E dans F. Montrer que :*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(E_n) = f(\{a\}).$$

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'ensemble E_n est non vide, choisissons x_n dans E_n.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} D(E_n) = 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad D(E_n) \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|x_n - x_{n+p}\| \leqslant \varepsilon.$$

La suite (x_n) est de Cauchy dans E espace complet, elle converge. Soit a sa limite.

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad x_{n+p} \in E_n \quad \text{et} \quad a = \lim_{p \to +\infty} x_{n+p}.$$

Donc a est dans $\overline{E_n} = E_n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Puis $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Soit b dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Les éléments a et b sont dans chacun des E_n, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|a-b\| \leqslant D(E_n).$$

Ceci entraîne : $a = b$.

2) Il est immédiat que $f(a)$ est dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)$.

Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) = f(\{a\})$.

L'application f est continue en a. Soit W un voisinage quelconque de $f(a)$:

$$\exists r > 0 \qquad f(B(a,r)) \subset W.$$

De plus $\lim_{n\to+\infty} D(E_n) = 0$, donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad D(E_n) \leqslant r.$$

On a alors :

$$\forall n \geqslant N \qquad E_n \subset B(a, D(E_n)) \subset B(a,r).$$

D'où : $\forall n \geqslant N \qquad f(E_n) \subset f(B(a,r)) \subset W$.

Ceci étant vérifié pour tout voisinage de $f(a)$, nous en déduisons :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) = f(\{a\}).$$

Application 3

Théorème du point fixe

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et f une application d'une partie complète A de E dans E. On suppose que $f(A) \subset A$ et que f est contractante, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Montrer que f admet un point fixe et un seul et que toute suite (u_n) définie par :

$u_0 \in A \quad$ *et* $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad u_{p+1} = f(u_p)$

converge vers le point fixe de f.

Remarque : Ce théorème permet de définir et approcher des êtres mathématiques divers : solutions d'équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz), fractals (ENSET 1988, 1re épreuve)...

Unicité du point fixe

Soit a et b tels que : $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Alors, puisque f est contractante :

$$\|a-b\| = \|f(b) - f(a)\| \leqslant k\|a-b\|.$$

Ceci est impossible si $a \neq b$ puisque $k < 1$.

D'où : $a = b$.

Existence du point fixe

Considérons u_0 un point de A et (u_p) la suite définie par u_0 et : $\forall p \in \mathbb{N} \qquad u_{p+1} = f(u_p)$.

Cette suite est bien définie car : $f(A) \subset A$.

On montre par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \|u_{p+1} - u_p\| \leqslant k^p \|u_1 - u_0\|.$$

Ensuite :

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned}\|u_{n+p} - u_p\| &\leqslant \sum_{i=p}^{n+p-1} \|u_{i+1} - u_i\| \\ &\leqslant \sum_{i=p}^{n+p-1} k^i \|u_1 - u_0\| \\ &\leqslant \frac{k^p}{1-k}\|u_1 - u_0\|.\end{aligned}$$

Or, $0 \leqslant k < 1$, donc k^p tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

La suite (u_p) est donc une suite de Cauchy d'éléments de la partie complète A. Elle converge vers a, élément de A.

Nous savons que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \|f(u_p) - f(a)\| \leqslant k\|u_p - a\|.$$

La suite $(f(u_p)) = (u_{p+1})$ converge donc vers $f(a)$. D'où : $f(a) = a$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.4. Critère de Cauchy pour une application

Théorème 7

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\ \|)$ un espace de Banach, A une partie de E, a un point adhérent à A et f une application de A dans F. Alors l'application f admet une limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in E^2$$
$$\left(\|x - a\|_E < \alpha \quad \text{et} \quad \|y - a\|_E < \alpha\right) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Ce critère s'appelle **critère de Cauchy d'existence d'une limite pour une application à valeurs dans un espace de Banach** . Il permet de prouver l'existence d'une limite sans faire intervenir sa valeur.

Démonstration

Supposons que : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \qquad \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\|_F < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tous x et y de A :

$$\|x-a\|_E < \alpha \quad \text{et} \quad \|y-a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \|f(x)-l\|_F + \|f(y)-l\|_F < \varepsilon.$$

Réciproquement, supposons que la fonction f vérifie le critère de Cauchy. Montrons que la fonction f admet une limite en a en utilisant la caractérisation séquentielle. Soit (u_p) une suite quelconque d'éléments de A qui converge vers a. Nous voulons établir que la suite $(f(u_p))$ a une limite. L'espace F étant un espace de Banach, il suffit de montrer que la suite $(f(u_p))$ est une suite de Cauchy. Soit ε un réel strictement positif fixé :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2 \qquad \|x-a\|_E < \alpha \quad \text{et} \quad \|y-a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F < \varepsilon.$$

De plus : $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n - a\|_E < \alpha$. Finalement :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\|_E < \alpha \quad \text{et} \quad \|u_{p+n} - a\|_E < \alpha.$$
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant N \Rightarrow \|f(u_{n+p}) - f(u_n)\|_F < \varepsilon.$$

2 Continuité uniforme

2.1. Définition

L'application f de A dans F est dite **uniformément continue** sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2$$
$$(\|x - y\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon).$$

► *Pour s'entraîner : ex. 4 et 5.*

Remarque : rappelons que f est continue en x de A si :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0$$
$$\exists \delta > 0 \quad \forall y \in A$$
$$(\|x - y\|_E \leqslant \delta)$$
$$\Rightarrow (\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon).$$

Ici, δ dépend de ε et de x. Lorsque f est uniformément continue sur A, le δ de la définition ne dépend que de ε, et non pas de x.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Les propriétés de base

Théorème 8
Toute application uniformément continue sur A est continue sur A.

Théorème 9
Toute application lipschitzienne sur A est uniformément continue sur A, donc continue sur A.

Remarque :

Mais les réciproques sont fausses.

• Considérons la fonction définie par : $f(x) = x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue, mais : $f(x) - f(y) = (x - y)(x + y)$, donc :

$$\forall\, \delta > 0 \quad f(x) - f(x - \delta) = \delta(2x - \delta).$$

Il existe x réel tel que : $\delta(2x - \delta) > 1$.

Ceci montre que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

• Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \sqrt{x}$.

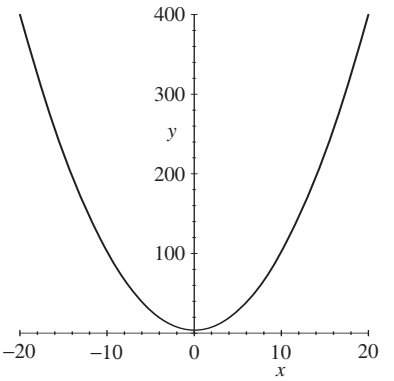
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée n'est pas bornée, donc elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$. Soit x et y deux réels tels que : $0 \leqslant y \leqslant x$.

On a alors : $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{xy}$ et $x + y - 2\sqrt{xy} \leqslant x - y$. Donc :

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}.$$

Mensa ACADEMY

Vous en déduirez que g est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.



Doc. 1. *Graphe de la fonction* $x \mapsto x^2$.

Théorème 10
La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.

Théorème 11 (Lemme de recollement)
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que : $x = \max I = \min J$ est dans $I \cap J$, et f une application uniformément continue sur I et sur J. Alors f est uniformément continue sur $I \cup J$.

Démonstration

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que :

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall (t,u) \in I \quad |t - u| \leqslant \delta_1 \Rightarrow \|f(t) - f(u)\|_F \leqslant \varepsilon.$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall (t,u) \in J \quad |t - u| \leqslant \delta_2 \Rightarrow \|f(t) - f(u)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Pour tout couple (t,u) d'éléments de $I \cup J$, quatre cas sont possibles :

• t et u sont dans I, alors : $|t - u| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(t) - f(u)\|_F \leqslant \varepsilon$.

• t et u sont dans J, alors : $|t - u| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(t) - f(u)\|_F \leqslant \varepsilon$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• t est dans I et u dans J. Comme $x = \sup I = \inf J \in I \cap J$, on a : $t \leqslant x \leqslant u$, donc :

$$|t-u| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(t)-f(u)\|_F \leqslant \|f(t)-f(x)\|_F + \|f(x)-f(u)\|_F \leqslant 2\varepsilon.$$

• u est dans I et t dans J, ce cas se ramène au précédent.

Nous avons établi que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (t,u) \in (I \cup J)^2 \qquad (|t-u| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(t)-f(u)\|_F \leqslant 2\varepsilon).$$

2.3. Suites et continuité uniforme

Théorème 12

Soit $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|)$ deux espaces vectoriels normés et f une application uniformément continue d'une partie A de E dans F. Alors l'image par f de toute suite de Cauchy (u_n) de A est une suite de Cauchy $(f(u_n))$ de F.

La continuité uniforme de l'application f est nécessaire. Il suffit pour s'en assurer de considérer la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$. La fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$, sinon la suite (n) serait de Cauchy.

Théorème 13

Soit $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. Alors f est uniformément continue si et seulement si, pour toutes suites (x_n) et (y_n) telles que la suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0_E, la suite $(f(x_n) - f(y_n))$ converge vers 0_F.

Ce théorème permet de retrouver le fait que la fonction : $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit de considérer $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

3 Connexité par arcs

La notion de connexité par arcs, conformément au programme officiel, ne sera développée que dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. Toutefois, vous pourrez constater, en l'étudiant, que cette notion peut se généraliser en dimension quelconque. Cette restriction permet de limiter la difficulté des exercices et d'utiliser l'intuition géométrique.

3.1. Définitions, exemples

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E. On appelle **chemin** dans A toute application continue f de [0,1] dans A et **arc** dans A toute image d'un chemin de A.

$f(0)$ est l'**origine de l'arc**, $f(1)$ est l'**extrémité de l'arc**.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Une partie A de E est **connexe par arcs** si, pour tous a et b de E, il existe un arc d'origine a et d'extrémité b contenu dans A.

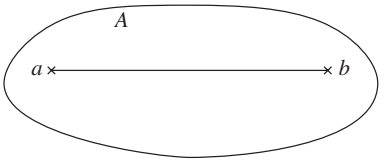
Théorème 14
Toute partie convexe est connexe par arcs.

Démonstration

En effet, soit a et b deux points de A. Par définition de la convexité, le segment $[a,b]$ est contenu dans A. L'application :

$$f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow A \\ t \longmapsto tb + (1-t)a \end{cases}$$

est une fonction polynôme, donc continue et l'arc $f([0,1])$ est le segment $[a,b]$. Il a pour origine a et extrémité b.



Doc. 2. *Toute partie convexe de E est connexe par arcs.*

Une partie A de E est dite **étoilée** de E s'il existe un point a de A, tel que, pour tout b de A, le segment $[a,b]$ est contenu dans A, c'est-à-dire :

$$\exists a \in U \quad \forall b \in U \qquad [a,b] \subset U$$

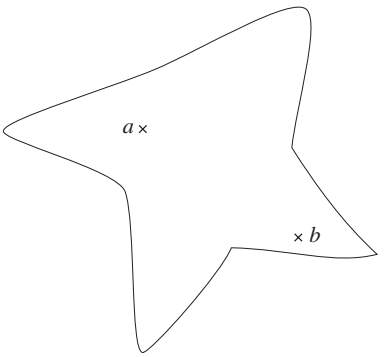
Théorème 15
Une partie étoilée est connexe par arcs.

Démonstration

Soit b et c dans A.

L'application $t \longmapsto \begin{cases} 2ta + (1-2t)b & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (2t-1)c + (2-2t)a & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

est un chemin d'extrémités b et c.



Doc. 3. *Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 7 et 8.***

3.2. Continuité et parties connexes par arcs

Théorème 16
Soit $(E, \|\ \|)$ et $(F, \|\ \|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et une application continue f de A dans F.

Alors, si B est une partie de A, connexe par arcs dans E, la partie $f(B)$ est connexe par arcs dans F.

Démonstration

Soit $f(a)$ et $f(b)$ deux points de $f(B)$. B étant connexe par arcs, il existe une application u continue de $[0,1]$ dans B, telle que : $u(0) = a$ et $u(1) = b$.

L'application $f \circ u$ est donc continue de $[0,1]$ dans $f(B)$, et vérifie :

$$f \circ u(0) = f(a) \quad \text{et} \quad f \circ u(1) = f(b).$$

La partie $f(B)$ est donc connexe par arcs dans F.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 16.1

Soit A une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, et B une partie non vide de A. Si B est une partie ouverte et fermée relativement à A, alors $B = A$.

Démonstration

Soit f l'application de A dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ si } x \notin B \end{cases}$

Montrons que f est continue sur A. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, considérons $f^{-1}(O)$.

Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors : $f^{-1}(O) = \varnothing$.

Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors : $f^{-1}(O) = A \backslash B$.

Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors : $f^{-1}(O) = B$.

Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors : $f^{-1}(O) = A$.

$f^{-1}(O)$ est donc, dans tous les cas, un ouvert de A. L'application f est continue sur A, qui est connexe par arcs. Nous en déduisons que $f(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Or, $f(A) \subset \{0,1\}$. Donc $f(A) = \{0\}$ ou $f(A) = \{1\}$.

Comme $B \neq \varnothing$ on a $f(A) = \{1\}$. Donc $B = A$.

Corollaire 16.2

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

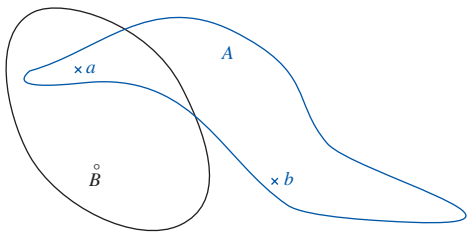
Démonstration

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est un convexe. Le théorème 14 assure que A est connexe par arcs. Si A n'est pas un intervalle. Il existe a et b dans A et c tel que $a < c < b$ et $c \notin A$. On note B l'ensemble $]-\infty, c[\cap I$ et C l'ensemble $]c, +\infty[\cap I$. Alors B et C sont des ouverts relatifs à I non vides. La partie B vérifie les hypothèses du corollaire 16.2 et cependant $B \neq A$. Donc A n'est pas connexe par arcs.

Application 4

Où un connexe par arcs rencontre la frontière d'une partie

Soit A une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$. Soit B une partie de E telle que A rencontre $\overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\complement_E B}$. Montrer que A rencontre la frontière de B, $Fr(B)$.



Doc. 5. *La partie A connexe par arc rencontre la frontière de B.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $X = A \cap \overset{\circ}{B}$ et $Y = A \cap \overset{\circ}{\complement_E B}$.

X et Y sont des ouverts relatifs à A.

Montrons par l'absurde que :

$$A \cap Fr(B) \neq \phi.$$

Si $A \cap Fr(B) = \phi$ alors $X = \complement_A Y$.

Donc X est un fermé relatif à A.

Or $X \neq \phi$. D'après le corollaire 16.1 on a $X = A$ puis $Y = \phi$ ce qui n'est pas.

Par conséquent :

$$A \cap Fr(B) \neq \phi.$$

Application 5

Application localement constante sur un connexe par arcs

Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$. Une application f de A dans un espace vectoriel normé $(F, \| \|)$ est localement constante si, en tout point a de A, il existe une boule $B(a,r)(r > 0)$ telle que l'application f est constante sur $B(a,r) \cap A$.

Montrer que toute application localement constante sur une partie A non vide, connexe par arcs de E est constante.

Soit f une application localement constante sur la partie A, connexe par arcs, de E.

Soit a un point de $A, b = f(a)$ et $B = f^{-1}(\{b\})$.

L'application f est localement constante, donc continue, sur la partie A.

$\{b\}$ est un fermé de F et f est continue sur A, donc B est un fermé de A.

Montrons ensuite que B est un ouvert de A.

Soit x dans B. Alors $f(x) = b$ et il existe $r > 0$ tel que : $\forall y \in B(x,r) \cap A \quad f(y) = b$.

On en déduit que : $B(x,r) \cap A \subset B$. B est donc un ouvert de A.

Le corollaire 16.2 permet de conclure : $B = A$.

► *Pour s'entraîner : ex. 9, 10 et 11.*

Corollaire 16.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue d'une partie A de E, connexe par arcs, dans $\mathbb{R}$.

Alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarques :

• Ce théorème porte le nom de théorème des valeurs intermédiaires car si la fonction f prend les valeurs réelles u et v, alors elle prend toute valeur comprise entre u et v.

• En particulier, si $E = \mathbb{R}$ et si f est une application continue d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Vous avez rencontré, en première année, ce théorème pour des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vous connaissez bien la preuve visuelle, si évidente, de ce théorème. Sa démonstration, elle, n'est pas simple et elle ne fut rédigée qu'au XXe siècle par le mathématicien tchèque Bolzano. En tentant d'en dépasser l'évidence visuelle, les mathématiciens furent conduits à approfondir la notion de continuité, puis la structure de $\mathbb{R}$ et, petit à petit, à élaborer l'analyse mathématique moderne, outil essentiel de la Physique.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Homéomorphismes entre intervalles de $\mathbb{R}$

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application surjective de I sur J.

1) *Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième.*

a) *f est continue.*

b) *f est injective.*

c) *f est strictement monotone.*

2) *En déduire qu'une surjection possédant deux de ces propriétés est un homéomorphisme de I sur J.*

1) Il est immédiat que les propriétés **a)** et **c)** entraînent **b)**.

Montrons que les propriétés **b)** et **c)** entraînent **a)**. Supposons f strictement croissante.

Soit a un point intérieur à I. Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$]a-\alpha, a+\alpha[\subset I.$$

Alors :

$$f(a) \in]f(a-\alpha), f(a+\alpha)[.$$

Donc $b = f(a)$ est intérieur à J.

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que :

$$]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset \overset{\circ}{J}.$$

Alors : $a \in]f^{-1}(b-\varepsilon),\ f^{-1}(b+\varepsilon)[$.

Il existe $\beta > 0$ tel que :

$$]a-\beta, a+\beta[\subset]f^{-1}(b-\varepsilon),\ f^{-1}(b+\varepsilon)[.$$

On a :

$$\forall x \in I \quad x \in]a-\beta, a+\beta[\Rightarrow f(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[.$$

L'application f est continue en a.

Si a est une borne de l'intervalle, on procède de la même manière.

• Montrons que les propriétés **a)** et **b)** entraînent **c)**.

Considérons l'ensemble $A = \{(x,y) \in I^2; x < y\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}^2$ connexe par arcs.

L'application $h : (x,y) \longmapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est continue sur A.

Par conséquent, $h(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, car f est injective sur I. L'intervalle $h(A)$ est donc contenu dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou dans $\mathbb{R}^{-*}$.

Nous en déduisons la stricte monotonie de f.

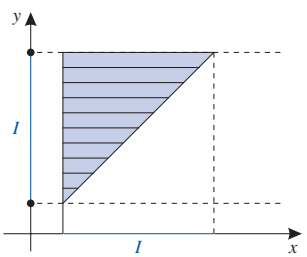
2) Si une surjection possède deux de ces propriétés, sa réciproque possède les propriétés **b)** et **c)**. C'est un homéomorphisme.

Application 7

Le théorème de Darboux

Soit f une application dérivable d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.



Doc. 4.

Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \{(x,y) \in I^2; x < y\} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}. \end{cases}$$

Cette application φ est continue et l'ensemble $\{(x,y) \in I^2; x < y\}$ est convexe, donc connexe par arcs. On en déduit que la partie :

$$A = \{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}; (x,y) \in I^2, x < y\} \text{ de } \mathbb{R}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

est connexe par arcs. C'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Or, le théorème des accroissements finis nous indique que : $A \subset f'(I)$. De plus, soit x dans I et (x_n) une suite de points de I, tendant vers x par valeurs supérieures. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x, x_n) = f'(x)$.

Donc : $A \subset f'(I) \subset \overline{A}$.

A est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f'(I)$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Jean Gaston Darboux *(1842-1917), mathématicien français.*

4 Compacité

4.1. Définition

Une partie A de E est **compacte** si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite convergente dans A.

Cette caractérisation des parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie est dite de Bolzano-Weierstrass.

On dit alors aussi simplement que A est un compact de E.

Théorème 17

Toute réunion finie de parties compactes est compacte.

Toute intersection de parties compactes est compacte.

Mensa ACADEMY

4.2. Quelques propriétés topologiques

Théorème 18

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E. Alors A est une partie fermée, bornée de E.

Démonstration

Supposons que, de toute suite d'éléments de A, on puisse extraire une suite convergeant vers un élément de A.

Nous devons montrer que :

1) A est fermé. Soit a un point adhérent à A. Il existe une suite (u_p) d'éléments de A qui converge vers a.

D'après l'hypothèse sur A, on peut extraire de la suite (u_p) une suite qui converge vers un élément b de A. Mais toute suite extraite de la suite convergente (u_p) converge vers a, donc : $b = a$ et $a \in A$. Tout point adhérent à A est dans A, donc A est fermé.

2) A est borné. Supposons le contraire. Alors : $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, u_p \in A \quad \|u_p\| \geqslant p$.

Pour toute suite extraite $(u_{\varphi(p)})$ de (u_p), on peut affirmer que, pour tout p : $\varphi(p) \geqslant p$, donc : $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(p)}\| \geqslant \varphi(p) \geqslant p$.

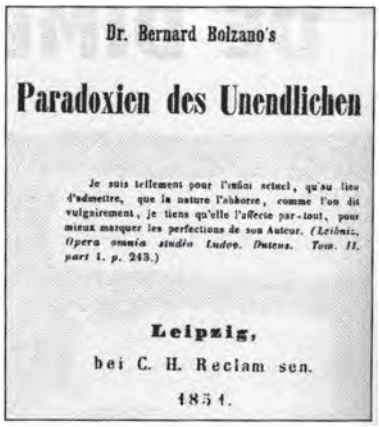
Aucune suite extraite de (u_p) n'est bornée, donc aucune suite extraite de (u_p) n'est convergente.

Ceci contredit notre hypothèse, donc A est borné.

Remarque : Si deux normes de E sont équivalentes, toute partie compacte pour l'une est compacte pour l'autre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Bernhard Bolzano, *né à Prague en 1781, ordonné prêtre en 1805, est, à partir de 1820, activement surveillé par la police de l'empire austro-hongrois qu'il a critiqué. Son travail en mathématiques, axé sur la recherche de fondements rigoureux, le conduit à énoncer à plusieurs reprises des résultats qui ne seront étudiés et développés que plus tard. Ainsi de la théorie des ensembles infinis.*


Dr. Bernard Bolzano's

Paradoxien des Unendlichen

Je suis tellement pour l'usus actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibnitz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II. part 1. p. 243.*)

Leipzig,

bei C. H. Reclam sen.

1851.

Théorème 19

Soit A une partie compacte de E. Alors toute partie B, contenue dans A et fermée, est une partie compacte de E.

Démonstration

Soit (u_p) une suite d'éléments de B. C'est également une suite d'éléments de A qui est compact. Cette suite admet une suite extraite $(u_{\varphi(p)})$, convergente dans A. Sa limite l est donc adhérente à B. Puisque B est fermé, l appartient à B. La suite extraite, $(u_{\varphi(p)})$ converge dans B.

Théorème 20

Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ un espace vectoriel normé produit et, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, A_i un compact de E_i, alors la partie $A = A_1 \times \cdots \times A_p$ de E est un compact de E.

Démonstration

Ce théorème se démontre par récurrence. Effectuons la démonstration pour $p = 2$.

Considérons la suite (u_p, v_p) de $A_1 \times A_2$. (u_p) est donc une suite du compact A_1. Il en existe une suite extraite, $(u_{\varphi(p)})$, convergente dans A_1. Considérons alors la suite $(v_{\varphi(p)})$. C'est une suite d'éléments du compact A_2. Il existe donc une suite extraite de cette suite, $(v_{\varphi \circ \psi(p)})$, convergente dans A_2. La suite $(u_{\varphi \circ \psi(p)})$ est une suite extraite de la suite convergente $(u_{\varphi(p)})$, donc converge. La suite $(u_{\varphi \circ \psi(p)}, v_{\varphi \circ \psi(p)})$ est donc une suite extraite de (u_p, v_p), convergente dans $A_1 \times A_2$. Ceci prouve la compacité de la partie $A_1 \times A_2$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.***

La réciproque de ce théorème est fausse en général. C'est un point que nous aurons l'occasion de préciser dans le chapitre suivant.

Remarque : A étant une partie fermée de E, les parties contenues dans A et fermées sont les fermés relatifs de A. En effet, puisque B est un fermé relatif à A, il existe une partie fermée F de E telle que : $B = F \cap A$. B est l'intersection de deux fermés de E. Il est fermé dans E.

Application 8

Fermés et compacts

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) *Montrer que, si B est une partie fermée de E, et A une partie compacte de E, alors $A + B$ est une partie fermée de E.*

2) *Ceci est-il toujours exact si A est seulement supposée fermée ?*

Considérer dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$.

1) Soit (x_n) une suite de $A + B$ convergeant vers x. Pour tout n de $\mathbb{N}$, x_n s'écrit : $x_n = y_n + z_n$, avec y_n dans A et z_n dans B. La suite (y_n) est une suite du compact A. On peut en extraire une suite $(y_{\varphi(n)})$ convergente dont la limite y est dans A. La suite $(z_{\varphi(n)})$ est alors la différence de deux suites convergentes, elle converge vers $x - y$. Puisque B est fermé, $x - y$ est un élément de B, donc : $x \in A + B$. La partie $A + B$ est fermée dans E.

2) Considérons les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$. Ce sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$. Aucun n'est borné, donc aucun n'est compact. $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Ce sous-groupe est dense dans $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 21
Toute partie compacte est une partie complète.

Démonstration

Soit (u_p) une suite de Cauchy d'éléments de A compact, cette suite admet une suite extraite convergente. Elle converge.

Théorème 22
Soit A une partie compacte de E. Alors toute suite de A admettant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration

Effectuons une démonstration par l'absurde.

Supposons que (u_p) soit une suite de A possédant une unique valeur d'adhérence a et ne convergeant pas vers a. Ceci se traduit par :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant N \quad \text{et} \quad \|u_p - a\| > \varepsilon.$$

Utilisant cette propriété, on peut alors construire une suite, $(u_{\varphi(p)})$, extraite de (u_p) et telle que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(p)} - a\| > \varepsilon. \qquad (*)$$

Il suffit de choisir $\varphi(0)$ tel que :

$$\|u_{\varphi(0)} - a\| > \varepsilon,$$

puis $\varphi(1)$ tel que :

$$\varphi(1) > \varphi(0) \quad \text{et} \quad \|u_{\varphi(1)} - a\| > \varepsilon.$$

En supposant la suite ainsi construite jusqu'au rang n, on détermine de même $\varphi(n+1)$.

Cette suite est une suite d'éléments du compact A, donc elle possède une valeur d'adhérence b. De plus, la condition (*) entraîne que : $a \neq b$, ce qui contredit l'énoncé.

4.3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites réelles ou complexes

Rappelons le théorème de Bolzano-Weierstrass, vu en première année.

Théorème 23. Théorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite bornée de réels ou de complexes, on peut extraire une suite convergente.

Ce théorème énoncé par Bolzano vers 1830 a été démontré par Weierstrass vers 1860.

Corollaire 23.1
Les parties compactes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées, bornées.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.4. Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie, $(E, \| \|_\infty)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. La norme $\| \|_\infty$ sur E relative à cette base est la norme définie par :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \longmapsto \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,p]\!]} |x_i|.$$

Théorème 24

$(E, \| \|_\infty)$ étant un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts de $(E, \| \|_\infty)$ sont les parties fermées, bornées de E.

Démonstration

Soit A une partie fermée, bornée de $(E, \| \|_\infty)$. Montrons que A est compacte.

Soit (u_n) une suite d'éléments de A. Écrivons :

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i}\, e_i.$$

A est bornée, donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \in A \quad \|a\|_\infty \leqslant M.$$

Or, pour tout n, u_n est dans A, donc :

$$\max_{i \in [\![1,p]\!]} |u_{n,i}| \leqslant M.$$

La suite $(u_{n,1})$ est donc une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ bornée. Il existe une application φ_1, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que la suite extraite, $(u^1_{\varphi_1(n)})$, converge vers l_1.

La suite $(u^2_{\varphi_1(n)})$ est encore une suite bornée de $\mathbb{K}$. Il existe de même une application φ_2, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que la suite extraite, $(u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_2(n),2})$, converge vers l_2.

En itérant le procédé, par récurrence finie, on établit l'existence, pour tout k de $[\![1, p]\!]$, d'une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}, \varphi_k$, telle que la suite extraite, $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}, k)$, converge vers l_k.

Posons alors :

$$l = \sum_{i=1}^{p} l_i\, e_i.$$

On a :

$$\max_{i \in [\![1,p]\!]} |u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{p(n)},i} - l_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{p(n)},i} - l_i|.$$

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, la suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{p(n)},i})$ est extraite de la suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{j(n)},i})$ qui converge vers l_i. Elle converge vers l_i.

La suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{p(n)}})$ converge donc vers l pour $\| \|_\infty$, ce qui prouve la compacité de A.

Et que se passe-t-il pour les autres normes ? Cette question sera étudiée au § 5.

► *Pour s'entraîner : ex. 14.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.5. Image d'un compact par une application continue

Théorème 25

Soit A une partie de $(E, \| \|_E)$ et f une application continue de A dans F, alors, si K est une partie compacte de E, contenue dans A, $f(K)$ est une partie compacte de F.

Démonstration

Nous allons établir la compacité de $f(K)$ en montrant que, de toute suite de $f(K)$, il est possible d'extraire une suite convergeant vers un élément de $f(K)$.

Fixons donc (y_p) une suite d'éléments de $f(K)$: $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_p \in K \quad y_p = f(x_p)$.

(x_p) est une suite d'éléments de K et K est compact. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(p)})$ qui converge vers un élément x de K.

Or, f est continue en x, et $\lim\limits_{p \to +\infty} x_{\varphi(p)} = x$, donc : $\lim\limits_{p \to +\infty} f(x_{\varphi(p)}) = f(x)$.

La suite $(y_{\varphi(p)})$, extraite de la suite (y_p), converge vers un élément $f(x)$ de $f(K)$.

Exemple :

Le produit de p parties compactes de p espaces vectoriels normés est un compact de l'espace vectoriel normé produit. La continuité des p projections p_i, de E dans E_i permet d'affirmer que la réciproque est exacte.

▶ *Pour s'entraîner : ex.* **15.**

Rapport X, 2000

« Pour en déduire la compacité de K, la plupart se sont assignés à montrer qu'il s'agissait d'une partie fermée et bornée. Ce n'était pas la méthode la plus directe... La définition même de K aurait dû inciter à voir K comme image d'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ par une application continue. »

Application 9

Un homéomorphisme

Soit f une application continue d'une partie compacte A de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \| \|_F)$. On suppose que la restriction de f à A induit une bijection g de A sur $f(A)$. Montrer que g est un homéomorphisme. Que dire si A n'est pas compact ?

Soit S un fermé de A, c'est un compact de E. Son image réciproque par g^{-1} est $f(S)$.

Or $f(S)$ est un compact de F contenu dans $f(A)$ donc un fermé de $f(A)$. L'application g^{-1} est continue de $f(A)$ sur A.

Soit $A =]0, 2\pi]$ et f de A dans U définie par $f(t) = e^{it}$.

L'application f est continue et bijective de A sur U.

Mais l'application f^{-1} n'est pas continue, car U est un compact et A ne l'est pas.

Théorème 26

Soit A une partie compacte non vide de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$ et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Rapport X, 2000

« Ce n'est pas parce qu'une fonction continue est minorée qu'elle atteint sa borne inférieure. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque : En d'autres termes, sous ces hypothèses, on peut écrire :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant K \ ;$$

$$\exists x_0 \in A \quad f(x_0) = \inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x) \ ;$$

$$\exists x_1 \in A \quad f(x_1) = \sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x).$$

Démonstration

D'après le théorème précédent, $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. L'application f est donc bornée. De plus, la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ est un point adhérent à cette partie. Donc sup $(f(A))$ est un point adhérent à $f(A)$, mais $f(A)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, donc sup$(f(A))$ est dans $f(A)$.

Le raisonnement est identique pour la borne inférieure.

Rapport Centrale, 2003

« Le mot extremum déclenche chez presque tous les étudiants le calcul des dérivées partielles même lorsqu'il s'agit de fonctions continues sur un compact et qui ne sont, bien sûr, pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur la frontière. »

Exemple :

La fonction f :

$$(x, y) \longmapsto x \exp(-(x^2 + y^2))$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $f(1,1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

De plus :

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = 0.$$

Il existe donc $R > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash BF(0, R) \quad |f(x, y)| < \frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

f est continue sur le compact $BF(0, R)$. Elle est bornée sur ce compact et :

$$\exists (a, b) \in BF(0, R) \quad M = \sup_{(x,y) \in BF(0,R)} |f(x, y)| = |f(a, b)|.$$

Or : $(1,1) \in BF(0, R)$. D'où :

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)| = \sup_{(x,y) \in BF(0,R)} |f(x, y)| = f(a, b).$$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$f(a, b) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)|.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$$

Nous obtenons :

$$(a = \pm 1 \text{ et } b = 0) \quad \text{ou} \quad (a = 0 \text{ et } b = \pm 1).$$

Or : $f(0,1) = 0$ et $f(1,0) = \mathrm{e}^{-1/2}$. Et : $M = \mathrm{e}^{-1/2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 10

Distance entre deux parties

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

1) *Montrer que, si A est un compact de E, alors, pour tout x de E, il existe x_1 dans A tel que :*

$$d(x, x_1) = d(x, A).$$

2) *A_1 et A_2 étant deux compacts de E, montrer qu'il existe (x_1, x_2) dans $A_1 \times A_2$ tel que :*

$$\|x_1 - x_2\| = d(A_1, A_2) = \inf_{(x,y)\in A_1\times A_2} \|x - y\|.$$

3) *Soit A un compact de E et F un fermé de E. Montrer que, si A et F sont disjoints, alors $d(A, F) > 0$.*

4) *En est-il de même si A et F sont deux fermés disjoints de E ?*

1) Nous savons que : $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$. L'application : $a \longmapsto d(x, a)$ est continue sur A. Donc il existe x_1 dans A tel que :

$$d(x, x_1) = d(x, A).$$

2) $A_1 \times A_2$ est un compact de $E \times E$ pour la topologie produit.

L'application d de $A_1 \times A_2$ dans $\mathbb{R}$ est continue. Donc il existe (x_1, x_2) dans $A_1 \times A_2$ tel que : $\|x_1 - x_2\| = d(A_1, A_2) = \inf_{(x,y)\in A_1\times A_2} \|x - y\|$.

3) Supposons A et F disjoints avec :

$$d(A, F) = 0.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe (a_n, f_n) dans $A \times F$ tel que : $d(a_n, f_n) < \frac{1}{n}$.

La suite (a_n) est une suite du compact A. Elle possède une suite extraite $(a_{\varphi(n)})$, convergente vers α, élément de A. La suite $(d(a_{\varphi(n)}, f_{\varphi(n)})$ converge vers 0. Donc la suite $(f_{\varphi(n)})$ converge vers α. Or, F est fermé. Nous en déduisons que α appartient à F. Ce qui est absurde.

4) Si l'on choisit $E = \mathbb{R}^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ et $F = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Chacune de ces parties est fermée. La propriété est fausse lorsque A est seulement supposée fermée.

► *Pour s'entraîner : ex. 16 et 17.*

4.6. Uniforme continuité et compacité

Théorème 27 (Théorème de Heine)
Soit A une partie compacte de E et f une application continue de A dans F, alors f est uniformément continue sur A.

Démonstration

Effectuons une démonstration par l'absurde. Nous allons supposer que A est compact et que f n'est pas uniformément continue sur A.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\|_E \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon.$$

Introduisons des suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_n, y_n) \in A^2 \quad \|x_n - y_n\|_E \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\|_F > \varepsilon.$$

(x_n) est une suite d'éléments du compact A. Elle admet une suite extraite convergente vers un élément a de A, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)} - a\|_E = 0.$$

Eduard Heine *(1821-1881). Ce théorème a été établi par Heine en 1872, pour une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La démonstration de ce théorème l'a conduit à préciser les propriétés des parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ que nous appelons maintenant des compacts.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De plus, pour tout n :

$$0 \leqslant \|y_{\varphi(n)} - a\|_E \leqslant \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\|_E + \|x_{\varphi(n)} - a\|_E,$$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_{\varphi(n)} - a\|_E = 0$. f est continue en a, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(a).$$

Or : $\forall n \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\|_F > \varepsilon$. Ceci est impossible.

Exemple

Continuité uniforme de $(x \longmapsto \sqrt{x})$

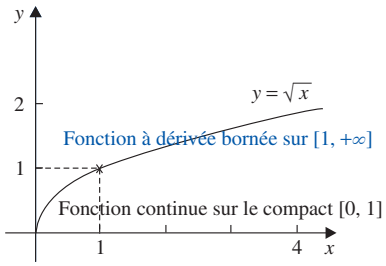
1) La restriction de la fonction $\sqrt{\ }$ à $[1, +\infty[$ est dérivable et sa dérivée est positive, majorée par $\frac{1}{2}$. Elle est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$, donc uniformément continue sur cet intervalle.

2) Toutefois, cette fonction n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$, car, si x et y sont distincts :

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

et cette quantité n'est pas bornée lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}^+$.

3) Cependant, la fonction $\sqrt{\ }$ est continue sur le segment [0, 1], elle est donc uniformément continue sur ce segment et le théorème 11 permet de conclure.



Doc. 6. *Graphe de la fonction :* $x \mapsto \sqrt{x}$

5 Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

5.1. Équivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 28

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Démonstration

Soit N une norme sur un espace vectoriel E de dimension finie. Fixons une base $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ de E. Nous allons montrer que N est équivalente à la norme infinie associée à cette base.

Si x dans E s'écrit $\sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j$, on a :

$$N(x) = N\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} |x_j|\, N\left(e_j\right) \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{p} N\left(e_j\right).$$

Notons β le réel strictement positif $\sum\limits_{j=1}^{p} N\left(e_j\right)$. On a : $\forall x \in E \quad N(x) \leqslant \beta\|x\|_\infty$.

Montrons ensuite par l'absurde, que : $\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad \alpha\|x\|_\infty \leqslant N(x)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Supposons en effet que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists x \in E \quad \alpha \|x\|_\infty > N(x).$$

Prenons $\alpha = \dfrac{1}{n+1}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \quad \frac{1}{n+1}\|x_n\|_\infty > N(x_n).$$

On en déduit que $x_n \neq 0_E$. Considérons :

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}.$$

On obtient une suite (y_n) d'éléments de la sphère unité S de $(E, \| \|_\infty)$ qui est une partie fermée et bornée de E pour la norme $\| \|_\infty$. S est donc une partie compacte de $(E, \| \|_\infty)$. Il existe donc une suite extraite, $(y_{\varphi(n)})$, de (y_n) qui converge vers un élément l de S pour $\| \|_\infty$.

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_{\varphi(n)} - l\|_\infty = 0.$$

Or :

$$\left|N\left(y_{\varphi(n)}\right) - N(l)\right| \leqslant N\left(y_{\varphi(n)} - l\right) \leqslant \beta \|y_{\varphi(n)} - l\|_\infty.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} N(y_{\varphi(n)}) = N(l) > 0,$$

car l est dans S.

Mais : $N(y_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} N(y_n) = 0$. Ceci est impossible.

► *Pour s'entraîner : ex. 18.*

Remarque : Nous pouvons maintenant, a posteriori, comprendre pourquoi, dans le chapitre 1, sur les espaces vectoriels de dimension finie rencontrés, nous avons montré que les normes N_1, N_2, N_∞ sont équivalentes. Et tous les exemples de normes non équivalentes rencontrés se situent toujours dans des espaces vectoriels de dimension infinie.

Exemple : Nous avons montré que la fonction Det est continue de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \| \|_\infty)$ dans $\mathbb{K}$, en tant que fonction polynôme des variables m_{ij}. Les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant équivalentes, cette fonction est continue, quelle que soit la norme considérée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2. Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Corollaire 28.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Les compacts de E sont les parties fermées bornées de E.

Exemples :

Les compacts de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ en sont les parties fermées et bornées. Par conséquent, de toute suite bornée de l'un de ces espaces, on peut extraire une suite convergente.

Rapport X, 2001
« On peut lire dans les copies des expressions comme « fermé borné », on ne sait ni de quel « fermé » il s'agit, ni par quoi il est borné. »

Rapport ENS Lyon, 2000
« Il faut savoir que l'espace est de dimension finie pour identifier les compacts et les parties fermées bornées, ce qui n'est pas souvent précisé. »

Application 11

Une suite et sa limite

Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \| \|)$ convergeant vers L.

Montrer que la partie de E définie par :

$$A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{L\}$$

est un compact de E.

A est une partie bornée de E. Montrons que A est également une partie fermée de E en vérifiant que $\complement_E A$ est un ouvert. Montrons que $\complement_E A$ est voisinage de chacun de ses points. Soit a dans $\complement_E A$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les points a et L sont distincts, donc il existe $r > 0$ tel que :

$$B(a,r) \cap B(L,r) = \varnothing.$$

La suite converge vers L, donc il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \in B(L,r).$$

Posons :

$$\varepsilon = \min(\{r\} \cup \{d(a,u_i) | i \in [\![0, N-1]\!]\}).$$

Alors :

$$B(a,\varepsilon) \subset \complement_E A.$$

Application 12

Distance d'un point à un fermé

Soit A une partie fermée d'un espace vectoriel normé, $(E, \| \|)$, de dimension finie et x un point de E. Montrer qu'il existe x_0 dans A tel que : $d(x,x_0) = d(x,A)$.

Soit x_1 dans A et K la partie de E définie par : $K = A \cap BF(x, \|x - x_1\|)$. Intersection d'un compact et d'un fermé, la partie K est compacte.

Il existe donc x_2 dans K tel que :

$$d(x,x_2) = d(x,K) \leqslant \|x - x_1\|.$$

Pour tout y n'appartenant pas à $BF(x, \|x - x_1\|)$, on a : $d(x,y) \geqslant \|x - x_1\|$.

D'où : $d(x,x_2) = d(x,A)$.

Mensa ACADEMY

► *Pour s'entraîner : ex. 19, 20 et 21.*

5.3. Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les notions de partie bornée, d'ouvert, de fermé, de voisinage, d'adhérence, d'intérieur, de compact, de convergence sont indépendantes de la norme considérée.

Par conséquent, dorénavant, lorsque nous utiliserons un espace vectoriel normé de dimension finie E, nous ne préciserons pas toujours la norme considérée. De plus, nous utiliserons systématiquement, puisqu'elles sont équivalentes, la norme la plus avantageuse pour le problème qui sera le nôtre...

Les boules ne coïncident pas. Il suffit, pour s'en assurer, de considérer dans $\mathbb{R}^2$ les boules correspondant aux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$.

Théorème 29

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et (u_n) une suite de E. Si nous notons, pour tout n, $u_n = \sum_{j=1}^{p} u_{nj} e_j$ et $l = \sum_{j=1}^{p} l_j e_j$, alors la suite vectorielle (u_n) converge vers l si et seulement si, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, la suite numérique (u_{nj}) converge vers l_j.

Exemple :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 30
Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Démonstration
Soit (u_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|)$. Puisqu'elle est de Cauchy, cette suite est bornée. Il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge. La suite (u_n) est une suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente, elle converge.

Théorème 31
Soit une partie A de $(E, \|\ \|)$, un point a adhérent à A et un espace vectoriel normé de dimension finie $(F, \|\ \|)$, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$. Alors l'application f de A dans F définie par

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e_j$$

admet en a la limite $L = \sum_{j=1}^{p} l_j e_j$ si et seulement si les p applications coordonnées f_j admettent en a la limite l_j.

Corollaire 31.1
Soit une partie A de $(E, \|\ \|)$, un espace vectoriel normé de dimension finie $(F, \|\ \|)$, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$ et une application f de A dans F. Alors l'application f est continue sur A si et seulement si les p applications coordonnées f_j de f sont continues sur A.

Un espace vectoriel normé de dimension quelconque peut n'être pas complet. Ainsi, considérons $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ et la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$P_n = \sum_{0}^{n} \frac{X^k}{2^k}.$$

La suite (P_n) est de Cauchy car :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \frac{1}{2^{n+1}}$$

pour $0 \leqslant n \leqslant m$.

Si la suite (P_n) convergeait vers :

$$L = \sum_{0}^{q} \alpha_k X^k,$$

on aurait, pour $n > q$:

$$\|P_n - L\|_\infty \geqslant \frac{1}{2^{q+1}}.$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \|P_n - L\|_\infty \neq 0.$$

Ceci est absurde. La suite (P_n) diverge.

6 Applications linéaires continues

6.1. Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 32
$(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ étant deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0_E.
3. f est bornée sur la boule unité fermée.
4. f est bornée sur la sphère unité.
5. $\exists\, K \in \mathbb{R}^+ \quad \forall\, x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$.
6. f est lipschitzienne sur E.
7. f est uniformément continue sur E.

L'équivalence des conditions 1 et 5 est due à Banach.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Chacun de ces points entraîne le suivant et le septième entraîne le premier.

2. f est continue en 0_E, donc, avec $\varepsilon = 1$, on a :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, x \in E \quad \|x\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant 1.$$

On en déduit, pour tout x de la boule unité fermée B :

$$\|\alpha x\|_E \leqslant \alpha,$$

donc :

$$\|f(\alpha x)\|_F \leqslant 1.$$

Finalement, pour tout x de B : $\|f(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$, par linéarité de f.

4. Puisque f est bornée sur S, il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in S \quad \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Or :

$$\forall\, x \in E - \{0_E\} \quad \frac{x}{\|x\|_E} \in S.$$

Par conséquent :

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leqslant M.$$

D'où :

$$\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E,$$

vrai également si $x = 0_E$.

5. Il suffit d'appliquer **5.** à $x - y$ et d'utiliser la linéarité de f.

Mensa ACADEMY

6.2. Exemples

■ **Exemple 1 :** $E = F = \mathbb{R}^2$, munis de leurs produits scalaires canoniques.
Un automorphisme orthogonal de E est continu.

■ **Exemple 2 :** Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et p la projection de E sur F parallèlement à G. On montre que p est continue.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. On note $\| \|_\infty$ la norme infinie relative à cette base.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) e_i$ est un vecteur de E, alors $p(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i(x) e_i$.

Et $\forall\, x \in E \quad \|p(x)\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$. L'application p est continue.

■ **Exemple 3 :** Soit $E = \mathbb{R}[X] = F$ et posons, pour tout $P(X) = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$:

$$N(P) = \max\{|a_j|; 0 \leqslant j \leqslant p\} \quad \text{et} \quad N'(P) = \max\{j!|a_j|; 0 \leqslant j \leqslant p\}.$$

Vous vérifierez que N' est une norme sur E.
On note f l'application de E dans F :

$$P \longmapsto (X+1)P.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cherchons s'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout P de E :

$$N((X+1)P) \leqslant kN(P).$$

Or :

$$N((X+1)P) = N(XP+P) \leqslant N(XP) + N(P).$$

Et :

$$N(XP) = N(P).$$

Donc :

$$N((X+1)P) \leqslant 2N(P).$$

L'application f est donc continue sur (E, N).

Est-elle continue pour la norme N' ?

Si elle l'était, il existerait une constante k telle que :

$$\forall P \in E \quad N'((X+1)P) \leqslant kN'(P).$$

Appliquons cette inégalité à :

$$P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n.$$

Nous obtenons : $n+1 \leqslant k$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

L'application f n'est pas continue pour la norme N'.

■ **Exemple 4 :**

Soit $E = \mathbb{R}[X] = F$ et posons, pour tout $P(X) = \sum_{j=1}^{p} a_j X^j$:

$$N(P) = \max\{|a_j|, 0 \leqslant j \leqslant p\}.$$

L'opérateur de dérivation est un endomorphisme de E.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $D(X^n) = nX^{n-1}$, donc : $N(D(X^n)) = n$, alors que :

$$N(X^n) = 1.$$

Le quatrième point du théorème ci-dessus n'est donc pas réalisé par l'application linéaire D. D n'est pas une application continue de (E, N) dans (E, N).

Remarquez également que la suite $\left(\frac{X^n}{n}\right)$ converge vers 0_E dans (E, N), mais la suite image $\left(D\left(\frac{X^n}{n}\right)\right)$ ne converge pas vers 0_E dans (E, N).

■ **Exemple 5 :** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, D l'opérateur de dérivation sur E et N une norme quelconque sur E. Si D était continue sur E pour la norme N, il existerait k réel tel que :

$$\forall f \in E \quad N(f') \leqslant kN(f).$$

Appliquez cette inégalité à $(x \longmapsto e^{nx})$. On obtient $n \leqslant k$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Il n'existe aucune norme sur E rendant D continu.

► *Pour s'entraîner : ex. 22, 23 et 24.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6.3. Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 33

Soit $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E étant de dimension finie. Alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration

E est un espace vectoriel de dimension finie p. On peut choisir la norme de E. On fixe une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E et on munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ relative à cette base. Soit f une application linéaire de E dans F.

Tout x de E s'écrit $\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc : $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$.

On en déduit :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant \sum_{j=1}^{p} |x_j| \|f(e_j)\|_F \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{p} \|f(e_j)\|_F.$$

$\sum_{j=1}^{p} \|f(e_j)\|_F$ est un réel positif indépendant de x.

L'application f est donc continue sur E.

Corollaire 33.1

Lorsque E est de dimension finie, l'ensemble $\mathcal{LC}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

Rapport CCP, 2002

« Beaucoup de candidats ayant montré correctement l'implication " $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \Rightarrow (P^{-1}A_kP)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$ " ne parviennent pas à montrer la réciproque qui s'établit sur le même modèle. »

Application 13

Une application linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et S la fonction définie sur E par :

$$S(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|.$$

1) *Montrer que, pour tout complexe z_0, il existe un réel $k > 0$ tel que :*

$$(*) \qquad \forall P \in E \quad |P(z_0)| \leqslant kS(P).$$

2) *Déterminer la plus petite constante k permettant d'obtenir la relation (*) lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.*

1) L'application S est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E et, si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la fonction *module* est une norme sur $\mathbb{C}$.

L'application f de E dans $\mathbb{C}$: $P \longmapsto P(z_0)$ est linéaire et E est de dimension finie. Elle est continue. Il existe donc un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall P \in E \quad |f(P)| = |P(z_0)| \leqslant kS(P).$$

2) • Lorsque $n = 0$, E est l'ensemble des polynômes constants et $\forall P \in E \quad |P(z_0)| = S(P)$.

La plus petite constante cherchée est $k = 1$.

• Lorsque $n = 1$, les éléments de E sont de la forme $P(x) = ax + b$ et pour un tel polynôme :

$$S(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| = |a| + |b|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par ailleurs,

$$P(z_0) = az_0 + b \quad \text{et} \quad |P(z_0)| \leqslant |a|\,|z_0| + |b|.$$

Deux cas se présentent :

Si $|z_0| \leqslant 1$, alors : $|P(z_0)| \leqslant |a| + |b| \leqslant S(P)$.

Pour les polynômes constants, on a toujours $|P(z_0)| = S(P)$. Donc, dans ce cas, la plus petite constante cherchée est $k = 1$.

Si $|z_0| > 1$, alors :

$$|P(z_0)| \leqslant |a|\,|z_0| + |b||z_0| \leqslant |z_0|S(P).$$

Pour les monômes de degré 1 : $P(x) = ax$, on a :

$$|P(z_0)| = |z_0|S(P).$$

Donc, dans ce cas, la plus petite constante cherchée est $k = |z_0|$. On a prouvé que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_1[X] \quad |P(z_0)| \leqslant \max(1, |z_0|)S(P).$$

Et la constante $k = \max(1, |z_0|)$ est la plus petite possible.

► *Pour s'entraîner : ex. 25 et 26.*

6.4. Une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{LC}(E, F)$

L'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E, F)$. Ce sous-espace vectoriel est noté $\mathcal{LC}(E, F)$.

On note de manière analogue $\mathcal{LC}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$.

Soit f une application linéaire continue de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$, nous savons qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

Mensa ACADEMY

En particulier :

$$\forall x \in E \quad \|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant K.$$

Donc, l'ensemble $\{\|f(x)\|_F\ ;\ \|x\|_E \leqslant 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il admet une borne supérieure que nous notons $\|f\|$. Ainsi :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F.$$

Plus précisément, si $\|\ \|_E$ et $\|\ \|'_E$ sont deux normes équivalentes sur E, $\|\ \|_F$ et $\|\ \|'_F$ deux normes équivalentes sur F, alors les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sur $\mathcal{LC}(E, F)$ sont équivalentes.

Théorème 34

L'application

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{LC}(E, F) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{LC}(E, F)$ appelée **norme subordonnée** à $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.

Remarque : Nous avons déjà remarqué que la norme $\|\ \|$ dépend des normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.

La valeur de $\|f\|$ dépend des normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$ utilisées, même si la notation $\|f\|$ n'y fait pas référence.

Rapport Centrale, 2001

« L'idée de norme d'une application linéaire est manifestement mal comprise de la très grande majorité des candidats. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

1) $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$.

2) $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

3) $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F) \quad \forall g \in \mathcal{LC}(E,F) \quad \forall x \in BF(0_E,1)$,

$$\|(f+g)(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Et donc : $\|f+g\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)+g(x)\|_F \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Lorsque E est de dimension finie, $BF(0_E,1)$ est un compact. Pour tout f de $\mathcal{LC}(E,F)$, l'application $(x \longmapsto \|f(x)\|_F)$ est continue sur E. Elle est bornée sur $BF(0_E,1)$ et atteint ses bornes. Il existe x_0 dans $BF(0_E,1)$ tel que : $\|f\| = \|f(x_0)\|_F$.

► *Pour s'entraîner : ex. 27.*

6.5. Propriétés de $\| \ \|$

Théorème 35

Soit f dans $\mathcal{LC}(E,F)$.

- Pour tout x de E, on a $\|f(x)\|_F \leqslant \|f\| \, \|x\|_E$.
- $\|f\| = \min\{k ; \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$.

Démonstration

La propriété est vraie pour $x = 0_E$.

Pour $x \neq 0_E$, $y = \dfrac{x}{\|x\|_E}$ est tel que : $\|y\|_E = 1$, donc, par définition de $\| \ \|$, on a :

$$\|f(y)\|_F \leqslant \|f\|,$$

soit : $\|f(y)\|_F = \dfrac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leqslant \|f\|$, d'où l'inégalité souhaitée.

La borne supérieure est le plus petit des majorants.

Cette démonstration permet aussi d'établir le théorème suivant.

Théorème 36

Pour tout f de $\mathcal{LC}(E,F)$, on a :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leqslant 1 \\ x \neq 0_E}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Remarque :
Si E est de dimension finie, $S(0_E,1)$ est un compact : $\exists x_0 \in S(0_E,1) \ \|f\| = \|f(x_0)\|_F$.

Démonstration

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F \leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F \leqslant \sup_{\substack{\|x\|_E \leqslant 1 \\ x \neq 0_E}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Les ensembles $\{\|f(x)\|_F ; x \in S(0_E,1)\}$ et $\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} ; x \in E \backslash \{0_E\}\}$ sont égaux.

Donc : $\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

En pratique, pour montrer que $\|f\| = k$, on montre d'abord que $\|f\| \leqslant k$, puis :

1) Si on peut montrer qu'il existe $x_0 \in E - \{0_E\}$ tel que : $\|f(x_0)\| = k\|x_0\|$, alors la conclusion $(\|f\| = k)$ en découle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Sinon, on cherche une suite (u_n) de $E-\{0_E\}$ telle que $\left(\frac{\|f(u_n)\|_F}{\|u_n\|_E}\right)$ converge vers k, car, dans ce cas :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow k - \varepsilon < \frac{\|f(u_n)\|_F}{\|u_n\|_E} \leqslant k.$$

Et ceci prouve bien que : $\sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = k$.

Application 14

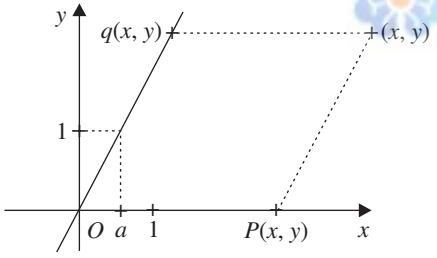
Normes d'un projecteur et d'une affinité

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne : $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

On note $\|\ \|_L$ la norme d'endomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ associée à $\|\ \|$:

$$\|f\|_L = \sup_{\|(x,y)\|_E \leqslant 1} \|f(x,y)\|.$$

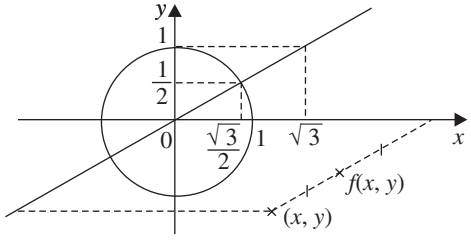
Soit a un réel quelconque. On désigne par p le projecteur sur $\mathbb{R}(1,0) = \{\lambda(1,0)\,;\lambda \in \mathbb{R}\}$ parallèlement à $\mathbb{R}(a,1)$ et par q le projecteur sur $\mathbb{R}(a,1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,0)$.



Doc. 7.

1) *Calculer $\|p\|_L$ et $\|q\|_L$.*

2) *Notons f l'affinité par rapport à $\mathbb{R}(1,0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(\sqrt{3},1)$ de rapport $\frac{1}{2}$.*



Doc. 8.

Calculer $\|f\|_L$.

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) = (x-ay,0) + (ay,y)$.

Donc $p(x,y) = (x-ay,0)$ et $q(x,y) = (ay,y)$.

Pour tout (x,y) tel que $\|(x,y)\| = 1$, notons $(x,y) = (\cos t, \sin t)$.

$\|p(x,y)\| = |x-ay| = |\cos t - a \sin t| \leqslant \sqrt{1+a^2}$.

On en déduit $\|p\|_L \leqslant \sqrt{1+a^2}$. Or :

$$\|p\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\| = \sqrt{1+a^2}.$$

D'où $\|p\|_L = \sqrt{1+a^2}$.

D'autre part : $q(x,y) = (ay,y) = y(a,1)$, donc :

$$\|q(x,y)\| = |y|\sqrt{1+a^2}.$$

Donc : $\|q\|_L = \sup\limits_{\|(x,y)\|_E \leqslant 1} \|q(x,y)\| = \sqrt{1+a^2}$.

2) En posant $a = \sqrt{3}$ dans la question précédente, l'affinité f est l'application $f = p + \frac{1}{2}q$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{y}{2}\right).$$

Pour tout (x,y) tel que $\|(x,y)\| = 1$, notons $(x,y) = (\cos t, \sin t)$.

$$\|f(x,y)\| \leqslant \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t}$$

$$\leqslant \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Et : $\|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\| = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit que : $\|f\|_L = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 15

Une norme subordonnée non atteinte

L'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *est muni de la norme infinie* $\|\ \|_\infty$. *On considère la forme linéaire* u *définie sur* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *par :*

$$u(f)=\int_0^{\frac12} f-\int_{\frac12}^1 f.$$

Montrer que u *est continue pour* $\|\ \|_\infty$.

Calculer sa norme subordonnée et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

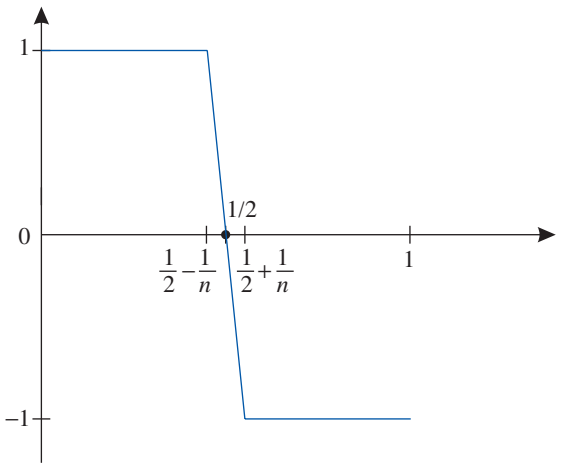
$$\forall f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\quad |u(f)|\leqslant\left|\int_0^{\frac12} f\right|+\left|\int_{\frac12}^1 f\right|$$
$$\leqslant\int_0^{\frac12}|f|+\int_{\frac12}^1|f|\leqslant\int_0^1|f|\leqslant\|f\|_\infty$$

On en déduit que u est continue et que $\|u\|\leqslant 1$.

Si la norme était atteinte pour une fonction f de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de norme infinie égale à 1, on aurait égalité entre tous les termes de l'inégalité ci-dessus.

En particulier, on aurait : $\displaystyle\int_0^1(1-|f|)=0$ avec $1-|f|$ continue et positive. On en déduit que l'application $|f|$ est constante égale à 1. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci n'est possible que pour f constante. Or, dans ce cas, $u(f)$ est nulle et l'égalité n'est pas vérifiée.

Pour montrer que $\|u\|=1$, on va introduire une suite de fonctions (f_n) définie par le schéma suivant :



On vérifie que $\|f_n\|_\infty=1$ et que :

$$u(f_n)=1-\frac1n.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u(f_n)|}{\|f_n\|_\infty}=1,$$

puis $\|u\|=1$.

► *Pour s'entraîner : ex. 28, 29 et 30.*

6.6. Propriétés de $(\mathcal{LC}(E,F),\|\ \|)$

$(E,\|\ \|_E),(F,\|\ \|_F),(G,\|\ \|_G)$ étant trois espaces vectoriels normés, pour simplifier les notations, nous écrirons :

$$\forall u\in\mathcal{LC}(E,F)\quad \|u\|=\sup_{\|x\|_E\leqslant1}\|u(x)\|_F$$

$$\forall v\in\mathcal{LC}(F,G)\quad \|v\|=\sup_{\|y\|_F\leqslant1}\|v(y)\|_G$$

$$\forall w\in\mathcal{LC}(E,G)\quad \|w\|=\sup_{\|x\|_E\leqslant1}\|w(x)\|_G$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 37
Pour tout u de $\mathcal{LC}(E,F)$ et tout v de $\mathcal{LC}(F,G)$, l'application linéaire $v\circ u$ est continue de E dans F et on a : $\|v\circ u\| \leqslant \|v\|\,\|u\|$.

Démonstration
Soit x dans E : $\|v\circ u(x)\|_G \leqslant \|v\|\,\|u(x)\|_F \leqslant \|v\|\,\|u\|\,\|x\|_E$.
Donc : $\|v\circ u\| \leqslant \|v\|\,\|u\|$.

On en déduit par récurrence :

Corollaire 37.1
Lorsque $E=F=G$ et $\|\ \|_E = \|\ \|_F = \|\ \|_G$:

$$\forall f\in\mathcal{LC}(E)\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \|f^n\|\leqslant\|f\|^n.$$

6.7. Caractérisation de l'équivalence des normes

Une application f de $(E,\|\ \|_E)$ dans $(F,\|\ \|_F)$, bijective, continue et telle que f^{-1} soit continue est un homéomorphisme de E sur F. On dit aussi que f est **bicontinue** .

Mensa ACADEMY

Théorème 38
$(E,\|\ \|_E)$ et $(F,\|\ \|_F)$ étant deux espaces vectoriels normés et u une application linéaire et surjective de E dans F, u est un homéomorphisme de E sur F si et seulement si :

$$\exists(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{+*})^2\quad \forall x\in E\quad \alpha\|x\|_E\leqslant\|u(x)\|_F\leqslant\beta\|x\|_E$$

Démonstration
• Supposons que u soit un homéomorphisme de E sur F.
La continuité de u s'écrit : $\exists\beta\in\mathbb{R}^{+*}\quad\forall x\in E\quad \|u(x)\|_F\leqslant\beta\|x\|_E$.
Celle de u^{-1} s'écrit : $\exists\delta\in\mathbb{R}^{+*}\quad\forall y\in F\quad \|u^{-1}(y)\|_E\leqslant\delta\|y\|_F$.
Substituons $u(x)$ à y, on obtient :

$$\forall x\in E\quad \frac{1}{\delta}\|x\|_E\leqslant\|u(x)\|_F\leqslant\beta\|x\|_E.$$

• Réciproquement, montrons d'abord que u est injective.
Si $u(x)=0_F$, alors $\|u(x)\|_F=0$, puis $\|x\|_E=0$, et enfin $x=0_E$.
L'application f est donc un isomorphisme d'espace vectoriel. Par hypothèse, nous avons : $(\forall y\in F\quad \|u^{-1}(y)\|_E\leqslant\frac{1}{\alpha}\|y\|_F)$ et $(\forall x\in E\quad \|u(x)\|_F\leqslant\beta\|x\|_E)$
Les applications u et u^{-1} sont donc continues.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 38.1
Les normes N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si l'application Id_E est un homéomorphisme de (E, N_1) sur (E, N_2).

Toute isométrie de $(E, \|\ \|)$ est bicontinue.

Corollaire 38.2
Les normes N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si les parties ouvertes de (E, N_1) et de (E, N_2) coïncident.

6.8. Algèbre normée unitaire

Une algèbre unitaire est un ensemble $(A, +, \times, .)$ telle que :
1) $(A, +, \times)$ est un anneau d'élément unité e.
2) $(A, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
3) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad \alpha.(x \times y) = (\alpha.x) \times y = x \times (\alpha.y)$.
Supposons de plus l'algèbre A muni d'une norme $\|\ \|$ telle que :

$$\|e\| = 1 \quad \text{et} \quad (\forall (x, y) \in A^2 \quad \|x \times y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|).$$

La norme $\|\ \|$ est alors appelée une **norme d'algèbre** et $(A, +, \times, ., \|\ \|)$ est **une algèbre normée unitaire** .

Exemple :
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$X \longmapsto AX.$$

Cherchons la norme subordonnée à $\|\ \|_\infty$ de φ_A.
Prenons X tel que $\|X\|_\infty \leqslant 1$. Alors :

$$\|AX\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right) \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = rownorm(A).$$

Donc : $\|\varphi_A\| \leqslant rownorm(\ A\ )$.

Mais : $\exists\, i_0 \in [\![1, n]\!])\ \ rownorm\ (A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$.

Considérons le vecteur $X_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ défini par :

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors : $\|\ AX_0\|_\infty \geqslant rownorm\ (A)$. X_0 appartient à la boule unité, donc : $\|\varphi_A\| = rownorm(\ A\ )$.
Ce résultat nous permet de retrouver la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad rownorm(MN) \leqslant rownorm(M) rownorm(N)$$

en écrivant : $\|\varphi_A \circ \varphi_B\| \leqslant \|\varphi_A\|\,\|\varphi_B\|$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En utilisant la transposition, nous obtenons un résultat analogue pour *colnorm*.

De plus : *rownorm* $(I_n) =$ *colnorm* $(I_n) = 1$.

L'algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une algèbre normée unitaire pour les normes *colnorm* et *rownorm*.

La norme $\| \ \|_\infty$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la norme $\| \ \|_1$ ne sont pas des normes d'algèbre.

Exemple très important :

$(E, \| \ \|_E)$ étant un espace vectoriel normé, et A une partie non vide de E, l'ensemble $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ des applications bornées de A dans $\mathbb{C}$ peut être muni de deux lois de composition interne et d'une loi de composition externe par :

$$(f, g) \longmapsto f + g \ ; \quad (f, g) \longmapsto f \times g \ ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad (\alpha, f) \longmapsto \alpha f.$$

Vous vérifierez sans peine que, muni de ces lois, $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ est une algèbre unitaire.

De plus, l'application définie de $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$. Vous vérifierez que c'est une norme d'algèbre.

L'algèbre $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ munie de $\| \ \|_\infty$, est donc une algèbre normée unitaire.

Théorème 39

$(E, \| \ \|_E)$ étant un espace vectoriel normé, l'algèbre $\mathcal{LC}(E)$ des endomorphismes continus de E, munie de la norme $\| \ \|$ subordonnée à $\| \ \|_E$, est une algèbre normée unitaire.

Mensa ACADEMY

7 Les applications bilinéaires

7.1. Continuité des applications bilinéaires

Théorème 40

$(E, \| \ \|_E), (F, \| \ \|_F), (G, \| \ \|_G)$ étant trois espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leqslant K \|x\|_E \|y\|_F, .$
- B est continue sur $E \times F$.

Remarque :
Le théorème 40 se généralise aux applications multilinéaires. Il est en particulier utilisé avec des déterminants.

Démonstration

• Pour établir la continuité de B, fixons x_0 et y_0 dans $E \times F$.

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad B(x, y) - B(x_0, y_0) = B(x, y - y_0) + B(x - x_0, y_0).$$

Donc :

$$\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G \leqslant \|B(x, y - y_0)\|_G + \|B(x - x_0, y_0)\|_G \leqslant K\|x\|_E \|y - y_0\|_F + K\|x - x_0\|_E \|y_0\|_F.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $r > 0$ fixé, soit $B((x_0, y_0), r) = B(x_0, r) \times B(y_0, r)$ la boule ouverte de centre (x_0, y_0) et de rayon r dans l'espace vectoriel normé produit $E \times F$. Cette boule est bornée, donc :

$$\exists M > 0 \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \quad \|(x, y)\|_{E\times F} \leqslant M.$$

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \quad 0 \leqslant \|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G$$

$$\leqslant 2KM \max(\|x - x_0\|_E, \|y - y_0\|_F) \leqslant 2KM\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{E\times F}.$$

Cette inégalité implique : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G = 0$ et ceci prouve la continuité de B.

• Réciproquement, la continuité de B en $(0_E, 0_F)$ implique :

$$\exists \alpha > 0 \quad \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \leqslant \alpha \Rightarrow \|B(x, y)\|_G \leqslant 1.$$

Pour $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_F$, on a :

$$B(x, y) = B\left(\frac{\|x\|_E}{\alpha}\frac{\alpha x}{\|x\|_E}, \frac{\|y\|_E}{\alpha}\frac{\alpha y}{\|y\|_E}\right)$$

$$= \frac{\|x\|_E}{\alpha}\frac{\|y\|_E}{\alpha} B\left(\frac{\alpha x}{\|x\|_E}, \frac{\alpha y}{\|y\|_E}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\|x\|_E\|y\|_F$$

Le résultat est acquis avec $K = \dfrac{1}{\alpha^2}$, car l'inégalité est aussi valable lorsque x ou y est nul.

Remarque :
Pour démontrer la réciproque, nous avons seulement utilisé la continuité en $(0_E, 0_F)$. En fait, nous vous invitons, à titre d'exercice, à montrer que, sous les mêmes hypothèses, la continuité de B en $(0_E, 0_F)$ équivaut à sa continuité sur $E \times F$.

Mensa ACADEMY

Application 16

Un exemple d'application continue

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x) = (x \wedge u) \wedge x,$$

où u est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$. On va montrer que f est une application continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1) *Montrer que f n'est pas linéaire.*

2) *On note g l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$g(x, y) = (x \wedge u) \wedge y$$

Montrer que g est bilinéaire.

3) *En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

1) On constate que :

$$\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, f(\alpha x) = \alpha^2 f(x).$$

Donc f n'est pas linéaire.

2) Immédiat grâce aux propriétés du produit vectoriel.

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \|g(x, y)\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, \|u\|$.

g est donc continue sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ muni de la norme produit. De plus, l'application i de $\mathbb{R}^3$ dans D définie par $i(x) = (x, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car chacune des fonctions coordonnées est continue. Comme $f = g \circ i$, la continuité de f est démontrée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7.2. Quelques exemples

■ L'application de $\mathbb{K} \times E$ dans E : $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ est bilinéaire. De plus :

$$\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \quad \|\alpha x\|_E \leqslant |\alpha| \|x\|_E.$$

Elle est continue sur $\mathbb{K} \times E$.

■ Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe et φ le produit scalaire sur E, Alors φ est continu sur $E \times E$ car :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad | < x | y > | \leqslant \|x\|_E \|y\|_F.$$

■ Soit $(E, +, \times, ., \| \|)$ une algèbre normée, alors l'application de $E \times E$ dans E : $(x, y) \longmapsto x \times y$ est bilinéaire continue. En effet :

$$\|x \times y\|_E \leqslant \|x\|_E \|y\|_E.$$

En particulier, l'application de $\mathcal{LC}(E)$ dans $\mathcal{LC}(E)$: $(u, v) \longmapsto u \circ v$ est continue.

■ Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_\infty$, et B l'application bilinéaire de $E \times E$ dans E : $(P, Q) \longmapsto PQ$. On suppose B continue, il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \|PQ\|_\infty \leqslant K \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$$

Posons alors : $P = Q = 1 + X + \cdots + X^n$.

Nous avons : $\|P\|_\infty = 1 = \|Q\|_\infty$ et $\|PQ\|_\infty = n + 1$.

Alors, pour tout n entier : $n + 1 \leqslant k$. Ceci est absurde. B n'est donc pas continue.

Considérons maintenant la norme N définie sur E par : $N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

Alors :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad N(PQ) \leqslant N(P) N(Q).$$

L'application B est continue pour la norme N.

7.3. Lorsque E et F sont de dimension finie

Théorème 41

Soit $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(G, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Alors toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Démonstration

Les dimensions de E et F sont finies. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de F.

Munissons E et F des normes infinies relatives à ces bases.

On a : $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j, y = \sum_{k=1}^{q} y_k f_k.$

Donc : $B(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} x_j y_k B(e_j, f_k).$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit :

$$\|B(x,y)\|_G \leqslant \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |x_j|\,|y_k|\,\|B(e_j,f_k)\|_G$$
$$\leqslant \|x\|_\infty \|y\|_\infty \max\{\|B(e_j,f_k)\| \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant k \leqslant q\}.$$

Donc B est continue.

Corollaire 41.1

Soit $E_1 \times \cdots \times E_m$ un espace vectoriel produit d'espaces vectoriels de dimension finie et $(G, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Alors toute application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans G est continue.

Exemples :

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie p, alors l'application déterminant de E^p dans $\mathbb{K}$ est $p-$ linéaire, donc continue sur E^p.
- Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A \longmapsto A^2$. f est-elle linéaire ?

Nous allons montrer que f est continue.

L'application f est la composée de deux applications continues :

$$A \longmapsto (A, A) \quad \text{et} \quad (A, B) \longmapsto AB.$$

La première est continue car ses composantes le sont, la seconde car elle est bilinéaire en dimension finie.

► *Pour s'entraîner : ex. 31.*

Rapport ENS Lyon, 2000

« La continuité est souvent mal justifiée : certains reviennent à la définition, et commettent des abus dans les majorations ; d'autres se contentent d'affirmations vagues du style : « Le déterminant est une fonction continue » sans qu'on sache quelle est la norme choisie ni la définition générale d'un déterminant. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy, on peut :
  - majorer $\|u_n - u_{n+p}\|$ par une suite (v_n), indépendante de p, qui converge vers 0 ;
  - montrer que (u_n) est l'image par une application uniformément continue d'une suite de Cauchy.

- Pour montrer qu'une suite de Cauchy converge, on peut :
  - prouver que E est complet ;
  - chercher une valeur d'adhérence l. La suite converge alors vers cette valeur.

- Pour montrer qu'un espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, est complet, on peut :
  - regarder si la dimension de E est finie ;
  - vérifier que toute suite de Cauchy converge.

- Pour montrer qu'une application f admet une limite en a, on peut vérifier le critère de Cauchy des applications.

- Pour prouver qu'une application est uniformément continue sur A, on pourra :
  - regarder si elle est lipschitzienne sur A ;
  - recoller deux fonctions uniformément continues ;
  - sinon, vérifier la définition.

- Pour montrer que la fonction f n'est pas uniformément continue sur A, on pourra :
  - construire deux suites d'éléments de A, (u_n) *et* (v_n), telles que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0_E et la suite $(f(u_n) - f(v_n))$ ne converge pas vers 0_F ;
  - chercher une suite de Cauchy (u_n) telle que la suite $(f(u_n))$ ne soit pas de Cauchy.

- Pour montrer qu'une partie A de $(E, \|\ \|)$ est connexe par arcs, on peut :
  - si $E = \mathbb{R}$, vérifier que A est un intervalle ;
  - montrer que A est convexe ;
  - montrer que A est étoilé ;
  - montrer que A est l'image par une application continue d'une partie connexe par arcs ;
  - pour tout couple (a, b) d'éléments de A, construire un arc d'extrémités a et b.

- Pour montrer qu'une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ s'annule, on peut vérifier que :
  - A est connexe par arcs ;
  - f est continue ;
  - $\exists (a, b) \in A^2 \quad f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

- Pour montrer qu'une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ est de signe constant, on peut vérifier que :
  - A est connexe par arcs ;
  - f est continue ;
  - f ne s'annule pas.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer que deux parties A et B de E sont égales, on peut vérifier que :

- $B \subset A$;
- A est connexe par arcs ;
- B est ouvert et fermé relativement à A.

● Pour montrer qu'une partie A est compacte, on peut :

- si E est de dimension finie, prouver que A est fermée et bornée.

Que E soit ou non de dimension finie, on peut aussi :

- montrer que A est l'image d'un compact par une application continue ;
- chercher une partie B compacte de E, telle que A soit fermée relativement à B ;
- établir que, de toute suite d'éléments de A, il est possible d'extraire une suite convergente dans A.

● Pour montrer qu'une suite d'une partie compacte converge, il suffit d'établir qu'elle possède une unique valeur d'adhérence.

● Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés, $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$, est continue, on peut :

- conclure immédiatement si E est de dimension finie ;
- chercher une constante K telle que, pour tout x de E : $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$;
- chercher une constante K telle que, pour tout x de $BF(0_E, 1)$: $\|f(x)\|_F \leqslant K$;
- chercher une constante K telle que, pour tout x de norme 1 : $\|f(x)\|_F \leqslant K$;
- montrer que f est continue en 0_E.

● Lorsque l'application linéaire f est continue, pour calculer $\|f\|$, on peut, en procédant à des majorations les plus fines possibles :

D'abord, trouver une constante K telle que :

- $\|f(x)\|_F \leqslant K$ pour tout x tel que $\|x\|_E \leqslant 1$;
- ou $\|f(x)\|_F \leqslant K$ pour tout x tel que $\|x\|_E = 1$;
- ou $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$ pour tout x de E.

Dans les trois cas $\|f\| \leqslant K$.

Ensuite, lorsque l'on pense détenir « la plus petite constante » K, on s'en assure en cherchant :

- soit un vecteur non nul v tel que $\|f(v)\|_F = K\|v\|_E$;
- soit une suite (u_n) de $E - \{0_E\}$ telle que $\dfrac{\|f(u_n)\|_F}{\|u_n\|_E}$ converge vers K.

On peut alors conclure que $\|f\| = K$.

● Pour montrer qu'une application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue, on peut :

- conclure directement si E et F sont de dimensions finies ;
- majorer $\|B(x, y)\|_G$ pour tout (x, y) dans $E \times F$, afin de mettre en évidence une constante K qui vérifie la définition.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

1. Fonctions höldériennes (d'après X 1997).

CONSEILS

N'oubliez pas de vérifier l'existence de $K_\alpha(f)$.

Pensez à l'inégalité des accroissements finis.

Vous pourrez montrer que :
– La suite (f_n) converge vers une fonction f pour $\| \ \|_\infty$.
– f est dans E_α.
– La suite (f_n) converge aussi vers f pour $\| \ \|_\alpha$.

ÉNONCÉ

On désigne par $I = [a, b]$, où $a < b$, un segment et, pour tout entier $k \geqslant 0$, par $\mathcal{C}^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Pour toute fonction f à valeurs complexes bornée sur I, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Pour tout nombre $\alpha > 0$, on note E_α l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes f sur I ayant la propriété suivante : il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^\alpha$$

Pour une telle f, on note $K_\alpha(f)$ le plus petit de ces nombres K.

1) Décrire E_α lorsque $\alpha > 1$. Dans toute la suite, on suppose $0 < \alpha < 1$.

2)a) Vérifier que l'on a :

$$\mathcal{C}^1(I) \subset E_\alpha \subset \mathcal{C}^0(I).$$

b) Indiquer une fonction appartenant à E_α, mais non à $\mathcal{C}^1(I)$.

3) Comparer E_1, E_α et E_β lorsque $0 < \alpha < \beta < 1$.

Pour toute f de E_α, on pose :

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + K_\alpha(f).$$

4) Montrer que $\| \ \|_\alpha$ est une norme sur E_α.

5) Montrer que $(E_\alpha, \| \ \|_\alpha)$ est complet.

2. Trois cas d'étude de la distance d'un point à un convexe fermé

CONSEILS

Faites des figures pour tout le TD.

ÉNONCÉ

1) Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur $V = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ et toute partie non vide A de E, on pose :

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) \quad \text{et} \quad d(V, A) = \inf_{X \in A} \|V - X\|.$$

a) Prouver que $G = \{(x, y) \in E | y = 1\}$ est un convexe fermé de E.

b) Démontrer que $d(0_E, G) = 1$.

c) Montrer qu'il existe une infinité de points (x, y) de G tels que :

$$d(0_E, G) = \|(x, y)\|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Dans cette partie, $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout f de E, et toute partie non vide A de E, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad d_\infty(f,A) = \inf_{g\in A} \|f-g\|_\infty.$$

a) Prouver que $G = \{f \in E \mid \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1\}$ est un convexe fermé de $(E, \| \ \|_\infty)$.

b) Démontrer que $d_\infty(0_E, G) = 1$.

c) Montrer qu'aucun élément g de G ne vérifie $\|g\|_\infty = 1$.

Appliquez le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite (v_n).

3) Dans cette partie, $(E,(|))$ est un espace préhilbertien réel de dimension finie et F un fermé non vide de E. On note $\| \ \|_2$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.

a) Montrer que, pour tout x de E, il existe x_1 dans F tel que :

$$\|x - x_1\|_2 = \inf_{y\in F} \|x-y\|_2.$$

b) Montrer que, si F est de plus supposé convexe, alors le point x_1 est unique.

4) Que constatez-vous ?

5) Dans cette partie, comme au **3)**, $(E,(|))$ est un espace préhilbertien réel de dimension finie. Dans la suite, F est un convexe, fermé, non vide de E et on appelle proj_F l'application de E dans E définie au **3)a)** en posant $\text{proj}_F(x) = x_1$.

a) Soit x un élément de E et $x_1 = \text{proj}_F(x)$. Montrer que :

$$\forall\, y \in F \quad (y - x_1 | x_1 - x) \geqslant 0.$$

b) Dans cette question, F est un sous-espace vectoriel de E.

- Vérifier que F est convexe et fermé.
- Montrer que proj_F est la projection orthogonale sur F.

Appliquez le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite (v_n).

c) Soit u un point frontière de F. Il existe une suite (u_n) de vecteurs n'appartenant pas à F, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \|u - u_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n}.$$

On note $x_n = \text{proj}_F(u_n)$ et $v_n = \dfrac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}$.

- Montrer que la suite (x_n) de F converge vers u et que :

$$\forall\, y \in F \quad \langle y - x_n | v_n \rangle \geqslant 0.$$

- En déduire qu'il existe un vecteur unitaire v de E tel que :

$$\forall\, y \in F \quad \langle y - u | v \rangle \geqslant 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie dense de E. On suppose que toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans E.

Montrer que $(E, \|\ \|)$ est complet.

2 Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est complet si et seulement si toute suite de E telle que : $\forall n \quad \|u_n - u_{n+1}\| \leqslant 2^{-n}$ converge.

3 **(d'après Centrale PC 1997)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et φ une application lipschitzienne de $]a, b[$ dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies, pour $n > 0$, par : $u_n = \varphi(a + \frac{b-a}{n+1})$ et $v_n = \varphi(b - \frac{b-a}{n+1})$ ont une limite, notée respectivement u et v lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On définit la fonction φ_0 sur $[a, b]$ par : $\varphi_0(a) = u, \varphi_0(b) = v$ et, pour tout $x \notin \{a, b\}$ $\varphi_0(x) = \varphi(x)$. Montrer que φ_0 est lipschitzienne sur $[a, b]$.

4 Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe α et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta.$$

5 Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout y de $\mathbb{R}^{+*}$, la suite $(f(ny))$ converge. Montrer que f admet une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$.

6 La réciproque d'une bijection uniformément continue est-elle uniformément continue ?

7 L'intérieur d'une partie connexe par arcs est-il connexe par arcs ?

8 Soit f une application continue d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$ et $G = \{(x, f(x)); x \in A\}$ contenu dans $E \times F$, muni de la norme produit. Montrer que A est connexe par arcs si et seulement si G l'est.

9 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.

2) En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.

10 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On considère la fonction caractéristique de A, χ_A, de E dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la fonction caractéristique χ_A, soit continue. En déduire quelles sont les parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé.

11 $\mathfrak{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

12 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie compacte de E et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides contenus dans A. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \varnothing$.

13 Montrer que, si la boule $BF(0,1)$ est compacte, alors E est complet.

14 Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

* L'image réciproque de tout compact est un compact.
* $\lim_{x\to+\infty} |f| = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} |f| = +\infty$.

15 Montrer que $[0,1]$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes.

16 Soit $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $N = \|\ \|_\infty$, et une application f continue d'un fermé F de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\lim_{\substack{N(x)\to+\infty \\ x\in F}} f(x) = +\infty$.

Montrer qu'il existe a dans F tel que : $f(a) = \inf_{x\in F} f(x)$.

17 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et K un compact contenu dans la boule unité ouverte de E. Montrer qu'il existe un nombre r de $]0,1[$ tel que K soit contenu dans la boule fermée $BF(O, r)$.

18 Soit $n > 0$. Montrer que si $n \geqslant 2$, l'ensemble des matrices singulières de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas compact.

19 Soit f une application continue d'une partie A d'un espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, dans $(F, \|\ \|)$, les espaces vectoriels étant de dimension finie, et G le graphe de f.

Montrer que A est compacte si et seulement si G est compacte.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

20 Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer qu'il existe un ouvert U de E tel que $\overline{U}$ soit compact et K soit contenu dans U.

21 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1) Montrer qu'il existe deux points a et b de $\overline{A}$ tels que :

$\delta(\overline{A}) = \sup\{\|x-y\|; (x,y) \in \overline{A}^2\} = \|a-b\|$.

$\delta(\overline{A})$ est le diamètre de $\overline{A}$.

2) Montrer qu'aucun des points a, b n'est intérieur à A.

3) En déduire que le diamètre de A est égal au diamètre de sa frontière.

22 L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\ \|$ définie par : $\|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i\| = \sum_{i=0}^{p} |\alpha_i|$.

1) Montrer que l'application dérivation D est linéaire mais n'est pas continue relativement à la norme $\|\ \|$.

2) On définit f de E dans $\mathbb{R}$ par $f(P) = P(0)$. Montrer que f et $f \circ D$ sont des applications linéaires continues de $(\mathbb{R}[X], \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}$.

23 Soit φ une forme linéaire sur $(E, \|\ \|)$. Montrer que φ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.

24 Soit $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. On suppose que, pour toute suite (u_n) de $E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0_E, la suite $(f(u_n))$ est bornée. Montrer que f est continue.

25 Montrer, en utilisant une application linéaire, qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E de dimension finie est un fermé de E.

26 E est un espace euclidien, $(F_1, \dots, F_p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que : $\bigcap_{i=1}^{p} F_i = \{0\}$.

Montrer qu'il existe α, β dans $\mathbb{R}^+$ tels que, pour tout x dans E : $\alpha d(0_E, x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i) \leqslant \beta d(0_E, x)$.

27 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $\|\ \|_L$ la norme d'endomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ subordonnée à la norme euclidienne. Calculer $\|f\|_L$ lorsque f est :

1) une rotation ; **2)** une symétrie orthogonale ;

3) une homothétie ;

4) le projecteur sur $\mathbb{R}(1,0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,1)$.

28 Donner la norme des applications f et $f \circ D$ de l'exercice 22.

29 Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

1) On suppose que, pour tout x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E et l'on note $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) Montrer que la suite (φ_n) converge dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si, pour tout vecteur x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E.

30 On désigne par N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer les normes subordonnées à chacune de ces normes de la fonction trace.

31 Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver :

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant kN(A)N(B).$$

32 $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $\exists\, \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$

$$N(f(x)-f(y)) \leqslant \alpha[N(f(x)-x) + N(f(y)-y)].$$

Montrer que f admet un point fixe unique.

33 $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2.

1) Montrer que $E\backslash\{0_E\}$ est connexe par arcs.

2) En déduire qu'il n'existe aucun homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2.

34 On suppose $n > 0$.

1) Soit $a_1, \dots, a_p$ des nombres complexes. Montrer que $\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_p\}$ est connexe par arcs.

2) Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables (c'est-à-dire semblables à des matrices diagonales) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

35 Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$, qu'elle atteint au moins une de ses bornes et qu'elle est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

36 ** Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^n$. On définit la suite récurrente (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$ et on suppose que la suite (x_n) admet une et une seule valeur d'adhérence.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Montrer que, si la suite (x_n) n'est pas bornée, alors :

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad (x_n \in BF(a,1) \quad \text{et} \quad x_{n+1} \notin B(a,1)).$$

En déduire qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de la suite (x_n) telle que, pour tout n :

$$x_{\varphi(n)} \in BF(a,1) \quad \text{et} \quad x_{\varphi(n)+1} \notin B(a,1).$$

2) Montrer que (x_n) converge.

37 * Soit $S \geqslant 0$ fixé et K la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \,;\, x_1 + \cdots + x_n = S\}$$

1) Montrer que K est compact.

2) Montrer que l'application de K dans $\mathbb{R}$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i$$

a un maximum qu'elle atteint en un point où toutes les coordonnées sont égales.

3) En déduire que la moyenne géométrique de réels positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique.

38 Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ et f une application de K dans K telle que : $\forall (x,y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, a.

2) Soit x_0 un point quelconque de K et (x_n) la suite récurrente définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) converge vers a.

39 ** Soit A une partie compacte de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ et f une application de A dans A vérifiant : $\forall (x,y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$.

1) Montrer que $\overline{f(A)} = A$.

(On pourra considérer la suite récurrente définie pour tout point x de A, par : $x_0 = x$ et, pour tout $n, x_{n+1} = f(x_n)$.)

2) Montrer que f est une isométrie.

(Utilisez deux suites récurrentes associées à f et procédez comme dans la question précédente.)

3) En déduire que f est bijective.

40 * **(d'après ENSAE 1997)** $(E, \| \|)$ désigne un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E.

1) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et n boules $B(x_i, \varepsilon)$ telles que : $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

2) En déduire qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, un sous-espace vectoriel E_ε de E, de dimension finie, tel que, si l'on pose : $F = E_\varepsilon \cap K$, on ait : $\forall x \in K \quad d_F(x) \leqslant \varepsilon$.

41 Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) Montrer que tout projecteur de E est continu.

On note N la norme d'endomorphisme continu associée à la norme $\| \|$ de E.

2) Montrer que si p est un projecteur non nul, alors : $N(p) \geqslant 1$.

3) Caractériser les projecteurs tels que : $N(p) = 1$, lorsque E est un espace euclidien.

42 * Soit $n > 0$. Montrer que :

1) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et $\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,;\, \mathbb{A}^2 = I_n\}$ est compact.

43 ** $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ étant deux espaces vectoriels normés de dimension finie, on note $G = \mathcal{GL}(E,F)$ et I l'ensemble des isométries de E sur F.

Montrer que : $I \neq \varnothing \Leftrightarrow \inf_{f \in G} \|f\| \, \|f^{-1}\| = 1$.

44 ** On considère l'espace vectoriel normé, $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}), \| \|_\infty)$ et φ une forme linéaire sur E.

La forme φ est dite positive si : $\forall f \geqslant 0 \quad \varphi(f) \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que toute forme linéaire positive est continue.

2) Montrer que, si φ est une forme linéaire continue, vérifiant $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(1) = 1$, alors φ est positive. (Considérer : $0 \leqslant f \leqslant 1, g = 2f - 1, \varphi(g + it)t \in \mathbb{R}$, où $g + it : x \longmapsto g(x) + it$)

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

4

Introduction

Lorsque les mathématiciens commencent à s'intéresser aux séries, c'est pour calculer leurs sommes. Ils entreprennent ces calculs sans se préoccuper de l'existence de la somme et de la convergence de la série. C'est le cas de Gauss (1777-1855) qui étudie, en 1797, la somme de $0! - 1! + \cdots + (-1)^n n!$. *En 1813, il publie un mémoire sur la somme :*

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{x^n}{n!}.$$

Il dénonce l'usage des séries divergentes : dès qu'une série « cesse de converger, sa somme en tant que somme, n'a aucun sens ».

Considérant une série de terme général u_n *et la suite* $S_n = u_1 + \cdots + u_n$, *Bolzano (1781-1848) affirme que* $|S_{n+r} - S_n|$, *quel que soit* $r \in \mathbb{N}$, *« reste plus petite que toute grandeur donnée, si on a pris auparavant* n *suffisamment grand ».*

C'est le premier énoncé de la condition nécessaire du « critère de Cauchy ». Sa démonstration de la propriété réciproque est erronée. En effet, pour cette démonstration, il fallait définir au préalable l'ensemble des nombres réels. Ceci ne sera fait que bien plus tard, en 1869, par Meray (1835-1911), Dedekind (1831-1916), Cantor (1845-1918) et Weierstrass (1815-1897).

Le cours d'analyse de Cauchy (1789-1857), paru en 1821, donne une définition rigoureuse de la convergence d'une série.

En 1826, Abel (1802-1829) publie un mémoire sur la série du binôme et déclare : « le nombre de théorèmes concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est limité. On applique ordinairement les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. »

Objectifs

- Définition des séries d'éléments d'un espace vectoriel normé.
- Correspondance bijective entre suites et séries.
- Critère de Cauchy pour les séries.
- Séries absolument convergentes.
- Séries alternées.
- Critères de convergence dans le cas des séries de réels positifs, applications aux séries absolument convergentes.
- Développement décimal d'un réel.
- Série et intégrale.
- Formule de Stirling.
- Séries usuelles dans une algèbre normée.
- Produit de deux séries absolument convergentes.
- Étude des sommes doubles.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre $(E, \|\|\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Généralités

1.1. Vocabulaire

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On définit la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Le couple (u, s) sera appelé **série** associée à la suite u et noté $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$ quand il y aura un risque de confusion sur l'indice de sommation.

L'élément s_n sera appelé **somme partielle** d'ordre n.

Si la suite s converge, on dira que la série $\sum u_n$ **converge**. Dans le cas contraire, on dira qu'elle **diverge**.

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, la suite s admet une limite dans E que nous noterons $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Cette limite sera appelée **somme** de la série $\sum u_n$.

Étudier la **nature** de la série $\sum u_n$, c'est étudier la convergence de cette série. Deux séries sont **de même nature** si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Attention :

1) Ne pas confondre les différents symboles $\sum u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{k=0}^{n} u_k$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ ou $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$.

2) N'écrire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $\sum_{k\geqslant n_0}^{\infty} u_k$ qu'après avoir vérifié la convergence de la série.

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut définir la suite r par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - s_n.$$

L'élément $r_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - s_n$ sera appelé **reste d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

Théorème 1

Soit $\sum u_k$ une série convergente et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de cette série. Alors :

- la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ;

Nous pouvons être amenés à considérer des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un certain rang n_0. On se ramène à la définition précédente en posant $u_n = 0$ pour $n < n_0$.
Nous continuerons de noter $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$ la série étudiée, mais les sommes partielles s'écriront pour $n \geqslant n_0$: $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et, quand il y aura convergence, la somme sera notée $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« De trop nombreux étudiants confondent la notion de série et la somme d'une telle série quand elle converge. Plus généralement, on déplore un amalgame entre les notations $\sum u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k$. »

***Cauchy**, en 1821, écrivait : « J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures ; par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme ».*

⚠ *Les expressions $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et r_n n'ont de sens que lorsque la série converge.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• pour tout n, on a : $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$;

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k = s_n + r_n$.

Le reste r_n sert à mesurer l'écart entre la somme partielle s_n et la somme S de la série convergente $\sum u_k$. En termes de calcul numérique, si l'on sait majorer $|r_n| = |S - s_n|$, on majore ainsi l'erreur commise en remplaçant S par S_n.

1.2. Exemples

■ La série $\sum \frac{1}{n+1}$ dite **série harmonique** est divergente.

En effet, les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}$ conduisent à la minoration des sommes partielles suivantes :

$\ln(n+2) = \int_1^{n+2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ et à $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = +\infty$. La série diverge.

■ La **série géométrique** sur $\mathbb{C}$ associée à la suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$. Sa somme est alors égale à $\frac{u_0}{1-q}$.

En effet, pour $q \neq 1, s_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la limite est $\frac{u_0}{1-q}$. Vous pouvez noter également, que, pour tout entier n, nous avons : $r_n = u_0 \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Pour $q = 1$, la suite des sommes partielles diverge quand $u_0 \neq 0$.

■ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$. En remarquant que $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, nous obtenons : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

D'où : $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$.

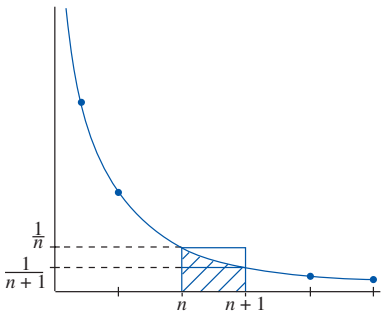
1.2.1 Expression de l'exponentielle réelle

Soit x réel. L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$ s'écrit :

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|x|}.$$

Rapport Centrale 2003

Il faut noter aussi que certaines questions très simples (par exemple le fait que la série de terme général a_{n+1} converge si la série de terme général a_n converge) ont gêné un nombre considérable de candidats, ce qui est anormal. Ceci peut signifier que la notion de série n'est pas comprise, et qu'il faudra sans doute insister là-dessus à l'avenir.



Doc. 1.

Rapport du concours TPE, 1995

« Il y a des confusions entre la série géométrique, qui converge pour $|r| < 1$ (r étant la raison) et le calcul des sommes partielles de cette même série que l'on peut préciser, même si la série diverge. »

Rapport Centrale, 2003

« Les très diverses formulations permettant (théoriquement) de calculer une somme de termes d'une suite géométrique s'avèrent dans les faits assez peu efficaces. Peut-être serait-il préférable de savoir une bonne fois pour toutes ce que vaut $1 + q + \cdots + q^n$. »

Rapport Centrale, 2003

« On peut simplement regretter le peu d'aisance avec les sommes géométriques. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous savons que : $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = 0$.

Pour tout x réel : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Rapport Centrale, 1997

« Il est regrettable de perdre de précieuses minutes avant de reconnaître la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ *.»*

1.2.2 Expression du sinus et du cosinus

La fonction sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, $\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$ conduit à $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$.

De la même manière, on montre que $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$.

Pour tout x réel : $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1, 2.***

1.3. Premières propriétés

Théorème 2

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes. Il existe un entier p tel que : $\forall n \geqslant p \quad u_n = v_n$. Notons s et s' les suites des sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$. Nous obtenons : $\forall n \geqslant p \quad s_n - s'_n = \sum_{k=0}^{p-1} (u_k - v_k)$

Ce dernier terme est une constante, donc la convergence de la suite s équivaut à celle de la suite s'.

⚠ *Si les séries convergent, les sommes ne sont pas les mêmes.*

Théorème 3

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = s_n - s_{n-1}$. Or $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

⚠ *La réciproque de la proposition précédente est fausse, la série harmonique nous en donne un contre-exemple.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 3.1
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Dans ce cas, la divergence est qualifiée de **grossière**.

Exemple : La série $\sum (-1)^n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Théorème 4. Caractérisation à l'aide d'une base
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p et $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E.

Pour toute série $\sum u_n$, il existe p séries d'éléments de $\mathbb{K}$, notées $\sum u_{n,i}$ et définies par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$. Alors :

• La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum u_{n,i}$ convergent pour tout i.

• Si la série converge, sa somme a pour coordonnées les sommes des séries coordonnées :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,i} \right) e_i .$$

Corollaire 4.1 (Séries complexes)
Soit $\sum u_n$ une série complexe. Alors :

• La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

• La série $\sum \overline{u_n}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

En cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

Théorème 5
L'ensemble des séries convergentes d'éléments de E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application de cet ensemble dans E définie par : $u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est linéaire. Quelles que soient les séries convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$, nous avons :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n .$$

Rapport CCP, 2002
« Un candidat à qui il était demandé si le terme général tendait vers 0 a répondu : "Cette étude est sans intérêt puisque la convergence du terme général vers 0 n'implique pas la convergence de la série." »

Pour utiliser l'égalité :
$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$
vous devez, au préalable, justifier la convergence d'au moins deux séries parmi les trois.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 5.1
Pour toute série $\sum u_n$ et pour tout scalaire α non nul, les séries $\sum u_n$ et $\sum \alpha u_n$ sont de même nature.

Corollaire 5.2
Si la série $\sum u_n$ converge et si la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

⚠ *Si la série $\sum u_n$ diverge et si la série $\sum v_n$ diverge, on ne peut pas en déduire la nature de la série $\sum (u_n + v_n)$. Étudiez par exemple les séries définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1$ et $v_n = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1$ et $v_n = 1$.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 3, 4 et 5.***

2 Séries d'éléments d'un espace de Banach

2.1. Critère de Cauchy

Théorème 6
Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de l'espace vectoriel normé de dimension finie E. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration
E est de dimension finie. Il est complet. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy.

Exemple :
Utilisons le critère de Cauchy pour montrer que la série harmonique diverge.
$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Le critère n'est pas vérifié pour ε dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et $p = n$.

Application 1

Étude de la transformation d'Abel

Niels Henrik Abel *(1802-1829), mathématicien norvégien. Il étudie la convergence des séries entières et les intégrales. Il est à l'origine de la notion de polynôme irréductible sur un corps.*

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel normé E de dimension finie.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On notera S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum a_n b_n$ et B_n celle de la série $\sum b_n$.

1) *Exprimer S_n en fonction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce type de calcul est appelé une transformation d'Abel.*

Rapport Centrale, 2003

« Que penser d'un candidat qui invoque une sommation d'Abel pour étudier la convergence d'une série qui ne nécessite qu'un développement limité du terme général... »

2) *On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, de limite nulle et que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.*

3) *En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.*

1) Calculons S_n en remplaçant les termes b_k par $B_k - B_{k-1}$. On conviendra de donner la valeur 0 à B_{-1} pour que la formule reste valable pour $n = 0$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.\end{aligned}$$

2) On utilise le critère de Cauchy.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_n B_n \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n.\end{aligned}$$

Nous savons que $a_k - a_{k+1} \geqslant 0$ pour tout entier k.

Ceci conduit à la majoration suivante :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|S_{n+p} - S_n\| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) \|B_k\| \\ &\quad + a_{n+p}\|B_{n+p}\| + a_{n+1}\|B_n\|.\end{aligned}$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|B_n\| \leqslant M$. Par conséquent, nous obtenons les majorations :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|S_{n+p} - S_n\| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})M + a_{n+p}M + a_{n+1}M \\ &\leqslant 2a_{n+1}M.\end{aligned}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Nous pouvons en déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow 2a_{n+1}M < \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow \|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy est vérifié et l'espace E étant complet, la série $\sum a_n b_n$ converge.

3) Puisque $\theta \neq 0[2\pi]$, nous avons l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1},$$

puis l'inégalité :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} \right| \leqslant \left| e^{i\theta} \right| \frac{\left| e^{in\theta} \right| + 1}{\left| e^{i\theta} - 1 \right|} \leqslant \frac{2}{\left| e^{i\theta} - 1 \right|}.$$

Les sommes partielles de la série $\sum e^{in\theta}$ sont bornées.

Pour $\alpha > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et de limite nulle.

La question 2 assure la convergence de la série étudiée.

Pour $\alpha \leqslant 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement.

Nous pouvons donc affirmer que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Séries absolument convergentes

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E. Nous dirons qu'elle est **absolument convergente** lorsque la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 7
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie. La série $\sum u_n$ est convergente et :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| .$$

Démonstration

La convergence de la série est une conséquence directe du critère de Cauchy et de l'inégalité suivante : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ et l'application $\| \ \|$ est continue :

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right\| .$$

Puisque la série $\sum \|u_n\|$ converge, par passage à la limite, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| .$$

Mensa ACADEMY

Exemples :

- Nous avons vu que la série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge ; le théorème 7 nous permet d'affirmer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente. Elle converge.

- Reprenez l'étude de l'*Application* 1. Vous pouvez maintenant traiter la question **2)** sans utiliser le critère de Cauchy. Nous avions l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n .$$

On sait que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous pouvons en déduire que la suite $(a_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour montrer que la suite S converge, il suffit maintenant de montrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est convergente. Pour cela, nous allons montrer qu'elle est absolument convergente.

$$\sum_{k=0}^{n} \|(a_k - a_{k+1}) B_k\| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) \|B_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) M \leqslant a_0 M .$$

La suite croissante des sommes partielles de la série $\sum \|(a_k - a_{k+1}) B_k\|$ est majorée, elle converge.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 2

La série harmonique alternée

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ *n'est pas absolument convergente car la série des valeurs absolues est la série harmonique qui diverge. Montrez que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ *converge et calculez sa somme.*

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

$$s_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln 2$$

et :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \ln 2$.

Corollaire 7.1

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.

Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ appelée série harmonique alternée est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente.

Une série convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente.**

► *Pour s'entraîner : ex 7.*

Correspondance entre Leibniz et Bernoulli

■ **Leibniz à Jean Bernoulli, Vienne, le 25 octobre 1713**

[...] Je voudrais que la science des Séries, à laquelle s'est excellemment appliqué Newton, ait été poussée plus loin, surtout en ce qui concerne le moyen de savoir lesquelles convergent, parmi celles qui entrent dans le cadre des transcendantes aussi bien que des ordinaires. [...] La règle la plus universelle, c'est-à-dire commune aux ordinaires comme à n'importe laquelle des transcendantes, est celle-ci : Toute valeur exprimée par une série est convergente quand les termes de la série décroissant à l'infini[1] sont alternativement positifs et négatifs. [...]

■ **Jean Bernoulli à Leibniz, Bâle, le 6 décembre 1713**

[...] Pour le moment, je ne sais pas si l'on peut démontrer ce que tu as affirmé, que toute valeur exprimée par une série est convergente, et par conséquent finie, quand les termes de la série continûment décroissants sont alternativement positifs et négatifs. [...]

[1] Ce qui signifie que le terme général tend vers 0, sans inclure forcément la décroissance de la suite, comme on le voit plus loin.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Leibniz à Jean Bernoulli, Vienne, le 10 janvier 1714

Si tu y prêtes attention, tu remarqueras facilement que toute valeur exprimée par une série est convergente, et par conséquent finie, quand les termes de la série continûment décroissants sont alternativement positifs et négatifs. Et voici la démonstration :

Soit la série :

$$\overbrace{\underbrace{a-b+c-d+e}_{M}-f}^{L}+g-h+i-k+\text{etc.}$$

dont les termes décroissent à l'infini de sorte que n'importe lequel soit inférieur au précédent.

Je dis $\mathbf{1}^\circ$ que sa quantité est finie et $\mathbf{2}^\circ$ que le morceau de série pris au début et terminé par un $+$, noté L, est plus grand que la série elle-même, et $\mathbf{3}^\circ$ qu'inversement le morceau pris de même et terminé par un $-$, soit M est plus petit que la série ; mais $\mathbf{4}^\circ$ que l'erreur est toujours plus petite que le dernier terme ou le dernier terme voisin terminé par un $-$, et $\mathbf{5}^\circ$ que la série continuée jusqu'au bout est convergente à l'infini.

Appelons S la série. D'abord, L est supérieur à S, parce que pour avoir S à partir de L, il faut plus soustraire (à savoir, f, h, etc.) qu'ajouter (à savoir, g, i, etc.), ce qui fut l'assertion $\mathbf{2}^\circ$. Mais M est inférieur à S, car pour avoir S à partir de M, il faut plus ajouter (à savoir, g, i, etc.) que soustraire (à savoir, h, k, etc.), ce qui fut l'assertion $\mathbf{3}^\circ$. C'est pourquoi S tombe entre L et M et est donc une quantité finie, ce qui fut l'assertion $\mathbf{1}^\circ$. Mais l'erreur, c'est-à-dire la différence entre S même et les extrémités L et M est inférieure à la différence entre les extrémités (à savoir f) d'où s'ensuit l'assertion $\mathbf{4}^\circ$. Et en continant autant que l'on veut, f est inférieure à toute quantité donnée par hypothèse ; et ainsi on aura également l'assertion $\mathbf{5}^\circ$.

Jean Bernoulli à Leibniz, Bâle, le 28 février 1714

C'est une bonne démonstration que celle que tu as donnée de la convergence de la valeur d'une série dont les termes alternativement positifs et négatifs décroissent continûment, à condition bien entendu que chacun soit inférieur au précédent, est bonne. Mais je pensais que tu pourrais démontrer que la valeur est également finie quand les termes de la série sont ainsi disposés que chaque terme positif soit inférieur au précédent positif et que chaque terme négatif soit inférieur au précédent négatif et sinon peut-être pas inférieur mais supérieur à l'immédiat précédent ; ce qu'il est de toute façon impossible de démontrer ; il y a des contre-exemples, comme

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\frac{1}{32}+\text{ etc.}$$

dont les termes décroissent à l'infini, et sont alternativement positifs et négatifs ; cette série a pourtant une valeur infinie : en effet, les termes positifs constituent la série harmonique, qui, comme il est évident, a une somme infinie : les négatifs quant à eux forment une série géométrique, dont la valeur est finie. En outre, dans ton hypothèse dans laquelle le terme voisin du précédent est supposé plus petit, la valeur finie de la série est démontrée très facilement par un autre moyen : $a-b+c-d+f-\text{etc.}\ a-b+b-d+d-f+f-\text{etc.}=a$. Donc $a-b+c-d+e-f$ etc. est plus petit que a. Donc la valeur de cette série est finie. Les autres assertions démontrées par toi sont aussi démontrées facilement à partir de là. [...]

2.3. Étude des espaces $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$

Nous noterons $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Théorème 8

L'ensemble $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum|u_n|$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application S de $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, définie par $u\longmapsto\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ est linéaire.

L'application N_1 définie de $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$, définie par $u\longmapsto\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|$ est une norme sur $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Les deux premiers points se vérifient facilement. Vérifions que N_1 est une norme.

N_1 est bien définie sur $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$$\forall u \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})\ \forall k \in \mathbb{K}\quad N_1(ku) = \sum_{n=0}^{+\infty} |ku_n| = |k| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |k| N_1(u).$$

$\forall u \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})\ \forall v \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})\quad N_1(u+v) \leqslant N_1(u) + N_1(v)$ résulte de l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{K}$.

Montrons maintenant que : $\forall u \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})\quad N_1(u) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = 0$.

Si u est la suite nulle, il est évident que $N_1(u) = 0$.

Supposons maintenant que $N_1(u) = 0$, alors : $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = 0$.

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}\quad |u_n| \geqslant 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}\quad \sum_{k=0}^{n} |u_k| = 0$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = 0$.

Théorème 9

L'ensemble $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum |u_n|^2$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application φ de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})^2$ dans $\mathbb{K}$, définie par $\varphi(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

La norme associée $u \longrightarrow \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2}$ sera notée N_2.

Démonstration

• $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est une partie non vide et stable par combinaison linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

En effet, prenons deux suites u et v de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad |u_n + v_n|^2 = |u_n|^2 + |v_n|^2 + \overline{u_n} v_n + u_n \overline{v_n}.$$

Nous savons que : $|\overline{u_n} v_n| \leqslant \dfrac{|u_n|^2 + |v_n|^2}{2}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad |u_n + v_n|^2 \leqslant 2(|u_n|^2 + |v_n|^2).$$

La suite $u + v$ est dans $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

La majoration $|\overline{u_n} v_n| \leqslant \dfrac{|u_n|^2 + |v_n|^2}{2}$ vérifiée pour tout entier naturel n, montre également que la série $\sum |\overline{u_n} v_n|$ converge, ce qui assure l'existence de $\varphi(u,v)$.

On prouve facilement que, si u est dans $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et k dans $\mathbb{K}$, alors ku est également dans $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Il reste à montrer maintenant que φ est un produit scalaire.

Vous vérifierez que pour tout u de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ arbitrairement choisi, l'application $v \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n} v_n$ est linéaire.

$$\forall u \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})\ \forall v \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})\quad \varphi(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n} v_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{u_k} v_k = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} u_k \overline{v_k}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La continuité de la conjugaison sur $\mathbb{K}$, permet d'écrire :

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n} u_k\overline{v_k}} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\overline{v_n}} = \overline{\varphi(v,u)}.$$

Pour tout u de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ on a : $\varphi(u,u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n}u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 \geqslant 0$.

On montre ensuite que $\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = 0$.

Application 3

Comparaison des normes sur $E = l^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ avec $p = 1$ ou 2 ou ∞

Comparez les normes N_1, N_2 et N_∞.

Nous pouvons déjà remarquer que, si N est fixé, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2$$

La convergence de la série $\sum |u_n|$ entraîne donc celle de la série $\sum |u_n|^2$. Par conséquent :

$l^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset l^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $N_\infty \leqslant N_2 \leqslant N_1$

• Montrons par l'absurde que N_∞ et N_2 ne sont pas équivalentes sur $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leqslant \alpha N_\infty$.

Il suffit de considérer la suite u^m définie par : $u_n^m = 1$ si $n < m$ et 0 sinon.

Alors $N_\infty(u^m) = 1$ et $N_2(u^m) = \sqrt{m}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\sqrt{m} \leqslant \alpha$. D'où le résultat.

• Montrons ensuite que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Avec la même suite u^m, nous avons : $N_1(u^m) = m$.

• Enfin, si N_1 et N_∞ étaient équivalentes, il existerait α tel que : $N_1 \leqslant \alpha N_\infty$. On en déduirait $N_2 \leqslant \alpha N_\infty$, et N_2 et N_∞ seraient équivalentes, ce qui n'est pas.

3 Séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série de réels, nous dirons qu'elle est **alternée** lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+1} \leqslant 0.$$

Théorème10 (Théorème spécial des séries alternées)

Soit $\sum u_n$ une série de réels alternée telle que la suite $(|u_n|)$ tende vers 0 en décroissant. Alors :

• la série $\sum u_n$ converge,

Rapport Mines-Ponts, 2003

« L'utilisation orale d'abréviations est à proscrire, comme le "TSA" pour le théorème des séries alternées ou le "CSSA" pour critère spécial des séries alternées. »

Rapport ENS Lyon, 2000

« Le critère spécial sur les séries alternées à termes réels... est souvent cité mais l'hypothèse de la décroissance à partir d'un certain rang du module du terme général de la série est oubliée ou n'est pas vérifiée. L'encadrement qui en résulte n'est pas donné. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• sa somme est comprise entre deux sommes partielles successives quelconques,

• pour tout n entier, le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|.$$

Démonstration

On suppose par exemple que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n |u_n|$. Notons $v_n = |u_n|, a_n = s_{2n}$ et $b_n = s_{2n+1}$. On va montrer que les suites a et b sont adjacentes.

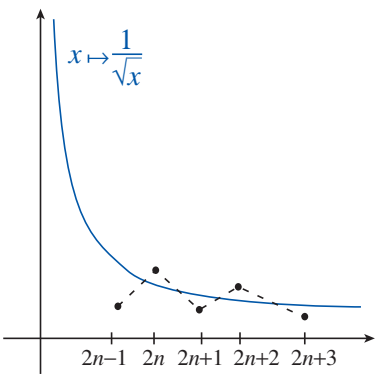
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n &= -v_{2n+1} < 0 \\ b_{n+1} - b_n &= -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geqslant 0 \qquad \text{car la suite } v \text{ est décroissante.} \\ a_{n+1} - a_n &= v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0 \qquad \text{car la suite } v \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

D'autre part, la limite $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$ est nulle car la suite v converge vers 0.

Les suites a et b sont adjacentes, les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Par conséquent, la série est convergente et nous avons l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant s_{2n+2} \leqslant s_{2n}.$$

De plus, l'inégalité $u_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n - s_{2n} \leqslant 0$ montre que le réel $\sum_{n=0}^{\infty} u_n - s_{2n}$ a le signe du terme u_{2n+1}. L'inégalité $u_{2n+2} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n - s_{2n+1} \geqslant 0$ que le réel $\sum_{n=0}^{\infty} u_n - s_{2n+1}$ a le signe du terme u_{2n+2}. Nous obtenons ensuite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sum_{n=0}^{\infty} u_n - s_n| \leqslant |u_{n+1}|$.



Doc. 3. *On remarque sur ce schéma que* $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *est décroissante, mais que la suite* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n} - (-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *bien que voisine de la courbe, n'est pas une suite décroissante.*

Exemples :

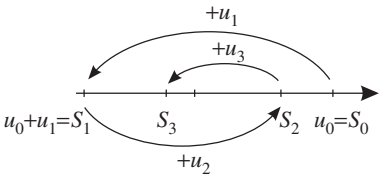
■ Étudier les séries de terme général :

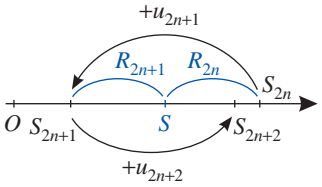
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n + \ln n}{n \ln n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n(n+1)}.$$

On vérifie facilement que la série de terme général u_n est alternée et que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Le théorème spécial des séries alternées assure la convergence.

Rapport Mines-Ponts, 2003

Beaucoup de candidats pensent que la somme d'une série alternée convergente est toujours du signe du premier terme ou que la valeur absolue de son $n^{ième}$ *reste partiel est toujours majorée par la valeur absolue du premier terme négligé, cela sans s'être assuré que le critère spécial était vérifié.*





Doc. 2. *Critère spécial des séries alternées.*

⚠ *Toutes les séries alternées ne vérifient pas le critère spécial.*
La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ *vérifie-t-elle les hypothèses du théorème spécial ?*
Il s'agit bien d'une série alternée, définie pour $n \geqslant 2$. *On pourrait croire qu'elle vérifie les hypothèses du théorème spécial, car :* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante de limite nulle. Or, il n'en est rien. La suite* $n \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ *n'est pas décroissante car* $\sqrt{2p} - 1 < \sqrt{2p+1} + 1$.
Utilisons une autre méthode. En multipliant par l'expression conjuguée, vous montrerez que la série $\sum u_n$ *est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On remarque que : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. La série est ainsi la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle est donc divergente.

De la même manière, nous avons : $w_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$. Il s'agit ici de la somme de deux séries convergentes. La série de terme général w_n est convergente.

■ Étude de la série de Riemann alternée

Soit la série $\sum u_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0. Par conséquent, la série diverge.

Pour $\alpha > 0$, la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0, donc la série vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées ; ce qui assure sa convergence.

En conclusion, la série de Riemann alternée converge si et seulement si $\alpha > 0$.

► *Pour s'entraîner : ex 8.*

4 Convergence des séries de réels positifs, séries absolument convergentes

4.1. Caractérisation fondamentale

Mensa ACADEMY

Théorème 11

Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. La suite s est croissante. Elle est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle majorée.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« L'utilisation orale d'abrévations est à proscrire, comme "SATP" pour séries à termes positifs. »

Remarque :

La série $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Application 4

Encadrement des sommes partielles par des intégrales (d'après Estp 1997)

À la suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

1) *On introduit, pour $k \geqslant 1$, $S_k = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k}} \frac{1}{j}$.*

Montrer que la suite (S_k) est majorée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Prouver que : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$
et que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad S_k \geqslant \ln 2$.

2) *En déduire que les séries* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *sont de même nature.*

1) Pour $k \geqslant 1$, calculons $S_k = \sum\limits_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k}} \frac{1}{j}$ suivant la parité de k.

Si $k = 2p$: $S_k \leqslant \sum\limits_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k}} \frac{1}{\frac{k}{2}} = \sum\limits_{j=p}^{2p} \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p} \leqslant 2$.

De même, pour $k = 2p+1$, nous avons :

$$S_k \leqslant \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k}} \frac{1}{p+1} = \sum_{j=p+1}^{2p+1} \frac{1}{p+1} = \frac{2p+1-p}{p+1} = 1.$$

La suite (S_k) est majorée par 2.

D'autre part, pour tout $p > 1$ nous avons :

$$\ln\frac{2p+1}{p} = \int_p^{2p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_{2p} \leqslant \int_{p-1}^{2p} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\frac{2p}{p-1}.$$

Or $\lim\limits_{p\to\infty} \ln\frac{2p}{p-1} = \lim\limits_{p\to\infty} \ln\frac{2p+1}{p} = \ln 2$. L'encadrement précédent donne : $\lim\limits_{p\to\infty} S_{2p} = \ln 2$.

De la même manière, un encadrement de S_{2p+1} prouve que :

$$\lim_{p\to\infty} S_{2p+1} = \ln 2.$$

Finalement, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$.

$\ln 2 \leqslant \ln\frac{2p+1}{p}$ donc, $\ln 2$ est un minorant de S_{2p}. De même, $\ln 2 \leqslant S_{2p+1}$.

En conclusion, nous avons $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad S_k \geqslant \ln 2$.

2) Comparons maintenant les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j+1}^{2j} \frac{a_k}{j} \right)$$
$$= \sum_{k=2}^{2n} \left(a_k \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k-1}} \frac{1}{j} \right)$$
$$\leqslant \sum_{k=2}^{2n} a_k S_k \leqslant 2\sum_{k=2}^{2n} a_k = 2A_{2n}.$$

Minorons B_n par $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(a_k \sum\limits_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \frac{k}{2}\leqslant j\leqslant k-1}} \frac{1}{j} \right)$.

On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) A_n \leqslant B_n \leqslant 2A_{2n}.$$

Si la série $\sum a_k$ converge, il existe un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n \leqslant A$.

Ceci prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n \leqslant 2A$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, car les termes de la série sont positifs, et majorée, donc convergente. La série $\sum b_k$ converge.

Réciproquement, si la série $\sum b_k$ converge, il existe un réel positif B tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n \leqslant B.$$

Nous obtenons une majoration de la suite croissante $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et par conséquent sa convergence. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, la suite extraite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc finie. La série $\sum a_k$ converge.

En conclusion, les deux séries sont donc de même nature.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 11.1
Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

► *Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.*

4.2. Comparaison de deux séries

Théorème 12 (Comparaison directe)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$.
- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration
Dans ce cas : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant \alpha v_n$.
Notons respectivement s et s' les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Si la suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également majorée.

Exemples :

■ Nous avons montré la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ dans le §1.

L'inégalité $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ est vérifiée pour tout $n \geqslant 2$. Le théorème 12 montre la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. D'autre part $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent, la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge.

■ Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2n+3}\right)$.
On a :

$$u_n = \sin\left(n\pi + \pi + \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternée, elle converge.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle converge.

Corollaire 12.1
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels positifs telles que $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ *Il ne faut pas confondre cette caractérisation avec :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leqslant M$$

qui ne prouve pas l'absolue convergence, ni même la convergence. Observez par exemple la série $\sum (-1)^n$.

Rapport Centrale, 2001
« Ce n'est pas parce que les sommes partielles d'une série sont bornées que celle-ci est convergente ; dans le cas envisagé cet argument suffisait parce que la série que l'on considère est à termes positifs, mais encore fallait-il le dire... »

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Pour des séries dont le terme général n'a pas un signe constant il n'y a pas que la convergence absolue ou le critère spécial de séries alternées : par exemple il est possible d'utiliser un développement asymptotique du terme général. »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« L'utilisation de développements limités ou asymptotiques pour étudier la nature d'une série de signe non constant afin « d'éclater » le terme général en plusieurs morceaux à étudier séparément est rarement bien effectuée. »

Rapport Ensi, 1997
« Les seuls critères de convergence habituellement invoqués sont celui de d'Alembert et le critère spécifique aux séries alternées. L'utilisation, pourtant souvent commode, d'équivalent est rarement invoqué, et encore plus rarement à bon escient. ».

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Dans ce cas $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ ce qui nous ramène au théorème 12.

Exemples :

■ Étudier la nature de $\sum \frac{1}{2n(3n-1)}$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{2n(3n-1)} \sim \frac{1}{6n^2}$.

Donc la série $\sum \frac{1}{2n(3n-1)}$ converge.

■ Considérons la série $\sum u_n$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$. Nous avons vu, dans le § 3, que cette série ne vérifie pas le critère des séries alternées et qu'elle diverge.

Voici une autre méthode que vous devez connaître : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. Elle converge. Mais elle n'est pas de signe constant, nous ne pouvons utiliser le corollaire 12.1. Cependant, nous pouvons remarquer que :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)} \sim \frac{1}{n}$. La série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente. Par conséquent, la série de terme général positif $\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)}$ est divergente.

La série $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge.

⚠ *Dans tous ces théorèmes, l'hypothèse « série à termes positifs » est essentielle. Veillez à ne pas utiliser le théorème d'équivalence lorsque les séries ne sont pas de signe constant. Le deuxième exemple ci-contre montre comment conclure dans ce cas.*

Rapport Centrale, 1997

« La règle des équivalents ne s'applique qu'aux séries à termes réels de signe constant. Le jury a trop souvent entendu $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum u_n$ converge. ».

Corollaire 12.2. Comparaison directe avec une série géométrique

Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs.

• S'il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, la série $\sum u_n$ diverge.

• S'il existe un réel $k \geqslant 0$ et un entier n_0 tels que $\sqrt[n]{u_n} \leqslant k < 1$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Dans le premier cas : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant 1$. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Dans le deuxième cas : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant k^n$. Or la série géométrique de raison k converge puisque $0 < k < 1$ ce qui assure la convergence de la série.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Règle de Cauchy

On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

1) *Montrer que la série* $\sum u_n$ *diverge lorsque* $l > 1$ *et qu'elle converge lorsque* $l < 1$.

Que dire si $l = 1$ *? Ce résultat est appelé « règle de Cauchy ».*

2) *Étudier les séries de terme général*

a) $u_n = \left(1+\sqrt{n}\right)^{-n}$, **b)** $u_n = \left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)^{-n^3}$ $a \neq 0$.

1) Si $l > 1$, à partir d'un certain rang : $1 \leqslant \sqrt[n]{u_n}$.

Si $l < 1$, on choisit $k = \dfrac{1+l}{2} \in [0,1[$. L'intervalle $[0,k]$ est un voisinage de l, donc :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{u_n} \leqslant k$.

Ceci assure la convergence de $\sum u_n$.

Pour $l = 1$, la nature de la série n'est pas déterminée a priori.

Les deux séries $\sum \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ vérifient $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. La première diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e} \neq 0$, la seconde converge.

2) a) $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. La série converge.

b) $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)^{n^2}} = \mathrm{e}^{-n^2 \ln\left(\operatorname{ch}\frac{a}{n}\right)}$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} < 1$.

La série converge.

Mensa ACADEMY

Corollaire 12.3

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs telles que : $u_n = O(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Théorème 13 (Comparaison logarithmique)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ Alors :

- $u_n = O(v_n)$.
- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

De l'inégalité de l'hypothèse, on déduit : $\forall n \geqslant n_0 \quad \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$.

La suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est donc décroissante. Donc : $\forall n \geqslant n_0 \quad \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$.

Ceci prouve que $u_n = O(v_n)$. Le théorème 12 assure les deux derniers points.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 13.1 (Règle de d'Alembert)
Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $E\backslash\{0_E\}$ telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} = l$.

- Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Si $l = 1$, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum u_n$.

Démonstration

Pour $l > 1$, il existe un entier p tel que : $\forall n \geqslant p \quad \dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \geqslant 1$.

Par conséquent : $\forall n \geqslant p \quad \|u_{n+1}\| \geqslant \|u_n\| \geqslant \|u_p\| > 0$. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $l < 1$, on choisit $k = \dfrac{1+l}{2} \in [0,1[$. L'intervalle $[0,k]$ est un voisinage de l, aussi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \quad \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leqslant k.$$

On applique le théorème 13 à la suite u et à la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = k^n$.
La convergence de la série $\sum v_n$ entraîne alors celle de la série $\sum \|u_n\|$.

Pour $l = 1$, la nature de la série n'est pas déterminée a priori.

Par exemple, pour la série harmonique divergente, nous avons : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

et, pour la série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$, nous avons également $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Mensa ACADEMY

Remarques :

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} = 1^+$, la série $\sum u_n$ diverge car à partir d'un certain rang $\dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \geqslant 1$.

Attention : Il n'y a pas de réciproque. Si la série converge, on ne peut pas en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ni que cette limite existe. Vous pouvez, par exemple, étudier la série $\sum u_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{2n} = \dfrac{1}{n^2}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{n^3}$. Cette série est la somme de deux séries définies par :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{2n} = \frac{1}{n^2}, \quad v_{2n+1} = 0\right)$$

et $\left(v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_{2n} = 0 \ \text{et} \ w_{2n+1} = \dfrac{1}{n^3}. \right)$

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc les sommes partielles de la série $\sum v_n$ sont majorées par $\sum\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum v_n$ converge.

De même, la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge, donc les sommes partielles de la série $\sum w_n$ sont majorées par $\sum\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$. La série $\sum w_n$ converge.

Rapport TPE, 1994

« Dans quelques copies, on peut lire :... l'utilisation absurde du critère de d'Alembert sous la forme $\dfrac{k!}{(k+1)!}\dfrac{A^{k+1}}{A^k}$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *ce qui est inadmissible pour un étudiant de "spé". »*

Rapport ENS Lyon, 2000

« Trop de candidats oublient encore de considérer le module du quotient et non le quotient seul avant d'utiliser le théorème de d'Alembert. »

Rapport Centrale, 1997

« erreurs étonnantes, et pourtant persistantes... si la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *est 1 alors la série converge. ».*

Rapport Centrale, 2003

« On pouvait relever plusieurs erreurs grossières : utilisation de la règle de d'Alembert comme condition nécessaire et suffisante de convergence, confusion entre max et sup... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle converge.

Nous obtenons les limites suivantes : $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} = 0$.

La suite de terme général $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ n'a pas de limite.

Exemple :

Soit la série $\sum u_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ ce qui prouve la convergence. La condition nécessaire de convergence nous donne le résultat étudié en première année : $n\,! = o(n^n)$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 11 à 15.***

4.3. Application au développement décimal d'un réel positif

4.3.1 Bref rappel sur les entiers

Il est aisé de constater qu'un nombre entier n strictement positif, qui s'écrit avec k chiffres en base 10 est tel que : $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$.

On en déduit que : $k - 1 \leqslant \log_{10}(n) < k$ et $k = 1 + \mathrm{E}(\log_{10}(n))$, où E désigne la fonction partie entière. Avec cette notation, si $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ sont les chiffres de l'écriture en base 10 de n :

$$n_j \in \{0, \ldots, 9\} \quad \text{et} \quad n = \sum_{j=0}^{k-1} n_j 10^j$$

Nous allons montrer qu'une méthode pour calculer les chiffres $(n_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ de l'écriture de n en base 10 est la suivante :

n_i est le reste de la division euclidienne par 10 de la partie entière de $\frac{n}{10^i}$.

En effet : $\frac{n}{10^i} = \sum_{j=0}^{k-1} n_j 10^{j-i} = \sum_{j=0}^{i-1} n_j 10^{j-i} + n_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} n_j 10^{j-i}$

Pour $j \in [\![0, i-1]\!]$, on pose $j - i = -k$ avec par conséquent k dans $[\![1, i]\!]$ et on a :

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} n_j 10^{j-i} \leqslant \sum_{k=1}^{i} 9 \times 10^{-k} = \frac{9}{10} \frac{1 - 10^{-i}}{1 - 10^{-1}} < \frac{9}{10} \frac{1}{1 - 10^{-1}} = 1$$

et $n_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} n_j 10^{j-i}$ est un entier. Donc $\mathrm{E}\left(\frac{n}{10^i}\right) = n_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} n_j 10^{j-i}$.

Or, pour $j \geqslant i + 1$, on a : $j - i \geqslant 1$ donc $\sum_{j=i+1}^{k-1} n_j 10^{j-i}$ est un multiple de 10 et peut s'écrire :

$$\mathrm{E}\left(\frac{n}{10^i}\right) = n_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} n_j 10^{j-i} = n_i + 10q_i$$

où $n_i \in \{0, \ldots, 9\}$ et $q_i \in \mathbb{N}$,

donc n_i est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{E}\left(\frac{n}{10^i}\right)$ par 10.

Chacun sait, depuis l'école primaire, que l'écriture (en base 10) $n = 17\,025$ signifie que :

$$n = 5 + 2 \times 10 + 0 \times 100 + 7 \times 1\,000 + 1 \times 10\,000.$$

Ce système de numération, dit de position, nous vient de l'Inde, en passant par les savants arabes pour arriver en Occident au Moyen Âge.

Avec la syntaxe du langage de la TI :

$n_i = mod(floor(n/10\hat{}i), 10)$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.3.2 L'écriture décimale d'un réel strictement positif

Nous allons étudier quatre questions :

1) Étant donné un nombre réel positif x, comment déterminer une représentation décimale de x, c'est-à-dire une suite (u_n) de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$, telle que :

$x = u_0, u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$ avec $u_0 \in \mathbb{N}$ en faisant le lien avec les valeurs approchées de x.

2) Toute écriture décimale représente-t-elle un réel ? Est-elle unique ?

3) Quand la représentation décimale d'un réel est-elle finie ?

4) Comment utiliser une représentation décimale pour comparer deux réels ?

1) Observons tout d'abord les valeurs approchées d'un réel positif. Quel est le lien entre ces valeurs et l'écriture usuelle de ce réel ?

Lorsque on écrit $\pi = 3,1415926...$, on est certain que :

$$3 \leqslant \pi \leqslant 3+1 = 4$$

$$3 + \frac{1}{10} = 3,1 \leqslant \pi \leqslant 3 + \frac{2}{10} = 3,2$$

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{5}{10\,000} = 3,1415 \leqslant \pi$$

$$\leqslant 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{6}{10\,000} = 3,1416.$$

Plus généralement, soit $x \in \mathbb{R}^+$, pour tout n entier naturel notons $p_n = \mathrm{E}(x10^n)$ la partie entière de $x10^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n 10^{-n} \leqslant x < p_n 10^{-n} + 10^{-n}.$$

$r_n = p_n 10^{-n}$ est alors une valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut.

Nous allons montrer que la suite r est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n-1} \leqslant x10^{n-1} < p_{n-1} + 1$; multiplions cette inégalité par 10, nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 10p_{n-1} \leqslant x10^n < 10p_{n-1} + 10$.

Or p_n est le plus grand entier inférieur à $x10^n$. Nous pouvons en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 10p_{n-1} \leqslant p_n < 10p_{n-1} + 10.$$

Multiplions cette inégalité par 10^{-n} et nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n-1}10^{-(n-1)} \leqslant p_n 10^{-n} < p_{n-1}10^{-(n-1)} + 10^{-(n-1)}$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r_{n-1} \leqslant r_n < r_{n-1} + 10^{-(n-1)}$

d'où la croissance de la suite r.

D'autre part nous avons vu que $10p_{n-1} \leqslant p_n < 10p_{n-1} + 10$.

Donc pour tout entier n non nul, il existe un entier u_n de $[\![0,9]\!]$ tel que :

$$p_n = 10p_{n-1} + u_n.$$

Donnons l'expression de la suite r en fonction de la suite u :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r_n = r_{n-1} + \frac{u_n}{10^n}.$$

Il est assez connu que, par exemple : $\frac{4}{3} = 1,33333...$, la suite de 3 se poursuivant indéfiniment. De même : $\sqrt{2} = 1,4142135...$ et on dispose d'algorithmes pour calculer par récurrence la suite des décimales de $\sqrt{2}$.
Des mathématiciens et informaticiens « s'amusent » à calculer le plus de décimales possibles de π, nombre mystérieux et fondamental. $\pi = 3,14159265..$ et non pas, comme on le rencontre souvent
$\pi = 3,14116.....$
Il est indispensable de donner un sens rigoureux à cette notation et nous disposons maintenant des outils nécessaires pour y parvenir.

Comment apparut la notation π ? Oughtred, en 1647, utilisa le symbole d/π pour noter le quotient du diamètre d'un cercle à sa circonférence. David Gregory, en 1697, nota π/r le rapport de la circonférence d'un cercle au rayon. William Jones, en 1706, écrivit le premier le symbole π avec sa signification actuelle. Euler adopta ce symbole en 1737. Il devint alors rapidement une notation standard.
π est la première lettre du mot grec signifiant périmètre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par récurrence, nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r_n = r_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{10^k}$. Prenons $u_0 = r_0$, ainsi : $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^k}$ est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

Or $|x - r_n| \leqslant 10^{-n}$ nous assure que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ ce qui prouve que la série $\sum \frac{u_k}{10^k}$ converge et que $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$.

Théorème 14

Soit x un réel positif. Pour tout n entier naturel, notons $p_n = E(x10^n)$ la partie entière de $x10^n$.

Alors, pour tout entier naturel n non nul, il existe un entier u_n de $[\![0, 9]\!]$ tel que $p_n = 10p_{n-1} + u_n$ et :

- la série $\sum \frac{u_k}{10^k}$ converge, sa somme est $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$ est appelé le développement décimal de x et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^k}$ est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

2) Réciproquement nous venons d'associer à x un développement décimal. Or nous savons tous que 0,999999... et 1,00000... désignent le même réel.

Considérons une suite v telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad v_k \in [\![0, 9]\!]$ et $v_0 \in \mathbb{N}$. La série $\sum \frac{v_k}{10^k}$ converge-t-elle ?

La série $\sum \frac{v_k}{10^k}$ converge car le terme général de la série est positif, majoré par le terme général d'une série géométrique convergente : $0 \leqslant \frac{v_k}{10^k} \leqslant \frac{9}{10^k}$.

Posons $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$. Le réel $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{v_k}{10^k}$ est-il une valeur approchée à 10^{-n} par défaut de $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$? En d'autres termes, le développement $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ est-il celui que nous aurions obtenu par la méthode précédente ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \leqslant x \leqslant s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}.$$

Or $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 10^{-n}$ nous donne l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \leqslant x \leqslant s_n + 10^{-n}$$

Le réel s_n est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

Il est d'ailleurs un poème en alexandrins qui aide à retenir les premières décimales de π.
« Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Glorieux Archimède, artiste ingénieux

8 9 7 9

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire

3 2 3 8 4 6 2 6

Soit ton nom conservé par de pieuses histoires ! »

4 3 3 8 3 2 7 9

Une version plus moderne, en anglais :
« How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard... »
Voir le site « Pi through the ages » à l'adresse :
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/.
Voir à ce sujet le livre : « Le fascinant nombre π » de Jean-Paul Delahaye, chez Belin.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le développement que nous aurions obtenu par la méthode précédente sera identique à $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ si et seulement si la deuxième partie de la double inégalité est stricte :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \leqslant x < s_n + 10^{-n}$. C'est-à-dire si et seulement si, pour tout entier n, nous avons $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{10^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$.

Cette dernière condition est équivalente à l'existence, pour tout entier n, d'un entier $k > n$ tel que $v_k < 9$.

Dans le cas contraire, les v_k sont tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Considérons le plus petit entier n tel que, pour tout $k > n$, on ait $v_k = 9$.

Alors $x = s_n + 10^{-n}$ et le développement décimal de x défini au **1)** est $s_n + 10^{-n}$.

Soit la suite u définie par : $\forall k < n \quad u_k = v_k ; u_n = v_n + 1$ et $\forall k > n \quad u_k = 0$.

Alors le développement décimal de x est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$ et le développement $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ est dit impropre.

Pour que le développement donné soit le développement décimal de x, il faut exclure ce deuxième cas pour tout n.

En conclusion :

Théorème 15

Toute série $\sum \frac{v_k}{10^k}$ telle que v_0 appartienne à $\mathbb{N}$ et telle que pour tout entier naturel k non nul, on ait v_k élément de $\{0,1,\ldots,9\}$, converge et sa somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ est un réel x positif.

• Si pour tout entier naturel n, il existe un $v_k < 9$ d'indice $k > n$, alors $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ est identique au développement décimal de x et ce développement est unique.

• S'il existe un entier naturel m tel que $v_m < 9$ et $v_k = 9$ pour tout entier $k > m$, alors

$$x = \sum_{k=0}^{m} \frac{v_k}{10^k} + 10^{-m} \text{ est un nombre décimal.}$$

Le développement décimal de x est $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{v_k}{10^k} + \frac{v_m + 1}{10^m}$, tous les termes d'indice strictement supérieur à m sont nuls.

x admet alors exactement deux développements de ce type, le développement décimal et le développement impropre $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$ dont tous les termes d'indice strictement supérieur à m sont égaux à 9.

En conclusion, il y a unicité du développement décimal si et seulement si x n'est pas un nombre décimal.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Comparons maintenant deux réels en comparant leurs deux développements décimaux.

Soit $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$ et $y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{10^k}$. On suppose que v_0 et u_0 sont des entiers et que, pour tout entier k non nul, u_k et v_k appartiennent à $[\![0, 9]\!]$.

Si $u_0 < v_0$, nous avons $x < y$ car $u_0 \leqslant x < u_0 + 1 \leqslant v_0 \leqslant y$.

Si $u_0 = v_0$ et s'il existe m tel que $\forall k < m \quad u_k = v_k$ et $u_m < v_m$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{v_k}{10^k} \text{ pour tout } n < m.$$

De plus, $u_m + 1 \leqslant v_m$, donc nous avons : $\sum_{k=0}^{m} \frac{u_k}{10^k} + 10^{-m} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{v_k}{10^k}$.

Ainsi $x < y$ car :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{u_k}{10^k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{m} \frac{u_k}{10^k} + 10^{-m} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{v_k}{10^k} \leqslant y.$$

En conclusion :

Théorème 16

L'ordre de deux réels positifs est le même que celui des deux premiers entiers distincts de leur développement décimal.

Ceci nous permet de représenter un réel positif x par son développement décimal $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$ en écrivant :

$x = u_0, u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$ c'est l'écriture usuelle que vous utilisez depuis l'école primaire. Vous retrouvez aussi la même méthode de comparaison.

$x = u_0, u_1 u_2 \ldots u_n$ est alors une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n}.

Pour les réels négatifs, l'usage est un peu différent, on écrit le développement de $-x$ précédé du signe $-$.

Dans ce cas les valeurs approchées, ainsi obtenues, sont des valeurs approchées par excès.

Remarque :

L'étude précédente se généralise en remplaçant 10 par un entier supérieur à 2.

En base 2, on obtient le *développement dyadique* d'un réel positif $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2^k}$ avec u_0 entier et, pour tout entier n non nul, u_n élément de $\{0,1\}$.

En base 3, on obtient le *développement triadique* d'un réel positif $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{3^k}$ avec u_0 entier et, pour tout entier n non nul, u_n élément de $\{0,1,2\}$. Les bases 8 et 16 sont utilisées en informatique.

Application 6

Développement décimal d'un rationnel

Soit x un réel strictement positif et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^k}$ son développement décimal. Nous dirons que ce développement décimal est périodique à droite quand il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in \mathbb{N}^*$ non nul tels que $\forall k \geqslant N \quad u_k = u_{k+p}$.

Dans ce cas nous noterons :

$$x = u_0, u_1 u_2 \ldots \overline{u_N \ldots u_{N+p-1}}$$

Le but de cette application est de montrer que le développement décimal d'un réel x est périodique à droite si et seulement si x est un rationnel.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous avons déjà étudié le cas des décimaux, aussi nous supposerons que x n'est pas un décimal.

1) *Montrer que le développement décimal de* $\dfrac{318}{990}$ *est périodique.*

2) *Montrer que le réel* $0{,}2\overline{18}$ *est un rationnel non décimal.*

3) *Montrer que tout développement décimal périodique à droite représente un rationnel.*

4) *Soit* $x = \dfrac{p}{q}$ *un rationnel non décimal tel que* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$.

a) *Raviver ses souvenirs d'école primaire et donner une méthode simple d'obtention du développement décimal de* x.

b) *Montrer que le développement décimal de* x *est périodique à droite.*

c) *Conclure.*

1)
$$\begin{aligned}\frac{318}{990} &= \frac{318}{10(100-1)} = \frac{3(100-1)+21}{10(100-1)}\\ &= \frac{3}{10} + \frac{21}{10(100-1)}\\ &= \frac{3}{10} + \frac{21}{1\,000\,(1-1/100)}\\ &= \frac{3}{10} + \frac{21}{1\,000}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{2i}}\\ &= \frac{3}{10} + 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{2i+2}} + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{2i+3}} = 0{,}3\overline{21}.\end{aligned}$$

2) Soit $x = 0{,}2\overline{18}$ notons $y = x - 0{,}2$.

Le réel y vérifie : $100y = 1{,}8 + y$. Nous obtenons :

$$y = \frac{18}{990} \quad \text{puis} \quad x = \frac{12}{55}.$$

3) Soit x un réel strictement positif. Supposons que son développement décimal $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{10^k}$ soit périodique à droite. Il existe un entier naturel N et un entier naturel p non nul tels que, pour tout $k \geqslant \mathbb{N}$ on ait $u_k = u_{k+p}$.

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{u_k}{10^k} + \sum_{k=N}^{\infty}\frac{u_k}{10^k}.$$

La suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_j \frac{1}{10^N}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{u_{N+jp+i}}{10^{j\,p+i}}\right)$ est une suite extraite de la suite convergente des sommes partielles de la série de somme $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{u_k}{10^k}$. Elle converge vers la même somme, nous obtenons :

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{u_k}{10^k} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{10^N}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{u_{N+jp+i}}{10^{j\,p+i}}\right).$$

Chacune des séries à termes positifs $u_{N+i}\displaystyle\sum_j \frac{1}{10^{j\,p+i}}$ pour i appartenant à $[\![0, p-1]\!]$ converge, car les sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty}\frac{u_k}{10^k}$.

D'où :

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{u_k}{10^k} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{10^N}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{u_{N+jp+i}}{10^{j\,p+i}}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{u_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}\sum_{i=0}^{p-1}u_{N+i}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{j\,p+i}}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{u_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}\sum_{i=0}^{p-1}u_{N+i}\frac{1}{10^i}\frac{1}{1-10^{-p}}\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{u_k}{10^k} + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{u_{N+i}10^{p-i}}{10^{N+p}-10^N}.\end{aligned}$$

Ainsi x est une somme finie de rationnels, donc un rationnel.

4) a) Soit $x = \dfrac{p}{q}$ fraction irréductible de $]0, 1[$ pour simplifier la démonstration.

Effectuons la division euclidienne de $10^n p$ par q.

$$\exists\,!(q_n, t_n) \in \mathbb{N}^2 \quad 10^n p = qq_n + t_n \quad 0 \leqslant t_n < q \qquad (*)$$

Alors : $\mathrm{E}\left(10^n\dfrac{p}{q}\right) = q_n$.

Remarquons que le terme q_n obtenu est le terme p_n défini dans le paragraphe 4.3.2.

La $(n+1)^{\text{ième}}$ décimale u_{n+1} est donnée par :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1} - 10p_n\\ &= q_{n+1} - 10q_n\\ &= \frac{1}{q}(10t_n - t_{n+1}) \quad \text{(déduit de } (*)\text{)}\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{10t_n}{q} = u_{n+1} + \dfrac{t_{n+1}}{q}$.

Or $\dfrac{t_{n+1}}{q} \in [0, 1[$, donc $u_{n+1} = \mathrm{E}\left(\dfrac{10t_n}{q}\right)$.

En d'autres termes, la division effectuée depuis le primaire donne, lorsque x est rationnel, le développement décimal de x.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

b) La suite des restes $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers de $[\![0, q-1]\!]$.

• Si la suite s'annule, appelons n_0 le plus petit entier n tel que $t_n = 0$. On montre que la suite est nulle à partir du rang n_0 et que $x = \dfrac{q_{n_0}}{10^{n_0}}$ est un décimal.

• Si la suite ne s'annule pas, il existe des entiers distincts n et m tels que $t_n = t_m$.

Soit n_0 et n_1 les plus petits entiers distincts n et m tels que $t_n = t_m$. On suppose $n_0 < n_1$.

Alors la question **a)** permet d'affirmer que $u_{n_0+1} = u_{n_1+1}$.

Vous montrerez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir de n_0 et que x est un rationnel non décimal.

c) Pour x décimal le développement est de période 1, la suite associée étant nulle à partir d'un certain rang. Pour x non décimal positif, l'étude du **3)** et du **4)** prouve l'équivalence. Pour x négatif la conclusion est identique en étudiant $-x$.

Finalement : un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à droite.

4.4. Comparaison d'une série à une intégrale

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les encadrements demandés... s'appuient sur la technique de comparaison série-intégrale, ils posent des difficultés à un nombre important de candidats. »

Théorème 17

Soit f de $[0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{R}+$ continue par morceaux et décroissante.

• La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}\,t - f(n)$ est convergente.

• La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t$ existe.

Démonstration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}\,t = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}\,t$$

Or f est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant w_n \leqslant \int_{n-1}^{n} [f(n-1) - f(n)]\,\mathrm{d}\,t = f(n-1) - f(n).$$

La somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [f(k-1) - f(k)]$ est égale à $f(0) - f(n)$.

Or f est décroissante, minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. La série $\sum [f(n-1) - f(n)]$ est convergente de somme $f(0) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Par comparaison directe, nous obtenons la convergence de la série de terme général w_n.

Écrivons les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

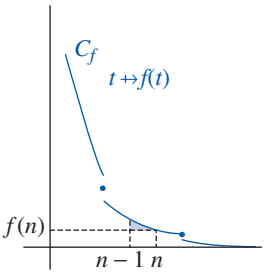
Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t$ existe : $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t - \sum_{k=1}^{\infty} w_k$,

puisque la série $\sum w_n$ converge.

Ceci prouve la convergence de la série $\sum f(n)$.

Réciproquement, si la série $\sum f(n)$ converge alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$



Doc. 4.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 17.1

La **série de Riemann** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, pour α réel, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

L'application $f : t \longrightarrow t^{-\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$. Donc la série diverge.

Pour $\alpha > 0$, la fonction f est décroissante, positive.

La série de Riemann converge si et seulement si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Pour $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, nous avons, pour tout x de $[1 ; +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{-\alpha+1} - 1).$$

Dans ce cas, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $-\alpha + 1 \leqslant 0$.

Pour $\alpha = 1$, nous avons pour tout x de $[1, +\infty[$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \ln x$ et dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = +\infty$. En conclusion la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Rapport Centrale, 1997

« Une somme de Riemann n'est pas une série de Riemann. ».

Bernhard Riemann *(1826-1866), mathématicien allemand, élève de Gauss. Il donne une construction rigoureuse de l'intégrale. Son travail le conduit à considérer des fonctions de la variable complexe comme somme d'une série.*

Corollaire 17.2

Il existe un réel γ, appelé **constante d'Euler**, tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Démonstration

La fonction $f\left(t \longrightarrow \frac{1}{t}\right)$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier n non nul $w_n = \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

D'après le théorème 17, la série $\sum w_n$ converge, or :

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par conséquent, la suite $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge vers un réel $\gamma = 1 - \sum\limits_{k=2}^{\infty} w_k$.

$$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}\right)$$

a pour valeur approchée 0,577...

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 7

Formule de Stirling

James Stirling *(1692-1770), mathématicien britannique. Il publie, en 1730, « Methodus differentialis ». Il y traite des séries et des sommations en utilisant des méthodes différentielles.*

1) *Exprimez* $\ln(n\,!)$ *à l'aide de la série de terme général* $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln t\,\mathrm{d}t - \ln n$.

2) *En intégrant deux fois par parties, montrer qu'il existe un réel* $K \geqslant 0$ *tel que*

$$\ln(n\,!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + K + o(1).$$

3) *Montrer qu'il existe un réel* L *tel que :*

$$\ln(n\,!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + L + o(1).$$

4) *Calculer les intégrales de Wallis :*

$$W_n = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

En déduire un équivalent de $(n\,!)$.

John Wallis *(1616-1703), mathématicien britannique. Dans son « Arithmética infinitorum » (1656), il calcule ces intégrales et en déduit un développement de* π *en produit infini. Dans son traité d'algèbre de 1685, il ose utiliser les racines complexes d'un polynôme. Nous lui devons l'usage du symbole* ∞

1) $\displaystyle\ln(n\,!) = \sum_{k=2}^{n}\ln k = \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\ln t\,\mathrm{d}t - w_k\right)$

en posant $\displaystyle w_n = \int_{n-1}^{n}\ln t\,\mathrm{d}t - \ln n$ pour $n > 1$.

$$\ln(n\,!) = \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n} w_k = n\ln n - n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k.$$

2) Il s'agit donc d'étudier le comportement de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$. Une intégration par parties nous donne :

$$w_n = (n-1)[\ln(n) - \ln(n-1)] - \int_{n-1}^{n} t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$= (n-1)\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{n-1}^{n} t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{n-1}^{n}(t-n+1)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Intégrons une deuxième fois par parties :

$$w_n = -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2}\frac{1}{t}\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or :

$$0 \leqslant \int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n(n-1)}.$$

De plus, la série de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}$ converge. Donc la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ aussi. Par conséquent, la série de terme général $w_n + \dfrac{1}{2n}$, définie pour $n \geqslant 2$ est convergente, sa somme est négative. Il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que :

$$\sum_{k=2}^{n} w_k + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = -K + o(1).$$

Revenons à $\ln(n\,!)$:

$$\ln(n\,!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + K + o(1)$$

3) Utilisons maintenant la constante d'Euler :

$$\ln(n\,!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n - 1 + \gamma) + K + o(1)$$

$$\ln(n\,!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}(1+\gamma) + K + o(1)$$

Nous obtenons l'existence d'un réel L tel que $\ln(n\,!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + L + o(1)$

4) D'où :

$n\,! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\mathrm{e}^{L+o(1)}$ soit $n\,! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\mathrm{e}^{L}$.

Ensuite nous déterminons $l = \mathrm{e}^L$ en utilisant les intégrales de Wallis.

Soit $W_n = \displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties, on montre que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Puis, par récurrence,

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'autre part, pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ nous donne :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

puis $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

Ainsi $W_{n+1} \sim W_n$. Or $W_{2p}W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.

Donc $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p+1)}}$ car W_{2p} est positif.

En utilisant les formules $(2p)\,! \sim l\left(\dfrac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}\sqrt{2p}$ et $p\,! \sim l\left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^{p}\sqrt{p}$ nous obtenons :

$$W_{2p} \sim \frac{\pi\sqrt{2}}{2l\sqrt{p}}.$$

D'où $l = \sqrt{2\pi}$.

Corollaire 17.3
$n\,! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 16 et 17.*

4.5. Comparaison d'une série à une série de Riemann

Théorème 18
Soit $\sum u_n$ une série réelle.

• On suppose qu'il existe un réel α et un élément $l \neq 0$, tels que $u_n \sim \dfrac{l}{n^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha \leqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

• S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

• S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Une erreur fréquente est de penser que toute série est comparable à une série de Riemann.
Il faut se garder d'affirmer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o(\dfrac{1}{n})$.
Observons l'exemple suivant.
Soit une série $\sum u_n$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ lorsque n est le carré d'un entier et $u_n = 0$ dans les autres cas. Alors : $u_n \neq o(\dfrac{1}{n})$.
Les sommes partielles sont majorées, cette série converge.

Application 8

Série de Bertrand

Joseph Bertrand *(1822-1900), mathématicien français, suivait, à 11 ans, les cours de préparation à l'école Polytechnique. Ses travaux portent sur la géométrie différentielle et les probabilités. Il conjectura en 1845 l'existence, pour tout entier $n > 3$, d'un nombre premier compris entre n et $2n-2$. Ce résultat fut démontré, en 1850, par Tchebychev et amélioré, en 1931, par Breusch.*

Pour tout entier $n \geqslant 48$, il existe un nombre premier compris entre n et $\dfrac{9n}{8}$.

Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ définie pour $n > 1$, est convergente si et seulement si : $[\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $\gamma = \dfrac{\alpha+1}{2}$ alors $n^\gamma u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta}$.

• Pour $\alpha > 1$, le réel γ appartient à $]1, \alpha[$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^\gamma u_n = 0$ et $\gamma > 1$. La série converge.

• Pour $\alpha < 1$, le réel γ appartient à $]\alpha\,, 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^\gamma u_n = +\infty$ et $\gamma < 1$. La série diverge.

• Pour $\alpha = 1$, le terme général de la série vérifie $nu_n = \dfrac{1}{(\ln n)^\beta}$.

Pour $\beta < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = +\infty$ et la série diverge.

Pour $\beta \geqslant 0$, on introduit la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ qui est continue, décroissante, positive sur $[2\,, +\infty[$. La série est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Soit $x \in [2\,, +\infty[$.

Pour $\beta \neq 1$, nous obtenons :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x.$$

Pour $\beta = 1$, nous avons :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \big[\ln(\ln t)\big]_2^x.$$

Finalement $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = +\infty$ pour $1 \geqslant \beta$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ est un réel fini pour $\beta > 1$. Le résultat est établi.

Application 9

Règle de Raabe et Duhamel

Joseph Ludwig Raabe *(1801-1859), mathématicien suisse.* ***Jean-Marie Constant Duhamel*** *(1797-1872) mathématicien et physicien français.*

Soit $\sum u_n$ *une série de réels strictement positifs. On suppose que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(\dfrac{1}{n})$, *où* α *est un réel.*

1) *Pour* $\alpha > 1$, *on définit la série* $\sum v_n$ *par* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ *en choisissant le réel* β *tel que* $1 < \beta < \alpha$.

Comparer les deux séries, en déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

2) *Que peut-on dire si* $\alpha < 1$?

3) *Montrer que l'on ne peut pas conclure* a priori, *quand* $\alpha = 1$.

1) Nous constatons que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\alpha - \beta > 0$. Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

La série de Riemann $\sum v_n$ converge puisque $\beta > 1$. L'inégalité précédente montre alors que la série $\sum u_n$ converge.

2) Pour $\alpha < 1$, on prend β tel que $\alpha < \beta < 1$.

Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 0$ à partir d'un certain rang.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1 - \frac{l}{n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

La divergence de la série de Riemann $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$.

3) Considérons la série de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^a}$. Elle converge pour $a > 1$ et diverge pour $a \leqslant 1$. Cependant dans les deux cas :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Attention : L'étude des séries de Bertrand et la règle de Raabe-Duhamel nous permettent de mettre en œuvre des techniques classiques d'étude de séries à termes positifs. Toutefois, les conditions de convergence de ces séries ne sont pas au programme. Il est par contre indispensable de savoir déterminer si une telle série converge.

Rapport TPE, 1997

« Rappelons que si un résultat hors programme (théorème de Césaro, règle de Bertrand...) est utilisé, l'examinateur peut en demander la démonstration. ».

► *Pour s'entraîner : ex. 18 et 19.*

4.6. Séries usuelles dans une algèbre normée de dimension finie

Dans ce paragraphe, $(A, +, \times, \circ, \|\ \|)$ est une algèbre normée de dimension finie, d'élément unité e.

Théorème 19

Soit $(A, +, \times, \circ, \|\ \|)$ une algèbre normée de dimension finie, d'élément unité e et u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

Alors la série $\sum_{+\infty} u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible et $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Démonstration

• A est une algèbre normée donc, pour tout u élément de A et tout entier n, nous avons : $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$. Si $\|u\| < 1$, la série géométrique de terme général $\|u\|^n$ est convergente. On en déduit la convergence absolue de la série $\sum u^n$.

D'autre part : $(e-u)\sum_{k=0}^{n} u^k = \sum_{k=0}^{n} u^k - \sum_{k=0}^{n} u^{k+1} = e - u^{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \|u^{n+1}\| = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} (e-u)\sum_{k=0}^{n} u^k = e$.

L'application $v \longrightarrow (e-u)v$ de A dans A est linéaire, donc continue car A est de dimension finie. Ceci nous permet d'écrire :

$$\lim_{n\to\infty} (e-u)\sum_{k=0}^{n} u^k = (e-u)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} u^k.$$

On obtient $(e-u)\sum_{k=0}^{+\infty} u^k = e$.

Corollaire 19.1

La série $\sum z^n$, où z est complexe, est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas, $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$.

Pour $|z| \geqslant 1$, la série $\sum z^n$ diverge.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 19.2

E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes de E munie de la norme subordonnée à la norme de E.

Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$. Si $\|u\| < 1$, alors la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et :

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

Corollaire 19.3

On choisit sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une norme d'algèbre. Soit A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de norme $\|A\| < 1$.

Alors la série $\sum A^n$ est absolument convergente, $\mathrm{I}_p - A$ est inversible et $(\mathrm{I}_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

Théorème 20

Soit $(A, +, \times, \circ, \|\ \|)$ une algèbre normée de dimension finie et u un élément de A.

- La série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.
- L'application u de A dans A, définie par $u \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$ est l'application **exponentielle** sur A, notée exp.
- $\forall u \in A \quad \exp(u) = \mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$.

Démonstration

Soit u dans A. A est une algèbre normée, donc $\left\|\dfrac{u^n}{n!}\right\| = \dfrac{\|u^n\|}{n!} \leqslant \dfrac{\|u\|^n}{n!}$

La série de terme général $\dfrac{\|u\|^n}{n!}$ est convergente de somme $\mathrm{e}^{\|u\|}$. Ceci assure la convergence absolue de la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$.

Corollaire 20.1

Pour tout complexe z, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Remarque :

Pour u réel, nous retrouvons l'exponentielle étudiée au § 1. Nous montrerons, dans le § 6, qu'il s'agit bien de l'exponentielle complexe définie dans les classes antérieures.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 20.2

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{M^n}{n!}$ est absolument convergente et la matrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$ est notée exp M ou e^M.

Corollaire 20.3

E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes de E. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$.

La série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et l'endomorphisme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est noté exp u ou e^u.

Théorème 21

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Si u appartient à $\mathcal{L}(E)$ et si M est la matrice de u dans la base B, alors exp M est la matrice de exp u dans cette même base.

Démonstration

Notons f l'application qui, à un endomorphisme de E, associe sa matrice dans une base B fixée. C'est un morphisme d'algèbre. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}.$$

L'application f est linéaire, donc continue, puisque nous sommes en dimension finie.

Nous obtenons par passage aux limites qui existent ici :

$$f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \exp M.$$

5 Correspondance bijective entre suites et séries

À une suite u, nous avons associé une série $\sum u_n$, c'est-à-dire la suite s des sommes partielles de cette série. Inversement, soit w une suite de E. Existe-t-il une suite v dont w soit la suite des sommes partielles ?

La suite w est la suite des sommes partielles de v si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

C'est-à-dire, si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = w_n - w_{n-1}$ et $v_0 = w_0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 22

Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.

• Il existe une unique suite v d'éléments de E dont w soit la suite des sommes partielles. Elle est définie par :

$$v_0 = w_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = w_n - w_{n-1}.$$

La série $\sum v_n$ est appelée série associée à la suite w.

• La suite w converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

• Si la série $\sum v_n$ converge, alors : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Remarque :
Pour simplifier l'écriture, on prend, pour tout entier n, $v_n = w_n - w_{n-1}$ en convenant que $w_{-1} = 0_E$.

Exemples :

■ La suite a définie par $a_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ pour tout entier naturel n non nul converge. On simplifie l'expression en composant par la fonction logarithme : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \ln(a_n)$. Avec les notations du théorème précédent, nous obtenons :

$$v_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Un développement limité de v_n est : $v_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Cette série converge. La suite w converge, notons L sa limite.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^L = l$ avec $l > 0$. On obtient : $n\,! \sim l \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Pour déterminer l, on utilise les intégrales de Wallis et on termine comme dans l'Application 7.

■ Pour tout entier naturel n, $\text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\, n = \text{Arctan}\, \dfrac{1}{1+n+n^2}$.

La nature de la série $\sum \text{Arctan}\, \dfrac{1}{1+n+n^2}$ est la même que celle de la suite de terme général Arctan n. La série $\sum \text{Arctan}\, \dfrac{1}{1+n+n^2}$ converge et sa somme est $\dfrac{\pi}{2}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 20 et 21.***

6 Étude de la somme, des restes et des sommes partielles

6.1. Sommation des relations de comparaison

Théorème 23

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs. On suppose que la série $\sum v_n$ est convergente. On peut alors comparer les restes respectifs r_n et r'_n de ces séries.

Rapport Centrale, 2003

« Il ne suffit pas de dire "d'après un théorème de cours", il faut énoncer ledit théorème avec hypothèses et conclusion et justifier le fait qu'il est applicable dans le cas présent. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Si $u_n = o(v_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $r_n = o(r'_n)$.

• Si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente et $r_n \sim r'_n$.

• Si $u_n = O(v_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $r_n = O(r'_n)$.

Démonstration

• $u_n = o(v_n)$ donc : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leqslant \varepsilon v_n$

Nous retrouvons l'absolue convergence de la série $\sum u_n$.

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \|r_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Donc : $r_n = o(r'_n)$.

• $u_n \sim v_n$ se traduit par $u_n - v_n = o(v_n)$; la propriété précédente assure alors que $r_n - r'_n = o(r'_n)$. Le troisième point se démontre comme le premier.

Application 10

Restes des séries de Riemann convergentes

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *en remarquant que* $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \sim \dfrac{1}{k^2}$.

De la même manière, donner un équivalent des restes : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

• Il s'agit de deux séries convergentes, le théorème 23 assure $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Nous remarquons que : $\dfrac{2}{k^3} \sim \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

D'après le théorème 23, nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

• On démontre de la même manière que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \sim \frac{1}{3n^3}$, en considérant la fraction

$$\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Théorème 24

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs. On suppose que la série $\sum v_n$ est divergente.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont notées s et s'.

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $s_n = o(s'_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente et $s_n \sim s'_n$.
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $s_n = O(s'_n)$.

Démonstration

- $u_n = o(v_n)$ donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} v_n$.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = +\infty$, donc s'_n est différent de 0 à partir d'un certain rang n_1.

Soit $N > \max\{n_0, n_1\}$ et n un entier supérieur à N. Alors :

$$\frac{\|s_n\|}{s'_n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\| + \sum\limits_{k=N}^{n} \|u_k\|}{s'_n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\|}{s'_n} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum\limits_{k=N}^{n} v_k}{s'_n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\|}{s'_n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

car les v_k sont positifs.

Or $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = +\infty$ et $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\|$ est un réel fixé indépendant de n, donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\|}{s'_n} = 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $p > N$ tel que, pour tout $n \geqslant p$, on ait :

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \|u_k\|}{s'_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, nous avons montré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant p \Rightarrow \|s_n\| < \varepsilon s'_n.$$

Ce qui signifie $s_n = o(s'_n)$.

- La démonstration du deuxième point se déduit du premier et la démonstration du troisième se fait de la même manière que le premier.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Le jury a été peiné de voir que certains candidats ne parviennent pas à obtenir un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$ *quand* n *tend vers l'infini. »*

Application 11

Un développement asymptotique de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Donner un développement asymptotique de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ *à l'ordre 2 en* $\dfrac{1}{n}$.

- Soit $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n.

$u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ est divergente. Le théorème 24 donne : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$. Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

• On considère la suite de terme général $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, définie pour n entier naturel non nul et la série $\sum a_n$ associée : $a_1 = A_1$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = A_n - A_{n-1}$.

$a_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Il s'agit du terme général d'une série convergente, le théorème 23 nous donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-a_k) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim -\frac{1}{2n}$. Nous obtenons : $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Nous retrouvons l'existence de la constante $\gamma = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Finalement, les développements

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2n} + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

nous donnent : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

• Notons $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$ et $\sum b_n$ la série associée :

$b_1 = \frac{1}{2} - \gamma$ et pour $n > 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$.

Un développement limité de b_n à l'ordre 3 en $\frac{1}{n}$ est : $b_n = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Le théorème 23 assure : $\sum_{n+1}^{+\infty} b_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$.

Or : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

Par conséquent : $\sum_{n+1}^{+\infty} b_k \sim \frac{1}{12n^2}$.

D'où : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Théorème 25

Un développement asymptotique de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exemple : Moyenne de Césaro

Soit une suite u de limite l.

$u_n - l = o(1)$. La série de terme général 1 est divergente. Le théorème 24 assure : $\sum_{k=0}^{n} (u_k - l) = o\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)$ d'où : $\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)l = o(n)$.

Puis : $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = l + o(1)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 26 (Moyenne de Césaro)

Soit une suite u de limite l. La suite v de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente, de limite l.

► *Pour s'entraîner : ex. 22.*

6.2. Produit de deux sommes, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle **produit de Cauchy** de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

pour tout entier naturel n.

Théorème 27

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries, défini par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p},$$

est une série absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right).$$

Démonstration

Étudions d'abord le cas où les séries sont dans $\mathbb{R}^+$. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. On a : $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. La suite des sommes partielles de la série de réels positifs $\sum w_n$ est majorée par $\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right)$. La série $\sum w_n$ et l'encadrement ci-dessus permettent d'affirmer que : $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right)$.

Étudions maintenant le cas où les séries sont dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On applique ce qui précède aux séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$. On note $w'_n = \sum_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}|$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w'_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right).$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Très mauvaise connaissance du produit de Cauchy de deux séries. »

Remarque

Pour les suites à support fini on retrouve le produit de deux polynômes.

⚠ *Ce théorème ne se généralise pas aux séries semi-convergentes. Étudiez dans l'exercice 37 le cas* $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Remarque :

Ce théorème se généralise aux séries absolument convergentes d'une algèbre normée de dimension finie. Il permet en particulier de montrer que, si deux matrices A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La série $\sum w_n$ est absolument convergente car : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| \leqslant w'_n$.

Il reste à prouver : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right)$.

Pour cela, en notant $E_n = \{(p,q) \in [\![0,n]\!]^2 ; p+q > n\}$ on majore :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{k=1}^{n} v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k\in E_n} u_k v_k\right| \leqslant \sum_{k\in E_n} |u_k|\,|v_k| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} w'_k - \sum_{k=1}^{n} |u_k| \sum_{k=1}^{n} |v_k|\right|.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w'_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\right)$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{k=1}^{n} v_k\right| = 0$, puis l'égalité attendue.

Corollaire 27.1

Pour tous nombres complexes z et z', on a : $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

Démonstration

Les séries $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\exp(z') = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes pour tout z de $\mathbb{C}$ et pour tout z' de $\mathbb{C}$. On effectue le produit de Cauchy en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} z^n = \frac{1}{n!}(z+z')^n.$$

Corollaire 27.2

L'espace vectoriel $l^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des séries absolument convergentes, muni du produit de Cauchy et de la norme $N : u \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une algèbre normée contenant la sous-algèbre des polynômes.

Démonstration

La structure d'algèbre résulte du théorème 27.

L'élément unité e est la série de terme général e_n défini par $e_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e_n = 0.$$

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\sum w_n$ la série produit de Cauchy définie par $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$, pour tout entier naturel n.

$$N(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{p+q=n} u_p v_q\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| = N(u)N(v)$$

et $N(e) = 1$.

D'autre part, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ peut être noté $(a_0, a_1, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots)$ et le produit de deux polynômes s'effectue comme le produit de Cauchy. On peut donc plonger $\mathbb{K}[X]$ dans cette algèbre.

Remarque :

Nous pouvons, maintenant, vérifier que l'exponentielle complexe est bien celle que nous avions définie en première année.

Soit $z = a + \mathrm{i}b$. Alors :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \frac{b^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} \\ &\qquad + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos b + \mathrm{i}\sin b.\end{aligned}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 12

Expression de $\dfrac{1}{(\alpha - z)^{p+1}}$ sous la forme d'une somme

1) *Montrer que, si z est un complexe de module strictement inférieur à 1 et p un entier naturel, la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente et a pour somme $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.*

2) *Montrer que, si α est un nombre complexe non nul fixé, pour tout complexe z de module strictement inférieur à $|\alpha|$, on a : $\dfrac{1}{(\alpha - z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} \dfrac{z^n}{\alpha^{n+p+1}}$.*

(Procéder par récurrence et utiliser un produit de Cauchy.)

1) Montrons par récurrence sur p que la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente et a pour somme $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

• Pour $p = 0$, la série $\sum z^n$ est absolument convergente et : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

• Supposons que, pour un certain entier naturel p, et pour tout z complexe de module strictement inférieur à 1, la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ soit absolument convergente de somme $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Alors nous pouvons effectuer le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ et $\sum z^n$.

Le terme général de la série produit est :

$$w_n = \sum_{i+j=n} \binom{i+p}{p} z^{i+j} = z^n \sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{p}.$$

Or nous savons que :

$$\binom{i+p}{p} = \binom{i+p+1}{p+1} - \binom{i+p}{p+1}.$$

Donc $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{p} = \binom{n+1+p}{p+1}$.

Par conséquent, $w_n = \binom{n+1+p}{p+1} z^n$.

La série de terme général $\binom{n+1+p}{p+1} z^n$ est absolument convergente. Sa somme est :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} \frac{1}{1-z}.$$

2) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $\dfrac{z}{\alpha}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 25.*

6.3. Interversion des sommations d'une suite double d'un espace vectoriel normé

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de $\mathbb{R}^+$. Lorsque p est fixé dans $\mathbb{N}$, la série indexée par q sera notée $\sum_q u_{p,q}$ pour éviter toute confusion. On note $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^2)$, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^2$.

On dit que u est **sommable** si et seulement s'il existe un réel positif M tel que, pour tout partie finie J de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^2)$, on ait : $\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant M$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'ensemble $\left\{ \sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \ ; J \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^2) \right\}$ est non vide majoré. Il admet une borne supérieure notée $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ et appelée somme de u.

Théorème 28. Interversion des sommations dans le cas des réels positifs

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout q de $\mathbb{N}$,

$$\text{la série } \sum_p u_{p,q} \text{ converge et la série } \sum \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right) \text{ converge.}$$

(ii) Pour tout p de $\mathbb{N}$,

$$\text{la série } \sum_q u_{p,q} \text{ converge et la série } \sum \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right) \text{ converge.}$$

Si l'une de ces deux propriétés est vérifiée, alors :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right).$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

• Supposons tout d'abord u sommable.

Il existe un réel strictement positif M tel que $\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant M$ pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^2$.

Soit un entier naturel q. Nous remarquons que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la partie $[\![0,n]\!] \times \{q\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Pour tout q de $\mathbb{N}$, la suite des sommes partielles de la série de réels positifs $\sum_p u_{p,q}$ est majorée par $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$. La série $\sum_p u_{p,q}$ converge.

Pour tout n, m de $\mathbb{N}$ la partie $[\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$ aussi :

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{q=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{n} u_{p,q} \right) = \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} u_{p,q} \leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}.$$

Or pour tout q dans $[\![0,m]\!]$, les sommes $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ existent.

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{q=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right) \leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

par linéarité du passage à la limite.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'inégalité précédente prouve que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ sont majorées par $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$. Cette série converge. Sa somme vérifie : $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$.

• Supposons maintenant que, pour tout entier naturel q, la série $\sum_p u_{p,q}$ converge et que la série $\sum\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ converge. La somme $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ existe.

Soit J dans $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N}^2)$, il existe m et n entiers tels que $J \subset [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$.

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{m}\left(\sum_{p=0}^{n} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{m}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right).$$

Ainsi, pour toute partie J finie de $\mathbb{N}^2$, on a : $\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$.

La suite u est sommable et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$.

Enfin les deux inégalités obtenues nous donnent $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$.

Une démonstration analogue montre que **(ii)** est équivalente à u sommable et que, dans le cas où **(ii)** est vérifiée, on a : $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$.

Remarque

p \ q	0	1	2	3	4	...	q
0	u_{00}	u_{01}	u_{02}	...			$u_{0,q}$
1	u_{10}						$u_{1,q}$
2	u_{20}						
3							
4							
5							
⋮							
p	u_{p0}	u_{p1}	...				$u_{p,q}$
							⋮

En représentant la suite u dans un tableau à double entrée, nous remarquons que :

$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ correspond à une sommation par colonnes,

$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ correspond à une sommation par lignes.

Application 13

La fonction dzeta ζ de Riemann.

Soit u définie par $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^q}$ pour $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$. On note $\zeta(q) = \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^q}$.

1) *Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.*

2) *Prouver l'identité suivante :*

$$\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q)-1) = \sum_{q=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^q} - 1\right) = 1.$$

1) Pour p fixé, il s'agit d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{p}$.

$$\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{p^q} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{p(p-1)}$ est convergente. Calculons sa somme.

Prenons un entier naturel n tel que $n \geqslant 2$:

$$\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous obtenons : $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p(p-1)}=1.$

On en déduit :

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{p^q}\right)=\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^q}\right)=1.$$

2) Montrons l'égalité $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}-1\right)=1$ en étudiant la suite double $\left(\frac{1}{n^q}\right)_{\substack{(n,q)\in\mathbb{N}^2\\ n>1,q>1}}$.

D'après la question **1)** :

$$\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q)-1)=\sum_{q=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^q}-1\right)=1.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 24.*

Théorème 29. Interversion des sommations dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit $u=(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}}^2$ une suite double de l'espace vectoriel normé $(E,\|\|)$ de dimension finie.

Alors :

• Si, pour tout entier naturel q, la série $\displaystyle\sum_p u_{p,q}$ est absolument convergente et si la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge, alors :

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right).$$

• Si, pour tout entier naturel p, la série $\displaystyle\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente et si la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge, alors :

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right).$$

Démonstration

Pour tout entier naturel q, la série $\displaystyle\sum_p u_{p,q}$ est absolument convergente, donc convergente, et : $\displaystyle\left\|\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right\|\leqslant\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|$.

La série $\displaystyle\sum_q\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge. Par comparaison directe, nous obtenons la convergence de la série $\displaystyle\sum_q\left\|\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right\|$ puis la convergence de la série $\displaystyle\sum_q\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$.

Rapport Centrale, 2003

« Série double. Cette théorie, si utile et pas si difficile que l'on pourrait croire, n'a guère profité à ceux dont l'exercice la requérait. Il y a là une riche partie de cours dont la connaissance est à améliorer sans contestation. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit un entier naturel n. Nous avons :

$$\left\|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)\right\|\leqslant\sum_{q=0}^{n}\left\|\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_{p,q}\right\|$$
$$\leqslant\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}\|u_{p,q}\|\right)=\left|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}\|u_{p,q}\|\right)\right|.$$

On montre comme dans le théorème précédent avec la suite double $(\|u_{p,q}\|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de $\mathbb{R}^+$ et les parties finies $[\![0,n]\!]\times[\![0,n]\!]$ que : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{q=0}^{n}\sum\limits_{p=0}^{n}\|u_{p,q}\|=\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\|u_{p,q}\|$.

La série $\sum\limits_{q}\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge, par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\|u_{p,q}\|.$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}\|u_{p,q}\|\right)\right|=0.$$

Puis :

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)\right\|=0.$$

Cependant, la convergence de la série $\sum\limits_{q}\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$ nous donne :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right).$$

Nous obtenons ainsi : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{q=0}^{n}\left(\sum\limits_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)=\sum\limits_{q=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$.

En échangeant les rôles de p et q on a : $\sum\limits_{q=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$.

Application 14

Quand les $\sum\limits_{p}$ et les $\sum\limits_{q}$ ne s'échangent pas

Soit la suite double u définie par :

$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2\quad u_{p,q}=\dfrac{1}{p^2-q^2}$ *pour* $p\neq q$ *et* $u_{p,q}=0$ *pour* $p=q$.

Montrer l'existence des sommes $\sum\limits_{q=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$ *et* $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$. *Que remarque-t-on ?*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour q fixé, la série $\sum_p \frac{1}{p^2-q^2}$ converge car $\frac{1}{p^2-q^2} \sim \frac{1}{p^2}$ en $+\infty$.

Calculons sa somme. Prenons un entier naturel N.

$$\sum_{p=0,p\neq q}^{N} \frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q} \sum_{p=0 p\neq q}^{N} \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)$$

$$= \frac{1}{2q}\left(\sum_{-q}^{-1}\frac{1}{n} + \sum_{1}^{N-q}\frac{1}{n} - \sum_{q}^{N+q}\frac{1}{n} + \frac{1}{2q}\right)$$

$$= \frac{1}{2q}\left(-\frac{1}{2q} - \sum_{1}^{N+q}\frac{1}{n} + \sum_{1}^{N-q}\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2q}\left(-\frac{1}{2q} - \ln\frac{N+q}{N-q} - o(1)\right).$$

D'où :

$$\sum_{p=0\ p\neq q}^{\infty} \frac{1}{p^2-q^2} = -\frac{1}{4q^2}.$$

La série de terme général $-\frac{1}{4q^2}$ est convergente de somme $-\frac{\pi^2}{24}$.

Nous pouvons écrire : $\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) = -\frac{\pi^2}{24}$.

Puis : $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) = \frac{\pi^2}{8}$

Nous pouvons remarquer que $u_{p,q} = -u_{q,p}$, aussi, en inversant les rôles de p et q, nous obtenons :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Les deux sommes calculées existent, mais elles ne prennent pas la même valeur.

► ***Pour s'entraîner : ex. 25, 26 et 27.***

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer la convergence et calculer la somme d'une série, on peut exprimer la suite s des sommes partielles, puis montrer qu'elle converge. Pour cela, on peut :

- étudier directement la limite de s ;
- encadrer les sommes partielles par des intégrales connues ;
- encadrer les sommes partielles par des sommes partielles de séries dont on connaît la somme.

La limite obtenue est la somme de la série.

● Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ de réels positifs converge, on peut :

- montrer qu'elle est la somme de deux séries convergentes ;
- chercher une série $\sum v_n$ convergente telle que $u_n \sim v_n$;
- majorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum v_n$ converge ;
- regarder si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l < 1$;
- trouver une série $\sum v_n$ convergente telle que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$;
- trouver un réel α tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$ et $\alpha > 1$;
- essayer la comparaison à une intégrale ;
- montrer que la suite des sommes partielles est majorée ;
- s'il s'agit d'une série dont le terme général est le produit de deux termes, effectuer une transformation d'Abel ;
- trouver une série $\sum v_n$ convergente telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang ;
- montrer qu'elle vérifie le critère de Cauchy.

● Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ de réels positifs diverge, on peut :

- montrer que son terme général ne tend pas vers 0 ;
- montrer qu'elle est la somme d'une série convergente et d'une série divergente ;
- chercher une série $\sum v_n$ divergente telle que $u_n \sim v_n$;
- minorer u_n par le terme général v_n d'une série divergente ;
- regarder si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l > 1$;
- trouver une série $\sum v_n$ divergente telle que $v_n = o(u_n)$ ou $v_n = O(u_n)$;
- trouver un réel α tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ et $\alpha \leqslant 1$;
- essayer la comparaison à une intégrale ;
- montrer que la suite des sommes partielles n'est pas majorée ;
- trouver une série $\sum v_n$ divergente telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à partir d'un certain rang ;
- montrer qu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie ou d'un espace de Banach converge, on peut :

• s'il s'agit d'une série alternée, appliquer le théorème spécial ;

• montrer que la série est absolument convergente ;

• utiliser un développement généralisé de u_n ;

• trouver une série $\sum v_n$ de réels positifs convergente telle que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$;

• trouver un réel α tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \|u_n\| = 0$ et $\alpha > 1$;

• s'il s'agit d'une série dont le terme général est le produit de deux termes, effectuer une transformation d'Abel ;

• montrer qu'elle vérifie le critère de Cauchy ;

• trouver une série de réels positifs $\sum v_n$ convergente telle que $\dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang.

● Pour trouver un équivalent d'une somme partielle d'une série divergente ou d'un reste de série convergente, penser à utiliser une intégrale.

● Pour montrer qu'une suite converge, on peut montrer que la série associée converge.

● Pour obtenir un développement généralisé d'une suite, on peut chercher un équivalent des restes ou des sommes partielles de la série associée.

● Pour étudier les restes d'une série $\sum u_n$ convergente, on peut :

• introduire une série de réels positifs $\sum v_n$ convergente telle que :

– $u_n = o(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{n+1}^{+\infty} v_k\right)$

– $u_n \sim v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{n+1}^{+\infty} v_k$

– $u_n = O(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{n+1}^{+\infty} v_k\right)$

• encadrer les restes par des intégrales, ou des sommes.

● Pour étudier les sommes partielles d'une série $\sum u_n$ divergente, on peut :

• introduire une série de réels positifs $\sum v_n$ divergente telle que :

– $u_n = o(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

– $u_n \sim v_n$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

– $u_n = O(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

• encadrer les restes par des intégrales, ou des sommes.

● Pour montrer que $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ où $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double de nombres réels ou complexes ou d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut montrer que, pour tout entier naturel q, la série $\displaystyle\sum_{p} u_{p,q}$ est absolument convergente et que la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{p=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge ou bien que, pour tout entier naturel p, la série $\displaystyle\sum_{q} u_{p,q}$ est absolument convergente et que la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ converge.

● Pour effectuer le produit des deux sommes $\displaystyle\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)$ et $\displaystyle\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right)$ de deux séries de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, absolument convergentes, on calcule la somme de la série produit de Cauchy de terme général :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

On obtient : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices résolus

1. Du bon usage des équivalents

ÉNONCÉ

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où a et b sont deux nombres complexes.

CONSEILS

Comparez les deux suites : $(2^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis trouvez un équivalent de u_n.

SOLUTION

• Pour $|b| \leqslant 1$, la suite $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(2^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent : $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim 2^{\sqrt{n}}$ puis $u_n \sim a^n$.

Pour $|a| \geqslant 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0, la série diverge.

Pour $|a| < 1$, la série est absolument convergente car $|u_n| \sim |a|^n$.

Pour $|b| > 1$, la suite $(2^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent : $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim b^n$ puis $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$.

Soit $v_n = \left(\dfrac{|a|}{|b|}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. Étudions la série $\sum v_n$ à l'aide de la règle de D'Alembert.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Si $|a| < |b|$, alors la série $\sum v_n$ converge, et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si $|a| = |b|$, alors $|u_n| \sim 2^{\sqrt{n}}$ et le terme u_n ne tend pas vers 0. La série $\sum u_n$ diverge.

Si $|a| \geqslant |b|$, alors le terme u_n ne tend pas vers 0. La série $\sum u_n$ diverge.

• En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si ($|a| < |b|$ et $|b| > 1$) ou ($|a| < 1$ et $|b| \leqslant 1$).

2. Une rotation bien cachée

ÉNONCÉ

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{r}$ un vecteur de E.

Pour tout $\vec{x}$ de E, on définit par récurrence : $\vec{x}_0 = \vec{x}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\vec{x}_{n+1} = \vec{r} \wedge \vec{x}_n$.

Soit $f : \vec{x} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{x_n}}{n!}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme et que f est l'exponentielle d'un endomorphisme.

2) Préciser la nature de f.

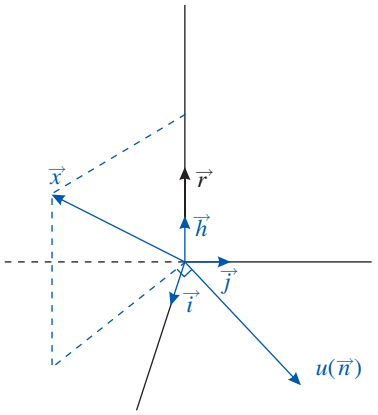
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

CONSEILS

1) Utiliser l'endomorphisme :

$$u \ : \ \vec{v} \longmapsto \vec{r} \wedge \vec{v}.$$

2) Se placer dans une base orthonormée bien choisie.



Doc. 6.

SOLUTION

1) On constate que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \vec{x}_{n+1} = u(\vec{x}_n)$

puis que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \vec{x}_n = u^n(\vec{x})$.

L'application f a un sens : $f \ : \vec{x} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n(\vec{x})}{n!}$ et $f = \mathrm{e}^u$.

L'application f est un endomorphisme.

2) Supposons $\vec{r}$ non nul, prenons alors $\vec{k} = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ puis $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base orthonormale directe. Pour simplifier, notons r la norme de $\vec{r}$.

On obtient : $u(\vec{i}) = r\vec{k} \wedge \vec{i} = r\vec{j}, u(\vec{j}) = r\vec{k} \wedge \vec{j} = -r\vec{i}$ et enfin $u(\vec{k}) = \vec{0}$.

La matrice M de u dans cette base est : $M = \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par récurrence, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad M^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p r^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p r^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{p+1} r^{2p+1} & 0 \\ (-1)^p r^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient $\mathrm{e}^M = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r & 0 \\ \sin r & \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, f est la rotation d'axe $(0, \vec{r})$ et d'angle r. Pour $\vec{r} = \vec{0}$, l'application f est l'identité.

3. Reste d'une série alternée convergente

ÉNONCÉ

Étudier la convergence et donner un équivalent du reste d'ordre n de la série de terme général : $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

CONSEILS

Chercher un équivalent des restes d'ordre pair et d'ordre impair, puis les comparer.

SOLUTION

• La suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite 0. La série alternée $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Étudions le reste d'ordre $2p$:

$$R_{2p} = \sum_{n=2p+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

La série converge, nous pouvons grouper les termes 2 par 2. (Ceci se ramène à la convergence d'une suite extraite de la suite convergente $\left(\sum_{k=2p+1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$R_{2p} = -\sum_{k=p+1}^{+\infty} \left(\frac{\ln(2k-1)}{2k-1} - \frac{\ln 2k}{2k}\right).$$

Cherchons un équivalent de $\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}$, afin d'utiliser le théorème 23.

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n}{n(n+1)} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Revenons à R_{2p}. Nous avons : $\frac{\ln 2k}{2k} - \frac{\ln(2k-1)}{(2k-1)} \sim -\frac{\ln 2k}{(2k)^2}$

D'après le théorème 23 : $R_{2p} \sim -\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\ln 2k}{(2k)^2}$.

• Étudions le reste d'ordre $2p+1$. $R_{2p+1} = \sum_{n=2p+2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. En procédant de la même manière, nous obtenons successivement :

$R_{2p+1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left(\frac{\ln 2k}{2k} - \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\right)$, puis $R_{2p+1} \sim \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\ln 2k}{(2k)^2}$.

• Comparons maintenant R_{2p} et R_{2p+1}. Les équivalences précédentes montrent que $R_{2p+1} \sim -R_{2p}$.

Par conséquent, $R_{n+1} = -R_n + o(R_n)$. D'autre part,

$$R_n = R_{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}.$$

On en déduit $R_n \sim (-1)^{n+1}\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}$.

4. Cherchez la suite double !

ÉNONCÉ

Soit x dans $\mathbb{C}$ tel que : $|x| < 1$. Montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

CONSEILS

Utiliser le développement :

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{p=0}^{+\infty} u^p \text{ pour } |u| < 1$$

et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ à l'aide d'une somme double.

SOLUTION

Vérifions, tout d'abord, l'existence des deux sommes.

Pour $|x| < 1$, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\frac{|x|^{2n-1}}{|1-x^{2n-1}|} \leqslant \frac{|x|^{2n-1}}{\left|1-|x|^{2n-1}\right|}$$

Or $|x|^{2n-1} \leqslant |x| < 1$, donc $\frac{|x|^{2n-1}}{|1-x^{2n-1}|} \leqslant \frac{|x|^{2n-1}}{1-|x|}$.

La série de terme général $|x|^{2n-1}$ est convergente. Par conséquent, la série $\sum \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ est absolument convergente, donc convergente.

On procède de même pour la deuxième série.

Exprimons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ à l'aide d'une somme double.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{(2n-1)\,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{(2n-1)(p+1)} \right).$$

Nous souhaitons intervertir les sommations.

D'après le théorème 29, il suffit de vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la série $\sum |x|^{(2n-1)(p+1)}$ converge et que la série $\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |x|^{(2n-1)(p+1)} \right)$ converge.

Or, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la série $\sum |x|^{(2n-1)(p+1)}$ converge pour $|x| < 1$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} |x|^{(2n-1)(p+1)} = \frac{|x|^{2n-1}}{1-|x|^{2n-1}}$.

D'autre part, l'inégalité démontrée dans la première partie :

$$\frac{|x|^{2n-1}}{\left|1-|x|^{2n-1}\right|} \leqslant \frac{|x|^{2n-1}}{1-|x|}$$

prouve la convergence de la série $\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |x|^{(2n-1)(p+1)} \right)$.

D'après le théorème 29, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{(2n-1)(p+1)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{(2n-1)(p+1)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(2n+1)(p+1)} \right)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(x^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{2(p+1)} \right)^n \right).$$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{2(p+1)} \right)^n = \frac{1}{1-x^{2(p+1)}}$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{(2n-1)(p+1)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{1-x^{2(p+1)}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^{2\,p}}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD d'algorithmique

Accélération de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

Les résultats admis sont démontrés dans le livre d'exercices.

On se propose d'obtenir, de plusieurs manières différentes, une valeur approchée de la somme S de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, en accélérant la convergence de la série.

On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Nous savons que : $R_n \sim \frac{1}{n}$.

(1) La première méthode consiste à approximer S par $S_n + \frac{1}{n}$.

Nous admettrons que $S_n + \frac{1}{n}$ est une valeur approchée par excès de S et que $\left| S - (S_n + \frac{1}{n}) \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

(2) La deuxième méthode est due à Stirling.

Nous admettrons que, pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, en posant $S'_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}$

$$0 \leqslant S - S'_n \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

(3) La troisième méthode, dite d'Euler-Mac Laurin, utilise un développement asymptotique du reste R_n, pour approximer S.

On définit par récurrence une suite de polynômes par les conditions suivantes :

$$P_0(X) = 1\,; \quad \forall n \geqslant 1 \quad P'_n(X) = nP_{n-1}(X) \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et on pose, pour tout entier naturel n : $B_n = P_n(0)$.

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernoulli et le nombre B_n n-ième nombre de Bernoulli.

Nous admettrons que :

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0$ pour $n \geqslant 2$ et $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant 1$.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$: $\left| R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{(2p+1)!\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |P_{2p+1}(t)|}{n^{2p+2}}$.

Expliciter $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{n^{2k+1}}$ et l'inégalité précédente lorsque $p = 2$.

MÉTHODOLOGIE INFORMATIQUE

Le but du programme est de calculer S avec une précision fixée $\varepsilon > 0$.

(1) Comparer, avec la calculatrice, les résultats obtenus en calculant S_n, $S_n + \frac{1}{n}$ pour différentes valeurs de n.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

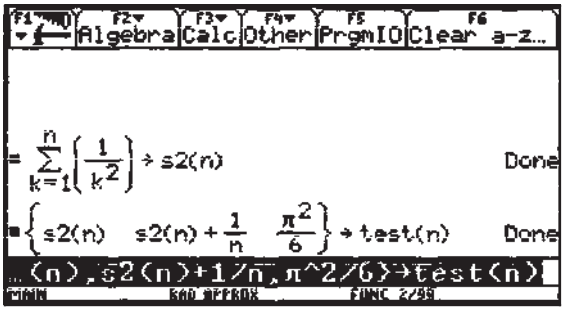
(2) Écrire une procédure de calcul de S, en approchant S par $S_n + \frac{1}{n}$.

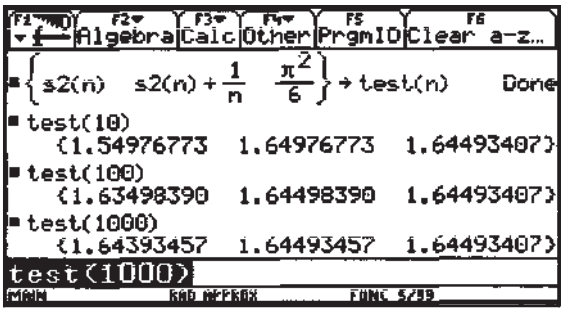
(3) Écrire une procédure de calcul de S, par la méthode de Stirling pour $q = 2$.

(4) Écrire une procédure de calcul de S, par la méthode d'Euler-Mac Laurin pour $p = 2$.

SOLUTION

1)





2) Accélération de la convergence

Avec Maple

```
> Somme1:=proc(eps)
  local n,k;
  global S;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/2)))+1;
  S:=0;
  for k to n do S :=S+1/k^2;od;
  S:=S+1/n;
  end;
```

```
> Somme1(10^(-4));evalf(Somme1(10^(-4)));evalf(Pi^2/6);
```

$$\frac{16313741175583426208738696282428174483528535578211950397393941824\backslash 013711589841718656101}{99172708593751208930451010200374286935 9\backslash 631293234060741242553033835098897687169484800 0}$$

1.644982920

3) La méthode de Stirling

Avec Maple

```
> Somme2 :=proc(eps)
  local n,k;
  global S;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/3)))+1; S:=0;
  for k to n do S :=S+1/k^2;od;
  S:=S+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2));
  end;
```

```
> Somme2(10^(-6));evalf(Somme2(10^(-6)));
```

$$\frac{16802648017024373768979807988408734758796948618545158179468009796\backslash 902669407230926958184 03}{10214788985156374519836454050638551 55\backslash 440420232031082563479829624850151864617784569344000}$$

1.644933443

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4) La méthode d'Euler-Mac Laurin

a) donnons des valeurs de B_2k pour k allant de 1 à 15.

Avec Maple

```
> Bernoulli:=proc(p)
  local i,j;
  global B;
  B[0]:=1;B[1]:=-1/2;
  for i to p do B[2*i]:=B[1];
    for j to i do
    B[2*i]:=B[2*i]+binomial(2*i,2*j)*B[2*(i-j)]/(2*j+1);
    od;
   B[2*i]:=-B[2*i];B[2*i+1]:=0;
  od;
  end :

> Bernoulli(9) :B[5];B[8];
```

$$0$$

$$\frac{-1}{30}$$

```
> Somme3:=proc(eps)
  local n,k;
  global S;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/6)))+1;
  S:=0;
  for k to n do S:=S+1/k^2;od;
  S:=S+1/n-1/(2*(n^2))+B[2]/n^3+B[4]/n^5;
  end :

> Somme3(10^(-6));evalf(Somme3(10^(-6)));
```

$$\frac{336467404243}{204547654080}$$

$$1.644934066$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes de terme général :

1) $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{2}{n^2}$, **2)** $u_n = \ln\left(\cos \dfrac{a}{2^n}\right)$ $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que la série $\sum (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que sa somme est : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Étudier la nature des séries de terme général :

$\sin n$ et $n\,!a^n$ pour a nombre complexe.

4 Étudier la nature des séries de terme général :

$\dfrac{\cos n\theta}{2^n}$ et $\dfrac{\sin n\theta}{2^n}$ pour θ réel.

5 Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{2n+1}{n(n-1)}$.

6 Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme nulle. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

7 Étudier la nature des séries de terme général :

$$\frac{(-1)^n + n}{n(n-1)} \quad \text{et} \quad \frac{(-2)^n + n(n-1)}{n(n-1)2^n}.$$

8 Étudier la nature des séries de terme général :

$$\frac{(-1)^n \ln n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}.$$

9 Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \quad n = p^2 \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

10 Soit u une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On définit $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que la suite de terme général $U_n - nu_n$ est bornée.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

11 Étudier la nature des séries suivantes de terme général :

1) $u_n = \left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{n}\right)^{-n^3}$ $a \neq 0$. **2)** $u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$.

3) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$. **4)** $u_n = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 - n}$.

5) $u_n = (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1})^n$ avec $a \geqslant b$.

12 Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos\left(\pi \frac{2n^3 + n^2 + an + b}{2n^2}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

13 Étudier la nature des séries suivantes de terme général :

1) $u_n = \dfrac{n!}{n^{\alpha n}}$ pour α réel. **2)** $u_n = \dfrac{n^n}{a^n n\,!}$ pour a dans $\mathbb{R}_+^*$.

14 Montrer que toute série de terme général $u_n = \dfrac{P(n)}{n!}$ $(P \in \mathbb{K}[X])$ est convergente. Trouver une méthode générale pour calculer sa somme.

Application : $u_n = \dfrac{5n^3 + 2n + 1}{n!}$.

15 Étudier la nature des séries de termes généraux suivants, où z désigne un nombre complexe :

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+z}$. **2)** $u_n = n^n z^{n\,!}$. **3)** $u_n = \mathrm{e}^n z^{n^3}$.

16 Donner un équivalent de la suite de terme général u_n :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ pour } \alpha > 1.$$

17 Soit f une application croissante, positive et continue de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les deux séries de termes généraux respectifs $u_n = f(\mathrm{e}^{-n})$ et $v_n = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

18 Étudier la convergence et l'absolue convergence des séries de termes généraux suivants :

1) $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha})$ où $\alpha > 0$.

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \sqrt{n}}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

19 Étudier la nature des séries suivantes de terme général u_n.

1) $u_n = \left|\sin \pi\sqrt{n^4+1}\right|^{\frac{2}{3}}$ **2)** $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{\ln n}\right)^{n^\alpha}$ pour α réel.

20 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(2\cos\frac{a}{2^n} - 1\right)$ pour $a \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right[$.

21 Étudier la nature de la série de terme général u_n définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

22 Donner un équivalent de $\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, où a est un réel positif.

23 Soit z dans $\mathbb{C}$. On définit $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Vérifier, en effectuant un produit de Cauchy, que, pour z complexe, nous avons :

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. **2)** $\sin 2z = 2\sin z \cos z$.

3) $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$.

24 Montrer que $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{\pi^2}{6}$

Indication : pour p fixé, trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall q \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\} \quad v_q - v_{q+1} = \dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}$.

25 Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

a) $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$ **b)** $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

26 Soit x dans $\mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$.

Montrer l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$

27 Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \mathrm{e}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$$

pour tout nombre complexe x différent d'un entier négatif ou nul.

28 ** Montrer que la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ converge pour tout réel x différent de $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Calculer sa somme. En déduire la somme des séries $\sum \dfrac{\cos nx}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$. Appliquer à $x = 1$.

29 * Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente, on notera R_n le reste d'ordre n de cette série. Montrer que les séries $\sum R_n$ et $\sum n u_n$ sont de même nature. Comparer leurs sommes quand elles convergent.

30 * **1)** Trouver a et b réels pour que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{\pi} \left(at + bt^2\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{n^2}.$$

2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2}\sin nt \operatorname{cotan}\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos nt - \frac{1}{2}.$$

3) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Cette somme fut calculée pour la première fois par le mathématicien suisse Euler (1707-1783).

31 ** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

a) On suppose que la série $\sum u_n$ diverge, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Étudier suivant les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

b) On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Étudier, suivant les valeurs $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{r_n^\alpha}$.

32 ** Soit f une application croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que les séries $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ et $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

(On pourra comparer chacune des séries à une intégrale puis comparer les intégrales entre elles.)

33 Soit une suite $x = (x_n)_{\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose que la suite $(x_n \ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Sa limite est l.

Montrer que les séries $\sum (x_n - x_{n+1})\ln n$ et $\sum \dfrac{x_n}{n}$ sont de même nature. Étudier le cas $l \neq 0_E$.

34 Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

35 ** $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$ et n_0 un entier, on note :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge, on notera $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit infini $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

1) Dans cette question $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

a) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$. Montrer que $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

b) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer l'existence de $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ soit non nul.

Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

2) Le but de cette question est de prouver l'existence et de calculer le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

a) Soit φ continue de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$ non nulle en $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \sim \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent.

c) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}\sin^{2n}t$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

Déduire des questions précédentes : $u_n \sim \frac{1}{2\operatorname{sh}\pi}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Calculer u_n et conclure.

3) Dans cette question $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ existe et donner sa valeur.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$, on considère n complexes $z_1,\dots,z_n$. Comparer :

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right| \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1.$$

c) Montrer que, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1$ et si la série $\sum u_n$ converge absolument alors :

$\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe. On pourra utiliser le critère de Cauchy.

d) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} \quad \text{où} \quad -\pi < \theta_n < \pi.$$

Montrer que $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

e) Le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\right)$ existe-t-il ?

36 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels telle que $u_0 > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k-u_{k-1}}{u_{k-1}} \sim \ln u_n$.

37 ** Soit deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ d'une espace algèbre normée. On définit la série produit de Cauchy $\sum c_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Montrer que :

1) Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente et si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum c_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

(Théorème de Mertens [2].)

(*Indication :* poser $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$; $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$; $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ et $A'_n = \sum_{k=0}^{n}\|a_k\|$, puis montrer que :

$$\|AB-C_n\| \leqslant \|AB-A_nB_n\|+\|a_1\|\|b_n\|+\cdots+\|a_n\|\|b_1+\cdots+b_n\|)$$

2) Si les séries $\sum a_n, \sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

(*Indication :* poser $C_n = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}\right)$ et vérifier :

$$\frac{C_0+C_1+\cdots+C_n}{n+1} = \frac{A_0B_n+A_1B_{n-1}+\cdots+A_nB_0}{n+1},$$ puis conclure.)

3) Étudier la nature de la série produit de Cauchy des séries semi-convergentes suivantes :

a) $\sum\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ et $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$.

b) $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ avec-elle même.

[2] Franz Carl Joseph Mertens (1840-1927)

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Suites et séries de fonctions

5

Introduction

La notion de limite de suite (ou de série numérique) conduit, lorsque la suite dépend d'un paramètre, à celle de limite de suite (ou de série) de fonctions. Abel, au début du XIXe *siècle, fournit, avec* $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{\sin(n\,x)}{n}$, *un exemple de fonction non continue, somme d'une série de fonctions continues. Cet exemple, qui sera étudié avec les séries de Fourier, contraignit ses contemporains à approfondir la notion de convergence. Nous devons à Weierstrass* (1841) *la définition rigoureuse de la convergence uniforme et les propriétés développées dans les chapitres suivants sur les suites et séries de fonctions. Baire, en* 1908, *introduit la convergence normale.*

Deux problèmes apparaissent ensuite :

1. *une suite (ou une série) de fonctions convergente étant donnée, la fonction limite est-elle continue ?*

2. *Quelles suites de fonctions « simples » approchent une fonction continue ?*

OBJECTIFS

- Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Convergence normale d'une série de fonctions.
- Théorème d'interversion des limites pour une suite de fonctions uniformément convergente.
- Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions uniformément convergente.
- Continuité de la fonction somme d'une série de fonctions uniformément convergente.
- Approximation uniforme sur $[a,b]$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie par des fonctions en escalier.
- Approximation uniforme sur $[a,b]$ des fonctions à valeurs complexes continues par des fonctions polynomiales.
- Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs complexes continues périodiques par des polynômes trigonométriques complexes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie. On note $\mathcal{F}(A, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de ces fonctions. L'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}(A, F)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$. De même, l'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on note plus simplement $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{B}(A)$ et $\mathcal{C}(A)$ ces ensembles.

René Baire *(1874-1932), mathématicien français, étudia les nombres irrationnels et les fonctions d'une variable réelle. Nous lui devons ce résultat étonnant : « L'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense. »*

Modes de convergence

1.1. Convergence simple

1.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Une suite (f_n) de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ est dite **simplement convergente sur** A si, pour tout x de A, la suite numérique $(f_n(x))$ admet une limite. En désignant cette limite unique par $f(x)$, on définit une application f de A dans $\mathbb{K}$, appelée **limite simple** de la suite (f_n) ; on dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur A vers f.

(f_n) converge simplement sur A vers f si :

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions, la représentation graphique des premières fonctions de la suite (à l'aide de la calculatrice éventuellement) permet de s'orienter vers le type de convergence que semble posséder la suite. »

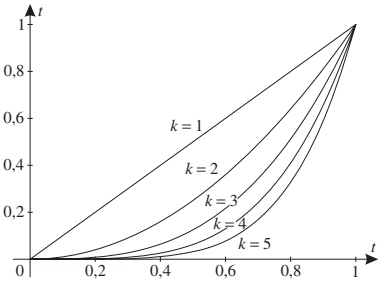
Exemples :

- $f_n(t) = t^n$ sur $A = [0, 1]$.

La suite (f_n) de fonctions converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(1) = 1$ et, pour $t < 1$, $f(t) = 0$. (*doc.* 1.)

```
> assume(t>=0,t<=1);
  fn :=(n,t)->t^n;
  f :=unapply(limit(fn(n,t),
  n=infinity),t);
  plot({f(t),seq(fn(k,t),
  k=1..5)},t=0..1);
```

$$fn := (n, t) \to t^n$$
$$f := 0$$



Doc. 1. *Convergence simple sur* $[0,1]$ *de la suite de fonctions* (f_n).

- $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)\cos^n(x)}{1 - \cos(x)}$ sur $A = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit x fixé dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(x)$ appartient à $]0, 1[$.

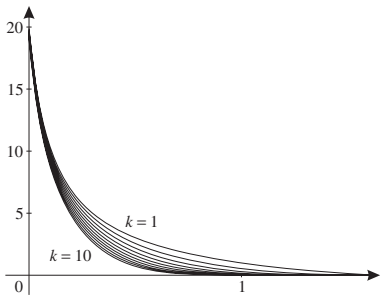
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle. (*doc.* 2.)

```
> fn :=(n,t)->(sin(x)*cos(x)^n) /(1-cos(x)) ;
```

$$fn := (n,t) \to \frac{\sin(x)\cos(x)^n}{1-\cos(x)}$$

```
> f :=x->0 ; > plot ({f(x),seq(fn(k,x),
k=1..10)},x=0.1..1.55) ;
```



Doc. 2. *Convergence simple sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *de la suite de fonctions* (f_n).

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.1.2 Convergence simple d'une série de fonctions

De même, la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement sur** A, si, pour tout x de A, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge.

On appelle alors **fonction somme** de la série la fonction S définie sur A par :

$$S(x) = \sum_0^\infty u_n(x).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur A vers S si :

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$$

Étudier la convergence simple d'une suite de fonctions ou d'une série de fonctions revient à étudier la convergence d'une suite ou d'une série numérique dépendant du paramètre x. Le domaine de convergence simple est le domaine de définition de la fonction somme.

Mensa ACADEMY

Application 1

La fonction ζ de Riemann et la fonction μ

La fonction ζ et son prolongement à $\mathbb{C}$ sont fondamentales en théorie des nombres. Cette fonction est en particulier l'objet d'une conjecture de Riemann (1826-1866), reprise par Hilbert dans son huitième problème, et toujours non élucidée.
Aussi, cette fonction et la fonction μ, ingrédients classiques des problèmes de concours, nous fourniront-elles un fil conducteur pour les chapitres d'étude des suites et séries de fonctions. Au fur et à mesure de l'approfondissement de nos connaissances, nous en verrons la mise en œuvre avec ces deux fonctions.

On considère les fonctions :

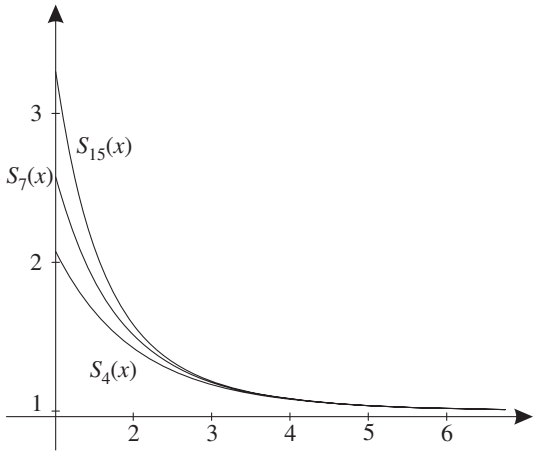
$$\zeta(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \mu(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

ζ est appelée la fonction ζ de Riemann.

Déterminer les domaines de définition de ces deux fonctions.

1) La série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$. Le domaine de définition de la fonction somme ζ est $]1, +\infty[$ (*doc.* 3).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



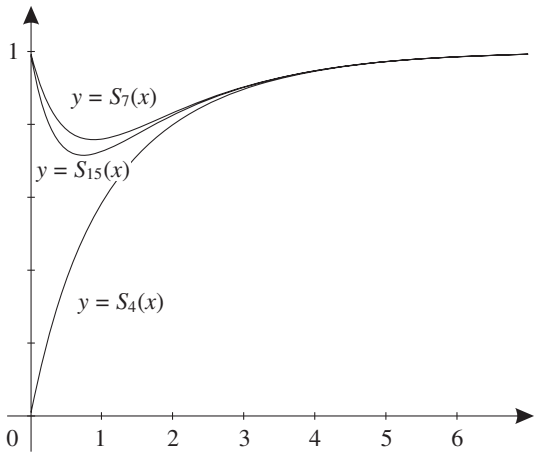
Doc. 3. *La fonction ζ de Riemann.*

```
> restart;fn:=(n,x)->n^ (-x) ;
  Sn:=(n,x)->sum('k'^(-x), 'k'=1..n) ;
  plot({Sn(4,x),Sn(7,x),
  Sn(15,x)},x=1.01..7);
```

$$fn := (n,x) \to (-1)^{(n+1)}\, n^{(-x)}$$

$$Sn := (n,x) \to \sum_{'k'=1}^{n} (-1)^{('k'+1)}\, 'k'^{(-x)}$$

2) De même, la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est grossièrement divergente pour x fixé, inférieur ou égal à 0. Elle converge pour $x > 0$ comme le montre le critère spécial des séries alternées.
La fonction somme μ de cette série de fonctions est donc définie sur $]0,+\infty[$ (*doc.* 4).



Doc. 4. *La série de fonctions converge vers la fonction μ.*

1.2. Convergence uniforme de suites et séries de fonctions

1.2.1 L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A), \|\ \|_\infty)$

Considérons l'espace vectoriel, $\mathcal{B}(A)$, des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$ et l'application :

$$\|\ \|_\infty : \begin{cases} \mathcal{B}(A) & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|. \end{cases}$$

Nous avons rencontré cette application et montré qu'elle est une norme sur $\mathcal{B}(A)$.

⚠ Nous constatons ainsi que parler de la convergence d'une suite de fonctions n'a de sens que si l'on précise le type de convergence envisagé et l'intervalle d'étude.

1.2.2 Convergence uniforme de suites de fonctions

Une suite (f_n) de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ **converge uniformément sur** A s'il existe une fonction f de A dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

La suite (f_n) converge uniformément sur A vers f équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

soit à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in A \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

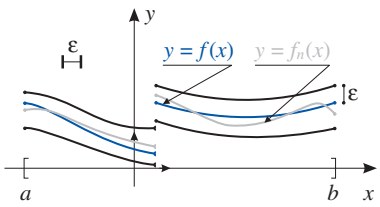
Rapport Mines-Ponts, 2003
« ...lacunes dans les connaissances de seconde année (convergence uniforme)... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• La convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) est donc la convergence de la suite $(f_n - f)$ de fonctions bornées de $\mathcal{B}(A)$, relativement à la norme $\|\ \|_\infty$, vers la fonction nulle (*doc.* 5).

• La convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ s'exprime ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, le graphe de f_n soit contenu dans la bande du plan xOy :

$$\{(x, y) \mid x \in A,\ y \in [\,f(x) - \varepsilon,\ f(x) + \varepsilon]\}\,.$$



Doc. 5. *Convergence uniforme sur* $[a, b]$.

■ La relation **(2)** ressemble beaucoup à la relation **(1)**, mais la position du « $\forall x \in A$ » n'est pas la même. Dans la relation **(1)**, l'entier naturel N dépend de x, alors que dans la relation **(2)**, le même N convient pour tous les x. Ceci justifie la terminologie « uniforme ». On retrouve le fait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, la réciproque étant fausse, comme le montre l'exemple 2 du paragraphe suivant.

■ À cause de cette définition, la norme $\|\ \|_\infty$ est aussi appelée **norme de la convergence uniforme**.

Théorème 1

Si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A)$ convergeant uniformément sur A vers f, alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur A vers f.

Théorème 2 (Condition suffisante de non-convergence uniforme)

A étant une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers f, s'il existe une suite (x_n) de points de A tels que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0, alors la convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme sur A.

Démonstration

En effet : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$

► ***Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.***

Dans « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste » (1892), Poincaré voulait caractériser complètement tous les mouvements de systèmes mécaniques. Il montra notamment que des développements en série, utilisés dans le problème des trois corps, étaient convergents, mais pas uniformément convergents en général, remettant ainsi en question les démonstrations de stabilité de Lagrange et Laplace.
Voir site Internet :
http ://www-groups .dcs.st-and.ac.uk / ∼ history/Mathematicians /Poincare.html.

1.2.3 Quelques exemples

■ On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \mathrm{e}^{-n\,x}. \end{array} \right.$$

Étudions la convergence de cette suite de fonctions.

• Fixons d'abord x pour étudier la convergence simple de la suite (f_n).

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Cette convergence est-elle uniforme ?

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = x\mathrm{e}^{-n\,x}(2 - n\,x)$. Par conséquent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad |\,f_n(x)| \leqslant f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\mathrm{e}^{-2}.$$

La suite de fonctions (f_n) converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Fonction « bosse glissante »

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par (*doc.* 6) :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2\,n^2\,x & \text{si} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right] \\ f_n(x) = -2\,n^2\left(x - \dfrac{1}{n}\right) & \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right] \\ f_n(x) = 0 & \text{si} \quad x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}.$$

• Vous prouverez que la suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle.

• La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$, car :

$$\|\,f_n - 0\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\,f_n(t)| = n.$$

• Toutefois, si nous choisissons $a > 0$ et si nous considérons la restriction des f_n à $[a, +\infty[$, la suite de fonctions $(f_{n\,|[a,+\infty[})$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

1.2.4 Convergence uniforme sur tout compact

J étant une partie de A, lorsque $(f_n - f)$ est bornée sur J, on note :

$$\sup_{x \in J} |\,f(x) - f_n(x)| = \|\,f_{n|J} - f_{|J}\|_\infty.$$

Une suite de fonctions (f_n), définies sur A et convergeant simplement sur A vers une fonction f, **converge uniformément** vers f **sur tout compact** contenu dans A si, pour tout compact J de E contenu dans A, la suite $(f_{n|J})$ des restrictions de f_n à J converge uniformément vers la restriction $f_{|J}$ de f à J.

En d'autres termes, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact contenu dans A si, pour tout compact J de E contenu dans A, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \|\,f_{n|J} - f_{|J}\|_\infty = 0.$$

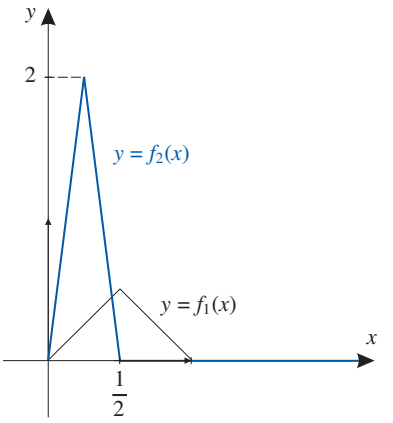
• Les fonctions $f_n - f$ doivent donc être bornées sur tout compact J de A, à partir d'un certain rang.

• La convergence uniforme sur A entraîne la convergence uniforme sur tout compact de A. Mais la réciproque est fausse. Il suffit de considérer le premier exemple ci-dessous.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

Rapport X-ESPCI, 2002

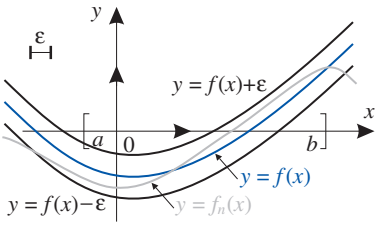
« Il est fortement conseillé aux futurs candidats de réviser les différents types de convergence des séries de fonctions. »



Doc. 6. *Fonction « bosse glissante ».*

Rapport Mines-Ponts, 2003

« La convergence a été encore plus rarement étudiée. »



Doc. 7. *Convergence uniforme sur tout compact.*

Lorsque A est un intervalle, nous utiliserons aussi la convergence uniforme sur des intervalles contenus dans A. Vous en verrez un exemple dans l'application 2.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.2.5 Exemples

■ Soit $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^n$.

Le graphe et le calcul nous indiquent que :

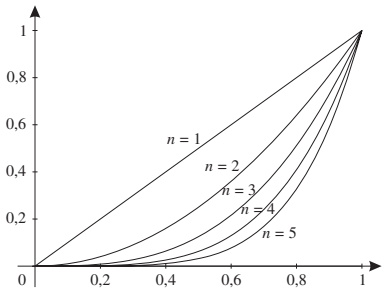
$$\| f_n - 0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1[} t^n = 1$$

La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle n'est pas uniforme sur $[0,1[$.

Mais, si $J = [a,b]$ est un segment de $[0,1[$, on a :

$$\| f_{n|J} - 0\|_\infty = b^n$$

Lorsque n tend vers $+\infty, b^n$ tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout compact de $[0,1[$ vers la fonction nulle. (*doc.* 8.)



Doc. 8. *Convergence uniforme sur tout compact de* $[0,1[$.

```
> assume(t>=0,t<=1) ;
fn :=(n,t)->t^n ;
f :=unapply(limit(fn(n,t),
n=infinity),t) ;
plot({f(t),seq(fn(k,t),k=1..5)},
t=0..1) ;
```

$$f\ n := (n,t) \to t^n$$
$$f := 0$$

■ Soit la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{-x}}{nx+1}.$$

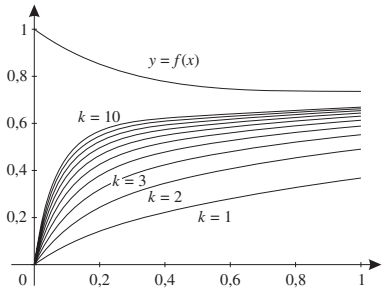
• Fixons x dans $[0,+\infty[$:

La suite numérique $(f_n(x))$ converge. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

• La convergence est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Faisons appel à Maple, ou à une calculatrice graphique, pour le graphe de f et celui des f_n, pour n allant de 1 à 10. (*doc.* 9.)



Doc. 9.

```
> restart :fn :=(n,x)->(n*(x^
3+x)*exp(-x))/(n*x+1) ;
f :=unapply(limit(fn(n,x),
n=infinity),x) ;
> plot({f(x),seq(fn(k,x),
  k=1..10)},x=0..1) ;
```

$$f\ n := (n,x) \to \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{(-x)}}{nx+1}$$
$$f := x \to (x^2+1)\mathrm{e}^{(-x)}$$

La distance entre les réels $f_n(t)$ et $f(t)$ est proche de 1 pour x proche de 0.

$$\forall t > 0 \quad |f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{n(t^3+t)\mathrm{e}^{-t}}{nt+1} - (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{nt+1}(t^2+1)\right|.$$

D'où : $$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{2}.$$

La convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0,+\infty[$ n'est pas uniforme. Considérons les restrictions de ces fonctions à un segment $[a,b]$ $(0 < a < b)$.

$$\forall t \in [a,b] \quad |f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{nt+1}(t^2+1)\right| \leqslant \frac{1+b^2}{na+1}.$$

$$\| f_{n|[a,b]} - f_{|[a,b]}\|_\infty \leqslant \frac{1+b^2}{na+1}.$$

La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers f est uniforme sur tout compact $[a,b]$ de $[0,+\infty[$.

1.2.6 Cas des fonctions bornées

Théorème 3

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées convergeant uniformément vers f sur A, alors la fonction f est bornée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

$$\forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_n.$$

La convergence uniforme d'une suite (f_n) de fonctions bornées sur A, vers f est la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$.

Corollaire 3.1

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur A convergeant uniformément vers f sur A, alors la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \| f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Le problème suivant se pose alors : une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A)$ vérifiant le critère de Cauchy de convergence uniforme, converge-t-elle simplement et uniformément sur A ? En d'autres termes, l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$ est-il complet ?

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Certains semblent mal maîtriser la notion de convergence uniforme car ils ne précisent pas le domaine de variation de la variable. »

Théorème 4

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

Pour tout x de A, la suite $(f_n(x))$ est donc une suite numérique de Cauchy. Elle converge. Appelons $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction f de A dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

Fixons alors $n \geqslant N$ et faisons tendre p vers $+\infty$. La continuité de la fonction $y \mapsto |y|$ sur $\mathbb{K}$ permet d'écrire : $\forall x \in A \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Le théorème 3 nous permet d'affirmer que f est dans $\mathcal{B}(A)$ et que la suite de Cauchy (f_n) converge dans $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$ vers la fonction f.

Application 2

De la convergence simple à la convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

On suppose que, pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ convergeant vers un x de $[0,1]$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$. Montrer la convergence uniforme de la suite (f_n).

Supposons que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément. On en déduit :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad \exists p > 0 \quad \| f_{n+p} - f_n\|_\infty > \varepsilon$$

Soit :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad \exists p > 0 \quad \exists x_N \in [0,1] \quad | f_{n+p}(x_N) - f_n(x_N)| > \varepsilon$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Appliquons cette relation à ε et à $N = 1$, on obtient :

$$\exists n = \varphi(1) > N \; \exists n + p = \psi(1) > n \; \exists x_1 \in [0,1] \quad |f_{\psi(1)}(x_1) - f_{\varphi(1)}(x_1)| > \varepsilon$$

Itérons en choisissant $N > \psi(1)$, puis $N > \psi(2)$ et ainsi de suite. On construit ainsi deux suites extraites $(f_{\varphi(n)})$ et $(f_{\psi(n)})$ de la suite de fonctions (f_n) et une suite (x_n) d'éléments de $[0,1]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_{\psi(n)}(x_n) - f_{\varphi(n)}(x_n)| > \varepsilon$$

Or, $[0,1]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc il existe une suite $(x_{\rho(n)})$, extraite de la suite (x_n), convergeant vers un élément x de $[0,1]$. Et nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_{\psi \circ \rho(n)}(x_{\rho(n)}) - f_{\varphi \circ \rho(n)}(x_{\rho(n)})| > \varepsilon$$

Considérons la suite (y_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par :

$$\text{si } \psi \circ \rho(m) \leqslant n < \psi \circ \rho(m+1) \quad y_n = x_{\rho(m)}.$$

Cette suite converge vers x. Et, par construction, la suite $(f_n(y_n))$ ne converge pas vers $f(x)$.

1.2.7 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit (u_k) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. Alors, la suite des sommes partielles (S_n), définie par $S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$, est une suite de fonctions définies sur A. Si la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur A, on peut définir la fonction reste d'indice n sur A en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Théorème 5

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La suite des fonctions sommes partielles (S_n) associée converge uniformément sur A.
- La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur A et la suite des fonctions restes (R_n) converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Démonstration

- La convergence uniforme de la suite de fonctions (S_n) sur A entraîne sa convergence simple. De plus, elle équivaut à la convergence uniforme sur A de la suite de fonctions (R_n) vers la fonction nulle.
- La réciproque est immédiate en appelant S la fonction somme de la série de fonctions $\sum u_k$.

Une série de fonctions $\sum u_k$ vérifiant ces propriétés est appelée série **uniformément convergente** sur A.

Corollaire 5.1

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur A, alors la suite de fonctions u_k converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 5.2
Soit $\sum u_k$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. S'il existe une suite (x_k) de points de A telle que la suite $(u_k(x_k)$ ne converge pas vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas uniformément sur A.

1.2.8 Convergence uniforme sur tout compact d'une série de fonctions

La série de fonctions $\sum u_k$ est dite **convergente uniformément sur tout compact de A** lorsque, pour tout compact J de A, la série de fonctions $\sum u_{k|J}$ converge uniformément sur J. En pratique, lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, on s'intéressera plutôt à la convergence uniforme sur tout segment de la série de fonctions.

Exemple : Considérons la série de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, $\sum u_n$, avec :

$$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}.$$

• Convergence simple.

Nous avons déjà établi que, pour tout z de $\mathbb{C}$, la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et nous avons nommé **exponentielle** la fonction somme :

$$\exp(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

La série de fonctions converge donc simplement sur $\mathbb{C}$. (*doc.* 10.)

• Convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$.
Soit J un compact de $\mathbb{C}$. On a :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall z \in J \quad |z| \leqslant M.$$

Ainsi :

$$\forall z \in J \quad |u_n(z)| \leqslant \frac{M^n}{n!} \quad \text{et} \quad \|u_{n|J}\|_\infty \leqslant \frac{M^n}{n!}.$$

La série numérique $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge. La série $\sum u_n$ converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

• Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{C}$?
Soit n fixé. La fonction reste d'ordre n est définie par $R_n(z) = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.
On remarque que :

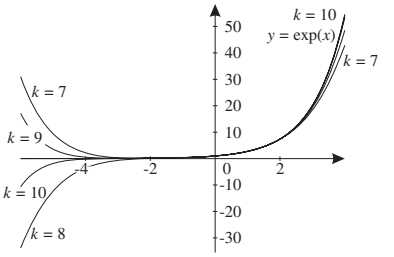
$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad R_n(t) \geqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = +\infty$. La suite de fonctions (R_n) ne converge donc pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{C}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Il y a toujours confusion entre convergence uniforme sur tout compact de A et convergence uniforme sur A. »

Rapport Centrale, 2001
« Et toujours l'erreur classique : la convergence uniforme sur tout compact $[a,b]$ de $]0,+\infty[$ implique la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. »



Doc. 10. *Sommes partielles de la série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *:*

```
> restart :
> F :=plot({seq(convert
  (series(exp(x),x,k),polynom),
   k=7..10)},x=-6..4) :
> G :=plot(exp(x),x=-6..4) :
> with(plots) :display({F,G},
  title='y=exp(x)') ;
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Utilisation du critère spécial des séries alternées : La fonction μ

La fonction μ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\mu(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

1) *Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[b, +\infty[$ (avec $b > 0$) de la série de fonctions définissant la fonction μ.*

2) *Montrer que cette convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

1) Soit $b > 0$ fixé. Le critère spécial des séries alternées s'applique.

$$\forall x \geqslant b \quad |R_n(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^b}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

La série de fonctions de somme $\mu(x)$ converge uniformément sur $[b, +\infty[$, pour tout $b > 0$.

2) Montrons que la convergence de cette série de fonctions n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout n, $(-1)^n u_{n+1} = R_n - R_{n+1}$. Les fonctions u_n, différences de fonctions bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$, sont bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si la convergence de la série de fonctions était uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$, la suite (u_n) aurait pour limite 0 dans l'espace vectoriel normé des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$, muni de $\| \ \|_\infty$. Or, $\|u_n\|_\infty = 1$, ce n'est pas le cas.

1.3. Une condition suffisante de convergence uniforme : la convergence normale

1.3.1 Définition

Étant donné une suite (u_k) de fonctions bornées sur A, on dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement** sur A si la série $\sum \|u_k\|_\infty$ converge.

⚠ *La convergence normale ne concerne que les* **séries de fonctions**.

Théorème 6
Toute série de fonctions $\sum u_k$ normalement convergente sur A est absolument et uniformément convergente sur A.

Démonstration

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions normalement convergente sur A et x un point de A.

Alors, la série numérique $\sum |u_k(x)|$ est à termes positifs, et majorée par la série convergente $\sum \|u_k\|_\infty$, donc converge. La série numérique $\sum u_k(x)$ converge absolument, donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur A. De plus :

$$\forall x \in A \quad |R_n(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty = \varepsilon_n.$$

ε_n est le reste d'une série numérique convergente, donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite des fonctions restes converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

La réciproque est fausse.
Considérons la série de fonctions constantes $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
Cette série de fonctions n'est pas normalement convergente. Cependant, elle converge pour tout x réel car la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées et, pour tout n :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

donc la série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.3.2 Convergence normale sur tout compact

On dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement sur tout compact** si, pour tout compact J de A, la série $\sum \|u_{k|J}\|_\infty$ converge.

Exemple :

La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ qui définit la fonction exponentielle converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

1.3.3 Méthode pratique

Théorème 7

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions définies sur A, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

S'il existe une suite de réels (ε_n) telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A \quad |u_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$
- la série $\sum \varepsilon_k$ converge.

alors la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur A.

Théorème 8

Si la série de fonctions $\sum u_k$ est normalement convergente sur A, alors :

$$\|\sum_0^\infty u_n\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_n\|_\infty.$$

Démonstration

Posons $S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$ et $S(x) = \sum_0^\infty u_k(x)$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A \quad |S_n(x)| \leqslant \sum_0^n \|u_k\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_k\|_\infty$.

Il en résulte : $\forall x \in A\ |S(x)| \leqslant \sum_0^\infty \|u_k\|_\infty$.

Puis : $\|S\|_\infty = \|\sum_0^\infty u_n\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_n\|_\infty$.

► *Pour s'entraîner : ex. 6 et 7.*

Rapport Mines-Ponts, 2001
« Mauvaise connaissance de la convergence normale. »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« La notion même de convergence normale est mal connue et encore moins bien maîtrisée. »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Encore cette année le jury rappelle qu'il faut préciser sur quel ensemble a lieu telle ou telle convergence. »

Rapport E3A, 2002
« Les majorations permettant d'établir la convergence normale sont presque toujours inexactes voire farfelues. »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Il fallait majorer par une expression indépendante de x pour obtenir la convergence normale. »

Lorsqu'une série de fonctions converge normalement sur tout compact de A, elle converge uniformément sur tout compact de A.

Application 4

Les fonctions ζ et μ

Rappelons que :

$$\zeta(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} \quad ; \quad \mu(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

et que ζ est définie sur $]1,+\infty[$ et μ sur $]0,+\infty[$.

1) *Étudier la convergence normale de la série de fonctions définissant ζ.*

2) *Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions définissant ζ.*

3) *Étudier la convergence normale de la série de fonctions définissant μ.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4) *Donner une relation entre les fonctions* ζ *et* μ.

1) Montrons d'abord que ζ est normalement convergente sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 1$ fixé).

$$\forall x \in [a,+\infty[\quad \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a},$$

La série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge, donc la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$.

Mais la convergence de la série de fonctions définissant ζ n'est pas normale sur $]1,+\infty[$.

2) Si la convergence de la série de fonctions $\sum n^{-x}$ était uniforme sur $]1,+\infty[$, on aurait :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \leqslant R_n(x) \leqslant \|R_n\|_\infty.$$

En faisant tendre x vers 1, on obtiendrait :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \|R_n\|_\infty,$$

ce qui contredit la convergence uniforme.

3) On en déduit que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 1$ fixé).

4) Relation entre $\mu(x)$ et $\zeta(x)$.

Pour tout $x > 1$:

$$\mu(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^x}$$

$$= (1 - 2^{1-x})\sum_1^\infty \frac{1}{n^x} = \zeta(x)(1 - 2^{1-x}).$$

1.4. Extension aux applications vectorielles

1.4.1 Les définitions

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(A,F)$ des applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. Les normes sur F sont équivalentes, notons N une norme sur F et, si f est bornée, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} N(f(x))$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et f une fonction de $\mathcal{F}(A,F)$. On dit que :

1. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur A si :

$$\forall x \in A \quad \lim_{n\to+\infty} N(f_n(x) - f(x)) = 0$$

2. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur A si :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} N(f_n(x) - f(x))\right) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

3. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de A si, pour tout compact J de A, la suite de fonctions $(f_{n|J})$ converge uniformément vers $f_{|J}$.

4. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur A si la suite des fonctions sommes partielles (S_n) converge simplement sur A.

5. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur A si la suite des fonctions sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S sur A.

6. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur tout compact de A si, pour tout compact J de A, la suite des fonctions sommes partielles $(S_{n|J})$ converge uniformément vers $S_{|J}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement vers S sur A si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

8. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement vers S sur tout compact de A si, pour tout compact J de A, la série numérique $\sum \|u_{n|J}\|_\infty$ converge.

1.4.2 Les théorèmes

Tous les théorèmes et résultats précédemment énoncés dans le cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ restent valables. Il suffit de substituer dans les énoncés et les démonstrations la norme sur F, N, à la valeur absolue de $\mathbb{K}, |\ |$, qui n'est autre qu'une norme de $\mathbb{K}$. En pratique, dans les démonstrations, il faudra choisir, parmi les normes sur F, celle qui se trouve la plus adaptée.

Théorème 9

L'espace vectoriel normé des fonctions bornées de A dans F, muni de la norme $\|\ \|_\infty, (\mathcal{B}(A, F), \|\ \|_\infty)$, est un espace de Banach.

De plus, munissons l'espace vectoriel F d'une base $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$. Si f est une application de $\mathcal{F}(A, F)$, on peut écrire :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e_j.$$

Les p applications f_j ainsi définies sont appelées applications coordonnées de f.

Théorème 10

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, F un espace vectoriel normé de dimension p sur $\mathbb{K}$, muni d'une base $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$, (f_n) une suite d'applications de E dans F et f une application de E dans F. Alors :

1. la suite (f_n) converge simplement vers f sur A si et seulement si, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, chacune des p suites d'applications coordonnées (f_{nj}) converge simplement vers la j-ième application coordonnée de f ;

2. la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A si, et seulement si, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, chacune des p suites d'applications coordonnées (f_{nj}) converge uniformément vers la j-ième application coordonnée de f.

Démonstration

Nous laissons le soin au lecteur de la rédiger en tenant compte des simplifications apportées par un choix judicieux de la norme de F.

Théorème 11

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, F un espace vectoriel normé de dimension p sur $\mathbb{K}$, muni d'une base

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$, $\left(\sum u_n\right)$ une série d'applications de E dans F. Alors la série d'applications $\left(\sum u_n\right)$ converge normalement sur A si et seulement si, pour tout j de $[\![1,p]\!]$, chacune des p séries d'applications coordonnées $\left(\sum u_{nj}\right)$ converge normalement sur A.

1.4.3 Exemples

■ Soit $(A,+,\times,.,\|\ \|)$ une algèbre normée de dimension finie (c'est-à-dire que l'espace vectoriel (A,+,.) est de dimension finie) et d'élément unité e. Considérons, pour n dans $\mathbb{N}$, l'application :

$$f_n : \begin{cases} A & \to & A \\ u & \mapsto & u^n \end{cases}$$

Soit $B = \{u \in A, \|u\| < 1\}$ et, pour r dans $]0,1[$, la boule fermée

$$B_r = \{u \in A, \|u\| \leqslant r\}.$$

1. Pour tout u de B_r, on a :

$$\|u\|^n \leqslant r^n < 1$$

et la série numérique $\sum r^n$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur B_r. Or, tout compact de B est contenu dans un B_r. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de B. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. De plus, nous avons vu en algèbre, que, pour tout u de A tel que $\|u\| < 1$, alors $(e-u)$ est inversible et :

$$(e-u)^{-1} = \sum_0^\infty u^n = S(u)$$

En effet, pour un tel u de A, on a :

$$(e-u)\sum_0^p u^n = e - u^{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} u^{n+1} = 0_E.$$

La continuité de l'application $v \mapsto (e-u)\circ v$ permet de conclure.

■ Soit $(A,+,\times,.,\|\ \|)$ une algèbre normée de dimension finie et d'élément unité e. Considérons, pour n dans $\mathbb{N}$, l'application :

$$f_n : \begin{cases} A & \to & A \\ u & \mapsto & \dfrac{u^n}{n!} \end{cases}$$

Pour tout $R > 0$, on a :

$$\|f_{n|B_R}\|_\infty = \frac{R^n}{n!}.$$

Or, la série numérique $\sum \dfrac{R^n}{n!}$ converge vers e^R, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $BF(0,R)$, donc sur tout compact de A.

La somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est appelée **fonction exponentielle.**

$$S = \exp : \begin{cases} A & \to & A \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_0^\infty \frac{u^n}{n!} = e^u \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Ensemble des éléments inversibles d'une algèbre normée

Montrer que l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre normée $(A, \|\ \|)$ *est un ouvert de* A.

Soit a un élément inversible de $(A, \|\ \|)$ et h un élément quelconque de A. Alors :

$$a + h = a(1_A + a^{-1}h).$$

Nous savons que, si $\|a^{-1}h\| < 1$, alors $a + h$ est inversible.

Or $\|a^{-1}h\| \leqslant \|a^{-1}\|\ \|h\|$.

Notons :

$$\alpha = \|a^{-1}\| \neq 0$$

la boule ouverte $BO\left(a, \frac{1}{\alpha}\right)$ est contenue dans l'ensemble des éléments inversibles de A.

2 Continuité de la limite d'une suite (ou d'une série) de fonctions

2.1. Théorème d'interversion des limites

2.1.1 Le théorème

Théorème 12

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ et a adhérent à A.

Si la suite vérifie :

- (f_n) converge uniformément sur A vers f ;
- chaque fonction f_n admet une limite b_n en a.

Alors :

- la suite (b_n) converge vers un élément b de F ;
- f admet en a la limite b :

$$\lim_{x \to a}\left(\lim_{n \to +\infty}\left(f_n(x)\right)\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\lim_{x \to a}\left(f_n(x)\right)\right).$$

Le théorème s'applique donc aux extrémités des intervalles de définition des fonctions f_n. Il s'applique aussi en $+\infty$ si A contient un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ et en $-\infty$ si A contient un intervalle de la forme $]-\infty, c]$.

Démonstration

- Montrons que la suite (b_n) est une suite de Cauchy de F.

Fixons un $\varepsilon > 0$.

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

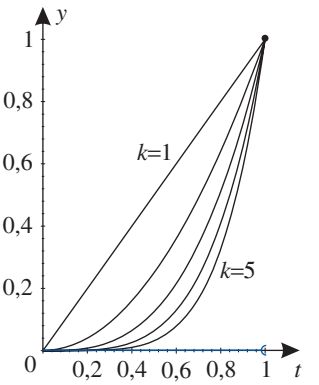
Donc : $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\quad \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_F \leqslant \varepsilon$.

L'application $\|\ \|_F$ est continue. Faisons tendre x vers a :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad \|b_{n+p} - b_n\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Inconvénients de la convergence simple

On ne maîtrise pas les propriétés analytiques : continuité, dérivabilité de la fonction limite en cas de convergence simple de la suite ou de la série de fonctions.



Doc. 11. *La fonction limite n'est pas continue sur* $[0, 1]$.

$$f_n : t \to t^n$$

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, 1[\\ 1 & si \quad t = 1 \end{cases}$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« L'interversion des passages à la limite ou la justification de la convergence de la série sont mal traitées ou passées sous silence. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La suite (b_n) est donc une suite de Cauchy de F, elle converge vers un élément b de F.

• Montrons que f admet en a la limite b.

$$\| f(x) - b\|_F \leqslant \| f(x) - f_n(x)\|_F + \| f_n(x) - b_n\|_F + \|b_n - b\|_F.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|b_n - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant N \ \forall x \in A \quad \| f(x) - b\|_F \leqslant 2\varepsilon + \| f_n(x) - b_n\|_F.$$

Terminons en supposant a réel.

Soit $n \geqslant N$, la fonction f_n admet b_n comme limite en a, donc :

$$\exists V \in v(A) \quad \forall x \in V \cap A \quad \| f_n(x) - b_n\|_F \leqslant \varepsilon.$$

En définitive, pour cet ε fixé, pour ce n et pour tout x de $V \cap A$, on a :

$$\| f(x) - b\|_F \leqslant 3\varepsilon.$$

On a prouvé que : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

2.1.2 Les conséquences

Corollaire 12.1

• Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ et a un point de A. Si toutes les fonctions f_n sont continues en a et si la suite de fonctions converge uniformément sur A vers f, alors f est continue en a.

• Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ convergeant uniformément vers f sur A. Alors f est continue sur A.

• Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ convergeant vers f uniformément sur tout compact de A. Alors f est continue sur A.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« L'interversion des passages à la limite ou la justification de la convergence de la série sont mal traitées ou passées sous silence. »

Corollaire 12.2

Lorsque A est une partie compacte de E, l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues sur A est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{B}(A, F), \| \|_\infty)$.

Si la suite (f_n) de fonctions continues sur A converge uniformément vers f sur tout compact de A, alors f est continue sur tout compact de A, donc continue sur A.

► *Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.*

Corollaire 12.3. Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ et a adhérent à A. Si :

• la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A vers S ;

• chaque fonction u_n admet une limite b_n en a ;

alors :

• la série $\sum b_n$ converge vers un élément b de F ;

Rapport E3A, 2002

« Ils affirment que S est forcément continue, vu qu'une somme d'applications continues est continue. »

Rapport Centrale, 2000

« Les théorèmes d'interversion (limites, séries, intégrale) sont évidemment à justifier avec soin. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• la fonction somme S admet en a la limite b.

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_0^\infty u_n(x)\right)=\sum_0^\infty\left(\lim_{x\to a}u_n(x)\right)$$

Corollaire 12.4
Soit $\sum u_k$ une série de fonctions continues sur A, uniformément convergente sur tout compact de A. Alors la fonction somme $S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ est continue sur A.

► *Pour s'entraîner : ex. 10, 11 et 12.*

2.1.3 Exemples

■ La fonction ζ de Riemann.
Supposons la série de fonctions uniformément convergente sur $]1,+\infty[$. On peut alors appliquer à la fonction ζ le théorème de la double limite, car :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{n^x}=\frac{1}{n}.$$

On en déduit que la série $\sum\frac{1}{n}$ converge. C'est faux.

■ La fonction μ.
Si l'on suppose la série de fonctions définissant μ uniformément convergente sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites, avec :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=(-1)^{n+1}.$$

On obtient la convergence de la série $\sum(-1)^{n+1}$, ce qui est faux.

■ La série de fonctions $\sum u_k$ définie par :

$$u_k(t)=(-1)^k\ln\left(1+\frac{t^2-1}{k(2+t^2)}\right)$$

Si t est un réel fixé, la série numérique $\sum u_k(t)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc converge. De plus, pour tout n, on a :

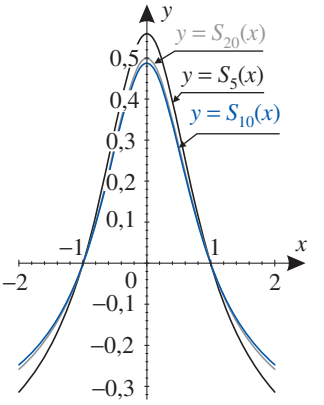
$$|S(t)-S_n(t)|=|R_n(t)|\leqslant|u_{n+1}(t)|\leqslant\left|\ln\left(1+\frac{t^2-1}{(n+1)(2+t^2)}\right)\right|$$

En distinguant les cas $|t|\geqslant 1$, et $|t|<1$, on obtient :

$\|R_n\|_\infty\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. La série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers S (*doc.* 12).

De plus, $\lim_{t\to+\infty}u_k(t)=(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Donc, nous pouvons appliquer le théorème d'interversion des limites. On obtient :

• On peut avoir $f=\lim f_n$ continue en a, sans que les f_n soient continues. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x)=\frac{\mathrm{E}(x)}{(n+1)}$ converge simplement vers la fonction nulle. Elle converge aussi uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$, mais les f_n ne sont pas continues, bien que f le soit.
• On peut aussi avoir :
$f=\lim f_n$ continue en a, sans que la convergence soit uniforme. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x)=t^n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle f. Il n'y a pas convergence uniforme, mais les f_n et f sont continues sur $[0,1[$.



Doc. 12. *Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions.*

```
> restart :
> plot(seq(floor(x)/(k+1),
  k=5..10),x=0..5) ;
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- la convergence de la série numérique $\sum (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3^2\,5^2 \ldots (2n-1)^2(2n+1)}{2^2\,4^2 \ldots (2n-2)^2(2n)^2}\right) = \ln\left(\frac{(2n+1)((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\right).$$

Utilisons la formule de Stirling : $n! \sim n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$. On en déduit :

$S_{2p} \sim \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Application 6

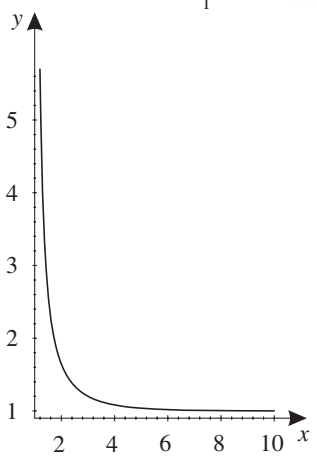
Les fonctions ζ et μ

Rappelons que :

$$\forall x > 1 \quad \zeta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

et :

$$\forall x > 0 \quad \mu(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$



Doc. 13. *La fonction ζ.*

```
> plot(Zeta(x),x=1..10) ;
```

1) *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0} \mu(x) = \frac{1}{2}$.

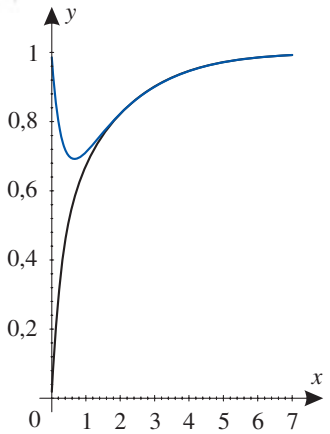
2) *Calculer* $\mu(1)$.

3) *Donner* $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mu(x)$.

4) *Montrer que :* $\exists a \in \mathbb{R} \quad \zeta(x) \sim_{1^+} \frac{a}{x-1}$ *et préciser* a.

5) *Retrouver ce résultat en utilisant la relation établie entre* ζ *et* μ *dans l'application 4.*

6) *Montrer la continuité des fonctions* ζ *et* μ *sur leurs intervalles de définition.*



Doc. 14. *La suite de fonctions converge vers la fonction μ.*

```
> restart ;fn :=(n,x)->(-1)^ (n+1)*n^ (-x) ;
Sn :=(n,x)->sum((-1)^ ('k'+1)*'k'^ (-x),
   'k'=1..n) ;
plot({Sn(27,x),Sn(28,x)},x=0.01..7) ;
```

$$fn := (n,x) \to (-1)^{(n+1)}\, n^{(-x)}$$

$$Sn := (n,x) \to \sum_{'k'=1}^{n} (-1)^{('k'+1)}\, 'k'^{(-x)}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Regroupons les termes deux à deux dans l'expression de $\mu(x)$.

$$\mu(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}.$$

D'où :

$$-1 + 2\,\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right].$$

L'étude, sur $[1, +\infty[$, de la fonction :

$$u \mapsto \frac{1}{u^x} - \frac{1}{(u+1)^x}$$

permet d'appliquer le critère des séries alternées. Nous pouvons écrire :

$$0 \leqslant -1 + 2\,\mu(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Puis, $\dfrac{1}{2} \leqslant \mu(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 2^x}$.

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \mu(x) = \frac{1}{2}.$$

2) $\mu(1) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

3) De même, les séries de fonctions définissant les fonctions ζ et μ étant normalement convergentes sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on peut appliquer pour chacune le théorème de la double limite et on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mu(x) = 1.$$

4) Procédons également en comparant $\dfrac{1}{n^x}$ à une intégrale. Soit $x > 1$ fixé.

$$\forall\, k \geqslant 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^x}.$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{-x+1}[(k+1)^{-x+1} - k^{-x+1}] \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{-x+1}[k^{-x+1} - (k-1)^{-x+1}].$$

D'où :

$$\frac{1}{x-1}[-(n+1)^{-x+1} + 1] \leqslant \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}[-n^{-x+1} + 1].$$

Faisons tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1},$$

d'où : $\zeta(x) \sim_1 \dfrac{1}{x-1}$.

5) Immédiat.

6) Il suffit de rappeler que la série de fonctions $\sum \dfrac{1}{k^x}$ converge uniformément sur tout $[b, +\infty[$, avec $b > 1$ et que la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{k^x}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour obtenir la continuité de ζ.

De même, la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ converge uniformément sur tout $[b, +\infty[$, avec $b > 0$. la fonction μ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.2. Exemples

Théorème 13

Soit $(A, +, \times, \cdot, \|\ \|)$ une algèbre normée de dimension finie et d'élément unité e. L'application S de $BO(0,1)$ dans A, $u \mapsto S(u) = (e-u)^{-1}$, est continue sur $BO(0,1)$.

Démonstration

Nous avons vu, que, pour tout u de A tel que $\|u\| < 1$, $(e-u)$ est inversible et $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} u^n = S(u)$. La convergence est normale sur tout compact de $BO(0,1)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrons que la fonction S est continue sur B.

Nous allons établir par récurrence que les applications $f_n : (u \mapsto u^n)$ sont continues sur A.

Pour $n = 2$, on a : $f_2 = g \circ h$, avec :

$$h : \begin{cases} A \to A^2 \\ u \mapsto (u, u) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} A^2 \to A \\ (u, v) \mapsto uv \end{cases}$$

h est continue, ainsi que g en tant qu'application bilinéaire car A est de dimension finie. L'application f_2 est donc continue.

De même, supposons pour un certain $n \geqslant 2$, l'application f_n continue.

Alors on a $f_{n+1} = g \circ h_n$, avec :

$$h_n : \begin{cases} A \to A^2 \\ u \mapsto \left(u^n, u\right) \end{cases}$$

g et h_n sont continues, donc l'application f_{n+1} est continue sur A.

On en déduit que l'application :

$$S : \begin{cases} B \to A \\ u \mapsto S(u) = (e - u)^{-1} \end{cases}$$

est continue sur B.

Théorème 14

Soit $\left(A, +, \times, \cdot, \| \ \|\right)$ une algèbre normée de dimension finie et d'élément unité e.

La **fonction exponentielle**

$$\exp : \begin{cases} A \to A, \\ u \mapsto \displaystyle\sum_0^\infty \frac{u^n}{n!} = \mathrm{e}^u, \end{cases}$$

est continue sur A.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Pour tout $R > 0$, la série de fonctions $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge normalement sur $BF(0, R)$, donc sur tout compact de A.

Pour tout n, l'application $u \to \dfrac{u^n}{n!}$ est continue sur A.

La somme de la série de fonctions est donc continue sur A.

3 Approximations

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

3.1. Fonctions en escalier

On appelle **subdivision** d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, toute suite finie et croissante de points de $[a, b]$, $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On appelle **fonction en escalier** sur $[a,b]$, toute fonction f à valeurs dans F, définie sur $[a,b]$, pour laquelle il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$, telle que la restriction de f à chaque $]x_i,x_{i+1}[$ $(i\in[\![0,n-1]\!])$ soit une fonction constante (*doc.* 15).

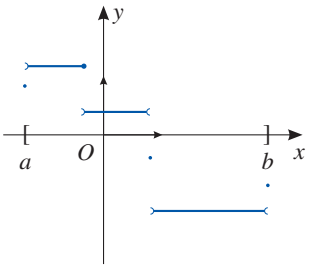
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([a,b],F)$. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{E}([a,b],F)$.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans F est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $f_{|[a,b]}$ soit en escalier sur $[a,b]$ et $f_{|\mathbb{R}-[a,b]}$ soit nulle.

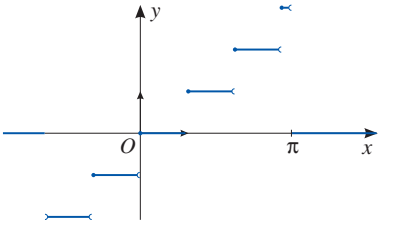
Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad -2\leqslant x\\ \mathrm{E}(x) & \text{si} \quad -2<x<\pi\\ 0 & \text{si} \quad \pi\leqslant x.\end{cases}$$



Doc. 15. *Fonction en escalier sur* $[a,b]$.



Doc. 16. *Fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$.

3.2. Fonctions continues par morceaux

On appelle **fonction continue par morceaux** sur $[a,b]$, toute fonction f à valeurs dans F, définie sur $[a,b]$ pour laquelle il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$, telle que la restriction de f à chaque $]x_i,x_{i+1}[$ $(i\in[\![0,n-1]\!])$ puisse se prolonger en une fonction continue sur $[x_i,x_{i+1}]$. Une telle subdivision est appelée **subdivision adaptée** à la fonction f.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans F. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{CM}([a,b],F)$.

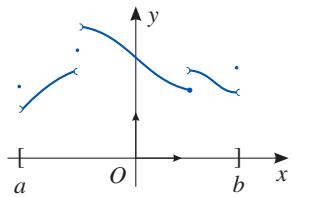
Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans F est dite **continue par morceaux sur** I si sa restriction à tout segment contenu dans I est continue par morceaux. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans F. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{CM}(I,F)$.

Exemple

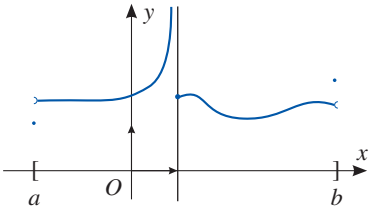
La fonction partie entière, E, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Rapport X-ESPCI, 2001

« Les difficultés proviennent ... de la continuité par morceaux. »



Doc. 17. *Fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$.



Doc. 18. *Fonction non continue par morceaux sur* $[a,b]$.

3.3. Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur [*a*, *b*]

Théorème 15

Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Ce théorème se traduit par l'une des deux formulations équivalentes suivantes :

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],F) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathcal{E}([a,b],F) \quad \|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon.$
- $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],F) \quad \exists (f_n) \in \mathcal{E}([a,b],F)^{\mathbb{N}} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \|f-f_n\|_\infty = 0.$

Démonstration

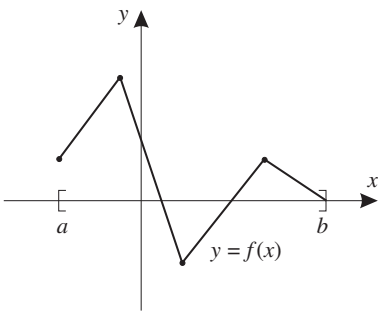
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et notons A l'ensemble des c de $[a,b]$ tels que f puisse être approchée uniformément sur $[a,c]$, à ε près, par des fonctions en escalier sur $[a,c]$. Posons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]a, a+\alpha[\quad \|f(x)-l\|_F \leqslant \varepsilon$$

La fonction g définie sur $[a,a+\alpha]$ par : $g(a) = f(a)$ et $\forall x \in]a,a+\alpha]$ $g(x) = l$ est en escalier sur $[a,a+\alpha]$ et approche uniformément f à ε près sur cet intervalle. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par b. Elle possède une borne supérieure M. $M \geqslant a+\alpha$. Montrons que : $M = b$. Si $M < b$, un raisonnement analogue, construit avec les limites à gauche et à droite de f en M, permet de montrer l'existence de $\beta > 0$ tel que f soit approchée uniformément à ε près sur $[a, M+\beta]$ par une fonction en escalier sur cet intervalle. Donc : $M = b$.

3.4. Approximation uniforme des fonctions continues sur [a, b] par des fonctions affines par morceaux et continues.

Une fonction f de $[a,b]$ dans F est dite **continue affine par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $[a,b]$, telle que la restriction de f à chaque $[x_i, x_{i+1}]$ $(i \in [\![1, n-1]\!])$ soit affine (*doc.* 19). Une telle fonction est alors continue sur $[a,b]$.



Doc. 19. *Fonction affine par morceaux sur* $[a,b]$.

Théorème 16

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F, est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux sur $[a,b]$.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs dans F. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$. Soit alors n dans $\mathbb{N}$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$. On a :

$$\exists \gamma > 0 \ \forall x \in I \ \forall x' \in I \quad |x-x'| \leqslant \gamma \Rightarrow \left\|f(x)-f(x')\right\|_F \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Posons $p = \mathrm{E}\left(\dfrac{b-a}{\gamma}\right)$ et partageons $[a,b]$ en $p+1$ intervalles égaux, chacun est de longueur $\dfrac{b-a}{p+1} < \gamma$. Écrivons : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{p+1}$ pour $k \in [\![0, p+1]\!]$.

On définit la fonction g_n sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ par :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}] \quad g_n(x) = x\alpha_k + \beta_k$$

Les vecteurs α_k et β_k de F sont déterminés par :

$$g_n(a_k) = f(a_k) \quad \text{et} \quad g_n(a_{k+1}) = f(a_{k+1})$$

On obtient donc :

$$\alpha_k = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1}-a_k} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{a_{k+1}f(a_k) - a_k f(a_{k+1})}{a_{k+1}-a_k}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On a alors :

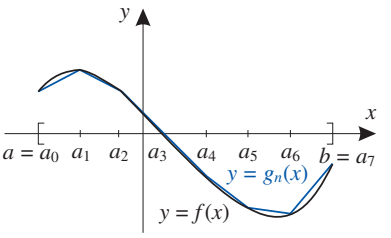
$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}] \quad g_n(x) - f(a_k) = \frac{x - a_k}{a_{k+1} - a_k}\,[f(a_{k+1}) - f(a_k)]$$

Or $|a_{k+1} - a_k| < \gamma$. D'où :

$$\|f(a_{k+1}) - f(a_k)\|_F < \frac{1}{n+1} \quad \text{puis} \quad \|g_n(x) - f(a_k)\|_F < \frac{1}{n+1}.$$

Et par conséquent :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}] \quad \|f(x) - g_n(x)\|_F \leqslant \|f(x) - f(a_k)\|_F + \|f(a_k) - g_n(x)\|_F < \frac{2}{n+1}.$$



Doc. 20. *Construction d'une fonction affine par morceaux sur* $[a, b]$ *approchant* f.

3.5. Approximation uniforme des fonctions continues sur [a, b] par des fonctions polynomiales

Théorème 17 (Théorème de Stone-Weierstrass)
Toute fonction à valeurs complexes, continue sur un compact $[a, b]$, peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

Démonstration

E désigne l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$, n un entier naturel non nul, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes définies sur $[0,1]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré $\leqslant n$. On introduit également, pour k dans $[\![1, n]\!]$ les fonctions p_{nk} de $\mathbb{R}_n[X]$, et T_n de $\mathbb{R}[X]$ définies par :

$$p_{nk} : x \mapsto p_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} ; \quad T_n : x \mapsto T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 p_{nk}(x).$$

À toute fonction f de E, on associe la suite $(B_n[f], n \geqslant 1) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ de ses **polynômes de Bernstein**, définis par $B_n[f] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}$.

Nous remarquons que l'opérateur de E dans $\mathbb{R}_n[X]$: $f \mapsto B_n[f]$ est linéaire.

1) Posons $m = \inf\{f(x), x \in [0,1]\}$ et $M = \sup\{f(x), x \in [0,1]\}$ et montrons que $m \leqslant B_n[f] \leqslant M$.

La fonction p_{nk} est positive et $\sum_{0}^{n} p_{nk}(x) = (x + 1 - x)^n = 1$, donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \forall x \in [0,1] \quad m p_{nk}(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x) \leqslant M p_{nk}(x)$$

puis : $m = m \sum_{0}^{n} p_{nk}(x) \leqslant \sum_{0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x) = B_n[f](x) \leqslant M \sum_{0}^{n} p_{nk}(x) = M.$

2) On introduit les fonctions f_0, f_1, f_2 de E définies par $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

Calculons $B_n[f_0]$, $B_n[f_1]$, $B_n[f_2]$.

La question précédente s'applique ici avec $m = M = 1$, d'où $B_n[f_0] = f_0$.

En outre, $B_n[f_1](x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x.$

Donc $B_n[f_1] = f_1$.

Cette démonstration, qui n'est pas exigible des étudiants, fait souvent l'objet d'une partie d'un problème de concours.
Nous avons donc choisi de la présenter sous cette forme, en utilisant le problème ENSAI, 1997.
Vous remarquerez que, dans ce problème $a = 0$ et $b = 1$ et généraliserez au cas d'un intervalle $[a, b]$ quelconque.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Enfin :

$$B_n[f_2](x) = B_n[f_1](x) + B_n[f_2 - f_1](x) = x - \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x - \sum_1^{n-1} \frac{n-1}{n} \binom{n-2}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x - \frac{n-1}{n} x(1-x)$$

Donc $B_n[f_2] = \dfrac{n-1}{n} f_2 + \dfrac{1}{n} f_1$.

Nous en déduisons, pour tout x de $[0,1]$:

$$T_n(x) = \sum_0^n (k - nx)^2 p_{nk}(x) = n^2 \sum_0^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x)$$

$$= n^2 \left(B_n[f_2](x) - 2x B_n[f_1](x) + x^2 B_n[f_0](x)\right) = nx(1-x).$$

3) Pour $\delta > 0$, on définit sur $[0,1]$: $S_n^\delta(x) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} p_{nk}(x)$.

Montrons que : $0 \leqslant S_n^\delta \leqslant \dfrac{T_n}{n^2\delta^2}$. Nous en déduirons que, pour δ fixé, la suite de fonctions $(S_n^\delta, n \geqslant 1)$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$0 \leqslant S_n^\delta(x) \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} p_{nk}(x) \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} \frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|^2}{\delta^2} p_{nk}(x)$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} (k - nx)^2 p_{nk}(x) \leqslant \frac{T_n(x)}{n^2\delta^2}$$

Fixons $\delta > 0$. La fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet sur $[0,1]$ un maximum en $\dfrac{1}{2}$ et ce maximum a pour valeur $\dfrac{1}{4}$, donc : $\forall x \in [0,1] \quad |S_n^\delta(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n\delta^2}$.

La suite de fonctions $(S_n^\delta, n \geqslant 1)$ converge donc uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

4) Montrons que la suite de fonctions $(B_n[f], n \geqslant 1)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

f est continue sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continue sur ce compact.

Fixons alors $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Puis, si $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - B_n[f](x)| = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) p_{nk}(x)$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^n \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{nk}(x).$$

Partageons alors $[\![1, n]\!]$ en deux.

$$|f(x) - B_n[f](x)| \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{nk}(x) + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{nk}(x)$$

$$\leqslant 2M \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} p_{nk}(x) + \varepsilon \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta}} p_{nk}(x) \leqslant 2M \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta}} p_{nk}(x) + \varepsilon$$

Karl Weierstrass *(1815-1897), mathématicien allemand, excellent pédagogue, professeur à l'université de Berlin en 1856 est parfois surnommé le « père de l'analyse moderne ». Ses travaux portent, entre autres, sur l'ensemble des réels, dont il donne une construction, et sur les fonctions réelles ou complexes. Nous lui devons l'usage des « epsilon » dans les démonstrations de continuité, la notion de convergence uniforme. En 1861, il pense trouver le premier exemple de fonction continue sur un segment et dérivable en aucun point. En fait Bolzano avait déjà trouvé un tel exemple en 1834. Il eut aussi le mérite de reconnaître et de soutenir les talents mathématiques de son élève, Sonia Kowalewski, sans les préjugés sexistes de son époque.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après la question précédente, il existe N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x) - B_n[f](x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

La suite $(B_n[f], n \geqslant 1)$ converge donc uniformément vers f sur $[0,1]$.

Considérons la fonction **exponentielle**, un réel $a > 0$ et les fonctions polynômes P_n définies par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Nous avons montré que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction **exponentielle**.

► *Pour s'entraîner : ex. 13 et 14.*

Ce théorème, publié en 1885 par Weierstrass, fut généralisé, en 1937, par l'américain Stone, aux fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur un compact de $\mathbb{R}$.

3.6. Approximation uniforme des fonctions continues sur [*a*, *b*] par des polynômes trigonométriques

On appelle fonction **polynôme trigonométrique** toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, combinaison linéaire des fonctions $e_k : t \mapsto e^{ikt}$, où k est un entier relatif.

Vous vérifierez sans difficulté que toute fonction polynôme trigonométrique est combinaison linéaire, à coefficients complexes, des fonctions

$$c_k : t \mapsto \cos(kt) \ (k \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad s_k : t \mapsto \sin(kt) \ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Inversement, toute combinaison linéaire de fonctions c_k et s_k est une fonction polynôme trigonométrique.

Lemme 1
Toute fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue.

Théorème 18 (Deuxième théorème de Weierstrass)
Toute fonction à valeurs complexes, continue et périodique sur $\mathbb{R}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Démonstration

Voici le plan de cette démonstration, f étant une fonction à valeurs complexes, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$:

1) définition et calcul de fonctions k_n ;

2) une propriété importante des fonctions k_n ;

3) introduction des polynômes trigonométriques g_n ;

4) f est limite uniforme de (g_n).

1) Posons, pour n dans $\mathbb{N}$, $k_n(t) = c_n(1+\cos t)^n$, avec c_n tel que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\,dt = 1.$$

On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos t)^n\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)^n dt = 2^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\,du.$$

Cette démonstration, assez longue, n'est, d'après le programme, pas exigible des étudiants. Nous allons la présenter en procédant en plusieurs étapes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Linéarisons $\cos^{2n} u$.

$$\cos^{2n} u = \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} 2\cos\big(2n-2k\big)u + \binom{2n}{n} \right).$$

Donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u \,\mathrm{d}\, u = \frac{1}{2^{2n}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \binom{2n}{n} \mathrm{d}\, u = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \pi.$$

Puis :

$$k_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} (1+\cos t)^n.$$

2) Montrons que, si $a \in]0, \pi[$, la suite de fonctions (k_n) converge uniformément sur $]-\pi, -a] \cup [a, \pi[$ vers la fonction nulle. Pour cela, étudions d'abord la convergence simple de la suite de fonctions.

On a :

$$k_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \left(2\cos^2 \frac{t}{2}\right)^n, \quad \text{donc} \quad k_n(t) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

On en déduit, avec la formule de Stirling : $k_n(t) \sim \sqrt{\pi n} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n}$.

Si $t \neq 0 \quad [2\pi]$, $\left|\cos \frac{t}{2}\right| < 1$. Donc la suite de fonctions (k_n) converge simplement sur $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ vers la fonction nulle.

Soit a dans $]0, \pi[$ et $A =]-\pi, -a] \cup [a, \pi[$. Alors :

$$\forall x \in A \quad |k_n(t)| = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \left|\cos \frac{t}{2}\right|^{2n} \leqslant \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \left|\cos \frac{a}{2}\right|^{2n}.$$

La suite de fonctions (k_n) converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

3) Introduisons la suite de fonctions (g_n) définies par :

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) k_n(t) \,\mathrm{d}\, t. \end{cases}$$

Montrons que les fonctions g_n sont des polynômes trigonométriques.

Nous avons établi au **1)** que :

$$k_n(t) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)t}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)t} \,\mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)(x-u)} \,\mathrm{d}\, u \end{aligned}$$

car la fonction que l'on intègre est 2π-périodique. Et on obtient :

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \left(\binom{2n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)u} \,\mathrm{d}\, u \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)x}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Appelons A_k le complexe $\binom{2n}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)u}\,\mathrm{d}u$, on a :

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{2n} A_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)x}.$$

La fonction g_n est donc bien une fonction polynôme trigonométrique.

4) Il ne reste plus qu'à prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (g_n) vers f. Pour cela, calculons :

$$g_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\,k_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$|g_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-a} |f(x-t) - f(x)|\,k_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{a} |f(x-t) - f(x)|k_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|k_n(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

De plus, f est continue, 2π-périodique, donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\exists\,\alpha > 0 \quad \forall (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $a < \dfrac{\alpha}{2}$, alors :

$$\forall\, t \in [-a,a] \qquad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} |f(x-t) - f(x)|k_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} k_n(t)\,\mathrm{d}t\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nous savons également que f est bornée, puisqu'elle est périodique et continue, et que la suite de fonctions (k_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\pi,-a]\cup[a,\pi]$. On en déduit :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^{+*} \quad \|f\|_\infty < M \quad \text{et} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \qquad \|k_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Finalement :

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$|g_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2M\left(\int_{-\pi}^{-a} k_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{\pi} k_n(t)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

L'étude des séries de Fourier nous permettra, si f est une fonction à valeurs complexes, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π -périodique, de déterminer des polynômes trigonométriques approchant uniformément f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, nous pourrons prouver que la fonction Arccos (cos) peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par un polynôme trigonométrique de la forme :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Si f a pour période $T > 0$, on substitue $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t/T}$ à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. Nous reverrons ceci dans le chapitre sur les séries de Fourier. Dans ce chapitre, nous verrons également une application importante de ce théorème.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● L'**étude d'une suite** (ou d'une série) de fonctions commence le plus souvent par celle de la convergence simple. On fixe la variable x et on étudie la suite (ou la série) numérique associée.

● La **convergence uniforme d'une suite** (f_n) de fonctions vers une fonction f est l'étude de la convergence de $(f - f_n)$ vers 0 dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, F), \| \ \|_\infty)$.

● Pour **étudier la convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur A, on peut :

- chercher à majorer $\| f_n(x) - f(x)\|_F$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;
- faire l'étude, n étant fixé, de la fonction $f_n - f$, dans le but de déterminer $\| f_n - f\|_\infty$.

● Lorsque la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur A, on peut chercher à **établir la convergence uniforme** sur tout compact de A.

● Pour **étudier la convergence uniforme d'une série $\sum u_n$ de fonctions sur A :**

- si la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie, pour tout x, le critère spécial des séries alternées, on majore le reste $|R_n(x)|$ par $|u_{n+1}(x)|$, puis on tente de majorer $|u_{n+1}(x)|$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;
- sinon, on peut essayer de prouver la convergence normale de la série de fonctions.

● Pour **étudier la convergence normale** d'une série de fonctions bornées sur A , on essaye de majorer $|u_n(x)|$ par le terme général α_n ne dépendant pas de x d'une série convergente :

$$\forall x \in A \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \alpha_n \quad \text{converge.}$$

● Pour montrer qu'une **fonction f, limite d'une suite de fonctions (f_n), est continue** sur A, il suffit d'établir que :

- les fonctions f_n sont continues sur A ;
- la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur tout compact de A.

● Pour montrer qu'une **fonction S, somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, est continue** sur A, il suffit d'établir que :

- les fonctions u_n sont continues sur A ;
- la convergence de la série $\sum u_n$ vers S est uniforme sur tout compact de A.

● Pour montrer qu'**une suite (f_n) (ou une série $\sum f_n$) de fonctions ne converge pas uniformément** sur A, on pourra prouver que, en un point a adhérent à A, les fonctions f_n admettent une limite b_n mais que la suite (b_n) (resp. la série $\sum b_n$) diverge.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Polynômes d'interpolation de Lagrange et convergence
(D'après ENSI, 1990)

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, a et b deux réels tels que : $a < b$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels distincts tels que : $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$. f est une fonction continue sur $[a,b]$.

1) Donner l'expression du polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout j de $[\![0,n]\!]$: $P_n(x_j) = f(x_j)$.

Nous allons étudier la convergence de la suite (P_n) dans deux cas particuliers.

A) Premier exemple :

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et toutes les dérivées de f sont bornées sur $[a,b]$ par une même constante réelle M

1) x étant un réel de $[a,b]$ différent de tous les x_j, on note φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(u) = f(u) - P_n(u) - \frac{f(x) - P_n(x)}{q_n(x)}\, q_n(u),$$

où q_n est le polynôme défini par $q_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel v de $[a,b]$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}\, q_n(x).$$

2) Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on choisit arbitrairement les réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que :

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$$

et on définit ainsi une suite de fonctions polynômes (P_n).

Montrer que la suite de fonctions (P_n) approche uniformément f sur $[a,b]$.

Donner un exemple pour f et $[a,b]$.

B) Second exemple :

La fonction f est définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = |x|$ et, pour tout entier j de $[\![0,n]\!]$, on pose :

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n+1}.$$

1) p et q étant des entiers naturels tels que $0 \leqslant p < q$, montrer :

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{q}{k} \frac{q-2k-1}{k+1} = 1 + (-1)^p \binom{q-1}{p} \frac{q-2p-2}{p+1} \qquad (1)$$

m désignant la partie entière de $\frac{n}{2}$, on pose :

$$A(n) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-2k-1}{k+1}$$

et :

$$B(n) = \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-2k-1}{k+1}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Montrer que $P_n(1) = A(n) - B(n)$.

3) Calculer $A(n) + B(n)$ et en déduire $P_n(1)$ en fonction de n et de m.

4) Calculer $P_n(1)$ lorsque n est pair.

5) Calculer $P_n(1)$ lorsque n est impair.

Donner alors un équivalent en $+\infty$ de $|f(1) - P_n(1)|$.

6) En déduire que la suite (P_n) n'est pas simplement convergente sur $[-1, 1]$.

Exercice résolu

La série de fonctions $\sum \dfrac{1}{\text{sh}(nx)}$

ÉNONCÉ

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où, pour $n > 0$, u_n est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $u_n(x) = \dfrac{1}{\text{sh}(n\,x)}$.

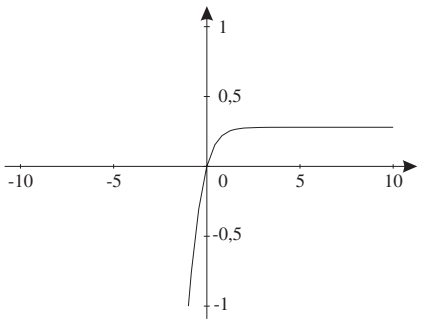
1) Donner le domaine de définition de la fonction somme $S = \sum_1^{+\infty} u_n$. Etudier la convergence normale.

2) Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de S.

Mensa ACADEMY

CONSEILS

Regarder le domaine de convergence simple de la série de fonctions.




```
> plot(sum('1/sinh(n*x)',
  'n'=1..100),
  x=-10..10,y=-1..1) ;
```

SOLUTION

1) Étudions d'abord la convergence simple de la série de fonctions. Soit x fixé, strictement positif. $u_n(x) \sim 2\text{e}^{-n\,x}$. La série numérique $\sum \text{e}^{-n\,x}$ est une série géométrique de raison e^{-x}. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Précisons le mode de convergence de la série de fonctions.

Si n est un naturel non nul fixé, la fonction $x \mapsto \text{sh}(n\,x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, de 0 à $+\infty$. La fonction u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Considérons un réel $a > 0$.

$$\|u_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \frac{1}{\text{sh}(n\,a)}.$$

La convergence de la série numérique $\sum \dfrac{1}{\text{sh}(n\,a)}$ entraîne la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions sur $[a, +\infty[$.

2) • Si $x > 0$:

$$\int_1^{N+1} \frac{\text{d}\,t}{\text{sh}(t\,x)} \leqslant \sum_1^N \frac{1}{\text{sh}(n\,x)} \leqslant \frac{1}{\text{sh}(x)} + \int_1^N \frac{\text{d}\,t}{\text{sh}(t\,x)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Utiliser la décroissance de la fonction positive : $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}(tx)}$ pour encadrer son intégrale sur $[n, n+1]$ et comparer $S(x)$ à une intégrale.

Calculons, pour $0 < a < b$ et $x > 0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\operatorname{sh}(t\,x)}$.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\operatorname{sh}(t\,x)} = \frac{1}{x}\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{\mathrm{d}\,u}{\operatorname{sh}(u)} = \frac{1}{x}\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{\mathrm{d}\,u}{2\operatorname{th}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\operatorname{sh}(t\,x)} = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right]_{a\,x}^{b\,x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{b\,x}{2}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{a\,x}{2}\right)}\right).$$

Puis :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{(N+1)\,x}{2}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \leqslant \sum_1^N \frac{1}{\operatorname{sh}(n\,x)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{N\,x}{2}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\right).$$

Les termes de cette inégalité ont une limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad (1)$$

- De plus, lorsque x tend vers 0, on a :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_0 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{2}\right) \sim_0 \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \sim_0 \frac{1}{x}.$$

Nous en déduisons, lorsque x tend vers 0 : $S(x) \sim_0 -\dfrac{\ln(x)}{x}$.

- $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} \sim_{+\infty} 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_{+\infty} \left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} -2\mathrm{e}^{-x}$.

Pour l'étude en $+\infty$, l'inégalité (1) ne suffit plus. Procédons plus finement en isolant $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}$.

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{(N+1)\,x}{2}\right)}{\operatorname{th}(x)}\right) \leqslant \sum_2^N \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{N\,x}{2}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\right).$$

D'où : $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \dfrac{1}{x}\ln(\operatorname{th}(x)) \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \dfrac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Avec :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \sim 2\mathrm{e}^{-x}, \quad \frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim -2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}, \quad \frac{1}{x}\ln(\operatorname{th}(x)) \sim -2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

Les deux derniers termes sont donc négligeables devant le premier. Nous en déduisons, lorsque x tend vers $+\infty$, $S(x) \sim 2\mathrm{e}^{-x}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit (f_n) une suite de fonctions monotones convergeant simplement vers f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est monotone.

2 Étudier la convergence sur $[0,1]$ de la suite de fonctions :

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n$$

3 Construire, le plus simplement possible, une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément sur $[0,\pi]$ vers la fonction sinus.

4 Étudier la convergence de la suite de fonctions :

1) $f_n(x) = (\sin x)^n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $f_n(x) = n\,x^n(1-x^2)$ sur $[0,1]$.

3) $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n}-2}{(\ln x)^{2n}+2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5 Étude de la série de fonctions $\sum (-1)^n \dfrac{n+x^2}{n^2}$.

6 Soit la série de fonctions $\sum u_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{(n+1)} & \text{si } x \in [n\pi,(n+1)\pi[\\ 0 & \text{si } x \notin [n\pi,(n+1)\pi[\end{cases}$$

Étudier la convergence de cette série de fonctions.

7 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$.

8 Est-il possible de trouver une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $]0,1]$ vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$?

9 On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n(x) = \exp(-x^n).$$

Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

Soit $a \in]0,1[$. La convergence est-elle uniforme sur $[a,+\infty[$?

Soit $a > 1$. Même question sur $[a,+\infty[$.

10 Calculer : a) $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(n+x)^2}$.

b)

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}.$$

11 Montrer que la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

12 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

Étudier l'ensemble D de définition de f.

f est-elle continue sur D ?

Déterminer $f(1)$.

13 Soit $a > 0$, f une fonction continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et l un réel tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynôme P telle que la fonction, $\left(x \mapsto P\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, approche uniformément f, à ε près sur $[a,+\infty[$.

14 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait :

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

15 Soit la suite de fonctions (f_n) définie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, par :

$$f_n(x) = n\,x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx^2}.$$

Étudier, selon les valeurs du réel α, la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

16 * Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ ($p > 0$ fixé).
On suppose que la suite de fonctions polynômes associée converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Montrer que f est une fonction polynôme de degré $\leqslant p$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

2) Que dire de cette suite si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$?

17 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(n\,x).$$

1) Donner son domaine de définition et de continuité.

2) Étudier ses limites aux bornes du domaine.

3) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

18 * Pour tout réel $x > 1$ et tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$u(x) = \frac{1}{\ln(x)}, \quad v_n(x) = (-1)^n\, u(x+n).$$

1) Prouver la convergence de la série $\sum v_n(x)$.

On notera désormais $f(x)$ sa somme.

2) Trouver une relation simple entre $f(x)$, $f(x+1)$ et $u(x)$.

3) Montrer que f admet, pour x tendant vers $+\infty$, une certaine limite λ à préciser.

4) Montrer que f est strictement décroissante. (On peut regrouper les termes deux par deux.)

5) Établir l'existence de D, nombre réel positif à préciser, tel que $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{D}{\ln(x)}$.

19 * Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre normée et ϕ un morphisme d'algèbre de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que ϕ est continu.

20 * Soit q un réel de $]-1,1[$ et u_n la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$u_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - q^k\, z\right).$$

Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge vers une limite u, qui est une fonction continue.

21 * **1)** Montrer que, pour tout a de $]0,1[$, il existe un réel $C_a > 0$ tel que :

$$\sum_1^n \frac{1}{k^{1-a}} = \frac{n^a}{a} - C_a + o(1).$$

2) Déterminer un équivalent de C_a lorsque a tend vers 0.

3) Calculer $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-a}}$ en fonction de a et de C_a.

22 (D'après ESTP, 1997)

Pour tout complexe z et tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$D_n(z) = \mathrm{e}^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

1) Établir que $D_n(z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k(n)\,\frac{z^k}{k!} + \sum_{p=n+1}^\infty \frac{z^p}{p!},$$

où $a_k(n)$ est, pour $k \geqslant 1$, un polynôme en $\dfrac{1}{n}$ de degré $k-1$, avec $a_0(n) = 0$, $a_1(n) = 0$, $a_2(n) = \dfrac{1}{n}$. Calculer $a_3(n)$.

2) Démontrer la double inégalité $0 \leqslant a_k(n) \leqslant \dfrac{k(k-1)}{2\,n}$. (On peut opérer par récurrence.)

3) Prouver l'inégalité $|D_n(z)| \leqslant \dfrac{|z|^2}{2\,n}\mathrm{e}^{|z|}$.

4) Montrer que $D_n(z)$ converge uniformément vers 0 sur tout compact K de $\mathbb{C}$.

5) On suppose x réel et n pair, $n = 2\,m$, $m \geqslant 1$. Prouver que $D_{2\,m}(x)$ possède une seule racine x_m sur $]-\infty, 0[$, telle que $x_m = \lambda\, m$, où la constante λ est racine d'une équation à préciser.

23 ** On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \sum_0^\infty \frac{n\,t^n}{1-t^n}$$

Déterminer le domaine de définition de f.

Montrer que $f(t) \sim_1 \dfrac{\pi^2}{6\,(t-1)^2}$.

24 ** f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$.

On considère l'application :

$$N_f : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P \mapsto N_f(P) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\,f(t)P(t)| \end{array}$$

On note $\|P\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

1) Montrer que N_f est une norme si, et seulement si, $f \neq 0$.

2) Montrer que, si N_f et N_g sont équivalentes, alors f et g ont les mêmes zéros.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que N_f et $\|\ \|_\infty$ soient équivalentes.

4) Montrer que, N_f et N_g sont équivalentes si, et seulement si : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$ $\quad a\,f \leqslant g \leqslant b\,f$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dérivation, intégration des fonctions vectorielles

6

Introduction

Les recherches de nombreux savants (Stevin, Képler, Galilée, Cavalieri, Pascal, Fermat, Descartes...), aux XVIe *et* XVIIe *siècles, sur les centres de gravité, les mesures de volume, la tangente, la cycloïde,... préludent à la naissance, à la fin du* XVIIe *siècle, du calcul différentiel et intégral moderne. Progressivement, le support géométrique fait place aux notions abstraites de limite et d'infiniment petit.*

En 1696, *Guillaume de l'Hospital publie le premier livre de calcul infinitésimal. Ce puissant outil est mis au point par Newton* (1643-1727) *et Leibniz* (1646-1716) *avec des langages différents, mais les notations de Leibniz s'imposent. Il permet de résoudre des problèmes qui se ramènent à des équations différentielles.*

La construction rigoureuse de cette théorie s'achève au XIXe *siècle avec la construction axiomatique des réels.*

En 1961, *le mathématicien américain Robinson* (1918-1974) *publie son «* Analyse non standard *». Il y donne un sens rigoureux à la notion d'infiniment petit, si chère à Leibniz.*

OBJECTIFS

- Dérivabilité en un point, fonction dérivable sur un intervalle.
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle.
- Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment.
- Sommes de Riemann d'une fonction continue.
- Linéarité de l'intégrale, inégalité de la moyenne.
- Relation de Chasles, invariance par translation.
- Convergence en moyenne et en moyenne quadratique d'une suite ou d'une série de fonctions continues sur un segment.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Elles sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). De telles fonctions seront dites à valeurs vectorielles (ou simplement vectorielles). Lorsque $E = \mathbb{K}$, ces fonctions seront dites à valeurs numériques (ou numériques). Nous noterons $\mathcal{F}(I, E)$ le $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de ces fonctions.

Si I n'est pas borné supérieurement, nous adopterons la notation $\sup I = +\infty$. De même, si I n'est pas borné inférieurement, $\inf I = -\infty$.

Isaac Newton (1643-1727), *physicien, mathématicien et astronome anglais.*

Dérivation

1.1. Fonctions dérivables sur un intervalle

1.1.1 Définitions

Dérivabilité en un point

Soit x_0 un point de I et f une fonction de I dans E.

f est dite **dérivable** en x_0 de I si l'application de $I\setminus\{x_0\}$ dans E, définie par :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite en x_0. Alors, la limite est appelée **dérivée** de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\mathrm{D}f(x_0)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ et elle appartient à E.

Théorème 1

Soit x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.

L'application f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe une application ε de I dans E et un vecteur V de E tels que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)V + (x - x_0)\varepsilon(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E$$

Lorsque f est dérivable, la propriété (**1**) s'écrit également :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ f'(x_0) + o(x - x_0)$$

Théorème 2

Soit x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

⚠ *La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue fournit un contre-exemple.*

Dérivées à gauche, à droite

Si x_0 est un point adhérent à I, différent de $\sup I$, on dit que f admet une dérivée à droite en x_0 si l'application de $I\setminus\{x_0\}$ dans E définie par :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

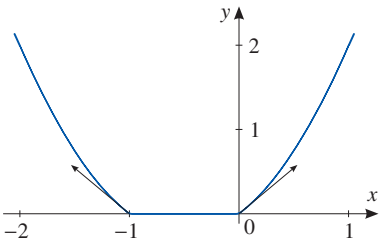
admet une limite à droite en x_0.

Rapport E3A, 2002

« ...oubliant malheureusement souvent la justification de l'existence des dérivées. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La limite est alors appelée **dérivée à droite** de f en x_0 et notée $f'_d(x_0)$ ou $\mathrm{D}f(x_0^+)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0^+)$; elle appartient à E.
On définit de même la **dérivée à gauche.**



Doc. 1. *La fonction :*
$$\left(x \mapsto \max\left\{0, x + x^2\right\}\right)$$
est dérivable à droite et à gauche en -1 *et en* 0.

Propriétés

Les propriétés suivantes s'établissent sans peine :

1) Soit x_0 un point de I. Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0.

2) Soit x_0 un point intérieur à I. Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, alors f est continue en x_0.

3) Soit x_0 un point intérieur à I. f est dérivable en x_0 si et seulement si :

- f est dérivable à droite en x_0 ;
- f est dérivable à gauche en x_0 ;
- $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Rapport Concours TPE, 1997
« Les candidats rencontrent de plus en plus de difficultés en calcul : calcul de dérivées, de primitives, décomposition en éléments simples, voire même calcul algébrique élémentaire. »

1.1.2 Interprétations géométrique et cinématique de la dérivation

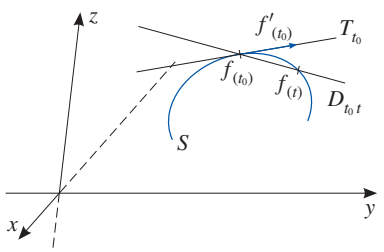
Mensa ACADEMY

Interprétation géométrique

L'étude des courbes est développée dans le chapitre 15.

Soit (I, f) un arc paramétré de E et t_0 un point intérieur à I. Supposons f dérivable et de dérivée non nulle au point t_0 de I.
La courbe admet au point $f(t_0)$ une tangente qui est la droite affine $T_{t_0} = f(t_0) + \mathbb{R}\, f'(t_0)$. Cette droite est la position limite de la sécante $D_{t_0 t}$ lorsque t tend vers t_0 (*doc.* 2).

Entraînez-vous à calculer des dérivées.



Doc. 2. *La droite affine :*
$$T_{t_0} = f(t_0) + \mathbb{R}\, f'(t_0)$$
est tangente à la courbe (I, f) *au point* $f(t_0)$ *lorsque* $f'(t_0) \neq 0_E$.

Interprétation cinématique

La cinématique du point permet de donner l'interprétation suivante à l'étude d'une courbe (I, f, S).

Le paramètre t est appelé le **temps** ; il varie dans l'intervalle I.

Le support $S = f(I)$ de la courbe est la **trajectoire** du point mobile dont on étudie le mouvement.

La fonction f est la **loi horaire du mouvement**.

La limite en t_0 de la fonction numérique $\left(t \mapsto \left\|\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right\|\right)$, lorsqu'elle existe, est la **vitesse instantanée** du point mobile à l'instant t_0.

La limite en t_0 de la fonction vectorielle $\left(t \mapsto \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right)$, lorsqu'elle existe, est le vecteur dérivé $f'(t_0)$. Il est appelé **vecteur vitesse** du point mobile à l'instant t_0.

Rapport Mines-Ponts, 2001
« Confusion entre continuité et dérivabilité. »

Rapport Centrale, 2000
« Ce n'est pas parce qu'on a pu calculer la dérivée d'une fonction que celle-ci est dérivable, mais parce que la fonction est dérivable qu'on peut calculer sa dérivée. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On remarque que si f est dérivable en t_0, alors la vitesse instantanée du point mobile en t_0 est la norme du vecteur vitesse en ce point.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.1.3 Fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I est dite dérivable sur I.

Lorsque f est dérivable sur I, on peut définir la **fonction dérivée** de f :

$$\mathrm{D}f = f' : \begin{cases} I & \to & E \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

L'**égalité** des accroissements finis n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles. Nous verrons l'**inégalité** des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles. Dans l'application qui suit, nous démontrons cette inégalité dans le cas particulier d'une fonction à valeurs dans un espace euclidien.

Application 1

Inégalité des accroissements finis dans un espace euclidien

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace euclidien, $\|\ \|$ la norme associée à $\langle\,|\,\rangle$ et $[a,b]$ un segment d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Montrer que si f est une application de $[a,b]$ dans E, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors :

$$\exists\, c \in]a,b[\quad \|f(a) - f(b)\| \leqslant (b-a)\|f'(c)\|$$

Définissons l'application Φ :

$$\Phi : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle f(b) - f(a) \mid f(t)\rangle \end{cases}$$

Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\exists\, c \in]a,b[\quad |\Phi(b) - \Phi(a)| = (b-a)|\Phi'(c)|$$

Par définition de Φ, nous obtenons :

$$\exists\, c \in]a,b[\quad \langle f(b) - f(a) \mid f(b) - f(a)\rangle = (b-a)\,|\langle f(b) - f(a) \mid f'(c)\rangle|$$

Et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\exists\, c \in]a,b[\quad \|f(b) - f(a)\|^2 \leqslant (b-a)\,\|f(b) - f(a)\|\,\|f'(c)\|$$

L'inégalité recherchée en découle.

1.2. Opérations sur les fonctions dérivables

1.2.1 Linéarité de la dérivation

Théorème 3

Soit f et g deux applications de I dans E, dérivables sur l'intervalle I, et α et β deux scalaires.

L'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et, de plus :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Rapport E3A, 2002

« Une minorité invoque la linéarité de la dérivation. »

1.2.2 L'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, E)$

Les fonctions f dérivables sur I dont la dérivée f' est continue sur I sont dites **continûment dérivables** ou de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^1(I, E)$.

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 4

- $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, E)$.
- L'application $D : \mathcal{C}^1(I, E) \to \mathcal{C}^0(I, E), \quad f \mapsto D(f) = f'$ est linéaire.

Rappelons que $\mathcal{C}(I, E)$ ou $\mathcal{C}^0(I, E)$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

1.2.3 Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable

Théorème 5

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, f une application de I dans E et x_0 un point de I.

- Si f est dérivable en x_0, alors l'application $u \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(u \circ f)'(x_0) = u\big(f'(x_0)\big)$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $u \circ f$ l'est aussi et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Démonstration

Si f est dérivable en x_0, il existe une application ε de I dans E telle que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + (x - x_0)\, \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E$$

Par conséquent :

$$\forall x \in I \quad u \circ f(x) = u \circ f(x_0) + (x - x_0)\, u\big(f'(x_0)\big) + (x - x_0) u\big(\varepsilon(x)\big)$$

De plus, toute application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue, donc $\lim\limits_{x \to x_0} u\big(\varepsilon(x)\big) = 0_F$.

1.2.4 Dérivation composante par composante

Dans ce paragraphe, on note $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de E.

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on considère l'application **i^e coordonnée dans la base B** (on dit aussi **i^e composante**), notée e_i^* :

$$e_i^* : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K} \\ v = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j\, e_j & \mapsto & e_i^*(v) = \alpha_i \end{cases}$$

On constate que e_i^* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Pour toute application f de I dans E et tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $f_i = e_i^* \circ f$. L'application f peut s'écrire :

$$f : \begin{cases} I & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les applications f_i, de I dans $\mathbb{K}$, sont appelées les **applications coordonnées** ou **applications composantes** de f relatives à la base B.

Théorème 6

Soit $B = (e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une base de l'espace vectoriel E, x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.

- f est dérivable en x_0 si et seulement si les applications coordonnées de f relatives à la base B sont dérivables en x_0. Alors :

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(x_0)\, e_i$$

- Lorsque f est dérivable sur I, les applications coordonnées de f' sont les dérivées des applications coordonnées de f :

$$\forall\, x \in I \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(x)\, e_i$$

- f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E si et seulement si chaque application coordonnée de f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 6.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f une application continue de I dans E, dérivable sur l'intervalle $]\inf I, \sup I[$.

Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout x de cet intervalle $f'(x) = 0_E$.

Le théorème des accroissements finis appliqué à chaque application coordonnée de f permet de prouver ce corollaire.

Le cas des fonctions à valeurs complexes :

Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les fonctions $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\overline{f}$ sont définies sur I par :
$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}\big(f(x)\big)$; $\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}\big(f(x)\big)$; $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.

La famille $(1, \mathrm{i})$ est une base de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont les applications coordonnées de f dans cette base.

Corollaire 6.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est dérivable sur I.
- $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables sur I.
- $\overline{f}$ est dérivable sur I.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on a :

$$\mathrm{D}f = \mathrm{D}(\operatorname{Re} f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\operatorname{Im} f), \qquad \mathrm{D}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathrm{D}f} = \mathrm{D}(\operatorname{Re} f) - \mathrm{i}\mathrm{D}(\operatorname{Im} f)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 6.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- $\text{Re}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- $\overline{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.2.5 Composée d'une application bilinéaire et de deux applications dérivables

Théorème 7

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans E, g une application de I dans F et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

On définit l'application $B(f,g)$ de I dans G en posant :

$$B(f,g) : \begin{cases} I & \to & G \\ x & \mapsto & B(f,g)(x) = B(f(x), g(x)) \end{cases}$$

- Si f et g sont dérivables au point x_0 de I, alors l'application $B(f,g)$ est dérivable en x_0 et :

$$B(f,g)'(x_0) = B\big(f'(x_0), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), g'(x_0)\big)$$

- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$$

Démonstration

- La dérivabilité de f et de g en x_0 se traduit par l'existence des applications ε_1 et ε_2, définies sur I, à valeurs dans E et F respectivement et telles que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0_E$$
$$\forall x \in I \quad g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0_F$$

On en déduit, pour tout x de I :

$$B(f,g)(x) = B\big(f(x_0), g(x_0)\big) + (x - x_0)\Big[B\big(f'(x_0), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), g'(x_0)\big)\Big] + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Avec :

$$\varepsilon(x) = (x - x_0)B\big(f'(x_0), g'(x_0)\big) + B\big(\varepsilon_1(x), g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_2(x)\big) + B\big(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)\big)$$

Or, toute application bilinéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue. De plus :

$$B\big(0_E, g(x_0)\big) = B\big(f(x_0), 0_F\big) = 0_G.$$

On en déduit que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_G$. Le théorème en découle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.3. Exemples

■ Soit $f_1, \dots, f_n$ n applications de I dans $\mathbb{K}$, dérivables sur I et g l'application produit :

$$g : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & g(x) = f_1(x)\, f_2(x) \dots f_n(x) \end{cases}$$

On montre par récurrence que l'application g est dérivable sur I et que :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x) \dots f_{k-1}(x)\, f_k'(x)\, f_{k+1}(x) \dots f_n(x)$$

■ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f une application dérivable de I dans E et φ une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. Alors, l'application :

$$\varphi f : \begin{cases} I & \to & E \\ x & \mapsto & (\varphi f)(x) = \varphi(x)\, f(x) \end{cases}$$

est dérivable sur I et $(\varphi\ f)' = \varphi'\ f + \varphi\ f'$.

Il suffit, pour prouver ceci, de considérer l'application bilinéaire :

$$B : \mathbb{K} \times E \to E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda\ x.$$

■ Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie, f et g deux applications dérivables de I dans E.

Définissons l'application $\langle f \mid g \rangle$ en posant :

$$\langle f \mid g \rangle : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle f | g \rangle(x) = \langle f(x) | g(x) \rangle \end{cases}$$

Le produit scalaire étant une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, l'application $\langle f \mid g \rangle$ est dérivable sur I et $\langle f \mid g \rangle' = \langle f' \mid g \rangle + \langle f \mid g' \rangle$.

En particulier, l'application :

$$\langle f \mid f \rangle : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle f \mid f \rangle(x) = \langle f(x) \mid f(x) \rangle = \| f(x) \|^2 \end{cases}$$

est dérivable sur I et de dérivée $\langle f \mid f \rangle' = 2 \langle f \mid f' \rangle$.

On sait que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Supposons que la fonction f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\langle f \mid f \rangle$ est strictement positive. Le théorème de dérivation des fonctions composées vous permettra de prouver que la fonction $\| f \|$ est dérivable sur I et que $\| f \|' = \dfrac{\langle f \mid f' \rangle}{\| f \|}$.

■ De l'exemple précédent, on déduit le résultat géométrique suivant :

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, f dans $\mathcal{C}^1(I, E)$ et $R > 0$.

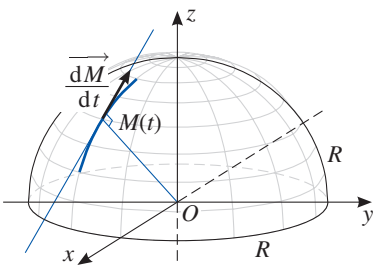
On note $\| \ \|$ la norme sur E associée à $\langle\ |\ \rangle$ et on suppose que :

$$\forall t \in I \quad \| f(t) \| = R$$

L'application $(t \mapsto \langle f(t) \mid f(t) \rangle)$ est constante sur I, donc sa dérivée est nulle :

$$\forall t \in I \quad \langle f(t) \mid f'(t) \rangle = 0$$

On vient de prouver que, si la courbe (I, f, S) de l'espace euclidien E a son support S tracé sur la sphère de centre 0_E et de rayon R, alors, pour tout point t de I, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux (*doc.* 3).



Doc. 3. *Mouvement d'un point mobile sur une sphère.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Dans cet exemple, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté et $\wedge$ désigne le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

Soit f et g deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}^3$. On définit $f \wedge g$ en posant :

$$f \wedge g : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) \end{cases}$$

Le produit vectoriel étant une application bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, l'application $f \wedge g$ est dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$

Notons $f(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Choisissons une autre origine A :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}(t)$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est constant, donc :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}(t)$$

Le vecteur vitesse du point mobile M sur sa trajectoire ne dépend pas de l'origine utilisée pour effectuer les calculs. C'est pourquoi on le note souvent $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t)$.

Application 2

Les tangentes à l'hyperbole et à l'ellipse

1) *Soit* (E) *une ellipse de foyers* F *et* F'. *Prouver que la tangente en tout point* M *de l'ellipse* (E) *est la bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{FMF'}$.

2) *Soit* (H) *une hyperbole de foyers* F *et* F'. *Prouver que la tangente en tout point* M *de l'hyperbole* (H) *est la bissectrice intérieure de l'angle* $\widehat{FMF'}$.

Les coniques étudiées sont tracées dans un plan euclidien $(E, \langle | \rangle)$. On note $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire.

1) On a vu en première année que :

• il existe un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que l'équation de l'ellipse (E) dans ce repère soit de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > b > 0$. En notant $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, les foyers F et F' de (E) sont les points de coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ dans le repère R ;

• l'ellipse (E) admet un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ (par exemple, poser $I = [0, 2\pi]$ et $M(t) = O + a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j}$, le couple (I, M) est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ellipse).

• Avec les notations précédentes, on sait que :

$$M \in (\mathsf{E}) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{FM}\| + \|\overrightarrow{F'M}\| = 2a$$

Donc :

$$\forall t \in I \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\overrightarrow{FM}(t)\| + \|\overrightarrow{F'M}(t)\|\right) = 0$$

D'après les exemples précédents,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\overrightarrow{FM}(t)\| + \|\overrightarrow{F'M}(t)\|\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}(t) \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) \right\rangle}{\|\overrightarrow{FM}(t)\|} + \frac{\left\langle \overrightarrow{F'M}(t) \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) \right\rangle}{\|\overrightarrow{F'M}(t)\|}$$

Notons :

$$\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{FM}(t)}{\|\overrightarrow{FM}(t)\|} \quad \text{et} \quad \vec{u'}(t) = \frac{\overrightarrow{F'M}(t)}{\|\overrightarrow{F'M}(t)\|}$$

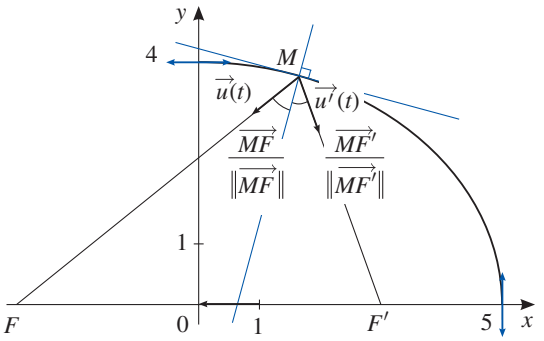
La linéarité du produit scalaire permet de conclure que :

$$\forall t \in I \quad \langle \vec{u}(t) + \vec{u'}(t) \mid \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) \rangle = 0$$

Or les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{u'}(t)$ sont des vecteurs unitaires, on en déduit que $\vec{u}(t) + \vec{u'}(t)$ est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de $\widehat{FMF'}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Puisque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ lui est orthogonal, on peut conclure que la tangente en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.



Doc. 4. *La tangente au point M de l'ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.*

2) Pour une hyperbole (H), on sait que :

- il existe un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que l'équation de l'hyperbole (H) dans ce repère soit de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > 0$ et $b > 0$. En notant $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, les foyers F et F' de (H) sont les points de coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ dans le repère R ;

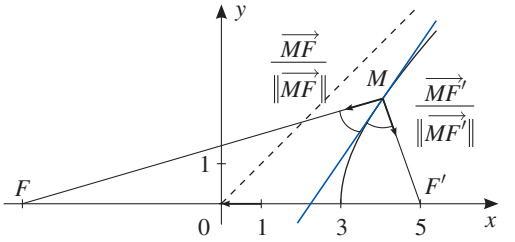
- chaque branche de l'hyperbole (H) admet un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$;

Notons (I, M) un tel paramétrage.

Avec les notations précédentes :

$$M \in (\mathsf{H}) \Leftrightarrow \left|\|\overrightarrow{FM}\| - \|\overrightarrow{F'M}\|\right| = 2a$$

Le signe de $\|\overrightarrow{FM}\| - \|\overrightarrow{F'M}\|$ détermine sur quelle branche de l'hyperbole se trouve le point M.



Doc. 5. *La tangente au point M de l'hyperbole de foyers F et F' est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.*

On a donc :

$$\forall t \in I \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\overrightarrow{FM}(t)\| - \|\overrightarrow{F'M}(t)\|) = 0$$

En utilisant les mêmes notations qu'au **1**, on trouve :

$$\forall t \in I \quad \left\langle \vec{u}(t) - \vec{u'}(t) \mid \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) \right\rangle = 0$$

Or $\vec{u}(t) - \vec{u'}(t)$ est un vecteur directeur de la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$. Puisque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ lui est orthogonal, on peut conclure que la tangente en M à l'hyperbole est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

1.4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1.4.1 Définitions

Soit k un entier naturel, une application f de I dans E est dite :

- de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si elle est continue sur I ;
- de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout entier k.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, à valeurs dans E. Il est clair que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}^\infty(I, E) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, l'application dérivée de l'application f' est notée f'', $f^{(2)}$, $\mathrm{D}^2 f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Elle est appelée **dérivée seconde** de f.

Rapport CCP, 2001

« Le fait que ρ est de classe $\mathcal{C}^2$ n'a été établi que par un petit nombre... »

Rapport Concours Mines-Ponts, 1997

« Une proportion relativement importante de candidats (plus de 20 %) trouve le moyen de se tromper dès le début dans le calcul de la dérivée seconde de $\dfrac{1}{\sin 2x}$. C'est difficilement excusable à bac + 2 ! »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit k dans $\mathbb{N}^*$ et f dans $\mathcal{C}^k(I,E)$. La dérivée k^{e} de f est l'application notée $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Elle est définie par récurrence par la formule suivante :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

► *Pour s'entraîner : ex. 3, 4 et 5.*

1.4.2 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, sauf spécification contraire, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Théorème 8

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si k est un entier, l'application « dérivée k^{e} », définie par :

$$\mathrm{D}^k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^k(I,E) & \to & \mathcal{C}^0(I,E) \\ f & \mapsto & \mathrm{D}^k(f) = f^{(k)} \end{array} \right.$$

est linéaire.

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de E, k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et f une application de I dans E dont les applications coordonnées relativement à la base B sont notées $f_1, \ldots, f_p$.

Alors :

$$f \in \mathcal{C}^k(I,E) \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1,p]\!] \quad f_i \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$$

De plus, si k est un entier et si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors :

$$\forall\, x \in I \quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(k)}(x)\, e_i$$

On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K}) = \mathcal{C}^k(I)$

Théorème 10. Formule de Leibniz

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. la fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$$\forall\, p \in [\![1,k]\!] \quad (fg)^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} f^{(j)} g^{(p-j)}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

1.4.3 Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 11

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans I et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E, alors l'application $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), *mathématicien et philosophe allemand. Il étudie d'abord la philosophie, le droit et la théologie. Agé de 26 ans, lors d'une mission diplomatique à Paris, il rencontre Huygens qui l'incite à approfondir sa connaissance des mathématiques et de la physique. Nous lui devons les notations modernes du calcul différentiel et intégral :* $\dfrac{dy}{dx}$, $\int \ldots$ *Ses très nombreux écrits témoignent d'un esprit universel.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque : Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors la fonction $(x \mapsto \ln|u(x)|)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, de plus :

$$\forall x \in I \quad \frac{\mathrm{d}\ln|u(x)|}{\mathrm{d}x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

C'est le seul cas où il est possible de dériver directement une fonction contenant une valeur absolue sans distinguer les différents cas suivant le signe de u, ni utiliser la fonction signe.

Application 3

Utilisation de la formule de Leibniz

Soit $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$, x *réel* > 1.

1) *Établir que :*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-1/2}},$$

où P_n *est une fonction polynomiale.*

2) *Préciser le mônome de plus haut degré de* $P_n(x)$. *[Distinguer les cas* $n = 0$, $n = 1$ *et* $n \geqslant 2$.*]*

3) *Établir que :*

$$P_{n+1}(x) + A_n(x)$$
$$P_n(x) + B_n(x)\, P_{n-1}(x) = 0,$$

où $A_n(x)$ *et* $B_n(x)$ *sont des polynômes à préciser. (Prouver que* $(x^2-1)\, f'(x) = x\, f(x)$ *et lui appliquer la formule de Leibniz* $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{u(x)\, v(x)\} = \ldots$*)*

4) *Démontrer que :*

$$P_n'(x) = -n\,(n-2)\, P_{n-1}(x)$$

pour tout $n \geqslant 1$. *Calculer* $P_n(1)$.

5) *De tout ce qui précède, déduire que* $(-1)^{n-1}\, f^{(n)}(x) > 0$ *si* $n \geqslant 2$.

1) $P_0(x) = 1$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 0$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-1/2}}$$

avec P_n fonction polynôme.

Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(x^2-1)\, P_n'(x) - (2n-1)\, x\, P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1/2}}.$$

Posons :

$$P_{n+1}(x) = (x^2-1)\, P_n'(x) - (2n-1)\, x\, P_n(x) \quad \textbf{(1)}$$

C'est une fonction polynôme et :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2-1)^{(n+1)-1/2}}.$$

2) $P_0(x) = 1$, son monôme de plus haut degré est 1.

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Donc $P_1(x) = x$, son monôme de plus haut degré est x.

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}$. Donc $P_2(x) = -1$, son monôme de plus haut degré est -1.

L'égalité **(1)** vous permettra de prouver que, pour $n \geqslant 2$, le monôme de plus haut degré de $P_n(x)$ est $\dfrac{(-1)^{n-1}\, n!}{2}\, x^{n-2}$.

3) De l'égalité $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, on déduit :

$$(x^2-1)\, f'(x) = x\, f(x) \quad \textbf{(2)}$$

Sachant que, pour $k \geqslant 2$, $(x^2-1)^{(k)} = 0$, la formule de Leibniz permet d'écrire, pour $n \geqslant 2$:

$$[(x^2-1)\, f'(x)]^{(n)} = (x^2-1)\, f^{(n+1)}(x) + n\,(2x)\, f^{(n)}(x) + n\,(n-1)\, f^{(n-1)}(x).$$

De même :

$$[x\, f(x)]^{(n)} = x\, f^{(n)}(x) + n\, f^{(n-1)}(x).$$

Donc, d'après **(2)** :

$$(x^2-1)\, f^{(n+1)}(x) + (2n-1)\, x\, f^{(n)}(x) + (n^2-2n)\, f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Par définition des polynômes P_n, on trouve :

$$P_{n+1}(x) + (2n-1)\, x\, P_n(x) + (n^2-2n)(x^2-1)\, P_{n-1}(x) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Pour $n \geqslant 2$: $A_n(x) = (2n-1)\, x$ et $B_n(x) = (n^2-2n)(x^2-1)$.

Vous vérifierez que la formule reste valable pour $n = 1$.

4) De **(1)** et **(3)**, nous déduisons :

$$(x^2-1)\, P_n'(x) + (n^2-2n)(x^2-1)\, P_{n-1}(x) = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'où la formule :

$$P_n'(x) = -n\,(n-2)\,P_{n-1}(x) \quad \text{pour tout } n \geqslant 1 \tag{4}$$

De **(3)**, on déduit : $P_{n+1}(1) + (2n-1)\,P_n(1) = 0$.

Sachant que $P_1(1) = 1$, on en déduit par récurrence que :

$$P_{n+1}(1) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (2i-1)$$

et :

$$P_n(1) = (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\,(n-1)!}$$

5) Le signe de $(-1)^{n-1}\,f^{(n)}(x)$ sur $]1,+\infty[$ est celui de $(-1)^{n-1}\,P_n(x)$.

Pour $n = 2$, $(-1)^{n-1}\,P_n(x) = 1 > 0$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, on ait :

$$(-1)^{n-1}\,P_n(x) > 0$$

pour tout $x \geqslant 1$.

On sait que $(-1)^n\,P_{n+1}(1) > 0$ et, d'après **(4)** :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^n\,P_{n+1}(x)\right] = (-1)^{n-1}\,(n+1)\,(n-1)\,P_n(x) > 0$$

Donc la fonction $(x \mapsto (-1)^n\,P_{n+1}(x))$ est strictement positive sur $[1,+\infty[$.

On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, $(-1)^{n-1}\,f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

1.4.4 $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes

Dans ce paragraphe, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides et k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Une application φ de J dans I est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de l'intervalle J sur l'intervalle I si :

- φ est bijective ;
- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;
- φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Exemples :

■ La fonction $(x \mapsto \ln x)$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

■ La fonction $(x \mapsto x^3)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, sa restriction de l'application $(x \mapsto x^3)$ à $\mathbb{R}^{+*}$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

■ Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

• La fonction $(t \mapsto a + t\,(b-a))$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0,1]$ sur $[a,b]$.

• La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\right)$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[-1,1]$ sur $[a,b]$.

Théorème 12

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, k un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et φ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}$. L'application φ induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J sur l'intervalle $\varphi(J)$ si et seulement si : $\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$.

Démonstration

• Supposons que φ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J sur $\varphi(J)$.

Alors φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus, $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_J$. Dérivons cette expression.

$$\forall t \in J \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = (\varphi^{-1})'\,(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = 1.$$

Donc $\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$

• Supposons que $\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$.

Rapport Ensam, 2002

« Peu de candidats savent ce qu'est un difféomorphisme et ceux qui s'en souviennent, tout en ignorant le théorème qui s'y rapporte... »

Rapport Centrale, 2001

« Les définitions de base ne sont pas connues : ... $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

φ' est une application continue de J dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle J. Elle est donc de signe constant et la fonction φ est strictement monotone, donc injective sur J. On a prouvé que φ induit une bijection de J sur $\varphi(J)$.

φ est continue, strictement monotone, donc φ^{-1} est continue.

Soit t_0 un point de $\varphi(J)$ et t dans $\varphi(J) \setminus \{t_0\}$. Alors (en posant $\varphi(x) = t$ et $\varphi(x_0) = t_0$) :

$$\frac{\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(t_0)}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}.$$

$\dfrac{\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(t_0)}{t - t_0}$ admet la limite $\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$ car $\varphi'(x_0)$ n'est pas nul. L'application φ^{-1} est donc dérivable en t_0. De plus : $(\varphi^{-1})' = \dfrac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$ est continue sur $\varphi(J)$.

- Si $k > 1$, vous montrerez par récurrence que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\varphi(J)$.

Application 4

Étude d'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

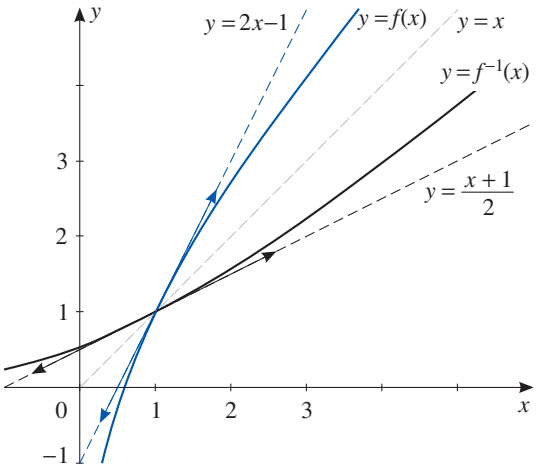
1) *Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.*

2) *Donner un développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 1.*

3) *Donner un développement asymptotique à deux termes de $f^{-1}(x)$ en $+\infty$.*

1) Vous montrerez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$.

f est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.



Doc. 6. *Les graphes de f et f^{-1}.*

2) Première méthode

L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor-Young nous en donne un développement limité à tout ordre au voisinage de 1. À l'ordre 3, il s'écrit :

$$f^{-1}(1+h) = f^{-1}(1) + h\left(f^{-1}\right)'(1) + \frac{h^2}{2}\left(f^{-1}\right)''(1) + \frac{h^3}{6}\left(f^{-1}\right)^{(3)}(1) + o\left(h^3\right)$$

De plus :

$$f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow a + \ln a = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Déterminons les dérivées successives de f^{-1} en 1 :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \text{et} \quad f'(y) = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f^{-1}\right)''(x) = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^3}$$

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = \frac{1}{8}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f^{-1}\right)^{(3)}(x) = -\left(f^{(3)}\left(f^{-1}(x)\right) \times \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^4} + f''\left(f^{-1}(x)\right) \times (-3) \times \frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^5}\right)$$

$\left(f^{-1}\right)^{(3)}(1) = -\dfrac{1}{32}$.

Et nous obtenons :

$$f^{-1}(1+h) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16} - \frac{h^3}{192} + o\left(h^3\right).$$

Seconde méthode :

Puisque $f^{-1}(1) = 1$, le développement limité de f en 1 va nous permettre de trouver celui de f^{-1}.

- Posons $x = 1 + h$.

$$f(1+h) = (1+h) + \ln(1+h) = 1 + 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right).$$

Donc :

$$f^{-1}\left(f(1+h)\right) = 1 + h = f^{-1}\left(1 + 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)\right) \quad \textbf{(1)}$$

- Notons $u = 2h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)$. Lorsque h tend vers 0, u tend aussi vers 0.

$$f^{-1}(1+u) = 1 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + o\left(u^3\right) \quad \textbf{(2)}$$

Calculons les puissances de u :

$$\begin{aligned} u &= 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right) \\ u^2 &= 4h^2 - 2h^3 + o\left(h^3\right) \\ u^3 &= 8h^3 + o\left(h^3\right) \end{aligned}$$

On déduit alors de **(1)** et **(2)** que :

$$1 + h = 1 + 2a_1 h + \left(-\frac{a_1}{2} + 4a_2\right) h^2 + \left(\frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3\right) h^3 + o\left(h^3\right).$$

L'unicité du développement limité d'une fonction en un point permet de calculer :

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad a_3 = -\frac{1}{192}.$$

$$f^{-1}(1+u) = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{16} - \frac{u^3}{192} + o\left(u^3\right)$$

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, $f^{-1}(x)$ tend vers $+\infty$.

De plus, $x = f^{-1}(x) + \ln\left(f^{-1}(x)\right)$.

Donc : $f^{-1}(x) \sim x$.

Soit $f^{-1}(x) = x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

En reportant : $x = x + x\,\varepsilon(x) + \ln\left(x + x\,\varepsilon(x)\right)$.

Puis : $\ln x + \ln\left(1 + \varepsilon(x)\right) = -x\,\varepsilon(x)$, d'où :

$$x\,\varepsilon(x) = -\ln x + o(1)$$

Finalement, $f^{-1}(x) = x - \ln x + o(1)$.

Donc, le graphe de la fonction $(x \mapsto x - \ln x)$ est asymptote à celui de f^{-1}.

Expérimentalement, le tableau suivant indique que le graphe de f^{-1} est au-dessus de celui de $(x \mapsto x - \ln x)$ pour les valeurs calculées.

t	10	10^2	10^3	10^4
$x = f(t)$	12,3	104,6	1 006,9	10 009,2
$y_1 = f^{-1}(x)$	10	100	1 000	10 000
$y_2 = x - \ln x$	9,79	99,95	999,99	9 999,999

1.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Dans ce paragraphe, k est un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Une application f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans E est dite **de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux** sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision

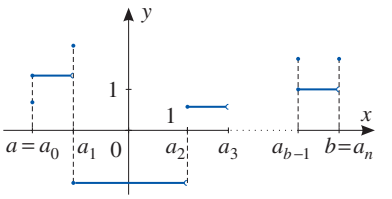
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Une telle subdivision est dite subordonnée à f.

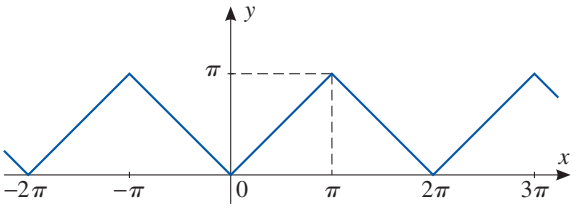
Exemples :

■ Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[a,b]$ (*doc.* 7).



Doc. 7. *Une fonction en escalier est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.*

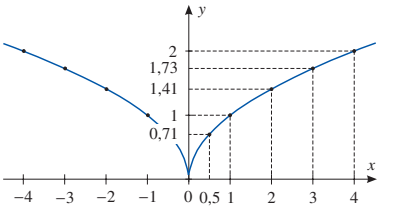
■ La fonction $\text{Arccos} \circ \cos$ est continue, paire et 2π-périodique. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ (*doc.* 8).



Doc. 8. *La fonction* $\text{Arccos} \circ \cos$.

■ La fonction $(x \mapsto \sqrt{|x|})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-1,1]$ (*doc.* 9).



Doc. 9. *La fonction* $\left(x \mapsto \sqrt{|x|}\right)$.

En pratique, pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$, il suffit de trouver une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a_{i-1}, a_i[$;
- f admet une limite à droite en a_{i-1} ;
- f admet une limite à gauche en a_i ;
- l'application f_i, définie sur $[a_{i-1}, a_i]$ par :

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to a_{i-1}^+} f(t) & \text{si} \quad x = a_{i-1} \\ f(x) & \text{si} \quad x \in]a_{i-1}, a_i[\\ \lim\limits_{t \to a_i^-} f(t) & \text{si} \quad x = a_i \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$, noté $\mathcal{CM}^k(I,E)$.

Exemples :

■ La fonction valeur absolue est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

■ Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application $\left(x \mapsto |x|^{2n+1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $\mathbb{R}$ et aussi de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ par morceaux.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit k dans $\mathbb{N}^*$ et f dans $\mathcal{F}(I, E)$. On remarque que, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I, alors les dérivées successives de f :

$$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$$

sont définies en tout point x de I sauf sur un ensemble P. L'ensemble P a la particularité suivante : tout segment $[a, b]$ inclus dans I ne contient qu'un nombre fini de points de P.

Dans ce cas, pour $j \in [\![1, k]\!]$, on note $\mathrm{D}^j f$ ou $f^{(j)}$ la fonction de $I \setminus P$ dans E définie par $\left(x \mapsto f^{(j)}(x)\right)$.

Théorème 13

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans E. Si f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur cet intervalle, alors f est constante sur I si et seulement si $\mathrm{D}f = 0$.

On retrouve la caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'ensemble des points intérieurs à I (*cf. corollaire* 6.1).

2 Intégration sur un segment

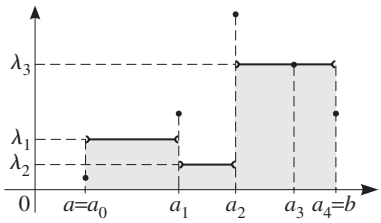
2.1. Intégrale d'une fonction en escalier

2.1.1 Définitions

Soit $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans E, φ un élément de $\mathcal{E}([a, b], E)$. Notons $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision de $J = [a, b]$ subordonnée à φ et λ_i la valeur prise par φ sur $]a_{i-1}, a_i[$. Le vecteur de E :

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, \lambda_i$$

est indépendant de la subdivision subordonnée à φ utilisée pour le calculer.



Doc. 10. *Ici, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :*

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, \lambda_i$$

représente l'aire de la portion colorée.

Le vecteur $I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, \lambda_i$ est appelé intégrale de la fonction φ sur le segment $[a, b]$. Nous le noterons $\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\int_J \varphi$.

- L'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par φ aux points de la subdivision.
- Si φ est une fonction constante sur J, de valeur λ :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_J \varphi = (b - a)\, \lambda$$

- Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles positives, on retrouve l'interprétation classique en terme d'aire. C'est d'ailleurs l'origine historique de la notion d'intégrale (*doc.* 11).

2.1.2 Propriétés

Théorème 14

Soit J un segment de $\mathbb{R}$. L'application de $\mathcal{E}(J, E)$ dans E, qui à φ associe $\int_J \varphi$, est linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \ \ \forall\, (\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}(J, E))^2$$

$$\int_J (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_J \varphi + \beta \int_J \psi$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 15

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $J = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ une application en escalier de J dans E et u une application linéaire de E dans F. Alors :

- $u \circ \varphi \in \mathcal{E}(J,F)$;
- $\displaystyle\int_J u \circ \varphi = u\left(\int_J \varphi\right)$.

Théorème 16

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et φ un élément de $\mathcal{E}(J,E)$. Si $\|\ \|$ est une norme sur l'espace vectoriel E, alors :

- $\|\varphi\| \in \mathcal{E}(J,\mathbb{R})$
- $\displaystyle\left\|\int_J \varphi\right\| \leqslant \int_J \|\varphi\|$.

Démonstration

Soit $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de J subordonnée à φ. Sur chaque intervalle $]a_{i-1},a_i[$, la fonction φ est constante, donc la fonction $\|\varphi\|$ l'est aussi.

Notons λ_i la valeur prise par φ sur $]a_{i-1},a_i[$. On a :

$$\left\|\int_J \varphi\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\,\lambda_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\,\|\lambda_i\| = \int_J \|\varphi\|$$

Corollaire 16.1

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ un élément de $\mathcal{E}([a,b],E)$, $\|\ \|$ une norme sur l'espace vectoriel E et M un réel $\geqslant 0$ tel que :

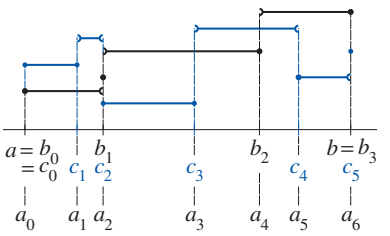
$$\forall x \in [a,b] \quad \|\varphi(x)\| \leqslant M.$$

Alors :

$$\left\|\int_{[a,b]} \varphi\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi\| \leqslant M(b-a)$$

En particulier, si $\|\varphi\|_\infty = \sup\{\|\varphi(x)\|\ ;\ x \in [a,b]\}$, alors :

$$\left\|\int_{[a,b]} \varphi\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty (b-a)$$



Doc. 11. *Construction d'une subdivision subordonnée simultanément à deux fonctions en escalier.*

2.2. Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment

2.2.1 Définition de l'intégrale

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Toute fonction vectorielle continue par morceaux, f, de $[a,b]$ dans un espace vectoriel de dimension finie E peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Ce résultat a été vu dans le chapitre 5.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cette propriété va nous permettre de définir l'**intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment**.

Théorème 17

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

■ Si (φ_n) est une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite de vecteurs $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ converge dans E.

■ Si (φ_n) et (ψ_n) sont deux suites de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui convergent uniformément vers f sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

Démonstration

Pour toute application f de $\mathcal{CM}([a,b],E)$, posons :

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|_E \mid t \in [a,b]\}.$$

Dans la suite de la démonstration, on fixe un élément f de $\mathcal{CM}([a,b],E)$.

• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. C'est une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{CM}([a,b],E), \|\ \|_\infty)$ et :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N) \Rightarrow \left(\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\|_\infty \leqslant \varepsilon\right)$$

Les fonctions φ_{n+p} et φ_n sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$;

$$\left\|\int_{[a,b]} \varphi_{n+p} - \int_{[a,b]} \varphi_n\right\|_E = \left\|\int_{[a,b]} (\varphi_{n+p} - \varphi_n)\right\|_E \leqslant \|\varphi_{n+p} - \varphi_n\|_\infty (b-a).$$

On en déduit que la suite de vecteurs $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ est une suite de Cauchy de E ; elle converge donc dans E.

• Notons (φ_n) et (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f. Alors la suite $(\varphi_n - \psi_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers 0.

Les suites $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ et $\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)$ convergent dans E. Notons :

$$L(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \quad \text{et} \quad L(\psi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \left\|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right\|_E \leqslant \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty (b-a).$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que : $L(\varphi) = L(\psi)$

Le *théorème* 17 permet de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. L'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ est la limite de la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$. On la note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\int_{[a,b]} f$ est un vecteur de E. Par définition :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]}\varphi_n\right)=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.2.2 Sommes de Riemann

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application continue de J dans E.

On appelle **somme de Riemann** de f, associée à la subdivision $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de J, tout élément de E de la forme :

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i-a_{i-1}),$$

où, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, le réel t_i est un élément de $[a_{i-1},a_i]$.

Notons alors φ la fonction en escalier de J dans E définie par :

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(t_i) & \text{si} \quad x\in[a_{i-1},a_i[\\ f(a_n) & \text{si} \quad x=a_n=\sup J. \end{cases}$$

La somme de Riemann S est égale à l'intégrale sur le segment J de la fonction en escalier φ :

$$\int_J \varphi=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i-a_{i-1})=S.$$

Notons $J=[a,b]$ et, pour tout entier $n>0$,

$$P_n=(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}=\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}.$$

P_n est une subdivision de $[a,b]$ appelée **subdivision régulière en n parties** de $[a,b]$.

Corollaire 17.1

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E. Pour chaque entier $n>0$, considérons une somme de Riemann de f associée à la subdivision P_n de $[a,b]$:

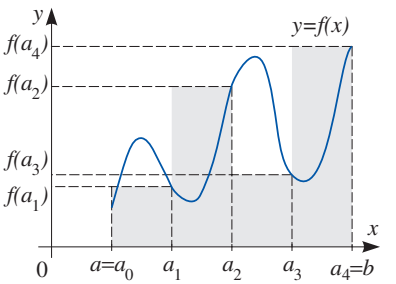
$$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i),\ \text{où}\ t_i\in\left[a+(i-1)\frac{b-a}{n},\ a+i\frac{b-a}{n}\right]$$

Alors la suite (A_n) converge vers $\int_{[a,b]} f$.

Lorsque f est elle-même une fonction en escalier, on peut choisir $\varphi_n=f$ pour tout n. On obtient l'intégrale telle qu'elle avait été définie dans le paragraphe précédent.
L'intégrale qui vient d'être définie pour les fonctions continues par morceaux sur un segment est bien une généralisation de l'intégrale des fonctions en escalier.

Rapport CCP, 1997

« En ce qui concerne l'intégration, plusieurs candidats ont affirmé n'avoir jamais entendu parler de sommes de Riemann ».

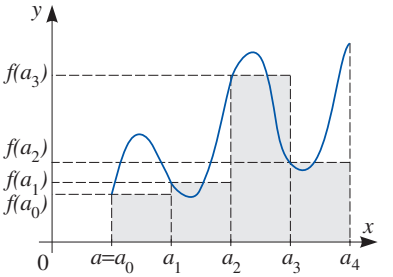


Doc. 12. *Sur ce schéma,*

$$n=4, a_i=a+i\frac{b-a}{n}$$

et l'aire grisée représente

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\frac{b-a}{n}.$$



Doc. 13. *Sur ce schéma,*

$$n=4, a_i=a+i\frac{b-a}{n}$$

et l'aire grisée représente

$$T_n=\sum^{n-1} f(a_i)\frac{b-a}{\quad}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

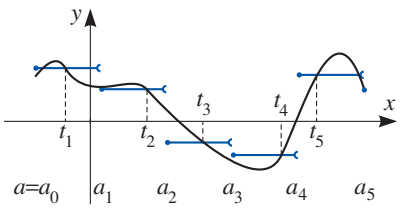
En particulier :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Démonstration

On désigne par φ_n la fonction en escalier sur $[a,b]$ définie par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(t_i) \text{ si } x \in \left[a + (i-1)\dfrac{b-a}{n},\ a + i\dfrac{b-a}{n}\right[\\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases}$$



Doc. 14. *La fonction en escalier* φ_n.

Le théorème 15 du *chapitre* 5 nous apprend que toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur ce segment. Il suffit de reprendre la démonstration de ce théorème pour constater que la suite de fonctions en escalier que nous venons de construire, (φ_n), converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

De plus, pour tout n, $A_n = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \int_{[a,b]} \varphi_n$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \int_{[a,b]} f$$

Nous devons à Cauchy, en 1823, la première définition rigoureuse de l'intégrale. Il établit que si f est une fonction réelle, continue dans un intervalle $[x_0, X]$, les sommes :
$S = (x_1 - x_0) f(x_0)$
$+(x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots$
$+(X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$
admettent, lorsque
$\max \{x_{i+1} - x_i \,;\, i \in [\![0, n-1]\!]\}$
tend vers 0, une limite.
« Limite qui dépendra uniquement de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce que l'on appelle une intégrale définie. »
Cauchy la note $\int_{x_0}^{X} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Riemann montre que cette définition de l'intégrale s'applique à un ensemble de fonctions plus vaste.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

Application 5

Utilisation des sommes de Riemann

1) *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \sin\left(\dfrac{i\pi}{n}\right)$.

2) *On fixe un réel* $\alpha \neq 1$. *Déterminer un équivalent de la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

3) *Traiter la question 2 dans le cas où* $\alpha = 1$.

1) Notons :

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$$

En posant $f(x) = x \sin(\pi x)$, on constate que f est continue sur $[0,1]$ et que S_n est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_{[0,1]} t \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^\alpha}$.

Posons $g(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$. La fonction g est continue sur $[0,1]$.

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$ est une somme de Riemann de g sur $[0,1]$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

On en déduit que :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

3) Lorsque $\alpha = 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)}$$

On reconnaît là une somme de Riemann de la fonction continue :

$$\left(t \longmapsto \frac{1}{1+t}\right)$$

sur le segment $[0,1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$$

2.2.3 Linéarité de l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment

Théorème 18

Soit J un segment de $\mathbb{R}$. L'application de $\mathcal{CM}(J,E)$ dans E, qui à f associe $\displaystyle\int_J f$, est linéaire :

$$\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\ \forall\,(f,g)\in(\mathcal{CM}(J,E))^2\quad \int_J(\alpha f+\beta g) = \alpha\int_J f + \beta\int_J g$$

Démonstration

Soit (φ_n) et (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier de J dans E convergeant uniformément vers f et g respectivement.

La suite de fonctions en escalier $(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)$ converge uniformément vers $\alpha f+\beta g$ dans ce même espace, et :

$$\int_J(\alpha f+\beta g) = \lim_{n\to+\infty}\int_J(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n) = \alpha\int_J f + \beta\int_J g.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

Théorème 19

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans E. Si f et g coïncident, sauf sur une partie finie de $[a,b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Conséquence importante

Si f est une fonction définie sur un segment $J = [a,b]$ privé d'une subdivision $S = (a_0, a_1, \dots a_n)$ de $[a,b]$ et telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, f peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, que nous noterons $\widetilde{f}$. L'intégrale de $\widetilde{f}$ sur $[a,b]$ ne dépend pas des valeurs choisies pour prolonger f. Nous l'appellerons intégrale de f sur $[a,b]$ et la noterons encore :

$$\int_J f \text{ ou } \int_{[a,b]} f.$$

Ainsi, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de J dans E, on peut calculer $\int_J g'$ bien que g' ne soit pas définie en tout point de J.

2.2.4 Intégrale et applications linéaires

Théorème 20

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, J un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de J dans E. Alors :

- $u \circ f \in \mathcal{CM}(J,F)$
- $\displaystyle\int_J u \circ f = u\left(\int_J f\right)$.

Démonstration

On note $\|\ \|_E$ une norme sur E et $\|\ \|_F$ une norme sur F. Puisque $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on sait qu'il existe un réel M tel que : $\forall v \in E\ \ \|u(v)\|_F \leqslant M\|v\|_E$.

Pour toute application f de $\mathcal{CM}(J,E)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in J} \|f(t)\|_E$.

Pour toute application g de $\mathcal{CM}(J,F)$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{t\in J} \|g(t)\|_F$.

L'application f de $\mathcal{CM}(J,E)$ étant fixée, on introduit une suite (φ_n) de fonctions en escalier de J dans E qui converge uniformément vers f sur J. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0.$$

De plus, les fonctions $u \circ \varphi_n$ sont des fonctions en escalier de J dans F et :

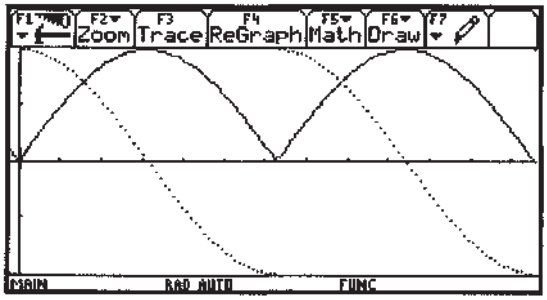
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall t \in J\ \ \|u\circ f(t) - u\circ\varphi_n(t)\|_F = \|u(f(t) - \varphi_n(t))\|_F \leqslant M\|f(t) - \varphi_n(t)\|_E \leqslant M\|f - \varphi_n\|_\infty.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 \leqslant \|u\circ f - u\circ\varphi_n\|_\infty = \sup_{t\in J}\|u\circ f(t) - u\circ\varphi_n(t)\|_F \leqslant M\|f - \varphi_n\|_\infty.$$

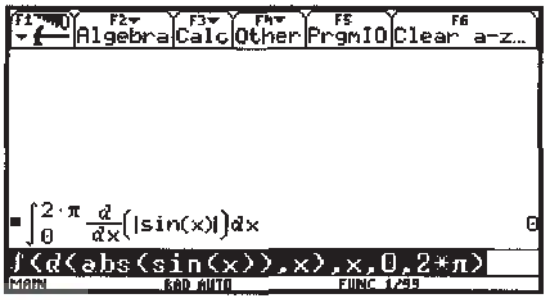
La suite de fonctions en escalier $(u\circ\varphi_n)$ converge uniformément vers $u\circ f$ sur J. D'où :

$$\int_J u\circ f = \lim_{n\to+\infty}\int_J u\circ\varphi_n.$$



Le graphe de $(x \longmapsto |\sin x|)$ est en trait plein et celui de sa dérivée en pointillé.

Considérez $f - g$.



À vous de prouver, le plus brièvement possible, ce résultat.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, φ_n est une fonction en escalier, donc $\displaystyle\int_J u\circ\varphi_n = u\left(\int_J \varphi_n\right)$.

La continuité de l'application linéaire u permet d'écrire :

$$\int_J u\circ f = \lim_{n\to+\infty} u\left(\int_J \varphi_n\right) = u\left(\lim_{n\to+\infty}\int_J \varphi_n\right) = u\left(\int_J f\right).$$

Dans la suite du paragraphe, on note $B = (e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une base de E.

Corollaire 20.1

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de J dans E. On note $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ les applications coordonnées de f relatives à la base B. Le calcul de l'intégrale de f peut être effectué composante par composante :

$$\int_J f = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_J f_i\right) e_i$$

En particulier, si f est une fonction continue par morceaux sur le segment J, à valeurs complexes, alors :

- $\displaystyle\int_J f = \int_J \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_J \operatorname{Im} f$;
- $\displaystyle\operatorname{Re}\left(\int_J f\right) = \int_J \operatorname{Re}(f),\ \operatorname{Im}\left(\int_J f\right) = \int_J \operatorname{Im}(f)$;
- $\displaystyle\int_J \overline{f} = \overline{\left(\int_J f\right)} = \int_J \operatorname{Re} f - \mathrm{i}\int_J \operatorname{Im} f$.

Mensa ACADEMY

Application 6

Utilisation de fonctions complexes

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$a_n = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\sin(nx)\,dx,$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k.$$

1) *Prouver que la suite (a_n) tend vers 0.*
On pourra utiliser l'inégalité :

$$|a_n| \leqslant \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\,dx.$$

2) *On s'intéresse à la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$. Établir la formule :*

$$S_n = \operatorname{Im}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{dx}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)} - R_n(x),$$

avec

$$R_n(x) = \operatorname{Im}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)\right)^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)}\,dx.$$

3) *Démontrer que $|R_n(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

4) *En déduire la somme s de la série $\sum(-1)^n a_n$.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Notons $b_n = \displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$: $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. La suite (b_n) converge.

$$b_{2n} = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\int_{[0,2\pi]} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{1}{4^{n+1}}\int_{[0,2\pi]} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^{2n}\mathrm{d}\,x$$

Développons par la formule du binôme de Newton. On sait que, si k est un entier non nul, $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x = 0$. On en déduit :

$$b_{2n} = \frac{2\pi}{4^{n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{2n} i}{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i)\right)^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2i}\right)$$

Donc $\ln(b_{2n}) = \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2i}\right)$.

Or la série à termes négatifs $\displaystyle\sum \ln\left(1-\frac{1}{2i}\right)$ est divergente.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(b_{2n}) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = 0$.

2) $(-1)^n a_n = \mathrm{Im}\left[\displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\left(-\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n\mathrm{d}\,x\right]$.

Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $-\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$, donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$
$$= \mathrm{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1-\left(-\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^{n+1}}{1+\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}\,x\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{1+\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}\,x\right) - R_n(x).$$

3) On sait que, pour tout nombre complexe z, $|\,\mathrm{Im}(z)\,| \leqslant |\,z\,|$, donc :

$$|\,R_n(x)\,| \leqslant \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{|\,\cos(x)\,|^{n+1}}{|\,1+\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,|}\,\mathrm{d}\,x.$$

Or $|\,1+\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,| \geqslant 1$, donc $|\,R_n(x)\,| \leqslant b_{n+1}$. Cette majoration prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

4) De ce qui précède, on déduit la convergence de la suite (S_n) et :

$$s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$
$$= \mathrm{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{1+\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}\,x\right)$$
$$= \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{-\cos(x)\sin(x)}{1+3\cos^2(x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

En posant $u = \cos(x)$, on trouve :

$$s = \int_{[0,1]}\frac{-u}{1+3u^2}\,\mathrm{d}\,u = -\frac{\ln(2)}{3}.$$

Mensa ACADEMY

2.2.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Théorème 21 (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- $f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$;
- $f \geqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$.

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Les fautes de calcul sont trop fréquentes, elles se doublent parfois d'absurdités (trouver une valeur positive pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ *, par exemple). »*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

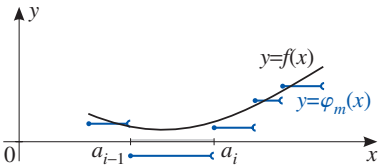
• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Pour n fixé dans $\mathbb{N}$, définissons la fonction ψ_n en posant :

$$\forall t \in [a,b] \quad \psi_n(t) = \max(0, \varphi_n(t))$$

Vous prouverez que :

- ψ_n est une fonction en escalier sur $[a,b]$;
- ψ_n est une fonction positive sur $[a,b]$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \| f - \psi_n \|_\infty \leqslant \| f - \varphi_n \|_\infty$.

La suite de fonctions (ψ_n) est une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \geqslant 0$



Doc. 15. *Si sur* $]a_{i-1}, a_i[$ *:*

$$\varphi_n(x) = \lambda_i \leqslant 0,$$

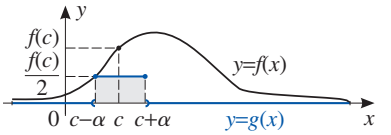
alors : $\forall x \in]a_{i-1}, a_i[$

$$[\varphi_n(x) = \lambda_i \leqslant \psi_n(x) = 0 \leqslant f(x)$$

Théorème 22

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et positive sur J. Alors :

$$\int_J f = 0 \Leftrightarrow f = 0$$



Doc. 16.

Démonstration

Considérons une fonction f continue positive sur J et non identiquement nulle. Alors il existe un point intérieur à J, que l'on notera c, tel que $f(c) > 0$. La continuité de f en c entraîne (*doc.* 16) :

$$\exists \alpha > 0 \ \forall x \in [c-\alpha, c+\alpha] \quad f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$$

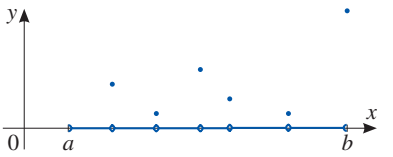
Appelons g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(c)}{2} & \text{si } x \in [c-\alpha, c+\alpha] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

g est une fonction de $\mathcal{CM}(J,\mathbb{R})$ et $f \geqslant g$, d'où $\displaystyle\int_J f \geqslant \int_J g = \alpha f(c) > 0.$

► ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

⚠ *L'hypothèse de continuité est fondamentale comme l'illustre le schéma suivant (doc. 17).*



Doc. 17. *Graphe d'une fonction positive et d'intégrale nulle sur* $[a,b]$ *, mais qui n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle.*

2.2.6 Une inégalité fondamentale

Soit $\|\ \|$ une norme sur E. L'application $\|\ \|$ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E, alors $\| f \|$ est une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 23

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E, alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \| f \| \leqslant (b-a) \| f \|_\infty$$

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Les fautes de majoration-minoration sont fréquentes (même les plus grossières, du type $\cos(t) \leqslant 1$ *implique* $a\cos(t) \leqslant a$ *). »*

Rapport E3A, 1997

« Rares sont les candidats qui prennent des précautions de valeurs absolues avant de majorer... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Pour tout entier n, la fonction $\|\varphi_n\|$ est une fonction en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\forall t \in [a,b] \quad \big|\, \|f(t)\| - \|\varphi_n(t)\| \,\big| \leqslant \|f(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty$$

La suite de fonctions en escalier $\big(\|\varphi_n\|\big)$ converge uniformément vers la fonction $\|f\|$ sur $[a,b]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \|\varphi_n\| = \int_{[a,b]} \|f\|$$

Par ailleurs, pour tout n, φ_n est une fonction en escalier de $[a,b]$ dans E, donc :

$$\left\| \int_{[a,b]} \varphi_n \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi_n\| \qquad (1)$$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,b]} f$ et que la fonction $\|\ \|$ est continue sur E, on peut passer à la limite dans (**1**). On obtient :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$$

• $\forall t \in [a,b] \quad \|f(t)\| \leqslant \|f\|_\infty$.

Donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|_\infty = (b-a)\,\|f\|_\infty$.

Mensa ACADEMY

► *Pour s'entraîner : ex. 10.*

Application 7

L'égalité $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$

Si f est une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

Dans cette application, nous allons étudier le cas d'égalité lorsque f est continue.

1) *Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Prouver que $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ si et seulement si f ne change pas de signe sur $[a,b]$.

2) *Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.*

Prouver que $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ si et seulement si : $\exists\,\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

***Remarque** : Géométriquement, cela signifie que les valeurs prises par f sont toutes sur une demi-droite du plan complexe issue de 0.*

1) Si f est de signe constant sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Réciproquement, si $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$, alors :

$$\int_{[a,b]} (|f| - f) = 0.$$

La fonction $|f| - f$ est continue et positive sur $[a,b]$. Son intégrale est nulle, donc elle est identiquement nulle.

Si $\int_{[a,b]} f < 0$, on applique le cas précédent à la fonction $-f$.

2) Supposons que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ e^{i\alpha}.$$

Alors $\forall x \in [a,b] \quad f(x) = |f(x)| e^{i\alpha}$.

Donc : $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = e^{i\alpha} \int_{[a,b]} |f(x)|\,dx$

et $\left|\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right| = \int_{[a,b]} |f(x)|\,dx$.

Réciproquement, supposons que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|.$$

• *Cas particulier* : $\int_{[a,b]} f = 0$

Alors $\int_{[a,b]} |f| = 0$. La fonction $|f|$ est continue et positive sur $[a,b]$. Son intégrale est nulle. Elle est identiquement nulle et le problème est résolu.

• *Cas général* : $\int_{[a,b]} f \neq 0$

$\int_{[a,b]} f$ est un nombre complexe non nul que l'on met sous forme trigonométrique :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_{[a,b]} f = e^{i\alpha} \left|\int_{[a,b]} f\right|.$$

On peut donc écrire :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} f e^{-i\alpha}$$

$$= \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(f e^{-i\alpha}\right) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\left(f e^{-i\alpha}\right).$$

On en déduit :

$$\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\left(f e^{-i\alpha}\right) = 0$$

et $\int_{[a,b]} |f| = \left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(f e^{-i\alpha}\right)$.

Donc $\int_{[a,b]} \left(|f| - \mathrm{Re}\left(f e^{-i\alpha}\right)\right) = 0.$

Or, pour tout t de $[a,b]$:

$$|f(t)| - \mathrm{Re}\left(f(t) e^{-i\alpha}\right)$$

$$= |f(t) e^{-i\alpha}| - \mathrm{Re}\left(f(t) e^{-i\alpha}\right) \geqslant 0$$

car, pour tout nombre complexe z, $|z| \geqslant \mathrm{Re}\, z$. La fonction $|f| - \mathrm{Re}\left(f e^{-i\alpha}\right)$ est continue et positive sur $[a,b]$. Puisque son intégrale sur $[a,b]$ est nulle, elle est identiquement nulle.

Application 8

Encore un peu de cinématique

Il semble évident que la distance parcourue par un point mobile de l'espace E est inférieure au produit du temps de parcours par la vitesse maximale du point. Prouvez-le.

Notons a et b les instants de départ et d'arrivée du point mobile et $\|\ \|$ une norme euclidienne sur E. La trajectoire du point est paramétrée par l'application $f : \begin{cases} [a,b] \to E \\ t \mapsto f(t) \end{cases}$ que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^1$, comme toujours en cinématique.

La distance parcourue par le point mobile entre les instants a et b est $d = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt$.

La vitesse maximale du point mobile est $\|f'\|_\infty$. On a : $d \leqslant (b-a)\|f'\|_\infty$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2.7 Valeur moyenne, inégalité de la moyenne

La **valeur moyenne** de f sur le segment $[a,b]$ est le vecteur de E :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Corollaire 23.1 : (Inégalité de la moyenne)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

La norme de la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est inférieure à la valeur moyenne de la norme de f qui est elle-même inférieure à $\| f \|_\infty$.

$$\left\| \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \| f \| \leqslant \| f \|_\infty$$

2.3. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.3.1 La fonction caractéristique

Soit K une partie de $\mathbb{R}$. La **fonction caractéristique** de K est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée χ_K, et définie par :

$$\chi_K : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \chi_K(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t \notin K \\ 1 \text{ si } t \in K \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Théorème 24
Soit J et K deux segments tels que $K \subset J$ et f une application continue par morceaux de J dans E. On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à K. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

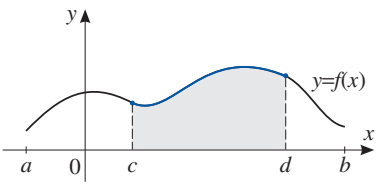
- $\widetilde{f} \in \mathcal{CM}(K,E)$;
- $\displaystyle\int_J f\chi_K = \int_K \widetilde{f}$.

Dans la suite, nous noterons cette intégrale $\displaystyle\int_K f$.

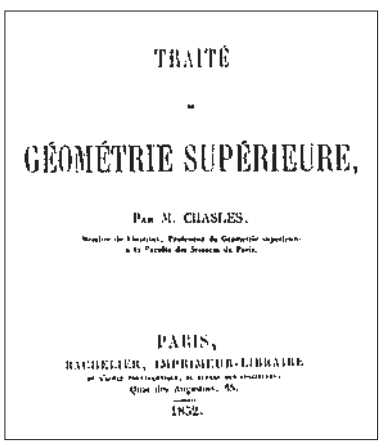
2.3.2 La relation de Chasles

Théorème 25
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et c un point de $]a,b[$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$



Doc. 18. *Sur ce schéma, $J = [a,b]$, $K = [c,d]$, f est une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$.*
En noir, se trouve le graphe de f.
En couleur, se trouve le graphe de $f\chi_K$.
L'aire de la partie tramée représente $\displaystyle\int_K f$


TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE,
PAR M. CHASLES.
PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1852.

Michel Chasles, *mathématicien français (1793-1880). Polytechnicien, il devient agent de change. Ruiné, il retourne aux mathématiques et excelle en géométrie.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Les fonctions $\chi_{[a,c]}\, f + \chi_{[c,b]}\, f$ et f sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et diffèrent uniquement en c. Donc leurs intégrales sur $[a,b]$ sont égales.

2.3.3 Extension de l'intégrale

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application continue par morceaux de I dans E.

Si J est un segment inclus dans I, alors la restriction de f à J est continue par morceaux et son intégrale sur ce segment est notée $\displaystyle\int_J f$.

Étant donné deux éléments a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f, notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, par la formule :

$$\int_a^b f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0_E & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, pour tout a et b de I, on a :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \| f \|$$

On remarque que :

$$\forall\, (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

2.3.4 Invariance par translation

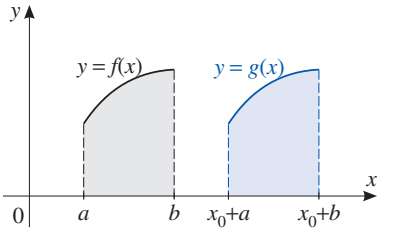
Théorème 26 : (Invariance par translation)

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et x_0 un réel. On définit l'application g sur $[x_0+a, x_0+b]$ en posant (*doc.* 19) :

$$g : \begin{cases} [x_0+a, x_0+b] \to E \\ x \mapsto g(x) = f(x - x_0) \end{cases}$$

Alors :

- $g \in \mathcal{CM}([x_0+a, x_0+b], E)$.
- $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[x_0+a, x_0+b]} g$.



Doc. 19. *En noir : graphe de* f. *En couleur : graphe de* g, *où :* $g(x) = f(x - x_0)$.

2.4. Des normes sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$

2.4.1 Norme de la convergence en moyenne

L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ est muni de la norme N_1 définie par :

$$N_1 : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto N_1(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} |f| \end{cases}$$

Cette norme est appelée **norme de la convergence en moyenne**.

La continuité de f est essentielle pour obtenir l'implication :

$$N_1(f) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4.2 Convergence uniforme et convergence en moyenne

L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est muni de la norme de la convergence uniforme :

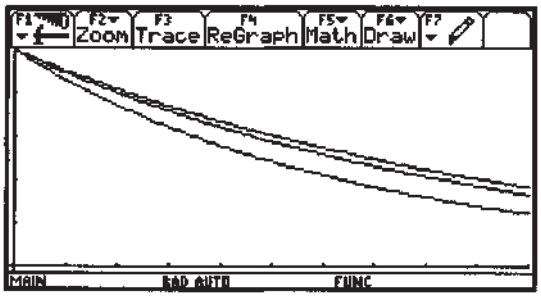
$$\forall\ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \quad \left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| = N_1(f) \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 27

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors :

- La suite (f_n) converge en moyenne vers f : $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$.



Sur cet écran de TI, se trouvent, de bas en haut, les graphes de f_1, f_5 et f. La fenêtre utilisée est $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 0{,}5$. Les graduations sur les axes sont espacées de $0{,}1$.

Exemples :

■ Étudier la suite (u_n) où $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x}}{2n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n$.

Pour tout n, f_n est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

La convergence est-elle uniforme ?

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x) - f_n(x)| = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{2(2n+x)} \leqslant \frac{1}{4n}$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. La suite (u_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x}}{2n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}.$$

■ Étudier la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$.

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction en escalier f, définie par :

$$f : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

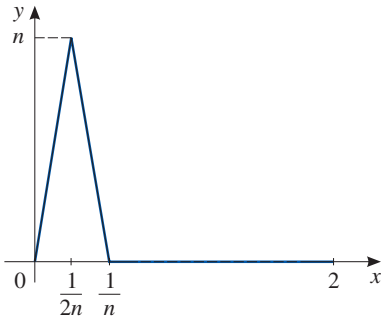
- La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car f n'est pas continue.
- Pour tout entier n :

$$\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n+1}.$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge en moyenne vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

On en déduit que la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$ et la norme de la convergence en moyenne N_1 ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

⚠ *Si la suite de fonctions continues (f_n) converge simplement, mais non uniformément vers f, le théorème ne s'applique plus.*



Doc. 20. *Représentation graphique de f_n.*

$\displaystyle\int_0^2 f_n$ est l'aire d'un triangle de hauteur n, de base $\dfrac{1}{n}$; donc $\displaystyle\int_0^2 f_n = \frac{1}{2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 27.1

Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers S, alors la série numérique $\sum \int_{[a,b]} u_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

Corollaire 27.2

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, convergeant normalement sur $[a,b]$, alors :

- La série numérique $\sum N_1(u_n) = \sum \int_{[a,b]} |u_n|$ est convergente.
- On note S la fonction somme de la série :

$$\forall x \in [a,b] \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

La fonction S est continue sur $[a,b]$ et de plus :

$$\left| \int_{[a,b]} S \right| \leqslant N_1(S) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n) \leqslant (b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$$

Remarque : Les définitions et les théorèmes de ce paragraphe se généralisent sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Démonstration

■ La série à termes réels $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente. De plus, nous savons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant N_1(u_n) \leqslant (b-a)\|u_n\|_\infty \qquad (1)$$

Cet encadrement permet de conclure que la série numérique $\sum N_1(u_n)$ est convergente.

■ Les fonctions u_n sont continues sur $[a,b]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[a,b]$. Donc S est continue sur $[a,b]$.

- $$\left| \int_{[a,b]} S \right| \leqslant \int_{[a,b]} |S| = N_1(S)$$
- De l'encadrement (**1**), on déduit aussi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n) \leqslant (b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$$

- Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la fonction somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(S_n) = \int_{[a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \int_{[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{n} \int_{[a,b]} |u_k| = \sum_{k=0}^{n} N_1(u_k)\,.$$

On peut passer à la limite dans cette inégalité et on obtient :

$$N_1(S) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n)\,.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 27.3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ une série de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si cette série de fonctions converge normalement sur tout segment inclus dans I, alors :

$$\forall\,(x,y)\in I^2\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_x^y u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_x^y\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

► *Pour s'entraîner : ex. 11.*

Application 9

Développement en série de la fonction logarithme sur $]0,2]$

Pour tout entier n et tout réel x de $]-1,1[$, on pose $u_n(x)=(-1)^n x^n$.

1) *Soit $a\in]0,1[$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.*

2) *Montrer que, pour tout x de $]-1,1[$,*

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad\text{et}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3) *Que dire des deux fonctions et des deux séries apparaissant à la question précédente lorsque x n'est pas dans $]-1,1[$?*

4) *Montrer que, pour tout x de $]0,2]$,*

$$\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

1) Ce résultat a déjà été vu. On peut écrire :

$$\forall x\in[-a,a]\quad 0\leqslant|u_n(x)|\leqslant a^n.$$

Le majorant a^n est indépendant de x. La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ permet de conclure.

2) Les hypothèses du corollaire 27.1 sont satisfaites, donc :
$\forall x\in]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)\mathrm{d}t\ .$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\ln(1+x).$$

En remplaçant x par $-x$, on trouve la deuxième égalité.

3) La fonction $(x\longmapsto\ln(1+x))$ est définie pour $x>-1$.

La série de fonctions $\sum(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge sur $]-1,1]$.

De plus, le calcul de $\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}$, en écrivant $\frac{1}{n+1}=\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$ montre que $\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

On procède de même pour la fonction $(x\longmapsto\ln(1-x))$ en remplaçant x par $-x$.

4) Pour tout x de $]0,2]$, $x-1$ est dans $]-1,1]$ et $\ln x=\ln(1+(x-1))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4.3 Norme de la convergence en moyenne quadratique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

Le cas réel

L'application suivante :

$$\langle\,|\,\rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \langle f \,|\, g\rangle = \displaystyle\int_{[a,b]} f\,g \end{cases}$$

définit un **produit scalaire** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On note N_2 la norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ associée à ce produit scalaire. Elle est appelée la **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

Par définition, si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$:

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}$$

On rappelle l'inégalité suivante :

Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

$$|\langle f \,|\, g\rangle| \leqslant N_2(f)\,N_2(g)$$

L'égalité a lieu si et seulement si f et g sont liées.

Mensa ACADEMY

En particulier, en prenant $g = 1$, on trouve :

$$\left(\int_{[a,b]} f\right)^2 \leqslant (b-a)\int_{[a,b]} f^2$$

L'égalité a lieu si et seulement si f est constante.

Le cas complexe

L'application suivante :

$$\langle\,|\,\rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ (f,g) \mapsto \langle f \,|\, g\rangle = \displaystyle\int_{[a,b]} \overline{f}\,g \end{cases}$$

définit un **produit scalaire** sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

Comme dans le cas réel, on note N_2 la norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ associée à ce produit scalaire. Elle est appelée la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Par définition, si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$:

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$$

⚠ *La continuité est essentielle pour prouver l'implication* $\big(\langle f \,|\, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0\big)$. *En effet, si* $\langle f \,|\, f\rangle = 0$, *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} f^2 = 0$ *et l'application* f^2 *est continue et positive sur* $[a,b]$. *Son intégrale sur* $[a,b]$ *est nulle, donc* f *est identiquement nulle.*

Augustin-Louis Cauchy, *mathématicien français* (1789-1857).

Herman Schwarz, *mathématicien allemand* (1843-1921).

De même que dans le cas réel, la continuité de f est essentielle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right|^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} |f||g|\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)\left(\int_{[a,b]} |g|^2\right)$$

L'égalité $\left|\int_{[a,b]} fg\right|^2 = \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)\left(\int_{[a,b]} |g|^2\right)$ a lieu si et seulement si f et g sont liées.

Cas particuliers

En utilisant la fonction constante $g = 1$, vous prouverez que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right|^2 \leqslant (b-a)\int_{[a,b]} |f|^2$$

Vous démontrerez aussi que $\left|\int_{[a,b]} t\,f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \dfrac{b^3-a^3}{3}\int_{[a,b]} |f|^2$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.*

Application 10

Étude de $\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$

Soit a et b deux réels tels $a < b$. On désigne par F l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas sur $[a,b]$.

1) *Calculer* $\inf_{f\in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$.

2) *Déterminer pour quels éléments de f cette borne inférieure est atteinte.*

3) *Calculer* $\left[\int_a^b f_n\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f_n}\right]$ *dans le cas où* $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$. *Qu'en concluez-vous ?*

1) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément de F est de signe constant sur $[a,b]$. De plus :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \left[\int_a^b -f\right]\left[\int_a^b -\frac{1}{f}\right]$$

Donc :

$$\inf_{f\in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \inf_{f\in G}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$$

où G est l'ensemble des éléments de F à valeurs strictement positives.

Pour tout élément f de G, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \left[\int_a^b \left(\sqrt{f}\right)^2\right]\left[\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right] \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f}\,\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = (b-a)^2$$

De plus, si f est une application constante, alors :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

Donc :

$$\inf_{f\in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

2) On vient de voir que cette borne inférieure est atteinte pour toutes les fonctions constantes. Réciproquement, pour tout élément de G tel que :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

on a :

$$\left[\int_a^b \left(\sqrt{f}\right)^2\right]\left[\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right] = \left(\int_a^b \sqrt{f}\,\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2$$

C'est le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires.

On en déduit que f est constante. Pour les fonctions négatives, on applique ce qui précède à $-f$.

3) $\left[\int_a^b e^{nx}\,dx\right]\left[\int_a^b e^{-nx}\,dx\right]$

$$= \frac{e^{n(b-a)} + e^{-n(b-a)} - 2}{n^2}$$

On trouve que :

$$\sup_{f\in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = +\infty$$

2.4.4 Comparaison des trois normes

Théorème 28

Pour toute application f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$:

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}N_2(f)$$

Corollaire 28.1

La convergence uniforme d'une suite de fonctions entraîne sa convergence en moyenne quadratique et la convergence en moyenne quadratique d'une suite de fonctions entraîne sa convergence en moyenne :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} N_1(f - f_n) = 0$$

Mensa ACADEMY

Exemples :

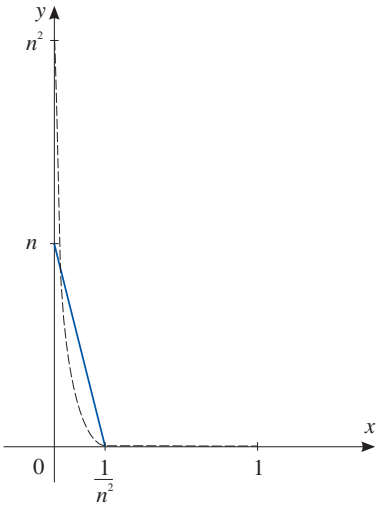
- $[a,b] = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$.

La suite (f_n) converge vers la fonction nulle en moyenne quadratique, mais pas uniformément.

- $[a,b] = [0,1]$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0,1]$ (*doc.* 21) :

$$g_n(x) = \begin{cases} n(1-n^2x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

La suite (g_n) converge en moyenne vers la fonction nulle, mais pas en moyenne quadratique.



Doc. 21. *Graphe des fonctions* g_n *et* g_n^2.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**une application f de l'intervalle I dans E est dérivable en x_0**, on peut :

- utiliser les opérations sur les fonctions dérivables ;
- chercher si f peut s'écrire :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)V + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E \ ;$$

- montrer que la limite, lorsque x tend vers x_0, de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe ;
- choisir une base de E et montrer que les applications coordonnées de f sont dérivables en x_0.

● Pour montrer qu'**une application φ de l'intervalle J dans l'intervalle I de classe $\mathcal{C}^k$** est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de J sur I, on prouve que :

- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;
- $\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$;
- $\varphi(J) = I$.

● Pour montrer qu'**une application f de I dans E**, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est **constante sur I**, il suffit de prouver que :

- f est continue sur I ;
- $\mathrm{D}f = 0$.

Mensa ACADEMY

● Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une fonction de $\mathcal{C}([a, b], E)$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a, b], E)$ convergeant simplement vers f sur $[a, b]$.

Pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$, il suffit de prouver que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

● Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a, b]$ dans E, convergeant simplement sur $[a, b]$ vers S.

Pour montrer que **la série numérique $\sum \int_{[a,b]} u_n$ converge**, on peut :

- montrer la convergence normale sur $[a, b]$ de la série de fonctions $\sum u_n$;
- établir que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers S ;
- prouver que $\displaystyle\int_{[a,b]} \left(\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Les formules de quadrature de Gauss (formules d'intégration approchée)

Cette méthode a été publiée en 1816.

Notations (les résultats énoncés ici seront admis)

- On désigne par $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour g dans E :

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(t)|, t \in [-1,1]\}$$

- Pour $m \in \mathbb{N}$, P_m désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
- Dans le problème, w désigne un élément de E vérifiant : $\forall x \in [-1,1],\ w(x) > 0$.
- Pour f et g dans E, $((f,g))$ désigne le réel :

$$((f,g)) = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

ce qui définit une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Première partie

I.1. Montrer que $((.,.))$ est un produit scalaire sur E.

On se propose de construire une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui vérifie :

a) p_n est un polynôme par rapport à la variable x, de degré n et dont le coefficient de x^n est 1 ;

b) pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $q \in P_{n-1}$, on a $((p_n,q)) = 0$ (c'est-à-dire que p_n est orthogonal à P_{n-1}).

I.2. Montrer qu'il existe au plus une telle suite.

I.3. Montrer que $p_0 = 1$ et $p_1(x) = x - \dfrac{((p_0,x))}{((p_0,p_0))}$.

I.4. On suppose que $n \geqslant 2$ et que p_{n-1} et p_{n-2} sont connus. Soit alors α_n et β_n les nombres réels :

$$\beta_n = \frac{((p_{n-1},p_{n-1}))}{((p_{n-2},p_{n-2}))},\quad \alpha_n = \frac{((xp_{n-1},p_{n-1}))}{((p_{n-1},p_{n-1}))}$$

Montrer que :

$$p_n = (x-\alpha_n)p_{n-1} - \beta_n p_{n-2} \qquad \textbf{(2)}$$

vérifie **(a)** et **(b)** si les p_m, pour $m \in \{0,\ldots,n-1\}$, vérifient **(a)** et **(b)**. Conclure à l'existence des (p_n).

I.5. *Application.*

On suppose que $w(x) = 1$.

Calculer p_0, p_1, p_2, p_3, et p_4.

On revient au cas général où w est quelconque.

On désire montrer que p_n possède n racines simples et réelles. Prenons donc $n \geqslant 1$.

I.6. Montrer que p_n possède dans $]-1,1[$ au moins une racine réelle de multiplicité impaire (on pourra remarquer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0$).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

I.7. Soit alors $(x_1, \dots, x_m)$ pour $m \geqslant 1$ les racines de p_n qui appartiennent à $]-1, 1[$ et qui sont de multiplicité impaire. En considérant le polynôme π tel que $\pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)$ et l'intégrale $((p_n, \pi))$, montrer que $m = n$ et conclure que p_n possède n racines distinctes qui appartiennent à $]-1, 1[$.

Deuxième partie

Une formule d'intégration approchée sur $[-1, 1]$ est la donnée de $k+1$ éléments distincts de $[-1, 1]$ notés $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ et de $k+1$ nombres réels $\lambda_i : (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$. On écrit alors :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\ f(x_i) \tag{3}$$

Dans cette définition, k est un entier naturel arbitraire, on dira que **(3)** est une formule à $k+1$ points. On associe alors à **(3)** une application Δ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : pour f dans E,

$$\Delta(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\ f(x_i) \tag{4}$$

On dira que **(3)** est d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si :

$$\forall\, p \in P_m, \quad \Delta(p) = 0 \tag{5}$$

II.1. Montrer que $\Delta : E \mapsto \mathbb{R}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel normé E dans $\mathbb{R}$.

II.2. Montrer qu'une formule d'intégration approchée à $k+1$ points d'ordre m est telle que $m \leqslant 2k+1$.

On se propose de montrer qu'il existe une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui soit d'ordre $2k+1$.

On désigne par $x_0, \dots x_k$ les $k+1$ racines de p_{k+1} (voir la *question* I.7). On note l_i pour $i \in \{0, \dots, k\}$ le polynôme de Lagrange :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et on introduit les réels :

$$\lambda_i = \big((l_i, 1)\big) = \int_{-1}^{1} l_i(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

Soit alors, pour $f \in E$, $p(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \dots x_k$.

II.3. Montrer que $p(f) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) l_i$.

II.4. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\ f(x_i) = \int_{-1}^{1} p(f)(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

II.5. En déduire que, pour ce choix de x_i et λ_i, la formule d'intégration approchée **(3)** est au moins d'ordre k.

II.6. Soit $p \in P_{2k+1}$. Montrer qu'il existe $q \in P_k$ et $r \in P_k$ tel que $p = ql + r$, où l est le polynôme $\prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$.

II.7. Montrer que (avec les notations de la *question* II.6) :

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x$$

II.8. Conclure que si les (x_i) sont les racines de p_{k+1} et les (λ_i) sont donnés par **(6)**, alors **(3)** est une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui est d'ordre $2k+1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que $w(x) = 1$ pour tout x de $[-1, 1]$ et on choisit pour (x_i) et (λ_i) ceux obtenus à la *question* II.8 de sorte que **(3)**, qui s'écrit ici :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i) \tag{8}$$

soit d'ordre $2k+1$ (k est un entier arbitraire).

On admet alors l'estimation d'erreur suivante. Pour $f \in \mathcal{C}^{2k+2}([-1,1];\mathbb{R})$, on a :

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{2^{2k+3}((k+1)!)^4}{(2k+3)((2k+2)!)^3} \| f^{(2k+2)} \|_\infty \tag{9}$$

III.1. En utilisant que $p_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$, montrer que **(8)** s'écrit pour $k = 2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5\, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\, f(0) + 5\, f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \tag{10}$$

III.2. Écrire **(9)** dans ce cas.

III.3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\,\mathrm{d}x$.

III.4. Montrer que **(9)** s'écrit pour $f(x) = \sqrt{2+x}$:

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{3}{2^7 \cdot 5^2} = 9{,}375\,10^{-4}$$

III.5. Avec combien de chiffres significatifs faut-il évaluer le second membre de **(10)** ?

III.6. Évaluer le second membre de **(10)** et $\Delta(f)$. Conclusion ?

III.7. On rappelle la formule d'intégration approchée de Simpson (formule à 3 points) :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \tag{11}$$

Comparer, sur l'exemple précédent $f(x) = \sqrt{2+x}$, les valeurs approchées obtenues par **(10)** et **(11)**. Étudier l'ordre de **(11)** pour expliquer ce qui a été constaté.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD d'algorithmique

Matrices tridiagonales et fonctions splines cubiques

L'étude des systèmes tridiagonaux et des fonctions splines cubiques figure au programme d'algorithmique des concours.

Une fonction spline cubique sur un segment $[a,b]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce segment et dont les restrictions aux intervalles d'une subdivision de ce segment sont polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.

Le but de ce TD est le calcul de la fonction spline cubique associée à une fonction f, définie sur [0,1], selon la méthode proposée dans le problème *Centrale-Supelec PSI 2002, maths II*.

La démarche mathématique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0, 1].

On note $x_i = \dfrac{i}{n}$ et $h = \dfrac{1}{n}$.

Étant donnés les réels $m_0, \dots, m_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$, on considère la fonction g définie par « recollement de polynômes de degré 3 » en posant, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i.$$

Résoudre le problème de Centrale permet de trouver les scalaires m_i, u_i, v_i tels que la fonction g ait les propriétés suivantes :

- g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur [0, 1] ;
- pour tout i de $[\![0,n]\!]$, $g(x_i) = f(x_i)$;
- $g'(0) = f'(0)$ et $g'(1) = f'(1)$.

Calculer $m_0, \dots, m_n$ revient à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

le second membre étant défini par :

$$b_0 = \frac{6}{h}\left[\frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0)\right], \quad b_i = \frac{6}{h^2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] \text{ pour } i \in [\![1, n-1]\!],$$

$$b_n = \frac{6}{h}\left[f'(1) - \frac{f(1) - f(x_{n-1})}{h}\right].$$

Enfin, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$v_i = f(x_{i-1}) - \frac{h^2}{6}m_{i-1}$$

et

$$u_i = \frac{1}{h}\left[f(x_i) - f(x_{i-1}) - \frac{h^2}{6}(m_i - m_{i-1})\right].$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les entrées

On entre l'entier n ; le segment [0, 1] sera divisé en n segments de longueurs égales.

On entre le réel x compris entre 0 et 1.

La sortie

Le programme affiche la valeur exacte $f(x)$, la valeur de la fonction spline $g(x)$ et l'écart entre ces deux valeurs.

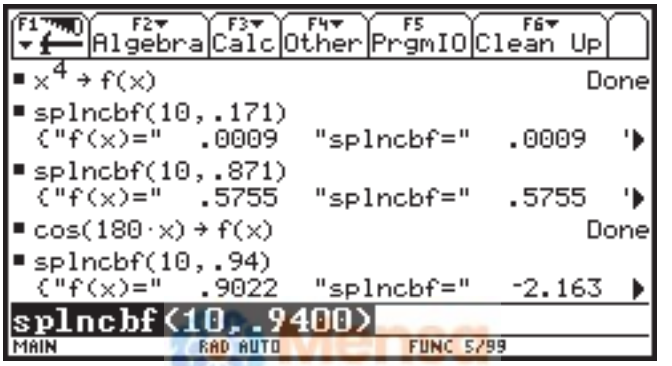
L'intérêt numérique

L'énoncé de *Centrale 2002* admet que l'erreur d'approximation est majorée, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^4$, par :

$$||f - g||_\infty \leqslant \frac{13}{8n^4} ||f^{(4)}||_\infty$$

L'écran ci-dessous (*doc.* 1) illustre ce phénomène en étudiant deux fonctions, et en utilisant $n = 10$.

La deuxième fonction est très mal approchée par sa fonction spline cubique. À vous de comprendre pourquoi.



Doc. 1.

Le programme

Le programme ci-dessous n'est pas optimisé au niveau de la vitesse. Il suit simplement la démarche du problème mathématique :

– construire et résoudre le système linéaire permettant de calculer les m_i ;

– calculer les valeurs de u_i et v_i ;

– calculer $g(x)$.

Une difficulté technique oblige à beaucoup d'attention : le problème cité indexe les coordonnées de 0 à n ; le langage TI force à utiliser des indices de 1 à $n + 1$.

```
:splncbf(n,x)
:Func
:If floor(n)-n ≠ 0 or n<2 or x<0 or x>1 Then
:Return "la première donnée, n, doit être un entier > 1 ; la seconde, x, doit être
dans [0,1[ ; enfin, la fonction à tester doit être rentrée dans f(x)"
:Else
:Local i,b,m,p,sol,pas,j,v,u,splcb
:
:ⓒ le point x est dans le segment [j*pas,(j+1)*pas]
:1/n → pas
:floor(x/pas) → j
:
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
:ⓒ creation du systeme
:newmat(1,n+1) → b
: 6/pas*((f(pas)-f(0))/pas-d(f(x),x)|x=0) → b[1,1]
: For i,1,n-1
: 6/pas2*(f((i+1)*pas)-2*f(i*pas)+f((i-1)*pas)) → b[1,i+1]
: EndFor
: 6/pas*(d(f(x),x)|x=1-(f(1)-f((n-1)*pas))/pas) → b[1,n+1]
:newmat(1,n+1) → sol
:newmat(n+1,n+2) → m
: 2 → m[1,1]  : 2 → m[n+1,n+1]
: For i,2,n
:   4 → m[i,i]
: EndFor
: For i,2,n+1
:   1 → m[i-1,i] : 1 → m[i,i-1]
: EndFor
: For i,1,n+1
:   b[1,i] → m[i,n+2]
: EndFor
:
:ⓒ application du pivot
: m[1,1] → p
: For i,2,n+1
:   0 → m[i,i-1]
:   m[i,i]-1/p → m[i,i]
:   m[i,n+2]-1/p*m[i-1,n+2] → m[i,n+2]
:   m[i,i] → p
: EndFor
:
:ⓒ resolution du système à partir de la dernière ligne
: m[n+1,n+2]/m[n+1,n+1] → sol[1,n+1]
: For i,n,1,-1
:   1/m[i,i]*(m[i,n+2]-sol[1,i+1]) → sol[1,i]
: EndFor
:
:ⓒ les derniers calculs intermédiaires
: f(j*pas)-(1/6)*pas2*sol[1,j+1] → v
: 1/pas*(f((j+1)*pas)-f(j*pas)-(1/6)*pas2*(sol[1,j+2]-sol[1,j+1])) → u
:
:ⓒ approximation de f(x) pour x dans [j*pas,(j+1)*pas]
: sol[1,j+1]*((j+1)*pas-x)3/(6*pas)+sol[1,j+2]*(x-j*pas)3/(6*pas)+u*(x-j*pas)+v → splcb
:
:ⓒ affichage de la solution
:Return {"f(x)=",f(x),"splncbf=",splcb,"delta=",abs(f(x)-splcb)}
:EndIf
:EndFunc
```

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 **1)** Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et à valeurs réelles. Écrire l'équation de la tangente et de la normale au graphe de f au point d'abscisse x_0.

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$: $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Écrire l'équation de la tangente et de la normale à la courbe paramétrée par Γ en $\Gamma(t_0)$ lorsque le vecteur vitesse en ce point n'est pas nul.

3) Écrire l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) du cercle de centre O et de rayon R.

2 **1)** Montrer que la fonction définie sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité à $]-\pi, \pi[$.

2) Montrer que le prolongement ainsi obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

3 Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} \; ; \quad h(x) = \frac{8x}{(x-1)^2 (x^2-1)}$$

4 Calculer la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \dfrac{x^{314\,16}}{x^2-1}$ en 0 pour tout n.

5 On pose $f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$. Calculer $f^{(n)}(0)$.

6 Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n} \left[\prod_{k=1}^{n} (k+n) \right]^{1/n}$$

7 On note α et β les racines du polynôme $X^2 - X + \dfrac{1}{10}$. Prouver que, pour tout P de $\mathbb{R}_5[X]$:

$$\int_{[0,1]} P = \frac{1}{18} \left(5\,P(\alpha) + 8P\left(\frac{1}{2}\right) + 5\,P(\beta) \right)$$

8 **1)** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2) Calculer $\lim\limits_{a \to 0} \displaystyle\int_{[0,\pi/2]} \cos(a \sin(t))\,\mathrm{d}t$.

9 Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$. Prouver l'existence d'un élément x de $]0,1[$ tel que $f(x) = x$.

10 Dans cet exercice, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E. Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$R_n = \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1) Dans cette question, $E = \mathbb{R}$ et f est croissante. Prouver :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

2) Dans cette question, $\|\ \|$ désigne une norme sur E et c un réel > 0. On suppose que f est c-lipschitzienne par rapport à cette norme. Prouver :

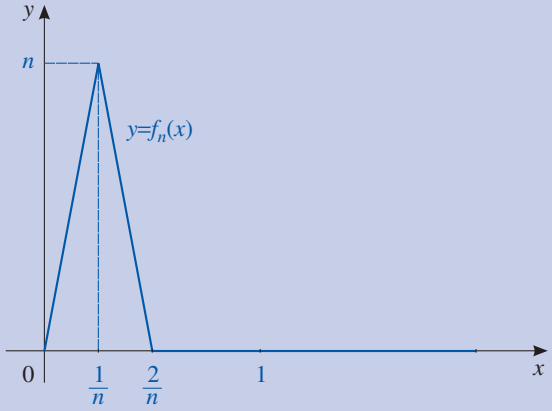
$$\|R_n\| \leqslant \frac{c(b-a)^2}{2n}$$

11 Dans cet exercice, t est un réel $\geqslant 0$ fixé. Pour tout x de $[0,1]$ et tout entier $n \geqslant 0$, on pose : $u_n(x) = (-1)^n x^{n+t}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n(x)$ et : $f(x) = \dfrac{x^t}{x+1}$.

1) Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge en moyenne vers f sur $[0,1]$.

2) Cette série converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?

12 Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n sur le segment $[0,2]$ à l'aide du schéma suivant.



1) Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,2]$.

2) Montrer que cette suite ne converge pas en moyenne.

3) Que dire de la convergence en moyenne quadratique ?

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

13 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ contenant plus de deux points et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue et positive.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n I_{n+2} \geqslant (I_{n+1})^2.$$

Que dire si f n'est pas à valeurs positives ?

14 ** Dans cet exercice, $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f et g sont deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Dans cette question, on suppose g à valeurs positives. Prouver l'existence d'un élément c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application : soit f une fonction continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de :

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x.$$

2) Dans cette question, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$R_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\, f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} nR_n = \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{2}.$$

3) L'égalité précédente est-elle valable si f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ?

4) Qu'en déduit-on en terme de calcul approché d'intégrale ?

15 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

1) Pour tout entier $n > 0$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que :

$$f_n^{(n)}(x) = \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right] f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

2) En déduire :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right] = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{1/x}}{(x^{n+1})}.$$

3) Prouver de même que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{n-1}\ln(x)\right] = \frac{(n-1)!}{x}.$$

16 * Soit (P,Q) un couple de polynômes réels, non constants, scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admettant que des racines simples. On suppose de plus qu'entre deux racines de l'un, il y a toujours une racine de l'autre et qu'ils n'ont pas de racine commune.

1) Montrer que le polynôme $\alpha P + \beta Q$ reste scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque (α,β) décrit $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que, pour tout réel α, le polynôme $P + \alpha P'$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

3) Soit $R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

Prouver que le polynôme :

$$S = a_0 P + a_1 P' + \cdots + a_{n-1} P^{(n-1)} + a_n P^{(n)}$$

est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

17 **1)** Soit g une application continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^\pi g(x)\cos(x)dx = \int_0^\pi g(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (1)$$

Montrer que g s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

2) Déterminer des fonctions vérifiant (**1**).

3) Déterminer une fonction M, continue de $[0,\pi]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ne s'annulant jamais et telle que :

$$\int_0^\pi M(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi M(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

18 * Déterminer la limite de $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\mathrm{ch}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - n.$

19 Calculer, à l'aide de sommes de Riemann, l'intégrale :

$$\int_0^\pi \cos^{2k} t\,\mathrm{d}t.$$

20 ** Soit $(E,\langle\,|\,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\|\ \|$ la norme associée à $\langle\,|\,\rangle$. On considère une fonction f continue de $[a,b]$ dans E telle que :

$$\left\|\int_a^b f\right\| = \int_a^b \|f\|.$$

1) Montrer que f prend ses valeurs dans une demi-droite vectorielle de E.

2) En est-il de même si la norme de E ne provient pas d'un produit scalaire ?

21 * Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue de $[0,1]$ dans E. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

22 **1)** Prouver que, pour tout entier $n > 0$, il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1-X)^{4n} = P_n(X)(1+X^2) + (-1)^n 4^n$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Déterminer une suite (u_n) telle que :

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}\,t = u_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

23 ** Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $p > 0$, on note :

$$u_p = \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^p \mathrm{d}\,t\right)^{1/p}.$$

Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$.

24 Étudier les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0 réels fixés et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \max(x, b_n)\,\mathrm{d}\,x$, $v_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \min(x, b_n)\,\mathrm{d}\,x$.

25 * On considère l'arc défini par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (a > 0, \text{ fixé}).$$

1) Tracer cet arc.

2) On le découpe en n arcs de même longueur délimités par les points M_0, $M_1, \ldots, M_{n-1}$ M_n.

Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{OM_i}{n+1}$.

26 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Prouver que :

$$\int_0^1 \left(f(t)\right)^2 \mathrm{d}\,t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\,t$$

27 * Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où g est lipschitzienne.

2) Que dire si f et g sont seulement continues ?

28 * Soit z un nombre complexe de module $\neq 1$.

Calculer :

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le lien entre dérivation et intégration

7

Mensa ACADEMY

Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons les primitives d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie et mettons ainsi en évidence le lien entre dérivation et intégration dans le cadre des fonctions continues par morceaux. Puis nous exploitons le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Nous sommes ensuite en mesure d'effectuer une étude globale d'une fonction définie comme limite d'une suite (ou d'une série) de fonctions.

OBJECTIFS

- Propriétés de l'application :

$$\left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Définition des primitives d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
- Intégration par parties et changement de variable.
- Inégalité des accroissements finis.
- Les trois formules de Taylor.
- Dérivabilité d'une fonction limite d'une suite de fonctions.
- Dérivabilité d'une fonction limite d'une série de fonctions.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Primitives d'une fonction continue par morceaux

I.1. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f une application continue de I dans E et a un point de I. L'application F définie comme suit :

$$F : \begin{cases} I \to E \\ x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E et vérifie :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Ce théorème a été établi en première année pour des fonctions à valeurs numériques. Le passage à des fonctions vectorielles se fait en raisonnant sur les applications coordonnées.

Généralisation : Considérons le cas où f est continue par morceaux sur l'intervalle I. Nous allons d'abord introduire quelques notations.

- Pour tout x de $I \setminus \{\sup I\}$, la fonction f a une limite à droite en x ; on la note $f_d(x) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$.

- Pour tout x de $I \setminus \{\inf I\}$, la fonction f a une limite à gauche en x ; on la note $f_g(x) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$.

Cette généralisation nous sera nécessaire lors de l'étude des séries de Fourier.

Théorème 2

Soit f une application continue par morceaux de I dans E et a un point de I.

L'application $F : \begin{cases} I \to E \\ x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est dérivable à droite (respectivement à gauche) en tout point de I_S (respectivement I_I) et, de plus :

$$F'_d(x) = f_d(x) \quad \text{et} \quad F'_g(x) = f_g(x)$$

Démonstration

Notons $\|\ \|$ une norme sur E.

Soit x un point de I_S, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x, x+\alpha[$ soit contenu dans I et :

$$\forall h \in]0, \alpha[\qquad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f_d(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_d(x)\,\mathrm{d}t$$

Donc : $$0 \leqslant \left\| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f_d(x) \right\| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \| f(t) - f_d(x) \|\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Fixons alors $\varepsilon > 0$.

$$\exists\, \delta \in]0, \alpha[\qquad \forall\, t \in I \qquad (x < t \leqslant x + \delta) \Rightarrow (\| f(t) - f_d(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Par conséquent, pour tout h tel que $0 < h \leqslant \delta$, et tout t dans $]0, h]$, d'après (**1**), on a :

$$0 \leqslant \left\| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f_d(x) \right\| \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon$$

Ceci permet de conclure que :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f_d(x) = 0_E.$$

Corollaire 2.1

Soit f dans $\mathcal{CM}(I, E)$ et a un point de l'intervalle I.

On définit F sur I en posant $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

- F est continue sur I ;
- en tout point x de continuité de f, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$;
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

1.2. Les primitives

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs dans E, on appelle **primitive** de f toute application F dérivable sur I telle que :

$$\forall\, x \in I \qquad F'(x) = f(x)$$

Soit f une application continue par morceaux de I dans E. On appelle **primitive** de f toute application F continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et telle qu'en tout point x de I en lequel f est continue, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Le corollaire 2.1 peut s'énoncer ainsi :

Pour toute application f de $\mathcal{CM}(I, E)$, l'application F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

On en déduit le **théorème fondamental du calcul différentiel et intégral** :

Théorème 3

Soit f une application continue par morceaux de I dans E et a un point de I.

• Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante :

$$\exists\, V \in E \quad \forall\, x \in I \quad F_1(x) = F_2(x) + V$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Les primitives usuelles ne font pas toujours partie du bagage de certains candidats admissibles, ainsi que certaines propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques. De manière générale, le calcul pratique des intégrales est un écueil, même pour les meilleurs. »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Dérivation fausse pour f continue, de l'intégrale sur $[a, x]$ de $f(x) - f(a)$. »

• Si la fonction f est continue sur I alors, toute primitive F de la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque $F' = f$.
• Le *théorème* 1 prouve qu'une fonction continue sur un intervalle admet toujours une primitive sur cet intervalle.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Primitives classiques non connues. »

Rapport Centrale, 2001

« Dans des exercices utilisant une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle, les candidats ne pensent jamais à écrire f au moyen d'une intégrale portant sur f'. »

Rapport E3A, 2002

« Notons les difficultés de calcul de nombreux candidats en calcul intégral. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• La fonction F définie en posant $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

• Si G est une primitive de f sur l'intervalle I, alors :

$$\forall (u,v) \in I^2 \quad G(v) - G(u) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$$

Une application très classique de ce qui précède (et très utile dans les problèmes de concours !) est le corollaire suivant :

Corollaire 3.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un segment contenu dans I et f une application de I dans E. Alors :

• si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

$$(\forall\, x \in I) \quad (f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t) \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f(a)\| + \int_a^b \|f'\|$$

• si f est continue par morceaux sur I et h est une primitive de f :

$$\|h\|_\infty \leqslant \|h(a)\| + \int_a^b \|f\|.$$

Rapport E3A, 2002

« On a ainsi vu des candidats trouver la valeur 0 pour l'intégrale d'une fonction strictement positive, donner comme primitive de $\cos^k(x)$, $\dfrac{\cos^{k+1}(x)}{(k+1)\sin x}$. *»*

On retrouve le théorème suivant :
Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.
En effet, pour une telle fonction f, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
F est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $[a,b]$ ($F' = f \geqslant 0$).
De plus, $F(b) = F(a) = 0$.
Donc $F = 0$ et $F' = f = 0$.

Application 1

Interprétation cinématique de la formule de la moyenne

Soit M un point mobile du plan dont la trajectoire est paramétrée par (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall\, t \in I \quad \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$.

Montrer que la vitesse moyenne du point mobile entre les instants t_0 et t_1 $(t_0 \leqslant t_1)$ est égale à la valeur moyenne de la vitesse entre ces deux instants.

On note $\|\ \|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

L'énoncé ne précise pas s'il s'agit de vitesse vectorielle $\left(f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ ou de vitesse numérique $\left(\|f'(t)\|\right)$. Traitons les deux cas.

• La valeur moyenne de la vitesse vectorielle entre les instants t_0 et t_1 est :

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Or $f(t_1) - f(t_0) = \overrightarrow{M(t_0)\,M(t_1)}$ et $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)\,M(t_1)}}{t_1 - t_0}$ est la vitesse moyenne vectorielle entre t_0 et t_1. D'où le résultat.

• Rappelons que, puisque le paramétrage est de classe $\mathcal{C}^1$, la vitesse numérique du point mobile est la dérivée de l'abscisse curviligne :

$$\left(\|f'(t)\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\right).$$

La valeur moyenne de la vitesse numérique entre les instants t_0 et t_1 est :

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Or $s(t_1) - s(t_0)$ est la distance parcourue par le point mobile entre les instants t_0 et t_1, donc $\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ est la vitesse moyenne du point mobile entre les instants t_0 et t_1.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 3.2 (Extension au cas où f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I)

Soit f une application continue de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Alors :

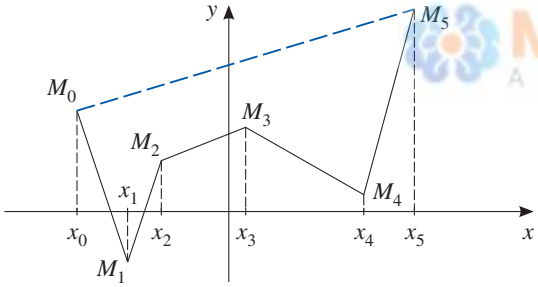
$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

► *Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.*

Application 2

La pente moyenne d'une ligne brisée

On considère une ligne brisée du plan $(M_0, \dots, M_n)$ telle que les abscisses $(x_0, \dots, x_n)$ des points $(M_0, \dots, M_n)$ forment une suite strictement croissante.



Doc. 1. *Comment calculer la pente du segment de droite $[M_0, M_5]$ en fonction de celles des segments $[M_0, M_1], [M_1, M_2], \dots, [M_4, M_5]$?*

On note p_i la pente du segment de droite $[M_{i-1}, M_i]$.

Prouver que la pente m du segment de droite $[M_0, M_n]$ est le barycentre de la famille de points pondérés $(p_i, x_i - x_{i-1})_{i \in [\![1,n]\!]}$. C'est-à-dire que la pente moyenne est la moyenne pondérée des pentes, les coefficients de pondérations étant les $(x_i - x_{i-1})_{i \in [\![1,n]\!]}$.

(L'idée de cette application est extraite de la revue « Chantier » de l'A.P.M.E.P. de janvier 1998, article de Sylviane Gasquet.)

On veut prouver que :

$$m = \frac{1}{x_n - x_0} \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x_{i-1}).$$

Notons f la fonction affine par morceaux dont le graphe est la ligne brisée $(M_0, \dots, M_n)$. Cette fonction est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[x_0, x_n]$. Donc :

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_n) - f(x_0).$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f' est constante sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et vaut p_i, donc :

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i - 1}^{x_i} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x_{i-1}).$$

En divisant par $x_n - x_0$, on trouve la formule demandée :

$$\frac{1}{x_n - x_0} \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = m.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.3. Intégration par parties

Vous avez rencontré en première année un outil fondamental, l'**intégration par parties**. Cet outil se généralise de la manière suivante :

Théorème 5

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$ et V une application de I dans E. On suppose que f et V sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f'(x)V(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)V(x)]_a^b - \int_a^b f(x)V'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

D'après les hypothèses sur f et V, la fonction produit fV est une application continue de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. En tout point x en lequel f et V sont dérivables, on peut écrire :

$$(fV)'(x) = f'(x)V(x) + f(x)V'(x).$$

On applique le *théorème* 3 pour terminer.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Recherche d'équivalent d'une fonction définie par une intégrale, les candidats ne pensent pas à l'utilisation d'une intégration par parties ou d'un changement de variables. »

Rapport Centrale, 2000

« Il est inadmissible de ne pas savoir intégrer une fraction rationnelle ; en revanche il est illusoire de rechercher les primitives de certaines fonctions. »

Application 3

Intégration par parties généralisée

1) *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}(I,(K))$. Montrer que :*

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f^n g = \left[f^{n-1}g - f^{n-2}g' + \cdots + (-1)^{n-1}\int_a^b fg^{n-1}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b fg^n.$$

2) *Calculer :* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$.

1) La formule se démontre immédiatement par récurrence.

2)

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}(x^2+x+1) - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}(2x+1) + \mathrm{e}^{-3x}27\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 0.$$

Et donc :

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln 2)^2}{24} - \frac{5\ln 2}{72} + \frac{49}{108}.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

1.4. Changement de variables

Théorème 6

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ et f une application continue de I dans E. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Impossibilité de calculer des primitives simples comme celle de $\dfrac{1}{1+\cos^2(t)}$ et grande difficulté à mettre en œuvre un changement de variable en $\tan t$ par exemple. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I, alors $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Donc :

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \big[F \circ \varphi(u)\big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En pratique, lorsque les hypothèses sont vérifiées, on pose $t = \varphi(u)$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et on modifie les bornes.

⚠ *Il ne faut pas remplacer l'hypothèse « $\varphi([a,b])$ contenu dans I » par « $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ appartiennent à I ». Pensez à* $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 u\,\mathrm{d}u$.

Corollaire 6.1

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une application strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I, et f une application continue par morceaux de I dans E. Alors :

$$\forall (a,b) \in J^2 \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

Introduisez une subdivision du segment d'extrémités $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ adaptée à f. La stricte monotonie de φ permet de montrer que $f \circ \varphi$ est continue par morceaux. La relation de Chasles et le *théorème* 5 vous permettront de conclure.

Rapport TPE, 2002

« Le calcul intégral est mal maîtrisé, les changements de variables classiques sont méconnus. »

Rapport Concours commun Polytechnique, 1997

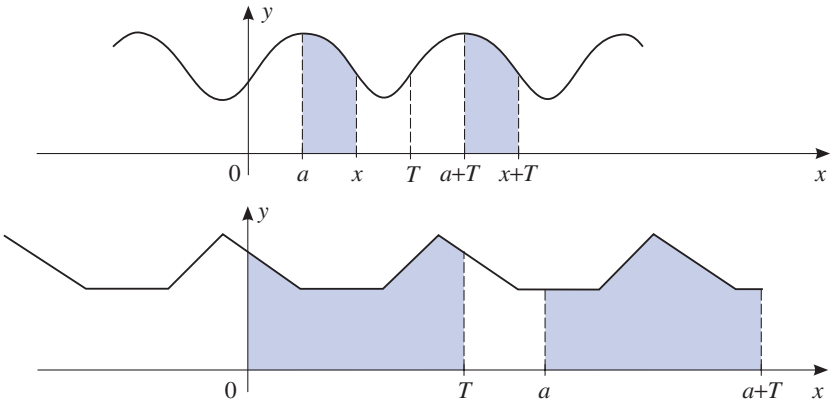
« Certains n'hésitent pas à faire des changements de variable discontinus ou du genre logarithme complexe et s'étonnent d'aboutir parfois à des intégrales dont les deux bornes (réelles ou complexes) sont égales. »

Exemples :

■ Soit T un réel > 0 et f une application continue par morceaux, T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Prouver que :

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Doc. 2. *Deux propriétés de l'intégrale d'une fonction périodique.*

Avec : $t = u + T$:

$$\int_{a+T}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour la seconde relation, utilisons la relation de Chasles :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a+T}^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après ce qui précède :

$$\int_{a+T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où l'égalité demandée.

■ Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

Exprimer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction d'une intégrale sur $[0,1]$ ou sur $[-1,1]$.

Avec : $t = (b-a)u + a, \quad \mathrm{d}t = (b-a)\,\mathrm{d}u$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\int_0^1 f((b-a)u+a)\,\mathrm{d}u$$

En utilisant $t = \dfrac{b-a}{2}u + \dfrac{a+b}{2}, \quad \mathrm{d}t = \dfrac{b-a}{2}\,\mathrm{d}u$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

■ Les primitives d'une fonction f, continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, sont périodiques si, et seulement si, l'intégrale de f sur une période est nulle.

En effet, notons T la période de f et F une primitive de f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Peu de candidats semblent savoir que, si f est dérivable et 2π-périodique, sa dérivée est elle-même 2π-périodique. D'autres candidats écrivent que les primitives d'une fonction continue 2π-périodique sont 2π-périodiques. »

► *Pour s'entraîner : ex. 4 et 5.*

2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 6 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une application de I dans E, $[a,b]$ un segment contenu dans I et $\|\ \|$ une norme sur E.

Si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

- f est continue sur $[a,b]$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
- $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall t \in]a,b[\quad \|f'(t)\| \leqslant \lambda$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda(b-a)$$

Démonstration

f étant continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$; donc :

$$f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit :

$$\|f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon)\| = \left\|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \lambda(b-a-2\varepsilon) \leqslant \lambda(b-a).$$

Or, f est continue sur $[a,b]$ et l'application norme est continue de E dans $\mathbb{R}$; donc, en faisant tendre ε vers 0, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda(b-a)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Interprétation cinématique :

Lorsque E est de dimension 2 ou 3, l'application $f : t \mapsto f(t)$ représente la trajectoire d'un point mobile en fonction du temps et le théorème précédent se lit ainsi :

Si, entre les instants a et b, la norme du vecteur vitesse est toujours majorée par λ, alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est inférieure à $\lambda(b-a)$.

Théorème 7

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I et f une application continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.

On suppose qu'il existe un réel λ tel qu'en tout point t de $]a,b[$ en lequel f est dérivable, on ait : $\|f'(t)\| \leqslant \lambda$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda(b-a)$$

Démonstration

Il existe une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ du segment $[a,b]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Le théorème précédent s'applique sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$ et :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqslant \lambda(a_{i+1} - a_i).$$

Sommons ces inégalités. On obtient :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sum_{0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqslant \lambda(b-a).$$

Théorème 8

Soit f une application de $[a,b]$ dans E telle que :

- f est continue sur $[a,b]$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$.
- f' a une limite l $(l \in E)$ en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'(b) = l$.

Ce théorème est parfois appelé « théorème de prolongement ». Cette appellation est dangereuse. Il ne s'agit pas de prolonger la fonction f' en b. En réalité, on démontre que f est dérivable (à gauche) en b.

Démonstration

Définissons l'application g ainsi :

$$g : \begin{cases} [a,b] \to E \\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in [a,b[\\ \lim\limits_{\substack{t\to b \\ t<b}} f'(t) & \text{si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

Par construction, g est continue sur $[a,b]$, donc si l'on définit G en posant $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, on peut dire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Par ailleurs, pour tout x de $[a,b[$, on a : $G(x) = f(x) - f(a)$ **(1)**

et la continuité de G et de f sur $[a,b]$ permet d'affirmer que **(1)** est aussi vraie pour $x = b$.

Donc :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = f(a) + G(x) \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{C}^1([a,b], E).$$

Une démonstration utilisant les fonctions coordonnées de f est aussi possible.

Rapport Centrale, 2001

« On comprend très bien ce que signifie "prolonger une fonction par continuité au point a ", mais que peut bien vouloir dire "on prolonge la dérivée par continuité en a ", après avoir établi l'existence de $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$. *»*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 8.1

Soit f une application de $[a,b]$ dans E et k un entier >0 tels que :

- f est continue sur $[a,b]$.
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b[$.
- Pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}$ a une limite $l_r (l_r \in E)$ en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ et, pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}(b) = l_r$.

⚠ *Le théorème 8 donne une condition suffisante pour que f soit dérivable mais elle n'est pas nécessaire.*

Ex. :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Application 4

La fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) *Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) *Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

3) *En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, de plus : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0$.*

1) La continuité de f sur $\mathbb{R}^*$ est immédiate.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La formule est vraie pour $n = 0$ en posant $P_n(x) = 1$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 0$,

$f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, où P_n est un polynôme. Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) +$$

$$\frac{P_n'(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n(x) \frac{-3n}{x^{3n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

On pose alors :

$$P_{n+1}(x) = 2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)$$

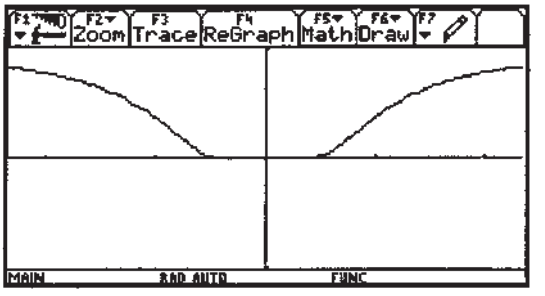
Puisque P_n est un polynôme, P_{n+1} en est un aussi et la formule annoncée est démontrée par récurrence.

3) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Le corollaire 8.1 permet d'en déduire alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$$



Doc. 3. *Le graphe de $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ dans un repère orthonormé avec $-2{,}33 \leqslant x \leqslant 2{,}33$.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 6. et 7.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Les formules de Taylor

Une des idées menant à l'étude des **formules de Taylor** est la généralisation de la relation caractérisant la dérivabilité d'une fonction f en un point a :

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + o(h).$$

Le but de ce paragraphe est de généraliser aux fonctions à valeurs vectorielles ces formules vues en première année pour les fonctions numériques.

3.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 9

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque :

Cette égalité s'écrit également $f(b) = T_n(b) + R_n(b)$, avec :

$$T_n(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{et} \quad R_n(b) = \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

$T_n(b)$ est appelé la **partie régulière** de la formule de Taylor et $R_n(b)$ le **reste intégral** .

Démonstration

La démonstration s'effectue par récurrence.

■ *Le cas* $n = 0$.

Soit f une fonction continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et a, b deux points de I. On sait que $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

■ *Le passage de* n *à* $n+1$.

Soit n un entier $\geqslant 0$. Supposons que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I, on ait :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considérons une fonction g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de I dans E et de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ par morceaux sur I. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} g^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'application $g^{(n+1)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Intégrons par parties le reste intégral, nous obtenons la formule à l'ordre $n+1$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Les hypothèses des théorèmes conduisant aux différentes formules de Taylor sont tout aussi difficiles à obtenir. Le reste intégral est le plus populaire, mais son écriture exacte laisse bien souvent à désirer. »

Brook Taylor, *mathématicien anglais (1685-1731). Il invente l'intégration par parties. En 1715, il publie « Methodolus incrementorum directa et inversa », qui contient sa formule :*

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(a) + \dots$$

sans précision sur le reste. L'intérêt de cette formule n'apparaît qu'en 1772, lorsque Lagrange y voit une des bases du calcul différentiel. Il donne en particulier le premier encadrement du reste.

La formule de Taylor avec reste intégral est due à Cauchy. Il la démontre dans sa 35e leçon à l'École Polytechnique (1823). Il donne, dans la 38e leçon, l'exemple $(x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2})$ étudié à l'application précédente.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est une égalité. Pour majorer la distance entre $f(b)$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, une inégalité suffit.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux de I dans E et J un segment inclus dans I.

On sait qu'il existe une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de J telle que f est $n+1$ fois dérivable en tout point de $J\setminus\{a_i | i \in [\![0,n]\!]\}$ et que la restriction de $f^{(n+1)}$ à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable par continuité au segment $[a_i, a_{i+1}]$.

On en déduit que $f^{(n+1)}$ est bornée sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et sur $J\setminus\{a_i \mid i \in [\![0,n]\!]\}$.

Si $\|\ \|$ désigne une norme sur E, on note :

$$\sup_J \left\| f^{(n+1)} \right\| = \sup\left\{ \left\| f^{(n+1)}(x) \right\| \mid x \in J\setminus\{a_i \mid i \in [\![0,n]\!]\}\right\}.$$

Enfin, si a et b sont deux éléments de l'intervalle I, on note :

$$J_{a,b} = [\min(a,b), \max(a,b)].$$

C'est le segment d'extrémités a et b.

Théorème 10

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I et $\|\ \|$ une norme sur E. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{J_{a,b}} \left\| f^{(n+1)} \right\|$$

Démonstration

Fixons a et b dans I. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \int_{J_{a,b}} \left\| \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \right\| \mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \left(\int_{J_{a,b}} \frac{|b-x|^n}{n!} \mathrm{d}x \right) \sup_{J_{a,b}} \left\| f^{(n+1)} \right\|.$$

En distinguant les cas $a \leqslant b$ et $a \geqslant b$, vous prouverez que :

$$\int_{J_{a,b}} \frac{|b-x|^n}{n!} \mathrm{d}x = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Joseph Lagrange, *mathématicien et physicien français (1736-1813). Mathématicien, il développe la théorie des fonctions. Cherchant à approximer une fonction par un polynôme, il reprend la formule de Taylor et précise le reste. Dans le domaine des équations différentielles, nous lui devons la technique de variation des constantes.*
Physicien, ses travaux portent sur la propagation du son, la théorie des cordes vibrantes et la mécanique céleste. Il participe à la création de l'École Polytechnique et y enseigne.

Rapport CCP, 2000

« Le théorème des accroissements finis est souvent invoqué (pas toujours correctement d'ailleurs...) mais on rencontre parfois des horreurs. »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« L'inégalité de Taylor-Lagrange semble peu connue. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Développement en série de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Pour tout réel $x > -1$, posons :

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

et pour tout entier $n > 0$:

$M_n(x) = \sup\left\{\left| f^{(n)}(t)\right| ;\ t \in [\min(0,x), \max(0,x)]\right\}$

1) *Montrer que, pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n > \alpha$,* $M_n(x) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} |i-\alpha|$.

En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

2) *Montrer que, pour tout réel x de $]-1,0]$ et tout entier $n > \alpha$:*

$$M_n(x) \leqslant (1-|x|)^{\alpha-n} \prod_{i=0}^{n-1} |i-\alpha|.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2},0\right] \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

Remarque : *Le résultat obtenu est asymétrique (convergence sur $\left]-\frac{1}{2},1\right[$). Nous verrons ultérieurement, en utilisant une méthode différente, que la formule $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$ est valable sur $]-1,1[$.*

1) Fixons un entier $n > \alpha$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $(1+t)^{\alpha-n} \leqslant 1$.

Or : $f^{(n)}(t) = \left[\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)\right](1+t)^{\alpha-n}$.

Donc : $\forall x > 0 \quad M_n(x) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} |i-\alpha|$.

De l'inégalité de Taylor-Lagrange nous déduisons, pour $n > \alpha$:

$$\forall x > 0 \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{x^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \qquad (\mathbf{1})$$

Posons $\varepsilon_n = \frac{x^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|$; vous vérifierez aisément que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = x$. Si x est dans $]0,1[$, la règle de d'Alembert permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et, d'après (**1**) :

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

2) Fixons un entier $n > \alpha$. Pour tout x de $]-1,0[$ et tout t de $[x,0]$, on a $(1+t)^{\alpha-n} \leqslant (1+x)^{\alpha-n}$. Donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,0[\quad M_n(x) &\leqslant (1+x)^{\alpha-n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \\ &= (1-|x|)^{\alpha-n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|.\end{aligned}$$

De l'inégalité de Taylor-Lagrange nous déduisons, pour $n > \alpha$:

$$\forall x \in]-1,0[\quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant (1-|x|)^\alpha \frac{|x|^n}{n!(1-|x|)^n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \qquad (\mathbf{2})$$

Posons $\delta_n = (1-|x|)^\alpha \frac{|x|^n}{n!(1-|x|)^n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|$; vous vérifierez aisément que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

De plus :

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 < \frac{|x|}{1-|x|} < 1$$

La règle de d'Alembert permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0$ si x est dans $\left]-\frac{1}{2},0\right[$ et, d'après (**2**) :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2},0\right] \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.3. Développement limité d'une primitive d'une fonction continue

Théorème 11

Soit f une application continue de I dans E et a un point de I. Si f admet en a le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_0^n (x-a)^i V_i + o((x-a)^n)$$

Alors toute primitive F de f admet en a le développement limité d'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(a) + \sum_0^n \frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)} V_i + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration

Notons, pour tout x de $I\setminus\{a\}$:

$$r(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_0^n (x-a)^i V_i\right) \quad \text{et} \quad r(a) = 0_E.$$

r est continue sur I, $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0_E$ et, pour tout x de I :

$$f(x) = \sum_0^n (x-a)^i V_i + (x-a)^n r(x).$$

Si F est une primitive de f sur I, on a :

$$F(x) = F(a) + \sum_0^n \int_a^x (t-a)^i V_i \,\mathrm{d}t + \int_a^x (t-a)^n r(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= F(a) + \sum_0^n \frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)} V_i + R_{n+1}(x),$$

avec $R_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x (t-a)^n r(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour conclure, il suffit de prouver que $R_{n+1}(x) = o((x-a)^{n+1})$.

Notons $\|\ \|$ une norme sur E et fixons $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \quad |t-a| \leqslant \delta \Rightarrow \|r(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow \|R_{n+1}(x)\| \leqslant \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |t-a|^n \|r(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |t-a|^n \,\mathrm{d}t = \varepsilon \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}.$$

Donc $R_{n+1}(x) = o((x-a)^{n+1})$.

Corollaire 11.1 (Développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit f dans $\mathcal{C}^1(I,E)$ et a un point de I. Si f' admet en a un développement limité d'ordre n, alors f admet en a un développement limité d'ordre $n+1$.

Rapport Centrale, 2001

« L'unicité du développement limité est rarement citée. »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Développements limités usuels non connus. »

Rapport CCP, 2001

« ...s'entraîner aux méthodes classiques et savoir les maîtriser définitivement (DL, calcul intégrale $\int$... »

Rapport CCP, 2000

« Il y a une grande méconnaissance des développements limités (même des plus simples comme $\ln(1+x)$). »

Rapport CCP, 2000

« Les développements limités sont peu connus et les interprétations géométriques élémentaires posent de gros problèmes. »

L'hypothèse « f' admet en a un développement limité d'ordre n » est fondamentale comme le prouve l'exemple suivant :
On pose :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Vous montrerez que :
- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- f' n'a pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si celui-ci est :

$$f(x) = \sum_0^{n+1} (x-a)^i V_i + o((x-a_i)^{n+1})$$

alors le développement limité de f' en a est :

$$f'(x) = \sum_1^{n+1} i(x-a)^{i-1} V_i + o((x-a)^n)$$

▶ ***Pour s'entraîner : Revoir les développements limités faits en première année.***

Rapport Centrale, 1997

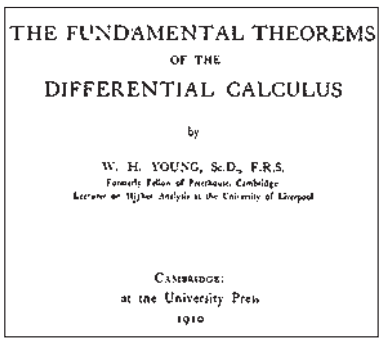
« Le développement limité de $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ *est* $1+a+o\left(\frac{1}{x}\right)$ *». Cherchez l'erreur.*

3.4. La formule de Taylor-Young

Théorème 12 Formule de Taylor-Young

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E. Alors, f admet en tout point a de I un développement limité à l'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_0^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$


THE FUNDAMENTAL THEOREMS
OF THE
DIFFERENTIAL CALCULUS
by
W. H. YOUNG, Sc.D., F.R.S.
Formerly Fellow of Peterhouse, Cambridge
Lecturer on Higher Analysis at the University of Liverpool
CAMBRIDGE:
at the University Press
1910

William Young, *mathématicien anglais (1863-1942). Il généralise la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables et détermine le reste qui porte son nom.*

Démonstration

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $f^{(n)}$ est continue en tout point a de I, ce qui peut s'écrire :

$$(H_0)\ f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + o(1)$$

Et ceci représente un développement limité à l'ordre 0 de $f^{(n)}$ au point a.

Soit alors $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que :

$$(H_k)\ f^{(n-k)}(x) = \sum_0^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(n-k+i)}(a) + o((x-a)^k)$$

L'application $f^{(n-k)}$ est continue sur I et $f^{(n-k-1)}$ est une primitive de $f^{(n-k)}$ sur I. On termine en appliquant le théorème précédent.

Nous venons de prouver qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle admet un développement limité à l'ordre n en tout point de l'intervalle. La réciproque est fausse : une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en tout point d'un intervalle n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^n$. L'exemple suivant le prouve.

On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

On prouve aisément que :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant |x|^{n+1}$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) =_0 o(x^n)$.

Donc f admet un développement limité à l'ordre n en 0.

- $f'(x)$ n'a pas de limite en 0 et f n'a pas de dérivée seconde en 0.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4 L'application $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ Théorème de relèvement

Le théorème central de ce paragraphe est une jolie application de la notion de primitive. Son utilité apparaîtra en géométrie plane et en calcul différentiel lors de l'utilisation des coordonnées polaires.

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$.

On a rencontré, en première année, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Cette application est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(U, \times)$. Il est surjectif, continu et n'est pas injectif. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 13

L'application : $\begin{cases}]-\pi, \pi[& \to & U\backslash\{-1\} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{cases}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est l'application Argument, notée Arg. Elle est définie par :

$$\text{Arg} : \begin{cases} U\backslash\{-1\} & \to &]-\pi, \pi[\\ u = x + iy & \mapsto & \text{Arg}\, u = 2\,\text{Arctan}\,\dfrac{y}{1+x} \end{cases}$$

Elle est continue sur $U\backslash\{-1\}$ et ne peut pas être prolongée en une application continue sur U.

Démonstration

• Soit $u = x + iy \in U\backslash\{-1\}$ (x et y sont les parties réelle et imaginaire de u).

On cherche θ dans $]-\pi, \pi[$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On aura :

$$1 + x = \frac{2}{1 + \tan^2\dfrac{\theta}{2}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{y}{1+x} = \tan\frac{\theta}{2}. \quad \text{D'où} \quad \theta = 2\,\text{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$$

On obtient un unique θ dont on vérifie aisément qu'il est bien solution. Ceci assure la bijectivité de l'application.

• La fonction Argument est donc définie par la formule :

$$\forall\, u \in U\backslash\{-1\} \qquad \text{Arg}\,(u) = 2\,\text{Arctan}\,\frac{\text{Im}\, u}{1 + \text{Re}\, u}$$

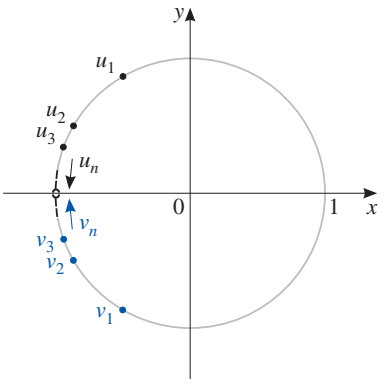
Or, les applications $u \mapsto \text{Im}\, u$ et $u \mapsto \text{Re}\, u$ sont continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, et $1 + \text{Re}\, u$ ne s'annule pas sur $U\backslash\{-1\}$. De plus, la fonction Arctangente est continue sur $\mathbb{R}$, la continuité de la fonction Argument en découle.

• Notons $u_n = e^{i(\pi - \frac{1}{n})}$ et $v_n = e^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$. Alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -1 \quad ; \quad \text{Arg}\,(u_n) = \pi - \frac{1}{n} \quad ; \quad \text{Arg}\,(v_n) = -\pi + \frac{1}{n}$$

La fonction Argument n'est pas prolongeable par continuité en -1.

Ne pouvoir prolonger la fonction Argument par continuité en -1 semble être un obstacle mathématique important au fait de pouvoir « faire un tour complet autour de l'origine ». D'une certaine façon, le théorème du relèvement lève cet obstacle (*doc.* 5).



Doc. 4. *La fonction Argument n'est pas prolongeable par continuité en* -1 *:*

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -1$

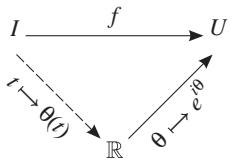
$\lim_{n\to+\infty} \text{Arg}\,(u_n) = \pi$

$\lim_{n\to+\infty} \text{Arg}\,(v_n) = -\pi$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 14

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour toute application f de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I, à valeurs dans U, il existe une fonction θ de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. La fonction θ est appelé un relèvement de f.



Doc. 5. $\forall t \in I \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$.

Démonstration

• Remarquons d'abord que, si une telle fonction θ existe, elle n'est pas unique. En effet, $\theta + 2\pi$ convient aussi.

• D'autre part, si θ existe, alors $f'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}\mathrm{i}\theta'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)\,f(t)$,

L'application θ doit être une primitive de $-\mathrm{i}\,\dfrac{f'}{f}$.

• Montrons que la fonction $-\mathrm{i}\,\dfrac{f'}{f}$ est à valeurs réelles.

On sait que : $\forall t \in I \quad |f(t)|^2 = f(t)\,\overline{f(t)} = 1$.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a donc :

$$\forall t \in I \quad f(t)\,\overline{f'(t)} + f'(t)\,\overline{f(t)} = 0 \quad \text{donc} \quad 2\mathrm{Re}\,(f'(t)\,\overline{f(t)}) = 0,$$

soit : $\forall t \in I \quad f'(t)\,\overline{f(t)} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$

Or $f'(t)\,\overline{f(t)} = \dfrac{f'(t)}{f(t)}\,f(t)\,\overline{f(t)}$. On en déduit que : $\forall t \in I \quad -\mathrm{i}\,\dfrac{f'(t)}{f(t)} \in \mathbb{R}$.

• Construction de θ.

Soit a un point de I. Notons $\beta(t) = -\mathrm{i}\displaystyle\int_a^t \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u$ et $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta(t)}$.

On constate que β est à valeurs réelles et g à valeurs dans U. De plus g est dérivable :

$$\forall t \in I \quad g'(t) = \mathrm{i}\,\beta'(t)g(t) = \mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\,\frac{f'(t)}{f(t)}g(t)\right)$$

donc : $\forall t \in I \quad g'(t)\,f(t) - f'(t)g(t) = 0$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est donc constante.

Or, $\beta(a) = 0$ et $g(a) = 1$, donc : $\forall t \in I \quad \dfrac{f(t)}{g(t)} = f(a)$.

$f(a)$ est un élément de U, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$.

Donc : $\forall t \in I \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\alpha+\beta(t))}$

La fonction θ définie par $\theta(t) = \alpha + \beta(t)$ est un relèvement de f.

• θ est de classe $\mathcal{C}^n$. En effet, la fonction $-\mathrm{i}\,\dfrac{f'}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et β en est une primitive.

Application 6

Paramétrage polaire d'une courbe plane

Soit P un plan euclidien, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de ce plan, $\|\ \|$ la norme euclidienne et n un entier > 0.

On considère une courbe de classe $\mathcal{C}^n$ de P paramétrée par :

$$M : \begin{cases} I & \to & P \\ t & \mapsto & M(t) = O + x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) *Dans cette question, la courbe ne passe pas par* O. *Prouver l'existence d'une application* θ *de* $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall t \in I \quad \overrightarrow{OM}(t) = \|\overrightarrow{OM}(t)\|(\cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j})$$

2) *Dans cette question, on suppose que la courbe n'a pas de point stationnaire et que* $n \geqslant 2$. *Montrer que l'angle de la tangente avec l'axe des* x *peut être mesuré par une fonction* φ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

1) Puisque la courbe ne passe pas par O, on sait que $\forall t \in I \quad x^2(t) + y^2(t) \neq 0$.

Considérons l'application :

$$f : \begin{cases} i & \to & U \\ t & \mapsto & f(t) = \dfrac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} + \mathrm{i}\,\dfrac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \end{cases}$$

D'après le théorème de relèvement, il existe une application θ de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$$

2) Par hypothèse, la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur I. D'après la question 1, il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que, pour t dans x :

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}(t)\right\| (\cos\varphi(t)\,\vec{i} + \sin\varphi(t)\,\vec{j})$$

Par construction, φ mesure l'angle de la tangente avec l'axe des x.

5 Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.

5.1. Suites de fonctions

5.1.1 Convergence uniforme et intégration

Nous avons établi dans le chapitre précédent que la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne. En voici une conséquence.

Théorème 15

Soit a un point de l'intervalle I, (f_n) une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans E et, pour tout n, h_n la primitive de f_n sur I telle que $h_n(a) = 0$.

Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f, alors la suite de fonctions (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f telle que $h(a) = 0$.

Et, pour tout x de I, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(t)\,\mathrm{d}\,t$

Démonstration

Soit f une fonction continue par morceaux sur I, h une primitive de f sur I et $a < b$ deux points de I. Pour tout x de $[a,b]$:

$$\|h(x) - h(a)\|_E \leqslant \int_a^x \|f\|_E \leqslant \int_a^b \|f\|_E .$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Puis :

$$\|h_{|[a,b]}\|_\infty \leqslant \|h(a)\|_E + \int_a^b \|f\|_E .$$

Le théorème en découle.

5.1.2 Dérivation d'une suite de fonctions

Théorème 16

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans E telle que :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la suite (f_n) converge simplement sur I vers f ;
- la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers g.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Démonstration

Soit a un point de I, on a :

$$\forall\, x \in I \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Posons $h_n = f_n - f_n(a)$.

h_n est la primitive sur I de f_n' qui s'annule en a. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions (f_n') pour conclure.

On déduit du théorème précédent une extension au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, dont nous vous laissons le soin de rédiger la démonstration par récurrence.

Corollaire 16.1 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit k dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans E tels que :

- pour tout n, (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- la suite (f_n) converge simplement sur I vers f ;
- pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier p non nul et inférieur ou égal à k :

$$f^{(p)} = g_p.$$

Exemple :

Considérons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction exponentielle.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant p$, on a : $0 \leqslant \mathrm{e}^x - (f_n)^{(p)}(x) = h(x)$.

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et :

$$h'(x) = \mathrm{e}^x - (f_n)^{(p+1)}(x) = \mathrm{e}^x - \frac{n(n-1)\dots(n-p)}{n^{p+1}}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-p-1}.$$

Or :

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{n^{p+1}}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-p-1} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-p-1} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x.$$

Attention ! C'est la suite (f_n') qui doit converger uniformément, comme le prouve l'exemple suivant : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Beaucoup plus grave est de voir omniprésente l'affirmation que la convergence uniforme de la série entraîne la convergence de la série dérivée, et justifie de dériver terme à terme. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La fonction h est croissante sur $[0,+\infty[$. Pour tout $b > 0$ et tout x de $[0,b]$, on a : $0 \leqslant h(x) \leqslant h(b)$.

Sur tout segment de $]0,+\infty[$, la suite de fonctions $((f_n)^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction exponentielle. Nous retrouvons le fait que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que sa dérivée est elle-même.

5.2. Séries de fonctions

5.2.1 Convergence uniforme et intégration

Théorème 18

Soit a un point de l'intervalle I, (u_n) une suite d'applications continues sur I, à valeurs dans E. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I alors, pour tout x de I :

$$\int_a^x \left(\sum_0^\infty u_n(t)\right) \mathrm{d}\,t = \sum_0^\infty \left(\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

Exemples :

■ $\forall t \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_0^\infty t^n$. Les hypothèses du théorème ci-dessus sont vérifiées, donc :

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}\,t}{1-t} = \ln 2 = \sum_0^\infty \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}.$$

■ $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!}$. De la même façon, nous obtenons, pour tout x :

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \left(\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{d}\,t = \sum_0^\infty \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \mathrm{e}^x - 1.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions n'étant souvent pas appliqué correctement, de nombreux candidats n'ont pu démontrer que la fonction ψ était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. »

Rapport E4A, 2002

« les théorèmes d'interversion série-intégrale ne sont pas toujours bien maîtrisés. »

► ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

5.3. Dérivation des séries de fonctions

Théorème 19

Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans E telle que :

- pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors, la fonction somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I \quad S'(x) = \displaystyle\sum_0^\infty u_n'(x)$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Sous ces hypothèses, en notant $\mathrm{D}S = S'$, on peut également écrire :

$$\mathrm{D}\left(\sum_0^\infty u_n\right) = \sum_0^\infty \mathrm{D}u_n$$

Démonstration

On applique le théorème précédent à la série de fonctions uniformément convergente $\sum u_n'$.

Corollaire 19.1

Soit k dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et (u_n) une suite de fonctions de I dans E tels que :

- pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I;
- pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier non nul $p \leqslant k$:

$$\forall x \in I \quad S^{(p)}(x) = \sum_0^\infty u_n^{(p)}(x)$$

Mensa ACADEMY

Application 7

Les fonctions $\zeta(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1) *Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

2) *Étudier cette fonction et tracer son graphe.*

3) *Montrer que la fonction μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

1) La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Cherchons si elle vérifie les hypothèses du corollaire ci-dessus. Posons $u_n(x) = n^{-x}$ pour $x \in]1, +\infty[$. Nous remarquons que :

- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et, si $p \geqslant 1$:

$$u_n^{(p)}(x) = (-\ln n)^p n^{-x} ;$$

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$;
- si $p \geqslant 1$ et $1 < a < b$, pour tout x de $[a, b]$, on a :

$$|(-\ln n)^p n^{-x}| = (\ln n)^p n^{-x} \leqslant (\ln n)^p n^{-a} ;$$

et la série $\sum (\ln n)^p n^{-a}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de $]1, +\infty[$.

La fonction ζ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et, pour tout x de $]1, +\infty[$ et tout $p \geqslant 1$, on a :

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_1^\infty (-\ln n)^p n^{-x}.$$

2) En particulier, $\zeta'(x) = \sum_1^\infty (-\ln n) n^{-x}$ et $\zeta^{(2)}(x) = \sum_1^\infty (-\ln n)^2 n^{-x}$. La fonction ζ est donc décroissante et convexe.

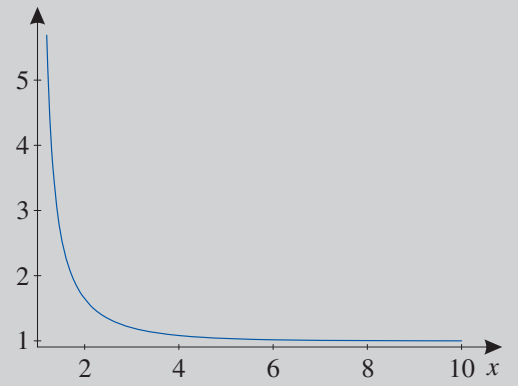
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous savons que :

$$\lim_{x\to 1+}\zeta(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$$

Avec Maple :

```
> plot(Zeta(x)  x=1..10);
```



Doc. 3. La fonction ζ.

3) Posons $v_n(x)=(-1)^{n+1}n^{-x}$ pour $x\in]0,+\infty[$.

Nous remarquons que :

• pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et, si $p\geqslant 1$;

$$v_n^{(p)}(x)=(-1)^{n+1}(-\ln n)^p\,n^{-x}$$

• la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ car elle vérifie, pour tout x de $]0,+\infty[$, le critère spécial des séries alternées.

Soit $p\geqslant 1$ fixé, pour tout x de $]0,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n^{(p)}(x)=(-1)^{n+1}(-\ln n)^p n^{-x}.$$

Montrons que la série numérique :

$$\sum(-1)^{n+1+p}(\ln n)^p\,n^{-x}$$

est, lorsque x est fixé, une série alternée vérifiant le critère spécial. Dans ce but, notons v la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $v(t)=(\ln t)^p t^{-x}$.

Cette fonction est dérivable et :

$$v'(t)=(\ln t)^{p-1}t^{-x-1}(p-x\ln t).$$

Lorsque n est supérieur à $\exp\left(\frac{p}{x}\right)$, la fonction est décroissante. La série numérique $\sum(-1)^{n+1+p}(\ln n)^p n^{-x}$ vérifie donc le critère spécial. La série de fonctions associée converge simplement sur $]0,+\infty[$.

• Considérons ensuite $0<a<b$, $p\geqslant 1$ fixé et x dans $[a,b]$. Si $n\geqslant\exp\left(\frac{p}{a}\right)$, alors la série $\sum(-1)^{n+1+p}(\ln n)^p n^{-x}$ vérifie le critère spécial et :

$$|R_n(x)|\leqslant\left|(-\ln(n+1))^p(n+1)^{-x}\right|$$
$$\leqslant(\ln(n+1))^p(n+1)^{-a}.$$

La série de fonctions $\sum v_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.

La fonction μ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout x de $]0,+\infty[$ et tout $p\geqslant 1$, on a :

$$\mu^{(p)}(x)=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}(-\ln n)^p n^{-x}.$$

5.4. Un exemple important : la fonction exponentielle

$(A,+,\times,\cdot,\|\|)$ est une algèbre normée de dimension finie.

On fixe a dans A et on définit l'application u_n :

$$u_n:\begin{cases}\mathbb{R}\to A\\ t\mapsto u_n(t)=\dfrac{t^n a^n}{n!}\end{cases}$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction somme de cette série de fonctions que l'on notera e_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $De_a=a\,e_a=e_a\,a$.

4) Applications : considérer le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie et $A=\mathcal{L}(E)$, puis $A=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5) Fixons $A = \mathbb{C}$ et $a = z$ un complexe. Montrer que la fonction e_z est la solution de l'équation différentielle linéaire : $y' = z\,y$, vérifiant la condition initiale : $y(0) = 1$.

• Lorsque $a = 0$, $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.

• Les questions 1, 2, 3 et 4 sont immédiatement résolues. Supposons donc $a \neq 0$.

1) Pour $t = 0$, la série $\sum u_n(0)$ converge.

Pour $t \neq 0$, on peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{\|u_{n+1}(t)\|}{\|u_n(t)\|} = \frac{\|ta\|}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_{n+1}(t)\|}{\|u_n(t)\|} = 0 < 1.$$

La série vectorielle $\sum u_n(t)$ est absolument convergente.

2) Soit $[c, d]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Notons $R = \max(|c|, |d|)$. Alors $[c, d] \subset [-R, R]$.

$$\forall t \in [c, d] \quad \|u_n(t)\| = \frac{|t|^n \|a\|^n}{n!} \leqslant \frac{R^n \|a\|^n}{n!}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t\in[c,d]} \|u_n(t)\| \leqslant \frac{R^n \|a\|^n}{n!}.$$

La convergence de la série $\sum \dfrac{R^n \|a\|^n}{n!}$, vue à la question 1, assure la convergence normale sur $[c, d]$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

3) Pour tout n, la fonction u_n est une fonction polynôme de la variable t, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}\,u_0}{\mathrm{d}\,t} = 0$, et pour $n > 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,u_n}{\mathrm{d}\,t}(t) = \frac{nt^{n-1}a^n}{n!} = a\,u_{n-1}(t).$$

Or, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc la série de fonctions $\sum a\,u_{n-1}$ aussi. Ainsi, la série de fonctions $\sum \dfrac{\mathrm{d}\,u_n}{\mathrm{d}\,t}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Nous pouvons appliquer le théorème et conclure que la fonction e_a, somme de la série de fonctions $\sum u_n$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}\,e_a}{\mathrm{d}\,t}(t) = \sum_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,u_n}{\mathrm{d}\,t}(t) = \sum_1^\infty a\,u_{n-1}(t) = a\,e_a(t).$$

Une récurrence simple permet alors d'établir que e_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, prenons $A = \mathcal{L}(E)$ et $a = f$ un endomorphisme de E, alors l'application e_a est l'application :

$$e_f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E) \\ \\ t \mapsto e_f(t) = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} f^n \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $De_f = f\,e_f = e_f\,f$.

Lorsque $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, fixons $a = M$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors l'application e_M est l'application :

$$e_M : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto e_M(t) = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} M^n \end{cases}$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $De_M = M\,e_M = e_M\,M$.

5) Le résultat précédent s'applique. De plus, $e_z(0) = 1$.

Donc e_z est bien la solution de l'équation $y' = zy$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Soit f **une application continue** de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.
Pour montrer **une propriété ou une inégalité sur** f, penser à écrire :

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

● Pour montrer qu'**une application de** f dans $[a,b]$ dans E, **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$, **est de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut montrer que :

f est continue sur $[a,b]$ et f' a une limite l $(l \in E)$ en b.

● Pour montrer qu'**une application de** f dans $[a,b]$ dans E, **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b[$, **est de classe** $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$, on peut montrer que :

f est continue sur $[a,b]$ et, pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}$ a une limite l_r $(l_r \in E)$ en b.

● Pour **calculer un développement limité**, on peut :

- utiliser les opérations sur les fonctions admettant un développement limité ;
- utiliser la formule de Taylor-Young, si la fonction est facile à dériver ;
- intégrer le développement limité de f'.

Mensa ACADEMY

● **Suites de fonctions**

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers f sur I.
Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il suffit d'établir les deux propriétés suivantes :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la suite (f_n') converge uniformément sur tout compact de I vers g.

Lorsque ceci est réalisé, on a $g = f'$.

● **Séries de fonctions**

Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers S.
Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il suffit d'établir les deux propriétés suivantes :

- pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Lorsque ceci est réalisé, on a $S' = \sum_0^\infty u_n'$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

1. Suites récurrentes et point fixe

A. Le théorème du point fixe

$(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, F est un fermé de E, f une application de F dans F qui est contractante (k-lipschitzienne avec $k < 1$).

1) Justifier que, pour tout élément u_0 de F, on peut définir une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \textbf{(1)}$$

Dans la suite de cette partie, u_0 est fixé dans F et la suite (u_n) est définie par **(1)**.

2) Démonstration de la convergence de (u_n).

Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|)$; en déduire qu'elle converge vers un élément l de F.

3) Montrer que le point l est l'unique point fixe de f.

4) Prouver que, pour tout entier n :

$$\|u_n - l\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0 - u_1\|.$$

Cette question complète le résultat de convergence par une indication sur la vitesse de convergence.

B. Points fixes attractifs, points fixes répulsifs

Dans cette partie et dans la suivante, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application de I dans I. On suppose que f admet un point fixe, noté l.

1) Soit u_0 un point de I et (u_n) la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que, si pour un entier $N, u_N = l$, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang N.

On dit qu'un point fixe l de f est *attractif* s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout u_0 de $[l-\alpha, l+\alpha] \cap I$, la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

On dit qu'un point fixe l de f est *répulsif* si toute suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ qui converge vers l est nécessairement stationnaire.

Dans la suite, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

2) Montrer que si $|f'(l)| < 1$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $J = I \cap [l-\alpha, l+\alpha]$ soit une application contractante de J.

En déduire que l est un point fixe attractif de f.

3) Montrer que, si $|f'(l)| > 1$, alors l est un point fixe répulsif de f.

4) Les exemples suivants montrent que, lorsque $|f'(l)| = 1$, tout est possible.

Étudier, pour chaque exemple, si le point fixe l est attractif ou répulsif.

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $l = 1$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)}$ et $l = 1$.

c) $f(x) = \mathrm{Arctan}\,(x)$ et $l = 0$.

d) $f(x) = x^3 + x$ et $l = 0$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 0,5(x-1)^2$ et $l = 1$.

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 0,5(x-1)^2$ et $l = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

C. Vitesse de convergence pour un point fixe attractif

Dans cette partie, on suppose que $|f'(l)| = \gamma < 1$.

On sait, d'après la deuxième partie, que l est un point fixe attractif de f. On suppose connu un réel $\alpha > 0$ tel que f soit une application contractante de $J = I \cap [l-\alpha, l+\alpha]$.

Dans la suite, u_0 est choisi dans J et la suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Dans cette question, $\gamma \neq 0$.

Soit ε un réel > 0 tel que $\gamma - \varepsilon > 0$ et $\gamma + \varepsilon < 1$. Prouver l'existence d'un entier n tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad (\gamma-\varepsilon)^p |u_n - l| \leqslant |u_{n+p} - l| \leqslant (\gamma+\varepsilon)^p |u_n - l|.$$

La minoration $(\gamma-\varepsilon)^p |u_n - l| \leqslant |u_{n+p} - l|$ prouve que l'on ne peut guère faire mieux.

2) Dans cette question, $\gamma = 0$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.

On note $M = \sup_{t \in J} |f''(t)|$.

a) Étudier brièvement le cas où $M = 0$.

b) Prouver l'existence d'un entier n tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad |u_{n+p} - l| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{10}\right)^{2^p}.$$

Pour simplifier, on peut dire qu'à partir du rang n, on double le nombre de décimales connues dans l'approximation de l par u_k. Attention toutefois aux cas particuliers (l proche de 4, par exemple).

La vitesse de convergence est beaucoup plus rapide que dans le cas précédent.

2. Calculs approchés d'intégrale, majorations de l'erreur

Les sommes de Riemann permettent de réaliser le calcul approché d'intégrales. Cette méthode élémentaire est appelée *méthode des rectangles*. Son efficacité numérique est assez limitée car l'incertitude est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, ainsi que nous le montrons dans l'*exercice* 10 du *chapitre 6*.

Dans ce TD, nous exposons trois autres méthodes simples de calcul approché d'intégrales. Pour deux d'entre elles (méthodes des trapèzes et des tangentes), l'incertitude est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$; pour la troisième (méthode de Simpson) c'est un $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

A. La méthode des trapèzes et la méthode des tangentes

Dans cette partie, f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ et $M_2 = \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

La méthode des trapèzes

1.a) Interpréter $\dfrac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$ en terme d'aire de trapèze.

b) Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} = \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Prouver que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2}\right]\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

La méthode des tangentes

3) En vous aidant d'un schéma, prouver que :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

4) Prouver que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left[k - \frac{1}{2}\right]\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

5) Prouver que, si f est convexe (ou concave) sur $[a,b]$, alors les deux approximations précédentes de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en fournissent un encadrement.

B. la méthode de Simpson[1]

Dans les deux méthodes qui viennent d'être exposées, on approxime d'abord l'intégrale de f sur $[a,b]$ par une formule utilisant la valeur de f en un (ou deux) point.

La méthode de Simpson donne une approximation de l'intégrale de f en utilisant, au départ, trois points d'interpolation.

Dans la suite, pour toute application f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, on note :

$$\Delta(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

1) On pose $P_k(t) = \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^k$. Calculer $\Delta(P_k)$ pour k dans $\{0,1,2,3\}$.

En déduire que $\Delta(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de degré $\leqslant 3$.

2) Dans cette question et dans la suivante, f est une application de classe $\mathcal{C}^4$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

On note $M_4 = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$ et :

$$R_4(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Prouver que $\Delta(f) = \Delta(R_4)$.

b) Montrer que :

$$\forall x \in [a,b] \quad |R_4(x)| \leqslant \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4.$$

En déduire que $|\Delta(f)| \leqslant \dfrac{M_4(b-a)^5}{720}$.

[1] **Thomas Simpson**, mathématicien anglais (1710-1761).
Il exerce le métier de tisserand, apprend seul les mathématiques, écrit et publie plusieurs ouvrages de mathématiques à partir de 1737. Sa formule paraît en 1743 dans le cas des arcs de parabole. Elle était toutefois déjà connue de Cavalieri en 1639. Le grand mérite de Simpson est d'avoir pensé à découper $[a,b]$ en n morceaux pour améliorer l'approximation.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque : Un travail plus fin permet de majorer $|\Delta(f)|$ par $\dfrac{M_4(b-a)^5}{2880}$ au lieu de $\dfrac{M_4(b-a)^5}{720}$. Nous contentons nous de signaler ce résultat. Les amateurs de calculs vérifieront aisément que, si $f = P_4$, alors $|\Delta(f)| = \dfrac{M_4(b-a)^5}{2880}$. On ne peut donc pas améliorer cette majoration valable pour l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^4$.

3) Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\left[f(a). + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f(b) \right.$$
$$\left. + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left[k - \frac{1}{2}\right]\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Prouver que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{720\,n^4}.$$

4) Comparez avec votre calculatrice les valeurs approchées obtenues par ces trois méthodes pour

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

5) Et avec MAPLE ?

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

Une série de fonctions

ÉNONCÉ

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Qu'en déduisez-vous ?

2) Montrer que la fonction $S = \sum_0^\infty \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrer que S vérifie une équation différentielle simple du second ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Montrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

CONSEILS

On montre, pour tout $k \geqslant 1$, la convergence normale de la série des dérivées k-ièmes sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

SOLUTION

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout $x \geqslant 0$: $|u_n(x)| = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction somme, S, est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $p \geqslant 1$, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = (-n)^p \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

Soit $a > 0$. $\forall x \in [a,+\infty[\quad |u_n^{(p)}(x)| \leqslant e^{-na} n^{p-2}$.

La série $\sum e^{-na} n^{p-2}$ converge, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. La fonction S est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Pour tout $x > 0$, on a : $S''(x) + S(x) = \sum_0^\infty e^{-nx} = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

4) Pour $x > 0$, $S'(x) = \sum_0^\infty \left(-n \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)$. Donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad S'(x) \leqslant -\sum_{n=0}^{N} n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

La fonction S' est croissante sur $\mathbb{R}^+$. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite L en 0 dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Si L appartient à $\mathbb{R}$, en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad L \leqslant -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}.$$

Or la série $\sum \dfrac{n}{1+n^2}$ diverge. C'est absurde. Donc $L = -\infty$.

De plus, la fonction S est continue en 0. Son graphe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

La fonction S n'est pas dérivable en 0.

5) La convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions $\sum u_n$ permet d'écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_0^\infty \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right) = 1.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD d'algorithmique

La méthode de Newton, résolution d'équations numériques

Partie mathématique. Algorithme de Newton-Raphson.

Si f est une fonction numérique continue sur $]a,b[$, telle que $f(a)f(b) < 0$, alors nous savons qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que : $f(c) = 0$. Quelques dichotomies permettent d'approcher c par un réel x_0, mais cette méthode converge lentement.

On cherche alors une fonction g, définie telle que :

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x$$

sur un intervalle contenant x_0 et c, k-contractante (*cf* TD1),

La suite définie par u_0 et, pour tout n entier, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge vers c. La convergence est d'autant plus rapide que k est proche de 0.

Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, la fonction g est alors choisie de la forme : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha}$, avec α proche de $f'(c)$.

Toutefois $f'(c)$ n'est pas connu, mais, lorsque f' ne s'annule pas au voisinage de c, le choix de $\alpha = f'(x)$ y remédie.

c est alors un point fixe attractif pour la fonction h définie par :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La suite définie par x_0 et, pour tout n : $x_{n+1} = h(x_n)$ converge vers c et la convergence est quadratique. Le nombre de décimales correctes est approximativement doublé à chaque itération.

L'expression de la suite correspond à une linéarisation de la fonction f au voisinage de x_n.

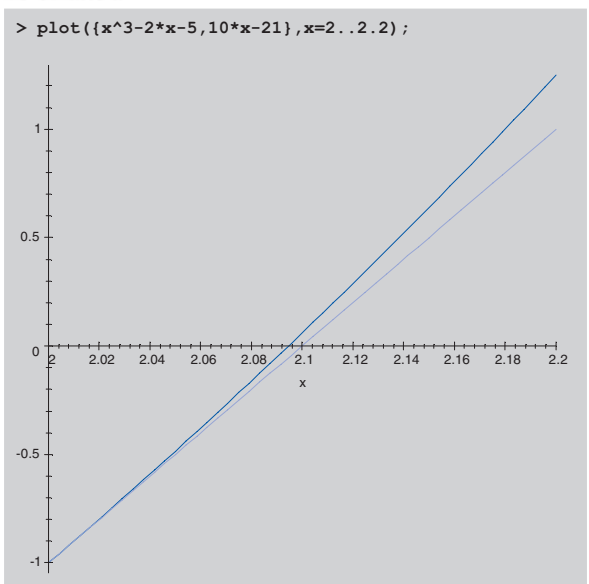
En effet, si x_n est calculé, on cherche x_{n+1} tel que :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) = 0 &= f(x_n + h) \\ &= f(x_n) + f'(x_n)h + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

En négligeant le terme $h\varepsilon(h)$, on obtient $h = x_{n+1} - x_n$, puis x_{n+1}.

Cette méthode a été exposée en 1669 par Newton pour la résolution de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, avec $x_0 = 2$.

La formule de linéarisation est due à Raphson en 1690. L'interprétation géométrique est simple. La fonction est approximée par sa tangente.



Partie informatique.

En calcul formel, les nombres flottants (décimaux) sont représentés par des couples (m,e) d'entiers, respectivement la mantisse et l'exposant.

Tous les calculs flottants en grande précision (précision de la machine) sont basés sur les calculs entre grands entiers. Les algorithmes entre grands entiers réalisent les calculs élémentaires comme la somme, la différence et le produit.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le premier qui ait mis au point une méthode de multiplication rapide semble être A. Karatsuba. Il remarque en 1962 qu'un entier de taille $2k$ peut s'écrire $a + b10^k$. La multiplication de deux tels entiers :

$$(a + b10^k)(c + d10^k) = ac + [(a - b)(c - d) - ac - bd]10^k + bd10^{2k}$$

nécessite donc trois multiplications d'entiers de k chiffres, plus des décalages et des additions.

1) En utilisant la méthode de Newton-Raphson, indiquer un algorithme de calcul de l'inverse d'un entier n'utilisant que des additions et des produits.

```
> restart:b:=11234567890: x:=10^(-10): to 3 do x:=2*x-b*x^2; od;
```

$$x := \frac{876543211}{10000000000000000000}$$

$$x := \frac{88990311337840136613910 2931}{10000000000000000000000000000000000000000}$$

$$x := \frac{8901098429643751569143219195576437856874814293371301041180735 71}{10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000}$$

```
> b:=11234567890:Digits:=20: x:=10^(-10): to 6 do x:=2.*x-b*x^2;
  od;
>
```

$$x := .876543211000000000 10 \quad {}^{-10}$$

$$x := .889903113378401366 1410 \quad {}^{-10}$$

$$x := .890109842964375156 9310 \quad {}^{-10}$$

$$x := .890109890999997408 6410 \quad {}^{-10}$$

$$x := .890109891000000000 9110 \quad {}^{-10}$$

$$x := .890109891000000000 8710 \quad {}^{-10}$$

```
> 1./b;
```

$$.890109891000000000 8910 \quad {}^{-10}$$

2) Indiquer un algorithme de calcul de $\sqrt{2}$.

Modifier cet algorithme pour prendre en compte le nombre de décimales calculées. Comparer avec la version précédente.

```
> f(x)=x^2-2; x(n+1)=x(n)/2+1/x(n)
> restart:x:=7/5:st:=time(): to 5 do x:=x/2+1/x; od;time()-st;
```

$$x := \frac{99}{70}$$

$$x := \frac{19601}{13860}$$

$$x := \frac{768398401}{543339720}$$

$$x := \frac{1180872205318713601}{835002744095575440}$$

$$x := \frac{27889183305885641813085975389247744 01}{19720630637346392639844550732991188 80}$$

$$0$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'instruction *Maple* suivante donne 1000 décimales exactes de racine 2. Nous vous laissons la joie de les découvrir.

```
> restart:Digits:=1000:x:=1.4:st:=time(): to 9 do x:=x/2.+1/x:
  od:R:=x;evalf(sqrt(2));time()-st;
```

3) Indiquer un algorithme de calcul de la racine k-ième d'un entier $m > 0$.

```
> f(x)=x^k-m et x(n+1)=(k-1)x(n)/k+mx(n)^(1-k)/k.
> restart: x:=3/2: k:=3: m:=5: to 4 do x:=(1-1/k)*x+m/k*x^(1-k);
  od;
```

$$x := \frac{47}{27}$$

$$x := \frac{306061}{178929}$$

$$x := \frac{85982094476505407}{50282628861668427}$$

$$x := \frac{1906976194409842798920507776545608642156463726160701}{1115206443760798337077626618277067277279580809462369}$$

```
> restart: Digits:=1: x:=1.5: k:=3: m:=5: to 6 do
  Digits:=2*Digits: x:=(1-1/k)*x+m/k*x^(1-k); od; evalf(5^(1/3));
```

$$Digits := 2$$

$$x := 1.8$$

$$Digits := 4$$

$$x := 1.715$$

$$Digits := 8$$

$$x := 1.7099906$$

$$Digits := 16$$

$$x := 1.709975946802264$$

$$Digits := 32$$

$$x := 1.7099759466766969893623295134493$$

$$Digits := 64$$

$$x := 1.709975946676696989353108872543860109868104830668576167181479842$$

$$1.709975946676696989353108872543860109868055110543054924382861707$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \ln(1+xt)\,\mathrm{d}t$. Étudier la dérivabilité de F.

2 Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$

On fixe un entier $n > 0$. Prouver l'existence d'une famille $(x_{n,i})_{i\in[\![0,n]\!]}$ de réels telle que :

- $a = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} = b$.
- $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \int_{x_{n,i-1}}^{x_{n,i}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition.

1) $f(x) = [\sin(2x) - 2\cos(3x)]\mathrm{e}^x$. **2)** $g(x) = x\mathrm{Arccos}^{\,2}(x)$.

4 Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^3 + \cos(t)}$.

5 Calculer une primitive de $\frac{1}{(2t+1)^{2/3} - (2t+1)^{1/2}}$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

6 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0. Montrer que la fonction F définie sur $]0,1]$ par $F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

7 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et a un élément de $]-\infty, 0[\cup \{-\infty\}$.

On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$. Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.

8 Étudier la convergence de la suite (f_n) sur $[0,1]$ vers f.

Peut-on en déduire, avec les théorèmes du cours, que :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n ?$$

1) $f_n(x) = nx\exp(-nx^2)$; **2)** $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$;

3) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

9 Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Calculer la somme S de cette série.

10 On pose, pour x réel, $u_n(x) = nx^n$. Calculer la somme $\sum_0^\infty u_n(x)$ lorsqu'elle existe.

11 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\exists k > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f = 0$.

12 * **1)** Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. On note $M = \sup_{t\in[a,b]} |g''(t)|$.

Montrer que :

$$\left|g(b) + g(a) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{4}$$

2) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right];$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on déterminera.

3) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)}$.

13 * Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ **(1)**

14 * Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour tout réel x et tout élément P de E, on pose $f_x(P) = P(x)$ ainsi que :

$$\Phi(P) = \int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, a, b et c sont trois réels distincts.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante simple liant a, b et c pour que les quatre formes linéaires f_a, f_b, f_c et Φ forment une famille liée de E^*.

2) On suppose cette condition remplie. En déduire une expression simple de $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$ valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

15 Dans cet exercice, $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et, pour tout élément f de E, on définit l'application $\Phi(f)$ en posant :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Prouver que Φ est un endomorphisme de E.

2) Étudier l'injectivité et la surjectivité de Φ.

3) Déterminer les éléments propres de Φ.

16 * **1)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^n = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution sur $[0, n]$, notée u_n.

2) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite L.

3) Déterminer un développement limité de u_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

17 * **1)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on peut poser $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$, et déterminer le signe de $f(x)$.

2) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Calculer f' et prouver que f' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ en un point α de $]1, 2[$.

4) En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, déterminer un encadrement simple de $f(x)$ et déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

5) Dresser le tableau des variations de f et donner l'allure de son graphe.

18 * Étude et graphe de la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

19 ** On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on définit l'endomorphisme T de E par :

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par récurrence, on définit $T^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour $n \geqslant 0$:

$$T^{n+1} = T \circ T^n$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T^n)$ et $\mathrm{Im}(T^n)$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que (T^n) induit un isomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

3) Déterminer les spectres de T et T^2.

4) Montrer que, pour tout élément f de E, la série de fonctions $\sum T^n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T^n(f)(x)$.

20 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{x^2 + n^2}$$

1) Donner le domaine de définition de f. Calculer $f(0)$.

2) Donner une expression de $f(x) - \ln 2$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^\infty$.

21 ** Soit g une application continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\,\mathrm{d}u$$

22 Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ quand la série converge.

1) Déterminer l'ensemble E de définition de la fonction f.

2) Donner pour la dérivée $f'(x)$ une expression simple valable sur $]-1, 1[$. En déduire le tableau de variations de f.

3) On donne $f(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $f(-1)$.

4) Préciser les tangentes en $x = -1$ et $x = 1$ à la courbe d'équation $y = f(x)$.

5) Trouver l'ensemble D de définition de la fonction φ telle que $\varphi(x) = f(x) + f\left(-\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Calculer $\varphi'(x)$. En déduire la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Fonctions intégrables

8

Introduction

L'histoire de la théorie de l'intégration est typique du cheminement des idées mathématiques. Les mathématiciens du XVIIIe *siècle ont utilisé le calcul différentiel et intégral sur des bases intuitives.*

En 1832, *les travaux de Cauchy sur la notion de limite lui permettent de définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.*

En 1854, *Bernhard Riemann, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, élargit le problème en cherchant à préciser les fonctions auxquelles cette définition s'applique. Il introduit les fonctions intégrables au sens de Riemann, un ensemble complexe, difficile à manipuler.*

Au début du XXe *siècle, Emile Borel définit les ensembles de réels de mesure nulle. Henri Lebesgue, dans sa thèse de* 1902, *reprend certaines idées de Borel et fournit un cadre plus simple à l'intégration.*

Des théorèmes puissants vont s'appliquer aux suites et séries de fonctions, ainsi qu'aux fonctions définies par des intégrales.

Nous présenterons certains d'entre eux en nous limitant à des fonctions continues par morceaux.

Nous avons déjà défini la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Nous allons maintenant généraliser cette définition à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

OBJECTIFS

- Convergence d'une intégrale généralisée.
- Fonction continue par morceaux sur un intervalle I, intégrable sur I.
- Critères d'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur I.
- Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables.
- Théorème de convergence dominée.
- Intégration terme à terme d'une série de fonctions.
- Continuité d'une fonction définie par une intégrale.
- Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées dans ce chapitre seront des *fonctions continues par morceaux sur* I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Convergence des intégrales généralisées

1.1. Intégrales convergentes

L'étude des séries nous a conduit à définir les séries numériques convergentes et les séries absolument convergentes. Nous allons, en procédant de manière analogue, étendre la notion d'intégrale.

■ Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})\ (b \in \overline{\mathbb{R}})$. Pour tout x de $[a,b[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si F a une limite à gauche en b, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$) converge et on note :

$$\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous travaillerons toujours avec des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. Lorsque l'intervalle I considéré n'est pas un segment de $\mathbb{R}$, les intégrales sont qualifiées d'impropres ou de généralisées.

■ On définit, de manière analogue, si f est une fonction de $\mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$, $(a \in \overline{\mathbb{R}})$, lorsqu'elle converge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b]} f$.

■ Soit f une fonction de $\mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})\ \left((a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2\right)$, et c un point de $]a,b[$.

Si les fonctions $\left(x \mapsto \displaystyle\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et $\left(x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ admettent une limite, réelle ou complexe, respectivement en a et en b, la somme de ces limites est notée, de manière impropre, $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ (ou $\displaystyle\int_{]a,b[} f$) est convergente.

Une intégrale généralisée qui ne converge pas est dite divergente .

■ Soit f dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Les intégrales $\displaystyle\int_{]a,b]} f$, $\displaystyle\int_{]a,b[} f$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ convergent et :

$$\int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f.$$

Lorsque $I = [a,b]$, et f est dans $\mathcal{CM}([a,b])$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ définie dans le chapitre 5, est la limite en b de $(x \mapsto \displaystyle\int_a^x f)$. Il est cohérent d'utiliser la même notation.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On dira aussi que l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ converge, mais cette intégrale n'est pas qualifiée d'impropre.

En définitive, si I est un intervalle, et f une fonction de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, la notation $\int_I f$ désigne :
- Si I est un segment, l'intégrale définie dans le chapitre 5.
- Sinon, lorsque l'intégrale $\int_I f$ converge, la valeur de cette intégrale impropre.

Exemple : La fonction $[\pi,+\infty[\to\mathbb{C}, x\mapsto\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$.

$$\int_\pi^x \left(2\mathrm{i}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t}\right]_\pi^x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\pi^x \left(2i-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

L'intégrale $\int_\pi^{+\infty}\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_\pi^{+\infty}\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

1.2. Une condition suffisante d'existence de l'intégrale impropre

On dit qu'une fonction f de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ est **intégrable** (ou **sommable**) sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

Lorsque $\int_I |f|$ converge, on dit que $\int_I f$ est absolument convergente.

L'ensemble **des fonctions continues par morceaux et intégrables de I** dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$.

La notation $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ n'est pas universelle. Vous rencontrerez parfois $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$.
Attention, dans les ouvrages de mathématiques plus avancées, cette notation désigne un ensemble plus vaste que $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$, dans le cadre d'une théorie plus complexe.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de convergence d'une intégrale impropre.

Théorème 1
Soit f une fonction continue par morceaux intégrable sur I. Alors l'intégrale $\int_I f$ converge.

Démonstration

Rédigeons la démonstration dans le cas où $I=[a,b[$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soit f dans $\mathcal{I}(I,\mathbb{R})$. Nous savons que : $0\leqslant f+|f|\leqslant 2|f|$.

La fonction $\left(x\mapsto\int_a^x (f+|f|)(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est croissante sur $[a,b[$, majorée par $2\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Elle admet une limite réelle en b. L'intégrale généralisée $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Rapport Centrale, 2001
« Les théorèmes généraux sur l'intégrabilité sont en général connus, les définitions le sont beaucoup moins ! »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Lorsque la fonction f est à valeurs complexes, on utilise :

$$f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f).$$

Théorème 2

Une fonction f de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est intégrable sur I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, on ait $\displaystyle\int_J |f| \leqslant M$.

Dans ce cas :

$$\int_I |f| = \sup_{[c,d]\subset I} \int_{[c,d]} |f|.$$

Cette caractérisation de f intégrable sur I est parfois proposée comme définition de l'intégrabilité de f.

Démonstration

Rédigeons dans le cas où $I = [a, b[$. Alors la fonction φ définie sur I par : $\left(x \mapsto \displaystyle\int_{[a,x]} |f|\right)$ est croissante sur I. Elle admet une limite à gauche en b si et seulement si elle est majorée sur $I = [a, b[$.

Pour tout segment $J \subset I$, on a, si f est intégrable sur I :

$$\int_J |f| \leqslant \int_I |f| = \sup_{[c,d]\subset I} \int_{[c,d]} |f|.$$

Rapport CCP, 2001

« L'intégrabilité de β et γ est rarement convaincante. »

Corollaire 2.1

Soit f dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. Alors f est intégrable sur les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ et :

$$\int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$$

Rapport Centrale, 2000

« ...ce que l'on doit vérifier dans le cadre strict du programme est la continuité, ou la continuité par morceaux de l'intégrande. »

Démonstration

Soit f une fonction de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, avec $I = [a, b]$.

Le réel $M = \displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}\,t$ convient.

Dans le cas où $I = [a, b[$, pour tout $a < x < b$, on a : $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}\,t \leqslant M$. La fonction croissante de $\left(x \mapsto \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}\,t\right)$ a donc une limite réelle en b. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}\,t$ converge.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« De plus, on peut attendre de candidats au concours commun qu'ils justifient dans un premier temps l'existence des intégrales qu'ils manipulent. »

Corollaire 2.2

Soit f une fonction de $\mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$ $\left((a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2\right)$, et c un point de $]a, b[$.

La fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I \cap]-\infty, c]$ et sur $I \cap [c, +\infty[$.

Exemple :

- La fonction $f : \left(x \mapsto |x| \sin(x) \mathrm{e}^{-x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est intégrable car, pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \leqslant \int_a^b x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Elle est également intégrable sur $\mathbb{R}^-$, car, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^-$:

$$\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b |x| \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.3. Les exemples à connaître

Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ sont appelées **intégrales de Riemann.**

■ Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$, où a est réel.

Les fonctions f_a définies sur $[1,+\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$.

- Si $a = 1$, alors l'intégrale diverge.
- Si $a \neq 1$ alors, pour tout $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \left[\frac{-t^{-a+1}}{a-1}\right]_1^x = \frac{1}{a-1}\left(1 - x^{-a+1}\right).$$

Finalement :

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. Les fonctions f_a sont intégrables sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$. Dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}.$$

■ Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$, où a est réel.

Les fonctions f_a définies sur $]0,1]$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a}$ sont continues et positives sur $]0,1]$.

- Si $a = 1$, alors l'intégrale diverge.
- Si $a \neq 1$ alors, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \left[-\frac{t^{-a+1}}{a-1}\right]_x^1 = \frac{1}{1-a}\left(1 - x^{1-a}\right).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ converge si et seulement si $a < 1$. Les fonctions f_a sont intégrables sur $]0,1]$ si et seulement si $a < 1$. Dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}.$$

Rapport Ensam, 2002

« la notion d'intégrabilité de fonctions à valeurs complexes est maîtrisée par trop peu d'étudiants. »

Bernhard Riemann, *mathématicien allemand, (1826-1866).*

L'intervalle $[1,+\infty[$ n'est pas borné.

Rapport TPE, 2002

« On a ainsi vu des candidats affirmer (et même tenter de démontrer) l'intégrabilité de $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$ *sur* $]0,1[$. *»*

L'intervalle $]0,1]$ est borné, mais les fonctions ne sont pas bornées sur cet intervalle si $a > 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \ln(x)$ est continue et négative sur $]0,1]$.

Pour tout $x > 0$, : $\int_x^1 (-\ln(t))\,\mathrm{d}t = \big[-t\ln(t)+t\big]_x^1$.

L'intégrale converge et : $\int_0^1 (-\ln(t))\,\mathrm{d}t = 1$. La fonction ln est intégrable sur $]0,1]$.

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ est toujours divergente.

L'intervalle $]0,1]$ est borné, mais la fonction n'est pas bornée sur cet intervalle.

■ Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-at)\,\mathrm{d}t$, où a est réel.

Les fonctions f_a, définies sur $[0,+\infty[$ par $f_a(x) = \exp(-at)$, sont continues et positives sur $[0,+\infty[$.

Si $a = 0$, l'intégrale diverge.

Si $a \neq 0$, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \exp(-at)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\exp(-at)}{a}\right]_0^x.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-at)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a > 0$. Les fonctions f_a sont intégrables sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si $a > 0$.

L'intervalle $[0,+\infty[$ n'est pas borné.

En pratique, pour montrer que l'intégrale converge, nous essaierons de prouver que la fonction f est intégrable sur I.

Lorsque $I =]a,b[$, l'intégrabilité sur I de f équivaut à la convergence des intégrales $\int_{]a,c]} |f|$ et $\int_{[c,b[} |f|$ donc à l'intégrabilité sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$, de $|f|$ où $a < c < b$.

Toutefois, il existe des fonctions non intégrables sur I dont l'intégrale converge.

Application 1

L' intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \quad si \quad t \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

1) *Montrer que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.*

2) *Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

3) *En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente.*

1) f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Considérons les intégrales $\int_0^{n\pi} |f|$.

$$\int_0^{n\pi} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}|f| = +\infty$ et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Intégrons par parties. Pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $g : \left(t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0. g est bornée et donc intégrable sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$: $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$.

Donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$ car son intégrale sur tout segment contenu dans $[1, +\infty[$ est majorée par $\displaystyle\int_{[1,+\infty[}\frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3) La fonction $h : \left(t \mapsto \sin(\mathrm{e}^t)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit a et b deux réels, $b > 0$.

Nous avons :

$$\int_0^b |\sin(\mathrm{e}^t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^b}\left|\frac{\sin u}{u}\right|\mathrm{d}u.$$

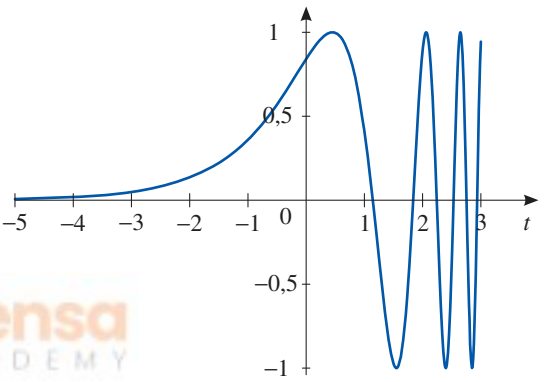
La fonction h n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Mais :

$$\int_a^b \sin\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^b}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente.



Doc. 1. $(t \mapsto \sin(\mathrm{e}^t))$

2 Critères d'intégrabilité de fonctions positives

2.1. Utilisons l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un segment

Théorème 3

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$.

1) f est intégrable sur I si et seulement si il existe un réel M et une suite croissante $([a_n, b_n])$ de segments dont la réunion est égale à I telle que, pour tout n, $\displaystyle\int_{[a_n,b_n]} f \leqslant M$.

2) Si f est intégrable sur I, alors, pour toute suite croissante $([a_n, b_n])$ de segments dont la réunion est égale à I, on a :

$$\int_I f = \sup_n \int_{[a_n,b_n]} f = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a_n,b_n]} f$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

1) Soit $[c, d]$ un segment contenu dans I ; alors c et d sont dans I, donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad [c,d] \subset [a_n, b_n] \quad \text{d'où} \quad \int_{[c,d]} f \leqslant \int_{[a_n,b_n]} f \leqslant M.$$

f est donc intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leqslant \sup_n \int_{[a_n,b_n]} f$. La réciproque est immédiate.

2) Ce point se démontre immédiatement en utilisant les inégalités.

Exemple :

La fonction $f : (x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-n} + 1] \leqslant 1.$$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

2.2. Intégrabilité et primitives

Lorsqu'une primitive F de la fonction f est connue, son utilisation est très efficace.

Théorème 4

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$ et F une primitive de f sur I. Alors :

- f est intégrable sur I si et seulement si la fonction F est bornée sur I ;
- si f est intégrable sur I, on a :

$$\int_I f = \lim_{y \to \sup I} F(y) - \lim_{x \to \inf I} F(x)$$

Exemple :

■ Posons $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. f est continue, positive sur $\mathbb{R}$. Sa primitive $F : (t \mapsto \text{Arctan } t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.***

Application 2

Convergence et limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

Étudier la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

Posons $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ sur $]0, 1[$.

La fonction f est continue et positive sur $]0, 1[$. Son graphe admet la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ pour axe de symétrie. Une primitive de f sur $]0, 1[$ est la fonction $(t \mapsto \text{Arcsin } (2t - 1))$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec Maple :

```
> int(1/sqrt(t*(1-t)),t);
```

$$\arcsin(2t-1)$$

Doc. 2. *Une primitive de* f.

Cette primitive est bornée sur $]0,1[$, donc f est intégrable sur $]0,1[$.

$$u_n = \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{n}\sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}$$

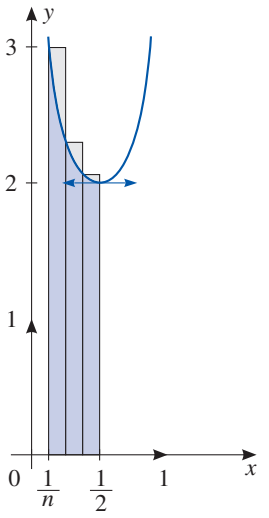
$$= \frac{1}{n}\sum_1^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Posons $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^{\mathrm{E}(n/2)} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Lorsque n est pair, $2v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$ et lorsque n est impair, $2v_n = u_n$. De plus, la fonction f est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Pour tout k de $\left[\!\left[1, \mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right) - 1\right]\!\right]$:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{(k-1)}{h}}^{\frac{k}{n}} f.$$



Doc. 3. *Comparaison intégrale et suite*

Et pour tout $k = \mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right)$: $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} f$.

Nous en déduisons : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}{n}} f \leqslant v_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f$.

Puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}{n}} f = \int_0^{\frac{1}{2}} f$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2v_n = \int_{]0,1[} f = \pi.$$

2.3. Intégrabilité sur $[a,+\infty[$ et comportement de f en $+\infty$

Soit $I = [a,+\infty[$ et f dans $\mathcal{CM}\left(I, \mathbb{R}^+\right)$.

1) Si f admet l pour limite en $+\infty$ et si f est intégrable sur I, alors $l = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$ ne suffit pas à assurer l'intégrabilité de f.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$ n'est pas une condition nécessaire d'intégrabilité de f.

Démonstration

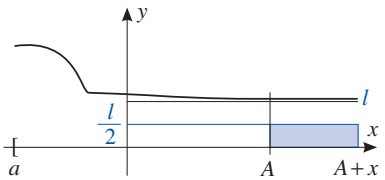
1) f est une fonction positive et l sa limite en $+\infty$. Si $l \neq 0$, alors $l > 0$.

Dans ce cas, f ne peut être intégrable sur I, car (*doc.* 4) :

$$\exists A \in I \quad \forall x \geqslant A \qquad f(x) \geqslant \frac{l}{2}.$$

Et donc :

$$\forall x \geqslant A \quad \int_{[A,x]} f \geqslant \frac{l}{2}(x-A).$$



Doc. 4. *f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Un contre-exemple suffit pour comprendre qu'une fonction continue par morceaux sur I, de limite nulle en $+\infty$ et positive sur I, peut ne pas être intégrable sur I.

Considérons la fonction f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Elle est positive et continue sur I et de limite nulle en $+\infty$. De plus $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. f n'est pas intégrable sur I.

3) Ici, un exemple suffit aussi pour montrer qu'une fonction peut être continue par morceaux, positive et intégrable sur $[a, +\infty[$, sans nécessairement avoir de limite nulle en $+\infty$.

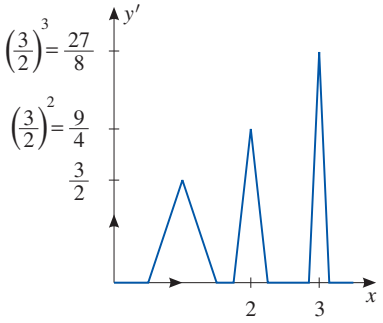
Soit $n > 1$. Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3^n\left(x - n + \dfrac{1}{2^n}\right) & \text{si} \quad x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n\right] \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* \\ f(x) = -3^n\left(x - n - \dfrac{1}{2^n}\right) & \text{si} \quad x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2^n}\right] \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin \displaystyle\bigcup_{n \geqslant 1} \left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right] \end{cases}$$

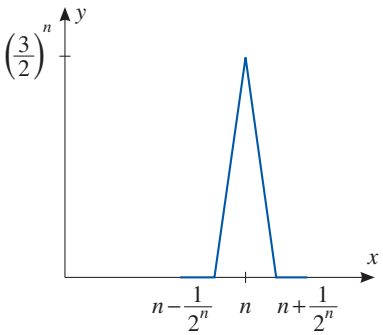
Alors, f est dans $\mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ et ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, toutefois :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \int_{\left[0, n + \frac{1}{2^n}\right]} f = \sum_1^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \leqslant 3.$$

La fonction f est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3.$



Doc. 5. *Graphe de* f



Doc. 6.

Mensa ACADEMY

Application 3

Intégrabilité et limite en $+\infty$

Soit a un réel et f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $[a, +\infty[$.

1) *Montrer que, si f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$, elle tend vers 0 en $+\infty$.*

2) *Montrer qu'il existe une suite (x_n) croissante de $[a, +\infty[$ telle que :*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$$

1) Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \geqslant n \qquad f(x_n) \geqslant \varepsilon.$$

L'uniforme continuité de f se traduit par l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout (x, y) de $[a, +\infty[^2$

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Nous en déduisons, pour tout n : $\displaystyle\int_{x_n}^{x_n + \alpha} f \geqslant \frac{1}{2}\alpha\varepsilon.$

Le critère de Cauchy pour l'existence de la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_a^x f$, n'est pas vérifié.

2) f est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe et, par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} f = 0.$$

Or f est continue. Soit F une primitive de f. Pour tout n, il existe donc x_n dans $]n, n+1[$ tel que :

$$\int_n^{n+1} f = F(n+1) - F(n) = f(x_n).$$

La suite obtenue (x_n) convient.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4. Comparaison à une série numérique

Théorème 5
Soit f dans $\mathcal{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, décroissante, alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge :

$$f \in \mathcal{I}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right) \Leftrightarrow \sum f(n) \quad \text{converge}$$

Démonstration
On se rapportera au chapitre 4 sur les séries numériques.

Exemples :

Les intégrales de Riemann

■ Les fonctions f_a définies sur $[1, +\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

Lorsque $a > 0$, la fonction f_a est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème précédent nous indique qu'elle est intégrable si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{n^a}$ converge, donc si et seulement si $a > 1$.

Lorsque $a \leqslant 0$, la fonction f_a n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car ses primitives ne sont pas bornées.

Rapport Centrale, 2000
« Les erreurs les plus fréquentes sont de croire que $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. »

■ Si b est un réel fixé, les fonctions g_a, définies sur $]b, +\infty[$ par $g_a(x) = \dfrac{1}{(x-b)^a}$, sont continues et positives sur cet intervalle. Pour quelles valeurs de a sont-elles intégrables sur $[b+1, +\infty[$?

Soit en reprenant le calcul précédent, soit en effectuant le changement de variable défini par $u = x - b$, vous montrerez aisément que :

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{(x-b)^a}\right)$ est intégrable sur $[b+1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

La fonction g_a n'est jamais intégrable sur $]b, +\infty[$. Elle est intégrable sur $]b, b+1]$ lorsque $a < 1$.

► *Pour s'entraîner : ex. 4.*

2.5. Critères d'intégrabilité de fonctions à valeurs positives par comparaison

2.5.1 Croissance de l'intégrale

Théorème 6. Croissance de l'intégrale
Soit f, g dans $\mathcal{CM}\left(I, \mathbb{R}^+\right)$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

- Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et

$$0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g$$

- Si f n'est pas intégrable sur I, alors g ne l'est pas.

Les critères énoncés dans ce paragraphe sont des conditions suffisantes d'intégration.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

- Si g est intégrable sur I, alors, pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, on a :

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g \leqslant \int_I g = M$$

Donc f est intégrable sur I, et $0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g$.

- Par contraposée, si f n'est pas intégrable sur I, g ne l'est pas.

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

Application 4

Deux calculs d'intégrales

1) *Montrer que la fonction* $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$.

2) *Soit* $\alpha > 0$. *Préciser pour quelles valeurs de* α *la fonction* $\left(t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha}\right)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

3) *Calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.

1) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)}$ et la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = \lim_{n\to+\infty} 2\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Avec Maple :

```
> int(2/(1+u^4)),u=0..infinity);
```

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

2) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha}\right)$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Or, sur $]0,1]$, on a :

$$\frac{t^{1-\alpha}}{2} \leqslant \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha} \leqslant t^{1-\alpha}.$$

La fonction $(t \mapsto t^{1-\alpha})$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 2$.

Et, sur $[1,+\infty[$,

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{t^\alpha}.$$

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

3) Fixons $0 < \varepsilon < A$ et intégrons par parties.

$$\int_\varepsilon^A \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t = \left[-2\frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A 2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$$

Puis :

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = \pi\sqrt{2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.5.2 Intégrabilité et comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Théorème 7

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f, g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$.

Si $f =_b O(g)$ et g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

On obtiendrait un théorème analogue avec des fonctions continues par morceaux sur $]a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $f =_a O(g)$.

Démonstration

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$.

Si $f =_b O(g)$, alors :

$$\exists K > 0 \quad \exists c \in]a,b[\quad \forall x \in [c,b[\qquad 0 \leqslant |f(x)| \leqslant K|g(x)|$$

f est donc intégrable sur $[c,b[$. Elle l'est sur $[a,b[$.

Corollaire 7.1

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$.

Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.

Rapport Centrale, 2001

« Pour l'étude de l'intégrabilité, on affirme (plus qu'on ne montre) qu'on a affaire à un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le désarroi est grand lorsqu'on ne peut pas conclure ainsi. Étudier l'intégrabilité de $x \to \frac{\sin x}{(x+\sin x)}$ est un exercice insurmontable. »

2.5.3 Quelques exemples

■ Considérons la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^n \mathrm{e}^{-ax}. \qquad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^{+*})$$

f est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et la fonction g, définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$, est intégrable sur $[1,+\infty[$; donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

De plus :

$$\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^n \mathrm{e}^{-at}}{a}\right]_0^x + \frac{n}{a}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{a}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Une récurrence simple permettra de prouver que :

$$\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

⚠ *Approfondissez l'étude de ces exemples, ils vous resserviront.*

■ Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1+x^2}$.

f est continue sur $[1,+\infty[$, positive.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

f est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

■ Soit a et b deux réels $(a < b)$ et f une fonction continue par morceaux, positive et bornée sur $[a,b[$. Alors la fonction F définie sur $[a,b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En effet :

$$\forall x \in [a,b[\quad F(x) \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b[} f(t)\cdot$$

f est donc intégrable sur $[a,b[$. Ainsi, la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = 1 - \sin\dfrac{1}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

► *Pour s'entraîner : ex. 6 à 8.*

Application 5

Intégrales de Bertrand

Considérons les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ *par* $f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{x^a |\ln x|^b}$, *où* a *et* b *sont deux réels fixés. Ces fonctions sont continues et positives sur* $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.

1) *Pour quelles valeurs de* a *et* b, *ces fonctions sont-elles intégrables sur* $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$?

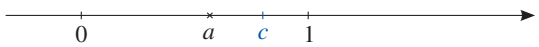
2) *Pour quelles valeurs de* a *et* b, *ces fonctions sont-elles intégrables sur* $[2,+\infty[$?

Attention ! Contrairement à l'étude des intégrales de Riemann, dont les résultats sont exploitables dans une copie ou pour résoudre un exercice, cet exemple n'est traité que pour vous montrer des méthodes très importantes d'étude d'intégrabilité. Dans un problème ou un exercice de concours, les résultats suivants devront être redémontrés.

1) Étudions l'intégrabilité de $f_{a,b}$ sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Si $a \neq 1$, nous allons comparer $f_{a,b}$ aux fonctions g_c, définies par $g_c(x) = \dfrac{1}{x^c}$.

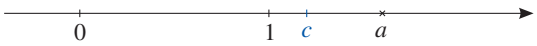
Pour $a < 1$, en choisissant c dans $]a,1[$, on a, au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{x^a |\ln x|^b} = o\left(\dfrac{1}{x^c}\right)$.



Doc. 7. *Choix de* c.

Or, g_c est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f_{a,b}$ l'est donc aussi.

Pour $a > 1$, en choisissant c dans $]1,a[$, on a, au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{x^c} = o\left(\dfrac{1}{x^a |\ln x|^b}\right)$.



Doc. 8. *Choix de* c.

Or, g_c n'est pas intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f_{a,b}$ ne l'est donc pas non plus.

Si $a = 1$, soit x dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Alors :

$$\int_{[x,1/2]} \frac{\mathrm{d}\,t}{t|\ln t|^b} = \int_{[\ln 2, |\ln x|]} \frac{\mathrm{d}\,u}{u^b}$$

(en posant $u = -\ln t$).

Lorsque x tend vers 0, $|\ln x|$ tend vers $+\infty$ et nous sommes ramenés à une intégrale de Riemann sur $[\ln 2, +\infty[$. La fonction est intégrable si et seulement si $b > 1$.

2) Étudions l'intégrabilité de $f_{a,b}$ sur $[2,+\infty[$.

En procédant de manière analogue, vous montrerez que, lorsque $a \neq 1$, $f_{a,b}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si, et seulement si $a > 1$, et lorsque $a = 1$, si, et seulement si $b > 1$.

Joseph Bertrand, *mathématicien français,* **(1822 – 1900).**

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Propriétés de l'intégrale

3.1. Linéarité de l'intégrale

Théorème 8

- $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'application $\left(f \mapsto \int_I f\right)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration

Vous vérifierez que $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
Pour la linéarité, rédigeons dans le cas où $I = [a, b[$. Si f et g sont intégrables sur I, et si α et β sont deux scalaires :

$$\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f + \beta \lim_{x \to b} \int_{[a,x]} g \cdot$$

Nous pouvons en déduire la cohérence des notations utilisées. En effet, soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.

- Si f est positive et intégrable sur I, nous savons que, en supposant $I = [a, b[$ pour simplifier :

$$\int_{[a,b[} f = \sup_{[c,d] \subset I} \int_{[c,d]} f = \lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f \cdot$$

- Si f est à valeurs réelles, on pose :

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \min(-f, 0) \cdot$$

Alors les fonctions f^+ et f^- possèdent les propriétés suivantes :

- les fonctions f^+ et f^- sont continues par morceaux sur I
- $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$
- $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$

Par conséquent, f est intégrable sur I si, et seulement si les fonctions f^+ et f^- le sont et, dans ce cas :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \cdot$$

- Si f est à valeurs complexes, on pose :

$$f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f) \cdot$$

Alors les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ possèdent les propriétés suivantes :

- les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur I
- $0 \leqslant |\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$

Par conséquent, f est intégrable sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et, dans ce cas :

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_I \mathrm{Im}(f) \cdot$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Relation de Chasles

Théorème 9

Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur deux intervalles I et J. Si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, alors f est intégrable sur $I \cup J$ et :

$$\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

Démonstration

Ces résultats se démontrent en utilisant la convergence des intégrales.

Théorème 10

Soit J et I deux intervalles tels que $J \subset I$ et f une application continue par morceaux intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

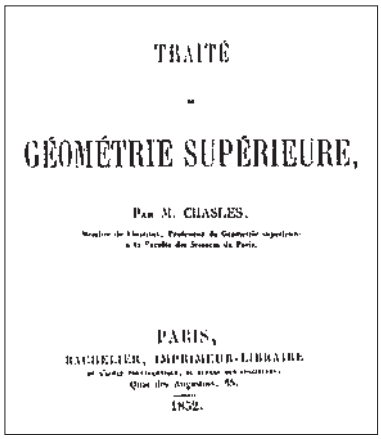
- $f \in \mathcal{J}(J, \mathbb{K})$
- $\displaystyle\int_J f = \int_I f\chi_J$.

Démonstration

Si $[a,b]$ est un segment contenu dans J, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_I |f|$.

Donc f est intégrable sur J.

L'égalité $\displaystyle\int_J f = \int_I f\chi_J$ se démontre en utilisant une primitive F de f sur I.


TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE,

PAR M. CHASLES.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1852.

Michel Chasles, *mathématicien français, (1793-1880). Polytechnicien, il devient agent de change. Ruiné, il retourne aux mathématiques. Il excelle en géométrie.*

Application 6

Des équivalents

1) *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ $\left(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\right)$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathbb{C}$, telles que $g =_b O(f)$.*

a) *Montrer que, si f est intégrable sur $[a,b[$, alors* $\displaystyle\int_x^b g =_b O\left(\int_x^b f\right)$.

b) *Montrer que, si f n'est pas intégrable sur $[a,b[$, alors* $\displaystyle\int_a^x g =_b O\left(\int_a^x f\right)$.

2) a) *En déduire que, si $f \sim_b g$ et si f n'est pas intégrable sur $[a,b[$, alors* $\displaystyle\int_a^x g \sim_b \int_a^x f$.

b) *Donner un équivalent de* $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{d}t$ *lorsque x tend vers $+\infty$.*

1) a) Il existe $K > 0$ et c dans $[a,b[$ tels que, pour tout x de $[c,b[$:

$$|g(x)| \leqslant Kf(x).$$

Alors, pour tout $x \geqslant c$, on a :

$$\left|\int_x^b g\right| \leqslant \int_x^b |g| \leqslant K\int_x^b f.$$

D'où : $\displaystyle\int_x^b g =_b O\left(\int_x^b f\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

b) Utilisons les mêmes notations que dans la question précédente.

$$\left|\int_a^x g\right| \leqslant \int_a^x |g| = \int_a^c |g| + \int_c^x |g|$$
$$\leqslant \int_a^c |g| + K\int_c^x f.$$

La fonction $\left(x \mapsto \int_c^x f\right)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b et $\int_a^c |g|$ est un réel fixé. Donc :

$$\int_a^x g =_b O\left(\int_a^x f\right).$$

2. a) Si $f \sim_b g$, alors $f - g =_b o(f)$.

Vous démontrerez de même que dans la question **1) b),** qu'alors :

$$\int_a^x (f-g) =_b o\left(\int_a^x f\right).$$

Donc $\int_a^x f \sim_b \int_a^x g$.

b) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\text{Arctan } t}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge en 0 par continuité.

De plus $\dfrac{\text{Arctan } t}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2t}$.

Donc elle n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan } t}{t}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,\mathrm{d}t$$

Soit :

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan } t}{t}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}\ln x$$

3.3. Intégrale et continuité

Théorème 11

Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur I.

L'intégrale de f sur I est nulle si et seulement si f est nulle.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Un tracé rapide, direct ou à l'aide de la calculatrice, de la fonction à intégrer peut permettre d'orienter son étude. »

Démonstration

f est une fonction continue, positive et intégrable sur I.

Supposons que $\int_I f = 0$ et rédigeons la démonstration dans le cas où $I = [a,b[$.

Pour tout x de $[a,b[$: $0 \leqslant \int_{[a,x]} f \leqslant \int_I f = 0.$

f est continue et positive sur $[a,x]$, elle est donc nulle sur $[a,x]$. Donc f est nulle sur I.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Il convenait de préciser que la fonction à intégrer était continue et strictement positive. »

Application 7

La fonction Gamma : $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$

x étant un réel fixé, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) *Étudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

2) *On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction Γ par*

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) *Expliquer pourquoi la fonction Γ peut être considérée comme un prolongement de la factorielle.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, que nous allons scinder en $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $f(t) \sim t^{x-1}$. Donc :

$$f \in \mathcal{I}\big(]0,1],\mathbb{R}\big) \Leftrightarrow x > 0.$$

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc :

$$f \in \mathcal{I}\big([1,+\infty[,\mathbb{R}\big).$$

f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x > 0$.

2) Soit $x > 0$, $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, fixés. Intégrons par parties sur $[\varepsilon, A]$:

$$\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \big[-\mathrm{e}^{-t}t^x\big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A x\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\mathrm{e}^{-A}A^x + \mathrm{e}^{-\varepsilon}\varepsilon^x + \int_\varepsilon^A x\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$ et ε vers 0, on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-A}A^x = 0\,; \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{e}^{-\varepsilon}\varepsilon^x = 0.$$

Donc

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

3) En particulier :

$$\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

puis par récurrence :

$$\Gamma(n+1) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

Cette égalité nous permet de comprendre que la fonction Γ, introduite par Euler, peut être considérée comme un prolongement de la factorielle.

3.4. Inégalité de la moyenne

Théorème 12

Soit f une fonction continue par morceaux intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Démonstration

Ce résultat se démontre en utilisant la convergence des intégrales et la relation analogue vérifiée sur tout segment contenu dans I.

Rapport CCP, 2001

« les intégrales simples deviennent par leur convergence, et trop souvent leur calcul, un cauchemar partagé par les candidats et les examinateurs. »

3.5. Changement de variables

Théorème 13

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et ϕ une bijection d'un intervalle J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Alors :

- f est intégrable sur I si et seulement si $f\circ\phi\,|\phi'|$ est intégrable sur J
- si f est intégrable sur I :

$$\int_I f = \int_J f\circ\phi\,|\phi'|$$

- en notant a,b les extrémités de J et a_1,b_1 les limites en a,b respectivement de ϕ :

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Nous allons effectuer la démonstration dans le cas où $I = [a, b[$.

Le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ est une application strictement monotone, on pourra supposer que φ est strictement croissant. Dans ce cas, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et φ' est strictement positive sur I, de plus :

$$J = \left[\varphi(a), \lim_{x\to b-} \varphi\right[= [\varphi(a), \beta[\,.$$

Nous pouvons procéder par équivalence :

$|f|$ est intégrable sur J si et seulement si $\lim\limits_{x\to\beta} \int_{\varphi(a)}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t$ existe.

Or $$\lim_{x\to\beta} \int_{\varphi(a)}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t = \lim_{x\to\beta} \int_{a}^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$= \lim_{x\to\beta} \int_{a}^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}\,u.$$

car φ' est strictement positive sur I.

De plus φ^{-1} est continue sur J aussi :

$$\lim_{x\to\beta} \int_{a}^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}\,u = \lim_{y\to b} \int_{a}^{y} |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Or la limite $\lim\limits_{y\to b} \int_{a}^{y} |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u$ existe si et seulement si $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur I.

Nous obtenons finalement $|f|$ est intégrable sur J si et seulement si $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur I.

Dans ces conditions :

$$\int_J f = \lim_{x\to\beta} \int_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{x\to\beta} \int_{a}^{\varphi^{-1}(x)} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$= \lim_{y\to b} \int_{a}^{y} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_I (f\circ\varphi)\varphi'.$$

Dans le cas où φ est strictement décroissante, $J = \left]\lim\limits_{x\to b-} \varphi\ ;\ \varphi(a)\right] =]\beta\ ;\ \varphi(a)]$ et φ' est strictement négative.

$$\int_J f = \lim_{x\to\beta} \int_{x}^{\varphi(a)} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t = \lim_{x\to\beta} \int_{\varphi^{-1}(x)}^{a} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$= -\lim_{y\to b} \int_{a}^{y} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u = \lim_{y\to b} \int_{a}^{y} f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}\,u = \int_I (f\circ\varphi)|\varphi'|.$$

Exemple :

Calcul de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}\,t$

- La fonction $f : \left(t \mapsto \dfrac{\ln t}{a^2+t^2}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

  De plus :

  $$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{1}{a^2}\ln t \quad \text{et} \quad \frac{\ln t}{a^2+t^2} =_\infty o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

  Cette fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- La fonction $(u \mapsto t = au)$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Posons $t = au$, alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\ln(au)}{a^2(1+u^2)} a\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

- La fonction $\left(t \mapsto u = \frac{1}{t}\right)$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$. Posons $u = \frac{1}{t}$, alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Nous en déduisons : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, puis :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2}.$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 9. et 10.*

4 Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables

4.1. La norme N_1

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Cet espace vectoriel est muni de la norme N_1, dite **norme de la convergence en moyenne**, définie par :

$$N_1(f) = \int_I |f|$$

Le produit de deux fonctions intégrables sur I n'est pas nécessairement intégrable sur I. Il suffit de considérer la fonction :

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et de prendre $f = g$.

4.2. Fonctions de carré intégrable

Une fonction continue par morceaux, à valeurs dans $\mathbb{K}$, f, est dite de **carré intégrable** sur I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

Théorème 14
Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Démonstration

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de carré intégrables.

Alors, fg est continue sur I, et de plus, $|fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$. La fonction $|fg|$ est majorée par une fonction intégrable sur I, donc est intégrable sur I.

La fonction f, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \frac{1}{1+t}$, est continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et non intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 15
L'ensemble E des fonctions continues, à valeurs dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

4.3. Un produit scalaire sur E

Théorème 16
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application :

$$\left((f,g) \mapsto (f|g) = \int_I fg\right)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable sur I, à valeurs réelles.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'application :

$$\left((f,g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{f}g\right)$$

définit un produit scalaire complexe sur l'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable sur I, à valeurs complexes.

4.4. La norme N_2

La norme définie par ce produit scalaire est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**, et notée N_2.

$$\forall\, f \in E \quad N_2(f) = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$$

Augustin-Louis Cauchy, *mathématicien français, (1789-1857).*

Théorème 17. Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit f et g deux fonctions continues et de carrés intégrables sur I, alors :

$$\left|(f|g)\right| \leqslant N_2(f)N_2(g)$$

L'égalité a lieu si et seulement si f et g sont liées.

Corollaire 17.1
Soit f et g deux fonctions continues et de carrés intégrables sur I, alors :

$$|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g)$$

Corollaire 17.2
Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions continues de carré intégrable sur I convergeant en moyenne quadratique vers f et g, alors $(f_n|g_n)$ tend vers $(f|g)$.
On dit aussi que le produit scalaire est continu pour la norme N_2.

Hermann Schwarz, *mathématicien allemand, (1843-1921).*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

$$(f|g) - (f_n|g_n) = (f - f_n|g) + (f_n|g - g_n)$$

Donc :

$$|(f|g) - (f_n|g_n)| \leqslant |(f - f_n|g)| + |(f_n|g - g_n)|$$

$$\leqslant N_2(f - f_n)N_2(g) + N_2(f_n)N_2(g - g_n)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g - g_n) = 0$ et :

$$N_2(f_n) = N_2(f_n - f + f) \leqslant N_2(f - f_n) + N_2(f)$$

est bornée. D'où le résultat.

► *Pour s'entraîner : ex. 11.*

Application 8

Une curieuse inégalité : $\left(\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^\infty x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^\infty f'^2(x)\,\mathrm{d}x$

Soit f dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que les applications

$$g : x \mapsto x^2 f^2(x)$$

et f'^2 soient intégrables sur $[0,+\infty[$.

Montrer que l'application f^2 est intégrable et que

$$\left(\int_0^\infty f^2\right)^2 \leqslant 4\int_0^\infty g \int_0^\infty f'^2.$$

Quand a-t-on égalité ?

(Cette application utilise l'application 3 de ce chapitre)

Pour $x \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant f^2(x) \leqslant g(x).$$

Or g est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par comparaison directe, f^2 est intégrable sur $[1,+\infty[$.

De plus, continue sur $[0,1]$, la fonction f^2 est intégrable sur $[0,1]$.

La fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc il existe une suite croissante (a_n) telle que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = 0.$$

$$\int_0^{a_n} x\,f(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\,f^2(x)\right]_0^{a_n} - \frac{1}{2}\int_0^{a_n} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{g(a_n)}{a_n} - \frac{1}{2}\int_0^{a_n} f^2.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g(a_n)}{a_n} = 0$, donc :

$$\int_0^\infty x\,f(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^\infty f^2\right)^2 \leqslant \int_0^\infty x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^\infty f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty g \int_0^\infty f'^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $g = 0$ ou s'il existe k dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout x, on ait

$$f'(x) = kx\,f(x).$$

La fonction f est alors de la forme $x \mapsto Ce^{kx^2}$ où C et k sont deux réels.

Réciproquement, la fonction f convient si $k < 0$ (intégrabilité de g et f'^2).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 9

Familles de polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle ouvert et non vide de $\mathbb{R}$ et k une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la fonction

$$x \mapsto x^n k(x)$$

est intégrable sur I.

On désigne par E l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$, continues sur I et telles que la fonction

$$x \mapsto f^2(x)k(x))$$

est intégrable sur I.

Vérifier les assertions suivantes.

- *Si f et g sont deux éléments de E, alors la fonction*

$$x \mapsto f(x)g(x)k(x)$$

est intégrable sur I. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

- *L'application :*

$$\langle\,|\,\rangle : E \times E \to \mathbb{R},$$

$$(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_I f(x)g(x)k(x)\,dx$$

définit un produit scalaire sur E.

1. a) *Prouver que toute fonction polynôme est dans E.*

b) *Montrer l'existence d'une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

- *pour tout n, P_n est unitaire de degré n ;*
- *si n et k sont deux entiers distincts, alors*

$$\langle P_n|P_k\rangle = 0.$$

c) *Démontrer que, pour tout entier n, le polynôme P_n admet n racines distinctes dans I.*

d) *En constatant que :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \langle XP|Q\rangle = \langle P|XQ\rangle$$

prouver l'existence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad XP_{n-1} = P_n + u_n P_{n-1} + v_n P_{n-2}$$

2) *Quelques familles classiques*

a) *Les polynômes de Legendre :*

$$I =]a,b[, \quad k(x) = 1$$

Prouver que

$$P_n(x) = \alpha_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right],$$

où α_n est un réel que l'on calculera.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

b) *Les polynômes de Tchebychev :*

$$I =]-1,1[, \quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prouver que

$$P_n(x) = \alpha_n \sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]$$

où α_n est un réel que l'on calculera.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

c) *Les polynômes de Laguerre :*

$$I =]0,+\infty[, \quad k(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

Prouver que

$$P_n(x) = \alpha_n \mathrm{e}^x \frac{d^n}{dx^n}[\mathrm{e}^{-x}x^n]$$

où α_n est un réel que l'on calculera.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

d) *Les polynômes de Hermite :*

$$I =]-\infty,+\infty[, k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Prouver que

$$P_n(x) = \alpha_n \mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]$$

où α_n est un réel que l'on calculera.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

1. a) Toute fonction polynôme est continue sur I. La condition d'intégrabilité est vérifiée par toute fonction monôme, donc, par linéarité de l'intégrale, par toute fonction polynôme.

b) Fixons $N > 0$ et travaillons dans $\mathbb{R}_N[X]$ muni du produit scalaire $\langle\,|\,\rangle$ et de la base $(1,X,X^2,\dots,X^N)$. Orthogonalisons cette base par le procédé de Schmidt.

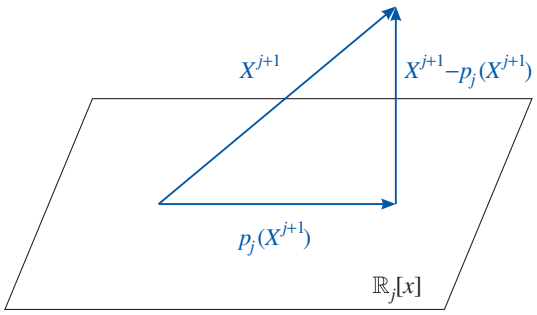
Nous posons $P_0 = 1$ et supposons la famille $(P_0,\dots,P_j)$ construite jusqu'à l'ordre j fixé de $[\![1,N-1]\!]$. Appelons p_j la projection orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_j[X]$. Le polynôme $X^{j+1} - p_j(X^{j+1})$ est orthogonal à $\mathbb{R}_j[X]$ et appartient à $\mathbb{R}_{j+1}[X]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Posons

$$P_{j+1} = X^{j+1} - p_j(X^{j+1}).$$

Il vérifie les conditions imposées. Tout polynôme les vérifiant lui est colinéaire. Deux polynômes unitaires colinéaires sont égaux.



Doc. 9. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

De plus, les polynômes ainsi définis ne dépendent pas de N. Il existe donc une unique famille de polynômes (P_n) vérifiant les conditions requises.

c) La propriété est vraie pour $n = 0$. Fixons $n > 0$. Nous savons que $\langle P_n | P_0\rangle = 0$, donc que

$$\int_I P_n(x)k(x)dx = 0.$$

Si P_n ne s'annule pas dans I, la fonction continue $P_n k$ est de signe constant dans I. Son intégrale sur I ne peut s'annuler.

Supposons alors que P_n admette p racines de multiplicité impaire sur I, avec $p < n$. Appelons $x_1, \dots, x_p$ ces racines et Q le polynôme

$$Q(X) = (X - x_1)\dots(X - x_p).$$

Ce polynôme appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc

$$\langle P_n | Q\rangle = 0.$$

Le polynôme QP_n n'a que des racines de multiplicité paire sur I, il est donc de signe constant sur cet intervalle et ceci nous montre alors que l'hypothèse $p < n$ est impossible.

d) Il est immédiat que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \langle XP | Q\rangle = \langle P | XQ\rangle$$

Montrons l'existence des suites (u_n) et (v_n).

Le polynôme $XP_1 - P_2$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$. Il est donc combinaison linéaire de P_0, P_1 et s'écrit :

$$XP_1 - P_2 = u_2 P_1 + v_2 P_0.$$

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 2$, on ait :

$$XP_{n-1} = P_n + u_n P_{n-1} + v_n P_{n-2}.$$

Le polynôme $XP_n - P_{n+1}$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, donc peut s'écrire sous la forme :

$$XP_n - P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i.$$

De plus, si $i \leqslant n$:

$$\langle XP_n - P_{n+1} | P_i\rangle = \alpha_i \langle P_i \mid P_i\rangle = \langle XP_n | P_i\rangle$$
$$= \langle P_n | XP_i\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \leqslant n-2 \ .$$

Donc :

$$\exists\, (u_{n+1}, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$$
$$XP_n - P_{n+1} = u_{n+1}P_n + v_{n+1}P_{n-1}$$

2. a) Nous contrôlons d'abord que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $(x \mapsto x^n)$ est intégrable sur $]a, b[$.

Vérifions que, pour tout p et pour un certain α_p que nous préciserons, le polynôme P_p est unitaire et que les polynômes (P_n) sont orthogonaux.

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, P_p unitaire entraîne :

$$\alpha_p = \frac{1}{(2p)(2p-1)\dots(p+1)}.$$

Soit $n < m$. Calculons $\langle P_n | P_m\rangle$.

$$\langle P_n | P_m\rangle = \alpha_n \alpha_m \int_a^b \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}[(x-a)^n(x-b)^n]$$
$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,x^m}\left[(x-a)^m(x-b)^m\right]\mathrm{d}\,x.$$

Vous effectuerez $n+1$ intégrations par parties successives. En tenant compte du fait que a et b sont racines d'ordre m de $[(x-a)^m(x-b)^m]$, donc racines de ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, vous obtiendrez :

$$\langle P_n | P_m\rangle$$
$$= (-1)^{n+1}\alpha_n\alpha_m \int_a^b \frac{\mathrm{d}^{2n+1}}{\mathrm{d}\,x^{2n+1}}[(x-a)^n(x-b)^n]$$
$$\frac{\mathrm{d}^{m-n-1}}{\mathrm{d}\,x^{m-n-1}}[(x-a)^m(x-b)^m]\,\mathrm{d}\,x$$
$$= 0.$$

Les polynômes de Legendre sont fournis par une petite procédure Maple.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec Maple :

```
> Legendre:=proc(n)
diff(((x-a)^n)*((x-b)^n),x\$n)/(product(n+i,i=1..n));
end;
```

$$Legendre := \mathbf{proc}(n)\ \mathrm{diff}((x-a)^n \times (x-b)^n,\ x\ \$\ n)/\ \mathrm{product}(n+i,\ i=1..n)\ \mathbf{end}$$

```
> Legendre(1);Legendre(2);Legendre(3);Legendre(4);
> for j from 1 to 4 do collect(Legendre(j),x) od;
```

$$x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{6}(x-b)^2 + \frac{2}{3}(x-a)(x-b) + \frac{1}{6}(x-a)^2$$

$$\frac{1}{20}(x-b)^3 + \frac{9}{20}(x-a)(x-b)^2 + \frac{9}{20}(x-a)^2(x-b) + \frac{1}{20}(x-a)^3$$

$$\frac{1}{70}(x-b)^4 + \frac{8}{35}(x-a)(x-b)^3 + \frac{18}{35}(x-a)^2(x-b)^2 + \frac{8}{35}(x-a)^3(x-b) + \frac{1}{70}(x-a)^4$$

$$x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$$

$$x^2 + (-a-b)x + \frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab$$

$$x^3 + \left(-\frac{3}{2}b - \frac{3}{2}a\right)x^2 + \left(\frac{3}{5}b^2 + \frac{9}{5}ab + \frac{3}{5}a^2\right)x - \frac{1}{20}b^3 - \frac{9}{20}ab^2 - \frac{9}{20}a^2b^2 - \frac{1}{20}a^3$$

$$x^4 + (-2a-2b)x^3 + \left(\frac{9}{7}a^2 + \frac{24}{7}ab + \frac{9}{7}b^2\right)x^2 + \left(-\frac{2}{7}a^3 - \frac{2}{7}b^3 - \frac{12}{7}a^2b - \frac{12}{7}ab^2\right)x + \frac{1}{70}b^4 + \frac{8}{35}ab^3 + \frac{8}{35}a^3b + \frac{1}{70}a^4 + \frac{18}{35}a^2b^2$$

Doc. 10. *Polynômes de Legendre.*

b) c) d) On procède de même.

Maple dispose d'un package de polynômes orthogonaux et connaît les polynômes de Tchebychev, Laguerre et Hermite.

Attention ! les polynômes fournis par Maple ne sont pas unitaires.

Avec Maple :

```
> with(orthopoly);
```

$$[G,\ H,\ L,\ P,\ T,\ U]$$

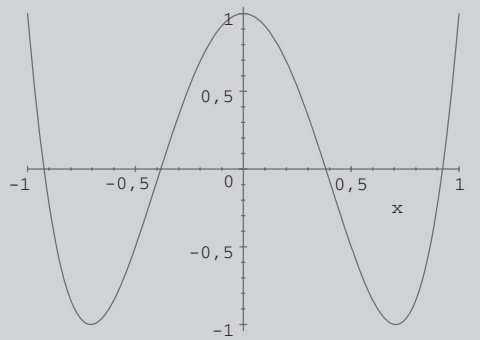
```
> T(1,x);T(2,x);T(3,x);T(4,x);
> plot(T(4,x),x=-1..1);
```

$$x$$

$$2x^2 - 1$$

$$4x^3 - 3x$$

$$8x^4 - 8x^2 + 1$$



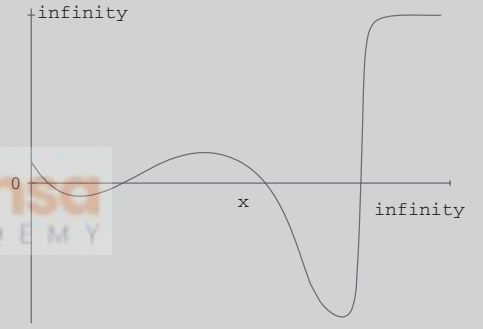

```
> L(1,x);L(2,x);L(3,x);L(4,x);
> plot (L(4,x),x=0..infinity);
```

$$1 - x$$

$$1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



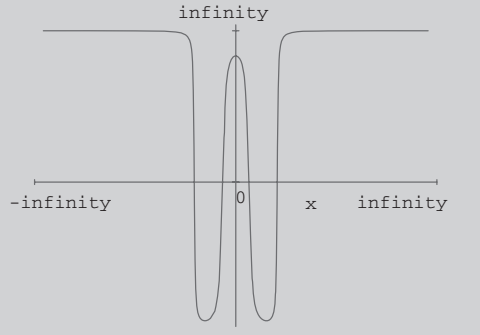

```
> H(1,x);H(2,x);H(3,x);H(4,x);
> plot (H(4,x),x=-infinity..infinity);
```

$$2x$$

$$4x^2 - 2$$

$$8x^3 - 12x$$

$$16x^4 - 48x^2 + 12$$



Doc. 11. *Polynômes de Tchebychev, Laguerre et Hermite.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 Suites et séries de fonctions intégrables

5.1. Théorème de convergence dominée

Théorème18. Théorème de convergence dominée de Lebesgue
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \varphi$ **(hypothèse dite de domination).**

Alors :

- les applications f_n et f sont intégrables sur I ;
- la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.*

Henri Lebesgue, *mathématicien français, (1875-1941).*
D'origine très modeste, il entre à l'École Normale Supérieure après des études brillantes. Élève de Borel, il construit en 1902 la théorie de l'intégration qui porte son nom. Le théorème de convergence dominée date de cette période.

La démonstration de ce théorème est hors-programme.

Rapport X, 2001
« ...difficultés rencontrées pour utiliser la convergence dominée. »

Application 10

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$

(D'après École Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, 1996.)

On pose, pour $n \geqslant 1$

$$B_n = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \quad \text{et} \quad C_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

1) *Soit* $n \geqslant 1$. *Calculer*

$$I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

2) *Montrer que, pour* n *fixé* $\geqslant 1$, *la fonction*

$$g_n : \left(x \mapsto \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3) *Montrer que :*

$$\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant n \Rightarrow \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

4) *Calculer* B_n *en posant* $x = \sqrt{n}\tan\varphi$. *En déduire* $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

5) a) *Montrer que la suite* (C_n) *converge vers :*

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

b) *Calculer* C_n. *En déduire* $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

6) *Montrer que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) $I_{n-1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\right)^{2n-2} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \times 2\pi\,.$$

2) La fonction g_n est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $g_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(x^{-2n}\right)$ et la fonction $(x \mapsto x^{-2n})$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

3) L'inégalité, pour tous $n \geqslant 1$ et x réel :

$$x^2 < n \Rightarrow n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -x^2$$

découle de la concavité de la fonction $\ln$.

L'inégalité :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad -x^2 \leqslant -n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$$

est vérifiée pour la même raison.

L'inégalité :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x^2 \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

est une conséquence de la formule du binôme.

4) Calculons B_n en posant $x = \sqrt{n}\tan\varphi$. On obtient :

$$B_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi\sqrt{n}}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$$

Dans le but de montrer la convergence de la suite (B_n), considérons la suite de fonctions (g_n) avec :

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

- Les fonctions g_n sont continues, positives et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
- La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction continue $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2})$.
- La fonction positive et intégrable $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ majore chacune des fonctions g_n.

Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que la suite (B_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Utilisons la formule de Stirling :

$$B_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5) a) Posons

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

Appliquons à la suite (f_n) le théorème de convergence dominée.

- Les fonctions f_n, pour $n \geqslant 1$, sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \to \mathrm{e}^{-x^2}$, continue.
- Et enfin, les fonctions f_n sont majorées par f, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc la suite (C_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Calculons C_n en posant $x = \sqrt{n}\sin\varphi$.

On obtient $C_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_o^{\pi/2} \cos^{2n+1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi$.

D'où : $\sqrt{n}\, I_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \sqrt{n}\, I_n$

Donc $C_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; d'où $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6) La dernière question résulte du changement de variable $u = x^2$.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\lim_{A\to+\infty}\left(\int_a^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\right)$$

$$= \lim_{u\to 0}\left(\lim_{U\to+\infty}\left(\int_u^U \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ce résultat est à connaître.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Conformément au programme, nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 19

Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ et telle que :

- pour tout n, u_n est intégrable sur I ;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme, S, est continue par morceaux sur I ;
- la série numérique $\sum \left(\int_I |u_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge.

Alors :

- S est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\int_I S = \int_I \left(\sum_0^\infty u_n \right) = \sum_0^\infty \left(\int_I u_n \right).$

Exemple

D'une intégrale à une série

On considère la fonction $f : \left(u \mapsto \dfrac{\ln u}{1+u^2} \right)$. Montrer que $f \in \mathcal{I}(]0,1], \mathbb{R})$ et exprimer $\displaystyle\int_0^1 f$ sous la forme d'une série.

La fonction f est continue et négative sur $]0,1]$.

De plus, $f(u) \sim_0 \ln u$, qui est intégrable sur $]0,1]$.

Donc f est intégrable sur $]0,1]$.

Nous savons que :

$$\forall u \in]0,1[\quad \frac{1}{1+u^2} = \sum_0^\infty (-u^2)^n.$$

Posons $f_n(u) = \left(-u^2\right)^n \ln u$.

Alors :

- les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0,1]$;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers f, continue sur I ;
- la série numérique :

$$\sum \int_0^1 |f_n| = -\sum \int_0^1 u^{2n} \ln u \, \mathrm{d}u$$

converge. En effet :

$$\int_0^1 u^{2n} \ln u \, \mathrm{d}u = \lim_{x \to 0} \left(\left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1} \ln u \right]_x^1 - \int_{[x,1]} \frac{u^{2n}}{2n+1} \, \mathrm{d}u \right) = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2} \, \mathrm{d}u = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$

► *Pour s'entraîner : ex. 14.*

Ce théorème ne règle pas certains cas très simples, par exemple, lorsque la série de fonctions est une série géométrique.

Considérons :

$$\int_0^1 \left(\sum_0^\infty (-t)^n \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_0^n (-t)^k \right) \mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n+1}^\infty (-t)^k \, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_0^n \int_0^1 (-t)^n \, \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = 0.$

Donc

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\sum_0^\infty (-t)^n \right) \mathrm{d}t = \sum_0^\infty \int_0^1 (-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Mais le théorème précédent ne s'applique pas, car la série $\displaystyle\sum \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$ diverge.

Rapport Centrale, 2001

« Oubli des valeurs absolues lors de l'hypothèse de convergence de la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$. *»*

Rapport Centrale, 2001

« fonction Γ souvent méconnue. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 11

La fonction Γ et la fonction ζ

Rappelons que les fonctions Γ et ζ sont définies, respectivement sur $]0,\infty[$ et $]1,+\infty[$, par :

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{et} \quad \zeta(x)=\sum_1^\infty n^{-x}.$$

Montrer que $\forall x>1 \quad \zeta(x)\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t.$

■ *Première étape*

Fixons $x>1$.

$$\begin{aligned}\zeta(x)\Gamma(x)&=\sum_{n=1}^\infty n^{-x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}n^{-x}\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^\infty\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-un}u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)\\&\qquad\text{(en posant } t=u\,n)\end{aligned}$$

■ *Seconde étape*

Pour intervertir le signe $\sum$ et l'intégrale, vérifions les hypothèses du théorème.

• On note f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$u\to \mathrm{e}^{-u\,n}u^{x-1}.$$

Ces fonctions sont positives, continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après le calcul ci-dessus.

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$, car, pour u fixé strictement positif, la série numérique $\sum \mathrm{e}^{-un}u^{x-1}$ est une série géométrique, de raison e^{-u}.

• La série numérique $\displaystyle\sum\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-un}u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)$ converge d'après le calcul de la première étape.

Donc, la fonction somme de la série de fonctions est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, de plus :

$$\begin{aligned}\zeta(x)\Gamma(x)&=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-un}u^{x-1}\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^\infty u^{x-1}\left(\sum_1^\infty \mathrm{e}^{-nu}\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^\infty\frac{u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty\frac{u^{x-1}}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

6 Fonctions définies par une intégrale

A est une partie de $\mathbb{R}^m$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

6.1. Continuité

Théorème 20. Continuité d'une fonction définie par une intégrale

Soit $f:((x,t)\mapsto f(x,t))$ une fonction de $A\times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- f est continue par rapport à la première variable, x ;
- f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, t ;
- il existe φ dans $\mathcal{I}(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t)\in A\times I \quad |f(x,t)|\leqslant\varphi(t) \quad \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Alors :

- pour tout x de A, la fonction $(t\mapsto f(x,t))$ est intégrable sur I ;
- la fonction F, définie sur A par $F(x)=\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur A.

Rapport X, 2001

« Très peu de candidats utilisent les théorèmes au programme avec hypothèse de domination. »

Rapport TPE, 2002

« ...insuffisamment appris en analyse, le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. »

L'application φ ne dépend pas de x.

Les hypothèses de continuité sont vérifiées en particulier lorsque f est continue sur $A\times I$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Cette démonstration est une application du théorème de convergence dominée.

- La fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux sur I. De plus, la majoration $\forall t \in I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ entraîne l'intégrabilité sur I de la fonction $(t \mapsto f(x,t))$.
- Notons a un point de A et fixons une suite (x_n) de points de A convergeant vers a. Pour tout n, considérons l'application :

$$g_n : \begin{cases} I \to & \mathbb{K} \\ t \mapsto g_n(t) = & f(x_n,t) \end{cases}$$

Les hypothèses concernant f par rapport à t et l'hypothèse de domination permettent d'affirmer que :

- la fonction g_n est continue par morceaux de I dans $\mathbb{K}$;
- il existe une fonction φ de $\mathcal{J}(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $|g_n| \leqslant \varphi$;
- la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur I vers la fonction continue par morceaux g, définie par $g(t) = f(a,t)$ car la fonction f est continue par rapport à la première variable.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure par :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n = \int_I g$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(a,t)\,\mathrm{d}t = F(a).$$

La fonction F est continue en a.

Rapport X, 2001

« Il semble que devant une question de ce type le candidat choisisse un peu au hasard entre convergence uniforme, dominée... »

Corollaire 20.1

f est une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- f est continue par rapport à la première variable ;
- f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable ;
- pour tout compact K contenu dans A, il existe φ_K dans $\mathcal{J}(I,\mathbb{R}^+)$ telle que (**hypothèse de domination sur tout compact de A**) :

$$\forall (x,t) \in K \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t).$$

Alors :

- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur I ;
- la fonction F, définie sur A par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur A.

Rapport CCP, 1997

« Les problèmes d'intégrales dépendant d'un paramètre sont souvent bien traités, à l'exception de la continuité et de la dérivabilité sous le signe somme d'une fonction définie sur un intervalle ouvert par une intégrale impropre : les candidats essaient en général de vérifier le critère de domination sur l'intervalle ouvert tout entier, alors que continuité et dérivabilité étant des propriétés locales, il suffit la plupart du temps de le vérifier pour tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de définition. »

Corollaire 20.2

f est une fonction continue de $A \times [c,d]$ dans $\mathbb{K}$.

Alors la fonction F, définie sur A par $F(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple :

La fonction gamma, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$

- La fonction :

$$f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},$$
$$(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
Elle vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.
En effet, si $0 < a < b$, on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \sup\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)$$

et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sup\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Γ est donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Minorons $\Gamma(x)$. Pour tout $x \geqslant 1$:

$$\Gamma(x) \geqslant \int_2^3 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t \geqslant \mathrm{e}^{-3} \int_2^3 t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t \geqslant \mathrm{e}^{-3} 2^{x-1}.$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$, le graphe de Γ admet, en $+\infty$, une branche parabolique verticale.

Nous pouvons, de plus, remarquer que le graphe admet une branche asymptotique dans la direction de l'axe des ordonnées.

► ***Pour s'entraîner : ex. 15.***

6.2. Dérivabilité

A désigne dans ce paragraphe un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 21. Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- f admet une dérivée partielle, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante ;
- cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable, x, et continue par morceaux par rapport à la seconde, t ;
- $\exists\, \varphi \in \mathcal{I}(I, \mathbb{R}^+) \quad \forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$).

Alors la fonction F, définie sur A par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et, pour tout x de A :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t \quad \textbf{(formule de Leibniz)}$$

Rapport E3A, 2002

« Peu de candidats dérivent correctement une intégrale à un paramètre. Les justifications de dérivation sous le signe intégrale sont absentes ou incorrectes. »

- Les hypothèses de continuité sont vérifiées en particulier lorsque f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $A \times I$.
- Si de plus A et I sont des segments de $\mathbb{R}$, l'hypothèse de domination est vérifiée par la fonction constante

$$\sup_{x \in A, t \in I} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit a dans A. Fixons une suite (x_n) d'éléments de $A\setminus\{a\}$ qui converge vers a.

$$\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n-a}=\int_I \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, pour t fixé, l'application $(x\mapsto f(x,t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A. Notons :

$$h_n(t)=\frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\quad\text{et}\quad h(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,t).$$

- La suite de fonctions continues par morceaux (h_n) converge simplement sur I vers la fonction continue par morceaux h.
- À t fixé, en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $(x\mapsto f(x,t))$, on a :

$$\left|\frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\right|\leqslant\sup_{x\in A}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t).$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à la suite de fonctions (h_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I h_n=\int_I h.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n-a}=\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction F est dérivable sur A et sa fonction dérivée est l'application

$$x\mapsto\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

qui est continue sur A d'après le théorème précédent. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

► *Pour s'entraîner : ex. 16.*

Exemple :

Calcul de $\boldsymbol{I_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)^n}}$

Soit x un réel strictement positif. On définit, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction I_n ci-dessus.

- Un premier calcul :

$$I_1(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)}=\frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

- Dérivabilité de I_n.

Soit $a>0$. Considérons, pour $n\geqslant 1$ fixé, la fonction f_n définie sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x,t)=\frac{1}{(x+t^2)^n}.$$

Cette fonction est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ et admet une dérivée partielle continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)=-\frac{n}{(x+t^2)^{n+1}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De plus :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}^+ \quad 0 \leqslant \frac{n}{\left(x+t^2\right)^{n+1}} \leqslant \frac{n}{\left(a+t^2\right)^{n+1}}.$$

La fonction : $\left(t \mapsto \dfrac{n}{\left(a+t^2\right)^{n+1}}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nous en déduisons que la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que

$$I_n'(x) = -nI_{n+1}(x).$$

- Expression générale de I_n.

Vous vérifierez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$I_n(x) = \frac{\pi}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{4^n(n)!}x^{-(2n-1)/2}$$

Corollaire 21.1

Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une application de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- f admet une dérivée partielle, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante ;
- cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable, x, et continue par morceaux par rapport à la seconde, t, ;
- pour tout segment $[a,b]$ contenu dans A, on a :

$$\exists \varphi \in \mathcal{I}(I,\mathbb{R}^+) \quad \forall (x,t) \in [a,b]\times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment de A.)

Alors la fonction F, définie sur A par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 21.2

Soit f une fonction de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$.
- f admet une dérivée partielle, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante continue sur $[a,b]\times[c,d]$.

Alors la fonction F, définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et :

$$F'(x) = \int_{[c,d]} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

► *Pour s'entraîner : ex. 17.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 12

Toujours la fonction gamma

1) *Montrer que la fonction* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

2) *Montrer que la fonction* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

3) *Calculer* Γ' *et* Γ''.

1) • Soit $x > 0$. La fonction $(t \mapsto e^{-t}t^{x-1})$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• La fonction $f : ((x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1})$ admet une dérivée partielle par rapport à la première composante. Et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}.$$

• Cette dérivée partielle est continue par rapport à x et continue par rapport à t.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors, pour tout (x,t) de $[a,b] \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |(\ln t)|\, e^{-t} \sup\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \varphi_1(t).$$

Vous vérifierez que la fonction φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la première composante à tout ordre $p \geqslant 1$.

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p e^{-t}t^{x-1}$$

En vous inspirant de la question précédente, vous montrerez par récurrence que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall\, p \geqslant 1 \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^p e^{-t}t^{x-1}\, dt.$$

3) En particulier :

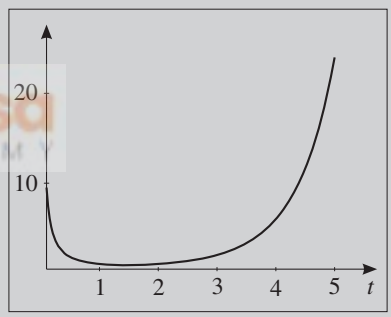
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty (\ln t)e^{-t}t^{x-1}\, dt$$

et $$\Gamma''(x) = \int_0^\infty (\ln t)^2 e^{-t}t^{x-1}\, dt \geqslant 0.$$

La fonction Γ est donc convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. Nous pouvons tracer son graphe (*doc.* 12).

Avec MAPLE :

```
> plot(GAMMA(t),t=0.1..5);
```



Doc. 12. *La fonction gamma.*

FICHE MÉTHODE

I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées sont des fonctions continues par morceaux sur I.

Pour montrer que l'intégrale $\int_I f$ converge :

- on peut montrer que la fonction $|f|$ est intégrable sur I. ;
- si $I = [a,b[$, on peut montrer que $\left(x \mapsto \int_a^x f\right)$ admet une limite à gauche en b.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

Pour montrer qu'une fonction f est intégrable sur I, on procède en deux étapes :

- on précise sur quel intervalle f est continue par morceaux : $([\inf I, \sup I[\,,\ ]\inf I, \sup I], \ldots)$;
- pour terminer, on partage éventuellement I en $]\inf I, a]$ et $[a, \sup I[$, avec $a \in I$ et on applique un critère d'intégrabilité sur chacun de ces intervalles.

Critères d'intégrabilité globaux

La fonction f est continue par morceaux sur I.

- *Critère par comparaison de fonctions*
  On montre l'existence d'une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
  $$|f| \leqslant g.$$
- *Critère utilisant une primitive de* $|f|$
  On introduit une primitive F de $|f|$ et on montre que F est bornée sur I.
- *Critère utilisant les segments contenus dans* I
  On montre l'existence d'une constante M telle que :
  $$\forall [a,b] \subset I \quad \int_a^b |f| \leqslant M.$$

Critères d'intégrabilité locaux : comparaison de fonctions

La fonction f est continue par morceaux sur $]a,b]$.

- On cherche une fonction g continue par morceaux, positive et intégrable sur $]a,b]$ telle que $f =_a O(g)$.
- On cherche une fonction g continue par morceaux et intégrable sur $]a,b]$ telle que $f \sim_a g$.

On pourra procéder de manière analogue pour un intervalle $[a,b[$

Critère par comparaison avec une série

Soit f dans $\mathcal{CM}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$, décroissante.

Pour montrer que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que la série $\sum f(n)$ converge.

Pour intervertir somme et intégrale sur un intervalle I d'une série de fonctions

- Si la série de fonctions est une série géométrique, on raisonne directement en calculant la somme partielle.
- Sinon, on peut utiliser le théorème de convergence dominée.
- On peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu 1

Deux expressions d'une même fonction

On considère, pour x réel, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \exp\left(t^x \ln t\right) \mathrm{d}\, t$.

1) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'elle est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

4) Établir, pour $x > 0$, l'égalité :

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}.$$

CONSEILS

Prendre $x_1 \leqslant x_2$ et comparer $F(x_1)$ et $F(x_2)$.

On pourra montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leqslant \exp\left(t^x \ln t\right)$$

pour étudier la limite de F en $+\infty$.

On pourra choisir α dans $]0,1[$ et partager l'intégrale en deux pour étudier la limite de F en $-\infty$.

SOLUTION

1) Fixons le réel x et considérons la fonction φ_x définie sur $]0,1]$ par

$$\varphi_x(t) = \exp\left(t^x \ln t\right).$$

Cette fonction est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant :

$$\varphi_x(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

La fonction φ_x est donc intégrable sur $]0,1]$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Considérons deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$. Alors, pour tout t de $]0,1]$, nous pouvons écrire $t^{x_1} \geqslant t^{x_2}$, puis

$$\exp\left(t^{x_1} \ln t\right) \leqslant \exp\left(t^{x_2} \ln t\right).$$

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et φ la fonction de $[a,b]\times]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t) = \exp\left(t^x \ln t\right)$. Alors :

- la fonction φ est continue par rapport à x sur $[a,b]$ et continue par rapport à t sur $]0,1]$;
- pour tout x de $[a,b]$, on a $\varphi(x,t) \leqslant \varphi(b,t)$;
- la fonction $(t \mapsto \varphi(b,t))$ est intégrable sur $]0,1]$.

Ainsi, la fonction F est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$.

3) • Travaillons d'abord avec $x > 0$.

Pour tout t de $]0,1]$, on a $\mathrm{e}^{-x \ln t} \geqslant -x \ln t$.

D'où : $t^x \ln t \geqslant -\dfrac{1}{x}$; puis $\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \exp\left(t^x \ln t\right) \leqslant 1$.

Nous en déduisons $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

• Supposons ensuite $x < 0$ et α dans $]0,1[$.

Pour tout t de $]0,\alpha[$, nous avons successivement $\ln t < \ln \alpha < 0$, puis $t^x > \alpha^x > 0$ et enfin :

$$\exp\left(t^x \ln t\right) < \exp\left(\alpha^x \ln \alpha\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent :

$$0 < F(x) = \int_0^\alpha \exp\left(t^x \ln t\right) \mathrm{d}\, t + \int_\alpha^1 \exp\left(t^x \ln t\right) \mathrm{d}\, t$$
$$\leqslant \alpha \exp\left(\alpha^x \ln \alpha\right) + (1 - \alpha).$$

Remarquons ensuite que, si α est fixé, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp\left(\alpha^x \ln \alpha\right) = 0.$$

Il suffit alors de fixer $\varepsilon > 0$, puis de choisir α dans $]0, 1[$ tel que :

$$(1 - \alpha) < \varepsilon.$$

On choisit ensuite M réel vérifiant pour tout $x < M$:

$$0 < \alpha \exp\left(\alpha^x \ln \alpha\right) \leqslant \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

On pourra utiliser l'égalité :

$$\exp(u) = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}.$$

4) Supposons $x > 0$.

Écrivons, pour t dans $]0, 1]$, $t^{t^x} = \exp\left(t^x \ln t\right) = \sum\limits_0^\infty \dfrac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!}$ et posons, pour tout n, $u_n(t) = \dfrac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!}$. Les fonctions u_n sont continues sur $]0, 1]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant $u_n(0) = 0$. Étudions la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, 1]$. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = t^x \ln t$.

t	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	$-\dfrac{1}{x\mathrm{e}}$	↗	0

$\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n!(\mathrm{e}x)^n}$ et la série numérique $\sum \dfrac{1}{n!(\mathrm{e}x)^n}$ converge. La série de fonctions de la variable t, $\sum u_n$, converge normalement sur $[0, 1]$. On peut donc permuter l'intégrale et la somme :

$$F(x) = \int_0^1 \left(\sum_0^\infty \frac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!}\right) \mathrm{d}\, t = \sum_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!} \mathrm{d}\, t\right)$$
$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}\, t.$$

On calcule, pour $n \geqslant 1$, $\int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}\, t$ en utilisant une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, avec $0 < \varepsilon < 1$.

$$\int_0^1 (t^x \ln t)^n \mathrm{d}\, t = -\frac{n}{nx + 1} \int_0^1 t^{nx} (\ln t)^{n-1} \mathrm{d}\, t.$$

On montre alors, par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}\, t = \frac{(-1)^n n!}{(nx + 1)^{n+1}}$$

et on conclut, pour tout $x > 0$: $F(x) = \sum\limits_0^\infty \dfrac{(-1)^n}{(nx + 1)^{n+1}}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu 2

Calcul de $\int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}\,x$

ÉNONCÉ

1) Factoriser $X^{2m}-1$ et en déduire une expression simplifiée de

$$I_m = \prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right).$$

2) Montrer que la fonction $-\ln(\sin)$ est intégrable sur $]0,1]$.

3) Déduire de la *question* **1** la valeur de

$$\int_0^{\pi/2} \left(-\ln(\sin(x))\right)\mathrm{d}\,x.$$

CONSEILS

SOLUTION

1) Nous savons que :

$$X^{2m}-1 = \prod_{k=1}^{2m}\left(X - \exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{m}\right)\right)$$

$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)+1\right).$$

Par conséquent :

$$X^{2m-2}+X^{2m-4}+\ldots+1 = \prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)+1\right).$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient :

$$m = 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right) = 2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right).$$

Et :

$$\prod_{k=1}^{m-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right) = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$

2) La fonction $\left(x \mapsto -\ln(\sin(x))\right)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

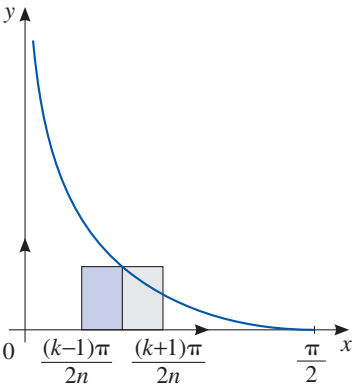
De plus,

$$-\ln(\sin(x)) \sim_0 -\ln(x)$$

et la fonction $-\ln$ est intégrable sur $]0,1]$. La fonction $-\ln(\sin)$ est donc intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Considérons, ci dessous, le graphe de la fonction $(x \mapsto -\ln(\sin x))$.



La fonction $-\ln(\sin)$ est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\frac{\pi}{2m}\sum_{1}^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right) \leqslant \int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}\,x.$$

Par ailleurs, fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction $-\ln(\sin)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout a de $]0, \alpha[$, on ait :

$$\int_0^a \big(-\ln(\sin(x))\big)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $m > \frac{1}{\alpha}$, on a alors :

$$\int_0^{\pi/2} \big(-\ln(\sin(x))\big)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2m}\sum_{1}^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right).$$

D'où :

$$\frac{\pi}{2m}\sum_{1}^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right) \leqslant \int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}\,x \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2m}\sum_{1}^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right).$$

Puis :

$$-\frac{\pi}{2m}\ln I_m \leqslant \int_0^{\pi/2} \big(-\ln(\sin(x))\big)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \varepsilon - \frac{\pi}{2m}\ln I_m.$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi/2} \big(-\ln(\sin(x))\big)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Montrer que la fonction $t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2 Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $f : x \mapsto |\ln x|^n$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer

$$\int_0^1 |\ln x|^n \, \mathrm{d}x.$$

3 Existence et calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}$.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2|\sin x|^{3/2}}$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 Existence et calcul des intégrales :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Indication : On pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln 2}{2}$ établi en exercice résolu.

6 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

7 **1)** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

2) Pour quelles valeurs de t, la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x-t}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

8 Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n(\ln t)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer son intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ en fonction de n.

En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une série.

9 Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x))(x-a)}}$, où $0 < a < b$.

10 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}\right)\mathrm{d}t$.

11 f est une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(On pourra fixer $B > 0$ et intégrer sur $[0, B]$ et sur $[B, x]$.)

12 Étudier la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n\,\mathrm{d}x\right)$.

13 Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

14 Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Indication : On pourra utiliser l'écriture de $\cos(\sqrt{x})$ comme somme d'une série.

15 (*D'après Écrin*, 1996.) α étant un réel, on pose

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}}.$$

Montrer que F est continue sur son domaine de définition.

16 Les notations sont les mêmes que dans l'exercice précédent.

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et déterminer F'.

2) Montrer que $F' \leqslant 0$.

Indication : On pourra couper l'intégrale en deux et faire un changement de variables.

3) Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} F$.

4) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 1^+} F(\alpha)$.

5) Donner le tableau de variations de F et l'allure de son graphe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

17 On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Soit $\alpha > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire, pour tout p de $\mathbb{N}$, la valeur de :

$$\int_0^\infty x^{2p}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3) Calculer, pour $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$.

4) En déduire, pour tout p de $\mathbb{N}$, la valeur de :

$$\int_0^\infty x^{2p+1}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x.$$

18 Soit $a > 0$. Préciser pour quelles valeurs de a et b la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|\sin x|^a}{x^b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

19 * Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $a < 0$, tels que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f'}{f} = a$.

Montrer que la fonction f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

En déduire la nature de la série $\sum f(n)$.

20 Soit a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

21 * On définit

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\dots(n+x)}.$$

1) Calculer I_n et étudier la limite de la suite (I_n).

2) On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\dots(n+x)}$.

En considérant $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$, donner un équivalent de

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\dots(n+x)} = nI_{n+1}$$

et en déduire la nature de la série $\sum I_n$.

22 * On considère, pour $\lambda \in]0,1[$, la fonction g définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-\lambda}(1-x)^\lambda}.$$

1) Montrer que g est intégrable sur $]0,1[$.

On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

2) À l'aide d'un changement de variable homographique, montrer que :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\lambda}(1+u)}.$$

3) En déduire l'expression de $I(\lambda)$ au moyen de $J(\lambda)$ et de $J(1-\lambda)$, où

$$J(\lambda) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\lambda}(1+u)}.$$

4) Donner une expression de $J(\lambda)$ comme somme d'une série convergente.

5) En déduire que :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}.$$

23 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 1-périodique.

On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ soit intégrable sur $[1,+\infty[$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente, mais non absolument convergente.

24 * On considère, pour tout réel a, la fonction :

$$f : x \mapsto x^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer que, si a appartient à $[-1,0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner une relation entre :

$$\int_1^{+\infty} x^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad \int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

3) Lorsque $a \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\cos x\,\mathrm{d}x$ diverge. Qu'en conclure pour :

$$\int_1^{+\infty} x^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\ ?$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4) Qu'en déduire pour les intégrales :

$$\int_1^{+\infty} x^a \cos x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} x^a \sin x \,\mathrm{d}x \ ?$$

5) a) Déterminer le signe de

$$\int_0^{\infty} x^a \sin x \,\mathrm{d}x$$

lorsque a appartient à $[-1, 0[$.

b) Montrer que les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

sont convergentes.

Préciser le signe de $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

25 *

a est un réel fixé.

1) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^2x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

26 *

1) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) En déduire la valeur de cette intégrale.

27

On considère une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et un réel $t > 0$.

1) Montrer que la fonction

$$\varphi : x \mapsto f(x)\exp\left(-tx^2\right)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer la limite de

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

3) On suppose $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

28

f est une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

2) Posons $\displaystyle I_n = \int_0^{\infty} n\,f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$; déterminer :

$$L = \lim_{n\to+\infty} I_n.$$

3) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $(I_n - L)$.

29

h étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{h(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$h'(0) = 0 = h(0).$$

30 *

Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\varphi(x) = f(0)$.

3) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

31

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t.$$

1) Étudier f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur un domaine à préciser.

2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + y = x$ sur $]0, +\infty[$.

Montrer qu'il existe une unique solution g telle que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Vérifier que $g(x) = x\,f(x)$.

Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Équations différentielles linéaires

9

Introduction

L'invention du calcul différentiel par Leibniz et Newton, à la fin du XVIIe *siècle, a permis la modélisation mathématique de nombreux phénomènes naturels. Beaucoup de problèmes de Mécanique, d'Astronomie, de Physique s'expriment par des équations différentielles.*

La résolution de ces équations revêt deux aspects complémentaires : l'existence et la détermination des solutions.

Vers 1840, Liouville a prouvé que des équations différentielles simples $(y' = x + y^2)$ *ne sont pas intégrables par quadrature, c'est-à-dire en utilisant uniquement les fonctions usuelles, les opérations algébriques et la primitivation.*

La détermination pratique de solutions exactes, lorsqu'elle est possible, requiert souvent l'utilisation de nombreux outils de l'Analyse et de l'Algèbre développés dans ce cours : séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier, fonctions définies par une intégrale, diagonalisation des matrices...

Une grande ingéniosité est alors nécessaire. À défaut de solutions exactes, des méthodes d'analyse numérique permettent de déterminer des solutions approchées.

OBJECTIFS

- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires du premier ordre.
- Système fondamental de solutions de l'équation homogène.
- La méthode de variation des constantes.
- Cas des équations linéaires à coefficients constants.
- Méthodes pratiques pour l'étude des équations différentielles du second ordre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1. Généralités

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I,F) & \to & \mathcal{C}^1(I,F) \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right.$ est linéaire.

C'est pourquoi les équations différentielles :

$$x' - ax = b \quad \textbf{(E)} \qquad \text{et} \qquad x' - ax = 0 \quad \textbf{(H)}$$

sont appelées des **équations différentielles linéaires** .

L'équation différentielle **(E)** est une **équation différentielle linéaire avec second membre**.

L'équation différentielle **(H)** est une **équation différentielle linéaire sans second membre**, ou **homogène**.

On dit que **(H)** est l'**équation homogène associée** à **(E)**.

Une I -solution de l'équation différentielle **(E)** (on dit aussi solution sur I de **(E)**) est une application φ de I dans F, dérivable sur I, telle que :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = (a(t))(\varphi(t)) + b(t).$$

La linéarité de l'application Φ permet de démontrer le théorème suivant.

Une solution sur I de l'équation différentielle **(E)** appartient à $\mathcal{C}^1(I,F)$.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, les fonctions solutions de ces équations sont à valeurs scalaires et ces équations sont qualifiées d'**équations différentielles scalaires**.

Rapport X, 2001

« Les sujets élémentaires qui bloquent totalement un candidat sont : ...,toute équation différentielle linéaire (premier ou second ordre). »

Théorème 1

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

- L'ensemble $S(\mathbf{H})$ des I -solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$x' = ax \qquad \textbf{(H)}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,F)$.

- Si l'équation différentielle linéaire avec second membre :

$$x' = ax + b \qquad \textbf{(E)}$$

admet une I -solution, φ_1, alors toute I -solution de **(E)** est somme de la solution particulière φ_1 et d'une solution de l'équation homogène associée **(H)** .

- S'il est non vide, l'ensemble $S(\mathbf{E})$ des I -solutions de **(E)** est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,F)$ de direction $S(\mathbf{H})$:

$$S(\mathbf{E}) = \varphi_1 + S(\mathbf{H}).$$

Il est important de constater que, dans tous les cas, l'équation homogène **(H)** admet au moins une solution (la fonction nulle), alors que l'équation avec second membre **(E)** peut ne pas en avoir.

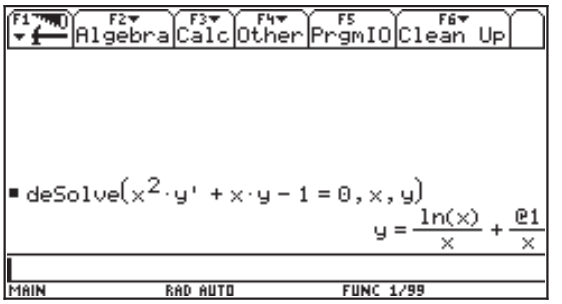
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Le problème de la recherche d'une solution vérifiant une condition initiale donnée est appelé **problème de Cauchy** associé à l'équation et noté :

$$\begin{cases} x' &= ax + b \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \qquad \textbf{(E)}$$

où t_0 est dans I et x_0 dans F.



(E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$, b une application continue de I dans F et **(E)** l'équation différentielle linéaire :

$$x' = ax + b$$

Pour tout (t_0, x_0) de $I \times F$, il existe une et une seule I-solution φ de l'équation différentielle **(E)** telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Rapport E4A, 2002

« Beaucoup d'imprécisions dans l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. »

Rapport X, 2002

« Le théorème de Cauchy-Lipschitz est souvent correctement appliqué. »

Rapport X, 2001

« utilisation par une très grande majorité des candidats du théorème de Cauchy-Lipschitz alors que les solutions considérées vérifiaient des conditions aux limites. »

Démonstration

Existence de solutions sur I

• Considérons la suite de fonctions (φ_n) continues de I dans F définie de la manière suivante :

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall t \in I) \quad (\varphi_{n+1}(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} [(a(s))(\varphi_n(s)) + b(s)]\,\mathrm{d}s).$$

On montre par récurrence l'existence et la continuité des fonctions φ_n.

• Désignons par $N(a(t))$ la norme d'endomorphisme de $a(t)$ subordonnée à la norme $\|\ \|$ de F, et K un segment contenu dans I et contenant t_0. L'application $t \mapsto N(a(t))$ est continue, donc bornée sur le segment K. Il existe un réel positif M tel que :

$$\forall t \in K \quad N(a(t)) \leqslant M.$$

De plus, on a :

$$\forall t \in K \quad \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leqslant M|t - t_0|\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty.$$

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 1$, on ait :

$$\forall t \in K \quad \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant M^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty.$$

Alors, pour tout t de K :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| &\leqslant \Big\| \int_{t_0}^{t} a(s)[\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)]\,\mathrm{d}s \Big\| \\ &\leqslant M^{n+1} \left| \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^n}{n!}\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant M^{n+1}\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Finalement, en notant $D(K)$ le diamètre de K, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\|\varphi_{n+1|K}(t) - \varphi_{n|K}(t)\| \leqslant M^n\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

$$\|\varphi_{n+1|K} - \varphi_{n|K}\|_\infty \leqslant M^n\|\varphi_{1|K} - \varphi_{0|K}\|_\infty \frac{D(K)^n}{n!}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La série $\sum \|\varphi_{n+1|K} - \varphi_{n|K}\|_\infty$ converge. La série $\sum(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ converge donc normalement sur tout compact de I. La suite de fonctions (φ_n) admet une limite φ.

De plus, la convergence normale sur tout compact de la série de fonctions et la continuité de ces fonctions entraînent la continuité de la fonction φ.

- Montrons que la fonction φ est une I -solution de l'équation différentielle.

Elle est continue et puisque, pour tout n, $\varphi_n(t_0) = x_0$, il en est de même de φ.

Fixons t dans I et K un segment contenu dans I et contenant t_0 et t :

$$\varphi(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} [(a(s))(\varphi_n(s)) + b(s)]\,\mathrm{d}\,s.$$

Or, pour tout s de K :

$$\begin{aligned}\|[(a(s))(\varphi_n(s)) + b(s)] - [(a(s))(\varphi(s)) + b(s)]\| &= \|(a(s))(\varphi_n(s) - \varphi(s))\| \\ &\leqslant N(a(s))\|\varphi_n(s) - \varphi(s)\| \\ &\leqslant M\|\varphi_{n|K} - \varphi_{|K}\|_\infty .\end{aligned}$$

Nous en déduisons la convergence uniforme sur K de la suite de fonctions $(s \mapsto (a(s))(\varphi_n(s)) + b(s))$ vers la fonction $(s \mapsto (a(s))(\varphi(s)) + b(s))$.

D'où :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to+\infty} [(a(s))(\varphi_n(s)) + b(s)]\,\mathrm{d}\,s \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [(a(s))(\varphi(s)) + b(s)]\,\mathrm{d}\,s\,.\end{aligned}$$

L'application $s \mapsto (a(s))(\varphi(s)) + b(s)$ est continue sur I.

L'application φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = (a(t))(\varphi(t)) + b(t).$$

L'application φ est une I -solution de l'équation différentielle linéaire.

Unicité

Nommons φ et ψ deux I -solutions du problème de Cauchy et construisons les suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions de I dans F définies par $\varphi_0 = \varphi$, $\psi_0 = \psi$ et la relation de récurrence utilisée au début de cette démonstration.

Les suites de fonctions (φ_n) et (ψ_n) sont des suites constantes.

Un raisonnement analogue à celui effectué pour établir l'existence de la solution montre que, en utilisant les mêmes notations :

$$\forall n \geqslant 0 \quad \|\varphi_{n|K} - \psi_{n|K}\|_\infty \leqslant M^n\|\varphi_{|K} - \psi_{|K}\|_\infty \frac{D(K)^n}{n!}.$$

Nous en déduisons que $\varphi = \psi$.

Corollaire 2.1

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$.

Notons $S(\mathbf{H})$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = ax$. Pour tout t_0 de I, l'application $\begin{cases} S(\mathbf{H}) \to F \\ \varphi \mapsto \varphi(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Rapport X, 2002

« Très peu de candidats ont songé à appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz de manière rétrograde (en changeant t en $T - t$). »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 2.2

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$.

L'espace vectoriel $S(\mathbf{H})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = ax$ a même dimension que F.

Corollaire 2.3

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$.

Notons $S(\mathbf{E})$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $x' = ax + b$. Alors $S(\mathbf{E})$ est non vide et a la structure d'espace affine de même dimension que F.

1.3. Exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exemple 1 : **Cas où $F = \mathbb{K}$**

Ce cas a été étudié en première année. Soit a et b deux fonctions continues de l'intervalle I dans $\mathbb{K}$.

Vous savez que la droite vectorielle des solutions de l'équation différentielle scalaire homogène $x' = a(t)x$ est

$$\left\{t \mapsto Ce^{A(t)}; C \in \mathbb{K}\right\},$$

où A désigne une primitive sur I de la fonction a.

Résoudre l'équation différentielle $x' = -2x + e^{-2t}(3t+1)$.

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, du premier ordre. L'ensemble de ses solutions, définies sur $\mathbb{R}$, est une droite affine.

L'équation homogène associée est $x' = -2x$. L'ensemble de ses solutions est :

$$\left\{t \mapsto ce^{-2t}; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre s'obtient sous la forme $P(t)e^{-2t}$, P désignant une fonction polynôme.

Le polynôme P est de degré 2 et : $P(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + a$ où a est un réel quelconque.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\left\{ce^{-2t} + \left(\frac{3}{2}t^2 + t\right)e^{-2t}; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une solution particulière de l'équation différentielle linéaire avec second membre s'obtient grâce à la méthode de variation de la constante.

Exemple 2 : **Cas où $\dim F = n$**

Choisissons $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.

Pour tout t de I, notons $A(t) = (a_{i,j}(t))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ les matrices respectivement associées à $a(t)$, $b(t)$ et $\varphi(t)$.

Rapport X, 2002

« Ces questions ont été bien traitées par presque tous les candidats qui savent comment transformer une équation du deuxième ordre en système du premier ordre. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'équation différentielle linéaire $x' = a(t)x + b(t)$ s'écrit matriciellement :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Cette écriture matricielle se traduit en termes de système d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \qquad \textbf{(S)}$$

Application 1

Système différentiel et matrice de similitude

Résoudre le système différentiel ***(E)*** *:*

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + t \end{cases}$$

avec la condition initiale $\begin{cases} x(0) = -0{,}36 \\ y(0) = 0{,}02 \end{cases}$.

La matrice de ce système différentiel linéaire est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ que l'on appelle matrice de similitude. Dans ce cas, il est toujours intéressant de résoudre le système en posant $z = x + \mathrm{i}y$.

Ici, on obtient : $z'(t) = (3 + i)\,z(t) + 1 + \mathrm{i}\,t$

(E) équivaut à : $z' = (3 + i)z + 1 + it$ $\qquad$ $(\mathbf{E}_1)$

Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $z(t) = Ce^{(3+\mathrm{i})t}$, où C est une constante complexe.

Cherchons une solution particulière de **(E)** sous la forme d'un polynôme de degré 1 :

$$z(t) = a + t\,b$$

avec a et b dans $\mathbb{C}$.

$z(t) = \dfrac{-18 + \mathrm{i}}{50} - \dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{10}t$, est une solution particulière de $(\mathbf{E}_1)$.

Les solutions de $(\mathbf{E}_1)$ sont les fonctions de la forme :

$$z(t) = \frac{-18 + \mathrm{i}}{50} - \frac{1 + 3\mathrm{i}}{10}\,t + Ce^{(3+\mathrm{i})\,t}$$

où $C \in \mathbb{C}$.

Nous en déduisons les solutions réelles de **(E)** en posant $C = C_1 + \mathrm{i}\,C_2$:

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}z(t) = -\dfrac{9}{25} - \dfrac{t}{10} + e^{3t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t) \\ y(t) = \mathrm{Im}z(t) = \dfrac{1}{50} - \dfrac{3t}{10} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_1 \sin t) \end{cases}$$

Avec la condition initiale, nous obtenons $C_1 = C_2 = 0$. Donc :

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{9}{25} - \dfrac{t}{10} \\ y(t) = \dfrac{1}{50} - \dfrac{3t}{10} \end{cases}$$

Exemple 3 : **Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre supérieur à 1**

Considérons n fonctions continues $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ de I dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t) \qquad \textbf{(E)}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$, nous obtenons une traduction de cette équation différentielle sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

2 Système fondamental de solutions. Le wronskien

2.1. Définitions

Dans ce paragraphe, la dimension de F est n et on étudie l'équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)x \qquad \textbf{(E)}$$

traduite, à l'aide d'une base de F, par le système différentiel linéaire homogène :

$$X' = A(t)X \qquad \textbf{(H)}$$

où A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On sait déjà que l'ensemble $S(\textbf{E})$ des solutions de ce système différentiel est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Hœné Wronski : mathématicien polonais (1776-1853).

Une famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de n éléments de $S(\textbf{E})$ est appelée un **système fondamental de solutions** de l'équation différentielle **(E)** si et seulement si c'est une base de $S(\textbf{E})$.

Notons $X_1, \ldots, X_n$ les matrices colonnes des applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ relativement à la base choisie B pour F.

La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle **(E)** si et seulement si la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $S(\textbf{H})$.

Dans ce cas, la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est appelée un **système fondamental de solutions** du système différentiel **(H)**.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n éléments de $S(\textbf{H})$.

Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on note :

$$X_j(t) = \begin{pmatrix} w_{1\,j}(t) \\ \vdots \\ w_{n\,j}(t) \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le **wronskien** de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est la fonction W de I dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall t \in I \quad W(t) = \text{Det}((w_{i,j}(t))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}) = \text{Det}(X_1(t), \dots, X_n(t)).$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Les techniques de résolution sont connues, l'aspect théorique (théorème de Cauchy-Lipschitz, et surtout la notion de wronskien) beaucoup moins. »

Théorème 3

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de n éléments I-solutions du système différentiel linéaire homogène :

$$X' = A(t)X \qquad \textbf{(H)}$$

et W le wronskien de cette famille.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$;
- $\exists t_0 \in I \quad W(t_0) \neq 0$;
- la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de **(H)**.

Démonstration

Soit t_0 un point quelconque de I et θ l'application de $S(\textbf{H})$ dans F, définie par :

$$\theta(\varphi) = \varphi(t_0)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire permet d'affirmer que θ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ base de } S(\textbf{H}) &\Leftrightarrow (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \text{ base de } F\\ &\Leftrightarrow \text{Det}_B(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \neq 0\\ &\Leftrightarrow W(t_0) \neq 0\end{aligned}$$

Puis :

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ base de } S(\textbf{H}) \Leftrightarrow \forall t \in I \quad W(t) \neq 0.$$

Rapport Centrale, 2001

« Il est décevant de constater que certains candidats ne savent pas donner la solution générale d'un tel système lorsque sa matrice est diagonalisable. »

2.2. La méthode de variation des constantes

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$.

Lemme 1

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de :

$$X' = A(t)X \qquad \textbf{(H)}$$

Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de n fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

On définit l'application Z de I dans $\mathbb{K}^n$ en posant :

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)X_j(t)$$

Alors, Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, chaque fonction coefficient l'est.

La méthode de variation des constantes permet de résoudre complètement le système différentiel avec second membre lorsqu'un système fondamental de solutions du système homogène est connu.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Par définition :

$$Z(t) = M(t) \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$$

Or, $\text{Det}\, M(t) = W(t) \neq 0$. Donc la matrice $M(t)$ est inversible et :

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1} Z(t)$$

Notons $M(t) = (w_{ij}(t))_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ et $N(t)$ la transposée de la matrice des cofacteurs de $M(t)$. On sait que $M(t)^{-1} = \dfrac{1}{W(t)} N(t)$.

Chaque fonction coefficient w_{ij} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$ l'est.

Lemme 2

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de :

$$X' = A(t)X \qquad \textbf{(H)}$$

Toute application dérivable Z de I dans $\mathbb{K}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) X_j(t)$$

les C_j étant des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :
Immédiat si vous regardez le début de la démonstration précédente.

Lemme 3

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de :

$$X' = A(t)X \qquad \textbf{(H)}$$

Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

L'application X définie par :

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)\, X_j(t)$$

est solution du système avec second membre :

$$X' = A(t)\, X + B(t) \qquad \textbf{(E)}$$

si et seulement si $\forall\, t \in I \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_j'(t)\, X_j(t) = B(t)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exposé de la méthode

On considère le système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$ **(E)**.

On suppose connu $(X_1, \dots, X_n)$, un système fondamental de solutions du système homogène associé : $X' = A(t)X$ **(H)**.

- Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$. La fonction $X = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$ est solution de **(E)** si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad \sum_{j=1}^{n} C_j'(t) X_j(t) = B(t).$$

L'équation $\sum_{j=1}^{n} C_j'(t) X_j(t) = B(t)$ est un système linéaire de Cramer. La résolution détermine les fonctions $C_1', \dots, C_n'$.

Connaissant $C_1', \dots, C_n'$, il reste à calculer n primitives pour déterminer les fonctions $C_1, \dots, C_n$.

Les solutions du système différentiel **(E)** sont les fonctions X de la forme :

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} (C_j(t) + k_j) X_j(t) \quad \text{où } k_1, \dots, k_n \text{ sont } n \text{ constantes.}$$

On reconnaît dans l'expression $\sum_{j=1}^{n} k_j X_j(t)$ les solutions de l'équation homogène.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 1*

Application 2

Le système $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{t^2+1}x + \dfrac{1}{t^2+1}y + \dfrac{2t^2-1}{t^2+1} \\ y' = -\dfrac{1}{t^2+1}x + \dfrac{t}{t^2+1}y + \dfrac{3t}{t^2+1} \end{cases}$

Résoudre ce système.

Nous reconnaissons un système différentiel linéaire que nous pouvons écrire, en utilisant les notations habituelles $X' = A(t)X + B(t)$. L'ensemble de ses solutions a la structure d'espace affine de dimension 2.

Les fonctions :

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des solutions du système homogène associé.

Calculons leur wronskien :

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$$

Le couple (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions du système homogène.

Cherchons les solutions du système avec second membre sous la forme :

$$t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t)$$

La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ_1' et λ_2' sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) + t\lambda_2'(t) = \dfrac{2t^2-1}{t^2+1} \\ -t\lambda_1'(t) + \lambda_2'(t) = \dfrac{3t}{t^2+1} \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit : $\lambda_1'(t) = \dfrac{-1}{t^2+1}$; $\lambda_2'(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$.

Puis : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \lambda_1(t) = -\text{Arctan } t + k_1 \\ \lambda_2(t) = \ln(1+t^2) + k_2 \end{cases}$

où k_1 et k_2 sont des constantes.

Les solutions du système avec second membre sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -\text{Arctan } t + t\ln(1+t^2) + k_1 + k_2 t \\ t\,\text{Arctan } t + \ln(1+t^2) - k_1 t + k_2 \end{pmatrix}$$

Application 3

Étude de $x'' + x = \text{cotan}\, t$ (E)

Résoudre, sur $]0, \pi[$, *cette équation différentielle* **(E)**.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ avec $y(t) = x'(t)$.

L'équation différentielle équivaut au système différentiel :

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{cotan}\, t \end{pmatrix} \qquad \textbf{(S)}$$

Les fonctions :

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de solutions du système homogène associé.

Résolvons le système avec second membre en posant : $Z(t) = a(t)\,Z_1(t) + b(t)\,Z_2(t)$ La méthode de variation des constantes donne :

$$a'(t) = -\cos(t) \quad \text{et} \quad b'(t) = \cos(t)\cot(t)$$

Puis, après intégration :

$$x(t) = \sin(t)\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + K_1\cos(t) + K_2\sin(t)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

Mensa ACADEMY

3 Équations linéaires à coefficients constants

3.1. Définition

L'équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

est dite **à coefficients constants** lorsque l'application a est constante.

Elle s'écrit alors $(E)\ x' = a\,x + b(t)$, où a désigne un endomorphisme de F.

Munissons l'espace vectoriel F d'une base et notons A la matrice de a relativement à la base choisie de F. Cette équation différentielle linéaire se traduit matriciellement par le système différentiel linéaire :

$$X' = AX + B(t) \qquad \textbf{(S)}$$

Le système différentiel linéaire homogène associé est $X' = AX$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 4

Le système : $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = \quad y + z \\ z' = \quad\quad z \end{cases}$

La matrice du système est triangulaire et la résolution est simple.
La dernière équation se résout en :

$$z(t) = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

Puis la seconde devient :

$$y' = y + Ce^t \qquad \textbf{(2)}$$

Les fonctions y cherchées sont de la forme :

$$y(t) = (Ct + B)e^t, \quad (B, C) \in \mathbb{R}^2$$

La première équation est alors :

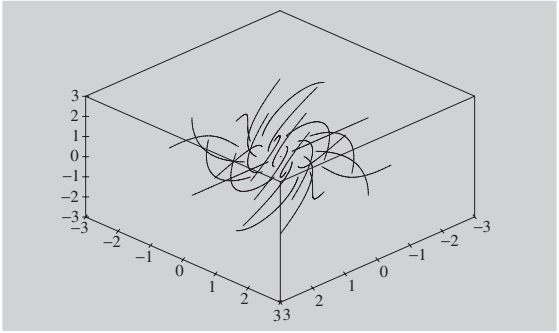
$$x' = x + (Ct + B + C)e^t \qquad \textbf{(1)}$$

On obtient : $x(t) = \left(C\dfrac{t^2}{2} + (B + C)t + A\right)e^t$

En résumé :

$$\begin{cases} x(t) = \left(C\dfrac{t^2}{2} + (B + C)t + A\right)e^t \\ y(t) = (Ct + B)e^t \\ z(t) = Ce^t \end{cases}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$.



Avec MAPLE :

```
> restart:
  sys := diff(x(t),t)=x(t)+y(t)+z(t),
  diff(y(t),t)=y(t)+z(t),diff(z(t),t)
  =z(t):
  fcns := {x(t),y(t),
  z(t)}:
  init:=x(0)=i,y(0)=j,z(0)=k:
  s:=dsolve({sys,init}, fcns);
  assign(s):
```

$$s := \{x(t) = e^t i + te^t j + \frac{1}{2}kt^2e^t + te^t k,$$
$$y(t) = e^t j + te^t k, z(t) = e^t k\}$$

```
> L:=[]:
  x:=unapply(x(t),t):
  y:=unapply(y(t),t):
  z:=unapply(z(t),t):
  for i from -1 to 1  do
  for j from -1 to 1 do
  for k from -1 to 1 do
  L:=L,spacecurve([x(t),y(t),z(t)],
  t=-1..1,
  axes=BOXED,
  view=[-3..3,-3..3,-3..3]):
  od: od: od;
  with(plots): display(L);
```

3.2. Le problème de Cauchy en 0

Dans le chapitre 4, nous avons établi le lemme suivant.

Lemme 4
Soit a un endomorphisme de F. Alors :
$\forall (s, t) \in \mathbb{K}^2 \quad e^{ta}e^{sa} = e^{(t+s)a} = e^{sa}e^{ta}$;
l'application e_a définie sur $\mathbb{R}$ par $e_a(t) = e^{ta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $e_a'(t) = ae^{ta} = e^{ta}a$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 4

Soit a un endomorphisme de F. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = ax$ est $\{t \mapsto e^{ta}(C)\,;\ C \in F\}$.

Démonstration

$\varphi \in S(\mathbf{H}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) - a(\varphi(t)) = 0.$

L'application $t \mapsto e^{-ta}$ est inversible, donc :

$$\varphi \in S(\mathbf{H}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{-ta}(\varphi'(t) - a\varphi(t)) = 0.$$

L'application $t \mapsto (\varphi(t), e^{-ta})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car chacune de ses composantes l'est.

De plus, nous savons que, si B est une application bilinéaire et continue et si u et v sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto B(u(t), v(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$(B(u(t), v(t))' = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t)).$$

Bien noter que, dans cette démonstration, e^{-ta} désigne un endomorphisme de F.

Or, l'application B définie sur $F \times \mathcal{L}(F)$ par $B(x, u) = u(x)$ est bilinéaire et continue car F est de dimension finie. Nous en déduisons que l'application $t \mapsto e^{-ta}(\varphi(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est l'application $t \mapsto e^{-ta}(\varphi'(t) - a\varphi(t))$.

Puis :

$$\begin{aligned}\varphi \in S(\mathbf{H}) &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad (e^{-ta}(\varphi(t)))' = 0\\ &\iff \exists C \in F \ \ \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-ta}(\varphi(t)) = C\\ &\iff \exists C \in F \ \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = e^{ta}(C).\end{aligned}$$

Mensa ACADEMY

Corollaire 4.1

Soit a un endomorphisme de F et ε un vecteur propre de l'endomorphisme a pour la valeur propre λ. L'application φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = e^{\lambda t}\,\varepsilon$ est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = a\,x$.

Démonstration

En effet : $e^{ta}(\varepsilon) = \sum_0^\infty \frac{t^n a^n}{n!}(\varepsilon) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a^n(\varepsilon) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} \lambda^n \varepsilon = e^{\lambda t}\varepsilon$

Corollaire 4.2

Soit a un endomorphisme de F, diagonalisable, et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de vecteurs propres de a associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Les n applications φ_i définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}\,\varepsilon_i$ forment un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = ax$.

Corollaire 4.3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène $X' = A\,X$ est $\{t \mapsto e^{t\,A}C; C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.

Ces n applications forment une famille génératrice.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 4.4

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisable, et $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Les n applications φ_i définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} X_i$$

forment un système fondamental de solutions du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$.

Théorème 5

Soit a un endomorphisme de F et e un vecteur de F. L'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a\,x \\ x(0) = e \end{cases}$ est la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{ta}(e)$.

► *Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.*

Application 5

Le système différentiel : $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x - t^2 \end{cases}$

Nous reconnaissons un système différentiel linéaire avec second membre.

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le système équivaut à :

$$X' = A\,X + B(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$.

La matrice A admet pour valeurs propres -1 et 1. Elle est diagonalisable et les droites vectorielles propres associées à ces valeurs propres sont respectivement $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les fonctions :

$$\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de solutions du système homogène.

Utilisons la méthode de variation des constantes pour terminer la résolution du système différentiel.

Soit $\varphi(t) = a(t)\,\varphi_1(t) + b(t)\,\varphi_2(t)$.

Pour que φ soit solution du système, il suffit que :

$$a'(t)\,\varphi_1(t) + b'(t)\,\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

Vous en déduirez :

$$a'(t) = \frac{1}{2}(t + t^2)\mathrm{e}^{t} \quad \text{et} \quad b'(t) = \frac{1}{2}(t - t^2)\mathrm{e}^{-t}$$

puis : $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 + a\mathrm{e}^{-t} + b\mathrm{e}^{t} \\ y(t) = t - a\mathrm{e}^{-t} + b\mathrm{e}^{t} \end{cases}$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

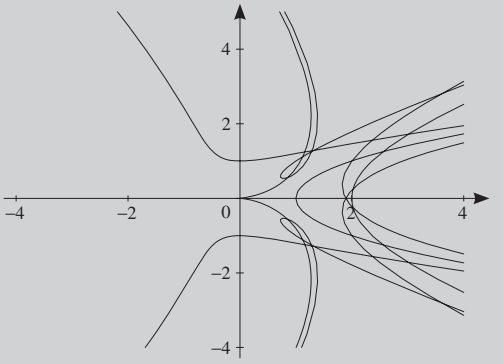
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec MAPLE :

```
> restart:
  sys := diff(x(t),t)=y(t)+t,
  diff(y(t),t)
  =x(t)-t^2:  fcns :={x(t),y(t)}:
  s:=dsolve({sys}, fcns);
  assign(s);
  x:=unapply(x(t),t);
  y:=unapply(y(t),t);
  L:=[]:with(plots):
  for _C1 from -1 to 1 do
  for _C2 from -1 to 1 do
  L:=L,plot([x(t),y(t),t=-4..4],
  view=[-4..4,-4..5]):od: od:
  display(L);
```

$$x := t \to \frac{1}{2}_C1\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}_C1\,e^{t} + \frac{1}{2}_C2\,e^{t} - \frac{1}{2}_C2\,e^{(-t)} + 1 + t^2$$

$$y := t \to \frac{1}{2}_C1\,e^{t} - \frac{1}{2}_C1\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}_C2\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}_C2\,e^{t} + t$$



3.3. Un système fondamental de solutions

Théorème 6

Soit a un endomorphisme de F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, notons φ_i l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_i(t) = e^{ta}(e_i)$.

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = a\,x$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\varphi \in S(\mathbf{H}) &\iff \exists c \in F \ \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = e^{ta}(c) \\
&\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \ \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = e^{ta}\left(\sum_0^n c_i\, e_i\right) \\
&\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \quad \varphi = \sum_0^n c_i\, \varphi_i
\end{aligned}$$

Théorème 7

Soit a un endomorphisme de F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F. L'ensemble $S(\mathbf{E})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire **(E)** $x' = ax + b(t)$ est :

$$S(\mathbf{E}) = \left\{ t \mapsto e^{ta}(C) + e^{ta}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-sa}(b(s))\,\mathrm{d}s\right);\quad C \in F \right\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Utilisons la méthode de variation des constantes en posant $\varphi(t) = \mathrm{e}^{ta}(C(t))$, où C désigne une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F.

Nous obtenons :

$$\mathrm{e}^{ta}(C'(t)) + a\mathrm{e}^{ta}(C(t)) = a\mathrm{e}^{ta}(C(t)) + b(t)$$

Soit :

$$C'(t) = \mathrm{e}^{-ta}(b(t)).$$

Puis :

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sa}(b(s))\,\mathrm{d}\,s + C(t_0).$$

Donc :

$$S(\mathbf{E}) = \left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{ta}(C) + \mathrm{e}^{ta}\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sa}(b(s))\,\mathrm{d}\,s\right) \;;\quad C \in F \right\}.$$

Notons $b_1, \ldots, b_n$ les applications composantes de l'application b relativement à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et t_0 un point de I.

L'ensemble $S(\mathbf{E})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire **(E)** $x' = a\,x + b(t)$ est :

$$\left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{ta}(C) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} b_i(s)\mathrm{e}^{(t-s)a}(e_i)\,\mathrm{d}\,s\right) ;\quad C \in F \right\}.$$

3.4. Méthode pratique

En pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants $x' = ax + b$:

- on résout d'abord l'équation différentielle homogène associée ;
- on cherche une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

Pour déterminer un système fondamental de l'équation différentielle homogène associée :

- si a est diagonalisable, il suffit de considérer les n applications $(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\varepsilon_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de a et $(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de vecteurs propres associés ;
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que a n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais l'est dans $\mathbb{C}$, on résout dans $\mathbb{C}$, puis on en déduit une base de solutions à valeurs réelles ;
- si a est trigonalisable, on se ramène à un système différentiel triangulaire ;
- sinon, on calcule e^{ta}. Ce calcul peut parfois se faire en utilisant un polynôme annulateur de a. (chapitre 20.)

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, on peut :

- chercher une éventuelle solution simple de cette équation différentielle ;
- utiliser la méthode de variation des constantes.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 4*

Rapport E4A, 2002

« Combien de candidats se trouvent désarmés devant une équation différentielle linéaire, même du premier ordre. »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Beaucoup de candidats n'ont aucune idée de l'allure des solutions d'un système différentiel. »

Rapport Centrale, 2001

« La méthode de variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre est presque totalement inconnue. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Étude d'un système différentiel

Le corps de base est $\mathbb{R}$.

1) *Résoudre le système différentiel :*

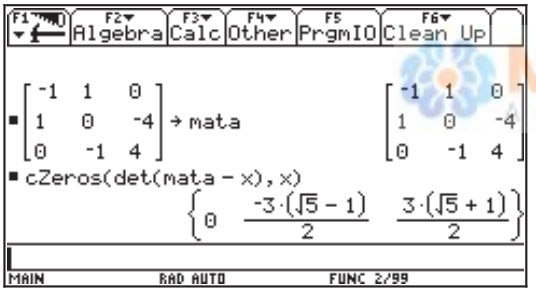
$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - 4z \\ z' = 4z - y \end{cases} \qquad \textbf{(H)}$$

2) *Montrer que toutes les courbes intégrales du système sont situées dans des plans affines parallèles de* $\mathbb{R}^3$.

1) La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Diagonalisation de A



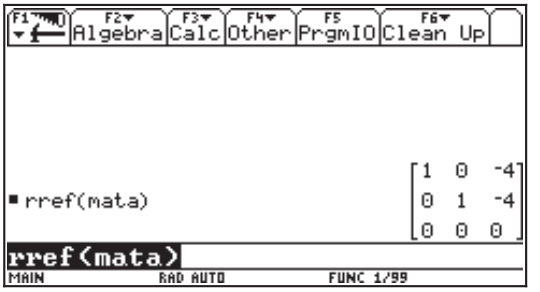
Les valeurs propres de A sont :

$$0, \qquad \frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{3-3\sqrt{5}}{2}.$$

Un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} A$ est :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}\left(A - \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2} I_3\right)$ est : $V_2 = \begin{pmatrix} -7+3\sqrt{5} \\ 5-3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$



Un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}\left(A - \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2} I_3\right)$ est $V_3 = \begin{pmatrix} -7-3\sqrt{5} \\ 5+3\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Détermination d'un système fondamental de solutions du système

Soit $\alpha = \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}$.

Les fonctions :

$$X_1 : t \mapsto X_1(t) = V_1$$
$$X_2 : t \mapsto X_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} V_2$$
$$X_3 : t \mapsto X_3(t) = \mathrm{e}^{\beta t} V_3$$

forment un système fondamental de solutions de **(H)**.

- Expression des solutions de **(H)**

Sous forme vectorielle, les solutions de **(H)** sont les fonctions X de la forme :

$$t \mapsto X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t)$$

avec (C_1, C_2, C_3) dans $\mathbb{R}^3$.

On en déduit que les trois fonctions scalaires (x, y, z) solutions de **(H)** sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1 + (-7+3\sqrt{5})C_2\mathrm{e}^{\alpha t} + (-7-3\sqrt{5})C_3\mathrm{e}^{\beta t} \\ y(t) = 4C_1 + (5-3\sqrt{5})C_2\mathrm{e}^{\alpha t} + (5+3\sqrt{5})C_3\mathrm{e}^{\beta t} \\ z(t) = C_1 + 2C_2\mathrm{e}^{\alpha t} + 2C_3\mathrm{e}^{\beta t} \end{cases}$$

avec (C_1, C_2, C_3) dans $\mathbb{R}^3$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) • Premier point de vue

Si X est une solution de **(H)**, il existe trois réels (C_1, C_2, C_3) tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = C_1 V_1 + C_2 e^{\alpha t} V_2 + C_3 e^{\beta t} V_3$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) \in C_1 V_1 + \text{Vect}(V_2, V_3)$$

La courbe intégrale associée à la fonction solution X est dans un plan affine de direction $\text{Vect}(V_2, V_3)$.

• Second point de vue

Au début de la question **1)**, on prouve que 0 est valeur propre de A.

Donc les lignes de A sont liées. On constate que la somme des trois lignes de A est nulle.

Si (x, y, z) est une solution de **(H)**, on a :

$$x' + y' + z' = 0.$$

La fonction $x+y+z$ est constante et la courbe intégrale correspondante est dans un plan affine d'équation :

$$x + y + z = k.$$

Tous ces plans sont parallèles.

Application 7

Étude d'un système différentiel

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 + x_4 \\ x_4' = x_4 \end{cases}$$

de deux façons différentes.

• Première méthode : Résolution « à la main »

La dernière ligne du système a pour solution :

$$x_4(t) = C_4 e^t$$

où C_4 est une constante.

La troisième ligne s'écrit alors :

$$x_3' = x_3 + C_4 e^t \qquad \textbf{(1)}$$

Donc $x_3(t) = (C_3 + C_4 t)e^t$, où C_3 est une constante.

La deuxième ligne devient :

$$x_2' = x_2 + (C_3 + C_4 t)e^t \qquad \textbf{(2)}$$

Donc $x_2(t) = \left(C_2 + C_3 t + C_4 \dfrac{t^2}{2}\right) e^t$, où C_2 est une constante.

Enfin, pour la première ligne :

$$x_1' = x_1 + \left(C_2 + C_3 t + C_4 \frac{t^2}{2}\right) e^t \qquad \textbf{(3)}$$

Donc $x_1(t) = \left(C_1 + C_2 t + C_3 \dfrac{t^2}{2} + C_4 \dfrac{t^3}{6}\right) e^t$,

où C_1 est une constante. Le système est résolu.

• Seconde méthode : Résolution par l'exponentielle de matrice

Le système s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La matrice du système est notée A.

Il faut calculer $\exp(tA)$.

Pour cela, commençons par déterminer A^k.

On a $A = I_4 + N$.

La matrice N est nilpotente d'indice 4 et commute avec I_4.

Donc :

$$A^0 = I_4, A = I_4 + N, \quad A^2 = I_4 + 2N + N^2$$

et, pour $k \geqslant 3$:

$$A^k = I_4 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} N^3.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc :

$$\exp(tA) = I_4 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}I_4 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}kN + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{k(k-1)}{2}N^2$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}N^3.$$

On en déduit que :

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^t I_4 + t\mathrm{e}^t N + \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t N^2 + \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t N^3.$$

Le calcul de N^2 et N^3 permet de prouver que :

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t & \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

La solution du système telle que :

$$X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

est la fonction X définie par :

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t & \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

On obtient, bien sûr, les mêmes formules que par la méthode précédente.

4 Le cas des équations différentielles scalaires d'ordre 2

4.1. Présentation

Une **équation linéaire scalaire d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

où α, β, γ, δ sont quatre fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et α est différente de la fonction nulle.

Sur tout intervalle J sur lequel la fonction α ne s'annule pas, la division par α est possible et permet de mettre l'équation **(E)** sous **forme résolue** :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \qquad \textbf{(E)}$$

les fonctions a, b et c étant continues sur J.

L'équation **(E)** est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(E}_1\textbf{)}$$

obtenue en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

Le théorème de structure et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'appliquent.

Rapport X, 2001

« Pour de nombreux candidats, une solution d'équation différentielle d'ordre 2 sur un intervalle doit tout au plus être continue sur cet intervalle. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 8

Soit a, b et c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et (t_0, x_0, x_1) dans $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy associé à l'équation **(E)** :

$$\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

admet une unique solution définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'interprète géométriquement.

Par un point (t_0, x_0) du plan (O, t, x), avec t_0 dans I, passe une infinité de courbes intégrales de **(E)**, mais une seule admet en ce point une pente donnée x_1 (*doc.* 1).

Pour une équation différentielle d'ordre 2, la dénomination **problème de Cauchy** s'applique uniquement lorsque, le paramètre t désignant le temps, la condition initiale indique la position et la vitesse à un même instant t_0. Un problème du type :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

n'est pas un problème de Cauchy. On l'appelle parfois problème de l'artilleur. Pourquoi ?

Corollaire 8.1 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre sous forme résolue

Soit a, b et c sont trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

- L'ensemble S_H des I - solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

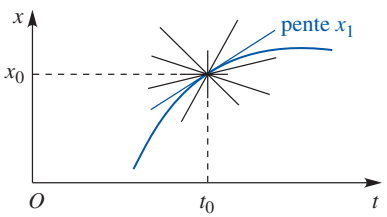
$$x'' = a(t)x' + b(t)x \qquad \textbf{(H)}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

- L'ensemble S_E des I - solutions de l'équation avec second membre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \qquad \textbf{(E)}$$

est non vide. C'est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H.



Doc. 1.

Rapport X, 2001

« De nombreux candidats ne prennent pas la peine d'expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E'_s) forme un espace vectoriel de dimension 2. »

4.2. Le wronskien

On appelle :

- **système fondamental de solutions** de l'équation homogène :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \qquad \textbf{(H)}$$

toute base de S_H, c'est-à-dire tout couple (f_1, f_2) de solutions de **(H)**, linéairement indépendantes.

- **wronskien** de deux solutions (g_1, g_2) de **(H)**, la fonction W, définie sur I par :

$$W(t) = \begin{vmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) \end{vmatrix} = g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t).$$

Vous retrouverez le wronskien des solutions $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_1' \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} g_2 \\ g_2' \end{pmatrix}$ de l'équation différentielle linéaire **(E_1)**

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 9

Soit un couple (g_1, g_2) de deux solutions de **(H)** et W leur wronskien. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\exists\, t_0 \in I \quad W(t_0) \neq 0$;
- $\forall\, t \in I \quad W(t) \neq 0$;
- (g_1, g_2) est un système fondamental de solutions de **(H)**.

4.3. Boîte à outils

4.3.1 La méthode de la variation de la constante

Rapport X, 2001

« La résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients non constants est toujours délicate, voire totalement ignorée. »

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \qquad \textbf{(E)}$$

et l'équation homogène associée :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \qquad \textbf{(H)}$$

Mensa ACADEMY

Exposé de la méthode

Soit x_0 une telle solution de (H). On pose $x(t) = x_0(t)k(t)$.

La fonction x_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule pas sur I, donc x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si et seulement si k l'est. Supposons que ce soit le cas.

La méthode étudiée dans ce paragraphe permet de déterminer toutes les solutions de **(E)** lorsque l'on connaît une solution de **(H)** qui ne s'annule pas sur I.

- Première étape : Recherche de l'équation satisfaite par la fonction k

On obtient :

$$x''(t) - a(t)x'(t) - b(t)x(t) = (2x_0'(t) - a(t)x_0(t))k'(t) + x_0(t)k''(t)$$

Puisque x_0 ne s'annule pas sur I, la fonction x est solution sur I de **(E)** si, et seulement si, la fonction k est solution sur I de :

$$k''(t) = \left(a(t) - 2\frac{x_0'(t)}{x_0(t)}\right)k'(t) + \frac{c(t)}{x_0(t)} \qquad \textbf{(F)}$$

- Deuxième étape : Détermination de k'

L'équation différentielle **(F)** est une équation linéaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue k'. Elle est sous forme résolue, on sait donc calculer k' (à l'aide de deux calculs de primitives au plus).

- Troisième étape : Résolution de **(E)**

Un troisième calcul de primitive permettra de trouver toutes les solutions k de **(F)** et d'en déduire toutes les solutions x de **(E)**.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 8

Résolution de $x'' + x = \operatorname{cotan} t$

Trouver toutes les solutions sur $]0, \pi[$ *de l'équation différentielle* $x'' + x = \operatorname{cotan} t$ **(E).**

Sur la TI, la commande :

```
deSolve(x''+x=cos(t)/sin(t),t,x)
```

donne immédiatement le résultat.

Résolvons le problème en utilisant la méthode de variation de la constante.

- La fonction cotangente est continue sur $]0, \pi[$.

La fonction sinus ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ et c'est une solution de l'équation homogène associée à **(E)**.

Cherchons donc les solutions de **(E)** sous la forme $x(t) = y(t) \sin t$. On a :

$$x''(t) + x(t) = 2y'(t)\cos t + y''(t)\sin t.$$

La fonction x est solution de **(E)** sur $]0, \pi[$ si et seulement si :

$$\forall t \in]0, \pi[\quad y''(t)\sin t = -2y'(t)\cos t + \operatorname{cotan} t$$

- Posons $z = y'$ et résolvons :

$$z' = -2z\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \qquad \textbf{(F)}$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $z(t) = \dfrac{C}{\sin^2 t}$.

$z(t) = \dfrac{1}{\sin t}$ est une solution particulière de **(F)**.

- Ainsi, il existe un réel k_1 tel que :

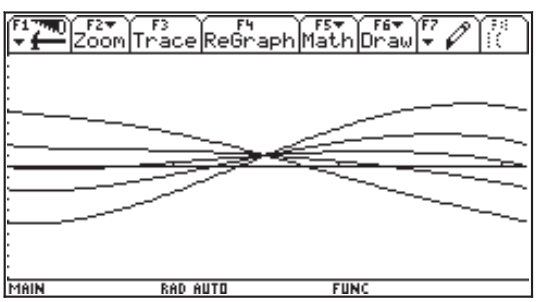
$$\forall t \in]0, \pi[\quad y'(t) = \frac{1}{\sin t} + \frac{k_1}{\sin^2 t}$$

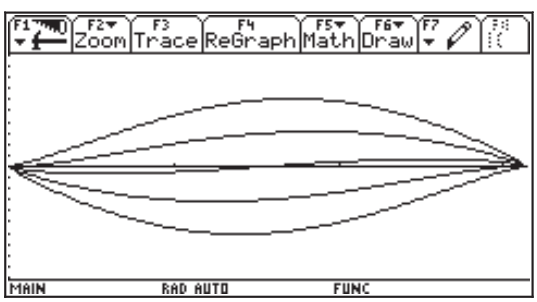
puis, il existe un réel k_2 tel que :

$$y(t) = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| - k_1 \operatorname{cotan} t + k_2$$

et, finalement :

$$x(t) = \sin t\, y(t) = \sin t \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| - k_1 \cos t + k_2 \sin t.$$





Doc. 2. *Avec la TI, deux familles de courbes intégrales.*
Dans les deux cas, $(t, x) \in [10^{-5}; 3{,}14159] \times [-10; 10]$.
Sur l'écran de gauche, $k_1 \in \{-5, -2, 0, 2, 5\}$ *et* $k_2 = 1$ *; sur celui de droite* $k_1 = 0$ *et* $k_2 \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.***

4.3.2 La méthode de la variation des constantes

Soit **(E)** :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de **(E)**.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La famille $\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}, \right)$ est un système fondamental de solutions de :

$$(S)\ X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X.$$

La recherche d'une solution de (S) par la méthode de variation des constantes consiste en la recherche de deux fonctions λ et μ de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$ soit solution de l'équation différentielle :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Le calcul formel (Maple, TI) résout automatiquement ces équations différentielles. Une bonne compréhension des méthodes exposées dans ce paragraphe est cependant indispensable.

Rapport X, 2001

« La méthode de variation des constantes pour des équations différentielles linéaires est à savoir sans hésitation. »

Exposé de la méthode

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \qquad \textbf{(E)}$$

Rapport Centrale, 1998.

« Environ un candidat sur deux traite mal de la variation des constantes dans les équations différentielles linéaires du second ordre. »

On suppose connu (f_1, f_2), un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée.

- On résout le système :

$$\begin{cases} 0 = \lambda'(t)\, f_1(t) + \mu'(t)\, f_2(t) \\ c(t) = \lambda'(t)\, f_1'(t) + \mu'(t)\, f_2'(t) \end{cases}$$

- On calcule une primitive λ de λ' et une primitive μ de μ'.
- On peut conclure :

– la fonction $t \mapsto \lambda(t)\, f_1(t) + \mu(t) f_2(t)$ est une solution particulière de **(E)**.

– les I - solutions de **(E)** sont les fonctions :

$$t \mapsto (\lambda(t) + k_1)\, f_1(t) + (\mu(t) + k_2)\, f_2(t)$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes.

On obtient :

$$\lambda' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple :

Résoudre, sur $]0, \pi[$, l'équation différentielle $x'' + x = \operatorname{cotan} t$. **(E)**

- Les fonctions sinus et cosinus forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée :

$$x'' + x = 0.$$

- On cherche une solution de **(E)** de la forme :

$$x(t) = A(t)\cos(t) + B(t)\sin(t).$$

La méthode de variation des constantes nous apprend que A' et B' doivent vérifier :

$$\begin{cases} A'(t)\cos(t) + B'(t)\sin(t) & = 0 \\ -A'(t)\sin(t) + B'(t)\cos(t) & = \operatorname{cotan}(t) \end{cases}$$

On obtient $A'(t) = -\cos(t)$ et $B'(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{\sin(t)}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- Des primitives de ces fonctions sont :

$$A(t) = -\sin(t)\ ; \qquad B(t) = \cos(t) + \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

- Finalement, les solutions de **(E)** sont de la forme :

$$x(t) = \sin(t)\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + K_1\cos(t) + K_2\sin(t).$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

Application 9

Équations d'Euler

Une équation d'Euler est une équation linéaire du deuxième ordre de la forme :

$$t^2y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = c(t)$$

où α et β sont deux constantes.

Une méthode pour résoudre ce type d'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ consiste à :

- *trouver des fonctions solutions de l'équation homogène associée de la forme $t \mapsto t^r$;*
- *appliquer la méthode de variation de la constante (ou des constantes) pour résoudre l'équation avec second membre.*

Résoudre les équations différentielles :

a) $t^2y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 2\ln^2 t + 12t$.

b) $t^3y''(t) + 3t^2y'(t) + ty(t) = 6\ln t$.

c) $t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = t(6 - \ln t)$.

Nous reconnaissons des équations différentielles linéaires, du second ordre. L'ensemble des solutions est, dans chaque cas, un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

a) La recherche de solutions de la forme $t \mapsto t^r$ conduit à l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -2 et -1.

Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t}.$$

La méthode de variation des constantes permet ensuite d'obtenir les solutions :

$$y(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \ln^2 t - 3\ln t + 2t + \frac{7}{2}.$$

b) Cherchons des solutions de l'équation homogène associée sous la forme $y(t) = t^r$.

On obtient l'équation :

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

La fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$y_0(t) = \frac{1}{t}$$

est solution de cette équation homogène. Utilisons la méthode de variation de la constante en cherchant les solutions de l'équation différentielle sous la forme :

$$y(t) = \frac{c(t)}{t}.$$

Nous obtenons :

$$tc'(t) + c''(t)\,t^2 = 6\ln t.$$

Vous terminerez la résolution de l'équation différentielle et trouverez les solutions :

$$y(t) = \frac{1}{t}[a + b\ln t + \ln^3 t].$$

avec a et b réels.

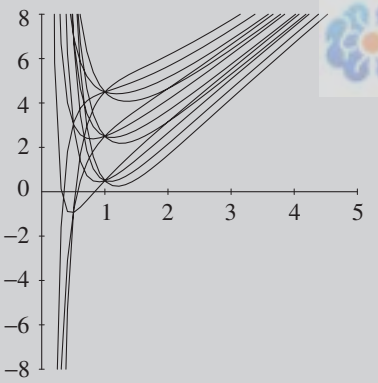
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec MAPLE :

```
> restart:with(plots):
  eq :=(x^2)*diff(y(x),x$2)
  +4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)
  = 2*(ln(x))^2+12*x;
  dsolve(eq, y(x));
  L:=[]:
  for k from 1 to 5 by 2 do
  for j from -3 to 3 by 2 do
  init:= y(1) = +k-.5,
  D(y)(1) = j:
  rep := dsolve({eq, init},
  y(x), type=numeric):
  L:=L,odeplot(rep,[x,y(x)],
  0..5,view=[0..5,-8..8]) od:
  od: display(L);
```

$$eq := x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4x\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\,\mathrm{y}(x) = 2\ln(x)^2 + 12x$$

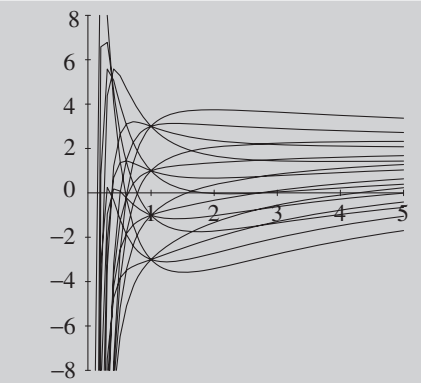
$$\mathrm{y}(x) = \ln(x)^2 - 3\ln(x) + \frac{7}{2} + 2x + \frac{_C1}{x} + \frac{_C2}{x^2}$$



Avec MAPLE :

$$eq := x^3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 3x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right) + x\,\mathrm{y}(x) = 6\ln(x)$$

$$\mathrm{y}(x) = \frac{\ln(x)^3}{x} + \frac{_C1}{x} + \frac{_C2\ln(x)}{x}$$



c) Cherchons des solutions de l'équation homogène sous la forme :

$$y(t) = t^r.$$

On obtient l'équation $r^2 + 1 = 0$.

La fonction $t \mapsto t^{\mathrm{i}}$ n'a pas été définie (i est un complexe).

Or, pour tout réel > 0 :

$$\exp(\mathrm{i}\ln t) = \cos(\ln t) + \mathrm{i}\sin(\ln t).$$

Vous vérifierez que les fonctions :

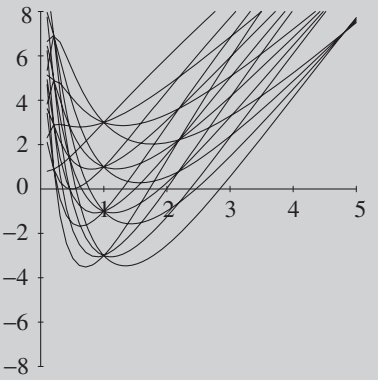
$$t \mapsto \cos(\ln t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(\ln t)$$

sont solutions de l'équation homogène.

Vous achèverez la résolution de l'équation différentielle et trouverez les solutions :

$$y(t) = a\cos(\ln t) + b\sin(\ln t) + \frac{t}{2}(7 - \ln t).$$

Avec MAPLE :



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.4. Équations différentielles linéaires et oscillateurs

4.4.1 Oscillateur linéaire (ou harmonique) simple

De nombreux phénomènes physiques, tels que le mouvement d'une masse suspendue à un ressort vertical et soumise à son poids et à la force de rappel du ressort, se traduisent par une équation différentielle de la forme : $x'' + \omega^2 x = 0$.

La solution générale de l'équation est de la forme :

$$x(t) = a\cos(\omega t + \phi).$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes a et ϕ. a est l'amplitude du mouvement et $\omega > 0$ est sa pulsation. La solution est périodique. Multiplions l'équation par x' et intégrons. Nous obtenons :

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C.$$

À un facteur près, et en convenant de prendre l'énergie potentielle nulle lorsque la masse est à sa position d'équilibre, cette équation s'interprète par la conservation de l'énergie mécanique totale du système.

Allez voir le site : http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/equadiff

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+9*x(t):dsolve(eq,x(t));
                    x(t) = _C1 sin(3 t) + _C2 cos(3 t)
> L:=[]:
  for k from -2 to 2 by 2 do
  p:=dsolve({eq,x(0)=k,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
  L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):
  od:display(L);
```

4.4.2 Oscillateur linéaire amorti

Lorsque l'oscillateur est amorti par un frottement fluide, une force de frottement opposée au vecteur vitesse modifie l'équation différentielle qui devient :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0.$$

Le réel λ est positif. Le terme en $2\lambda x'$ correspond à une dissipation d'énergie. Les réels $\frac{1}{2\lambda}$ et $\frac{1}{\omega}$ sont homogènes à un temps.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On les compare en introduisant le rapport $Q = \dfrac{\omega}{2\lambda}$, appelé facteur de qualité de l'oscillateur ou $\xi = \dfrac{1}{2Q}$, appelé facteur d'amortissement (sciences de l'ingénieur).

L'équation caractéristique de l'équation différentielle a pour discriminant réduit :

$$\delta = \lambda^2 - \omega^2 = \lambda^2(1 - 4Q^2).$$

• Lorsque $\lambda < \omega$, les conditions initiales permettent de déterminer une solution de la forme :

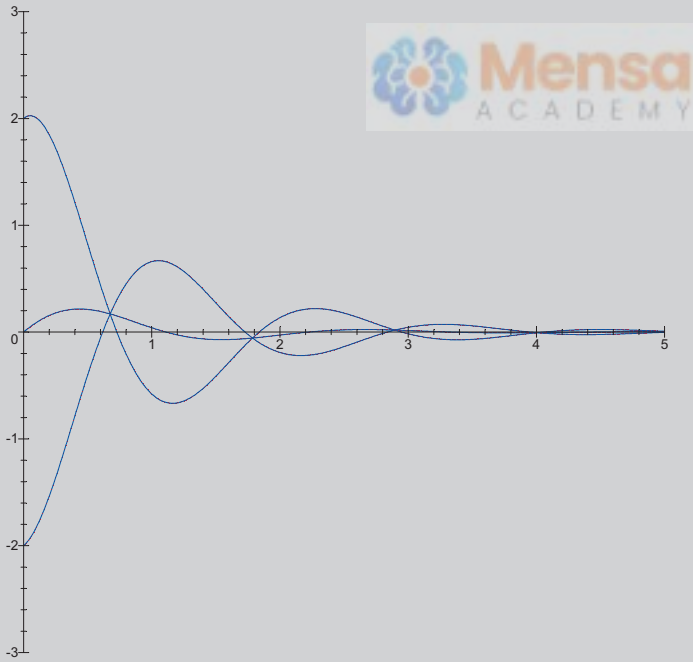
$$x(t) = \exp(-\lambda t)(a\cos(\sqrt{-\delta}t) + b\sin(\sqrt{-\delta}t)).$$

Le régime est pseudo-périodique. L'oscillateur est amorti.

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+2*diff(x(t),t)+9*x(t):dsolve(eq,x(t));
```

$$x(t) = _C1\, e^{(-t)} \sin(2\sqrt{2}\, t) + _C2\, e^{(-t)} \cos(2\sqrt{2}\, t)$$

```
> L:=[]:
  for k from -2 to 2 by 2 do
  p:=dsolve({eq,x(0)=k,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
  L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):
  od:display(L);
```



• Lorsque $\omega = \lambda$, les conditions initiales permettent d'obtenir :

$$x(t) = (a\lambda t + b)\exp(-\lambda t).$$

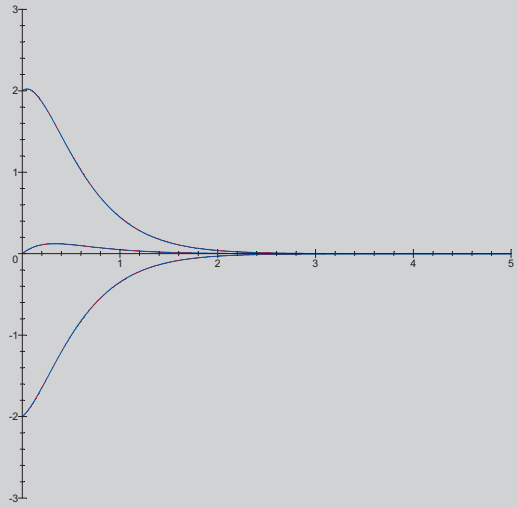
$b = x(0)$ mesure ici l'allongement du ressort à l'état initial moins l'allongement à l'équilibre. Il n'y a pas d'oscillation. Le régime est dit apériodique critique.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+6*diff(x(t),t)+9*x(t):dsolve(eq,x(t));
```

$$x(t) = _C1\, e^{(-3t)} + _C2\, e^{(-3t)}\, t$$

```
> L:=[]:
  for k from -2 to 2 by 2 do
  p:=dsolve({eq,x(0)=k,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
  L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):
  od:display(L);
```



- Lorsque $\omega < \lambda$, les conditions initiales permettent d'obtenir :

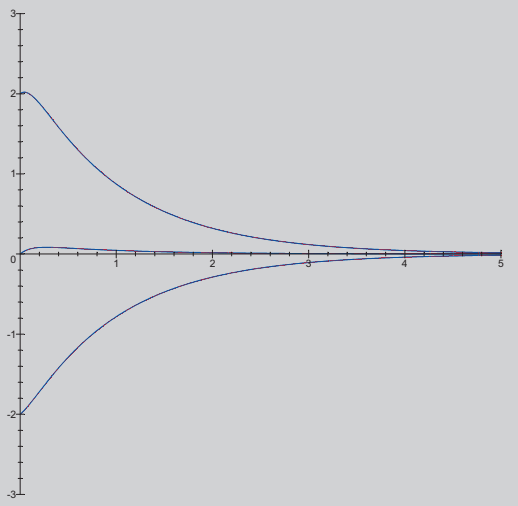
$$x(t) = a\exp(-\lambda t)\exp(-\sqrt{\delta}t) + b\exp(-\lambda t)\exp(\sqrt{\delta}t)).$$

Il n'y a pas d'oscillation. Le régime est dit apériodique. Rapidement, $x(t)$ est à peu près égal à : $x(t) = b\exp((-\lambda + \sqrt{\delta})t)$.

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+10*diff(x(t),t)+9*x(t):dsolve(eq,x(t));
```

$$x(t) = _C1\, e^{(-9t)} + _C2\, e^{(-t)}$$

```
> L:=[]:
  for k from -2 to 2 by 2 do
  p:=dsolve({eq,x(0)=k,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
  L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):
  od:display(L);
```



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.4.3 Oscillateur linéaire amorti et excité

De nombreux autres exemples d'oscillateurs peuvent être donnés : circuits RLC...

Le point en lequel est accroché le ressort est soumis à un mouvement imposé. L'équation différentielle devient :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = f(t).$$

La solution cherchée de l'équation différentielle est la somme d'une solution x_1 correspondant au régime libre (qui tend vers 0) et d'une solution particulière x_2. Les deux constantes de la solution x_1 s'obtiennent à partir des conditions initiales et traduisent la dépendance de cette solution vis-à-vis des conditions initiales. Assez vite, la solution devient presque égale à la solution x_2. Le système semble oublier les conditions initiales et sa réponse est dictée par l'excitation imposée. C'est le régime forcé, le signal de sortie est dicté par l'extérieur, c'est-à-dire le signal d'entrée.

Exemple : Le signal d'entrée est sinusoïdal : $f(t) = A\cos(\alpha t)$. À partir d'un certain temps, le signal de sortie est à peu près égal à la solution particulière :

$$x(t) = A\left(2\lambda\alpha\sin(\alpha t) + \frac{(\omega^2 - \alpha^2)\cos(\alpha t)}{4\lambda^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}\right)$$

```
> restart:with(plots):
> x:=t->(2*lambda*w*sin(w*t)+(omega^2-w^2)*cos(w*t))/(4*lambda^2
  *w^2+(omega^2-w^2)^2);
  r:=simplify(diff(x(t),t$2)+2*lambda*diff(x(t),t)+omega^2*x(t));
```

$$x := t \to \frac{2\,\lambda\, w\sin(w\,t) + (\omega^2 - w^2)\cos(w\,t)}{4\,\lambda^2\, w^2 + (\omega^2 - w^2)^2}$$

$$r := \cos(w\,t)$$

Cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = GA\cos(\alpha t + \phi).$$

ϕ désigne le décalage de phase de l'oscillateur par rapport à l'excitateur. G et ϕ sont respectivement le module et un argument de :

$$H(\alpha) = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2) + 2\mathrm{i}\lambda\alpha}$$

qui est la fonction de transfert. On constate que ϕ varie de 0 à $-\pi$ lorsque α augmente et vaut $-\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \alpha$. Le signal de sortie est en retard sur le signal d'entrée. De plus, si l'amortissement est faible, G devient maximum lorsque :

$$\alpha = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

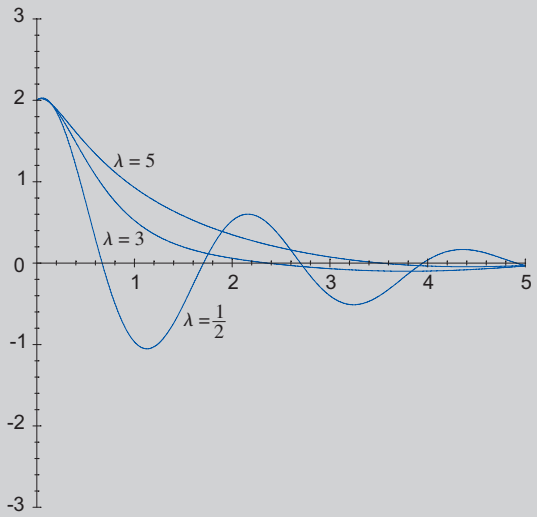
L'objet entre en résonance sur sa fréquence propre ω.

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+2*lambda*diff(x(t),t)+9*x(t)-cos(t);
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + 2\,\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + 9\,\mathrm{x}(t) - \cos(t)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
> L:=[]:
  for lambda in {1/2,3,5} do
  p:=dsolve({eq,x(0)=2,D(x)(0)=1},x(t),type=numeric):
  L:=L,odeplot(p,[t,x(t)],0..5,view=[0..5,-3..3],numpoints=500):
  od:display(L);
```



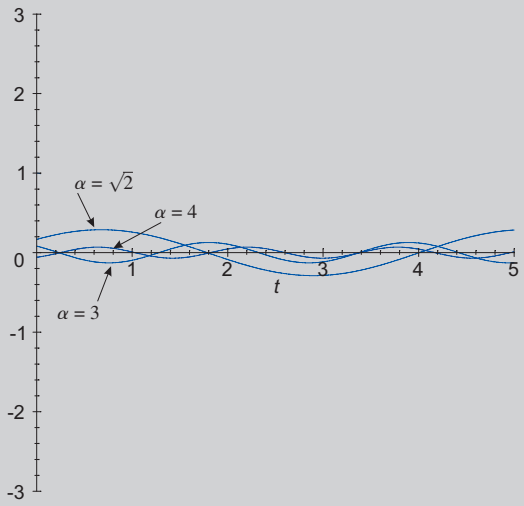
Doc. 3. $x'' + 2\lambda x' + 9x = \cos t$.

```
> restart:with(plots):
> eq:=diff(x(t),t$2)+(1/2)*diff(x(t),t)+omega*x(t)-cos(3*t);
  rep:=dsolve(eq,x(t));
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,x(t)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,x(t)\right) + \omega\,x(t) - \cos(3\,t)$$

$$rep := x(t) = 2\,\frac{-18\cos(3\,t) + 2\cos(3\,t)\,\omega + 3\sin(3\,t)}{333 - 72\,\omega + 4\,\omega^2} + _C1\,e^{(1/4\,(-1+\sqrt{1-16\,\omega})\,t)} + _C2\,e^{(-1/4\,(1+\sqrt{1-16\,\omega})\,t)}$$

```
> L:plot(cos(3*t),t=0..5,view=[0..5,-3..3]):
  for omega in {sqrt(73/8),7} do
  L:=L,plot((-36*cos(3*t)+4*cos(3*t)*omega+6*sin(3*t))/
  (333-72*omega+4*omega^2),t=0..5,view=[0..5,-3..3],
  numpoints=500):od:display(L);
```



Doc. 4. $x'' + 2x' + 4x = \cos \alpha t$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Résolution d'un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants lorsque la matrice du système est diagonalisable**

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour résoudre le système :

$$X' = AX \qquad \textbf{(H)}$$

- on diagonalise A en déterminant une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, $(V_1, \ldots, V_n)$ et les valeurs propres associées, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$;
- on rappelle que les n fonctions $X_i : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t} V_i$ forment un système fondamental de solutions de **(H)** ;
- toute solution X de **(H)** est de la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} V_i \quad \text{où } C_1, \ldots, C_n \text{ sont } n \text{ éléments de } \mathbb{K}.$$

● Pour résoudre un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants lorsque la matrice du système est quelconque**, on peut :

- procéder en trigonalisant la matrice A du système et résoudre le système triangulaire associé ;
  - on trigonalise A en déterminant une matrice triangulaire T et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$;
  - on pose $Y = P^{-1}X$, le système initial $X' = AX$ équivaut à $Y' = TY$;
  - on résout le système $Y' = TY$;
  - on en déduit $X = PY$.
- calculer $\exp(tA)$.

  La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ (C) est la fonction $t \mapsto \exp(tA)(X_0)$

● Résolution d'un **système différentiel linéaire avec second membre lorsqu'un système fondamental de solutions du système homogène est connu**

On applique la méthode de variation des constantes.

● Pour résoudre une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre supérieur à 1**, on la traduit en une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (*cf.* exemple 3, paragraphe 1.3).

● Résolution d'une **équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** :

$$y'' = \alpha y' + \beta y \qquad \textbf{(H)}$$

où α et β sont deux constantes.

- Déterminer les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 = \alpha r + \beta \qquad \textbf{(C)}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

- Le cas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.
  - Lorsque l'équation caractéristique **(C)** admet deux racines distinctes λ et μ, toute solution complexe de **(H)** est de la forme $y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t}$, où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.
  - Lorsque l'équation caractéristique **(C)** admet une racine double $\lambda = \dfrac{\alpha}{2}$, toute solution complexe de **(H)** est de la forme $y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}$, où k_1 et k_2 sont des constantes complexes.
- Le cas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
  - Lorsque l'équation caractéristique **(C)** admet deux racines réelles distinctes λ et μ, toute solution réelle de **(H)** est de la forme :

$$y(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t}, \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

  - Lorsque l'équation caractéristique **(C)** admet une racine double réelle $\lambda = \dfrac{\alpha}{2}$, toute solution réelle de **(H)** est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}, \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

  - Lorsque l'équation caractéristique **(C)** admet deux racines complexes conjuguées $\lambda = r + is$ et $\overline{\lambda} = r - is$, toute solution réelle de **(H)** est de la forme :

$$y(t) = (k_1 \cos(st) + k_2 \sin(st))e^{rt}, \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

Mensa ACADEMY

● Pour trouver une **solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre**, on peut :

- essayer de « deviner » une telle solution ;
- décomposer le second membre en une somme de fonctions « plus simples » et appliquer le principe de superposition ;
- lorsque l'on connaît une solution de l'équation homogène associée qui ne s'annule pas, utiliser la méthode de variation de la constante ;
- lorsque l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, utiliser la méthode de variation des deux constantes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD d'algorithmique

Résolution approchée d'une équation différentielle par discrétisation

Partie mathématique

L'équation suivante, appelée équation de Laplace, de Poisson ou de la conduction, modélise de nombreux phénomènes physiques :

$$\forall x \in]0,1[\quad -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x)\,; \quad u(0) = a, u(1) = b$$

a et b sont deux réels, c est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ et f est une fonction continue sur $[0,1]$.

Les conditions imposées en 0 et 1 justifient l'expression de « problème aux limites » utilisée pour désigner l'équation.

De nombreux phénomènes physiques se traduisent par des problèmes aux limites. Leur résolution exacte est en général impossible. Nous allons exposer une méthode de résolution approchée par discrétisation, appelée **méthode des différences finies** .

Nous admettons l'existence d'une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

Notons, pour $n > 0$ et tout i entre 0 et n : $h = \dfrac{1}{n}$, $x_i = ih$, $c_i = c(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ et u_i la valeur approchée cherchée de $u(x_i)$.

Supposons u de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. Alors :

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2}[-2u(x_i) + u(x_{i-1}) + u(x_{i+1})] + O(h^2).$$

D'où :

$$u_i'' \simeq \frac{1}{h^2}[-2u_i + u_{i-1} + u_{i+1}].$$

En reportant dans l'équation, on obtient, pour tout i de 1 à $n-1$:

$$\frac{1}{h^2}[2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}] + c_i u_i = f_i.$$

et $u_0 = a$, $u_n = b$.

Le vecteur $u = (u_1, \cdots, u_{n-1})$ est solution du système linéaire : $A\,u = B$, où :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & 2+c_{n-2}h^2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2+c_{n-1}h^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} f_1 + \dfrac{a}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \dfrac{b}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Partie informatique

Écrire une procédure dont les fonctions c, u sont des paramètres et qui trace les graphes des fonctions u et de la solution approchée déterminée par cette méthode.

Comparer.

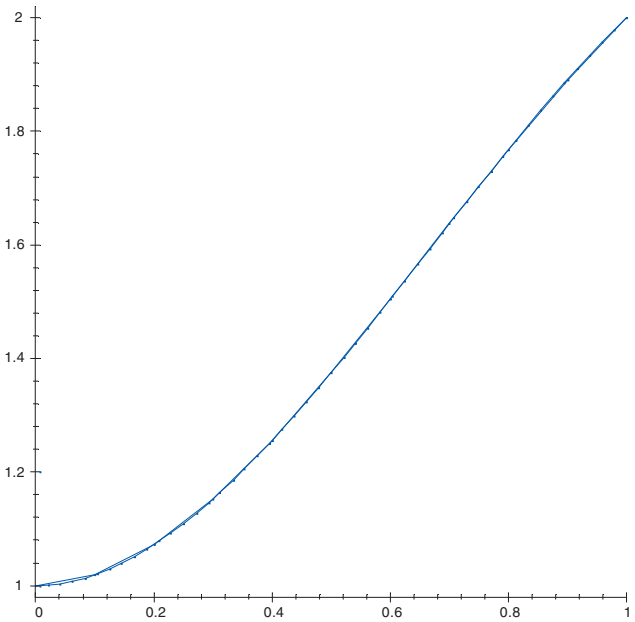
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Méthode des différences finies

```
> restart:with(linalg):with(plots):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> u:=t->1+2*t^2-t^3:c:=t->2*t-t^3:
> f:=t->-D(D(u))(t)+c(t)*u(t);f(t);
```

$$f := t \to -D(D(u))(t) + c(t)u(t)$$
$$v - 4 + 6t + (2t - t^3)(1 + 2t^3 - t^3)$$

```
> DiffFinies:=proc(c,f,a,b,n)
  local h,i,x,s,L,G,U;
  global A,B;
  h:=1/n;
  A:=matrix(n-1,n-1,0);
  B:=matrix(n-1,1,0);
    for i from 1 to n-1 do
      x:=i*h;
      A[i,i]:=2/h^2+c(x);
      B[i,1]:=f(x);
      if i<n-1 then A[i,i+1]:=-1/h^2; fi;
      if 1<i then A[i,i-1]:=-1/h^2; fi;
    od;
  B[1,1]:=B[1,1]+a/h^2;B[n-1,1]:=B[n-1,1]+b/h^2;
  U:=linsolve(1.*A,B);
  s:=[0,a];
    for i from 1 to n-1 do s:=s,[i*h,U[i,1]]; od;
  s:=s,[1,b];
  L:=plot([s]);
  G:=plot(u(t),t=0..1);
  display(L,G):
  end:
> DiffFinies(c,f,1,2,10);
```



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Résoudre, en la transformant en un système différentiel, l'équation différentielle :

$$x'' - 10x' + 25x = -t \qquad \textbf{(1)}$$

2 **1)** Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 2y - 2z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

2) Montrer que les courbes solutions obtenues, appelées trajectoires du système différentiel, sont contenues dans des plans parallèles de $\mathbb{R}^3$.

3 **1)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer, pour t réel, la matrice e^{tA}.

2) En déduire la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} \end{cases}$$

4 **1)** Résoudre, de deux manières différentes, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

2) En déduire les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z + 1 \\ y' = x - y - 2z + t \\ z' = -2x + y - z + t^2 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

5 Résoudre l'équation différentielle $(t+1)x'' - x' - xt = 0$, sachant que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est solution.

6 Résoudre l'équation différentielle :

$$x^3 y'' + xy' - y = \mathrm{e}^{1/x}$$

7 Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

8 Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions du système :

$$\begin{cases} tx' = x - ty \\ ty' = tx + y \end{cases} \qquad \textbf{(S)}$$

9 Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases} \qquad \textbf{(S)}$$

10 ** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ et α un complexe de partie réelle strictement positive tels que :

$$\lim_{+\infty}(f + \alpha f') = 0$$

1) Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

2) Que dire de f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{+\infty}(f + f' + f'') = 0$?

11 Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \text{et} \quad xy'' + 2y' + xy = f$$

On pourra poser $z = xy$ et déterminer la fonction inconnue z.

12 ** Déterminer les fonctions y de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = 0$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Séries entières

10

Introduction

Dans les chapitres précédents d'Analyse, nous avons manipulé certaines fonctions exprimées comme sommes de séries, par exemple :

• *pour tout* x *de* $]-1,1[$ *:*

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

• *pour tout* z *de* $\mathbb{C}$ *:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

• *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dans ces trois exemples, chaque fonction considérée est décrite comme fonction somme d'une série de fonctions $\sum u_n$*, où* u_n *est une fonction monôme, nulle ou de degré* n *:*

$$u_n(x) = a_n x^n$$

Le but de ce chapitre est l'étude systématique de ces séries de fonctions appelées séries entières.

OBJECTIFS

- Définition des séries entières.
- Rayon de convergence d'une série entière.
- Disque de convergence et intervalle de convergence d'une série entière.
- Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- Convergence normale sur tout compact du disque de convergence.
- Primitive et dérivée d'une fonction somme de séries entières.
- Fonction développable en série entière.
- Formule du binôme généralisée.
- Développements classiques.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Séries entières réelles ou complexes, les définitions

1.1. Définition d'une série entière

Soit (a_n) une suite de nombres complexes, la **série entière** de la variable réelle x associée à la suite (a_n) est la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum a_n x^n$. Le nombre a_n est appelé le n-ième coefficient de la série entière $\sum a_n x^n$.

De même, la série entière de la variable complexe z associée à la suite (a_n) est la série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum a_n z^n$.

Exemples :

- $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sont des séries entières.
- On peut identifier le polynôme $a_0 + \cdots + a_p z^p$ à une série entière dont les coefficients sont nuls à partir de l'indice $p+1$.

1) Les fonctions sommes partielles d'une série entière sont des fonctions polynômes.
2) Pour $z = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge. Sa somme vaut : a_0.

1.2. Lemme d'Abel

Lemme
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul.
Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z :

$$a_n z^n = O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$$

Précisons le domaine de convergence d'une série entière, c'est-à-dire le domaine de définition de sa fonction somme.

Théorème 1. Lemme d'Abel
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration
Vous rédigerez la démonstration en écrivant :

$$\forall\, z_0 \neq 0 \qquad |a_n z^n| = |a_n||z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

et, pour $0 < |z| < |z_0|$, une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{z_0}\right|$ converge.

1.3. Rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$, on note A l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. On constate aisément que :

- $0 \in A$;
- A est un intervalle, car si r est dans A, alors $[0, r] \subset A$.

Rapport X, 2001
« Les séries entières sont toujours en difficulté par leur rayon de convergence dont on ne connaît pas la signification, pas plus que le lemme d'Abel. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On définit le **rayon de convergence** R de la série entière $\sum a_n z^n$:

$$R = \sup A = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ ; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$$

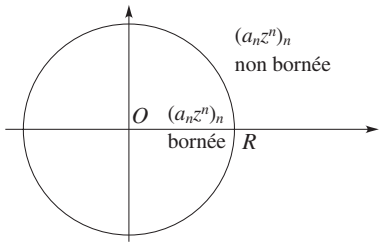
Exemples :

- Pour la série entière $\sum nz^n$: $A = [0,1[$ et $R = 1$.
- Si α est un réel strictement positif, pour la série entière $\sum \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$:

$$A = [0,\alpha] \quad \text{et} \quad R = \alpha.$$

- On sait que, pour tout réel $r > 0$, la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ tend vers 0. Donc, pour la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$: $A = [0,+\infty[$ et $R = +\infty$.
- Pour la série entière $\sum n!z^n$: $A = \{0\}$ et $R = 0$.

Le sup est pris dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



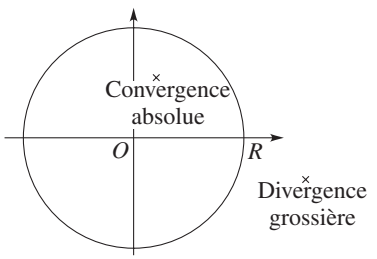
On constate par ces exemples que tout élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est rayon de convergence d'une série entière.

1.4. Convergence d'une série entière

Théorème 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.



Doc. 1. *Le disque de convergence d'une série entière.*

Ce théorème ne permet pas de conclure quant à la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ pour un nombre complexe z de module R. L'étude systématique de ce cas est hors-programme.

Démonstration

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On désigne par A l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

Puisque $R = \sup A$, on peut dire que :

- si $|z| < R = \sup A$, il existe un élément r de A tel que : $|z| < r$.
  La suite $(a_n r^n)$ est bornée et, d'après le lemme d'Abel, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;
- si $|z| > R$, $|z|$ n'est pas dans A, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R et si la série $\sum |a_n| R^n$ converge, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge pour tout z du disque fermé $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leqslant R\}$, car elle converge absolument.

Exemples :

Les trois exemples ci-dessous illustrent le fait que, pour une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, le comportement de la série pour les valeurs de z telles que $|z| = R$ n'est pas déterminé par le théorème 2.

Rapport X, 2001

« Les candidats débutent souvent mal leur épreuve... étude incomplète de la série entière (recherche du rayon de convergence R, étude en $+R$ ou $-R$). »

Rapport X, 2001

« La recherche du rayon de convergence se résume pour beaucoup de candidats à l'étude du rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, ils se trouvent désemparés lorsqu'il faut utiliser d'autres arguments. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{3^n}$ converge si et seulement si $|z| < 3$, car c'est une série géométrique de raison $\frac{z}{3}$. Son rayon de convergence est 3 et, pour tout nombre complexe z tel que $|z| = 3$, la série diverge.

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si $|z| < 1$, car $\left|\frac{z^n}{n}\right| < |z|^n$. Elle diverge grossièrement si $|z| > 1$, car, dans ce cas, la suite $\left(\left|\frac{z^n}{n}\right|\right)$ tend vers $+\infty$. Donc son rayon de convergence vaut 1. On sait que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.
Vous verrez en exercice que cette série converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{2^n n^2}$ converge absolument pour tout z tel que $|z| \leqslant 2$ et diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > 2$. Son rayon de convergence vaut 2 et elle converge pour tout z tel que $|z| = 2$.

Théorème 3
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :
$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ ; (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$$

Corollaire 3.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :
$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ ; \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$$

1.5. Disque de convergence, intervalle de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Dans le plan complexe, on appelle **disque de convergence de la série entière** le disque ouvert de centre O, de rayon R, c'est-à-dire :
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

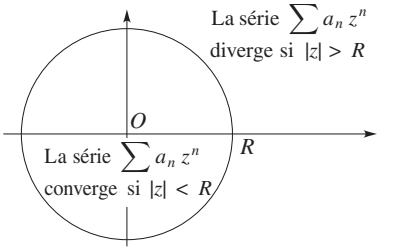
Le disque de convergence est le plus grand disque ouvert de centre O en tout point duquel la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, on appelle **intervalle de convergence de la série entière** l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

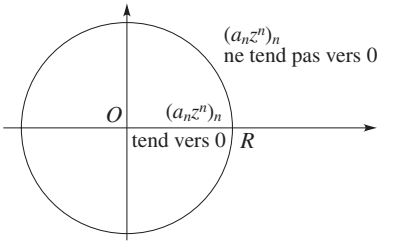
L'intervalle de convergence est le plus grand intervalle ouvert de centre O en tout point duquel la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Une partie d'entre eux n'a pas l'idée de corriger les anomalies résultant des calculs obtenus : par exemple un rayon de convergence infini avec une fonction f qui s'écrit $f(x) = \sqrt{(4-x)}$. »



Doc. 2. *Le disque de convergence d'une série entière.*



Le domaine de convergence de la série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est compris entre la boule ouverte $BO(0, R)$ et la boule fermée $BF(0, R)$.

Le domaine de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ est compris entre l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et l'intervalle fermé $[-R, R]$.

Rapport X, 2001
« Assez peu de candidats se sont rendu compte qu'il fallait utiliser la convergence absolue de la série entière à l'intérieur du disque de convergence. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Quelques calculs de rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Prouver que les séries entières suivantes ont aussi R comme rayon de convergence :

1) $\sum |a_n| z^n$.

2) $\sum \alpha\, a_n z^n$ *où* α *est un nombre complexe non nul.*

3) $\sum n a_n z^n$.

4) $\sum a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

1) La suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si la suite $\left(|a_n| z^n\right)$ l'est aussi.

2) On utilise le même argument qu'au **1)**.

3) Notons

$A = \{r \in \mathbb{R}^+ |\ (a_n r^n) \text{ bornée}\}$, $R = \sup A$,

$A' = \{r \in \mathbb{R}^+ |\ (n a_n r^n) \text{ bornée}\}$ et $R' = \sup A'$.

Soit $r \in A'$, alors la suite $(n a_n r^n)$ est bornée. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $|a_n r^n| \leqslant |n a_n r^n|$.

La suite $(a_n r^n)$ est aussi bornée.

Donc $A' \subset A$ et $R' \leqslant R$.

Soit $r \in [0, R[$, on fixe un réel s tel que $r < s < R$. Pour tout n, on peut écrire :

$$n a_n r^n = a_n s^n n \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Puisque $\dfrac{r}{s} \in [0, 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{r}{s}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad n a_n r^n = o(a_n s^n).$$

Or la série $\sum a_n s^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum n a_n r^n$ aussi et $[0, R[\subset A'$.

On en déduit que $R = R'$.

4) D'après la question **3)**, le rayon de convergence de $\sum a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+1}$. Ceci permet de conclure.

Mersa ACADEMY

2 Calcul du rayon de convergence et exemples

2.1. Calcul du rayon de convergence par comparaison

Théorème 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain z_0, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $|z_0| \leqslant R$.
- Si la série numérique $\sum a_n z_1^n$ diverge pour un certain z_1, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $R \leqslant |z_1|$.

Corollaire 4.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée pour un certain z_0, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$|z_0| \leqslant R$$

Rapport X, 2001

« Pour déterminer l'ensemble de convergence d'une série entière, beaucoup se contentent de chercher le rayon de convergence. »

Les inégalités sont larges.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Si la suite numérique $(a_n z_1^n)$ n'est pas bornée pour un certain z_1, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$R \leqslant |z_1|$$

Corollaire 4.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

• Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ converge vers 0 pour un certain z_0, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$|z_0| \leqslant R$$

• Si la suite numérique $(a_n z_1^n)$ ne converge pas vers 0 pour un certain z_1, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$R \leqslant |z_1|$$

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

2.2. La règle de d'Alembert

Théorème 5. Règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant les hypothèses suivantes :

• pour tout entier n, $a_n \neq 0$;

• la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tend vers un élément L de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{si} \quad L \in \mathbb{R}^{+*} \\ +\infty & \text{si} \quad L = 0 \\ 0 & \text{si} \quad L = +\infty \end{cases}.$$

Mensa ACADEMY

Rapport X, 2001

« Quant au rayon de convergence, hors d'Alembert point de salut. »

Rapport ENTPE, 2002

« Dictature de la règle dite de d'Alembert pour étudier les séries et les rayons de convergence, avec des dégâts spectaculaires. »

Démonstration

Posez $u_n = a_n z^n$ et utilisez la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

► *Pour s'entraîner : ex. 3.*

2.3. Exemples

■ **Calcul du rayon de convergence, R, de la série entière $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$**

La règle de d'Alembert est parfaitement adaptée à cet exemple.

Notons $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a : $a_n \neq 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $R = \mathrm{e}$.

Rapport Centrale, 1998

« Une série entière peut avoir un rayon de convergence R sans que la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ soit $\dfrac{1}{R}$. »

« Si la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existe pas, alors... c'est la panique. »

■ **Calcul du rayon de convergence, R, de la série entière $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$**

On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières, car tous les coefficients d'indices impairs de cette série entière sont nuls.

En revanche, pour $x \neq 0$, si l'on pose $u_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, on constate que $u_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On en déduit, par la règle de d'Alembert sur les séries numériques, que la série $\sum u_n$ converge et que $R = +\infty$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ **Calcul du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$, sachant que celui de $\sum a_n x^n$ vaut R**

On ne connaît pas la suite (a_n), l'utilisation de la règle de d'Alembert est exclue. En revanche, on peut poser $t = x^2$, la série $\sum a_n t^n$ converge pour $|t| < R$ et diverge pour $|t| > R$. Puisque $t = x^2$, la série $\sum a_n x^{2n}$ converge pour $|x| < \sqrt{R}$ et diverge pour $|x| > \sqrt{R}$.

Donc, si le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut R, celui de $\sum a_n x^{2n}$ vaut $\sqrt{R}$. (On convient que $\sqrt{\infty} = \infty$.)

Ce résultat n'est pas utilisable directement dans une copie. Il faut le redémontrer si besoin est. La méthode utilisée pour l'obtenir est à connaître.

3 Opérations sur les séries entières

3.1. Sommes de séries entières

Théorème 6

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

On note ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$, somme de ces deux séries entières. Alors :

- $\rho \geqslant \min(R, R')$;
- pour tout z tel que $|z| < \min(R, R')$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n ;$$

- si $R \neq R'$, alors $\rho = \min(R, R')$.

Démonstration

Regardez les disques de convergence des deux séries considérées.

Dans le cas $R = R'$, on peut avoir : $\rho > \min(R, R')$. Considérez les séries entières de rayon de convergence 1 :

$$\sum x^n \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right) x^n .$$

3.2. Produit de Cauchy de séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Fixons un nombre complexe z et notons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$.

On constate que $\sum_{j=0}^{n} u_j\, v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (a_j\, b_{n-j})\, z^n$.

Ainsi, le **produit de Cauchy de deux séries entières** est une série entière.

Le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$, avec : $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}$.

Rappel 1 :
Soit deux séries à termes complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Le **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j\, v_{n-j}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

Notons $\sum c_n z^n$ la série entière produit de Cauchy de ces deux séries et R'' son rayon de convergence.

Alors :

- pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$, les trois séries numériques $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont absolument convergentes. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

- $R'' \geqslant \min(R, R')$.

On ne peut, *a priori*, rien affirmer de plus au sujet du rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$, ainsi qu'un exemple va nous le montrer.

Exemple :

Définissons la suite (a_n) en posant $a_0 = 1$ et $a_n = 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Définissons la suite (b_n) en posant $b_0 = 1$ et $b_n = 2(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Le produit de Cauchy des deux séries entières est noté $\sum c_n x^n$.

Alors $c_0 = 1$ et, en traitant deux cas suivant la parité de n, on prouvera que $c_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Les deux séries entières ont un rayon de convergence qui vaut 1 et leur produit de Cauchy a un rayon de convergence infini.

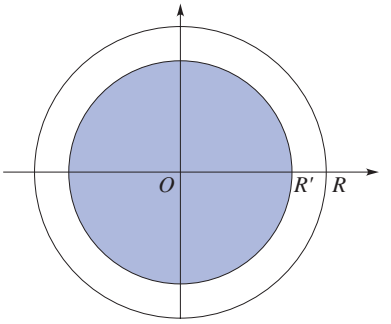
Pour conclure, vous vérifierez que :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+x}{1-x} \; ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1-x}{1+x} \; ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Rappel 2 :
Si les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergente.
De plus, dans ce cas, les sommes de ces séries vérifient l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$



Doc. 3. *Convergence d'une série somme ou produit de deux séries entières sur le plus petit des deux disques.*

Application 2

Étude de la série entière $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

• On pose $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = 1$.

On remarque que :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

donc la série entière donnée est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n} x^n$ par $\sum x^n$.

Ces deux séries entières ont un rayon de convergence égal à 1, donc $R \geqslant 1$.

De plus, pour $x = 1$, la série donnée est grossièrement divergente. Donc $R = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

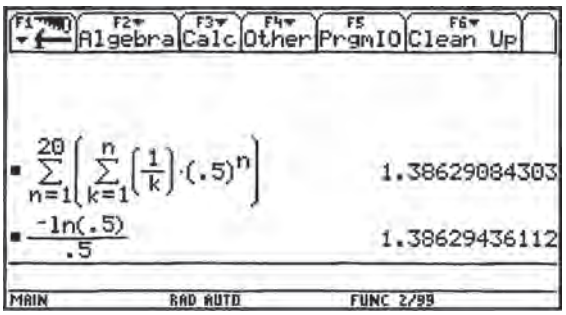
• Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

Donc :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$$= \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$



Doc. 4

4 Continuité sur le disque ouvert de convergence

4.1. Convergence normale sur tout compact du disque de convergence

Théorème 8

La série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.

Rapport E3A, 2002

« Le mode de convergence d'une série entière n'est pas maîtrisé. »

Démonstration

Soit R le rayon de convergence de la série entière et K un compact inclus dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$.

• Il existe un réel r de $[0, R[$ tel que :

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leqslant r\}.$$

En effet, la fonction $(z \mapsto |z|)$ est continue sur le compact K et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle atteint donc son maximum en un point z_0 de K. Le réel $r = |z_0|$ convient.

• La série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le compact K. En effet :

$$\forall z \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n z^n| \leqslant |a_n r^n|.$$

Le majorant $|a_n r^n|$ est indépendant de z et c'est le terme général d'une série convergente car $r < R$. Donc la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur K.

Ce résultat n'entraîne pas la convergence uniforme sur le disque (ou l'intervalle) de convergence.

4.2. Continuité de la fonction somme

Théorème 9

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme de cette série entière est continue sur le disque ouvert de convergence $\{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < R\}$.

Rapport Centrale, 1997

« De nombreux candidats continuent à affirmer qu'une série entière converge uniformément sur l'intervalle ouvert de convergence. »

► ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 Primitive de la somme d'une série entière

Dans ce qui suit, pour une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, on étudie les différentes propriétés de la fonction de la variable réelle :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

L'étude générale de la fonction de la variable complexe :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ne figure pas à notre programme, sauf pour la continuité sur le disque de convergence, résultat obtenu au paragraphe précédent.

Lemme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n \dfrac{x^n}{n+1}$ est aussi R.

Théorème 10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R strictement positif.

Une primitive sur $]-R, R[$ de la fonction somme, S, de la série entière s'obtient en intégrant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exemple :

La série entière $\sum x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et sa fonction somme est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On déduit du corollaire précédent les égalités déjà démontrées :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

6 Dérivation de la fonction somme d'une série entière

6.1. Le théorème de dérivation

L'**application 1** démontre ce lemme.

Lemme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le rayon de convergence de la série dérivée terme à terme $\sum n a_n x^{n-1}$ est aussi R.

Théorème 11

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. Sa fonction somme, S, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout x de $]-R,R[$, $S'(x)$ s'obtient en dérivant terme à terme le développement de $S(x)$:

$$S'(x) = \mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Application 3

Un calcul de somme de série : $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est 1. Notons f sa somme. La série numérique $\sum \frac{1}{2^n n^2}$ converge, sa somme est $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

La fonction f' est définie sur $]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\cdot$$

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}\cdot$$

Puis, $\forall x \in]0,1[\quad f'(1-x) = -\dfrac{\ln(x)}{1-x}\cdot$

Soit $\forall x \in]0,1[$

$$f'(x) - f'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} = -\left(\ln(x)\ln(1-x)\right)'.$$

Par conséquent :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(1-x) = k - \ln x \ln(1-x).$$

De plus, la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ entraîne la convergence normale de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ sur $[0,1]$.

La fonction f est donc continue sur $[0,1]$ et :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(f(x) + f(1-x)\right) = f(0) + f(1) = k = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Et enfin :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - (\ln 2)^2\right).$$

6.2. Dérivations successives

Corollaire 11.1

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. Sa fonction somme, S, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, la dérivée k-ième de S sur $]-R,R[$, $\mathrm{D}^k(S)$, s'obtient en dérivant k fois terme à terme la série de fonctions :

$$S^{(k)}(x) = \mathrm{D}^k\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Corollaire 11.2

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R strictement positif.

Les coefficients de la série entière sont liés à sa fonction somme S par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(0)$$

La dérivée k-ième de S peut aussi s'écrire, pour tout x de $]-R,R[$:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)x^n$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples :

• Sur $]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

En dérivant k fois cette expression :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Donc : $\forall x \in]-1,1[\ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$

Dans cet exemple, l'expression $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ est considérée comme une dérivée.
Elle peut aussi être considérée comme un produit, ce qui donne une deuxième démonstration de la formule étudiée ici (*cf. chapitre 4, application 12*)

• Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

La somme cherchée est la valeur, pour $x = \dfrac{1}{2}$, de la fonction somme de la série entière $\sum n^3 x^n$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 (utiliser la règle de d'Alembert). Sa fonction somme, sur $]-1,1[$, est notée f.

La fonction somme de la série entière $\sum x^n$ est notée g.

On obtient, pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

car chacune des séries entières ci-dessus converge sur $]-1,1[$.

Donc : $f(x) = x^3 g'''(x) + 3x^2 g''(x) + x g'(x)$.

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 26.$

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

6.3. Une condition suffisante pour qu'une fonction soit de classe $\mathcal{C}^\infty$

Corollaire 11.3

Soit f une fonction de $]-R,R[$ dans $\mathbb{C}$.

Si, sur cet intervalle, la fonction f est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

La question du prolongement de certaines fonctions est fréquemment posée. Au *chapitre* 7, le théorème 8 et son corollaire permettent de traiter ce problème, mais cette méthode est très lourde.

Exemples :

■ Pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{\sin(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$.

On pose $f(0) = 1$. Alors, sur $\mathbb{R}$, f est la fonction somme de la série entière $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ dont le rayon de convergence est infini.

La fonction f ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$.
Pour tout x de $]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{n+1}.$$

On pose $g(0) = -1$. Alors, sur $]-1, 1[$, g est la fonction somme de la série entière $\sum \dfrac{-x^n}{n+1}$ dont le rayon de convergence vaut 1.
La fonction g ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et sur $]-\infty, 0[$, donc sur $]-\infty, 1[$.

7 Fonctions développables en série entière

7.1. Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle $]-r, r[$ (avec $r > 0$), est dite **développable en série entière** sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence supérieur ou égal à r, telle que :

$$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Les paragraphes précédents ont permis de développer les principales propriétés de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Il s'agit maintenant de déterminer à quelle condition une fonction donnée est la fonction somme d'une série entière.

Théorème 12
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$:

$$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les coefficients a_n sont uniques et déterminés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Une grande proportion de candidats est persuadée que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière. »

• les fonctions exponentielle, sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$;
• les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \ln(1-x),$$
$$x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto \operatorname{Arctan} x, \quad x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

sont développables en série entière sur $]-1, 1[$.

Rapport X, 1997
« C'est bien la vingtième fois depuis le début du concours qu'il y a un logarithme à développer au voisinage de 1. Ça y est, ça ne rate pas ! C. s'est trompé, comme 12 de ses prédécesseurs environ, dans les deux premiers termes du développement de $\ln(1+x)$! . . . Si seulement ! . . . si seulement le développement de $\ln(1+x)$ ou de $(1+x)^a$ et les formules trigonométriques élémentaires pouvaient être sus ! par cœur ! ».

7.2. Séries de Taylor et fonctions développables en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-r, r[$ dans $\mathbb{C}$.
On appelle **série de Taylor** de f, la série entière $\sum \dfrac{f^n(0)}{n!} x^n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 12.1

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$.

Alors :

- la série de Taylor de f est convergente sur $]-r,r[$;
- $\forall x \in]-r,r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Exemples :

Les exemples suivants montrent qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ n'est pas nécessairement développable en série entière sur $]-r,r[$.

- La fonction Arctangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Donc : $\forall x \in]-1,1[\quad \text{Arctan}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

La fonction Arctangente est développable en série entière sur $]-1,1[$. Elle n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier n, $g^{(n)}(0) = 0$.

Sa série de Taylor est donc la série nulle. Le rayon de convergence de cette série entière est infini.

La fonction g n'est développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r,r[$.

La différence entre fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et fonction développable en série entière réside dans le phénomène suivant.
Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, alors f admet un développement limité en 0 à n'importe quel ordre, donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(0)}{n!} x^n + R_N(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \frac{R_N(x)}{x^N} = 0$.
Mais, *a priori*, pour x fixé dans $]-r,r[$, on ne connaît pas le comportement de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Il est possible de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence nul. Vous trouverez une étude détaillée de ce phénomène dans le problème **Navale 1989**, maths 1, partie 2.

Application 4

Caractérisation d'une fonction développable en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I, tel que $\inf I < 0 < \sup I$, à valeurs complexes.

1) *On suppose l'existence de réels β, C et M strictement positifs tels que :*

$$\forall x \in]-\beta,\beta[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant CM^n n!$$

Prouver que f est développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[\subset I$.

2) *Montrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire.*

1) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange on a, pour tout x de $]-\beta,\beta[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x^n|}{n!} \sup_{|t|\leqslant|\beta|} |f^n(t)| \leqslant CM^n|x|^n$$

Soit $\alpha = \min\left(\beta, \frac{1}{M}\right)$. Pour tout x de $]-\alpha,\alpha[$, $M|x| < 1$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(0)}{k!} x^k\right| = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La fonction est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$.

2) La fonction f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$. Soit r dans $]0,\alpha[$. La suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}r^n\right)$ est bornée :

$$\exists A>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n \leqslant A.$$

D'autre part, puisque f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$:

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[\quad \forall k\in\mathbb{N}$$
$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-k}.$$

Majorons $\left|f^{(k)}(x)\right|$ pour tout entier k et tout x de $]-\alpha,\alpha[$:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^{n-k}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-k}.$$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant Ar^{-k}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-k}.$$

Or, sur $]-1,1[$, la fonction $t\mapsto\sum_{n=k}^{+\infty}\dfrac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$ est la dérivée k-ième de la fonction $t\mapsto\sum_{0}^{\infty}t^n=\dfrac{1}{1-t}$.

On en déduit que, pour tout réel t de $]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}=\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}.$$

En choisissant $0<\beta<r$, on a, pour tout x de $]-\beta,\beta[$ et tout k de $\mathbb{N}$:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{Ar}{r-\beta}\frac{1}{(r-\beta)^k}k!.$$

Le résultat est atteint en prenant :

$$C=\frac{Ar}{r-\beta} \quad \text{et} \quad M=\frac{1}{r-\beta}.$$

Rapport X, 2001

« La recherche d'une solution de l'équation différentielle linéaire développable en série entière ne posait pas de problème... En revanche peu de candidats se posent la question de savoir si les formules qu'ils considèrent sont définies. »

Application 5

Équation différentielle linéaire et série entière

On considère l'équation différentielle

$$x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x) \qquad \textbf{(E)}$$

1) *Montrer l'existence d'une solution de cette équation, développable en série entière sur* $]-1,1[$.

2) *Exprimer la fonction somme de cette série entière à l'aide des fonctions classiques.*

3) *En déduire les solutions de* **(E)** *sur* $]-1,0[$, $]0,+\infty[$, $]-1,+\infty[$.

1) • Recherche des coefficients d'une éventuelle série entière solution

Si la série entière $\sum a_nx^n$ a un rayon de convergence $R\geqslant 1$ et si sa fonction somme $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ est solution de **(E)** sur $]-1,1[$, alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Sur $]-1,1[$, l'équation devient :

$$2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n^2+3n+2)a_n-\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)x^n=0.$$

On en déduit, grâce à l'unicité du développement en série entière, qu'une éventuelle série entière solution est telle que :

$$a_0=0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La règle de d'Alembert permet de conclure que son rayon de convergence est 1.

Sa fonction somme, notée f, est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Par construction, f est développable en série entière sur cet intervalle et les relations satisfaites par ses coefficients prouvent que f est solution de **(E)** sur $]-1,1[$.

2) Compte tenu des rayons de convergence, pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)}x^n.$$

De plus, pour tout x de $]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^n=\frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=\frac{1}{x}(\ln(1+x)-x).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)}x^n=\frac{1}{2x^2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=\frac{1}{2x^2}(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}).$$

On sait, d'autre part, que $f(0)=a_0=0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Il en découle que :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{4} & \text{si } x\in]-1,1[\setminus\{0\}\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

3) Notons **(H)** l'équation linéaire homogène associée à **(E)** :

$$x^2y''+4xy'+2y=0 \qquad \textbf{(H)}$$

L'ensemble des solutions de **(H)** sur un intervalle I ne contenant pas 0 est un espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $x\mapsto x^r$ est solution de **(H)** si et seulement si : $r(r-1)+4r+2=0$. Donc, les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ sont solutions de **(H)** sur tout intervalle I ne contenant pas 0.

Connaissant les solutions de **(H)** et une solution particulière de **(E)**, on peut conclure.

- Les solutions de **(E)** sur $]-1,0[$ sont :

$$x\mapsto\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$$

avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

- D'après la question **2)**, la fonction :

$$x\mapsto\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}$$

est solution de **(E)** sur $]0,1[$.

Les calculs de ses dérivées étant valables sur $]0,+\infty[$, elle est solution sur $]0,+\infty[$. Ainsi, les solutions de **(E)** sur $]0,+\infty[$ sont de la forme :

$$x\mapsto\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$$

avec $(c,d)\in\mathbb{R}^2$.

- Une solution de **(E)** sur $]-1,+\infty[$ est de la forme indiquée ci-dessus sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

De plus, elle est continue en 0. Sachant que :

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}\right]=0,$$

on en déduit que la fonction :

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{4} & \text{si } x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est la seule solution de **(E)** sur $]-1,+\infty[$.

7.3. Méthode pratique

Pour prouver qu'une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$:

- on regarde **d'abord** si elle n'est pas composée à l'aide d'une somme, d'un produit, de primitives ou de dérivées de fonctions développables en série entière ;

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• on peut aussi étudier si la fonction est solution d'une équation différentielle et utiliser la méthode développée ci-dessus ;

• si les tentatives précédentes ont échoué, on prouve que, pour tout x de $]-r,r[$:

$$\lim_{N\to+\infty}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^n(0)}{n!}x^n\right|=0.$$

Pour cela, on majore la valeur absolue du reste $R_N(x)=f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$, soit à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, soit grâce à l'égalité de Taylor avec reste intégral.

8 Développements en série entière classiques

8.1. Formule du binôme généralisée

Théorème 13. Formule du binôme généralisée

Pour tout réel α, la fonction $x\mapsto(1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Son développement est donné par :

$$\forall x\in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

Soit α un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On note f l'application $x\mapsto(1+x)^\alpha$.

• L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et, sur cet intervalle :

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{1+x}f(x).$$

• Il est aisé de vérifier que $f(0)=1$ et $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$.

On pose $a_0=1$ et $a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$.

Par construction, la série entière $\sum a_nx^n$ est la série de Taylor de f. Son rayon de convergence vaut 1. On note g sa fonction somme sur $]-1,1[$.

• Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}nx^n\\&=\alpha g(x).\end{aligned}$$

Donc, la fonction g est solution, sur $]-1,1[$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'=\frac{\alpha}{1+x}y \qquad \textbf{(1)}$$

La fonction f est aussi solution, sur $]-1,1[$, de cette équation différentielle linéaire et $f(0)=g(0)=1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure que $f=g$.

Lorsque le réel α est un entier positif, on remarque que, pour $n>\alpha$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}=0.$$

Dans ce cas, le développement indiqué est valable pour tout x de $\mathbb{R}$. Il s'agit tout simplement de la formule du binôme de Newton, d'où l'appellation « formule du binôme généralisée », lorsque α est un réel quelconque.

Rapport Centrale, 2001

« Ici, on assiste au développement en série entière de $1/(1-u)$ sans tenir compte de son domaine de validité. »

Il est fondamental de comprendre que la convergence de la série de Taylor de f sur un intervalle $]-r,r[$ n'implique pas, *a priori*, que la fonction somme de cette série soit f. C'est pourquoi il reste à prouver que $f=g$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Développement en série entière de la fonction Arcsinus

1) *Montrer que la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$.

2) *En déduire que la fonction* Arcsinus *est développable en série entière sur* $]-1,1[$ *et exprimer les coefficients de son développement à l'aide de factorielles.*

3) *Montrer que* $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$.

1) D'après la formule du binôme généralisée, pour tout u de $]-1,1[$:

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{-1}{2}-(n-1)\right)}{n!}u^n.$$

Pour tout x de $]-1,1[$, $-x^2$ est aussi dans $]-1,1[$ et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Ceci prouve que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2) La fonction Arcsinus est une primitive, sur $]-1,1[$, de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Elle est donc développable en série entière sur cet intervalle.

Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3) Soit :

$$u_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \|u_n\|_\infty = \sup_{]-1,1[} |u_n|.$$

La formule de Stirling permet de prouver que : $\|u_n\|_\infty = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $]-1,1[$. Le théorème d'interversion des limites s'applique lorsque x tend vers 1^- et permet de conclure.

8.2. Les incontournables

8.2.1 Fonctions construites à partir de la fonction exponentielle

Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

- $t \mapsto \mathrm{e}^{tz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!}$
- $x \mapsto \cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $x \mapsto \sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

8.2.2 Fonctions construites à partir de séries géométriques et de la formule du binôme généralisée

Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $]-1,1[$:

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$x \mapsto \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$x \mapsto \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

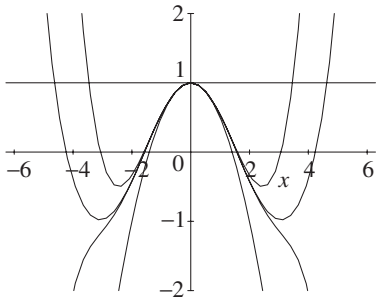
$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Mensa ACADEMY

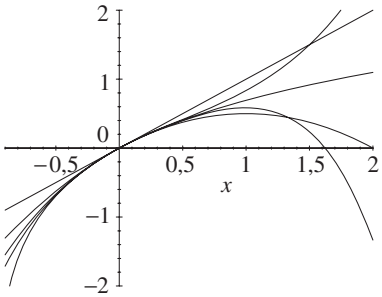
► *Pour s'entraîner : ex. 9.*



Doc. 5. *Quelques sommes partielles de la série de Taylor de la fonction cosinus.*

Rapport Centrale, 1998

« Les développements en séries entières classiques sont souvent ignorés. »



Doc. 6. *Quelques sommes partielles de la série de Taylor de la fonction* $x \mapsto \ln(1+x)$.

Ces fonctions sont, en général, définies sur des intervalles plus grands que $]-1,1[$.
Toutefois, vous pourrez vérifier que le rayon de convergence de chacune de ces séries entières vaut 1.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour **déterminer le rayon de convergence** R **d'une série entière** $\sum a_n x^n$, on peut :

- trouver un complexe z_0 tel que :
  - la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée ;
  - la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0 ;
  - la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;

  alors $R \geqslant |z_0|$.
- trouver un complexe z_1 tel que :
  - la série $\sum a_n z_1^n$ diverge ;
  - la suite $(a_n z_1^n)$ ne soit pas bornée ;
  - la suite $(a_n z_1^n)$ ne converge pas vers 0 ;

  alors $R \leqslant |z_1|$.
- (règle de d'Alembert) vérifier que a_n ne s'annule pas et que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$;
  alors, le rayon de convergence est :
  - $R = \frac{1}{l}$ si $l \in \mathbb{R}^{+*}$;
  - $R = 0$ si $l = +\infty$;
  - $R = +\infty$ si $l = 0$.

Mensa ACADEMY

● Pour prouver qu'**une fonction est développable en série entière** sur $]-r, r[$, on peut :

- regarder d'abord si elle n'est pas composée à l'aide d'une somme, d'un produit, de primitives ou de dérivées de fonctions développables en séries entières ;
- étudier si la fonction est solution d'une équation différentielle :
  - calculer les coefficients des éventuelles séries entières solutions de cette équation ;
  - justifier de l'égalité, sur $]-r, r[$, de la fonction de départ avec l'une des sommes de séries entières ainsi déterminées ;
- sachant que f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $]-r, r[$, on peut démontrer que, pour tout x de $]-r, r[$:

$$\lim_{N \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n \right| = 0.$$

Pour cela, on majore la valeur absolue du reste $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n$, soit à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, soit grâce à l'égalité de Taylor avec reste intégral.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n.$$

2 **1)** Montrer que la suite $(\cos n)$ ne converge pas vers 0. (Utilisez la suite extraite $(\cos 2n)$) .

2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \cos n\, x^n$.

3) Déterminer sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{\left(n+\frac{1}{n}\right) n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n.$$

4 On considère la série entière $\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Exprimer sa fonction somme, sur l'intervalle ouvert de convergence, à l'aide des fonctions usuelles.

3) Que dire aux bornes de l'intervalle de convergence ?

5 Déterminer le rayon de convergence et la fonction somme de la série entière $\sum nx^n$ en la représentant à l'aide d'un produit de Cauchy.

6 Déterminer, pour chacune des séries entières suivantes, le rayon de convergence R et l'intervalle I, le plus grand possible, sur lequel elles convergent.

$$\sum x^n \ ; \quad \sum \frac{x^n}{n} \ ; \quad \sum \frac{x^n}{n^2}.$$

Dans les trois cas, la fonction somme est-elle continue sur I ?

7 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Calculer sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

8 **1)** Prouver que la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^x \sin x$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement.

2) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

9 Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

10 On fixe (α,β) dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \alpha\, a_{n+1} + \beta\, a_n \qquad \textbf{(1)}.$$

1) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est non nul.

2) Montrer que, sur un certain disque ouvert centré en 0, la fonction somme de cette série entière est la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0\,\alpha)z}{1 - \alpha z - \beta z^2}.$$

11* Soit la série entière $\sum \sqrt{n}\, x^n$ et f sa fonction somme.

1) Calculer son rayon de convergence.

2) Exprimer $(1-x)\, f(x)$ et $(1-x)^2\, f(x)$ sous forme de sommes de séries entières.

3) En déduire le comportement de f lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\, f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^2\, f(x)$.

5) Déterminer un équivalent de f lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$ et S sa fonction somme.

Montrer que, pour tout entier n :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

13 Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière :

$$\sum \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

14 On considère la fonction, définie sur $]-\pi,\pi[\setminus 0$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}.$$

Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi,\pi[$.

15 (*Extrait de CCP 96*)

On considère l'équation différentielle :

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

On recherche d'abord les solutions développables en séries entières.

On note $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.

1) Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.

3) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et de p).

4) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

5) Soit S le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

16 * Dans tout cet exercice, α est un réel strictement supérieur à 1.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}\right).$$

2) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

4) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f.

En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

5) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Montrer que, s'il existe un entier naturel p tel que la suite $(n^p a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R = 1$.

En déduire le rayon de convergence de la série de Taylor de f.

17 ** **1)** Montrer que la série de fonctions :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2+n^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, la fonction somme est notée f.

2) Montrer que, pour tout réel x et tout entier $n > 0$:

$$\int_0^\infty \cos(xt)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{x^2+n^2}.$$

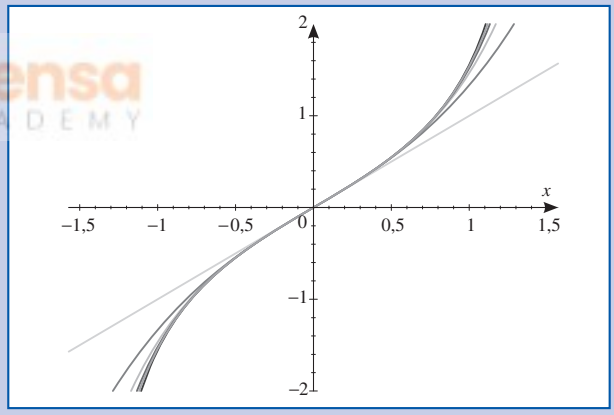
En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

3) Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

18 *Développement en série entière de la fonction tangente*

L'objectif est d'établir que la fonction tangente, notée f, est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.



1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

2) Montrer que, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, la série de Taylor de f converge. En déduire que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

La fonction somme de la série de Taylor de f est notée g.

3) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad g'(x) = 1 + g^2(x)$.

4) Conclure.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Séries de Fourier

11

Introduction

Historiquement, c'est au milieu du XVIIIe *siècle que d'Alembert (1747), Euler (1753) et Daniel Bernoulli (1755) commencent à étudier les questions suivantes : Un son peut-il être décomposé en une série d'harmoniques ? Comment calculer les harmoniques ? Comment retrouver le signal à partir des harmoniques ? En 1807, Fourier affirme que, pour « une fonction entièrement arbitraire » (et* 2π *périodique), la formule :* $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$ *permet de calculer les harmoniques de la fonction* f *qui est l'appellation mathématique du signal. Et, à propos des séries qui synthétisent le signal par la formule* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, *il affirme : « Il est facile de montrer qu'elles sont convergentes. » Les idées géniales, bien qu'imprécises, de Fourier (mais il avait le niveau de rigueur de son époque !) ont été un moteur formidable pour préciser, entre autres, la notion de fonction, la (ou les) théorie(s) de l'intégration et la notion de convergence d'une série de fonctions.*

Dans ce chapitre aux applications physiques et technologiques importantes, nous allons d'abord étudier le moyen d'analyser un signal périodique en le décomposant en harmoniques.

Après avoir étudié la décomposition d'un signal en ses harmoniques, nous nous intéresserons au problème de la synthèse de ce signal à partir de ses harmoniques. Il s'agit dès lors d'un problème de convergence. La série de Fourier d'une fonction f *continue par morceaux,* 2π*-périodique, converge-t-elle vers* f, *en moyenne quadratique ? normalement ? simplement ?*

OBJECTIFS

- Coefficients de Fourier de f.
- Coefficients trigonométriques de f.
- Série de Fourier de f.
- Projection orthogonale dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$.
- Convergence en moyenne quadratique.
- Formule de Parseval.
- Les deux théorèmes de convergence ponctuelle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'analyse du signal : les coefficients de Fourier d'une fonction périodique

J.-B. Fourier (1768-1830), *mathématicien et physicien français.*

Le cadre fixé par le programme, pour ce chapitre, est l'**espace vectoriel complexe** $\mathcal{CM}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes.

1.1. Polynômes trigonométriques

On considère les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}\quad e_n(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\ ;\quad c_n(t)=\cos(nt)\quad\text{et}\quad s_n(t)=\sin(nt).$$

De plus, $\mathrm{Vect}\,((e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n})=\mathrm{Vect}\,(c_0,c_1,\dots,c_n,s_1,\dots,s_n)$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension $2n+1$, de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, que l'on note $\mathcal{P}_n$.

Si P appartient à $\mathcal{P}_n$, P apparaît comme un polynôme en $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Il est appelé polynôme trigonométrique. On note :

$$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n=\mathrm{Vect}(e_k\quad;\quad k\in\mathbb{Z})=\mathrm{Vect}\left(\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ ,\ \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\right).$$

Cet ensemble est appelé l'espace des **polynômes trigonométriques**.

Un polynôme trigonométrique peut donc s'écrire :

$$P=\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k e_k=\alpha_0+\sum_{k=1}^{m}\left[(\alpha_k+\alpha_{-k})c_k+\mathrm{i}(\alpha_k-\alpha_{-k})s_k\right]$$

où les α_k sont des complexes.

Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on calcule l'intégrale sur une période de la fonction f. L'application f étant 2π-périodique, on remarque que :

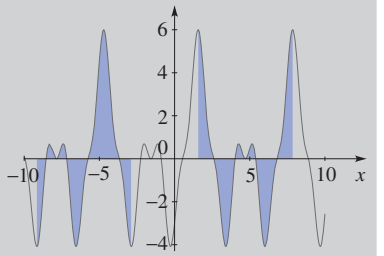
$$\int_a^{a+2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette propriété a été rencontrée dans le cours d'intégration et peut se visualiser sur le *document* 1.

Si g est une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,a+2\pi[$, admettant une limite à gauche en $a+2\pi$, g peut être prolongée, et de manière unique, sur $\mathbb{R}$ en une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et nous définirons fréquemment une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ par sa restriction à un intervalle de la forme $[a,a+2\pi[$.

Avec MAPLE :

```
> plot(2*sin(x)-3*cos(2*x)
  +sin(5*x),x=-10..10);
```



Doc. 1. *Les aires colorées sur le schéma sont égales.*

1.2. Coefficients de Fourier de f

Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on pose, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n)=c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

Les $c_n(f)$ sont appelés les **coefficients de Fourier** de f.

Le coefficient $c_0(f)$ est la valeur moyenne de f sur une période.

Rapport Centrale, 1998

« Trop de candidats ignorent que $\displaystyle\int_x^{x+T}f$ *ne dépend pas de* x *lorsque* f *est* T*-périodique et continue. »*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples :

■ Si P est un polynôme trigonométrique, le coefficient de Fourier $c_n(P)$ est le coefficient de e_n dans P. En effet :

$$c_n(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k e^{ikt}\right)e^{-int}\,dt$$
$$= \sum_{k=-m}^{m}\alpha_k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)t}\,dt.$$

Donc, $c_n(P) = \alpha_n$ si $|n| \leqslant m$ et 0 sinon.

■ Soit f l'application de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par $x \mapsto \dfrac{\pi - x}{2}$.

Si $n \neq 0$, alors :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}e^{-inx}\,dx = \frac{(-1)^n}{2in}.$$

Si $n = 0$:

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

1.3. Propriétés des coefficients de Fourier de f

■ Pour n fixé dans $\mathbb{Z}$, l'application de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$, qui à f associe $c_n(f)$, est une forme linéaire.

■ L'application ϕ est linéaire :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{CM}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto \widehat{f} = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

■ $\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \overline{c_n(f)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}e^{int}\,dt = c_{-n}(\overline{f})$.

Par conséquent, si f est à valeurs réelles, $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.

■ Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et g définie par $g(t) = f(-t)$. Alors, g est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-t)e^{-int}\,dt = c_{-n}(f)$$

En particulier, si f est une fonction paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$; et si f est impaire, alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$.

■ Soit α un réel et f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on définit h dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ par $h(t) = f(t+\alpha)$. Alors :

$$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+\alpha)e^{-int}\,dt = e^{in\alpha}c_n(f)$$

(poser $u = t + \alpha$).

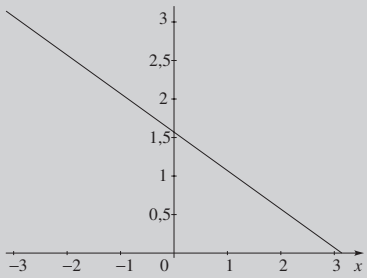
⚠ *Lorsque f est définie au départ sur un intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, toutes les intégrales seront calculées sur cet intervalle.*

Rapport X, 2000

« Les coefficients de Fourier offrent des difficultés de calcul pour deux raisons : mauvaise connaissance des formules de base en trigonométrie, manque d'entraînement aux techniques classiques de calculs d'intégrale de base. »

Avec MAPLE :

```
> plot((Pi-x)/2,x=-Pi..Pi);
```




```
> c0:=1/(2*Pi)*(int((Pi-x)/2,
  x=-Pi..Pi));
```

$$c0 := \frac{1}{2}\pi$$

```
> cn:=1/(2*Pi)
  *simplify(int((Pi-x)/2
  *exp(-i*n*x),
  x=-Pi..Pi));
```

$$cn := \frac{1}{4}\frac{(e^{(-2\pi i n)} + 2\pi i n - 1)e^{(\pi i n)}}{\pi i^2 n^2}$$

```
> cn:=subs(exp(-2*i*Pi*n)=1,");
> cn:=subs(exp(i*Pi*n)
  =(-1)^n,");
```

$$cn := \frac{1}{2}\frac{e^{(\pi i n)}}{i n}$$

$$cn := \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{i n}$$

Doc. 2.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, la suite $\widehat{f}$ de ses coefficients de Fourier est bornée :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Rapport École de l'air, 1998

« Très peu de candidats ont su exploiter correctement la relation liant les coefficients de Fourier de f et ceux de f'. »

▶ *Pour s'entraîner : ex. 1*

1.4. Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soit f continue, 2π-périodique, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La suite $\left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et :

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

De même :

$$\|\widehat{f'}\|_\infty \leqslant \|f'\|_1.$$

De plus, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-\mathrm{i}n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$$

En particulier, $c_0(f') = 0$ et, pour tout n de N^*, $c_n(f) = \dfrac{1}{\mathrm{i}n}c_n(f')$.

Donc $c_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème 1

Si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ $(k \geqslant 1)$, alors les suites $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ sont dominées par la suite $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

Rapport Centrale, 1997

« Ces erreurs sont étonnantes, et pourtant trop persistantes pour qu'il ne s'agisse que d'inattention ou d'affolement : ... dans l'étude de Fourier, la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est presque toujours fausse et on ignore l'importance de la continuité de f dans les relations entre coefficients de f et f'. »

1.5. Coefficients trigonométriques de f

Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on appelle **coefficients trigonométriques** de f les coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

De plus, $\dfrac{a_0(f)}{2} = c_0(f)$ est la valeur moyenne de la fonction sur une période.

Lorsque f est définie au départ sur un intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi[$, toutes les intégrales seront calculées sur cet intervalle.

Rapport St Cyr, 1998

Pour les séries de Fourier [...], le terme constant de la série (peu importe qu'on l'appelle a_0 ou $\dfrac{a_0}{2}$) donne lieu à des erreurs ; peu de candidats savent qu'il s'agit de la moyenne de la fonction sur une période.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les relations $\cos(nt) = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ et $\sin(nt) = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$ entraînent que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$a_n(f) = [c_n(f) + c_{-n}(f)] \quad \text{et} \quad b_n(f) = i\,[c_n(f) - c_{-n}(f)]$$
$$c_n(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) - ib_n(f)] \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) + i\,b_n(f)]$$

Exemple : Coefficients trigonométriques de l'application f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$$

Le calcul des coefficients de Fourier de f a été effectué.

Les formules ci-dessus permettent d'en déduire :

$$\frac{a_0(f)}{2} = c_0(f) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n(f) = [c_n(f) + c_{-n}(f)] = 0 \quad \text{si} \quad n > 0$$

$$b_n(f) = i\,[c_n(f) - c_{-n}(f)] = \frac{(-1)^n}{n}.$$

On constate que les coefficients $a_n(f)$, pour $n \geqslant 1$, sont nuls.

Ceci s'explique par le fait que la fonction $x \mapsto f(x) - \dfrac{\pi}{2}$ est impaire.

Mensa ACADEMY

1.6. Propriétés des coefficients trigonométriques

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des $c_n(f)$.

■ Pour n fixé, les applications $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto b_n(f)$ sont linéaires de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$.

■ Si f est à valeurs réelles, les coefficients trigonométriques de f sont réels.

■ Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et g la fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie par : $g(t) = f(-t)$, on a :

$$a_n(g) = a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(g) = -b_n(f)$$

Par conséquent :

si f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = 0$
si f est impaire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(f) = 0$

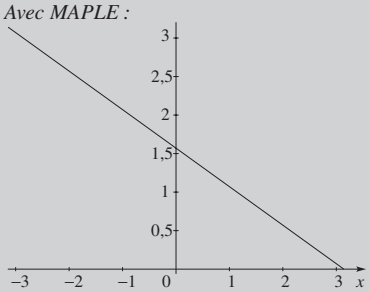
- Si f est paire et 2π-périodique, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$.
- Si f est impaire et 2π-périodique, $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.

Ces relations liant les coefficients de Fourier aux coefficients trigonométriques permettent de substituer à la suite indexée par $\mathbb{Z}$ des coefficients de Fourier, une suite indexée par $\mathbb{N}$ et une indexée par $\mathbb{N}^*$.

Rapport X, 2001

« Nous insistons sur la dégradation de l'usage de la trigonométrie. »

Avec MAPLE :




```
> assume(n,integer);
> bn:=1/Pi*simplify(int(sin(n*x)
  *(Pi-x)/2,x=-Pi..Pi));
> an:=1/Pi*simplify(int(cos(n*x)
  *(Pi-x)/2,x=-Pi..Pi));
```

$$bn := \frac{(-1)^{n\sim}}{n\sim}$$

$$an := 0$$

```
> a[0]:=1/Pi*int((Pi-x)/2,
  x=-Pi..Pi);
```

$$a_0 := \pi$$

Doc. 3.

Rapport Centrale, 2001

« Signalons que certains candidats ont trouvé que a_n est différent de 0 alors que la fonction considérée est impaire. »

Pour exploiter au mieux cette propriété, on utilise les coefficients trigonométriques de f, et non les coefficients de Fourier, lorsque f est paire ou impaire.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Si f est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, :

$$a_n(f') = nb_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -na_n(f)$$

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

■ **Traduction physique**

L'analyse du signal est faite. La fonction :

$$t \to a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

est la n-ième harmonique du signal f. Lorsque $n = 1$, elle est appelée le fondamental.

Lorsque f est à valeurs réelles, en posant $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, il existe un réel φ_n tel que :

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A_n \cos(nt + \varphi_n).$$

A_n est l'amplitude de la n-ième harmonique et φ_n sa phase. Mais, cette expression n'est pas utilisée en mathématiques, principalement parce que les déphasages sont définis modulo 2π et que la suite de ces déphasages, (φ_n), est difficilement étudiable.

Rapport ENTPE, 2002

« difficultés de calcul de nombreux candidats en trigonométrie (bien utile pour l'étude des séries de Fourier). »

Rapport Centrale, 2001

« Les candidats n'ont pas la moindre idée de l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^k . »

Rappelons les notations :
$c_n(x) = \cos(nx)$;
$s_n(x) = \sin(nx)$.

2 Série de Fourier d'une fonction périodique

2.1. Définitions

Pour toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum (a_n(f)c_n + b_n(f)s_n)$$

est appelée la **série de Fourier de** f.

Pour tout entier naturel p, on note $S_p(f)$ la p-ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_p(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

$$= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e^{inx}.$$

Avec MAPLE :

Série de Fourier de f.

Calcul de la somme partielle jusqu'à p de la série de Fourier de la fonction f.

```
b:=array(1..10);
for i to 10 do b[i]:=
'if'(type(i,even),1/i,-1/i)
od:
> S:=proc(p,x)
>     local i;
>  a[0]/2+sum(b[i]*sin((i)*x),
   i=1..p);
> end;
```

$b := \text{array}(1..10, [\,])$

$S := \textbf{proc}(p, x)\textbf{local } i;$

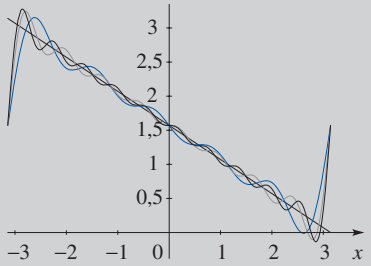
$1/2 * a[0] + \text{sum}(b[i] * \sin(i * x),$

$i = 1..p)\textbf{end}$

On visualise.

..

```
> plot([(Pi-x)/2,S(5,x),
  S(8,x),S(10,x)],x=-Pi..Pi);
```



Doc. 4. Les graphes de f et $S_5(f)$, $S_8(f)$ et $S_{10}(f)$.

2.2. Exemples

■ $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ (*doc.* 4)

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont les :

$$S_p(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{p} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^n}{2in} \left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

C'est un exemple de série de fonctions continues dont la fonction *somme* est discontinue, exemple introduit par Abel (*cf. chapitre* 5, *Introduction*).

Pour $x = \pi(\mod 2\pi)$, on a, pour tout p : $S_p(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} \neq f(\pi)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Soit f la fonction définie par $f(x) = \max(0, \sin(x))$.

f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin(u+nu) + \sin(u-nu))\,\mathrm{d}u.$$

Si $n = 1$, $a_1(f) = 0$.

Si $n > 1$, $a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_{2n+1}(f) = 0$ et $a_{2n}(f) = \dfrac{-2}{\pi(4n^2-1)}$

$$b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos(u-nu) - \cos(u+nu))\,\mathrm{d}u$$

$$b_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \;;\; \forall n > 1 \quad b_n(f) = 0.$$

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{n=1}^{\mathrm{E}(p/2)} \frac{-2\cos(2nx)}{\pi(4n^2-1)}$$

où $\mathrm{E}(p/2)$ désigne la partie entière de $\dfrac{p}{2}$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 3.*

On constate que les sommes partielles paraissent « bien approcher » la fonction f sur tout intervalle $[-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$. Mais, sur $[-\pi, -\pi+\alpha]$ et sur $[\pi-\alpha, \pi]$, le comportement est très différent. Les sommes partielles s'éloignent de la fonction f. Il s'agit là du phénomène de Gibbs, qui s'étudie en mathématiques, mais n'est pas à notre programme.

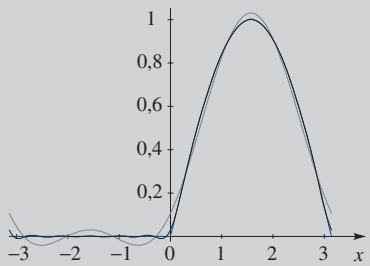
Avec MAPLE :

Série de Fourier de f

```
> S:=proc(p,x)
>     local i;
>     1/Pi+1/2*sin(x)
      +sum(a[i]*cos((i)*x),
      i=1..p);
> end;
```

On visualise

```
> plot([S(3,x),S(10,x),
  f(x)],x=-Pi..Pi);
```



Doc. 5.

2.3. Une expression de $S_p(f)$ à l'aide d'une intégrale

Déterminons une expression intégrale de $S_p(f)$.

Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-p}^{p} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(x-u)}\,\mathrm{d}u\right).$$

On pose $D_p(u) = \sum_{n=-p}^{p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}$.

D_p est dans $\mathcal{P}_p$.

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad D_p(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p+1)u}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}} = \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}.$$

Et, pour $x = 2k\pi$:

$$D_p(2k\pi) = \sum_{n=-p}^{p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2k\pi} = 2p+1 = \lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Donc, en posant $u - x = v$:

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} D_p(-v)f(v+x)\,\mathrm{d}v.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D_p est paire et 2π-périodique, donc :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v) f(v+x)\,\mathrm{d}\,v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}} f(v+x)\,\mathrm{d}\,v.$$

Un calcul aisé permet de prouver que, si $f = 1$, alors $S_p(f) = 1$, donc :

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\mathrm{d}\,v.$$

Nous en déduisons :

$$S_p(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)(f(v+x) - f(x))\,\mathrm{d}\,v.$$

D_p est appelé le **noyau de Dirichlet**.

Cette formule mesure l'écart entre la fonction f, calculée au point x, et la p-ième somme de sa série de Fourier en ce même point. Elle est le point de départ de différents problèmes concernant la convergence des séries de Fourier.

3 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$

Position du problème

Rapport Centrale, 2001

« Pour beaucoup, étudier les coefficients de Fourier d'une fonction périodique continue les conduit à affirmer qu'elle est "développable en série de Fourier". »

Toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ admet un développement en série de Fourier. Toutefois, le premier exemple ci-dessous montre que, si la série de Fourier de f converge en un point x, elle ne converge pas nécessairement vers $f(x)$.

Une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dont la série de Fourier converge simplement vers la fonction f est dite **développable en série de Fourier**. Or, nous avons défini plusieurs notions de convergence d'une suite de fonctions. Nous allons maintenant étudier différents modes de convergence de la série de Fourier d'une fonction f.

Mensa ACADEMY

3.1. Quelques rappels

L'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, et à valeurs complexes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

L'espace vectoriel préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi} \quad (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^{a+2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

et de la norme associée $\|f\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t\right]^{1/2}$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout n de $\mathbb{Z}$ et toute fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a :

$$c_n(f) = (e_n \mid f).$$

La famille $\left((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$ est orthogonale. Plus précisément :

$(s_n \mid s_k) = (c_n \mid c_k) = 0$ si $n \neq k$, $(c_n \mid s_k) = 0$ pour tout (n,k) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

$(s_n|s_n) = \frac{1}{2}$, $(c_n \mid c_n) = 1$ si $n = 0$, et $\frac{1}{2}$ sinon.

Nous savons aussi que cet espace vectoriel peut également être muni :

de la norme $\|\ \|_1$ définie par : $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t$

et de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Parmi ces trois normes sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, aucune n'est équivalente à une autre, comme nous l'avons déjà vu. Mais, pour tout f de $\mathcal{C}_{2\pi}$:

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty .$$

3.2. Projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_p$

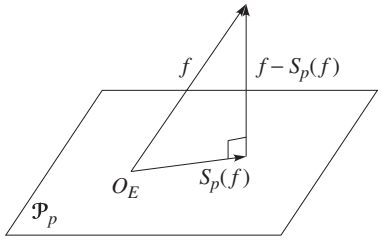
Soit p un entier naturel non nul. L'espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ des polynômes trigonométriques engendré par $(e_n)_{n\in[\![-p,p]\!]}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$, de dimension finie. On peut donc définir la projection orthogonale q sur $\mathcal{P}_p$.
Soit f dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. La famille $\{e_n \mid |n| \leqslant p\}$ étant une base orthonormale de $\mathcal{P}_p$, nous avons vu en algèbre bilinéaire que :

$$q(f) = \sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n = S_p(f).$$

Nous en déduisons, grâce au théorème de Pythagore, puisque $f - q(f)$ et $q(f)$ sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$, les relations :

- $d(f,\mathcal{P}_p) = \|f - S_p(f)\|_2$
- $\forall\, Q \in \mathcal{P}_p \quad \|f - S_p(f)\|_2 \leqslant \|f - Q\|_2$
- $\|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|f - S_p(f)\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + d(f,\mathcal{P}_p)^2$
- $\|S_p(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$

▶ Pour s'entraîner : ex. 4.



Doc. 6. *Projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$.*

En particulier, l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_p \to \mathbb{R}^+ \\ P \mapsto \|f - P\|_2 \end{cases}$$

atteint son minimum en un unique vecteur de $\mathcal{P}_p$: $S_p(f)$.
On dit aussi que $S_p(f)$ est la meilleure approximation quadratique de f (c'est-à-dire au sens de $\|\ \|_2$), par un élément de $\mathcal{P}_p$.

3.3. Inégalité de Bessel

Calculons $\|S_p(f)\|_2^2$. La base $(e_n)_{-p\leqslant n\leqslant p}$ de $\mathcal{P}_p$ est orthonormale, donc :

$$\|S_p(f)\|_2^2 = \|\sum_{n=-p}^{p} (e_n \mid f)e_n\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2$$

$$= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{p}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$$

$$= |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{p}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right].$$

Or, $\|S_p(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2$. Par conséquent, on obtient :

Théorème 2. Inégalité de Bessel

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes :

$$\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \sum_{n=-p}^{p}|c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

F.W. Bessel, *astronome allemand* (1784-1846).

Nous avons vu que, si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ ($k \geqslant 1$), alors, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}\,n)^k c_n(f)$$

Il en découle que si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et :

$$c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Quelques conséquences importantes de cette inégalité :

- La suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, car elle est croissante et majorée.
- Les suites $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{-n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.
- Les séries $\sum |a_n(f)|^2$ et $\sum |b_n(f)|^2$, à termes positifs et majorées, convergent.
- Les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0.

La limite de la suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sera notée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

4 Convergence dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}_{2\pi}, (\,|\,))$

4.1. Convergence dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}_{2\pi}, (\,|\,))$

Théorème 3

Si f est une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors la suite $(S_p(f))$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\ \|_2)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f - S_p(f)\|_2 = 0$$

On dit alors que la série de Fourier d'une fonction f, continue et 2π-périodique converge vers f en moyenne quadratique.

Démonstration

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Nous établirons d'abord que la suite $(\|f - S_p(f)\|_2)$ converge, puis que sa limite est nulle.

• Soit p un entier naturel, on sait que $\mathcal{P}_p$ est inclus dans $\mathcal{P}_{p+1}$.

Donc $S_p(f)$ est dans $\mathcal{P}_{p+1}$ et, par conséquent :

$$\|f - S_{p+1}(f)\|_2 \leqslant \|f - S_p(f)\|_2.$$

La suite $(\|f - S_p(f)\|_2)$ est donc décroissante et minorée par 0, elle converge vers L supérieur ou égal à 0.

• Mais, si ε est un réel strictement positif, il existe, d'après le théorème de Weierstrass (*cf. chapitre* 5, un polynôme trigonométrique Q, élément de $\mathcal{P}_m$, pour un certain m, tel que :

$$\|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit : $\|f - S_m(f)\|_2 \leqslant \|f - Q\|_2 \leqslant \|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Et donc que $L \leqslant \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout ε strictement positif, $L = 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.2. Formule de Parseval

Théorème 4. Formule de Parseval
Soit f une application de $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors :

$$(\|f\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2]$$

Le théorème de Pythagore donne, pour toute application f de $\mathcal{C}_{2\pi}$:

$$(\|f\|_2)^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + (\|f - S_p(f)\|_2)^2$$

La suite $((\|f - S_p(f)\|_2)^2)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ceci permet de conclure.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

4.3. Interprétation physique

Si f est une onde, $(\|f\|_2)^2$ est proportionnelle à l'énergie totale.

La formule de Parseval exprime que l'énergie totale est égale à la somme des énergies des composantes harmoniques de l'onde.

Exemple :

Soit $f(x) = \sup(0, \sin(x))$. Quelle fraction de l'énergie totale de l'onde est obtenue dès la dixième harmonique ? La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Appliquons-lui la formule de Parseval :

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2\right] = (\|f\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$

Donc : $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}$.

En termes d'énergie, quelle fraction de l'énergie totale est négligée si le signal f est remplacé par sa somme partielle $S_{10}(f)$?

Il faut évaluer le rapport $\dfrac{(\|S_{10}(f)\|_2)^2}{(\|f\|_2)^2}$.

$$\|S_{10}(f)\|_2)^2 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{1}^{5}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2\right] = 0{,}249\,975$$

Ainsi :

$$\frac{\|S_{10}(f)\|_2)^2}{(\|f\|_2)^2} = 0{,}999\,899.$$

Une fraction très importante de l'énergie est donc récupérée dès la 10e somme partielle.

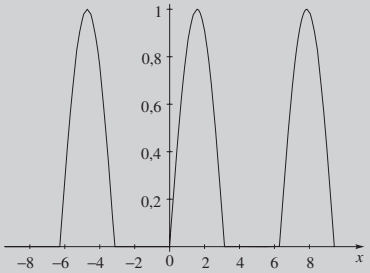
Marc Parseval, (1755-1836), mathématicien français.

Rapport Mines-Ponts, 1997
« Pauvre PARSEVAL *des Chênes ! Les candidats ont rarement retenu l'orthographe précise de son nom, qui d'ailleurs perd souvent la majuscule des noms propres. Dans leur recherche du Graal de la solution du problème, ils invoquent* PERCEVAL, *quand ce n'est pas un* PARSIFAL *wagnérien. Le goût de l'invocation magique se retrouve tout au long de certaines copies. On lit « par* LEBESGUE *», « par* PERCEVAL *», quand ce n'est pas « par* FOURIER *» (il s'agit, bien sûr, du Baron Jean-Baptiste Joseph* FOURIER (1768-1830)*), ou plus simplement « par théorème du cours » (ici, les étudiants se réfèrent généralement à ce qu'ils n'ont pas appris). »*

Rapport École de l'Air, 1998
« Les candidats ayant pensé à appliquer la formule de Parseval à f' sont peu nombreux. »

Avec MAPLE :

```
> restart:
> f:=x->max(0,sin(x));
> plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi);
```



Doc. 7.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.4. Deux conséquences importantes

Théorème 5

L'application linéaire : $\begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases}$ est injective.

Théorème 6

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Alors, on a :

$$(f \mid g) = \overline{c_0(f)}\, c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)}\, c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)}\, c_{-k}(g)\right].$$

Cette somme est aussi notée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}\, c_n(g)$.

En conséquence, deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

Démonstration

- Calculons $|(f|g) - (S_p(f)|g)| = |(f - S_p(f)|g)| \leqslant \|f - S_p(f)\|_2 \|g\|_2$.

Or, $\|f - S_p(f)\|_2$ tend vers 0, donc :

$$(f \mid g) = \lim_{p\to+\infty} (S_p(f) \mid g) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)}\, c_k(g)$$
$$= \overline{c_0(f)}\, c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)}\, c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)}\, c_{-k}(g)\right].$$

- Ou bien, avec la continuité du produit scalaire :

Soit p dans $\mathbb{N}^*$, alors :

$$\big(S_p(f) \mid S_p(g)\big) = \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)} c_k(g).$$

Donc :

$$\big(f \mid g\big) = \lim_{p\to+\infty} \big(S_p(f) \mid S_p(g)\big) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)}c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)}c_{-k}(g)\right]$$

4.5. Extension au cas des fonctions continues par morceaux

De nombreux résultats établis ci-dessus pour des fonctions continues et 2π-périodiques restent encore valables.
Nous allons justifier brièvement pourquoi.

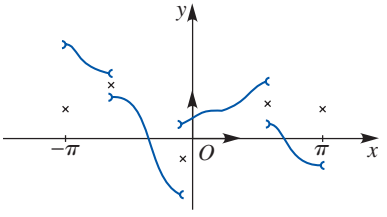
À tout f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on peut associer l'application f_r de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie par :

$$f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

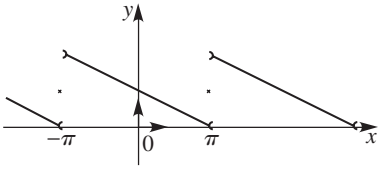
où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f en x.

En tout point x de continuité de f, $f(x) = f_r(x)$ et, en fait, la définition de l'application f_r associée à f consiste à « régulariser » f en ses points de discontinuité.

f_r est appelé **fonction régularisée** de f.



Doc. 8.



Doc. 9.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Il est clair que, sur tout segment de $\mathbb{R}$, f et f_r ne diffèrent qu'en un nombre fini de points. Donc, f et f_r ont les mêmes coefficients de Fourier et :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t.$$

■ On introduit le **sous-espace** $\mathcal{D}_{2\pi}$ de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ formé des applications g de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ vérifiant, de plus, $g = g_r$. L'application régularisée d'une application f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ appartient à $\mathcal{D}_{2\pi}$. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_{2\pi}$.

■ L'application $(f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}\,t$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}_{2\pi}$ et l'on note encore $\|\ \|_2$ la norme définie par :

$$\|g\|_2 = \sqrt{(g \mid g)}.$$

Exemple : Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout x de $]-\pi, \pi]$.

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi \\ \dfrac{\pi - \left[x - 2\pi \mathrm{E}\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right)\right]}{2} & \text{si} \quad x \notin (2\mathbb{Z}+1)\pi \end{cases}$$

Le théorème de convergence en moyenne quadratique est valable dans $\mathcal{D}_{2\pi}$.
Par conséquent, pour toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f_r - S_p(f_r)\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} \|S_p(f_r)\|_2 = \|f_r\|_2.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(\|f_r\|_2)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f_r)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\ &= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty}[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2].\end{aligned}$$

Donc la formule de Parseval est encore valable pour une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

■ On remarque aussi que les quatre séries numériques :

$$\sum |c_n(f)|^2, \qquad \sum |c_{-n}(f)|^2, \qquad \sum |a_n(f)|^2, \qquad \sum |b_n(f)|^2$$

sont convergentes et que les suites associées : $(c_n(f))$, $(c_{-n}(f))$, $(a_n(f))$, $(b_n(f))$ tendent vers 0.

Exemple :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$.

La fonction f_r associée à f diffère de f uniquement aux points de $\pi\mathbb{Z}$, et $f_r(k\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction f_r est dans l'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$ et les résultats précédents s'appliquent.

Le théorème concernant l'injectivité de l'application, qui à f associe $\widehat{f}$, n'est pas vrai dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, mais il est exact dans $\mathcal{D}_{2\pi}$.
Deux fonctions distinctes de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ peuvent avoir les mêmes coefficients de Fourier.
Il suffit de penser à la fonction caractéristique de $2\pi\mathbb{Z}$, nulle sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, prenant la valeur 1 sur $2\pi\mathbb{Z}$, pour s'en convaincre. En effet, les coefficients de Fourier de cette fonction sont nuls.

Rapport Centrale, 2001

« Quant à la convergence en moyenne quadratique, la moitié des candidats dit ne jamais en avoir entendu parler. »

Il existe des séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier, mais qui convergent. Ainsi, vous vérifierez avec une **transformation d'Abel** que la série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{\ln(n+2)}$ converge sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ car la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\ln^2(n+2)}$ diverge.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty [|a_n|^2+|b_n|^2] = \frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Et on retrouve le résultat bien connu :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

5 Convergence ponctuelle

5.1. Un lemme important

Lemme

On considère une série de fonctions de la forme :

$$u_0 + \sum (u_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + u_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}).$$

Si les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |u_{-n}|$ convergent, la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note S la fonction somme. Alors :

- la fonction S est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$;
- la série de fonctions est la série de Fourier de sa fonction somme, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(S) = u_n$$

On peut aussi écrire la série de fonctions sous la forme :

$$\frac{v_0}{2} + \sum (v_n \cos(nt) + w_n \sin(nt))$$

Si les séries $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ convergent, les résultats énoncés restent vrais.

Une telle série de fonctions est appelée série trigonométrique.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Seulement un candidat sur deux connaît un énoncé exact permettant de justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. »

Démonstration

L'inégalité $|u_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + u_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}| \leqslant |u_n| + |u_{-n}|$ entraîne la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions.

Soit S la fonction somme de la série de fonctions et S_p les fonctions sommes partielles de la série.

La convergence de la série de fonctions vers S étant uniforme et les S_p étant continues, la fonction S est continue. Elle est 2π -périodique et appartient donc à $\mathcal{C}_{2\pi}$. Calculons ses coefficients de Fourier.

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Fixons n. S est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (S_p), et :

$$\|S_p\, e_{-n} - S e_{-n}\|_\infty = \|S_p - S\|_\infty.$$

La suite de fonctions $(S_p e_{-n})_p$ converge uniformément vers Se_{-n}. On en déduit :

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\lim_{p\to+\infty} S_p(t)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{p\to+\infty} c_n(S_p).$$

Or, pour $p \geqslant n$, $c_n(S_p) = u_n$ (coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques). Donc $c_n(S) = u_n$ et la série de Fourier de S est la série de fonctions donnée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple : On considère la série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Pour tout x réel, $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Le lemme ci-dessus permet d'affirmer que :

$$a_0(S) = 0\,;\ \forall n \geqslant 1 \quad a_n(S) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(S) = 0.$$

Rapport Centrale, 2001

« Comme dans l'étude des suites de fonctions, représenter graphiquement la fonction que l'on veut décomposer en série de Fourier permet d'en connaître la régularité. »

5.2. Un théorème de convergence normale

Théorème 7

Soit f une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Alors :

- la série de fonctions $c_0(f) + \sum (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n})$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$;
- la suite de fonctions $(S_p(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

- Étudions $\|c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\|_\infty$. On a :

$$\|c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\|_\infty \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|, \quad \text{car} \quad \|e_n\|_\infty = 1.$$

- Soit n dans $\mathbb{Z}^*$. Nous avons vu que $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$, donc :

$$|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right].$$

Les séries numériques $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes. Donc, la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n})$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$. Le lemme permet de conclure.

- Appelons g la limite uniforme de la suite de fonctions $(S_p(f))$.

g est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout n de $\mathbb{Z}$: $c_n(g) = c_n(f)$.

f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui ont les mêmes coefficients de Fourier, donc coïncident.

Sous la forme trigonométrique, la série de fonctions s'écrit :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)).$$

Corollaire 7.1

Soit f une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout réel x :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{a_0 f}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n(f)\cos n\,x + b_n(f)\sin n\,x)$$

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples :

■ La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ n'est pas continue, on ne peut lui appliquer le théorème. Par ailleurs, les coefficients trigonométriques de f ont été calculés. Vous montrerez que la série de Fourier de f n'est pas normalement convergente.

■ La fonction g définie par $g(x) = \sup(0, \sin(x))$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc la série de Fourier de g converge normalement vers g. La fonction g est développable en série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sup(0, \sin(x)) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{-2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2 - 1)}.$$

En particulier, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{-2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)},$$

d'où : $$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)} = +\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

5.3. Un théorème de convergence simple

Théorème 8. Théorème de Dirichlet
Si f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction f_r régularisée de f.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

En particulier, si f est continue en x, alors :

$$f(x) = f_r(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

Démonstration

• **Première étape : Le noyau de Dirichlet**

Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-p}^{p} \left(\int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} \, du \right) e^{inx}.$$

Nous avons établi au paragraphe 2.3 que $D_p(u) = \sum_{n=-p}^{p} e^{-inu}$ est dans $\mathcal{P}_p$ et que :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_p(v) \, f(x+v) \, dv.$$

Grâce à la parité de D_p et à la périodicité de f et de D_p, on obtient :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_p(u) \, f(x-u) \, du.$$

On remarque que les hypothèses sont plus faibles dans ce théorème que dans le précédent, on perd la continuité de f. La convergence, précédemment normale, devient une convergence simple et on retrouve la fonction « régularisée » de f.

On attribue à Dirichlet le célèbre principe des tiroirs. Lorsque $n+1$ objets sont rangés dans n tiroirs, deux objets au moins se retrouvent dans le même tiroir. En utilisant ce principe, pouvez-vous établir que, si sept points sont disposés à l'intérieur d'un cercle, deux au moins sont à une distance inférieure au rayon R. Reformuler ce principe en terme de cardinal d'ensemble et d'application.

Dirichlet Gustav (1805-1859), *mathématicien allemand, élève de* GAUSS.
En arithmétique, il montre que toute suite arithmétique $(an + b)$, *où* a *et* b *sont premiers entre eux, contient une infinité de nombre premiers.*
En analyse, il énonce et démontre le théorème précédent.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En prenant la demi-somme de ces deux expressions :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2}\,\mathrm{d}\,v \qquad \textbf{(1)}$$

- **Deuxième étape. Apparition de la régularisée de f et deuxième transformation de l'intégrale**

La régularisée de f est un élément de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\mathrm{d}\,v = 1$.

Par conséquent, pour tout f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et tout x réel, on obtient :

$$\begin{aligned} S_p(f)(x) - f_r(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_p(v)\left(\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2} - f_r(x)\right)\mathrm{d}\,v \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-v)+f(x+v)-2f_r(x)}{2\sin\left(\dfrac{v}{2}\right)}\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}\,v \end{aligned}$$

en remplaçant D_p par son expression calculée (*cf. paragraphe* 2.3).

Fixons alors x et définissons, pour tout t de $[-\pi,\pi]\setminus 0$, la fonction g par :

$$g(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f_r(x)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

On peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad S_p(f)(x) - f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}\,v \qquad \textbf{(2)}$$

- **Troisième étape. Étude de la fonction g**

Sachant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, il est clair que g est continue par morceaux sur $[-\pi,0[$ et sur $]0,\pi]$.

Étudions la fonction g à droite en 0.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc f' admet une limite à droite en x, $f'(x^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} f'(x+t)$, et une limite à gauche en x, $f'(x^-) = \lim\limits_{t\to 0^-} f'(x+t)$. On peut donc écrire, pour $t>0$:

$$f(x+t) = f(x^+) + tf'(x^+) + t\varepsilon_1(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0^+}\varepsilon_1(t) = 0\,;$$

$$f(x-t) = f(x^-) - tf'(x^-) - t\varepsilon_2(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0^+}\varepsilon_2(t) = 0.$$

Et donc, pour $t>0$:

$$g(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f_r(x)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \frac{t(f'(x^+)-f'(x^-)+\varepsilon_1(t)-\varepsilon_2(t))}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

Or $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = f'(x^+) - f'(x^-)$.

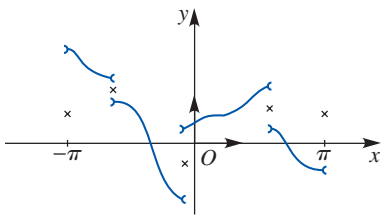
g admet une limite à droite en 0 et, de même, g admet une limite à gauche en 0.

g est donc continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$.

- **Quatrième étape. La conclusion**

Appliquons le lemme de Lebesgue à la relation **(2)** :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad \lim_{p\to+\infty} S_p(f)(x) = f_r(x).$$



Doc. 10.

Rapport X, 2000

« Les hypothèses du théorème de Dirichlet posent, et cela est nouveau, des problèmes. »

Rapport Centrale, 2001

« Il reste encore des candidats ignorant les hypothèses exactes de ce théorème. »

Rapport ENS, 1997

« La théorie des séries de Fourier est bien connue. Les théorèmes fondamentaux (égalité de Bessel, convergence uniforme dans le cas d'une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sont appliqués judicieusement. En revanche, les candidats doivent prendre garde au fait que le théorème de Dirichlet donne une convergence simple, ce qui est rarement suffisant pour effectuer des interversions avec des intégrales par exemple ! De plus, les candidats parviennent à se servir de la décomposition en série de Fourier pour étudier des équations aux dérivées partielles ou différentielles ordinaires. »

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, c un réel, g une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin((n+c)t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

Ce résultat, le lemme de Lebesgue, a été rencontré en première année dans une *application*.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple : La fonction définie 2π -périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

n'est pas continue, mais est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On peut lui appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[\quad f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{2}+\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n}\neq f(x)$$

$$\forall x\in\pi\mathbb{Z}\quad f_r(x)=\frac{\pi}{2}.$$

La série de Fourier de f converge somplement vers f. La valeur $x=\dfrac{\pi}{2}$ permet de prouver la formule :

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

Application 1

Dérivabilité d'une série de Fourier

Nous avons rencontré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sup(0,\sin x)$ et montré que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\sup(0,\sin(x))$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}+\frac{-2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)}$$

Étudions la dérivabilité de la série de Fourier de f.

La série dérivée terme à terme a pour terme général, pour $n\geqslant 1$, $\dfrac{4n\sin(2nx)}{\pi(4n^2-1)}$.

Elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, car f n'est pas dérivable aux points de $\pi\mathbb{Z}$. Converge-t-elle simplement ?

Soit g 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\cos x\quad\text{si}\quad x\in\,]0,\pi[\ ;$$
$$g(x)=0\qquad\text{si}\quad x\in\,]\pi,2\pi[\ ;$$
$$g(0)=g(\pi)=\frac{1}{2}\qquad .$$

Le calcul des coefficients de Fourier de g donne :

$$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t=nb_n$$

et :

$$b_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t=-na_n.$$

Comme g est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\left[g(x^+)+g(x^-)\right]=\frac{1}{2}\cos x+\frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{n\sin(2nx)}{4n^2-1}$$

On constate que la série de Fourier de g coïncide avec la dérivée terme à terme de la série de Fourier de f. Mais notre programme ne nous donne pas les outils théoriques pour l'étudier directement.

En résumé, on peut retenir que la convergence d'une série trigonométrique s'étudie le plus souvent avec les théorèmes de convergence établis dans ce chapitre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6 Cas des fonctions T-périodiques

$\mathcal{CM}_T$ désigne l'espace vectoriel des **fonctions T-périodiques**, continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

■ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par $e_n(t) = \exp\left(\mathrm{i}\, n\frac{2\pi}{T}t\right)$.

■ On définit les coefficients de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{CM}_T$ par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n(2\pi/T)t}\,\mathrm{d}\,t$$

et les coefficients trigonométriques de f par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}\,t\ ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}\,t.$$

■ On remarque que :

• $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$ est toujours la valeur moyenne de f sur une période ;

• les formules liant $a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ restent inchangées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - \mathrm{i}\, b_n(f)}{2}\ ;\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + \mathrm{i}\, b_n(f)}{2}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)\ ;\ b_n(f) = \mathrm{i}\,(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

■ Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont :

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n, \quad \text{où } p \text{ est dans } \mathbb{N}.$$

$\forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n(2\pi/T)t}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}\left[a_n(f)\cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n(f)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right].$$

■ La formule de Parseval reste valable pour les fonctions continues par morceaux et T-périodiques :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f)|^2 = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2].$$

Elle se justifie de la même manière que pour des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

■ Les théorèmes de convergence ponctuelle s'appliquent également :

• si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement et donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$;

• si f est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction f_r définie par :

$$f_r(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

► *Pour s'entraîner : ex. 10.*

École de l'Air, 1998

« ...Appliquer les bonnes formules, à savoir ici pour une fonction 2-périodique. Il semble que certains candidats aient éprouvé des difficultés sur ce point précisément en s'embrouillant dans le changement de variable. »

Rapport Centrale, 2001

« Les énoncés de théorèmes sont trop souvent donnés de manière très approximative (Parseval...) »

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 2

La fonction $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$

1) *Calculer ses coefficients de Fourier.*

2) *Quels théorèmes de convergence peut-on lui appliquer ?*

1) La fonction f est 1-périodique, elle n'appartient pas à $\mathcal{D}_1$, mais elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et même $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (*doc.* 11).
Calculons ses coefficients trigonométriques.

$$a_n(f) = 2\int_0^1 t\cos(n2\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, $a_0(f) = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = 0$.
Quant aux b_n :

$$b_n(f) = 2\int_0^1 t\sin(n2\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi n}.$$

La série de Fourier de f est donc la série de fonctions :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum \frac{\sin(2\pi nx)}{n}.$$

2) La formule de Parseval s'applique et :

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{(\pi n)^2}.$$

Elle permet de retrouver : $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le théorème de convergence simple de Dirichlet s'applique :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \quad f_r(x) = f(x) = x - \mathrm{E}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{n}$$

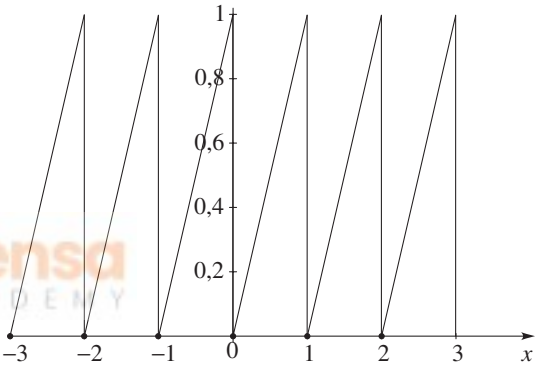
$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad f_r(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{n}.$$

Pour $x = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

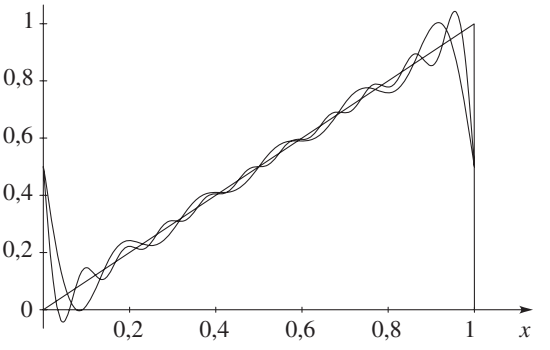
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}.$$

Soit : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} = \sum_0^\infty \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}.$

Et, donc : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}.$



Doc. 11.



Doc. 12.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ (D'après CCP, 1995)

Soit f une fonction donnée, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de f, la fonction F qui associe, à tout réel x, l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Développement en série de Fourier d'une fonction

Soit t un réel quelconque donné. On désignera par f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que, sur $]0,\pi[$, $f_t(x) = \operatorname{ch}(tx)$.

1.a) Montrer que, pour tout entier k, $f_t(k\pi) = 0$.

b) Construire, pour $t = 0{,}5$, la courbe représentative de la restriction de $f_{0,5}$ à l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f_t.

3.a) En précisant le théorème utilisé, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses dans le cas présent, donner la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_1^{\infty} b_n(f_t)\sin nx$ pour tout x de $[-\pi,\pi]$.

b) Déduire, du résultat précédent, une expression de $\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)$ de la forme :

$$\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right) = \sum_0^{\infty} U_p(t)$$

où U_p est rationnel par rapport à l'indice p.

4.a) En utilisant les résultats précédents, montrer que $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)}$ s'exprime simplement à l'aide de la somme de la série alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}$.

(On exprimera $1 + \operatorname{ch}(xt)$ en fonction de $\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)$.)

b) En déduire une expression de $\dfrac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

Partie II : Calcul de la transformée de Fourier

1) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer la transformée de Fourier de f en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$.

2.a) Montrer qu'il existe une suite (α_p) de réels telle que, pour tout x :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \alpha_p \cos(xt)\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Terminer alors soigneusement la détermination de la fonction F.

3) Quelle remarque peut-on faire sur la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)}$?

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit a un complexe. On considère la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\in\,]-\pi,\pi[\\ \operatorname{ch}(\pi a) & \text{si } x=\pi \end{cases}$$

où $\operatorname{ch}(z)=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ et $\operatorname{sh}(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ pour un complexe z quelconque.

Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2 Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(x)=\operatorname{ch}(ax)$$

dans les deux cas suivants :

1) $a\in i\mathbb{Z}$.

2) $a\in\mathbb{R}^{+*}$.

3 Déterminer la série de Fourier des fonctions f des *exercices* 1 et 2.

4 Déterminer $\inf\{||f-Q||_2; Q\in\mathcal{P}_n\}$ pour la fonction de l'*exercice* 1.

5 La série trigonométrique $\sum\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$?

6 Peut-on appliquer la formule de Parseval aux fonctions rencontrées dans les *exercices* 1 et 2 ?

Pour chacune de ces fonctions, quelles égalités obtient-on ?

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

7 La formule de Parseval s'applique-t-elle à d'autres fonctions parmi celles introduites dans les *exercices* 1 et 2 ? Si oui, écrire les égalités obtenues dans chaque cas.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

8 Parmi les fonctions étudiées dans les *exercices* 1 et 2, auxquelles peut-on appliquer le théorème de convergence normale ?

Écrire dans chaque cas l'égalité obtenue.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

9 Parmi les fonctions étudiées dans les *exercices* 1 et 2, auxquelles s'applique le seul théorème de convergence simple ?

Écrire dans chaque cas l'égalité obtenue.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

10 **a)** Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction T-périodique f définie par :

$$f(x)=\left|\sin\left(\frac{\pi}{T}x\right)\right|.$$

b) Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de f ?

11 Soit (α_n) une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0.

Montrer qu'il existe des fonctions continues 2π-périodiques dont les coefficients de Fourier vérifient pour une infinité de valeurs de n :

$$|\alpha_n|+|b_n|\geqslant\alpha_n.$$

12 On définit les fonctions T-périodiques et paires f et g en posant :

$$\forall x\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]\quad f(x)=x^4,\quad g(x)=x^2.$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f et de g.

2) En déduire deux constantes c_0 et d_0 et une fonction h, combinaison linéaire de f et g, telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad h(x)=c_0+d_0\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{T^4}{n^4}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

3) Calculer $\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^8}$.

13 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodique, d'intégrale nulle sur une période.

Montrer l'inégalité $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f|^2\leqslant\int_0^{2\pi}|f'|^2$.

Préciser les cas d'égalité.

14 Résoudre l'équation différentielle :

$$y''+y=|\sin(x)|\quad(E)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

15 * Donner le développement en série de Fourier de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} a + \cos x} \quad \text{où } (a > 0).$$

En déduire les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a + \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

16 * Déterminer toutes les applications f, $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodiques et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2 \sin x \; f'(x).$$

17 * **(D'après X, 1993)**

Soit $T > 0$, λ un complexe non nul et E_λ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, T-périodiques et vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) - f(x-1) = \lambda f'(x).$$

Montrer que la dimension de E est finie et qu'elle est égale à 1 si $|\lambda|$ est supérieur ou égal à un nombre que l'on précisera, ou si λ n'est pas réel.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Fonctions de plusieurs variables

12

Introduction

Les fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines.

En Mécanique, vous avez rencontré l'équation des cordes vibrantes ; en Thermodynamique, l'équation de la chaleur ; en Électromagnétisme, les équations de Maxwell.

En Économie, les équations aux dérivées partielles interviennent dans la modélisation et la valorisation des options. Ce sont des droits d'acquérir ou de vendre, à un prix donné, un actif financier quelconque (les actions en bourse, les dettes sur les marchés des taux d'intérêt ou les monnaies sur les marchés des changes).

En 1973, Black et Scholes ont introduit le raisonnement d'arbitrage qui consiste à reproduire le profil d'un actif donné à l'aide d'une combinaison d'autres actifs. Cette démarche appliquée aux options conduit, après application du lemme d'Ito, à une équation aux dérivées partielles que l'on sait résoudre par une formule explicite.

C'est sans doute la raison du succès de leur travail. Le fait que des dizaines de milliers d'opérateurs aient pu disposer, sur un tableur de poche, d'une formule efficace a contribué à la fantastique expansion de la finance moderne.

OBJECTIFS

- Applications différentiables.
- Dérivées directionnelles et dérivées partielles.
- Applications de classe $\mathcal{C}^1$.
- Matrice jacobienne et jacobien d'une application différentiable.
- $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.
- Gradient d'une fonction numérique de plusieurs variables.
- Inégalité des accroissements finis pour une fonction numérique de plusieurs variables.
- Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
- Dérivées partielles d'ordre k, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et théorème de Schwarz.
- Formule de Taylor-Young.
- Utilisation des coordonnées polaires.
- $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.
- Manipulation de changement de variables dans une équation aux dérivées partielles.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert non vide U d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace normé $(F, \|\ \|_F)$ également de dimension finie. Nous noterons indifféremment $\|\ \|$ ces normes, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Nous utiliserons $\|\ \|$ la norme de $\mathcal{L}(E, F)$ subordonnée aux normes de E et de F. Toutes les normes étant équivalentes, nous choisirons chaque fois **la norme la plus adaptée à nos calculs.**

Afin de ne pas compliquer l'exposé, nous nous autoriserons quelques abus de notation, que nous allons préciser maintenant :

• Nous noterons, pour une fonction f définie sur l'ouvert U de E et à valeurs dans F :

$$f : U \subset E \to F, \quad \text{au lieu de} \quad f : U \to F.$$

• Lorsque $E = \mathbb{R}^p$, pour un élément $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de U, nous noterons :

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_p), \quad \text{au lieu de} \quad f((x_1, \ldots, x_p)).$$

Rapport ENS, 2000

« Plus généralement, les fonctions de plusieurs variables semblent être un obstacle insurmontable pour beaucoup de candidats. »

Rapport Centrale, 2001

« Les fonctions de plusieurs variables ont fait l'objet, cette année, d'un nombre non négligeable d'interrogations. Des exercices simples [...] ont souvent transformé l'examinateur en bourreau infligeant au candidat une épreuve à la limite du supportable... »

Applications différentiables

1.1. Définitions

Soit a dans U. L'ensemble U est un ouvert. Il existe un voisinage W de 0_E dans E tel que : $\forall h \in W \quad a + h \in U$.

Mensa ACADEMY

Théorème 1

On dit que l'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire l de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall h \in W \quad f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|) \qquad \textbf{(1)}$$

Si l'application linéaire l existe, elle est unique et notée $\mathrm{d}f(a)$.

Notez bien que $\mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$, elle est définie sur E.

Démonstration

S'il existe l_1 et l_2 deux applications linéaires vérifiant la relation **(1)**, on a :

$$\forall h \in W \quad l_1(h) - l_2(h) = o(\|h\|).$$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h \in W \quad (\|h\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|l_1(h) - l_2(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|).$$

On en déduit : $\forall \varepsilon > 0 \quad \|l_1 - l_2\| \leqslant \varepsilon$, puis, $\|l_1 - l_2\| = 0$ et $l_1 = l_2$.

Lorsque f est différentiable en a, l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est appelée **application linéaire tangente** à f en a ou **différentielle** de f en a. Lorsque f est différentiable en tout point de U, on dit que f est **différentiable** sur U. L'application $\mathrm{d}f$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est la **différentielle** de f.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cette définiton se généralise à des espaces vectoriels normés E et F de dimension quelconque.

Dans ce cas les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues. On dira que l'application f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue l de $\mathcal{LC}(E,F)$ telle que :

$$\forall h \in W \quad f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|).$$

Théorème 2

Lorsque $E = \mathbb{R}$, une application f est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a.

Dans ce cas, la différentielle de f en a est l'application de $\mathbb{R}$ dans F :

$$\mathrm{d}f(a) \ : \ h \mapsto hf'(a)$$

■ **Cas des espaces affines**

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives les espaces vectoriels normés E et F.
Ils sont munis d'une distance.
Soit U un ouvert de $\mathcal{E}$, a un point de U et f une application de U dans $\mathcal{F}$.
Les définitions précédentes s'appliquent, car :
$f(a+h) - f(a) \in F$.

1.2. Exemples

■ Soit b fixé dans F. L'application constante de E dans F définie par $f(x) = b$ est différentiable sur E et : $\forall x \in E \quad \mathrm{d}f(x) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

■ Soit f dans $\mathcal{L}(E,F)$.

$\forall x \in E \quad \forall h \in E \quad f(x+h) = f(x) + f(h) = f(x) + f(h) + o(\|h\|)$.

f est différentiable en tout point de E et : $\forall x \in E \quad \mathrm{d}f(x) = f$.

Théorème 3

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est différentiable sur E et : $\forall x \in E \quad \mathrm{d}f(x) = f$

Ce théorème se généralise aux applications linéaires continues lorsque les espaces ne sont pas de dimension finie.

■ Soit $(G, \| \ \|_G)$ un troisième espace vectoriel normé de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \forall (h,k) \in E \times F$$
$$B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(h,y) + B(x,k) + B(h,k).$$

Les espaces E et F sont de dimension finie. L'application B est continue. Il existe une constante K telle que : $\|B(h,k)\|_G \leqslant K\|h\|_E\|k\|_F$.

L'application B est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \forall (h,k) \in E \times F$$
$$\mathrm{d}B(x,y)(h,k) = B(h,y) + B(x,k).$$

Le produit dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire, donc différentiable.

Rapport ENS, 2000

« La première partie faisait le lien entre la différentielle de f en 0 et la stabilité de 0 pour $x' = f(x)$ et mettait en œuvre des raisonnements de calcul matriciel et d'analyse . »

Théorème 4

Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est différentiable sur $E \times F$ et :

$\forall (x,y) \in E \times F \quad \forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}B(x,y)(h,k) = B(h,y) + B(x,k)$

Ce théorème se généralise aux applications bilinéaires continues lorsque les dimensions de E et F ne sont pas finies.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Différentielle du carré de la norme euclidienne

Soit $(E,(\ |\ ))$ *un espace vectoriel euclidien.*

Pour tout a *de* E, *on note* $f(a) = \|a\|^2$ *et* $g(a) = \|a\|$.

1) *Soit* a *un point de* E *et* h *un vecteur de* E. *Développer* $f(a+h)$. *En déduire que* f *est différentiable sur* E *et déterminer sa différentielle.*

2) *Montrer que* g *est différentiable sur* $E\setminus\{0_E\}$ *et déterminer sa différentielle.*

1) $f(a+h) = (a+h \mid a+h)$

$$= f(a) + 2(a \mid h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

L'application $h \mapsto 2(a \mid h)$ est linéaire.

Pour tout h, $\varepsilon(h) = \|h\|$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ceci prouve que f est différentiable en a et que :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = 2(a \mid h).$$

2) *Étude de* g *sur* $E\setminus\{0_E\}$

Pour tout point a de $E\setminus\{0_E\}$ et pour tout vecteur h de E :

$$g(a+h) = \sqrt{\|a\|^2 + 2(a \mid h) + \|h\|^2}$$

$$= \|a\|\sqrt{1+r(h)}$$

avec $r(h) = \dfrac{2(a \mid h) + \|h\|^2}{\|a\|^2}$.

Puisque $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$, on peut écrire :

$$g(a+h) = \|a\|\left[1 + \frac{1}{2}r(h) + r(h)\delta(h)\right]$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \delta(h) = 0$.

Ainsi :

$$g(a+h) = g(a) + \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right) + \frac{\|h\|^2}{2\|a\|} + \|a\|r(h)\delta(h)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|r(h)| \leqslant \|h\|\frac{2\|a\| + \|h\|}{\|a\|^2}.$$

Donc :

$$\|a\|r(h)\delta(h) + \frac{\|h\|^2}{2\|a\|} = \|h\|\gamma(h),$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \gamma(h) = 0$.

De plus, l'application $h \mapsto \left(\dfrac{a}{\|a\|} \mid h\right)$ est linéaire. L'égalité :

$$g(a+h) = g(a) + \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right) + \|h\|\gamma(h)$$

prouve que g est différentiable en a et que sa différentielle en ce point est l'application $\mathrm{d}\, g(a)$ définie par :

$$\mathrm{d}\, g(a)(h) = \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right).$$

Par ailleurs, nous verrons dans l'application 4 que l'application g n'est pas différentiable en 0_E.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.3. Propriétés des applications différentiables

Théorème 5

- Toute application différentiable en un point est continue en ce point.
- Toute application différentiable sur U est continue sur U.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 6

Soit f et g deux applications de U dans F différentiables en a, α et β deux scalaires non nuls.

Alors $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha\, \mathrm{d}\, f(a) + \beta\, \mathrm{d}\, g(a)$$

On peut choisir une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Pour tout x de U, on note $f_j(x)$ la coordonnée de $f(x)$ relativement au j-ième vecteur de la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Les n applications f_j sont appelées **applications coordonnées** de f.

Théorème 7

On note $(f_1, \ldots, f_n)$ les applications coordonnées de f dans une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F. L'application f est différentiable en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i de f est différentiable en a.

Dans ce cas, pour tout vecteur h de E :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\, f_i(a)(h)\varepsilon_i$$

De même que l'existence de limites, la différentiabilité d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie peut se démontrer en étudiant la différentiabilité de chacune des applications coordonnées.

Démonstration

Soit l dans $\mathcal{L}(E, F)$ de coordonnées $(l_1, \ldots, l_n)$.

$\forall h \in W \setminus \{0_E\}$

$$\frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l(h)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|h\|}(f_i(a+h) - f_i(a) - l_i(h))\varepsilon_i$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l(h)) = 0_F$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(f_i(a+h) - f_i(a) - l_i(h)) = 0.$$

L'application f est différentiable en a si et seulement si chaque fonction coordonnée de f est différentiable en a. Dans ce cas, pour tout vecteur h de E :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\, f_i(a)(h)\varepsilon_i.$$

Lorsque F est $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, on note $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Corollaire 7.1

L'application f est différentiable en a si et seulement si chaque fonction coordonnée de f est différentiable en a. Dans ce cas, pour tout vecteur h de E :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = (\mathrm{d}\, f_1(a)(h), \ldots, \mathrm{d}\, f_n(a)(h))$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 8

Soit U un ouvert de E, V un ouvert de F et a un point de U.

Considérons une application f de U dans V différentiable en a et une application g de V dans un espace vectoriel normé de dimension finie G, différentiable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}\, g(f(a)) \circ \mathrm{d}\, f(a)$.

Démonstration

$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0_F$.

$g(f(a)+k) = g(f(a)) + \mathrm{d}\, g(f(a))(k) + \|k\|\varepsilon_2(k)$, avec $\lim\limits_{k\to 0} \varepsilon_2(k) = 0_G$.

Posons $k = \mathrm{d}\, f(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$. On a $\lim\limits_{h\to 0} k = 0_E$.

$g \circ f(a+h) = g(f(a)) + \mathrm{d}\, g(f(a))(\mathrm{d}\, f(a)(h)) + \mathrm{d}\, g(f(a))(\|h\|\varepsilon_1(h)) + \|k\|\varepsilon_2(k)$.

L'application $\mathrm{d}\, g(f(a)) \circ \mathrm{d}\, f(a)$ est linéaire.

- L'application $\mathrm{d}\, f(a)$ est continue. Donc :

$$\|k\|\,\|\varepsilon_2(k)\| \leqslant (\|\mathrm{d}\, f(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|)\|h\|\,\|\varepsilon_2(k)\|.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}(\|\mathrm{d}\, f(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|)\|\varepsilon_2(k)\| = 0$.

Donc $\|k\|\varepsilon_2(k)$ est négligeable devant $\|h\|$.

- L'application $\mathrm{d}\, g(f(a))$ est continue.

$$\|\mathrm{d}\, g(f(a))(\|h\|\varepsilon_1(h))\| \leqslant \|\mathrm{d}\, g(f(a))\|\|h\|\,\|\varepsilon_1(h)\|.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \|\mathrm{d}\, g(f(a))\|\,\|\varepsilon_1(h)\| = 0$.

On en déduit que $\mathrm{d}\, g(f(a))(\|h\|\varepsilon_1(h))$ est négligeable devant $\|h\|$.

On a montré que $g \circ f$ est différentiable en a et que $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}\, g(f(a)) \circ \mathrm{d}\, f(a)$.

Corollaire 8.1

Soit U un ouvert de E, V un ouvert de F.

Considérons une application f de U dans V différentiable sur U et une application g de V dans un espace vectoriel normé G, différentiable sur V. Alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

Corollaire 8.2

Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une application de U dans V dérivable en a et f de V dans G différentiable en $\varphi(a)$.

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \mathrm{d}\, f(\varphi(a))(\varphi'(a))$.

Démonstration

$\forall h \in \mathbb{R} \quad \mathrm{d}(f \circ \varphi)(a)(h) = \mathrm{d}\, f(\varphi(a))(\mathrm{d}\, \varphi(a)(h)) = \mathrm{d}\, f(\varphi(a))(h\varphi'(a))$.

Or $\mathrm{d}\, f(\varphi(a))$ est linéaire. Donc :

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad h(f \circ \varphi)'(a) = h\,\mathrm{d}\, f(\varphi(a))(\varphi'(a)).$$

Puis : $(f \circ \varphi)'(a) = \mathrm{d}\, f(\varphi(a))(\varphi'(a))$.

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 Dérivées partielles

2.1. Dérivées selon un vecteur

Soit a un point de U et v un vecteur non nul de E. U étant un ouvert de E, il existe δ strictement positif tel que, pour tout t de $[-\delta, \delta]$, $a+tv$ soit dans U.

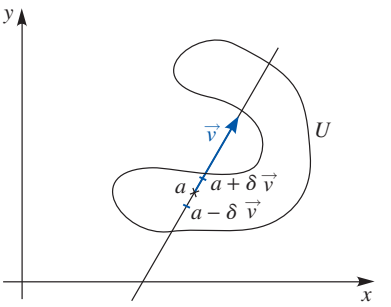
On peut alors considérer l'application φ_v de $[-\delta, \delta]$ dans F définie par :

$$\forall t \in [-\delta, \delta] \quad \varphi_v(t) = f(a+tv)$$

On dit que f admet une **dérivée en a selon le vecteur v** (ou une **dérivée directionnelle** selon v au point a), si la fonction φ_v est dérivable en 0, c'est-à-dire si $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ existe.

Si la dérivée $\varphi_v'(0)$ existe, elle est notée $\mathrm{D}_v f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$.

C'est un élément de F, appelé dérivée de f en a selon le vecteur v ou dérivée directionnelle de f selon v au point a.



Doc. 1.

Pour calculer les dérivées directionnelles, on est ramené à des fonctions d'une seule variable.

Si f est dérivable selon le vecteur v en a, elle est dérivable en a selon tout vecteur non nul colinéaire à v. D'où le nom de dérivée directionnelle.

Théorème 9

On note $(f_1, \ldots, f_n)$ les applications coordonnées de f dans une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F. L'application f est dérivable en a suivant le vecteur v si et seulement si les n fonctions coordonnées f_j sont dérivables en a suivant v. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_v f_i(a)\varepsilon_i$$

La démonstration est immédiate, car :

$$f(a+tv) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (f_i(a+tv) - f_1(a))\varepsilon_i.$$

2.2. Dérivées partielles

- Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E.

On dit que f admet une **dérivée partielle** en a par rapport à la j-ième composante si f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_j, c'est-à-dire si la fonction φ_{e_j} admet en 0 une dérivée.

Lorsque cette dérivée partielle existe, on la note :

$$\mathrm{D}_j f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

- Étudions le cas où E est $\mathbb{R}^p$, muni de la base canonique.

Lemme

Soit $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un point de l'ouvert non vide U, et k un entier compris entre 1 et p.

Rapport X, 2001

« On a d'étranges surprises lorsqu'on s'aventure sur la différentiabilité des applications à plusieurs variables ; il y a des candidats, raisonnables par ailleurs, qui croient avoir appris que l'existence de dérivées directionnelles garantit la différentiabilité (parce qu'on est en dimension finie disent-ils !). »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On note $\theta_{a,k}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$\theta_{a,k} : t \mapsto \theta_{a,k}(t) = (a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_p)$$

et :

$$U_{a,k} = \{t \in \mathbb{R} \mid \theta_{a,k}(t) = (a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_p) \in U\}$$

Alors, l'application $\theta_{a,k}$ est continue et l'ensemble $U_{a,k}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration

L'application $\theta_{a,k}$ est linéaire, donc continue.

L'ensemble $U_{a,k}$ contient a_k. Il est l'image réciproque de l'ouvert non vide U par l'application continue $\theta_{a,k}$. C'est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f dans $\mathcal{F}(U, F)$. Pour tout (a, k) de $U \times [\![1, p]\!]$, on définit $f_{a,k} = f \circ \theta_{a,k}$:

$$f_{a,k} : \begin{cases} U_{a,k} \to F \\ t \quad \mapsto f_{a,k}(t) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_p) \end{cases}$$

Les p applications $f_{a,1}, \ldots, f_{a,p}$ sont appelées les **applications partielles** de f au point a.

D'après le lemme, la continuité de f sur U implique la continuité de chacune des applications partielles de f. Cependant, la réciproque est fausse.

Si $a = (a_1, \ldots, a_p)$, par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_p) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_p)}{t}.$$

On constate que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée de :

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$

au point a_j. Ainsi parle-t-on de dérivée partielle par rapport à la j-ième composante.

Exemple : **Calcul des dérivées partielles de la fonction f définie par :**

$$f(x, y) = (y \sin(x), \cos(y))$$

Les fonctions coordonnées de f admettent des dérivées partielles, par rapport aux deux composantes, en tout point $a = (a_1, \ a_2)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = (a_2 \cos(a_1), 0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = (\sin(a_1), -\sin(a_2))$$

Rapport TPE, 1997

« La continuité d'une fonction de plusieurs variables réelles est trop souvent confondue avec la continuité par rapport à chaque variable ; la notation même de limite d'une fonction de plusieurs variables n'est pas toujours assimilée. »

La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est pratique et très utilisée, mais peut s'avérer ambigüe. Il faut bien comprendre que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p)$ signifie simplement la valeur au point $(x_1, \ldots, x_p)$ de la dérivée partielle de f par rapport à la j-ième composante. La notation $\mathrm{D}_j f$ ne présente pas cette ambiguïté.

L'existence des dérivées partielles en a de f n'implique pas la continuité de f. Ainsi, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

n'est pas continue en (0,0).

En effet :

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Toutefois, elle admet des dérivées partielles en (0, 0) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.3. Fonctions dérivées partielles

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième composante en tout point de U, on définit sur U la j-ième fonction dérivée partielle :

$$\mathrm{D}_j f : \begin{cases} U & \to F \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto \mathrm{D}_j f(x_1, \ldots, x_p) \end{cases}$$

Exemple :

■ Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit G sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$G(x, y) = g(x + y) + g(x - y).$$

Calculer les dérivées partielles, si elles existent, de la fonction G.

• Le raisonnement le plus simple est le suivant.

À y fixé, l'application $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = G(x, y) = g(x + y) + g(x - y)$ est dérivable car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = g'(x + y) + g'(x - y).$$

À x fixé, l'application $\psi : y \mapsto \psi(y) = G(x, y) = g(x + y) + g(x - y)$ est dérivable car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\psi'(y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = g'(x + y) - g'(x - y).$$

Rapport ENS, 2000

« Le calcul différentiel élémentaire en dimension 2 est source de grandes difficultés. »

▶ *Pour s'entraîner : ex. 3.*

2.4. Dérivées directionnelles et dérivées partielles d'une application différentiable

Théorème 10

Soit a dans U et f une application de U dans F différentiable en a.

Pour tout vecteur non nul v de E, f admet en a une dérivée selon le vecteur v donnée par :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d} f(a)(v)$$

Démonstration

Fixons un vecteur non nul v de E. Il existe un réel δ tel que, pour tout t de $]-\delta, \delta[$, $a + tv \in U$. Puisque f est différentiable en a :

$$f(a + tv) = f(a) + \mathrm{d} f(a)(tv) + \|tv\|_E \varepsilon(tv).$$

La linéarité de $\mathrm{d} f(a)$ entraîne :

$$f(a + tv) = f(a) + t\,\mathrm{d} f(a)(v) + t\alpha(t)$$

avec $\alpha(t) = \mathrm{sgn}(t)\|v\|_E \varepsilon(tv)$.

On en déduit $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \mathrm{d} f(a)(v)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(e_1, \dots, e_p)$. On sait que les dérivées partielles de f en un point sont les dérivées directionnelles en ce point, selon les vecteurs de la base canonique.

Corollaire 10.1

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans F différentiable en a.

- Les p dérivées partielles de f en a existent et :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad \mathrm{D}_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}\, f(a)(e_i)$$

- Pour tout vecteur $v = (h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$ de $\mathbb{R}^p$:

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}\, f(a)(v) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a)$$

Démonstration

$$\mathrm{d}\, f(a)(v) = \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{d}\, f(a)(e_i) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a).$$

La formule :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a)(h) + \|h\|_p \varepsilon(h)$$

est une formule de Taylor à l'ordre 1 pour les fonctions de plusieurs variables.
D'un point de vue pratique, elle indique que, pour h petit, l'accroissement de f en a :

$$f(a+h) - f(a)$$

est égal, en première approximation, à :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \mathrm{D}_i f(a).$$

Une application intéressante de ceci est le calcul d'erreurs pour les fonctions de plusieurs variables.

Application 2

Exemples de fonctions non différentiables

On définit les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) *Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ alors qu'elle admet des dérivées partielles en ce point.*

2) a) *Montrer que g est continue en $(0,0)$ et admet, en ce point, des dérivées directionnelles selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.*

b) *Montrer que, cependant, g n'est pas différentiable en $(0,0)$.*

1) L'application f a été étudiée précédemment.

- Elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

- Si f était différentiable en $(0,0)$, elle serait continue en ce point.

Un simple passage en coordonnées polaires montre qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

On en déduit que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2) - Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $|g(x,y)| \leqslant |x|$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$.

La fonction g est continue en $(0,0)$.

- On note $a = (0,0)$ et $v = (h_1, h_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel $t \neq 0$,

$$\frac{g(a+tv) - g(a)}{t} = \frac{g(th_1, th_2)}{t} = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc la fonction g admet, en $(0,0)$, une dérivée selon le vecteur $v=(h_1,h_2)$ donnée par :

$$\mathrm{D}_v\, g(0,0)=\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} \qquad \textbf{(1)}$$

• En particulier, les dérivées partielles de g en $(0,0)$ s'obtiennent avec $v=(1,0)$ et $v=(0,1)$ respectivement. Soit :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0.$$

Si g était différentiable en $(0,0)$, on aurait alors, pour tout vecteur non nul $v=(h_1,h_2)$:

$$\mathrm{D}_v\, g(0,0)=h_1\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)+h_2\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=h_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Il y a contradiction entre **(1)** et **(2)**. La fonction g n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Application 3

Différentielle de la norme euclidienne

Soit $\big(E,(\|\|)\big)$ un espace vectoriel euclidien. Pour tout a de E, on note $g(a)=\|a\|$.

Nous avons montré dans l'application 1 que g est différentiable sur $E\setminus\{0_E\}$.

Montrer que g n'est pas différentiable en 0_E.

L'application g est continue sur E.

Cherchons si g admet des dérivées directionnelles en $(0,\dots,0)$.

Si $a=0_E$ et si v est un vecteur non nul de E, alors :

$$\frac{g(a+tv)-g(a)}{t}=\frac{\|tv\|}{t}=\mathrm{sgn}(t)\|v\|.$$

Cette fonction de t n'a pas de limite lorsque t tend vers 0. Ceci prouve que la fonction g n'admet aucune dérivée directionnelle en 0_E.
Elle n'est pas différentiable en 0_E.

Corollaire 10.2

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de F.

Soit U un ouvert de E, V un ouvert de F.

Pour toute application f de U dans F de coordonnées f_i dans la base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, différentiable sur U telle que $f(U)\subset V$ et toute application g de V dans $\mathbb{K}$ différentiable sur V, alors :

$$\forall\, j\in[\![1,p]\!] \quad \forall\, a\in U \quad \mathrm{D}_j(g\circ f)(a)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_i\, g(f(a))\,\mathrm{D}_j\, f_i(a).$$

Démonstration

Nous avons démontré que $g\circ f$ est différentiable sur U.

Pour tout j de $[\![1,p]\!]$ et tout a de U, on a :

$$\mathrm{D}_j(g\circ f)(a)=\mathrm{d}\,g(f(a))[\mathrm{d}\,f(a)(e_j)]=\mathrm{d}\,g(f(a))[\mathrm{D}_j\, f(a)]$$

$$=\mathrm{d}\,g(f(a))\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_j\, f_i(a)\varepsilon_i\right].$$

Or l'application $\mathrm{d}\,g(f(a))$ est linéaire.

$$\mathrm{D}_j(g\circ f)(a)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_j\, f_i(a)\,\mathrm{d}\,g(f(a))(\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_j\, f_i(a)\,\mathrm{D}_i\, g(f(a)).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Applications continûment différentiables

3.1. Définition et caractérisation d'une application de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 11

Soit f une application de U dans F différentiable sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- les dérivées partielles de f dans une base b de E sont continues sur U
- les dérivées partielles de f dans toute base b de E sont continues sur U ;
- pour tout vecteur non nul v de E, l'application $\mathrm{D}_v f$ est continue sur U.

Lorsque f vérifie ces conditions, elle est dite **continûment différentiable** ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 12

On note $(f_1, \dots, f_n)$ les applications coordonnées de f dans une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si ses applications composantes $f_1, \dots, f_n$ le sont aussi.

3.2. Exemples d'applications continûment différentiables

Revenons sur les exemples du paragraphe 1.2. Les applications étudiées sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

■ **1.** L'application $x \mapsto 0_{\mathcal{L}(E,F)}$ est continue.

Théorème 13

Toute application constante de E dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et la différentielle en tout point de E est $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

■ **2.** Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit $v \in E$. L'application $\mathrm{D}_v f : x \mapsto \mathrm{d} f(x)(v) = f(v)$ est constante.

Théorème 14

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et :

$$\forall x \in E \quad \mathrm{d} f(x) = f$$

■ **3.** Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Pour tout $v = (h, k)$ non nul fixé dans $E \times F$, l'application

$$\mathrm{D}_v B \ (x, y) \mapsto B(h, y) + B(x, k)$$

est linéaire et les dimensions des espaces sont finies. Elle est continue.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, l'application B est continûment différentiable sur $E \times F$.

Théorème 15
Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E \times F$ et :
$\forall (x,y) \in E \times F \quad \forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}\, B(x,y)(h,k) = B(h,y) + B(x,k)$

Application 4

Caractérisation d'une application continûment différentiable

Soit f une application de U dans F différentiable sur U. Montrer que l'application f est continûment différentiable sur U si, et seulement si, la différentielle $\mathrm{d}f$ de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ est continue.

• On suppose que l'application $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Soit v quelconque dans E. Montrons que $\mathrm{D}_v f$ est continue en tout point a de U.

Soit b quelconque dans U.

$$\|\mathrm{D}_v f(b) - \mathrm{D}_v f(a)\|_F = \|\mathrm{d} f(a)(v) - \mathrm{d} f(b)(v)\|_F.$$

Les applications $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}f(b)$ sont linéaires et continues. Donc :

$$\|\mathrm{D}_v f(b) - \mathrm{D}_v f(a)\|_F \leqslant \|\mathrm{d} f(a) - \mathrm{d} f(b)\| \, \|v\|_E.$$

L'application $\mathrm{d}f$ est continue de U dans $\mathcal{L}(E,F)$. Par conséquent :

$$\lim_{b \to a} \|\mathrm{d} f(a) - \mathrm{d} f(b)\| = 0.$$

On en déduit $\lim\limits_{b \to a} \|\mathrm{D}_v f(b) - \mathrm{D}_v f(a)\|_F = 0$.

• Réciproquement, on suppose que f est continûment différentiable.

Soit b quelconque dans U. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Pour tout vecteur $v = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i e_i$ de E, on a :

$$\|\mathrm{d} f(a)(v) - \mathrm{d} f(b)(v)\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{p} |h_i| \, \|\mathrm{d} f(a)(e_i) - \mathrm{d} f(b)(e_i)\|_F.$$

Choisissons $\|v\|_E = \max\{|h_i| ; i \in [\![1,p]\!]\}$.

$$\|\mathrm{d} f(a)(v) - \mathrm{d} f(b)(v)\|_F \leqslant \|v\|_E \sum_{i=1}^{p} \|\mathrm{d} f(a)(e_i) - \mathrm{d} f(b)(e_i)\|_F$$

$$\leqslant \|v\|_E \sum_{i=1}^{p} \|\mathrm{D}_i f(a) - \mathrm{D}_i f(b)\|_F.$$

Or les applications $\mathrm{D}_i f$ sont continues en a.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_i > 0 \quad \forall b \in U$$

$$\|b - a\|_E \leqslant \alpha_i \Rightarrow \|\mathrm{D}_i f(a) - \mathrm{D}_i f(b)\|_F \leqslant \frac{\varepsilon}{p}.$$

Notons $\alpha = \min\{\alpha_i ; i \in [\![1,p]\!]\}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall b \in U$$

$$\|b - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow$$

$$\forall v \in E \ \|\mathrm{d} f(a)(v) - \mathrm{d} f(b)(v)\|_F \leqslant \|v\|_E \varepsilon.$$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall b \in U$$

$$\|b - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|\mathrm{d} f(a) - \mathrm{d} f(b)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\lim_{b \to a} \|\mathrm{d} f(a) - \mathrm{d} f(b)\| = 0$$

Remarque : En dimension quelconque, cette caractérisation sert de définition d'une application continûment différentiable.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.3. Propriétés des applications continûment différentiables

Théorème 16

Soit f et g deux applications de U dans F continûment différentiables sur U, α et β deux scalaires non nuls.

Alors l'application $\alpha f + \beta g$ est continûment différentiable sur U.

Corollaire 16.1

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ des applications continûment différentiables sur U, à valeurs dans F, est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(U, F), +, .)$.

3.4. Le théorème fondamental

Le lien entre applications de classe $\mathcal{C}^1$ et applications différentiables est précisé par le théorème suivant.

Théorème 17

Si, dans une base de E, les dérivées partielles $D_j f$ de f existent et sont continues sur U, alors f est différentiable sur U.

De plus, f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Il suffit de montrer que chaque fonction coordonnée de f possède cette propriété. Par conséquent, on peut se limiter au cas des fonctions de U dans $\mathbb{R}$. Cette simplification permet d'utiliser l'égalité des accroissements finis.

Les dérivées partielles de f existent.

Les notations

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = f(x_1, \dots, x_p)$.

La norme de E utilisée est la norme infinie associée à la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de l'ouvert U.

Il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout v de E tel que $\|v\| < r, a + v \in U$.

Soit $v = \sum_{i=1}^{p} h_i e_i$ un tel vecteur de E. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on définit la fonction ψ_i sur $]a_i - r, a_i + r[$ par :

$$\psi_i(w) = f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, w, a_{i+1}, \dots, a_p).$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, $\psi_i \in \mathcal{C}^1(]a_i - r, a_i + r[, \mathbb{R})$ et :

$$\psi_i'(w) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, w, a_{i+1}, \dots, a_p) \qquad \textbf{(1)}$$

Le calcul

On a $f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{p} [\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j)]$ **(2)**.

Rapport ENS, 2000

« Le calcul différentiel élémentaire en dimension 2 est source de grandes difficultés. »

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Certaines parties du programme se sont révélées mal assimilées par beaucoup de candidats. C'est le cas du calcul différentiel à plusieurs variables (où tout ce qui dépasse les dérivées partielles reste trop souvent un mystère). »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'égalité des accroissements finis s'applique à ψ_j. Il existe w_j entre $a_j + h_j$ et a_j tel que : $\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j) = h_j \psi_j'(w_j)$ On déduit de **(1)** et **(2)** que :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} h_j \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1 + h_1, \ldots, a_{j-1} + h_{j-1}, w_j, a_{j+1}, \ldots, a_p) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right].$$

Donc : $$\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \leqslant \|h\|_E R(h) \qquad \textbf{(3)}$$

avec :

$$R(h) = \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1 + h_1, \ldots, a_{j-1} + h_{j-1}, w_j, a_{j+1}, \ldots, a_p) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|.$$

La continuité des dérivées partielles prouve que : $\lim_{h \to 0} |R(h)| = 0$ **(4)**

De **(3)** et **(4)** on déduit $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{\|h\|_E} = 0.$

La différentiabilité de f au point a en découle.

Montrons maintenant que, pour tout v de $E \setminus \{0_E\}$, l'application $\mathrm{D}_v f$ est continue sur U.

Pour tout vecteur $v = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$, $\mathrm{D}_v f = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f$.

Or les applications $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur U. L'application $\mathrm{D}_v f$ est continue sur U.

On convient que :
pour $i = 1$,

$$\psi_1(w) = f(w, a_2, \ldots, a_p) ;$$

pour $i = p$,

$$\psi_p(w) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_{p-1} + h_{p-1}, w).$$

Exemple : **L'application inverse sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$**

• $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue Det. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Montrons que l'application f de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On note $(E_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2, m_{i,j} = E_{i,j}^*(M)$.

$$M = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} m_{i,j} E_{i,j}$$

Les coordonnées de l'inverse d'une matrice :

$$A = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j} E_{i,j}$$

de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ sont des fonctions rationnelles $f_{i,j}$ des n^2 variables $a_{i,j}$.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si toutes ses applications coordonnées $f_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Or une fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les applications $f_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \frac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(A) = -A^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

► *Pour s'entraîner : exercices 4 à 6.*

3.5. Composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 18

Soit U un ouvert de E, V un ouvert de F et a un point de U.

Considérons une application f de U dans V continûment différentiable sur U et une application g de V dans un espace vectoriel normé G de dimension finie, continûment différentiable sur V.

Alors $g \circ f$ est continûment différentiable sur U.

Application 5

Distance d'un point mobile à un point fixe

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $\bullet$ et la norme associée $\|\ \|$. On note $O = (0,\dots,0)$.

Un point mobile M de $\mathbb{R}^n$ se déplace selon une loi horaire de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \end{cases}.$$

Soit A un point de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas sur la trajectoire du point mobile M.

Calculer :

$$\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{AM}(t)\|.$$

Notons $\psi(t) = \overrightarrow{AM}(t)$. Puisque :

$$\psi(t) = \overrightarrow{AO} + \varphi(t)$$

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout t de I :

$$\psi'(t) = \varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t).$$

Par ailleurs, posons $g(\vec{v}) = \|\vec{v}\|$. On a :

$$\|\overrightarrow{AM}(t)\| = g \circ \psi(t).$$

L'application $g = \|\ \|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur :

$$\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}.$$

L'application ψ ne s'annule pas.

D'après le corollaire 8.2 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\overrightarrow{AM}(t)\| = \mathrm{d}\,g(\psi(t))(\psi'(t))$$

L'*Application* 1 prouve que $\mathrm{d}\,g(a)(v) = \dfrac{a}{\|a\|} \cdot v$.

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\overrightarrow{AM}(t)\| = \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4 Matrice jacobienne et jacobien

4.1. Matrice jacobienne

On suppose l'application f différentiable sur U.

La matrice, relativement aux bases $(e_1, \dots, e_p)$ de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F de la différentielle de f au point a est appelée **matrice jacobienne** de f en a. Elle est notée $\mathrm{J}\, f(a)$.

Ses vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs images par $\mathrm{d}\, f(a)$ des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_p)$.

La matrice jacobienne $\mathrm{J}\, f(a)$ est la matrice à n lignes et p colonnes suivante :

$$\mathrm{J}\, f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \left(\mathrm{D}_j\ f_i(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Gustav Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).
Pédagogue renommé, ses travaux sur les fonctions elliptiques (Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum, 1829*) sont d'une grande importance en théorie des nombres.*
Dans un long mémoire de 1841 *(De determinantibus functionalibus), il étudie le déterminant fonctionnel qui porte maintenant son nom.*

Exemples :

■ Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - 2y, x + y^3, -3xy).$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$. La matrice jacobienne de f au point (x, y) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{J}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ 1 & 3y^2 \\ -3y & -3x \end{pmatrix}.$$

■ On considère les fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}$, étudiées dans l'*Application* 1 pour $E = \mathbb{R}^p$, euclidien :

$$f(a) = \|a\|^2 \quad \text{et} \quad g(a) = \|a\|$$

On choisit une base orthonormale de E.

• L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

Soit a de coordonnées $(a_1, \dots, a_p)$ un élément de E. La matrice jacobienne de f au point a est la matrice à une ligne et p colonnes :

$$\mathrm{J}\, f(a) = \begin{pmatrix} 2a_1 & \cdots & 2a_p \end{pmatrix}.$$

• L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E \setminus \{0_E\}$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de $\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. La matrice jacobienne de g au point a est la matrice à une ligne et p colonnes :

$$\mathrm{J}\, g(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{\|a\|} & \cdots & \dfrac{a_p}{\|a\|} \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Soit f dans $\mathcal{L}(E,F)$, de matrice A relativement aux bases choisies sur E et F. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et :

$$\forall a \in E \quad \mathrm{J}f(a) = A.$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 7.*

4.2. Jacobien

Dans ce paragraphe, $E = F$, $n = p$, U est un ouvert non vide de E.

Soit f une application différentiable de U dans E et a dans U.

Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de la matrice jacobienne de f en ce point.

Les applications composantes de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant notées $f_1, \ldots, f_n$, le jacobien de f au point a est noté :

$$\mathrm{Det}\mathrm{J}\ f(a) = \frac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(a)$$

Rapport X, 2001

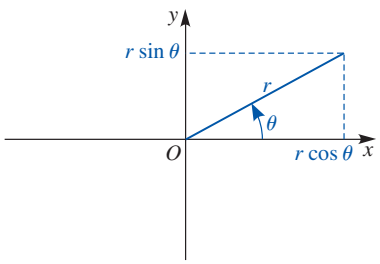
« Une majorité de candidats ne parvient pas à un calcul juste du jacobien de U. »

Exemples :

■ Soit l'application p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$p(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Vous reconnaissez là l'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires.



Doc. 2.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne est :

$$\mathrm{J}\ p(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et son jacobien est :

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

■ Étudions les coordonnées sphériques. Soit S l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

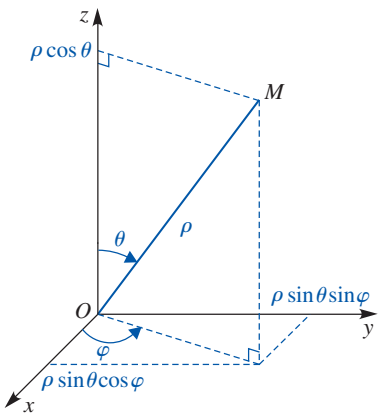
$$S(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

L'application S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et sa matrice jacobienne est :

$$\mathrm{J}\ S(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Son jacobien est :

$$\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$



Doc. 3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.3. Opérations algébriques sur les matrices jacobiennes

Théorème 19

Soit f et g deux applications de U dans F différentiables en A, α et β deux réels.

La matrice jacobienne de $\alpha f + \beta g$ en a est :

$$J(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha J(f)(a) + \beta J(g)(a)$$

Théorème 20

Soit U et V des ouverts respectifs de E et F, f de U dans V différentiable en a et g de V dans G différentiable en $f(a)$.

Alors l'application $g \circ f$ a pour matrice jacobienne en a la matrice :

$$J(g \circ f)(a) = J\,g(f(a))\,J\,f(a)$$

Corollaire 20.1

Soit f une application différentiable sur l'ouvert non vide U de E, à valeurs dans un ouvert V de F et g une application différentiable de V dans G.

On choisit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E, une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F et une base $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de G.

Les fonctions composantes de f sont notées $f_1, \ldots, f_n$.

Les fonctions composantes de g sont notées $g_1, \ldots, g_m$.

Alors :

$\forall a \in U \quad \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$\frac{\partial g_i o f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

$$D_j(g_i\, f) = \sum_{k=1}^{n} D_k\, g_i(f(a))\, D_j\, f_k(a)$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« ...le théorème donnant la matrice jacobienne d'une fonction composée. C'est grâce à lui que les candidats peuvent calculer les dérivées partielles. »

Démonstration :
$d(g \circ f)(a) = d\,g(f(a)) \circ d\,f(a)$.

4.4. Notation différentielle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ différentiable sur U.

$$\forall a \in U \quad \forall h \in \mathbb{R}^p \quad d\,f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \quad \text{en notant} \quad h = (h_1, \ldots, h_p).$$

Or, $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad h_i = e_i^*(h)$. Par conséquent :

$$\forall a \in U \quad d\,f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, l'application e_i^* est linéaire et :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{d}\, e_i^*(a) = e_i^*.$$

Nous pouvons écrire :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{d}\, f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \mathrm{d}\, e_i^*(a)$$

d'où :

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\ e_i^*.$$

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, l'application e_i^* est définie par $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_i$. Nous la noterons $\mathrm{d}\, x_i$.

On obtient l'expression de $\mathrm{d}\, f$:

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\, x_i.$$

Cette notation est intéressante. Elle a un sens aussi bien lorsque les x_i sont des variables que lorsqu'elles sont des fonctions.

Considérons p fonctions $x_1, \ldots, x_p$ définies sur un ouvert W de $\mathbb{R}^q$ telles que :

$$\forall (t_1, \ldots, t_q) \in W \quad (x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_p(t_1, \ldots, t_q)) \in U.$$

Notons F l'application de W dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t_1, \ldots, t_q) \in W \quad F(t_1, \ldots, t_q) = f(x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_p(t_1, \ldots, t_q)).$$

D'après le corollaire 20.1, on a :

$$\forall\, j \in [\![1, q]\!] \quad \frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

La différentielle de F définie sur W est :

$$\mathrm{d}\, F = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial t_j}\, \mathrm{d}\, t_j = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) \mathrm{d}\, t_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\, x_i.$$

Cette notation est très utile lorsqu'on effectue un changement de variables.

Exemple :

Soit $U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leqslant 0\}$ et f de U dans V définie par : $(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$. On a :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\, x = \cos\theta\, \mathrm{d}\, \rho - \rho\, \sin\theta\, \mathrm{d}\, \theta \\ \mathrm{d}\, y = \sin\theta\, \mathrm{d}\, \rho + \rho\, \cos\theta\, \mathrm{d}\, \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{d}\, \rho = \cos\theta\, \mathrm{d}\, x + \sin\theta\, \mathrm{d}\, y \\ \mathrm{d}\, \theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\, \mathrm{d}\, x + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\, \mathrm{d}\, y \end{cases}$$

On en déduit directement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta\ ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta\ ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 Les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes

5.1. Définition et premières propriétés

Soit U et V deux ouverts respectifs de E et F.

Une application f de U dans V est un **$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme** de U sur V, lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- f est bijective de U sur V ;
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Voici quelques propriétés immédiates.

Théorème 21

Soit U et V deux ouverts respectifs de E et F, U_1 un ouvert de U et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Alors la restriction de f à U_1 est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_1 sur $f(U_1)$.

Théorème 22

Soit U, V et W trois ouverts respectifs de E, F, et G, f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V et g un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Alors $g \circ f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur W.

Théorème 23

Soit U et V deux ouverts respectifs de E et F, et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Alors :

- $\dim E = \dim F$;
- l'application f^{-1} est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur U ;
- pour tout a de U, $\mathrm{d}(f^{-1})(f(a)) = (\mathrm{d}\, f(a))^{-1}$;
- pour tout a de U, la matrice jacobienne de f^{-1} en $f(a)$ est :

$$\mathrm{J}\, f^{-1}(f(a)) = [\mathrm{J}\, f(a)]^{-1}$$

Démonstration

L'application f est bijective de U sur V. Donc :

$$f^{-1} \circ f = I_U \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = I_V.$$

Pour tout a de U, l'application f est différentiable en a et l'application f^{-1} est différentiable en $f(a)$. En prenant les différentielles de $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$ on en déduit $\mathrm{d}(f^{-1})(f(a)) = (\mathrm{d}\, f(a))^{-1}$.

On remarque que $\mathrm{d}\, f(a)$ est dans ce cas un isomorphisme de E dans F. Cette situation exige $\dim E = \dim F$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Une application aux arcs paramétrés

Soit Γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ d'un espace vectoriel E de dimension 2 ou 3 et (I, f) une paramétrisation de Γ. On suppose, de plus, que l'arc est régulier :

$$\forall t \in I \quad f'(t) \neq 0_E.$$

Soit g un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de E sur F.

Alors $(I, g \circ f)$ définit un arc paramétré $g(\Gamma)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de F.

$$\forall t \in I \quad (g \circ f)'(t) = \mathrm{d}\, g(f(t))(f'(t)).$$

Or $\mathrm{d}\, g(f(t))$ est un isomorphisme et $f'(t) \neq 0_E$. Donc $(g \circ f)'(t) \neq 0_F$.

L'arc $g(\Gamma)$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit Δ la tangente à Γ au point $f(t)$. Elle est dirigée par $f'(t)$.

La tangente à $g(\Gamma)$ au point $g(f(t))$ est dirigée par $\mathrm{d}\, g(f(t)(f'(t))$.

Corollaire 23.1

L'image d'un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^1$ par un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 8.*

Mensa

5.2. Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 24

Soit U un ouvert de E et f une application injective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{Det}_{\mathrm{J}}\, f(a) \neq 0$$

Alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Conformément au programme, nous admettrons le résultat ci-contre.

Corollaire 24.1 Coordonnées polaires

L'application $\varphi : (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leqslant 0\}$ et l'application réciproque est :

$$\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\mathrm{Arctan}\, \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Démonstration

Soit (x, y) dans $\mathbb{R}^2$. Notons $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Il existe un unique θ dans $]-\pi, \pi]$ tel que $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. De plus $\theta = \pi \iff (y = 0 \text{ et } x \leqslant 0)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit que φ est injective sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ et que $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0); x \leqslant 0\}$.

$$\forall (\rho,\theta) \in U \quad \mathrm{DetJ}(\varphi)(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\forall (\rho,\theta) \in U \quad \mathrm{DetJ}(\varphi)(\rho,\theta) \neq 0.$$

D'après le *théorème* 24, l'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0); x \leqslant 0\}$. Déterminons l'application réciproque.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0); x \leqslant 0\}$ et tout (ρ,θ) de $U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$, on a :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \text{car} \quad \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Par conséquent, l'application φ^{-1} est définie par $(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 9.*

6 Fonctions numériques continûment différentiables

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un ouvert non vide U de E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^1(U)$.

De nombreux résultats concernant les fonctions à valeurs vectorielles sont démontrés en étudiant les fonctions coordonnées qui sont des fonctions à valeurs réelles.

6.1. L'algèbre $\mathcal{C}^1(U)$

Théorème 25

Soit f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U.

■ Pour tout vecteur non nul v de E, la fonction produit fg admet une dérivée directionnelle selon v au point a :

$$\mathrm{D}_v\, fg(a) = f(a)\,\mathrm{D}_v\, g(a) + g(a)\,\mathrm{D}_v\, f(a)$$

■ Pour tout j de $[\![1, p]\!]$, la fonction produit fg admet une dérivée partielle en a par rapport à la j-ième composante :

$$\frac{\partial fg}{\partial x_j}(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ La fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :
$$\mathrm{d}\, fg(a) = f(a)\,\mathrm{d}\, g(a) + g(a)\,\mathrm{d}\, f(a)$$

Démonstration

• On pose :

$$\varphi(t) = f(a+tv), \gamma(t) = g(a+tv) \quad \text{et} \quad \psi(t) = fg(a+tv) = f(a+tv)g(a+tv).$$

Puisque a est un point de l'ouvert U, il existe un intervalle $]-\delta,\delta[$ de $\mathbb{R}$ tel que φ, γ et ψ soient définies sur $]-\delta,\delta[$.

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc φ et γ sont dérivables en 0, avec :
$$\varphi'(0) = \mathrm{D}_v\, f(a) \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = \mathrm{D}_v\, g(a).$$

On en déduit que $\psi = \varphi\gamma$ est dérivable en 0, avec :

$$\psi'(0) = \varphi(0)\gamma'(0) + \gamma(0)\varphi'(0).$$

Par définition des dérivées directionnelles, fg admet une dérivée directionnelle selon v au point a donnée par :

$$\mathrm{D}_v\, fg(a) = f(a)\,\mathrm{D}_v\, g(a) + g(a)\,\mathrm{D}_v\, f(a) \qquad \textbf{(1)}.$$

• L'existence des dérivées directionnelles entraîne l'existence des dérivées partielles et, d'après **(1)**,
$$\frac{\partial fg}{\partial x_j}(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad \textbf{(2)}.$$

• La formule **(2)** est valable pour tout a de U. On en déduit que fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Les deux dernières formules demandées découlent de **(2)**.

Corollaire 25.1
L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}(U)$ des applications continues de U dans $\mathbb{R}$.

En utilisant les propriétés de l'inverse d'une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vous démontrerez de manière similaire le théorème suivant :

Théorème 26
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U tel que $f(a) \neq 0$.

■ Il existe une boule ouverte B, de centre a, incluse dans U et telle que :
$$\forall b \in B \quad f(b) \neq 0$$

■ Pour tout vecteur non nul v de E, la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une dérivée directionnelle selon v au point a :

$$\mathrm{D}_v \frac{1}{f}(a) = \frac{-1}{f^2(a)}\mathrm{D}_v\, f(a)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Pour tout j de $[\![1, p]\!]$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en a par rapport à la j-ième composante :

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = \frac{-1}{f^2(a)}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

■ La fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et, de plus :

$$\mathrm{d}\,\frac{1}{f}(a) = \frac{-1}{f^2(a)}\,\mathrm{d}\,f(a)$$

Traduction algébrique de ce résultat :
les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ sont les fonctions qui ne s'annulent en aucun point de U.

Toute fonction polynomiale de n variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

6.2. Le gradient

Dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$, et la base $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthogonale.

Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(U)$. Nous savons que, pour tout a de U, la différentielle de f en a est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur E. Donc, il existe un unique vecteur de E, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ ou $\text{grad}\, f(a)$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\,f(a)(h) = (\text{grad}\, f(a) \mid h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

La définition du gradient de f par la formule ci-contre est la plus utilisée. Elle donne les composantes du gradient dans la base orthonormale de E.
Ce n'est pas une définition intrinsèque puisqu'elle dépend, *a priori*, de la base utilisée pour faire les calculs.
La définition donnée plus haut est plus abstraite, mais ne dépend pas de la base utilisée pour faire les calculs.

Le vecteur $\text{grad}\, f(a)$ est appelé **gradient de f au point a.**

Donc, en tout point a de U, les composantes de $\text{grad}\, f(a)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$ sont :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$$

Exemple :

Soit E un espace euclidien. Son produit scalaire est noté $\bullet$. $\vec{u}$ est un vecteur non nul de E et f l'application définie sur E par :

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \bullet \vec{u}.$$

On fixe $\vec{x}$ dans E. En développant le produit scalaire, on obtient, pour tout vecteur $\vec{h}$:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{h} \bullet \vec{u}.$$

L'application $\vec{h} \mapsto \vec{h} \bullet \vec{u}$ est linéaire, c'est donc la différentielle de f en $\vec{x}$.

Ainsi $\mathrm{d}\,f(\vec{x})$ est le produit scalaire par $\vec{u}$. Par définition du gradient :

$$\vec{u} = \text{grad}\, f(\vec{x}).$$

Rapport Centrale, 1998
« Le gradient en coordonnées polaires est au programme. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Le gradient et les coordonnées polaires

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique est notée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout réel θ, on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le but de cette application est d'exprimer grad $f(x,y)$ en fonction des coordonnées polaires (r,θ) de (x,y). Pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, on pose :

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1) *Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.*

2) *En déduire une expression de grad $f(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g et des coordonnées polaires de (x,y).*

1) On note p l'application :

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\} \\ (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. Par définition, $g = f\circ p$, donc g est la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. La matrice jacobienne de p est :

$$\mathrm{J}p(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$:

$$\mathrm{J}g(r,\theta) = \mathrm{J}f(x(r,\theta), y(r,\theta))\,\mathrm{J}p(r,\theta) \qquad \textbf{(1)}$$

Pour alléger les notations, on écrit (x,y) au lieu de $(x(r,\theta), y(r,\theta))$.

Par définition des matrices jacobiennes, l'égalité **(1)** donne :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) r\cos\theta \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

2) En inversant le système **(2)** on déduit pour tout $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\sin\theta \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\sin\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\cos\theta \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Par définition :

$$\text{grad } f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}$$

On déduit de **(3)** :

$$\text{grad } f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\vec{u}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\vec{v}(\theta).$$

Théorème 27

Soit f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans E et a un point de U.

La fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :

$$\text{grad } fg(a) = f(a)\text{grad } g(a) + g(a)\text{grad } f(a)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 28

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U tel que $f(a) \neq 0$.

- Il existe une boule ouverte B, de centre a, incluse dans U et telle que :

$$\forall b \in B \quad f(b) \neq 0$$

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, et de plus :

$$\text{grad}\,\frac{1}{f}(a) = \frac{-1}{f^2(a)}\text{grad}\, f(a)$$

► *Pour s'entraîner : ex. 10.*

6.3. Extremum local d'une fonction numérique

L'ensemble U est un ouvert non vide de E et f est une application de U dans $\mathbb{R}$.

- La fonction f admet un **maximum local** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap U \quad f(x) \leqslant f(a).$$

Dans ce cas, le maximum local est le réel $f(a)$.

- La fonction f admet un **maximal local strict** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- La fonction f admet un **minimum local** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap U \quad f(x) \geqslant f(a).$$

Dans ce cas, le minimum local est le réel $f(a)$.

- La fonction f admet **minimum local strict** au point a de U si :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

- La fonction f admet un **extremum local** au point a de U si f admet un minimum local ou un maximum local en a.

Théorème 29

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

En tout point a de l'ouvert U en lequel f admet un extremum local :
- les dérivées partielles de f sont nulles.
- la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f est l'application nulle.

Rapport ENS, 2000

« Les conditions nécessaires et / ou suffisantes pour un extremum sont souvent mal comprises (y compris pour les fonctions d'une variable), un nombre trop élevé de candidats pensent encore que si la dérivée s'annule, la fonction a un extremum local. Plus généralement, les fonctions de plusieurs variables semblent être un obstacle insurmontable pour beaucoup de candidats. »

Il revient au même de dire que la fonction f admet un extremum local au point a de l'ouvert U si et seulement s'il existe une boule de centre a, $B(a,r)$, telle que l'application $x \mapsto f(x) - f(a)$ soit de signe constant sur $B(a,r)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit j quelconque dans $[\![1, p]\!]$.

L'application $g : t \mapsto f(a + t\,e_j)$ est définie et dérivable sur un voisinage de 0. Elle admet un extremum local en 0. Par conséquent :

$$g'(0) = 0.$$

Or :

$$g'(0) = \mathrm{D}_j\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Donc :

$$\forall\, j \in [\![1, p]\!] \quad \mathrm{D}_j\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0.$$

Corollaire 29.1

On suppose que $(E, (\ |\ ))$ est un espace euclidien.

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

En tout point a de l'ouvert U en lequel f admet un extremum local, le gradient $\operatorname{grad} f(a)$ de f est nul.

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

On appelle **point critique** de f tout point a de U tel que :

$$\forall\, j \in [\![1, p]\!] \quad \mathrm{D}_j\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0.$$

Exemples :

■ La fonction f définie par :

$$f(x, y) = \sqrt{47 - x^2 - y^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le disque ouvert :

$$\left\{(x, y); |x^2 + y^2 < 47\right\}.$$

Son gradient est nul en $(0, 0)$ et en ce point f admet un maximum local (il s'agit même d'un maximum global) (*doc.* 4).

■ La fonction g définie par $g(x, y) = x^2 - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient est nul en $(0, 0)$ mais g n'a pas d'extremum local en ce point (*doc.* 5).

Nous avons vu, dans le *chapitre* 3 du tome *Analyse* 1 , qu'une fonction numérique continue sur un compact K de E, est bornée et atteint ses bornes.

Dans ce cas, les extrema globaux de f existent.

$\exists x_0 \in K\ \forall x \in K\ f(x) \leqslant f(x_0)$

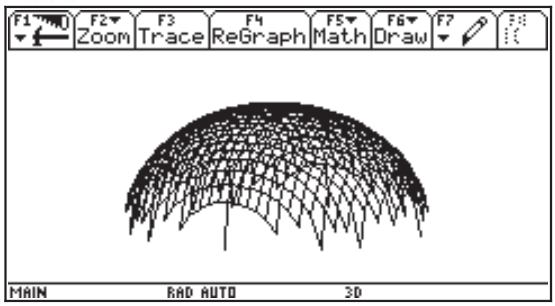
$\exists x_1 \in K\ \forall x \in K\ f(x) \geqslant f(x_1)$

Il peut exister d'autres extrema (locaux) sur K .

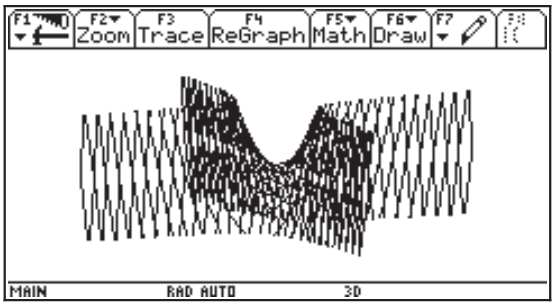
Ce résultat est utile ; mais, attention ! un compact de E n'est pas un ouvert de E.

Rapport CCP, 1997

« Il reste théoriquement loisible aux examinateurs de faire chercher les extrema absolus de fonctions de deux ou trois variables. [...] peu de candidats songent à utiliser des arguments de compacité pour montrer leur existence, puis une étude au bord et aux points critiques pour déterminer leur valeur. »



Doc. 4.



Doc. 5.

► ***Pour s'entraîner : ex. 11 et 12.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 7

Un exemple de calcul d'extrema locaux

Déterminer les extrema locaux de la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$$

- **Calcul de la différentielle de** f

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, f(x,y) &= (4x^3 - 8(x-y))\,\mathrm{d}\,x \\ &\quad +(4y^3 + 8(x-y))\,\mathrm{d}\,y. \end{aligned}$$

- Détermination des points critiques :

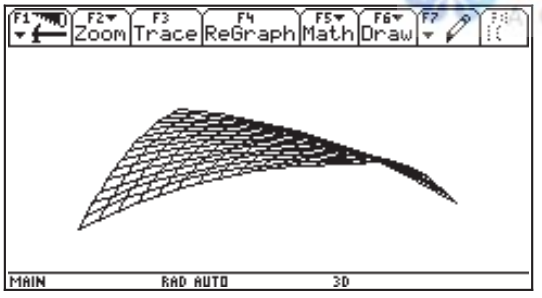
La différentielle $\mathrm{d}\, f(x,y)$ en (x,y) est l'application nulle si et seulement si :

$$\begin{cases} 4x^3 - 8(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 8(x-y) = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$.

- **Étude en** $(0,0)$

Aidons-nous de la TI qui sait représenter les surfaces données par une formule du type $z = f(x,y)$ (*doc.* 6).



Doc. 6. *Tracé de* $z = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$ *pour* (x,y) *dans* $[-0,5;0,5] \times [-0,5;0,5]$.

Sur le tracé, il n'apparaît pas clairement d'extremum. En effet :

$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad f(x,x) = 2x^4 > 0$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x,-x) = 2x^4 - 16x^2 = 2x^2(x^2-8)$

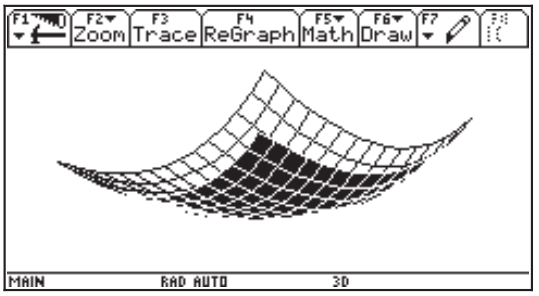
Donc : $\forall\, x \in\,]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[\,\setminus\{0\}$, $f(x,-x) < 0$

f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

- **Étude en** $(2,-2)$ **et** $(-2,2)$

Puisque $f(-x,-y) = f(x,y)$, si f a un minimum local en $(2,-2)$, elle en a aussi un en $(-2,2)$.

Ensuite, un travail expérimental avec la TI permet de constater que f a sans doute un minimum local en $(2,-2)$ (donc aussi en $(-2,2)$).



Doc. 7. *Tracé de* $z = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$ *pour* (x,y) *dans* $[1,5;2,5] \times [-2,5;-1,5]$.

Calculons, en ordonnant les termes en fonction de leurs puissances :

$$\begin{aligned} &f(2+h,-2+k) - f(2,-2) \\ &= (20h^2 + 8hk + 20k^2) + (8h^3 - 8k^3) + (h^4 + k^4). \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de cette expression, utilisons les coordonnées polaires et la norme euclidienne. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} &f(2+h,-2+k) - f(2,-2) \\ &= 20\rho^2\left(1 + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{5}\right) + 8\rho^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta) \\ &\qquad + \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta). \end{aligned}$$

Minorons :

- $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{5} = \dfrac{\sin 2\theta}{5} \geqslant -\dfrac{1}{5}$
- $|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leqslant 2$
- $\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \geqslant 0$

Et nous en déduisons :

$$\|(h,k)\| = \rho < 1 \Rightarrow f(2+h,-2+k) - f(2,-2) \geqslant 0.$$

Ceci prouve que f admet un minimum local au point $(2,-2)$.

Ce minimum vaut $f(2,-2) = -32$.

Et, par symétrie, il en est de même en $(-2,2)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6.4. Inégalité des accroissements finis

Théorème 30

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$, a un point de U et h dans E tels que :

- $[a, a+h] \subset U$;
- f continue sur $[a, a+h]$;
- f différentiable en tout point de $]a, a+h[$;
- $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]a, a+h[\quad \|\mathrm{d}\, f(x)\| \leqslant M$.

Alors :

$$|f(a+h) - f(a)| \leqslant M\|h\|.$$

Démonstration

Soit g l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad g(t) = f(a+th).$$

L'application g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall t \in [0,1] \quad g'(t) = \mathrm{d}\, f(a+th)(h).$$

Par conséquent :

$$\forall t \in [0,1] \quad |g'(t)| \leqslant \|\mathrm{d}\, f(a+th)\|\|h\| \leqslant M\|h\|.$$

L'inégalité des accroissements finis s'applique à g sur $[0,1]$.

On en déduit :

$$|f(a+h) - f(a)| \leqslant M\|h\|.$$

Corollaire 30.1

Soit U un ouvert convexe de E et f dans $\mathcal{C}^1(U)$.

On suppose que :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad \|\mathrm{d}\, f(x)\| \leqslant M$$

Alors :

$$\forall (a,b) \in U^2 \quad |f(b) - f(a)| \leqslant M\|b-a\|$$

Théorème 31

Soit U un ouvert étoilé et f une application de U dans $\mathbb{R}$ différentiable sur U. Alors la différentielle $\mathrm{d}\, f$ est nulle sur U si et seulement si l'application f est constante.

Démonstration

On applique le théorème 30 à f sur le segment $[a,x]$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Le calcul différentiel et intégral à plusieurs variables reste catastrophique : continuité, notion de matrice jacobienne, caractérisation des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$ [...] tout ce chapitre est peu ou mal connu. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 8

Expression de Arctan a + Arctan b pour $ab \neq 1$

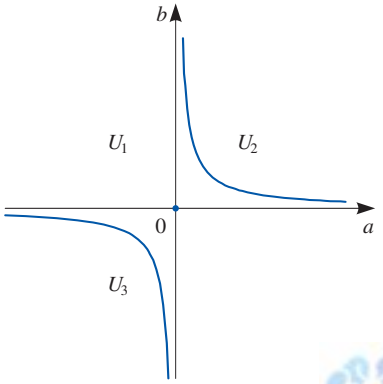
Soit :

$$U_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, ab < 1\}$$
$$U_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, ab > 1 \text{ et } a > 0\}$$
$$U_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, ab > 1 \text{ et } a < 0\}$$

et f l'application :

$$(x,y) \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } y - \text{Arctan } \frac{x+y}{1-xy}$$

Montrer que f est constante sur chaque U_i.



Doc. 8. *U_3 et U_2 sont des ouverts convexes. U_1 est un ouvert étoilé.*

Soit φ l'application $(x,y) \mapsto (xy,x)$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$U_1 = \varphi^{-1}(]-\infty,1[\times\mathbb{R})$$
$$U_2 = \varphi^{-1}\left(]1,+\infty[\times\mathbb{R}^{+*}\right)$$
$$U_3 = \varphi^{-1}\left(]1,+\infty[\times\mathbb{R}^{-*}\right)$$

Les ensembles U_1, U_2 et U_3 sont les images réciproques de trois ouverts par une application continue sur $\mathbb{R}^2$. Ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

U_2 et U_3 sont convexes, car l'application :

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$$

est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$, concave sur $\mathbb{R}^{-*}$.

U_1 est étoilé par rapport au point (0,0).

On vérifie que les dérivées partielles de f sont identiquement nulles sur chaque U_i.

Il existe trois constantes k_1, k_2 et k_3 telles que :

$$\forall i \in [\![1,3]\!] \quad \forall (a,b) \in U_i \quad f(a,b) = k_i$$

Déterminons ces constantes.

Pour $a = b = 0$, on trouve $k_1 = 0$.

Pour $a = b > 0$, on trouve :

$$2\text{Arctan } a - \text{Arctan } \frac{2a}{1-a^2} = k_2$$

La limite lorsque a tend vers $+\infty$ donne : $k_2 = \pi$.

Un calcul analogue donne $k_3 = -\pi$.

► *Pour s'entraîner : ex. 13.*

7 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$

7.1. Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Soit f une application de $\mathcal{C}^1(U,F)$ et un entier $k \geqslant 2$.

L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si ses fonctions dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.
Elle est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U pour tout entier k.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, les fonctions dérivées partielles des fonctions dérivées partielles de f sont notées de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a).$$

On note également :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \mathrm{D}_i\,\mathrm{D}_j\,f(a).$$

Les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ sont appelées fonctions dérivées partielles d'ordre 2.

De manière analogue, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on définit les fonctions dérivées partielles d'ordre k de f de la manière suivante.

Pour tout k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de $[\![1, p]\!]^k$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\ldots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\right)\right).$$

Si, pour tout entier $k \geqslant 1$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une application de U dans F.

Il est immédiat que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et seulement si chaque fonction composante de f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. De plus, dans ce cas, les fonctions composantes de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ sont les $\dfrac{\partial^k f_i}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$.

7.2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit U un ouvert non vide de E.

- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F est noté $\mathcal{C}^k(U, F)$.
- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^k(U)$.

Théorème 32

Soit un entier $k \geqslant 1$, $(f, g) \in \mathcal{C}^k(U, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Pour tout k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de $[\![1, p]\!]^k$:

$$\frac{\partial^k(\alpha f + \beta g)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \alpha \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} + \beta \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \qquad \textbf{(1)}$$

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

- Pour tout j de $[\![1, p]\!]$, l'application $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(U, F)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U, F)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 33

Soit un entier $k \geqslant 1$.

- Le produit de deux fonctions de $\mathcal{C}^k(U)$ est dans $\mathcal{C}^k(U)$.
- L'ensemble $\mathcal{C}^k(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U)$.

Démonstration

Le théorème est vrai pour $k = 1$.

Soit un entier $k \geqslant 2, (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ un k-uplet de $[\![1, p]\!]^k$ et (f, g) deux éléments de $\mathcal{C}^k(U)$.

Les formules :

$$\frac{\partial fg}{\partial x_{i_k}} = f\frac{\partial g}{\partial x_{i_k}} + g\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k (fg)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_{i_k}} + g\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)$$

permettent de démontrer le théorème par récurrence pour tout entier $k \geqslant 1$.

Théorème 34

Soit un entier $k \geqslant 1$, f une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert non vide U de E, à valeurs dans un ouvert V de F, et g une application de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans G.

Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Mensa ACADEMY

Exemples :

- Toute fonction polynomiale de n variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Les dérivées partielles d'une fonction polynôme de n variables sont aussi des fonctions polynômes de n variables. Ceci permet de prouver par récurrence qu'une fonction polynôme de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

- De même, pour une fonction rationnelle des n variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)}$$

où P et Q sont deux fonctions polynômes en $x_1, \ldots, x_n$, nous avons établi que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \backslash Z(Q)$ (avec $Z(Q) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Q(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$).

Les fonctions dérivées partielles de f sont de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x_i}Q - P\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}}{Q^2}.$$

Ce sont des fonctions rationnelles de n variables, définies sur le même ouvert U. Elles sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble.

Ceci permet de prouver par récurrence que toute fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 9

Permutation des composantes

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = f(y, x).$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de g en fonction de celles de f.

- On écrit :

$$g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) = f(y, x).$$

La fonction φ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) = (y, x) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g = f \circ \varphi$, donc g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **Calcul des dérivées partielles d'ordre 1**

On utilisera D_1 et D_2 pour indiquer la dérivation partielle par rapport à la première ou à la deuxième composante.

D'après le théorème 9, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$Jg(x, y) = J f(\varphi(x, y)) J\varphi(x, y),$$

soit :

$$(D_1 g(x, y), D_2 g(x, y)) = (D_1 f(y, x), D_2 f(y, x)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$D_1 g(x, y) = D_2 f(y, x)$$

et :

$$D_2 g(x, y) = D_1 f(y, x).$$

On en déduit la formule suivante, utile pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$D_1(f \circ \varphi) = (D_2 f) \circ \varphi \text{ et } D_2(f \circ \varphi) = (D_1 f) \circ \varphi \quad \textbf{(1)}.$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial v}(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(y, x).$$

- **Calcul des dérivées partielles d'ordre 2**

D'après **(1)** :

- $D_1(D_1(g)) = D_1((D_2 f) \circ \varphi) = D_2(D_2 f) \circ \varphi.$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(y, x).$$

- $D_2(D_2(g)) = D_2((D_1 f) \circ \varphi) = D_1(D_1 f) \circ \varphi.$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(y, x).$$

- $D_1(D_2(g)) = D_1((D_1 f) \circ \varphi) = D_2(D_1 f) \circ \varphi.$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(y, x).$$

- $D_2(D_1(g)) = D_2((D_2 f) \circ \varphi) = D_1(D_2 f) \circ \varphi.$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(y, x).$$

► *Pour s'entraîner : ex. 14.*

7.3. Le théorème de Schwarz

Théorème 35. Théorème de Schwarz

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans F, alors :

$$\forall a \in U \quad \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Conformément au programme, ce théorème est admis.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En d'autres termes, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, l'ordre de dérivation n'importe pas.

Ce résultat se généralise de façon immédiate à un ordre de dérivation $k \geqslant 2$, dès lors que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- **Étude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fonction rationnelle des deux variables (x,y) dont le dénominateur ne s'annule que pour $(x,y) = (0,0)$.

- **Continuité de f en $(0,0)$**

Il est immédiat que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $|f(x,y)| \leqslant |xy|$

On en déduit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ et la continuité de f en $(0,0)$.

- **Dérivées partielles de f en $(0,0)$**

f a des dérivées partielles en $(0,0)$, avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

- **Continuité des dérivées partielles**

Comme on l'a vu, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left[(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left[(x^2-3y^2)(x^2+y^2) - 2y^2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

Pour étudier la limite des dérivées partielles en $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\left[3\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta\cos(2\theta)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\left[\cos^2\theta - 3\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos(2\theta)\right]$$

La continuité des dérivées partielles de f en $(0,0)$ en découle.

- **Étude des dérivées partielles d'ordre 2 en (0, 0)**

Vous vérifierez que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = +1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Ne pas confondre Hermann Schwarz (1843-1921), auquel nous devons ce théorème et dont le travail porta essentiellement sur les fonctions de plusieurs variables, la théorie du potentiel et les surfaces, avec Laurent Schwartz, mathématicien français, né en 1915, et auteur de la théorie des distributions, qui lui valut la médaille Fields en 1950.

Cet exemple est dû à Péano (1858-1935), dont le travail pour fonder rigoureusement les mathématiques sur un ensemble d'axiomes cohérents est très important. On lui doit l'introduction en mathématiques de nombreux symboles tels que : $\in$, $\cup$, $\cap$, et les axiomes qui définissent rigoureusement l'ensemble $\mathbb{N}$ et permettent notamment la démonstration par récurrence.

Pierre Simon LAPLACE (1749-1827), mathématicien français. Ses travaux en Astronomie sont d'une importance considérable.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• **Conclusion**

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

Application 10

Le laplacien et les coordonnées polaires

Dans cette application, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Le laplacien de f est la fonction Δf définie par :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique est notée $(\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout réel θ, on note :

$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ *et* $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

Pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, on pose :

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Le but de cette application est d'exprimer $\Delta f(x,y)$ en fonction des coordonnées polaires (r,θ) de (x,y) et des dérivées partielles de g.

1) *Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$ en fonction de celles de f.*

2) *En déduire une expression de $\Delta f(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g et des coordonnées polaires de (x,y).*

1) L'application $p : (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et : $g = f\circ p$.

Donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

Le calcul des dérivées partielles d'ordre 1 de g a été fait à l'application 1.

On a, pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)r\cos\theta \end{cases}$$

• On fixe θ dans $\mathbb{R}$. L'application partielle $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout r de $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\right] + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\right]\\ &= \cos\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r}\right]\\ &+\sin\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r}\right]\end{aligned}$$

Tous calculs effectués, et sachant que f est de classe $\mathcal{C}^2$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y).$$

• On fixe r dans $\mathbb{R}^{+*}$. En procédant de même, on obtient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta) = -r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y).$$

2) On en déduit :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \Delta f(x,y).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7.4. $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et changement de variable

Soit f une application d'un ouvert U de E dans un ouvert V de F.
On dit que f est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de U sur V lorsque :

- f est une application bijective de U sur V ;
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ;
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.

Cette définition impose que $\dim E = \dim F$.

On dit que l'application f est un **$\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme** de U sur V lorsque f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V pour tout entier naturel k.

Le théorème 24 se généralise :

Théorème 36
Soit f une application de U dans F injective, de classe $\mathcal{C}^k (k \geqslant 1)$ sur U et telle que :

$$\forall a \in U \quad \text{Det J } f(a) \neq 0$$

Alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Démonstration

Le théorème 24 permet d'affirmer que $f(U)$ est un ouvert de F et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $f(U)$. Il suffit de démontrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. Notons $g = f^{-1}$.

Cette démonstration n'est pas exigible des étudiants.

Or :

$$\forall b \in f(U) \quad \exists\, !a \in U \quad b = f(a) \text{ et } \mathrm{d}\, g(b) = [\mathrm{d}\ f(a)]^{-1}$$

D'après l'exemple du paragraphe 3.4, l'application φ de $\mathcal{GL}(E,F)$ dans $\mathcal{GL}(F,E)$ définie par $\varphi(u) = u^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}(E,F)$.

On a :

$$\mathrm{d}\, g = \varphi \circ (\mathrm{d}\ f) \circ g.$$

L'application $\mathrm{d}\ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}(E,F)$ et $\mathrm{d}\,\varphi(u) : h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u$. On montre par récurrence que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une récurrence permet de prouver que l'application g est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$.

Corollaire 36.1. Coordonnées polaires
L'application $\varphi : (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0)\,;\, x \leqslant 0\}$ et l'application réciproque est :

$$\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\text{Arctan}\ \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 15 et 16.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7.5. Changement de variables dans une équation aux dérivées partielles

Changer de variables signifie composer avec un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Cette technique permet d'étudier et de résoudre certaines équations aux dérivées partielles d'ordre k.

Application 11

L'équation des cordes vibrantes

L'équation des cordes vibrantes est donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad \textbf{(E)}$$

où c est une constante strictement positive.

y est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

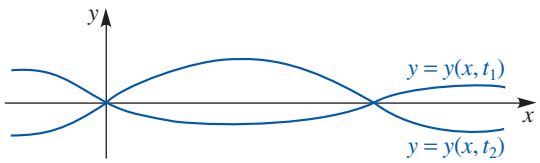
Doc. 10. *Machine analogique pour l'étude des cordes vibrantes (fin du XIXe siècle)*

La variable t représente le temps. La corde vibre dans le plan xOy.

À t fixé, le graphe de la fonction $x \mapsto y(x,t)$ représente la position de la corde à l'instant t.

À x fixé, l'application $t \mapsto y(x,t)$ représente la variation au cours du temps du point d'abscisse x de la corde.

1) *Résolution de l'équation **(E)** sur $\mathbb{R}^2$.*



Doc. 11. *Positions de la corde aux instants t_1 et t_2.*

Soit γ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(x,t) = (u(x,t), v(x,t))$ avec :

$$\begin{cases} u(x,t) = x + ct \\ v(x,t) = x - ct \end{cases}$$

a) *Prouver que γ est bijective et que γ et γ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Soit y une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $f = y \circ \gamma^{-1}$. Pour tout (x,t) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$y(x,t) = f(u(x,t), v(x,t)).$$

b) *Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f l'est. Montrer que y est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

c) *En déduire que y est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe deux fonctions d'une variable, G et H, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad y(x,t) = G(x-ct) + H(x+ct).$$

2) Une première condition initiale

Dans la suite du problème, Ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

*Montrer que l'équation **(E)** admet une unique solution sur $\mathbb{R}^2$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} y(x,0) = \psi(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (C_1)$$

(La fonction Ψ représente la position de la corde à l'instant $t = 0$. La condition $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ indique qu'en tout point de la corde, la vitesse à l'instant $t = 0$ est nulle.)

3) Une restriction physique

Dans ce qui précède, la corde est supposée de longueur infinie et sa position initiale est supposée connue sur toute sa longueur ($\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x,0) = \Psi(x)$). D'un point de vue physique, ce n'est pas réaliste.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

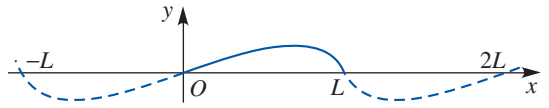
Dans cette question, on suppose la corde fixée aux points d'abscisse 0 *et* L *(avec* $L > 0$*) :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad \textbf{(C}_2\textbf{)}$$

Moyennant une hypothèse sur les dérivées secondes aux extrémités $x = 0$ *et* $x = L$*, le problème est résolu lorsque la position initiale est connue pour* x *dans* $[0, L]$.

a) *Montrer que, si l'équation* ***(E)*** *admet une solution vérifiant les conditions* ***(C₁)*** *et* ***(C₂)****, alors :*

- $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$;
- *la fonction* Ψ *est impaire,* $2L$*-périodique ;*
- $\Psi''(0) = \Psi''(L) = 0$.



Doc. 12.

b) *Soit* g *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *de* $[0, L]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

- $g(0) = g(L) = 0$;
- $g''(0) = g''(L) = 0$.

Prouver qu'il existe une unique solution y *de* ***(E)*** *telle que :*

$$\forall x \in [0,L] : \begin{cases} y(x,0) & = g(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) & = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(0,t) = y(L,t) = 0.$$

1) a) La fonction γ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On sait que toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc, γ et γ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) On a $y = f \circ \gamma$ et $f = y \circ \gamma^{-1}$. Puisque γ et γ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si y l'est.

Dans la suite, y et f sont supposées de classe $\mathcal{C}^2$.

- Par définition de γ :

$$u(x,t) = x + ct \quad ; \quad v(x,t) = x - ct \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 1 \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -c$$

Pour simplifier, on notera (u, v) au lieu de $(u(x,t), v(x,t))$.

Les règles de calcul sur les fonctions composées et le théorème de Schwarz permettent d'écrire :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - c\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) - 2c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v).$$

Finalement, pour tout (x,t) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u(x,t), v(x,t)).$$

Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si l'application f associée vérifie :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \qquad \textbf{(F)}$$

c) Soit f une solution de **(F)**.

- On fixe v dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(u,v) = 0.$$

L'application $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ est constante. La constante dépend de v.

$$\exists g(v) \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = g(v).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'application g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- On fixe u dans $\mathbb{R}$.

Soit G une primitive de g. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = g(v).$$

Donc il existe $H(u)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad f(u,v) = G(v) + H(u).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La fonction H ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La relation liant y et f permet de conclure que les solutions de **(E)** sont de la forme :

$$y(x,t) = G(x-ct) + H(x+ct) \qquad \textbf{(1)}$$

Réciproquement, si G et H sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction y définie par la relation **(1)** est évidemment solution de **(E)**.

2) • Supposons l'existence d'une solution y de **(E)** vérifiant la condition initiale $(\mathbf{C_1})$.

Soit G, H deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$y(x,t) = G(x-ct) + H(x+ct).$$

D'après (C_1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x,0) = G(x) + H(x) = \Psi(x)$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = cH'(x) - cG'(x) = 0.$$

Il existe une constante k telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G(x) + H(x) = \psi(x) \\ G(x) - H(x) = k \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; G(x) = \frac{\psi(x)+k}{2} \text{ et } H(x) = \frac{\psi(x)-k}{2}.$$

Ceci prouve que si l'équation **(E)** admet une solution y vérifiant $(\mathbf{C_1})$, alors :

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x+ct) + \Psi(x-ct)\right]$$

• Réciproquement, sachant que Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il est immédiat de prouver que la fonction définie par :

$$(x,t) \mapsto y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x+ct) + \Psi(x-ct)\right]$$

est solution du problème posé.

L'existence et l'unicité d'une solution de **(E)** vérifiant $(\mathbf{C_1})$ est démontrée.

3) a) Soit y une solution de **(E)** vérifiant $(\mathbf{C_1})$ et (C_2).

• $y(0,0) = 0 = \Psi(0)$ et $y(L,0) = 0 = \Psi(L)$.

• $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(0,t) = 0 = \frac{1}{2}\left[\Psi(ct) + \Psi(-ct)\right]$.

Donc Ψ est impaire.

• $\forall t \in \mathbb{R}$

$y(L,t) = 0 = \frac{1}{2}\left[\Psi(L+ct) + \Psi(L-ct)\right]$.

Or Ψ est impaire et $c > 0$. On en déduit :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \Psi(z+L) = \Psi(z-L) \qquad \textbf{(2)}$$

Donc Ψ est $2L$-périodique.

• Puisque Ψ est impaire et de classe $\mathcal{C}^2$, $\Psi''(0) = 0$.

De la formule **(2)**, on déduit $\Psi''(L) = \Psi''(-L)$. Mais Ψ est impaire, donc Ψ'' aussi. D'où :

$$\Psi''(L) = 0.$$

b) • **Existence d'une solution**

La fonction g est définie sur $[0,L]$ uniquement. On note Ψ la fonction impaire et $2L$-périodique dont la restriction à $[0,L]$ est g.

Par construction, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur chaque segment $[kL,(k+1)L]$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Puisque $g(0) = g(L) = 0$, Ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses supplémentaires :

$$\Psi''_d(0) = g''(0) = 0$$

et

$$\Psi''_g(L) = g''(L) = 0$$

vous permettront de conclure que Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Les questions précédentes prouvent que, dans ces conditions, la fonction y définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x+ct) + \Psi(x-ct)\right]$$

est solution de **(E)** et vérifie $(\mathbf{C_1})$. Par construction de Ψ, cette fonction est aussi telle que :

$$\forall x \in [0,L] : \begin{cases} y(x,0) = g(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(0,t) = y(L,t) = 0.$$

L'existence d'une solution au problème posé est démontrée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• **Unicité de la solution**

Supposons l'existence de deux fonctions y_1 et y_2 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, solutions de **(E)**, et telles que, pour $i = 1$ et $i = 2$:

$$\forall x \in [0, L] : \begin{cases} y_i(x,0) & = g(x) \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial t}(x,0) & = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_i(0,t) = y_i(L,t) = 0.$$

On pose $\Psi_i(x) = y_i(x,0)$. D'après **a)**, les fonctions Ψ_1 et Ψ_2 sont impaires et $2L$-périodiques. Leurs restrictions à $[0, L]$ coïncident. C'est g. Donc $\Psi_1 = \Psi_2$. La question **2)** permet de conclure que $y_1 = y_2$.

► *Pour s'entraîner : ex. 17 et 18.*

7.6. Formule de Taylor-Young

Dans ce paragraphe, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$.

Pour tout point A de U, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $B(A, \alpha) \subset U$.

Théorème 37. Formule de Taylor-Young

Soit f dans $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, où $U \subset \mathbb{R}^2$ et (a,b) un point de U.

Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout (h,k) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|(h,k)\| < \alpha$, on ait :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right] + o\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

Démonstration

Soit g l'application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad g(t) = f(a+th, b+tk).$$

L'application g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur [0,1]. Pour tout x de $[0,1]$:

$$g'(t) = \mathrm{d}\, f(a+th,b+tk)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk)k.$$

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th,b+tk)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th,b+tk)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th,b+tk)k^2.$$

On écrit la formule de Taylor avec reste intégral.

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 (1-t)\left[g''(t) - g''(0)\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On obtient :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right] + R(h,k)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

en notant :

$$R(h,k) = \int_0^1 (1-t)\left[g''(t) - g''(0)\right] \mathrm{d}t.$$

L'application $t \mapsto (1-t)$ est positive et g'' est continue sur [0,1]. D'après la formule de la moyenne (*exercice* 14 du *chapitre* 6 :

$$\exists\, \theta \in [0,1] \quad R(h,k) = \left[g''(\theta) - g''(0)\right] \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[g''(\theta) - g''(0)\right].$$

Choisissons la norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(h,k)\| = \max\left(|h|, |k|\right)$

$$|R(h,k)| \leqslant \frac{1}{2}\|(h,k)\|^2 \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \right| \right.$$
$$\left. +2\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \right| \right).$$

Donc $(a+\theta h, b+\theta k)$ tend vers (a,b) lorsque (h,k) tend vers (0,0).

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues.

D'où : $R(h,k) = o\left(\|(h,k)\|^2\right)$

► ***Pour s'entraîner : ex. 19.***

7.7. Existence d'un extremum en un point critique

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et (a,b) un point critique de f.

Alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

et :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right] + o\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

Nous allons étudier si f présente un extremum au point (a,b).

L'application :

$$Q : (h,k) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$.

Pour simplifier, notons :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ces notations sont connues sous le nom de **notation de Monge**.

La forme quadratique s'écrit :

$$Q : (h,k) \mapsto r(a,b)h^2 + 2s(a,b)hk + t(a,b)k^2.$$

Notons r, s et t à la place de $r(a,b)$, $2s(a,b)$ et $t(a,b)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La matrice de cette forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}Q(h,k) + o\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

Le signe de $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ sur un voisinage de (a,b) est celui de $\frac{1}{2}Q(h,k)$ lorsque $Q(h,k)$ n'est pas nul.

Gaspar Monge, comte de Péluse, (1746-1818) : mathématicien, physicien, chimiste et homme politique français. Il étudie les équations aux dérivées partielles et les surfaces. Il crée l'École Polytechnique en 1794.

• Si Q est définie positive, f présente un minimum local strict au point a. C'est-à-dire :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall (h,k) \in B((0,0),\alpha)\setminus\{(0,0)\} \quad f(a+h,b+k) > f(a,b).$$

Lorsque $\frac{1}{2}Q(h,k) = 0$, le signe de $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ sera donné par l'étude des termes suivants du développement limité de $f(a+h,b+k)$.

• Si Q est définie négative, f présente un maximum local strict au point a :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall (h,k) \in B((0,0),\alpha)\setminus\{(0,0)\} \quad f(a+h,b+k) < f(a,b).$$

• Si Q est dégénérée positive, ou dégénérée négative, on ne peut pas conclure par cette méthode.

• Si Q change de signe, l'application f ne présente pas d'extremum au point (a,b).

Étudions cette forme quadratique. Le discriminant de Q est $rt - s^2$.

• Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

• Si $rt - s^2 \neq 0$, la forme quadratique est non dégénérée.

Les valeurs propres de cette matrice sont les racines du polynôme :

$$X^2 - (r+t)X + (rt - s^2).$$

La somme des valeurs propres est $r+t$ et leur produit est $rt - s^2$.

• Si $rt - s^2 < 0$, les deux racines sont de signe contraire. La forme Q change de signe.

• Si $rt - s^2 > 0$, les deux racines sont de même signe.

On a $rt > s^2$. Les réels r et s sont de même signe. Les valeurs propres ont le signe de r et de t.

– Si $r > 0$, la forme quadratique est définie positive.

– Si $r < 0$, la forme quadratique est définie négative.

Théorème 38

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et (a,b) un point de U.

■ Les notations de Monge sont :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Il est inutile de calculer les dérivées partielles de la fonction f lorsqu'on peut écrire directement un développement limité d'ordre 2 au voisinage du point critique étudié.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ (a,b) est un point critique de f si et seulement si :

$$p(a,b) = q(a,b) = 0$$

■ Si (a,b) est un point critique tel que $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 \neq 0$, alors :

• Si $rt - s^2 < 0$, la fonction f ne présente pas d'extremum local en (a,b). On dit qu'il s'agit d'un **point col**.

• Si $rt - s^2 > 0$, la fonction f présente un extremum strict en (a,b). C'est un minimum si $r > 0$ et un maximum si $r < 0$.

■ Si (a,b) est un point critique tel que $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Application 12

Quelques recherches d'extrema

Étudier les extrema des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1) $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$

2) $g : (x,y) \mapsto x^2y^2(1+x+2y)$

1) L'application f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Recherchons les points critiques :

$$p = \sin y \sin(2x+y) ;$$
$$q = \sin x \sin(2y+x) ;$$
$$p = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0[\pi] \text{ ou } 2x+y \equiv 0[\pi] ;$$
$$q = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi] \text{ ou } 2y+x \equiv 0[\pi].$$

Or on a :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+\pi, y) = f(x, y+\pi) = -f(-x,-y) = f(x,y).$$

Il suffit d'étudier les points critiques appartenant à :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On trouve les points (0,0) et $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

• **Étude en (0,0)**

Le développement limité de f en (0,0) est :

$$f(x,y) = xy(x+y) + o\left(\|(x,y)\|^3\right).$$

Il ne contient pas de terme d'ordre 2.

Ceci correspond à $r = s = t = 0$.

On constate que $f(x,y)$ a le signe de $xy(x+y)$ sur un voisinage de (0,0). Or $xy(x+y)$ change de signe.

Il n'y a pas d'extremum au point (0,0).

• **Étude en** $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$r = 2\sin y \cos(2x+y)$$
$$s = \sin(2x+2y)$$
$$t = 2\sin x \cos(2y+x)$$

Au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, on trouve :

$$r = t = 2s = -\sqrt{3}$$
$$rt - s^2 = \frac{9}{4} > 0 \quad \text{et} \quad r < 0$$

Il y a un maximum local strict au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

En utilisant les symétries, on trouve en :

$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ un minimum local strict.

En conclusion, l'application f admet des minima locaux stricts en tout point :

$$\left(-\frac{\pi}{3} + n\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$$

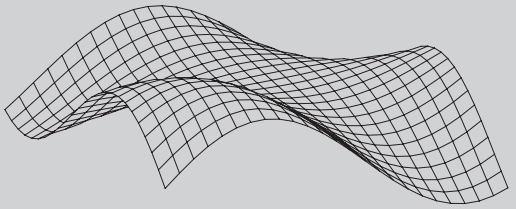
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

et des maxima locaux stricts en tout point :

$$\left(\frac{\pi}{3}+n\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right).$$

Avec MAPLE :

```
> plot3d(sin(x)*sin(y)*sin(x+y),
  x=-1..1.5,y=-1..1.5,
  orientation=[65,45]);
```



Doc. 13.

2) L'application g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Recherchons les points critiques.

$$p = xy^2(2+3x+4y)$$
$$q = 2x^2y(1+x+3y)$$
$$(p,q)=(0,0) \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } y=0$$
$$\text{ou } (x,y)=\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

- **Étude en (0,0)**

Nous pouvons faire une étude directe.

$$g(x,y)=x^2y^2+o\left(\|(x,y)\|^4\right)$$

On en déduit que $g(x,y)>0$ si x et y sont non nuls et que $g(x,y)=0$ si x est nul ou si y est nul.

L'application g présente au point (0,0) un minimum local non strict.

- **Étude en $(0,b)$ avec $b \neq 0$**

$$g(h,b+k)=h^2(b+k)^2(1+2b+h+2k)$$
$$=h^2b^2(1+2b)+h^2b(bh+6bk+2k)$$
$$+o\left(\|(h,k)\|^3\right).$$

Pour $h=0$, $g(h,b+k)=0$.

Pour $h\neq 0$ et $(1+2b)\neq 0$, $g(h,b+k)$ est du signe de $(1+2b)$ sur un voisinage de $(0,b)$.

La fonction g présente un minimum local non strict en $(0,b)$ si $b>-\frac{1}{2}$ et un maximum local si $b<-\frac{1}{2}$.

Pour $h\neq 0$ et $(1+2b)=0$:

$$g(h,b+k)=h^2b(bh+6bk+2k)+o\left(\|(h,k)\|^3\right).$$

Or $(bh+6bk+2k)$ n'est pas de signe constant. Le point $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ est un point col.

- **Étude en $(a,0)$ avec $a\neq 0$**

$$g(a+h,k)=(a+h^2)k^2(1+a+h+2k)$$
$$=k^2a^2(1+a)+k^2a(3ah+2ak+2h)$$
$$+o\left(\|(h,k)\|^3\right).$$

La fonction g présente en $(a,0)$ un minimum non strict si $a>-1$, un maximum non strict si $a<-1$ et un point col si $a=-1$.

- **Étude en $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$**

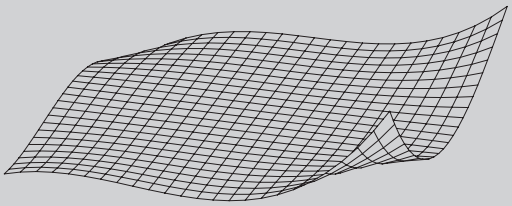
$$r=y^2(2+6x+4y)$$
$$s=2xy(2+3x+6y)$$
$$t=2x^2(1+x+6y)$$

Au point $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $rt-s^2$ prend la valeur positive $\frac{16}{5^5}$ et $r=-\frac{6}{5^3}$.

La fonction g admet en $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$ un maximum local strict.

Avec MAPLE :

```
> plot3d((x^2)*(y^2)*(1+x+2*y),
  x=-1..1,y=-1..1,
  orientation=[17,45]);
```



Doc. 14.

► *Pour s'entraîner : ex. 20.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

Soit f une fonction définie sur l'ouvert non vide U de E, à valeurs dans F.

On choisit une base de E et une base de F. Les fonctions coordonnées de f dans une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F sont notées $f_1, \ldots, f_n$.

● Pour montrer que l'**application f est différentiable en un point a de U**, on peut montrer que :

- f est la somme, le produit ou la composée d'applications différentiables en a ;
- les dérivées partielles existent et sont continues en a ;
- $f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = o(\|h\|)$;
- $f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$ avec $l \in \mathcal{L}(E, F)$.

● Pour prouver l'existence de la dérivée en a selon le vecteur v non nul et la calculer, on peut :

- étudier la limite lorsque le réel t tend vers 0 de $\dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$;
- montrer que f est différentiable sur l'ouvert U. La dérivée de f suivant un vecteur v de coordonnées $(h_1, \ldots, h_p)$ est définie en tout point a de U. Elle est donnée par la formule :

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

● Pour montrer que l'**application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U**, on peut montrer que :

- les dérivées partielles existent et sont continues sur U ;
- f est différentiable et, pour tout v de E, l'application $\mathrm{D}_v f$ est continue sur U.

● Pour montrer que l'**application f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V**, on peut montrer que :

- f est la composée de deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ;
- f une application bijective de U sur V, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{DetJ}\, f(a) \neq 0$$

- elle vérifie les trois conditions suivantes :
  f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ; f est bijective de U sur V ; f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

■ Pour montrer qu'**une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$**, on peut montrer que :

- l'application f est le produit, la somme ou la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$;
- les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

■ Pour déterminer les éventuels **extrema locaux d'une fonction numérique** f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E, on commence par trouver les points critiques a de U tels que :

$$\mathrm{d}\, f(a) = \tilde{0}$$

Puis, pour chacun de ces points, on étudie le signe de $f(a+v) - f(a)$ lorsque le vecteur v tend vers 0_E.

Pour cela on peut :

- faire une étude directe ;
- écrire un développement limité au voisinage de 0_E et étudier le signe de ce développement limité ;
- calculer les dérivées d'ordre 2 et appliquer le théorème 38.

■ Pour étudier les **extrema d'une fonction numérique** f continue sur un compact K de E, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble U des points intérieurs à K :

- on affirme l'existence d'un maximum global et d'un minimum global de f sur K ;
- on effectue l'étude ci-dessus sur l'ensemble U qui est un ouvert ;
- on étudie la fonction f sur $K \backslash U$; lorsque $\dim E = 2$, on est alors ramené à l'étude d'une fonction d'une seule variable ;
- on compare les valeurs des extrema locaux de f sur U et des extrema de f sur $K \backslash U$.

■ Pour prouver qu'**une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$** sur l'ouvert U de E, à valeurs dans F, définit un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de U sur $f(U)$, il suffit de prouver que :

- f est injective ;
- le jacobien de f ne s'annule pas sur U, c'est-à-dire :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{Det}(\mathrm{J}\, f(a)) \neq 0.$$

Exercice résolu

1. Différentielle et rotation

Bac C, 1978, Liban

ÉNONCÉ

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation vectorielle.

1) Montrer que les vecteurs dérivés seconde de f sont nuls.

2) En déduire que f est une rotation affine.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

CONSEILS

SOLUTION

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Les vecteurs colonnes, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ de la matrice $Jf(x_1, x_2)$ en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

D'où :

$$\forall (i, j) \in [\![1, 2]\!]^2 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2)\right) = \delta_{i,j}.$$

Dérivons les relations obtenues en utilisant le théorème de Schwarz car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right) = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right) = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right) = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \mid \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)\right) = 0.$$

Nous en déduisons que le vecteur $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ est orthogonal aux vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$, donc nul.

La nullité des vecteurs $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)$ s'en déduit.

2) L'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0$$

s'intègre par rapport à la variable x_2 et donne l'existence d'une fonction C de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = C(x_1) ; \quad \text{puis} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = C'(x_1) = 0.$$

Et $\exists C_1 \in \mathbb{R}^2 \quad \exists C_2 \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = C_2$$

L'application f est donc une application affine. Sa différentielle est sa partie linéaire, c'est une rotation. L'application f est une rotation.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2. Le taux d'accroissement

D'après ESTP, 1996

ÉNONCÉ

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout (x, y) tel que $x \neq y$, on pose :

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

1) Donner une écriture de F sous forme d'une intégrale de 0 à 1.

2) Montrer que F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^p t^q \, \mathrm{d}t$, p et q désignant des entiers naturels, au moyen de factorielles.

5) En déduire une expression simple de $L_{p,q}(a) = \dfrac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q}(a, a)$.

6) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et $G(x, y) = \dfrac{g(y, x) - g(x, y)}{y - x}$ si $x \neq y$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a)} G(x, y) = C\frac{\partial g}{\partial x}(a, a) + D\frac{\partial g}{\partial y}(a, a)$, où C et D sont des constantes à préciser.

7) Calculer $\lambda(a) = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{x^y - y^x}{\mathrm{e}^{x/y} - \mathrm{e}^{y/x}}$, où $a > 0$.

CONSEILS

SOLUTION

1) Pour tout $x \neq y$, on a :

$$F(x, y) = \int_0^1 f'(y + t(x - y)) \, \mathrm{d}t.$$

2) L'application $g : (t, x, y) \mapsto f'(y + t(x - y))$ est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$. Nous en déduisons que l'application F prolongée sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, x) = \displaystyle\int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}t = f'(x)$ est continue.

3) Fixons x réel.

L'application $g_x : (t, y) \mapsto f'(y + t(x - y))$ admet des dérivées partielles à tout ordre, par rapport à y, sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

Soit $p > 0$ et :

$$\frac{\partial^p g_x}{\partial y^p}(x, y) = \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(y + t(x - y)) \, \mathrm{d}t.$$

Ces applications sont continues sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

Vous montrerez de même que, si y est un réel fixé, l'application :

$$G_y : (t, x) \mapsto f'(y + t(x - y))$$

admet des dérivées partielles à tout ordre, par rapport à y, continues sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

De plus, $\dfrac{\partial^p g_y}{\partial x^p}(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^p f^{(p+1)}(y + t(x - y)) \, \mathrm{d}t.$

Nous en déduisons que l'application F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4) Vous montrerez, en intégrant par parties que, pour $p > 0$ et $q \geqslant 0$:

$$I_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q \, \mathrm{d}\, t = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$

Puis par récurrence :

$$I_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)\dots(p+q)} I_{0,p+q} = \frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)}.$$

5) D'après la question **3)** :

$$\begin{aligned} L_{p,q}(a) = \frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q}(a,a) &= \int_0^1 (1-t)^q t^{q+1} f^{(p+q+1)}(a) \, \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)} f^{(p+q+1)}(a). \end{aligned}$$

6) Écrivons, pour $x \neq y$:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{g(y,x) - g(x,y)}{y-x} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(y + t(x-y), x) \, \mathrm{d}\, t - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y + t(x-y)) \, \mathrm{d}\, t. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui de la deuxième question permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} G(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) - \frac{\partial g}{\partial y}(a,a).$$

7) Considérons les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g_1(x,y) = y^x \quad \text{et} \quad g_2(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}.$$

La fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ et la fonction g_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Le raisonnement effectué dans la question précédente s'applique à g_1 et g_2 au point (a,a).

Vous en déduirez que :

$$\lambda(a) = \frac{\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(a,a) - \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(a,a)}{\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(a,a) - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(a,a)} = -\frac{1}{2e} a^{a+1}(\ln a - 1).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit F de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad F(P) = \int_0^1 f \circ \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est différentiable sur E et expliciter $\mathrm{d}F$.

2 Soit E un espace euclidien de dimension n. On pose, pour tout x non nul, $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$.

3 Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les fonctions suivantes admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer :

$$f_1(x,y) = \int_\pi^{x+y} g(t)\,\mathrm{d}t\ ; \qquad f_2(x,y) = \int_y^x g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$
$$f_3(x,y) = \int_2^x (y-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4 On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

5 On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ y(1-x) & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

1) L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2) L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

6 On considère les trois applications de l'*exercice* **3**.

Après avoir justifié que ces applications sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}^2$, écrivez leurs différentielles et donnez leurs dérivées directionnelles.

7 On considère les trois applications de l'*exercice* **6**. Donner leurs matrices jacobiennes en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$.

8 Montrer que l'application f de l'*exercice* **2** est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $E \setminus \{0_E\}$ sur lui-même.

9 On se propose de déterminer toutes les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

1) Soit l'ouvert $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > y\right\}$ et φ l'application $(x,y) \mapsto (u,v) = (xy, x+y)$ définie sur U.

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur un ouvert V que l'on précisera.

2) Vérifier que l'application $F = f\varphi^{-1}$ définie sur V vérifie l'équation $\dfrac{\partial F}{\partial u} - 3F = 0$.

3) En déduire les solutions de **(1)**.

10 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'application f^n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et donner son gradient et sa différentielle.

11 Étudier les extrema de l'application f définie par : $f(x,y) = (y-x)^3 + 6xy$ sur les domaines suivants :

$$\Delta_O = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad -1 < x < y < 1\right\}$$
$$\Delta_F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\right\}$$

12 $g(x,y) = x - y + x^3 + y^3$.

Prouver que g a des extrema sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ et déterminer ces extrema.

13 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \mathrm{Arc}\cos\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}.$$

Déterminer son domaine de définition, l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequels f est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de U. Interpréter le résultat.

14 On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

15 Soit k dans $]0,1[$, p dans $\mathbb{N}^*$ et f dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leqslant k.$$

On définit l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y)).$$

1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer le jacobien de φ.

3) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

16 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles (E_1) suivante :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - 2\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0.$$

1) Déterminer l'équation aux dérivées partielles (E_2) vérifiée par la fonction :

$$U(x,t) = e^t f(x,t)$$

et ses dérivées partielles.

2) Déterminer l'équation aux dérivées partielles (E_3) vérifiée par la fonction :

$$V(a,b) = U(x,t)$$

déduite de U par le changement de variables :

$$a = x + t \quad ; \quad b = x - t.$$

17 Soit l'équation différentielle :

$$(ax + by)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (cx + dy)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

où $ad - bc \neq 0$.

1) Quelle équation obtient-on en faisant le changement de variables :

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

2) Quelle condition nécessaire et suffisante doivent vérifier a,b,c,d pour que l'équation admette une solution de la forme :

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0).$$

Trouver une solution lorsque :

$$a = b = c = -d = 1.$$

3) Montrer que, si f_1 est une solution de l'équation et si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f_1$ est aussi solution.

18 Résoudre l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2) \qquad \textbf{(E)}$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$ en utilisant les coordonnées polaires.

19 Soit f l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \quad f(x,y) = y^x.$$

L'application f admet-elle un développement limité en (0,1) à l'ordre 2 et à l'ordre 3 ?

20 Soit la fonction f de $(\mathbb{R}^{+*})^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z.$$

Trouver les extrema de la fonction f sur le plan d'équation $x + y + z = 3a$ avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$. Les extremas sont-ils globaux ?

En déduire la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble :

$$\left\{ f(x,y,z) \,;\, (x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \text{ et } x + y + z = 3a \right\}$$

21 Étudier la différentiabilité des deux fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right\}$$

$$g(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right\}$$

22 Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application convexe, de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tous x et $x + h$ de U :

$$f(x + h) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x)(h).$$

2) Montrer que $A = \{x \in U ; \mathrm{d}f(x) = 0\}$ est une partie fermée convexe de U.

23 On pose $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$.

Montrer que f admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

24 Soit $a > 0$. Montrer que l'application f de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} + \dfrac{xy}{a^2}$ admet un minimum global et le calculer.

25 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. On note Δf son laplacien et on pose :

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Calculer $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta)$ à l'aide des dérivées partielles de F.

Une application f définie sur U est dite homogène, de degré a, si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall (x,y) \in U \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^a f(x,y).$$

2) Montrer que, si f est homogène et non identiquement nulle sur U, f admet un unique degré d'homogénéité.

On le note α.

3) Montrer que, avec les mêmes hypothèses que dans la question **2)**, les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont $\alpha - 1$ homogènes.

4) Déterminer les applications homogènes de laplacien égal à $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ sur U.

26 * Montrer que toute solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right)$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

27 Trouver les applications g de classe $\mathcal{C}^2$ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que le laplacien de l'application f définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ par $f(x,y) = g\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$ soit nul.

28 * Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$.

À toute application de U dans $\mathbb{C}$, $f : z \mapsto f(z)$, on associe l'application F définie sur U par :

$$F(x,y) = f(x+\mathrm{i}y).$$

On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{C}$ est holomorphe sur U si, et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}\,\dfrac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

1) Montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes sur U est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de U dans $\mathbb{C}$.

2) Montrer que f est holomorphe dans U si et seulement si pour tout z_0 de U, $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ a une limite $l(z_0)$ quand z tend vers z_0 et l est continue sur U.

3) Montrer que si f est holomorphe sur l'ouvert convexe U et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est constante.

29 Trouver toutes les applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ vérifiant :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On pourra poser $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Compléments de calcul différentiel et intégral

13

Mensa ACADEMY

Introduction

Le but de ce chapitre est de développer les outils de l'analyse vectorielle (champs de scalaires et de vecteurs, intégrales multiples, formes différentielles). La notion de fonction intégrable d'une variable est étendue à des fonctions de deux variables. Il est fort intéressant de constater que presque toutes les parties du cours de mathématiques que vous avez suivi avec passion cette année interviennent dans ce chapitre.

OBJECTIFS

- Gradient d'un champ de scalaires.
- Divergence d'un champ de vecteurs.
- Rotationnel d'un champ de vecteurs en dimension 3.
- Potentiel scalaire.
- Intégrabilité d'une fonction de deux variables.
- Intégrales doubles.
- Formes différentielles de degré 1.
- Intégrales curvilignes.
- Formes exactes, formes fermées, théorème de Poincaré.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce paragraphe, U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et k un entier naturel. Dans la pratique, on se limitera à $p = 2$ ou $p = 3$.

Champ de vecteurs

1.1. Définitions

Un **champ de vecteurs** de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une application $\vec{f}$ de U dans $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Un **champ de scalaires** de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une application g de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

1.2. Gradient d'un champ de scalaires

Le gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ a été défini au chapitre 12. Il fournit un exemple fondamental de champ de vecteurs.

Théorème 1

Soit un entier $k \geqslant 1$ et un champ de scalaires g de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Alors grad g est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

On rappelle la définition intrinsèque du gradient (c'est-à-dire indépendante du choix d'une base de $\mathbb{R}^p$) :
grad $g(a)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^p$:

$$\mathrm{d}\,g(a)\,(\vec{v}) = \left(\text{grad } g(a) \mid \vec{v}\right)$$

où $(\mid)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^p$.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.3. Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Les fonctions composantes de $\vec{f}$ sont notées $f_1, \ldots, f_p$.

La divergence du champ de vecteurs $\vec{f}$ au point a est :

$$\div \vec{f}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a)$$

Cette définition n'est pas intrinsèque.

Les propriétés des dérivées partielles permettent aisément de démontrer les points suivants.

Théorème 2

- Soit un entier $k \geqslant 1$ et un champ de vecteurs $\vec{f}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Alors $\div \vec{f}$ est un champ de scalaires de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

- Soit a un point de U.

L'application : $\begin{cases} \mathcal{C}^k\left(U, \mathbb{R}^p\right) \to \mathbb{R} \\ \vec{f} \mapsto \div \vec{f}(a) \end{cases}$ est linéaire.

- L'application : $\begin{cases} \mathcal{C}^k\left(U, \mathbb{R}^p\right) \to \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R}) \\ \vec{f} \mapsto \div \vec{f} \end{cases}$ est linéaire.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$\div \vec{f}(a)$ est la trace de la matrice jacobienne de $\vec{f}$ au point a :

$$\div \vec{f}(a) = \mathrm{Tr}\left(J\,\vec{f}(a)\right).$$

Or, $J\vec{f}(a)$ est la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^p$, de l'endomorphisme $\mathrm{d}\,\vec{f}(a)$. La trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base utilisée. Donc :

$$\div \vec{f}(a) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}\,\vec{f}(a)\right).$$

Ceci est la définition intrinsèque de la divergence.

Exemple : Le laplacien

Soit un entier $k \geqslant 2$. Si g est un champ de scalaires de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, le laplacien de g est défini par la formule :

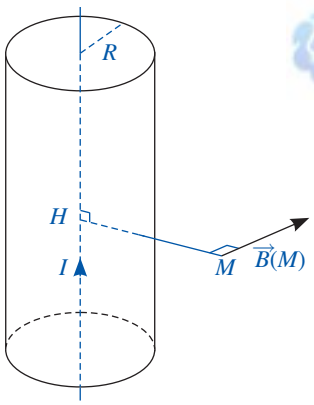
$$\Delta g(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(a).$$

Il est immédiat que : $\Delta g(a) = \div(\mathrm{grad}\, g)(a)$.

Δg est un champ de scalaires sur U de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

Application 1

Un champ magnétique et un champ électrique



Doc. 1.

1) *On considère un fil rectiligne infini de rayon R centré sur l'axe Oz. Un point M de l'espace est représenté par ses coordonnées cartésiennes :*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et par ses coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}$$

$$\text{où} \quad \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\text{et} \quad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}.$$

N.B. Les notations utilisées en mathématiques sont différentes de celles utilisées en physique. Il faut y prendre garde.

Vous avez appris, en magnétostatique, que le champ magnétique créé par ce fil, lorsqu'il est parcouru par un courant électrique d'intensité I, est un champ orthoradial donné par :

$$\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{R^2}\vec{v}(\theta) & si \quad r \leqslant R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{1}{r}\vec{v}(\theta) & si \quad r > R \end{cases}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide.

a) *Sur quel ouvert de $\mathbb{R}^3$ ce champ est-il continu ? de classe $\mathcal{C}^1$?*

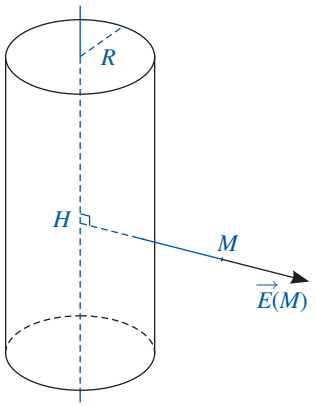
b) *Déterminer sa divergence en tout point en lequel il est de classe $\mathcal{C}^1$.*

2) *Soit une distribution cylindrique d'axe Oz, de rayon R, de charges électriques immobiles de densité volumique ρ. Vous avez appris, en électrostatique, que le champ électrique créé par cette distribution est un champ radial donné par :*

$$\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r\vec{u}(\theta) & si \quad r \leqslant R \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r}\vec{u}(\theta) & si \quad r > R \end{cases}$$

où ε_0 est la permittivité du vide.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



Doc. 2.

Mêmes questions que pour le champ $\vec{B}$.

1) Pour simplifier, on pose $c = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}$. Le champ $\vec{B}$ est suffisamment simple pour s'exprimer avec les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} c\left(\dfrac{-y}{R^2}, \dfrac{x}{R^2}, 0\right) & \text{si} \quad x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ c\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right) & \text{si } x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

a) Le champ $\vec{B}$ est continu sur $\mathbb{R}^3$ et de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur du fil $(r < R)$ ainsi qu'à l'extérieur $(r > R)$.

b) On note B_1, B_2, B_3 les composantes du champ $\vec{B}$. On a toujours $B_3 = 0$.

Si $x^2+y^2 < R^2$, alors $\dfrac{\partial B_1}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial B_2}{\partial y} = 0$.

La divergence du champ magnétique $\vec{B}$ est nulle à l'intérieur du fil.

Si $x^2+y^2 > R^2$, alors :

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_2}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

La divergence du champ magnétique $\vec{B}$ est nulle à l'extérieur du fil.

2) Pour simplifier, on pose $d = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}$. Le champ $\vec{E}$ est suffisamment simple pour s'exprimer avec les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} d(x,y,0) & \text{si} \quad x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ dR^2\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}, 0\right) & \\ & \text{si} \quad x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

a) Le champ $\vec{E}$ est continu sur $\mathbb{R}^3$ et de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur du fil $(r < R)$ ainsi qu'à l'extérieur $(r > R)$.

b) On note E_1, E_2 et E_3 les composantes du champ $\vec{E}$. On a toujours $E_3 = 0$.

Si $x^2+y^2 < R^2$, alors :

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = d \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_2}{\partial y} = d.$$

À l'intérieur du fil, la divergence du champ électrique $\vec{E}$ est :

$$\div \vec{E} = 2d = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Si $x^2+y^2 > R^2$, alors :

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = dR^2 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial E_2}{\partial y} = dR^2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

La divergence du champ électrique $\vec{E}$ est nulle à l'extérieur du fil.

1.4. Rotationnel d'un champ de vecteurs en dimension 3

Dans ce paragraphe, $p = 3$. Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ est noté $(\,|\,)$, le produit vectoriel $\wedge$, la base canonique $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$. Pour une manipulation plus aisée du produit vectoriel, les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ seront écrits en colonne. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i.$$

Soit $\vec{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^3$. Les fonctions coordonnées de $\vec{f}$ sont notées f_1, f_2 et f_3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le rotationnel de $\vec{f}$ en un point a de U est défini par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}$$

Les propriétés des dérivées partielles permettent aisément de démontrer les points suivants.

Théorème 3

- Soit un entier $k \geqslant 1$ et un champ de vecteurs $\vec{f}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Alors $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

- Soit a un point de U.

L'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^3) & \to & \mathbb{R}^3 \\ \vec{f} & \mapsto & \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f}(a) \end{array} \right.$ est linéaire.

- L'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^3) & \to & \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R}^3) \\ \vec{f} & \mapsto & \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} \end{array} \right.$ est linéaire.

De même que pour la divergence, on définit le rotationnel du champ $\vec{f}$ à l'aide des dérivées partielles de ses fonctions composantes. Ce point de vue, toujours utilisé dans les calculs, ne fournit pas une définition intrinsèque du rotationnel. Les définitions intrinsèques du gradient et de la divergence sont fort simples. Pour le rotationnel, cette définition demande un peu plus de travail. Elle est le but de l'application 3.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.*

Application 2

Un champ magnétique et un champ électrique

Déterminer les rotationnels des champs magnétique $\overrightarrow{B}$ et électrique $\overrightarrow{E}$ définis à l'application 1.

L'utilisation de l'opérateur : $\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

est pratique pour calculer le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{f}$ par la formule :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{f}.$$

Il faut cependant comprendre que ceci n'est pas une véritable égalité au sens mathématique.

C'est un artifice de calcul extrêmement efficace.

Pour le champ $\overrightarrow{B}$, à l'intérieur du fil :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{-cy}{R^2} \\ \dfrac{cx}{R^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2c}{R^2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}(M) = \frac{2c}{R^2}\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{R^2 \pi}\vec{k}.$$

Par un calcul similaire, vous vérifierez que le rotationnel du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est nul à l'extérieur du fil.

Le rotationnel du champ électrique $\overrightarrow{E}$ est nul à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Une définition intrinsèque du rotationnel

Les notations sont celles indiquées au début du paragraphe. Soit $\vec{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^3$.

1) *Montrer que, pour tout a de U :*

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{f}(a) = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge \mathrm{d}f(a)\left(\vec{e}_j\right).$$

2) *Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. L'adjoint de h est noté h^*.*

a) *Prouver l'existence d'un endomorphisme symétrique s de $\mathbb{R}^3$ $\left(s = s^*\right)$ et d'un endomorphisme antisymétrique r $\left(r = -r^*\right)$ tel que $h = s + r$.*

b) *Montrer l'existence d'un vecteur $\vec{w}$ tel que :*

$$\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad r(\vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{v}.$$

c) *Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge h\left(\vec{e}_j\right)$ à l'aide de $\vec{w}$.*

3) *En déduire une définition intrinsèque du rotationnel.*

1) Vous calculerez $\mathrm{d}f(a)\left(\vec{e}_j\right)$, puis :

$$\vec{e}_1 \wedge \mathrm{d}f(a)\left(\vec{e}_1\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a)\vec{e}_3 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a)\vec{e}_2$$

et vérifierez la formule demandée.

2) a) La décomposition voulue s'obtient en posant :

$$s = \frac{1}{2}\left(h + h^*\right) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}\left(h - h^*\right).$$

b) Le résultat demandé vient de l'égalité :

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta w - \gamma v\\ \gamma u - w\\ \alpha v - \beta u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\gamma & \beta\\ \gamma & 0 & -\alpha\\ -\beta & \alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

On sait de plus que, h étant donné, r, s et $\vec{w}$ sont uniques.

c) D'après les questions **a)** et **b)** :

$$\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge h\left(\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge s\left(\vec{e}_j\right) + \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{e}_j\right).$$

- **Calcul de** $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge s\left(\vec{e}_j\right)$

$$\left(\vec{e}_1 \wedge s\left(\vec{e}_1\right) \mid \vec{e}_1\right) = \left[\vec{e}_1, s\left(\vec{e}_1\right), \vec{e}_1\right] = 0\,;$$

$$\left(\vec{e}_1 \wedge s\left(\vec{e}_1\right) \mid \vec{e}_2\right) = \left[\vec{e}_1, s\left(\vec{e}_1\right), \vec{e}_2\right] = -\left(\vec{e}_3 \mid s\left(\vec{e}_1\right)\right)\,;$$

$$\left(\vec{e}_1 \wedge s\left(\vec{e}_1\right) \mid \vec{e}_3\right) = \left[\vec{e}_1, s\left(\vec{e}_1\right), \vec{e}_3\right] = \left(\vec{e}_2 \mid s\left(\vec{e}_1\right)\right).$$

Donc :

$$\vec{e}_1 \wedge s\left(\vec{e}_1\right) = -\left(\vec{e}_3 \mid s\left(\vec{e}_1\right)\right)\vec{e}_2 + \left(\vec{e}_2 \mid s\left(\vec{e}_1\right)\right)\vec{e}_3.$$

De même :

$$\vec{e}_2 \wedge s\left(\vec{e}_2\right) = \left(\vec{e}_3 \mid s\left(\vec{e}_2\right)\right)\vec{e}_1 - \left(\vec{e}_1 \mid s\left(\vec{e}_2\right)\right)\vec{e}_3\,;$$

$$\vec{e}_3 \wedge s\left(\vec{e}_3\right) = -\left(\vec{e}_2 \mid s\left(\vec{e}_3\right)\right)\vec{e}_1 + \left(\vec{e}_1 \mid s\left(\vec{e}_3\right)\right)\vec{e}_2.$$

Sachant que s est un endomorphisme symétrique, on en déduit :

$$\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge s\left(\vec{e}_j\right) = \vec{0}.$$

- **Calcul de** $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{e}_j\right)$

$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:

$$\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{e}_j\right) = 2\vec{w}.$$

Finalement :

$$\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge h\left(\vec{e}_j\right) = 2\vec{w}.$$

3) On a vu à la question **1)** que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}(a) = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \wedge \mathrm{d}f(a)\left(\vec{e}_j\right).$$

On sait que $h = \mathrm{d}f(a)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit r sa composante antisymétrique et $\vec{w}$ son représentant vectoriel tels que définis à la question **2)**. On vient de prouver que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}(a) = 2\vec{w}.$$

> Le rotationnel de f au point a est le double du représentant vectoriel de la composante antisymétrique de l'endomorphisme $\mathrm{d}f(a)$.

Cette définition ne dépend pas du choix d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.5. Potentiel scalaire

La question de savoir si un champ de vecteurs donné est le gradient d'un champ scalaire est importante.

Un **champ de vecteurs** $\vec{f}$ défini sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et de classe $\mathcal{C}^k$ sur U **dérive d'un potentiel scalaire** sur U s'il existe un champ de scalaires g, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, tel que :

$$\vec{f} = \text{grad}\, g$$

Il est aisé de prouver, grâce au théorème de Schwarz, que, si g est un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\forall a \in U \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,(\text{grad}\, g)(a) = \vec{0}$$

Si $\vec{f}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et si ce champ dérive d'un potentiel scalaire, son rotationnel est identiquement nul.

Il est légitime de se poser la question réciproque.

Un champ de vecteurs dont le rotationnel est identiquement nul sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire sur cet ouvert ?

Une restriction géométrique sur l'ouvert U permet de répondre positivement.

Théorème 4

Soit $\vec{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.

Le champ de vecteurs $\vec{f}$ dérive d'un potentiel scalaire sur U si et seulement si :

$$\forall a \in U \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}(a) = \vec{0}$$

Mensa ACADEMY

Nous verrons que ceci est un cas particulier du théorème de Poincaré qui sera démontré au paragraphe 2.5.

Exemple :

Les champs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}$ étudiés aux applications 1 et 2 sont tous deux de rotationnel nul à l'extérieur du fil, c'est-à-dire sur $U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 > R^2\}$, mais cet ouvert de $\mathbb{R}^3$ n'est pas étoilé (pourquoi ?). Le théorème ne s'applique pas globalement à U.

En revanche, localement, pour tout M de U, la boule V de centre M, de rayon $r - R$, est incluse dans U. Cette boule V est un ouvert étoilé sur lequel le théorème s'applique.

Précisons pour le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ qui est orthoradial et inversement proportionnel à r à l'extérieur du fil.

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{c}{r}\vec{v}(\theta) \qquad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Dans la boule V de centre M, le champ $\overrightarrow{B}$ dérive du potentiel scalaire f.

Avec les coordonnées cylindriques, on note $f(x, y, z) = g(r, \theta, z)$. Alors :

$$\overrightarrow{B}(M) = \text{grad}\, f(M) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{u}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{v}(\theta) + \frac{\partial g}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{k}$$

Nécessairement, $\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = c$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$.

La fonction $g(r, \theta, z) = c\theta$ convient.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il reste à exprimer θ en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M. C'est précisément ce qui fait que le champ $\overrightarrow{B}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire sur U tout entier. Si $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$, on peut prendre θ dans $]-\pi, \pi[$ et :

$$f(x, y, z) = c\theta = 2c\text{Arctan}\,\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Si $(x, y) \notin \mathbb{R}^+ \times \{0\}$, on peut prendre θ dans $]0, 2\pi[$ et :

$$f(x, y, z) = c\theta = c\left(\pi - 2\text{Arctan}\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}\right).$$

► *Pour s'entraîner : ex. 4.*

2 Formes différentielles

2.1. Définitions

2.1.1 Forme différentielle

On appelle **forme différentielle** de degré 1 sur U toute application ω de U dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\right)$.

Exemple fondamental

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
L'application $\mathrm{d}f$ définie par :

$$\mathrm{d}f : \begin{cases} U \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\right) \\ a \mapsto \mathrm{d}f(a) \end{cases}$$

est une forme différentielle sur U.

Dans cet ouvrage, nous étudions uniquement les formes différentielles de degré 1. Par conséquent, nous parlerons simplement de forme différentielle plutôt que de forme différentielle de degré 1.

2.1.2 Base duale

La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $\left(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p\right)$. Toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^p$ se décompose, de manière unique, sous la forme :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \mathrm{d}x_i.$$

où $(\alpha_1, \ldots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Avec cette notation, si $h = (h_1, \ldots, h_p)$ est dans $\mathbb{R}^p$:

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \mathrm{d}x_i(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i.$$

2.1.3 Fonctions composantes d'une forme différentielle

Soit ω une forme différentielle sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout a de U, $\omega(a)$ se décompose selon la base $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p)$ de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\right)$. Il existe un unique $p-$uplet de réels $(P_1(a), \ldots, P_p(a))$ tel que :

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{p} P_i(a) \, \mathrm{d}x_i.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On définit ainsi les fonctions composantes $(P_1, \dots, P_p)$ de la forme différentielle ω. Pour chaque i de $[\![1, p]\!]$, P_i est une application de U dans $\mathbb{R}$. On notera :

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}\, x_i.$$

Soit un entier naturel k.

La forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}\, x_i$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad P_i \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$$

Exemple :
Soit un entier $k \geqslant 1$ et une application f de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}$. La forme différentielle $\mathrm{d}\, f$, vue au paragraphe 2.1.1, est telle que :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{d}\, f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \, \mathrm{d}\, x_i.$$

Ses fonctions composantes sont donc les fonctions dérivées partielles de f et :

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\, x_i.$$

On en déduit que $\mathrm{d}\, f$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

La **forme différentielle** ω, définie sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ est dite **exacte** sur U si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \quad \forall a \in U \quad \omega(a) = \mathrm{d}\, f(a)$$

Ceci équivaut à dire que $\omega = \mathrm{d}\, f$. On dit aussi que la fonction f est une primitive de ω sur l'ouvert U.

2.2. Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Dans ce paragraphe, $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}\, x_i$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur U (avec $k \geqslant 0$).

Soit $\big([a, b], \gamma, \Gamma\big)$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dont le support Γ est inclus dans U.

On pose $[a, b] = I$ et, pour tout t de I, on note $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_p(t)\big)$.

Petit exercice de compréhension

- ω est une forme différentielle sur U.
- Pour tout t de I, $\gamma(t)$ est un point de U et $\omega(\gamma(t))$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.
- Pour tout t de I, $\gamma'(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est un réel. De plus :

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

Enfin, les hypothèses sur ω et γ montrent que la fonction

$$t \mapsto \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad \text{est continue sur } I.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L' **intégrale curviligne** de la forme différentielle ω le long de la courbe $([a,b],\gamma,\Gamma)$ est le réel :

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right]\mathrm{d}t$$

On note provisoirement cette quantité $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega$.

La relation de Chasles pour les intégrales permet de définir l'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

A priori, elle dépend du paramétrage $([a,b],\gamma)$ de la courbe. Le théorème suivant montre que l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega$ dépend seulement du sens de parcours du support Γ.

Changement de paramètre

Théorème 5

Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $J=[c,d]$ dans $I=[a,b]$.

$([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\gamma o\varphi)$ sont deux paramétrages du support Γ de la courbe étudiée.

Deux cas sont possibles :

- si φ est croissante, alors :

$$\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = \int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega$$

- si φ est décroissante, alors :

$$\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = -\int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega$$

Démonstration

Par définition :

$$\begin{aligned}\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)} \omega &= \int_c^d \omega(\gamma\circ\varphi(u))(\gamma\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_c^d \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(\varphi(u)),\ldots,\gamma_p(\varphi(u)))\gamma_i'(\varphi(u))\right]\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Le changement de variable $t=\varphi(u)$ s'impose. Il donne $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

- Si φ est croissante, $\varphi(c)=a$ et $\varphi(d)=b$. D'où :

$$\int_{(J,\gamma\circ\varphi,\Gamma)} \omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right]\mathrm{d}t = \int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega.$$

- Si φ est décroissante, les bornes sont inversées.

Ainsi, l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage de l'arc, mais seulement du sens de parcours de cette courbe, c'est-à-dire de l'orientation de l'arc. Pour le signifier, on note cette intégrale curviligne :

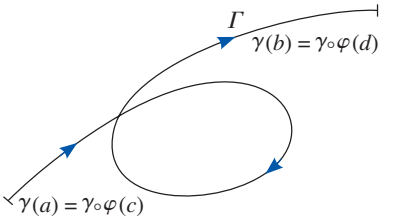
$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega$$

Exemple :

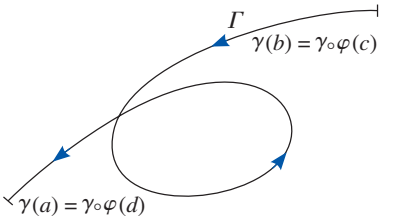
Soit ω la forme différentielle définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par :

$$\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.



Doc. 3. *Parcours de l'arc Γ paramétré par $\gamma\circ\varphi$ lorsque φ est croissante.*



Doc. 4. *Parcours de l'arc Γ paramétré par $\gamma\circ\varphi$ lorsque φ est décroissante.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On considère le cercle C de centre O et de rayon R, parcouru une fois dans le sens direct et paramétré par :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \to C \\ t \mapsto (x(t), y(t)) = (R\cos t, R\sin t) \end{cases}$$

Par définition de l'intégrale curviligne :

$$\int_{\widehat{C}} \omega = \int_0^{2\pi} \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right] \mathrm{d}\, t$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(t) + \cos^2(t)\right] \mathrm{d}\, t = 2\pi.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

- Le résultat ne dépend pas de R.
- En prenant $t \in [0, 2n\pi]$, ce qui équivaut à parcourir le cercle n fois dans le sens direct, on obtient $2n\pi$ pour la valeur de l'intégrale curviligne de ω.
- Le paramétrage $t \mapsto (R\cos t, -R\sin t)$, qui correspond à un parcours du cercle dans le sens indirect, donne une intégrale curviligne négative.

2.3. Le cas des formes différentielles exactes

Théorème 6

Soit ω une forme différentielle exacte sur U, f une primitive de ω sur U et deux points A et B de U.
Pour toute courbe paramétrée $([a, b], \gamma, \Gamma)$ de classe $\mathcal{C}^1$, de support inclus dans U, d'origine $A = \gamma(a)$ et d'extrémité $B = \gamma(b)$, on a :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_{\widehat{\Gamma}} \mathrm{d}\, f = f(B) - f(A)$$

On peut dire en résumé que l'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte le long d'une courbe ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de la courbe et non pas du chemin parcouru pour joindre ces points.

Démonstration

On note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))$. Puisque $\omega = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i$, on a :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\right] \mathrm{d}\, t.$$

Nous savons que :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(f \circ \gamma)(t).$$

Donc :

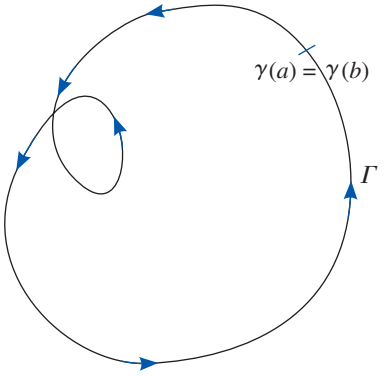
$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(f \circ \gamma)(t)\, \mathrm{d}\, t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A).$$

Le résultat du théorème ci-contre peut être abrégé en écrivant simplement :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathrm{d}\, f = f(B) - f(A)$$

Une courbe paramétrée $([a, b], \gamma, \Gamma)$ est dite fermée lorsque :

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$



Doc. 5.

Corollaire 6.1

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur U le long d'une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans U est toujours nulle.

Ce corollaire reste vrai pour une courbe fermée, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de support contenu dans U.

Exemple :
Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}\, y - y\,\mathrm{d}\, x}{x^2 + y^2}.$$

Le corollaire 6.1 permet d'affirmer que la forme différentielle ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4. Formes différentielles fermées, le théorème de Poincaré

Le paragraphe précédent nous montre que le calcul d'une intégrale curviligne se simplifie lorsque la forme différentielle est exacte.

Mais comment déterminer si une forme différentielle est exacte ?

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$. On dit que ω est une **forme différentielle fermée** sur U si :

$$\forall a \in U \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(a).$$

Théorème 7

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.

Si ω est une forme exacte sur U, alors ω est fermée sur U.

Exemple :

La réciproque n'est pas vraie en général. En effet, reprenons la forme différentielle :

$$\omega = \frac{x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

- Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Ce n'est pas une forme exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- C'est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En effet, notons $\omega = P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Théorème 8. Théorème de Poincaré

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^p$.

Toute forme différentielle fermée sur U est exacte sur U.

Démonstration

Soit ω une forme différentielle fermée sur U.

- **Idée-clé n° 1**

Soit a un point de l'ouvert étoilé U tel que, pour tout b de U, le segment de droite $[a,b]$ soit inclus dans U (*doc.* 6).

L'application : $\varphi : (t \mapsto \varphi(t) = a + t(b-a))$ fournit un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) de ce segment de droite.

- **Idée-clé n° 2**

Si ω est une forme exacte sur U et si f est une primitive de ω, alors :

$$\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega = f(b) - f(a)$$

Donc $f(b)$ est connu, à une constante près, si l'on connaît l'intégrale curviligne $\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega$.

Henri Poincaré *(1854-1912), mathématicien français : ses travaux dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées permettent de le qualifier de mathématicien universel. Hilbert et lui en seront sans doute les derniers spécimens.*
Co-découvreur de la théorie de la relativité restreinte, il eut cette phrase prémonitoire, datée de 1904 : « Peut-être [allons-nous devoir] construire une mécanique nouvelle, que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait un obstacle infranchissable. »

- La propriété « ω est une forme fermée sur U » est une propriété *locale*. Démontrer cette propriété se ramène à un simple calcul de dérivées partielles en chaque point de U.
- La propriété « ω est une forme exacte sur U » est une propriété *globale*. Démontrer cette propriété demande, *a priori*, de trouver une fonction f définie sur tout l'ouvert U et telle que $\omega = \mathrm{d}f$, ce qui est moins simple que de calculer des dérivées partielles.
- Le théorème de Poincaré simplifie ceci lorsque U est un ouvert étoilé.

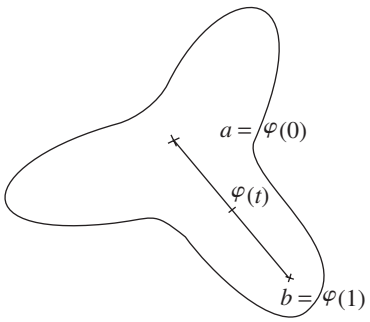
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• **Idée-clé n ° 3**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et k une constante ; f et $f+k$ ont la même différentielle en tout point de U. Pour prouver que la forme différentielle ω est exacte sur U, on pose donc, pour tout b de U :

$$f(b) = \int_{\overset{\frown}{ab}} \omega.$$

Il suffit de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\mathrm{d}f = \omega$.



Doc. 6.

Connaissant ω, la formule :

$$f(b) = \int_{\overset{\frown}{ab}} \omega.$$

fournit un moyen effectif de calculer une primitive de f.

Notations

Nous allons simplifier les notations par deux artifices :

• On suppose que $a = (0,0)$. Il s'agit simplement d'un changement d'origine ou d'une translation qui n'enlève rien à la généralité.

• On rédige dans le cas $p = 2$, ce qui donne des formules plus lisibles, la méthode étant exactement la même pour le cas général.

Notons donc :

$$a = (0,0) \quad \text{et} \quad b = (x_0, y_0)$$
$$\varphi(t) = a + t(b-a) = (tx_0, ty_0) = (x(t), y(t))$$
$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (x_0, y_0)$$
$$\omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

L'hypothèse ω est une forme fermée sur U se traduit par :

$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

La fonction f est définie, en $b = (x_0, y_0)$, par :

$$f(x_0, y_0) = \int_0^1 [P(tx_0, ty_0)x_0 + Q(tx_0, ty_0)y_0]\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration de $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

Le point $b = (x_0, y_0)$ est fixé dans U. Puisque U est ouvert :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\qquad (x, y_0) \in U.$$

Étudions la dérivabilité de $x \mapsto f(x, y_0)$ sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Pour tout x de $]x_0 - r, x_0 + r[$:

$$f(x, y_0) = \int_0^1 \left[P(tx, ty_0)x + Q(tx, ty_0)y_0\right]\mathrm{d}t = \int_0^1 \psi(x,t)\,\mathrm{d}t$$

avec $\psi(x,t) = P(tx, ty_0)x + Q(tx, ty_0)y_0$.

Les fonctions P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Donc, la fonction de deux variables ψ est continue sur $]x_0 - r, x_0 + r[\times [0,1]$, ainsi que sa dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = P(tx, ty_0) + xt\,D_1P(tx, ty_0) + y_0t\,D_1Q(tx, ty_0).$$

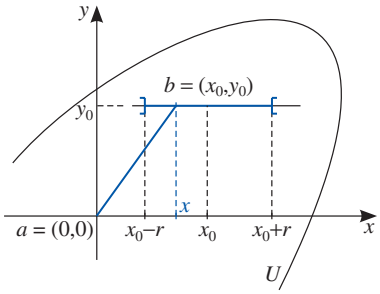
On en déduit que l'application :

$$x \mapsto f(x, y_0) = \int_0^1 \psi(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Donc, pour tout $b = (x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe et, de plus :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left[P(tx_0, ty_0) + x_0t\frac{\partial P}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0t\frac{\partial Q}{\partial x}(tx_0, ty_0)\right]\mathrm{d}t.$$



Doc. 7.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, ω est une forme fermée sur U, donc $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ et :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t) = P(tx_0, ty_0) + x_0 t \frac{\partial P}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 t \frac{\partial P}{\partial y}(tx_0, ty_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\,P(tx_0, ty_0)\right].$$

Finalement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left[t\,P(tx_0, ty_0)\right]_0^1 = P(x_0, y_0).$$

La fonction f définie par $f(b) = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et :

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f.$$

Le théorème est démontré.

Exemple :

■ La forme différentielle $\omega = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est exacte sur le demi-plan $U = \{(x, y)\,;\, x > 0\}$.

Pour déterminer une primitive de ω sur U, utilisons la technique suivante.

On sait que ω est exacte sur U. Soit f une primitive de ω sur cet ouvert :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Fixons $x > 0$.

La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $y \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Donc :

$$f(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + H(x).$$

Ici, $H(x)$ est une constante par rapport à la variable d'intégration y.

Par construction, H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Fixons y dans $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right) + H'(x).$$

On en déduit $H'(x) = 0$.

Les primitives de ω sur le demi-plan ouvert $U = \{(x, y) | x > 0\}$ sont les fonctions :

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

■ Soit $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0)\,;\, x \leqslant 0\}$. La forme différentielle $\omega = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est exacte sur V car l'ouvert V est étoilé.

Les primitives de ω sur $\{(x, y); y > 0\}$ sont les fonctions :

$$(x, y) \mapsto -\operatorname{Arctan}\frac{x}{y} + k_1.$$

Elles coïncident avec les primitives sur U lorsque $x > 0$.

Pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}^{*+})^2$ on a :

$$\operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + k = -\operatorname{Arctan}\frac{x}{y} + k + \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} - \pi + k_1.$$

On choisit $k_1 = k + \dfrac{\pi}{2}$ pour que les primitives sur V prolongent les primitives sur U.

Les primitives de ω sur $\{(x, y)\,;\, y < 0\}$ sont les fonctions :

$$(x, y) \mapsto -\operatorname{Arctan}\frac{x}{y} + k_2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On choisit $k_2 = k - \dfrac{\pi}{2}$ pour les mêmes raisons.

Les primitives sur V sont les fonctions :

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} + k & \text{si } x > 0 \\ -\text{Arctan}\,\dfrac{x}{y} + k + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \text{ et si } y > 0 \\ -\text{Arctan}\,\dfrac{y}{y} + k - \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \text{ et si } y < 0 \end{cases}$$

■ Soit $W = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. La forme différentielle $\omega = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ est fermée sur W.

L'ouvert W n'est plus étoilé. Rien ne permet d'affirmer que la forme ω est exacte sur W.

On a montré au paragraphe 2.4 qu'elle n'est pas exacte sur W.

On remarquera également que les primitives sur V ne se prolongent pas par continuité à W.

Soit $a < 0$.

La limite de $-\text{Arctan}\,\dfrac{x}{y} + k + \dfrac{\pi}{2}$ lorsque (x,y) tend vers $(a,0)$ en restant dans $\{(x,y)\,;\, x \leqslant 0 \text{ et } y > 0\}$ est $k + \pi$.

La limite de $-\text{Arctan}\,\dfrac{x}{y} + k - \dfrac{\pi}{2}$ lorsque (x,y) tend vers $(a,0)$ en restant dans $\{(x,y)\,;\, x \leqslant 0 \text{ et } y < 0\}$ est $k - \pi$. Aucune valeur de k ne permet d'égaler ces limites.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

2.5. Le point de vue du physicien

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

À tout champ de vecteurs $\vec{v}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$, défini par $\vec{v}(a) = (P_1(a), \ldots, P_p(a))$, on peut associer la forme différentielle ω de classe $\mathcal{C}^k$ sur U définie par :

$$\omega(a) = \sum_{j=1}^{p} P_j(a)\,\mathrm{d}x_j$$

et, inversement, à toute forme différentielle ω, on peut associer un champ de vecteurs $\vec{v}$.

Le physicien n'hésite pas à noter $\omega = \vec{v} \cdot \overrightarrow{dx}$. Cette notation, purement symbolique, ne sera pas utilisée en mathématiques.

En revanche, il est mathématiquement correct d'écrire :

$$\forall a \in U \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^p \qquad \omega(a)\left(\vec{h}\right) = \overrightarrow{V}(a) \cdot \vec{h}$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^p$. Il est immédiat que :

• Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur U si et seulement si la forme différentielle associée, ω, est exacte sur U.

• La notion mathématique d'intégrale curviligne d'une forme différentielle correspond à la notion physique de circulation d'un champ de vecteurs .

La circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc orienté $\overset{\frown}{\Gamma}$ n'est autre que l'intégrale curviligne de la forme différentielle associée le long de ce même arc.

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \omega = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}x}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par exemple, la circulation d'un champ de forces $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc allant du point A au point B représente le travail de cette force le long de cet arc.

• Très souvent, les courbes considérées sont fermées et le résultat mathématique suivant :

« L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte le long d'une courbe fermée est nulle. » se traduit par :

« Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ qui dérive d'un potentiel scalaire est un champ conservatif. »

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer en détail que le théorème 4 vu au paragraphe 1.5, est exactement le théorème de Poincaré en dimension 3. Ce théorème s'énonce comme suit.

Soit $\overrightarrow{v}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.
Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur U si et seulement si :

$$\forall a \in U \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}(a) = \vec{0}$$

Notons $\overrightarrow{V} = (f_1, f_2, f_3)$. Le rotationnel de $\overrightarrow{v}$ est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

La forme différentielle associée au champ $\overrightarrow{V}$ est :

$$\omega = f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + f_3\,\mathrm{d}x_3.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et la condition $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \vec{0}$ équivaut à :

ω est une forme fermée sur U.

L'ouvert U étant étoilé, le théorème de Poincaré s'applique.
Il existe $g \in \mathcal{C}^2(U)$ tel que $\omega = \mathrm{d}g$. On en déduit $\vec{f} = \text{grad}\, g$.

3 Calcul intégral

Dans le cadre de notre programme, l'intégration des fonctions n'a été étudiée que pour des fonctions d'une variable, définie sur des segments, puis sur des intervalles quelconques.

Le calcul des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables est un outil indispensable à de nombreuses branches de la Science. Développer une théorie cohérente de l'intégration de ces fonctions n'est pas du tout élémentaire. Ce n'est qu'à la fin du XIXe et au début du XXe siècle que les travaux de Jordan, (Jordan Camille (1838-1922), mathématicien français) Borel, (Borel Émile (1871-1956), mathématicien français) Lebesgue, et Radon ont permis de résoudre ce problème.

Nous allons exposer maintenant une théorie simplifiée d'intégrabilité pour les fonctions de deux variables. Nous admettrons que cette théorie se généralise aux fonctions de trois variables.

Henri Lebesgue *(1875-1941), mathématicien français.*

Johann Radon *(1887-1956), mathématicien autrichien. Les écrits de Borel et Lebesgue portaient sur les fonctions d'une variable. Radon a vu que leurs travaux s'appliquaient aux fonctions de plusieurs variables.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.1. Intégrales doubles

3.1.1 Intégrale sur un produit de segments

Théorème 9. Formule de Fubini (Interversion des intégrations)
Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$, f une fonction continue de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Considérons les fonctions g et G définies respectivement sur $[a,b]\times[c,d]$ et $[a,b]$ par :

$$g(y,t) = \int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad G(y) = \int_c^d \left[\int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_c^d g(y,t)\,\mathrm{d}t.$$

• Avec le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale, vous contrôlerez que la fonction g est continue par rapport à t sur $[c,d]$. Elle est continue par rapport à y, en tant que primitive sur un segment d'une fonction continue.

• À t fixé, l'application $(y \mapsto g(y,t))$ est dérivable sur $[a,b]$. g admet une dérivée partielle par rapport à y, continue sur $[a,b]\times[c,d]$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,t) = f(y,t).$$

• f est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$, donc majorée par un réel $M>0$. g est majorée par $(b-a)M$, qui est intégrable sur $[c,d]$. Le théorème de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale s'applique à la fonction G. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et :

$$G'(y) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(y,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(y,t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b G'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

La valeur commune de ces intégrales est appelée l'intégrale double de f sur $[a,b]\times[c,d]$ et notée $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Lorsque f est positive, cette intégrale est le volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;(x,y)\in[a,b]\times[c,d],0\leqslant z\leqslant f(x,y)\right\}.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 7 et 8.*

La continuité est indispensable pour échanger les deux intégrales. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$ et on peut vérifier que :

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \neq \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Rapport ENS, 2000

« Certains aspects, comme la maîtrise des intégrales doubles (en particulier pour la définition d'un nouveau domaine d'intégration après changement de variables ou lors de l'application du théorème de Fubini), le calcul différentiel à plusieurs variables (différentielle d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, les raisonnements géométriques (manipulation de transformations affines, théorème de relèvement) ont souvent laissé à désirer. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 4

Un problème de moquette

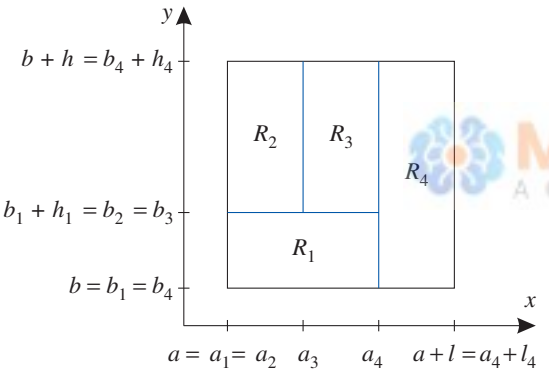
Peut-on recouvrir exactement le sol de n'importe quelle pièce rectangulaire avec un rouleau de moquette de largeur fixée l en coupant cette moquette uniquement dans le sens de la largeur ?

Tous les morceaux doivent être des rectangles dont un côté mesure l.

Il est immédiat que la réponse est positive si l'une des dimensions de la pièce est un multiple entier de la largeur du rouleau.

Simplifions en prenant $l = 1$

Nous allons montrer qu'un rectangle partagé, comme l'indique le schéma, en un nombre fini de rectangles ayant chacun au moins un côté de longueur entière a nécessairement un côté de longueur entière. Et ceci résout totalement notre problème.



Un rectangle R est ici une partie de $\mathbb{R}^2$ et nous noterons $R = [a, a+l[\times[b, b+h[$.

R est supposé partitionné en m rectangles $R_k = [a_k, a_k + l_k[\times[b_k, b_k + h_k[$ et, pour tout k, l_k, ou h_k est entier. Nous voulons montrer que l ou k est entier.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\left(e^{2\pi i\, l} - 1\right)\left(e^{2\pi i\, h} - 1\right) e^{2i\pi(a+b)} \\
&\quad = \left(e^{2\pi i(a+l)} - e^{2\pi i a}\right)\left(e^{2\pi i(b+h)} - e^{2\pi i b}\right) \\
&\quad = -4\pi^2 \int_a^{a+l} e^{2\pi i x}\, dx \int_b^{b+h} e^{2\pi i y}\, dy \\
&\quad = -4\pi^2 \iint_R e^{2\pi i(x+y)}\, dx\, dy \\
&\quad = -4\pi^2 \sum_{k=1}^{m} \iint_{R_k} e^{2\pi i(x+y)}\, dx\, dy \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m} \left(e^{2\pi i\, l_k} - 1\right)\left(e^{2\pi i\, h_k} - 1\right) \\
&\quad e^{2i\pi(a_k+b_k)} = 0
\end{aligned}$$

donc l ou h est entier.

Doc. 8 $a_4 = a_1 + l_1 = a_3 + l_3$ *Le rectangle R est partagé en quatre rectangles : R_1, R_2, R_3, R_4.*

3.1.2 Fonctions intégrables sur un produit d'intervalles

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f continue sur $I\times I'$, à valeurs positives, est dite **intégrable** ou **sommable** sur $I\times I'$ s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall [a,b] \subset I \quad \forall [c,d] \subset I' \quad \iint_{[a,b]\times[c,d]} f \leqslant M.$$

Dans ce cas, on pose :

$$\iint_{I\times I'} f = \sup_{[a,b]\subset I,\ [c,d]\subset I'} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f.$$

Il résulte de la définition que, lorsque f est intégrable sur $I\times I'$, elle est intégrable sur $\overset{\circ}{I}\times\overset{\circ}{I'}$.

Cette définition généralise la notion de fonction intégrable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ qui nous fournit le critère pratique d'intégrabilité suivant.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 10

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $I \times I'$, à valeurs positives. Si :

- pour tout x de I, la fonction $(y \mapsto f(x,y))$ est intégrable sur I' ;
- la fonction $\left(x \mapsto \int_{I'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

Alors la fonction f est intégrable sur $I \times I'$.

Vous obtiendrez un théorème analogue en permutant les deux variables.

Démonstration

Considérons $[a,b] \subset I$ et $[c,d] \subset I'$. Il suffit ensuite d'écrire :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f \leqslant \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{[a,b]} \left(\int_{I'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

pour conclure car la fonction $\left(x \mapsto \int_{I'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction f continue sur $I \times I'$, à valeurs réelles ou complexes, est dite **intégrable** (ou **sommable**) sur $I \times I'$ si la fonction $|f|$ est intégrable.

De même que pour des fonctions intégrables sur un intervalle quelconque, on définit les intégrales de fonctions intégrables, à valeurs réelles ou complexes.

Théorème 11

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f continue sur $I \times I'$, à valeurs réelles, est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si f^+ et f^- le sont.
  Dans ce cas, on pose :
  $$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} f^+ - \iint_{I\times I'} f^-.$$
- Une fonction f continue sur $I \times I'$, à valeurs complexes, est intégrable sur $I \times I'$ si, et seulement si $\mathrm{Re}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ le sont.
  Dans ce cas, on pose :
  $$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} \mathrm{Re}\,f + \mathrm{i}\iint_{I\times I'} \mathrm{Im}\,f.$$

En posant :
$$f^+ = \max(f,0)$$
et $\quad f^- = \max(-f,0),$
on a : $f = f^+ - f^-$.

3.1.3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 12. Linéarité de l'intégrale

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions intégrables sur $I \times I'$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \iint_{I\times I'} (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_{I\times I'} f + \beta \iint_{I\times I'} g$$

Conformément au programme, ces propriétés sont admises.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 13. Formule de Fubini

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et intégrable sur $I \times I'$, à valeurs complexes. Si :

- pour tout x de I, la fonction $(y \mapsto f(x,y))$ est intégrable sur I' ;
- la fonction $\left(g : x \mapsto \int_{I'} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

Alors : $$\iint_{I\times I'} f = \int_I g$$

Corollaire 13.1

f est une fonction continue sur $I \times I'$, vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Si, de plus :

- pour tout y de I', la fonction $(x \mapsto f(x,y))$ est intégrable sur I ;
- la fonction $\left(h : y \mapsto \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur I' ;

Alors : $$\int_{I'} h = \int_I g$$

Guido Fubini *(1879-1943), mathématicien italien.*

Application

Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$

Pour tout entier naturel n, on note D_n le domaine $[n\pi,(n+1)\pi]\times[0,+\infty[$. Calculer

$$I_n = \iint_{D_n} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,d\,x\,d\,y$$

de deux manières différentes pour en déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,d\,x.$$

Pour x, l'application $y \to \mathrm{e}^{-xy}\sin x$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et son intégrale est $\dfrac{\sin x}{x}$ pour x non nul et 0 pour $x = 0$.

La fonction $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $[n\pi,(n+1)\pi]$.

Donc $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$.

En intégrant d'abord à par rapport à x deux fois par parties, puis par rapport à y, on obtient :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n\pi y}}{1+y^2}(-1)^n\,\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\pi y}}{1+y^2}(-1)^n\,\mathrm{d}y$$

Notons a_n le terme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n\pi y}}{1+y^2}(-1)^n\,\mathrm{d}\,y$.

On a $I_n = a_n - a_{n+1}$.

Or en appliquant le théorème de convergence dominée, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

On en déduit que la série $\sum I_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

On vérifie ensuite que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.1.4 Parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$

On appelle **partie élémentaire** de $\mathbb{R}^2$ une partie A de $\mathbb{R}^2$ pouvant se définir des deux manières suivantes :

• Il existe un segment $[a,b]$ et deux fonctions continues f_1 et f_2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1 < f_2$ sur $]a,b[$ et :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\right\}$$

• Il existe un segment $[c,d]$ et deux fonctions continues g_1 et g_2 de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g_1 < g_2$ sur $]c,d[$ et :

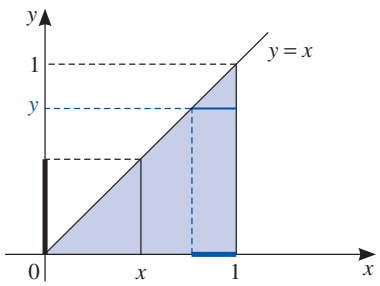
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, c \leqslant y \leqslant d \quad \text{et} \quad g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\right\}$$

Toute partie élémentaire du plan est un compact du plan.

Exemples :

• Le triangle :

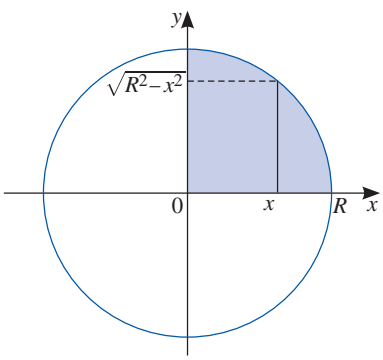
$$T = \{(x,y) \,;\, x \in [0,1] \quad \text{et} \quad y \in [0,x]\}$$
$$= \{(x,y) \,;\, y \in [0,1] \quad \text{et} \quad x \in [y,1]\}$$



Doc. 9.

• Le quart de cercle :

$$C = \left\{(x,y) \,;\, x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \,;\, x \in [0,R] \quad \text{et} \quad y \in \left[0, \sqrt{R^2 - x^2}\right]\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \,;\, y \in [0,R] \quad \text{et} \quad x \in \left[0, \sqrt{R^2 - y^2}\right]\right\}$$



Doc. 10.

3.1.5 Intégrale d'une fonction continue sur une partie élémentaire du plan

Lemme

Pour toute partie élémentaire A de $\mathbb{R}^2$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions α et β définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, nulles en dehors d'une partie bornée et telles que :

$$\alpha \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \beta \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \beta - \alpha \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration

Pour E et F deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, nous avons montré (exercice 26, chapitre 2) que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ définie par :

$$m \longrightarrow \frac{\mathrm{d}(m,F)}{\mathrm{d}(m,E) + \mathrm{d}(m,F)}$$

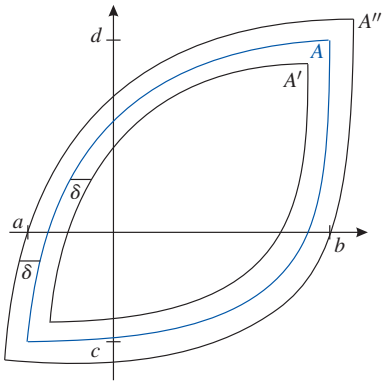
est continue, égale à 1 sur E et nulle sur F.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour δ assez petit on peut définir :

$$A' = \{(x,y) \in [a,b] \times [c,d];\, f_1(x) + \delta \leqslant y \leqslant f_2(x) - \delta \text{ et } g_1(y) + \delta \leqslant x \leqslant g_2(y) - \delta\}$$

et

$$A'' = \{(x,y) \in]a - \delta, b + \delta[\times]c - \delta, d + \delta[\,;\quad \forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$$
$$f_1(x) - \delta < y < f_2(x) + \delta \text{ et } g_1(y) - \delta < x < g_2(y) + \delta\}$$



Doc. 11.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On construit α en prenant $E = A'$ et $F = \mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{A}$, puis β en prenant $E = A$ et $F = \mathbb{R}^2 \setminus A''$. On vérifie $\alpha \leqslant 1_A \leqslant \beta$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} \beta - \alpha \leqslant 4\delta(b+d-a-c) + 4\delta^2$.

On peut choisir δ pour que $\iint_{\mathbb{R}^2} \beta - \alpha \leqslant \varepsilon$.

Théorème 14

Soit A une partie élémentaire du plan et f une fonction continue sur A, à valeurs positives. On note $\hat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x \in A \quad \hat{f}(x) = f(x)$$
$$\forall x \notin A \quad \hat{f}(x) = 0$$

Alors les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ ont un sens et prennent la même valeur. Cette valeur est appelée l'**intégrale double** de f sur A et notée : $\iint_A f$.

Démonstration

Rédigeons la démonstration en supposant f positive. A est compact, il existe donc $R > 0$ tel que : $A \subset K = [-R, R]^2$.

On en déduit que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ ont un sens car on intègre des fonctions continues par morceaux sur des segments de $\mathbb{R}$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Les fonctions α_n et β_n définies dans le lemme sont positives, continues sur $\mathbb{R}^2$ et $\alpha_n \widehat{f} \leqslant \widehat{f} \leqslant \beta_n \widehat{f}$.

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)dy \leqslant \int_{\mathbb{R}} (\beta_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

$\alpha_n \widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\beta_n \widehat{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} (\beta_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y \right| \leq ||f||_\infty \frac{2R}{n}$$

car $\alpha_n \widehat{f}$ est nulle en dehors de $[-R, R]$.

De même : $\left| \int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right| \leqslant ||f||_\infty \dfrac{2R}{n}$ entraîne la convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_n : x \to \int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y$ vers $G : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Ceci assure la continuité de G sur $\mathbb{R}$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right| \leqslant ||f||_\infty \frac{4R^2}{n}$$

Par conséquent $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f}) \right) (x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x.$

Le théorème de Fubini appliqué à $\alpha_n \widehat{f}$, continue sur $\mathbb{R}^2$ assure :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \widehat{f})(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

puis le résultat par passage à la limite.

L'aire de la partie élémentaire A est le réel : $v_2(A) = \iint_A \mathbf{1}$.

Lorsque f est à valeurs réelles, le résultat s'obtient avec f^+ et f^-. Lorsque f est à valeurs complexes, il faut considérer $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.1.6 Extension aux parties simples du plan

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est appelée **partie simple** du plan si elle est la réunion d'une famille finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Théorème 15
Soit A une partie simple, réunion d'une famille finie de parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. Alors, pour toute fonction f continue sur A, l'intégrale sur A de f est la somme des intégrales de f sur ces parties élémentaires.

En particulier, nous admettrons que l'intégrale de f est indépendante de la manière dont on découpe A en parties élémentaires.

Théorème 16
Soit f une fonction continue et positive sur la partie simple A. Son intégrale sur A est positive.

$$0 \leqslant f \Rightarrow 0 \leqslant \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exemples :

■ Détermination de l'aire A du compact K du demi-plan d'équation $y \geqslant 0$ délimité par la parabole d'équation $y = x^2$ et l'arc de cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$.

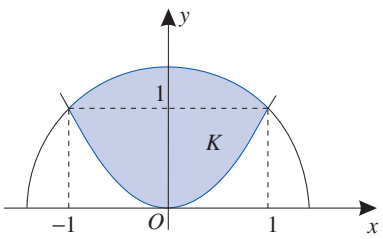
- **Description de K** (*doc.* 12.)
- **Calcul**

Par raison de symétrie, A est le double de l'aire du compact L décrit par :

$$L = \left\{(x,y)\,;\ x \in [0,1] \quad \text{et} \quad y \in \left[x^2, \sqrt{2-x^2}\right]\right\}$$

$$A = 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\sqrt{2-x^2} - x^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \text{ unités d'aire.}$$



Doc. 12.

■ Soit α un réel et $K = \{(x,y)\,;\ y \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x + y \geqslant 1\}$.

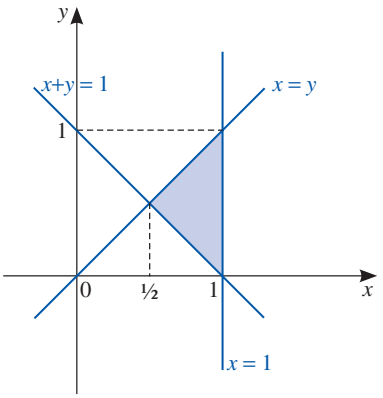
Calcul de $I_\alpha = \iint_K (x+y)^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

- **Description de K** (*doc.* 13).

$$K = \left\{(x,y)\,;\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{et} \quad y \in [1-x, x]\right\}.$$

- **Calcul**

$$I_\alpha = \int_{1/2}^1 \left(\int_{1-x}^x (x+y)^\alpha\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$



Doc. 13.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

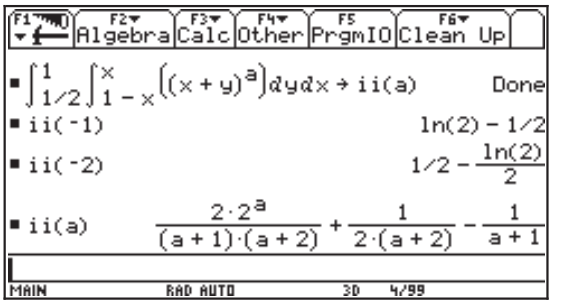
– Si $\alpha = -1$, $\quad I_{-1} = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \ln(2x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$

– Si $\alpha \neq -1$, $\quad I_\alpha = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \left[\frac{(2x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right]\mathrm{d}x$

– Si $\alpha = -2$, $\quad I_{-2} = \dfrac{1}{2}\,[1 - \ln(2)]$

– Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq -2$,

$$I_\alpha = \frac{2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{2(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+1}$$



3.1.7 Changement de variables

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{\Phi}$ une application de U dans $\mathbb{R}^2$ notée :

$$\vec{\Phi} : \begin{cases} U \to \mathbb{R}^2 \\ (s,t) \mapsto \vec{\Phi}(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) \end{cases}$$

On suppose que $\vec{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, injective, et que de plus, son jacobien n'est jamais nul :

$$\text{Det } J\vec{\Phi}(s,t) = \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \neq 0.$$

Pour effectuer un **changement de variables** dans une intégrale double, il faut d'abord comprendre ce que devient l'élément infinitésimal de surface par cette transformation.

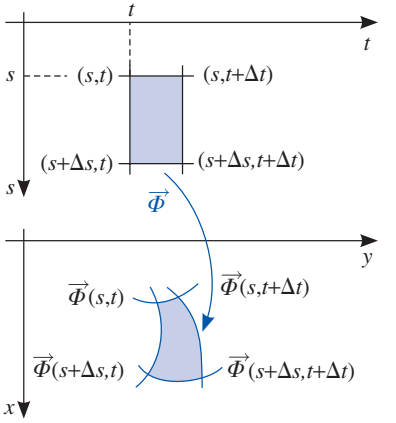
Soit Δs un « petit accroissement » de la variable s et Δt un « petit accroissement » de la variable t.

Dans U, le rectangle tramé a une aire de $\Delta s \Delta t$.

L'image par $\vec{\Phi}$ de ce rectangle est le « parallélogramme » dont les côtés sont :

$$\vec{\Phi}(s+\Delta s, t) - \vec{\Phi}(s,t) \approx \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t)\Delta s$$

$$\vec{\Phi}(s, t+\Delta t) - \vec{\Phi}(s,t) \approx \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(s,t)\Delta t$$



Doc. 14.

$\vec{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et les vecteurs $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t)$ et $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(s,t)$ sont indépendants, car le jacobien de $\vec{\Phi}$ est non nul. Enfin, plus les accroissements Δs et Δt sont petits, plus le « parallélogramme image » est proche d'un véritable parallélogramme. Son aire est :

$$\left\| \left[\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t)\Delta s, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(s,t)\Delta t \right] \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t)\Delta s & \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t)\Delta t \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t)\Delta s & \dfrac{\partial y}{\partial t}(s,t)\Delta t \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \right| \Delta s \Delta t.$$

On peut dire que, lorsque les variables s et t sont soumises à des accroissements Δs et Δt, les fonctions $x(s,t)$ et $y(s,t)$ subissent des accroissements Δx et Δy tels que :

$$\Delta x \Delta y = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \right| \Delta s \Delta t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De là découle la formule fondamentale du changement de variables dans les intégrales doubles :

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

Nous admettrons le théorème suivant :

Les arguments présentés plus haut ne constituent pas une démonstration mathématique. Ils sont là pour expliquer la présence du jacobien dans la formule de changement de variables.

Théorème 17

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\Phi} : (s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$ et K un compact simple inclus dans U.

On note $\overset{\circ}{K}$ l'ensemble des points intérieurs à K.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

- l'ensemble $D = \overrightarrow{\Phi}(K)$ est un compact élémentaire,
- la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective,
- le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$,

alors, pour toute fonction f continue de D dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K f(x(s,t), y(s,t)) \left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

Il est intéressant de noter que la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à K n'est pas injective et que le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ s'annule aux points de K tels que $r = 0$. Cela n'empêche pas d'appliquer le théorème car les hypothèses concernant $\overset{\circ}{K}$ sont vérifiées.

Exemple fondamental : les coordonnées polaires

- L'application :

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Soit le rectangle $K = [0,R] \times [-\pi,\pi]$ (avec $R > 0$). Son image par $\overrightarrow{\Phi}$ est le disque D de centre $(0,0)$ et de rayon R :

$$D = \left\{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$$

- On a $\overset{\circ}{K} =]0,R[\times]-\pi,\pi[$. La restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective et, pour tout (r,θ) de $\overset{\circ}{K}$:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$$

Le théorème s'applique et permet d'écrire :

Cette formule du passage en coordonnées polaires est à utiliser directement sans reprendre les trois étapes exposées ci-dessus.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

avec $D = \left\{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 18

Une fonction f continue sur $\mathbb{R}^{+2}$ est integrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si et seulement si la fonction $F : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ est intégrable sur $[0,+\infty[\times [0,\pi/2[$. Dans ce cas :

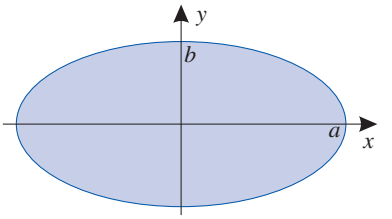
$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \iint_{[0,+\infty[\times [0,\pi/2[} F = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r$$

Pour un changement de variables moins courant, il faudra prendre soin de mettre en place les trois hypothèses permettant d'appliquer le théorème.

Exemple : *Aire d'une ellipse*

Calcul de l'aire du domaine plan, noté E, délimité par l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Doc. 15.

- Première méthode :

Le domaine E peut être paramétré par :

$$\begin{cases} [0,1] \times [0,2\pi] \to E \\ (r,t) \mapsto (x,y) = (ar\cos(t), br\sin(t)) \end{cases}$$

L'application $\overrightarrow{\Phi} : (r,t) \mapsto (x,y) = (ar\cos(t), br\sin(t))$ est en fait définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par construction, sa restriction à $K = [0,1] \times [0,2\pi]$ a pour image E.

En tout point (r,t) de $\overset{\circ}{K} =]0,1[\times]0,2\pi[$, le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ est $abr \neq 0$.

De plus, la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective.

L'aire recherchée est :

$$\iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \pi ab \text{ unités d'aire.}$$

- Seconde méthode :

Considérons le changement de variable défini par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \mapsto (x,y) = (au, bv) \end{cases}$$

φ définit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Son jacobien est indépendant de (u,v) :

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Le domaine E est l'image par φ du disque $D = \left\{(u,v)\,;\, u^2+v^2 \leqslant 1\right\}$.
L'aire de E est :

$$\iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pi ab \text{ unités d'aire}$$

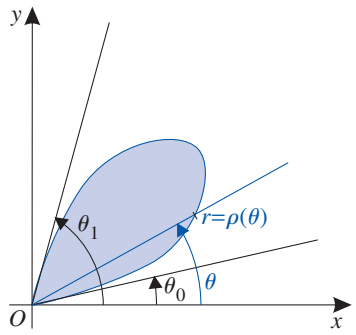
puisque l'aire du disque D vaut π.

► ***Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Calcul de l'aire d'une boucle délimitée par une courbe $r = \rho(\theta)$



Doc. 16.

Soit θ_0 et θ_1 deux réels tels que $0 < \theta_1 - \theta_0 < 2\pi$ et ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\theta_0, \theta_1]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\rho(\theta_0) = \rho(\theta_1) = 0$.

Le but de cette application est de déterminer l'aire de la boucle B délimitée par la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ lorsque θ varie de θ_0 à θ_1.

1) *Dans quel domaine les coordonnées polaires (r, θ) d'un point de la boucle B se trouvent-ils ?*

2) *Exprimer l'aire de la boucle B en fonction des coordonnées polaires.*

3) *Déterminer l'aire délimitée par la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire :*

$$r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$$

1) Comme on le voit sur le document 16, la boucle B peut être décrite par :

$$B = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ \theta \in [\theta_0, \theta_1] \text{ et } r \in [0, \rho(\theta)]\}$$

2) Soit :

$$K = \{(r, \theta)\ ;\ \theta \in [\theta_0, \theta_1] \text{ et } r \in [0, \rho(\theta)]\}.$$

- L'ensemble K est un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ dont l'image par :

$$\overrightarrow{\Phi} : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est la boucle B.

- La restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à :

$$\overset{\circ}{K} = \{(r, \theta)\ ;\ \theta \in]\theta_0, \theta_1[\text{ et } r \in]0, \rho(\theta)[\}$$

est injective et le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$.

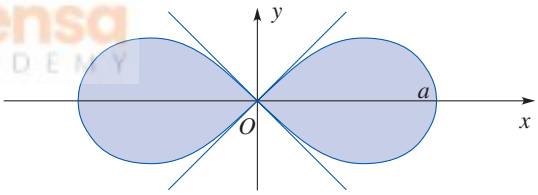
Donc, l'aire recherchée est :

$$\begin{aligned}\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_K r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\int_0^{\rho(\theta)} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\rho^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

3) Vous vérifierez que la lemniscate est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Elle est décrite complètement en prenant θ dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}\right]$.

Par raison de symétrie, son aire, A, est deux fois l'aire de la partie du plan délimitée par θ dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$A = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{a^2\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = a^2 \text{ unités d'aire.}$$



Doc. 17.

Jakob Bernoulli *(1654-1705), mathématicien suisse.*

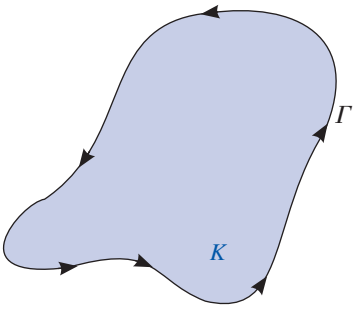
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Formule de Green-Riemann

Théorème 19

Soit K un compact simple du plan, dont la frontière est un arc Γ, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit P et Q deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U contenant K dans $\mathbb{R}$.

$$\int_{\widehat{\Gamma}} (P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y) = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Doc. 18.

Si l'application :

$$\gamma : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t), y(t)) \end{cases}$$

est un paramétrage de Γ qui respecte l'orientation demandée, alors :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] \mathrm{d}t.$$

Exemple :

- Calculer l'aire du compact élémentaire K, c'est calculer :

$$A = \iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Si l'on trouve P et Q de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K tels que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$, on ramène le calcul d'aire par intégrale double sur K à une intégrale curviligne le long du bord de K, orienté dans le sens direct et noté Γ.

Voici trois solutions possibles :

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad P(x,y) = -\frac{1}{2}y\,; \qquad Q(x,y) = x \quad \text{et} \quad P(x,y) = 0\,;$$
$$Q(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad P(x,y) = -y.$$

La formule de Green-Riemann prouve que :

$$A = \int_{\widehat{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\widehat{\Gamma}} x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Gamma}} -y\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque K est une boucle délimitée par une courbe polaire :

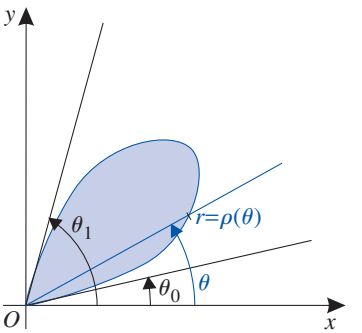
$$\begin{cases} [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^+ \\ \theta \mapsto \rho(\theta) \end{cases}$$

cette intégrale curviligne redonne la formule, vue dans l'application 6, pour l'aire de la boucle. En effet :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2}[x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)]\,\mathrm{d}\theta.$$

Or, $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. Donc :

$$\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$



Doc. 19.

Bernhardt Riemann *(1826-1866), mathématicien allemand.*

George Green *(1793-1841), mathématicien anglais.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 12.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer que la fonction continue f est **intégrable** sur $I \times I'$, on peut :

montrer que, pour tout x de I, la fonction $(y \mapsto |f(x,y)|)$ est intégrable sur I';

montrer que la fonction $\left(x \mapsto \int_{I'} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\,y\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

● Pour calculer l'**intégrale double** d'une fonction continue f sur un compact simple D de $\mathbb{R}^2$ par le changement de variables :

$$\overrightarrow{\Phi} : (s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t)),$$

on procède comme suit.

- On détermine l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\overrightarrow{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- On détermine un compact K de $\mathbb{R}^2$ tel que $D = \overrightarrow{\Phi}(K)$, de telle sorte que :
  - la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective ;
  - le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_K f(x(s,t), y(s,t)) \left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)}\right| \mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t.$$

● Une fonction f continue sur $\mathbb{R}^{+2}$ est integrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si et seulement si la fonction $F : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ est intégrable sur $[0,+\infty[\times [0,\pi/2[$. Dans ce cas :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \iint_{[0,+\infty[\,\times\,[0,\pi/2[} F = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\,\theta\right) \mathrm{d}\,r$$

● Soit K un compact simple du plan, dont la frontière est un arc Γ, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit P et Q deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U contenant K dans $\mathbb{R}$.

$$\int_{\widehat{\Gamma}} (P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y) = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

1. Calcul des intégrales de Fresnel

(D'après CCP, 1996)

Augustin Fresnel (1788-1827), ingénieur français, consacre ses loisirs à l'étude de la lumière. À la suite des expériences du physicien anglais Young qui démontrent la nature ondulatoire de la lumière, ses travaux mathématiques permettent d'expliquer le phénomène des interférences.

Nous avons rencontré, dans les exercices du chapitre 8, les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}\, x, \int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}\, x$$

et montré qu'elles sont semi-convergentes et que $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}\, x > 0$.

Elles sont appelées intégrales de Fresnel et l'objectif de ce TD est de calculer leurs valeurs que l'on appellera respectivement c et s.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé ; on désigne par t un réel positif ou nul, par $D(t)$ l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$0 \leqslant x \leqslant t \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant t.$$

On considère les fonctions C et S définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$C(t) = \int_0^t \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}\, x \quad \text{et} \quad S(t) = \int_0^t \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}\, x$$

et les fonctions K et L définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$K(t) = \iint_{D(t)} \cos\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \qquad \text{et} \qquad L(t) = \iint_{D(t)} \sin\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$$

1)a) Exprimer $K(t)$ et $L(t)$ en fonction de $C(t)$ et $S(t)$.

b) Étudier la continuité des fonctions K et L sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que les fonctions K et L admettent une limite réelle lorsque t tend vers $+\infty$ et calculer ces limites en fonction de c et s.

2) Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$K_1(T) = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) \mathrm{d}\, t \quad \text{et} \quad L_1(T) = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) \mathrm{d}\, t$$

admettent une limite réelle lorsque T tend vers $+\infty$.

Exprimer ces limites en fonction de c et s.

3) On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{si} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{et} \qquad f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a) Tracer la courbe Γ (respectivement Γ_1) définie en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$ (respectivement $\rho = tf(\theta)$).

b) Exprimer $K(t)$ à l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(tf(\theta))^2 \mathrm{d}\, \theta$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4) On considère la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\varphi(T) = \frac{1}{T}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{f(\theta)}\left[\int_0^{Tf(\theta)} \sin\left(u^2\right) \mathrm{d}\,u\right] \mathrm{d}\,\theta.$$

a) Exprimer $K_1(T)$ en fonction de $\varphi(T)$.

b) Montrer que la fonction S est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) Quelle est la limite de $\varphi(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$?

En déduire la limite de $K_1(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$.

d) En déduire une relation entre c et s.

5)a) Calculer de la même manière la limite de $L_1(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$.

b) En déduire une nouvelle relation entre c et s, puis les valeurs de c et s.

6) Donner l'allure du graphe de la fonction S sur $\mathbb{R}^+$.

TD

2. La dernière ligne droite avant la plage !

Nous avons établi que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ est convergente, mais non absolument convergente.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1) On considère la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega = (x\sin x - y\cos x)\,\mathrm{d}\,x + (x\cos x + y\sin x)\,\mathrm{d}\,y$$

Déterminer une fonction $\varphi(y)$ telle que la forme différentielle $\Omega = \dfrac{\varphi(y)}{x^2+y^2}\omega$ soit fermée sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

2) Soit n un entier strictement positif. Le chemin fermé, réunion des quatre arcs Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 indiqués sur le document 25, est noté Γ.

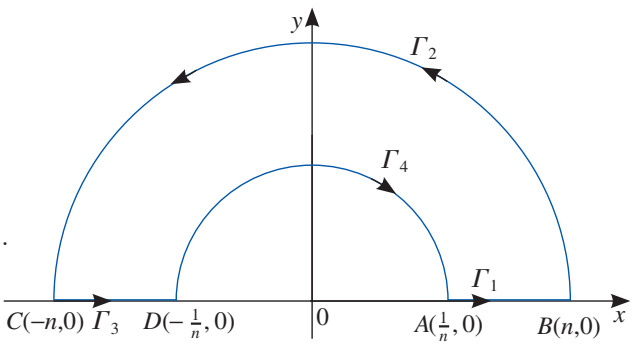
Chaque arc est orienté de telle sorte que Γ soit parcouru dans le sens direct.

a) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\Omega + \int_{\Gamma_3}\Omega$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_2}\Omega$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Faire de même avec $\displaystyle\int_{\Gamma_4}\Omega$.

d) En déduire la valeur de I.



Doc. 25

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 On définit, pour $\lambda > 2$ et n dans $\{2, 3\}$, le champ de scalaires f par $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\lambda}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
Calculer son gradient, puis son laplacien.

2 Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs f défini par :

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^2, x^2yz, x + y^2 + z^2).$$

3 Montrer que :

1) si $\vec{f}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\forall a \in U \quad \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f})(a) = 0.$$

2) si g est un champ de scalaires de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\forall a \in U \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g)(a) = \vec{0}.$$

4 La norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$ est notée $\|\ \|$.
On considère l'application de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\vec{f}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

1) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{f}$.

2) Montrer que $\vec{f}$ dérive d'un potentiel scalaire et le déterminer.

5 On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = ht$$

pour t variant de 0 à 2π.
Calculer $I = \int_{\widehat{\Gamma}} (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$.

6 Soit ω la forme différentielle :

$$\omega = (3x^2y + z^3)\,\mathrm{d}x + (3y^2z + x^3)\,\mathrm{d}y + (3xz^2 + y^3)\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que cette forme différentielle est fermée.
Trouver ses primitives dans $\mathbb{R}^3$.

7 Calculer l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + x^2} \right) \mathrm{d}x.$$

8 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos t}{a - \cos t}\right) \mathrm{d}t$, avec $1 < a < b$.

9 Calculer $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en passant en coordonnées polaires. En déduire $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

10 Tracer la strophoïde d'équation polaire :

$$r = \frac{\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta}$$

Déterminer l'aire de la boucle.

11 Soit a et b deux réels strictement plus grands que 1.
Déterminer l'aire du compact D du quart de plan $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ délimité par les droites d'équations $y = ax$ et $y = \frac{1}{a}x$ et les hyperboles d'équations $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.

12 Calculer :

$$\iint_K (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ par trois méthodes : calcul direct, changement de variables, formule de Green-Riemann.

13 Déterminer l'aire du triangle ABC où les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées $(-1, 0)$, $(1, -1)$, $(3, 1)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Équations différentielles non linéaires

14

Introduction

Les mathématiciens des XVIe, XVIIe *et* XVIIIe *siècles s'occupaient de problèmes de Mécanique, d'Astronomie, de navigation, de génie...*
Vers le milieu du XIXe *siècle, une dichotomie apparut petit à petit entre les mathématiques étudiées pour elles-mêmes, dans un souci croissant de rigueur, et celles tournées vers les sciences de l'ingénieur et la physique. La prédominance des mathématiques dites « pures » s'accentua au* XXe *siècle avec la création, en France, autour d'André Weil, Jean Dieudonné, Henri Cartan, Claude Chevalley et André Delsarte, en* 1934, *du groupe Bourbaki. L'objectif poursuivi était la rédaction cohérente et structurée de traités de mathématiques. Seules les mathématiques abstraites furent alors étudiées.*
Puis la Seconde Guerre mondiale entraîna, aux États-Unis, un effort de recherche considérable dans de nombreux domaines de mathématiques « appliquées » tels que la propagation des ondes, les probabilités et statistiques, la recherche opérationnelle.
Mais les années suivantes virent le retour en force et la suprématie des mathématiques « pour l'honneur de l'esprit humain », ainsi qualifiées par Jacobi dès 1830.
Toutefois, à partir des années 1980, *le décloisonnement des recherches, le développement considérable des capacités de calcul et les besoins des sociétés modernes firent apparaître des besoins pratiques accrus et des méthodes nouvelles. Au raisonnement « linéaire », purement déductif, succède une connaissance basée sur le calcul, des modèles, des conjectures, un questionnement.*
La théorie du chaos et l'étude des systèmes dynamiques sont deux domaines des mathématiques modernes qui illustrent cette évolution.

OBJECTIFS

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz des équations différentielles non linéaires.
- Le cas des équations autonomes.
- Résolution des équations à variables séparables.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans tout ce chapitre, E désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

Généralités

1.1. Définitions

Soit $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E. On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$x' = F(t, x) \qquad \textbf{(1)}$$

toute application φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, telle que φ soit dérivable sur I et :

$$\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

On dit aussi que φ est une ***I*-solution**.

Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, tout graphe d'une solution de l'équation différentielle est appelé **courbe intégrale** de l'équation.

Une ***I*-solution** φ de l'équation différentielle (1) est dite **maximale** s'il n'existe pas d'intervalle J contenant strictement I et de J-solution ψ de l'équation différentielle (1) telle que $\psi_{|I} = \varphi$.

Nous avons établi dans le *chapitre* 9, *paragraphe* 1.3, que toute équation linéaire d'ordre n peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1, en posant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Rapport Centrale, 1997

« Au rang des notions mal digérées, nous mettrons : le calcul différentiel, les équations différentielles... »

1.2. Propriétés élémentaires

Théorème 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E.

Lorsque l'application F est continue sur U, toute solution φ de l'équation différentielle $x' = F(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition.

Démonstration

En effet, si φ est une solution définie sur l'intervalle I de l'équation différentielle **(1)** nous savons que : $\forall t \in I \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$. Composée de fonctions continues, la fonction φ' est continue.

Théorème 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E. Lorsque l'application F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, toute solution φ de l'équation différentielle $x' = F(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son intervalle de définition.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 Le cas des équations autonomes

2.1. Définition

Une **équation différentielle** d'ordre 1 est dite **autonome** si elle ne dépend pas de la variable t. Elle s'écrit alors :

$$x' = F(x) \qquad \textbf{(2)}$$

U désigne un ouvert de E et F une application de U dans E.

En particulier, le programme nous demande d'étudier :

- Le cas $E = \mathbb{R}$

U est un intervalle I de $\mathbb{R}$, le plus souvent ouvert, et f est une application de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. L'équation différentielle :

$$x' = f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

est appelée **équation différentielle autonome d'ordre 1** sur $\mathbb{R}$.

- Le cas $E = \mathbb{R}^2$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f, g désignent deux applications de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. L'équation différentielle :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

est appelée **système différentiel autonome d'ordre 2** .

Cette équation s'obtient en prenant $F = (f, g)$ et $X = (x, y)$.

- Dans l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$x'' = g(x, x') \qquad \textbf{(5)}$$

la variable n'intervient pas explicitement. Cette équation différentielle autonome équivaut au système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

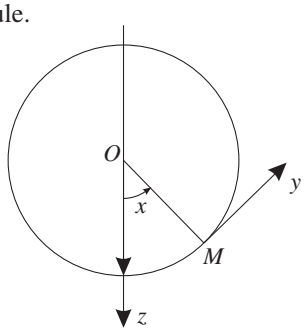
Nous retrouvons le cas précédent avec $f(x, y) = y$.

Rapport ENS, 2000

« Considérant une équation différentielle ordinaire non linéaire $u' = C - u^2$, plusieurs candidats commencent par écrire l'équation "homogène" associée qui n'existe pas puisqu'il s'agit d'un problème non linéaire. »

Lorsque la variable t désigne le temps, une équation différentielle autonome est une équation différentielle dans laquelle le temps t n'intervient pas explicitement.

Le pendule rigide, sans frottement, situé dans un plan vertical, fournit un exemple simple de système autonome. En effet, le mouvement du pendule est parfaitement déterminé par sa position et sa vitesse à l'instant initial. Supposons le pendule de longueur 1 et appelons x l'angle de Oz et de $\overrightarrow{OM}$, y la vitesse angulaire du pendule. L'ensemble des couples (x, y) est appelé l'**espace de phase** du pendule.



L'équation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$-mg \sin x = mlx''$$

En posant $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, on obtient $x'' = -\omega^2 \sin x$.

Puis $\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x \end{cases}$.

Nous reconnaissons un système différentiel autonome d'ordre 2. Il sera étudié dans le paragraphe 4.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Interprétation géométrique d'un système différentiel autonome

Soit $\overrightarrow{V}\left\{\begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y)) \end{array}\right.$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et φ une solution du système différentiel autonome $\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$ sur I.

L'ensemble $\varphi(I)$ est appelé une **orbite** ou une **courbe intégrale du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$**. On parle également de **ligne de champ du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$**.

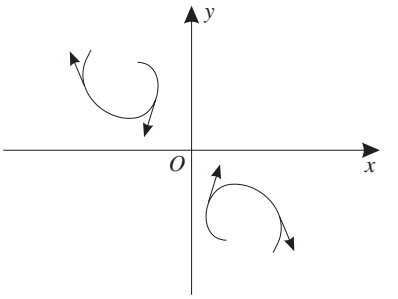
Une courbe intégrale du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est une courbe (Γ) telle que, en chacun de ses points M, la courbe (Γ) admet une tangente de direction $\overrightarrow{V}(M)$.

Étude des symétries et des périodes

1) $\exists \varepsilon \in \{-1,1\} \quad \forall (x,y) \in U \left\{\begin{array}{l} f(-x,-y) = \varepsilon f(x,y) \\ g(-x,-y) = \varepsilon g(x,y) \end{array}\right.$

En deux points symétriques par rapport à O, les tangentes ont même pente (*doc.* 1).

Le faisceau des orbites est alors symétrique par rapport à O, car, si φ est solution, la fonction ψ définie par $\psi(t) = -\varphi(-\varepsilon t)$ l'est aussi.

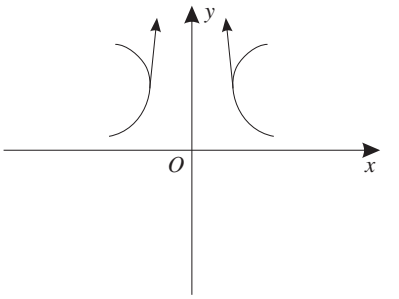


Doc. 1.

2) $\exists \varepsilon \in \{-1,1\} \quad \forall (x,y) \in U \left\{\begin{array}{l} f(-x,y) = \varepsilon f(x,y) \\ g(-x,y) = -\varepsilon g(x,y) \end{array}\right.$

En deux points symétriques par rapport à O, les tangentes ont des pentes opposées (*doc.* 2).

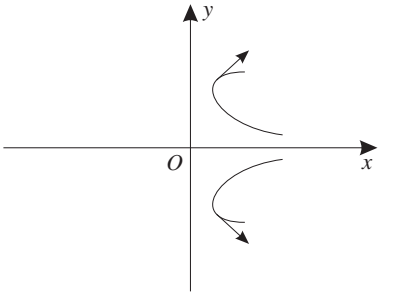
Le faisceau des orbites est alors symétrique par rapport à (Oy).



Doc. 2.

3) $\exists \varepsilon \in \{-1,1\} \quad \forall (x,y) \in U \left\{\begin{array}{l} f(x,-y) = \varepsilon f(x,y) \\ g(x,-y) = -\varepsilon g(x,y) \end{array}\right.$ (*doc.* 3).

Le faisceau des orbites est alors symétrique par rapport à (Ox).



Doc. 3.

4) $\exists T > 0 \quad \forall (x,y) \in U \left\{\begin{array}{l} f(x+T,y) = f(x,y) \\ g(x+T,y) = g(x,y) \end{array}\right.$

Le faisceau des orbites est alors invariant par toute translation de la forme $KT\vec{i}$.

Vous énoncerez les résultats analogues concernant une périodicité par rapport à y. En cas de double périodicité, il suffit d'étudier les solutions dans une fenêtre $[a, a+T] \times [b, b+T]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz

3.1. Le cas général

E désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout (t_0, x_0) de U, il existe un intervalle I, voisinage de t_0, et une I-solution φ de l'équation différentielle $x' = F(x,t)$ **(1)** telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

De plus, φ est l'unique solution de **(1)** sur I.

Corollaire 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, F une application de U dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et J un intervalle d'intérieur non vide. Si φ_1 et φ_2 sont deux J-solutions de l'équation différentielle $x' = F(t,x)$ prenant la même valeur en un point t_1 de J, elles coïncident sur J.

Démonstration

Soit $A = \{t \in J \,;\, \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. La partie A est non vide car : $t_1 \in A$.

A est un fermé relatif à J car les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues.

Montrons que A est un ouvert relatif à J.

Soit t_2 un point de A. On a : $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = x_2$. Le point (t_2, x_2) est dans U car φ_1 et φ_2 sont solutions de l'équation différentielle.

Si t_2 est un point intérieur à J, d'après le théorème 3, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$ soit contenu dans J et il existe une unique solution φ de l'équation différentielle sur l'intervalle $]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$.

On en déduit : $\varphi_{1|J} = \varphi_{2|J} = \varphi_{|J}$ Puis : $]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[\subset A$. A est ouvert.

On procède de même avec un intervalle $]t_2 - \varepsilon, t_2[$ ou $]t_2, t_2 + \varepsilon[$ si t_2 est une borne de J.

Or, J est connexe par arcs, donc $A = J$.

Corollaire 3.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, F une application de U dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et φ une I-solution de l'équation différentielle $x' = F(t,x)$.

Si :

- a est une borne de l'intervalle I telle que $\lim_a \varphi = l$,
- le point (a, l) appartient à U,

alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction φ soit prolongeable sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ en une solution de l'équation différentielle.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Une bonne moitié des candidats ne pensent pas à utiliser le théorème de Cauchy. »

Conformément au programme, nous admettrons ce théorème.

Rapport ENS, 1997

« Pour ce qui est des équations différentielles, le théorème de Cauchy-Lipschitz est bien connu dans l'ensemble, même si le domaine de définition de F pour l'équation $y' = F(y)$ engendre parfois quelques confusions. Plus surprenant, une proportion non négligeable de candidats ne sait pas intégrer l'équation différentielle $y' = y^\alpha$, sans parler de l'inéquation $y' \leqslant y^\alpha$. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Notons φ une I-solution de l'équation différentielle avec $I =]a, b[$. L'application φ est prolongeable par continuité au point a et $\varphi(a) = l$.

De plus, pour tout t de $]a, b[$, on a : $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$. La fonction φ' admet la limite $F(a, l)$ lorsque t tend vers a.

Puisque le point (a, l) appartient à U, il existe un voisinage J de a et une application ψ définie sur J, solution sur J de l'équation différentielle et vérifiant $\psi(a) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que : $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset J$ et $a + \varepsilon < b$. La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, donc $\psi_{]a-\varepsilon,a]}$ est un prolongement continu de φ.

De plus, pour tout t de J : $\psi'(t) = F(t, \psi(t))$. La fonction $\psi'_{]a-\varepsilon,a]}$ est un prolongement par continuité de φ'.

Ainsi prolongée, la fonction φ est une solution de l'équation différentielle sur $]a - \varepsilon, b[$.

Rapport ENS, 1997

« Néanmoins, afin d'aider les étudiants à mieux préparer le concours, le jury voudrait signaler les faits suivants. En ce qui concerne les équations différentielles, les candidats connaissent un ***théorème des bouts sophistiqué*** *mais ne savent pas l'appliquer à des situations simples. »*

Théorème 4. Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, F une application de U, dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et l'équation différentielle $x' = F(t, x)$.

1) Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur des intervalles ouverts.

2) Pour tout (t_0, x_0) de U, il existe une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

3) Les graphes (Γ_φ) de l'ensemble des solutions maximales forment une partition de U. Ces graphes sont appelés les courbes intégrales maximales.

4) Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Il est clair que, si les candidats avaient énoncé in extenso le théorème de Cauchy-Lipschitz ils se seraient probablement rendu compte de la différence entre conditions initiales et conditions aux limites. »

Démonstration

1) Ce point découle du corollaire 3.2.

2) Soit (t_0, x_0) un point de U et L l'ensemble de tous les intervalles I d'intérieur non vide tels qu'il existe une I-solution φ_1 de l'équation différentielle vérifiant $\varphi_1(t_0) = x_0$. D'après le théorème 3, l'ensemble L est non vide.

Posons $J = \bigcup_{I \in L} I$. J est une réunion d'intervalles contenant t_0. J est donc un intervalle contenant t_0.

Construisons une J-solution φ de l'équation différentielle.

Soit t un point de J. Considérons deux intervalles I_1, I_2 de L contenant t et φ_1 (respectivement φ_2) une I_1-solution (respectivement I_2-solution) de l'équation différentielle.

$I_1 \cap I_2$ est un intervalle contenant t et t_0. D'après le corollaire 3.1, nous pouvons dire que les restrictions de φ_1 et φ_2 à $J_1 \cap J_2$ coïncident. D'où $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

On définit alors φ. Si t est un point de J, I un intervalle de L contenant t et ψ une I-solution de l'équation différentielle, la valeur de $\psi(t)$ ne dépend pas du choix de I et de ψ. Cet argument nous permet de poser $\varphi(t) = \psi(t)$.

Le corollaire 3.2 permet de plus d'affirmer que, si t est un point de J, il existe un intervalle ouvert de I de L contenant t.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrons que φ est solution de l'équation différentielle $x' = F(t,x)$.

Soit ψ la solution associée à I.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subset I$.

Par construction de φ, on a $\varphi_{]t-\varepsilon,t+\varepsilon[} = \psi_{]t-\varepsilon,t+\varepsilon[}$.

On en déduit que φ est dérivable en t et que $\varphi'(t) = F(t,\varphi(t))$ pour tout t de J.

L'application φ est solution sur J de l'équation différentielle et vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.

3) Ce point découle du théorème 3 et du corollaire 3.2.

4) Immédiat.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Au chapitre équations différentielles, il est quasiment impossible de donner une étude qualitative d'équation différentielle. C'était pourtant l'objet de l'une des épreuves d'écrit. »

Application 1

Équation de Ricatti (d'après XP' 95)

On considère l'équation différentielle (E_1) *:* $y' = x^2 + y^2$, *où* y *désigne une fonction inconnue de la variable réelle* x.

1) *Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?*

2) *Soit* φ *une solution maximale de* (E_1) *et* I *son intervalle ouvert de définition.*

a) *Montrer que* φ *est strictement croissante sur* I.

b) *On suppose* I *borné. Montrer que* $\varphi(I) = \mathbb{R}$.

1) L'application F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Le domaine de définition d'une solution maximale est un intervalle ouvert.

D'autre part, toute solution maximale impaire est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si une telle solution existe, elle est unique.

Considérons la solution maximale y de ce problème et montrons qu'elle est impaire. Elle est définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$, avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons z la fonction définie sur $]-b,-a[$ par $z(x) = -y(-x)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-b,-a[$ et solution du même problème de Cauchy. Les fonctions y et z coïncident. La fonction y est impaire.

L'équation différentielle admet une unique solution impaire.

2) a) Pour tout x de I, on a :

$$\varphi'(x) \geqslant x^2.$$

La fonction φ est strictement croissante sur I.

b) Notons $I =]a,b[$, avec a et b réels.

L'application φ est continue et strictement croissante sur I. $\varphi(I)$ est donc l'intervalle $]\lim\limits_{x\to a}\varphi(x), \lim\limits_{x\to b}\varphi(x)[$.

Supposons cet intervalle majoré et notons :

$$c = \lim_{x\to b}\varphi(x)$$

La fonction φ se prolonge par continuité en b en posant $\varphi(b) = c$.

De plus, $\lim\limits_{x\to b}\varphi'(x) = b^2 + c^2$.

D'après le corollaire 3.2, la fonction φ se prolonge sur $]a,b+\varepsilon[$ en une solution de (E_1).

Or, φ a été supposée maximale. L'intervalle $\varphi(I)$ n'est donc pas majoré.

On montre de même qu'il n'est pas minoré.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Cas des équations autonomes

Énoncé des théorèmes de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'une équation d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et l'équation différentielle :

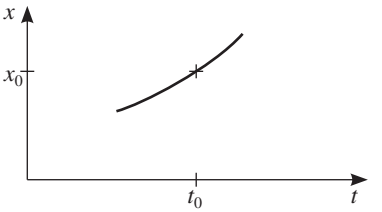
$$x' = f(x)$$

- Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur des intervalles ouverts.
- Pour tout réel t_0 et tout x_0 de U, il existe une solution maximale φ définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et telle que :

$$\varphi(t_0) = x_0$$

- Les graphes (Γ_φ) de l'ensemble des solutions maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times U$. Ces graphes sont appelés les courbes intégrales maximales.
- Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

Cas du théorème 5
Par un point de $U \times \mathbb{R}$, il passe une courbe intégrale et une seule.



Doc. 4.

Énoncé des théorèmes de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'un système linéaire autonome

Théorème 6

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f, g deux applications de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

- Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur des intervalles ouverts.
- Pour tout (t_0, x_0, y_0) de $\mathbb{R} \times U$, il existe une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et telle que :

$$\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$$

- Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.
- Les graphes (Γ_φ) de l'ensemble des solutions maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times U$. Ces graphes sont appelés les courbes intégrales maximales.
- Les courbes images des solutions maximales $\{(x(t), y(t)) \,;\, t \in \mathbb{R}\}$, appelées **orbites**, forment une partition de U. L'ensemble de toutes les orbites est le **portrait de phase**.

Application à $x'' = g(x, x')$

Théorème 7

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, g une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et l'équation différentielle $x'' = g(x, x')$.

Rapport Centrale, 1998

« Les théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles scalaires du 1er ordre $x' = f(t,x)$ et pour les systèmes autonomes ne sont pas connus. »

Rapport CCP, 1997

« La notion d'unicité d'une solution parmi une classe de fonctions est souvent mal cernée. »

Rapport ENS, 2000

« Les cas d'existence globale d'équations différentielles sont souvent mal connus, et beaucoup de candidats sont désemparés devant des portraits de phase simples. »

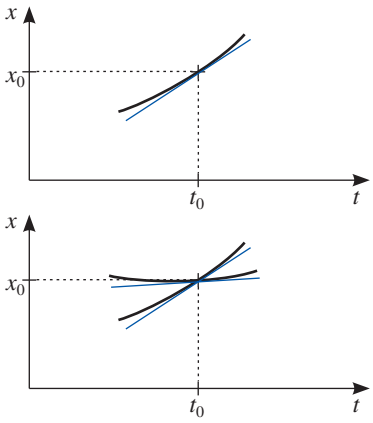
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur des intervalles ouverts.
- Pour tout (t_0, x_0, x_0') de $\mathbb{R} \times U$, il existe une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et telle que :

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad x'(t_0) = x_0'$$

- Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.
- Les graphes (Γ_φ) de l'ensemble des solutions maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times U$.
  Ces graphes sont appelés les courbes intégrales maximales.
- Les courbes images des solutions maximales $\{(x(t), y(t)) ; t \in \mathbb{R}\}$ appelées orbites forment une partition de U. L'ensemble de toutes les orbites est le **portrait de phase**.

Cas du théorème 7
Par un point de $U \times \mathbb{R}$ il passe une courbe et une seule admettant une tangente donnée.
Il peut y avoir plusieurs solutions distinctes si les tangentes ne sont pas les mêmes.



Doc. 5.

Théorème 8. Invariance par translation

Soit U un ouvert de E, F une application de U dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et l'équation différentielle :

$$x' = F(x)$$

Pour tout x de U, on note φ_x l'unique solution maximale de l'équation différentielle qui prend la valeur x en 0 et J_x son intervalle ouvert de définition.

Alors, si s est un point de J_x et $y = \varphi_x(s)$, l'intervalle J_y est l'intervalle J_x translaté de $-s$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t \in J_y \Leftrightarrow s + t \in J_x$$

De plus, dans ces conditions :

$$\varphi_y(t) = \varphi_x(s + t)$$

Démonstration

Appelons J l'intervalle ouvert $J_y + s$. Il contient s.

Notons ψ la fonction définie sur J par : $\psi(t) = \varphi_y(t - s)$. La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et :

$$\forall t \in J \quad \psi'(t) = \varphi_y'(t - s) = F\left(\varphi_y(t - s)\right) = F\left(\psi(t)\right).$$

La fonction ψ est donc solution de l'équation différentielle sur J.

De plus, $L = J_x \cap J$ est un intervalle ouvert contenant s. Les fonctions $\varphi_{x|L}$ et $\psi_{|L}$ sont solutions sur L de l'équation différentielle et : $\psi(s) = \varphi_y(0) = \varphi_x(s)$. Elles sont restrictions à L d'une même solution. Elles coïncident sur L.

$K = J_x \cup J$ est un intervalle ouvert contenant s.

Les fonctions φ_x et ψ coïncident sur $J_x \cap J$. On peut définir sur K la fonction μ par :

$$\begin{cases} \forall t \in J_x & \mu(t) = \varphi_x(t) \\ \forall t \in J & \mu(t) = \psi(t) \end{cases}$$

Montrons que μ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K.

Les bornes de $L = J_x \cap J$ appartiennent au moins à J_x ou à J, ou bien sont les bornes de J_x ou de J.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si elles sont les bornes de J_x ou de J, le résultat est immédiat.

Sinon, elles sont intérieures à K et il faut vérifier le raccordement.

Dans ce cas, supposons par exemple que $\inf L = \beta$ est intérieur à J.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\subset J$.

La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$. Elle coïncide avec φ_y sur $]\beta - \varepsilon, \beta[$.

La fonction μ est égale à ψ sur $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au point β.

La fonction μ est solution sur K de l'équation différentielle.

Or, φ_x est une solution maximale. Puisque $\varphi_x(s) = \mu(s)$, on a :

$$\varphi_{x|K} = \mu \quad \text{et} \quad K \subset J_x .$$

Donc, $J \subset J_x$.

Ceci montre que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad t \in J_y \Rightarrow s + t \in J_x$. La réciproque est immédiate en substituant y à x et $-s$ à s.

Nous avons également montré que :

$$\forall t \in J_y \quad \varphi_y(t) = \varphi_x(s + t).$$

Application 2

Le pendule rigide, sans frottement

Rapport ENS, 1997

« Les examinateurs apprécient toujours qu'on utilise des méthodes issues de la Physique ; par exemple, les méthodes de calcul d'énergie sont souvent très utiles pour l'étude qualitative des solutions d'équations différentielles. Il est évidemment hors de question de chipoter sur le théorème de Cauchy-Lipschitz. »

Nous avons rencontré cet exemple et montré qu'il vérifie le système différentiel autonome d'ordre 2 :

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

Le pendule étudié étant sans frottement, il conserve son énergie initiale.

Calculer cette énergie, en prenant $m = 1\ g$.

Vous connaissez la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique :

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x).$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\partial E}{\partial y}(x, y) \\ y'(t) = -\dfrac{\partial E}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

La conservation de l'énergie entraîne que les orbites du mouvement sont contenues dans les courbes de niveau de E, d'équations :

$$E(x, y) = C,$$

avec C un réel positif fixé.

Étudions les courbes Γ_C d'équation :

$$\frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x) - C = 0, \quad \text{avec} \quad C \geqslant 0.$$

• Si $C = 0$, $\Gamma_C = \{(2k\pi, 0)\}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Le pendule est immobile.

• Si $C > 0$, les axes (Ox) et (Oy) sont axes de symétrie de la courbe.

De plus, la courbe est conservée par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

Effectuons l'étude en nous limitant aux points tels que :

$$x \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad y \geqslant 0.$$

Si $0 < C < 2\omega^2$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

x	0		$\text{Arccos}\left(1-\frac{C}{\omega^2}\right)$
y	$\sqrt{2C}$	↘	0

Si $C \geqslant 2\omega^2$

x	0		π
y	$\sqrt{2C}$	↘	$\sqrt{2C-4\omega^2}$

Les courbes obtenues sont donc de trois types :

Si $C = 0$, le pendule est en équilibre. La courbe est un point :

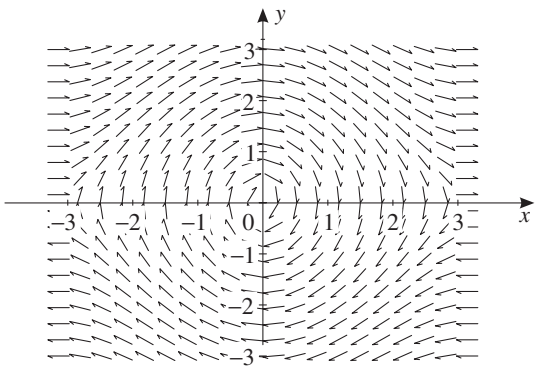
$$\{(2k\pi, 0)\}, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $0 < C < 2\omega^2$, les courbes sont définies sur :

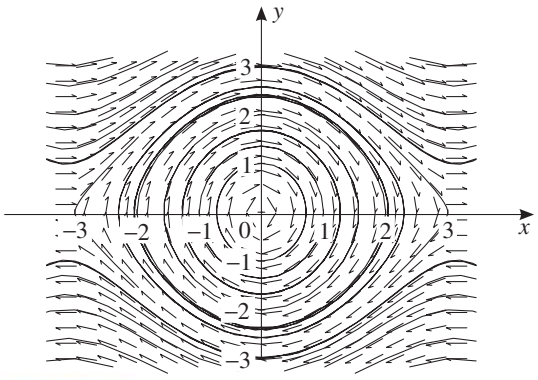
$$\left]-\text{Arccos}\left(1-\frac{C}{\omega^2}\right)+2k\pi, \text{Arccos}\left(1-\frac{C}{\omega^2}\right)+2k\pi\right[.$$

Si $C \geqslant 2\omega^2$, les courbes sont définies sur $\mathbb{R}$.

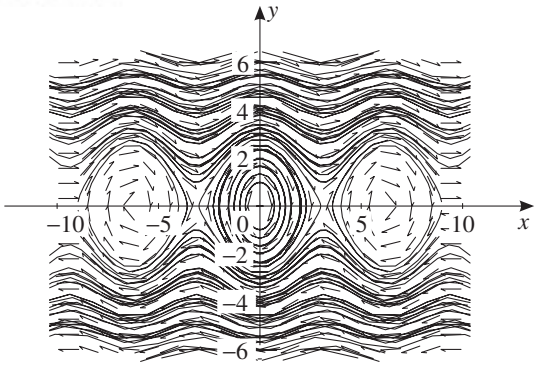
Toute orbite d'une solution maximale est contenue dans une de ces courbes. Réciproquement, chacune de ces courbes est l'orbite d'une solution. L'ensemble de ces courbes est appelé portrait de phase du pendule sans frottement.



Doc. 6.



Doc. 7. *Portrait de phases du pendule sans frottement.*



Doc. 8. *Portrait de phases du pendule sans frottement.*

3.3. Autres exemples

L'équation différentielle $x' = \sqrt{x}$

L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en tout point (t_0, x_0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. La solution nulle est une solution particulière de l'équation.

De plus, toute solution de l'équation différentielle est croissante.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit x une solution ne s'annulant pas sur un intervalle I. Écrivons $\dfrac{x'}{\sqrt{x}} = 1$.

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ \forall t \in I \quad 2\sqrt{x(t)} = t - C$$

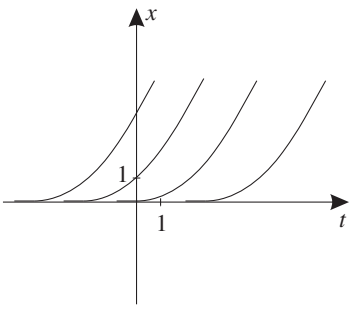
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant C \\ x(t) = \dfrac{1}{4}(t-C)^2 \end{cases}$$

Prolongeons les solutions obtenues en posant pour $t \leqslant C$, $x(t) = 0$. (*doc.* 9).

Nous obtenons des solutions sur $\mathbb{R}$ et nous constatons que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas en un point (t_0, x_0) tel que $x_0 = 0$.

Nous avons obtenu les solutions maximales de l'équation.

En un point $(t_0, 0)$, une courbe intégrale sera nécessairement tangente à (x', x). Les courbes intégrales passant par $(t_0, 0)$ sont l'axe (x', x) et la courbe obtenue en raccordant la solution nulle et une demi-parabole.



Doc. 9.

L'équation différentielle $xx'' - 2x'^2 - x^2 = 0$

La fonction nulle est solution particulière de cette équation.

Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, écrivons l'équation différentielle sous la forme $x'' = \dfrac{2x'^2 + x^2}{x}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en tout point (t_0, x_0, x_1) tel que $x_0 \neq 0$.

Soit x une solution de l'équation différentielle ne s'annulant pas sur un intervalle I.

L'équation équivaut au système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \left[1 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right] x \end{cases} \qquad \textbf{(1)}\ .$$

Substituons à $y(t)$ la fonction $z(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

Le système différentiel (1) équivaut à $\begin{cases} x' = zx \\ z' = 1 + z^2 \end{cases}$

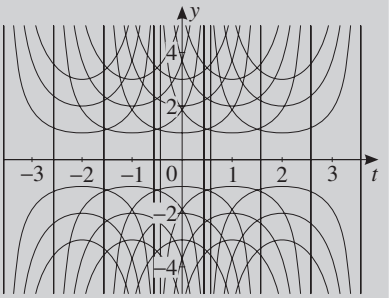
$$z' = 1 + z^2 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}\, z = t - C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} z = \tan(t - C) \\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + C, \dfrac{\pi}{2} + C\right[\end{cases}$$

Puis $\dfrac{x'}{x} = \tan(t - C)$ et $x(t) = \dfrac{a}{\cos(t - C)}$ (*doc.* 10).

Avec MAPLE :

```
> restart:
  L:=[]:
  for k from -2 to 2 do
    for j from -3 to 3 do
  L:=L,plot(j/cos(t-k),
  t=-Pi/2+k..Pi/2+k,y=-5..5)
  od: od:
> with(plots):display(L);
```



Doc. 10.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4 Équations différentielles à variables séparables

Une équation différentielle à variables séparables est une équation différentielle de la forme :

$$a(x) + b(y)y' = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

où a et b sont deux fonctions continues définies respectivement sur les intervalles I et J. On note $U = I \times J$.

Il existe f de U dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b(y).$$

Il suffit de prendre :

$$f(x, y) = \int_{\alpha}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t = A(x) + B(y).$$

L'équation différentielle s'écrit : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)y' = 0.$

Une application φ définie sur un intervalle I est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Introduisons l'application $\psi : x \mapsto f(x, \varphi(x))$.

L'équation **(2)** équivaut à $\psi'(x) = 0$. L'application φ est donc solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in I \quad f(x, \varphi(x)) = c.$$

L'application φ est donc solution de l'équation différentielle **(1)** si et seulement si :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad A(x) + B(\varphi(x)) = c.$$

Méthode pratique :

- On commence par séparer les variables et on écrit l'équation sous la forme $a(x) = -b(y)y'$.

Lorsque l'équation différentielle est donnée sous la forme :

$$a(x)c(y) + b(y)y' = 0$$

toute fonction constante $\varphi = y_0$, telle que y_0 annule c, est solution de l'équation différentielle. On suppose que $b(y_0) \neq 0$. Il existe alors un intervalle ouvert contenant y_0 sur lequel la fonction b ne s'annule pas. L'application $(x, y) \mapsto -\dfrac{a(x)c(y)}{b(y)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $I \times \{y_0\}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. La fonction φ est l'unique solution maximale prenant la valeur y_0. On détermine ensuite les solutions maximales ne prenant pas la valeur y_0. Cette condition permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$a(x) = -\frac{b(y)}{c(y)}y'.$$

- On intègre séparément :

$$A(x) = -B(y) + c.$$

Puis, on isole y si possible.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 2.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Une équation différentielle à variables séparables

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'\left(4-x^2\right)^2+8xy^2=0.$$

L'équation différentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\neq\pm2$, l'équation s'écrit :

$$y'=-8\frac{xy^2}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Notons les intervalles :

$I_1=]-\infty,-2[$, $I_2=]-2,2[$, $I_3=]2,+\infty[$

et

$D_1=I_1\times\mathbb{R}$, $D_2=I_2\times\mathbb{R}$, $D_3=I_3\times\mathbb{R}$.

L'application $(x,y)\mapsto-8\dfrac{xy^2}{\left(4-x^2\right)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des ouverts D_1, D_2, D_3.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

En particulier, nous remarquons que la fonction nulle est solution de l'équation différentielle. Elle est la seule solution de cette équation qui s'annule sur son domaine de définition.

Recherchons les autres solutions. Elles ne s'annulent pas. On peut diviser par y^2.

L'équation différentielle équivaut à :

$$\frac{y'}{y^2}=-\frac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Puis à $\dfrac{1}{y}=-\displaystyle\int\frac{8x\,\mathrm{d}x}{\left(4-x^2\right)^2}+c$

Avec MAPLE :

```
> int(8*x/(4-x^2)^2,x);
```

$$-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$$

Nous obtenons :

$$y=\frac{4-x^2}{4+c\left(x^2-4\right)}=\frac{4-x^2}{cx^2+4(1-c)}.$$

Pour $c=0$, $y=1-\dfrac{x^2}{4}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et solution maximale sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

Pour c dans $]0,1[$, nous obtenons une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Elle est solution de l'équation sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3. Elle est aussi dérivable en -2 et en 2 et solution de l'équation en ces points. Il s'agit donc de solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$.

Pour $c=1$, $y=\dfrac{4}{x^2}-1$. Cette fonction est solution maximale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour c dans $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, nous obtenons :

$$y=\frac{4-x^2}{cx^2+4(1-c)}.$$

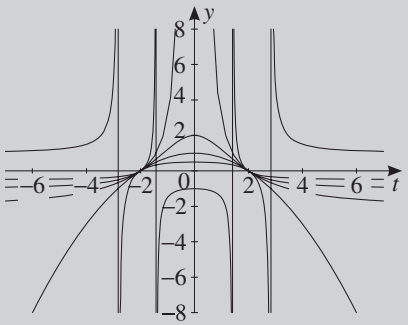
Cette fonction est solution maximale de l'équation différentielle sur $\left]-\infty,-\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}\right[$, sur $\left]\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}},+\infty\right[$ et sur $\left]-\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}},\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}\right[$.

En définitive, nous remarquons qu'une infinité de courbes intégrales passent par les points $(-2,0)$ et $(2,0)$ (*doc.* 11).

Avec MAPLE :

```
> restart:
  L:=[];
  for k from -1 to 2 do
  L:=L,plot((-t^2+4)/(k*t^2+4*(1-k)),
  t=-7..7,y=-8..8) od:
  L:=L,plot((-t^2+4)/(.5*t^2+4*(.5)),
  t=-7..7,y=-8..8):
> with(plots):display(L);
```

$L := []$



Doc. 11.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

Pour résoudre une **équation différentielle non linéaire** :

- on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un domaine ouvert adéquat après avoir mis l'équation différentielle sous forme résolue ;
- si l'équation différentielle est à variables séparables, on utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'écrire sous la forme $a(x)\,\mathrm{d}x = b(y)\,\mathrm{d}y$ et on intègre séparément les deux membres ;
- si une détermination exacte n'est pas possible, il ne reste que des méthodes numériques d'approximation des solutions.

Exercice résolu

Attraction de Newton

ÉNONCÉ

Le point matériel M se déplace sur un axe $(y'Oy)$ en étant soumis à une force d'attraction newtonienne :

$$\overrightarrow{F} = -\omega^2 \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2}.$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point M a pour abscisse $y_0 > 0$ et pour vitesse initiale y'_0 et on note $y(t)$ la position du point M à l'instant $t \geqslant 0$.

Étudier le mouvement du point M.

CONSEILS

SOLUTION

Le problème posé revient, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, à la recherche des solutions, sur une partie de $\mathbb{R}^+$, du système :

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\omega^2}{my^2} \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{cases} \qquad (1)$$

L'application $(y, z) \mapsto -\dfrac{\omega^2}{my^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe une unique solution maximale φ du système **(1)**. la fonction φ est continue et ne s'annule pas. Elle est toujours strictement positive.

Multiplions les deux membres de l'équation différentielle par $2y$. Nous obtenons $2yy'' = -2\dfrac{\omega^2}{my^2}y'$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Intégrons $y'^2 = y_0'^2 + 2\dfrac{\omega^2}{m}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}\right)$.

Supposons d'abord $y_0' > 0$ et regardons si y' est susceptible de s'annuler. Deux cas peuvent être distingués.

- $y_0'^2 - 2\dfrac{\omega^2}{m}\dfrac{1}{y_0} \geqslant 0$

Dans ce cas, la fonction y' est toujours positive et :

$$y' = \sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)}.$$

La fonction y est croissante et le résultat précédent s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)}.$$

Puis, $\mathrm{d}\,t = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{y_0'^2 + 2\dfrac{\omega^2}{m}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}\right)}}$.

Intégrons :

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'expression $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}$ tend également vers $+\infty$, car la fonction $\left(u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{y_0'^2 + 2\dfrac{\omega^2}{m}\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{y_0}\right)}}\right)$ n'est pas intégrable sur $[y_0, +\infty[$.

La solution maximale est donc définie sur $\mathbb{R}^+$. Le point M s'éloigne sur le demi-axe $[Oy)$ lorsque le temps t tend vers $+\infty$.

- $y_0'^2 - 2\dfrac{\omega^2}{m}\dfrac{1}{y_0} < 0$

La vitesse y' s'annule, à l'instant t_1, lorsque :

$$y_1 = 2\frac{\omega^2}{m}\frac{1}{2\dfrac{\omega^2}{m}\dfrac{1}{y_0} - y_0'^2}.$$

On a $t_1 = \displaystyle\int_{y_0}^{y_1} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}$.

L'abscisse du point mobile croît de y_0 à y_1 lorsque t croît de 0 à t_1, sa vitesse est alors positive. Puis le point rebrousse chemin. Son abscisse décroît, sa vitesse est négative.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'abscisse du point M décroît de y_1 à 0. Elle tend vers 0 lorsque t tend vers t_2 défini par :

$$t - t_2 = \int_0^{y_1} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{y'^2_0 + 2\dfrac{\omega^2}{m}\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{y_0}\right)}}.$$

Toutefois, lorsque t tend vers t_2, la vitesse du point M tend vers $-\infty$. La solution ne peut être prolongée au-delà de t_2. La solution maximale est alors définie sur $[0, t_2[$.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Résoudre l'équation différentielle $y' = \operatorname{sh} y$.

2 Résoudre l'équation différentielle :

$$x' = x^2$$

3 Résoudre l'équation différentielle $y' = \sin y$.

4 * Déterminer les courbes intégrales de l'équation différentielle **(s)** :

$$(x + yy')^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2 + 2xyy')^2$$

en utilisant un passage en coordonnées polaires.

5 * Soit f la solution maximale de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{-xy}$ telle que $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f possède en $+\infty$ une limite l appartenant à $\left[1, 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

6 *Étude géométrique d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle **(1)** :

$$x'(t) = \sin(tx)$$

1) Montrer que les solutions maximales de l'équation **(1)** sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel b, on note x_b la solution maximale de l'équation vérifiant $x(0) = b$. Étudier la parité de x_b. Quelle relation lie x_b et x_{-b} ?

Dans toute la suite, on suppose $b > 0$.

3) Montrer que, pour tout t réel, on a $x_b(t) > 0$.

4) Pour k dans $\mathbb{N}$, on note :

$$\Gamma_k = \left\{(t,x) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 \quad ; \quad xt = k\pi\right\}.$$

On définit l'application f_b de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue et affine par morceaux de la manière suivante : $f_b(0) = b$.

- Entre Γ_{2k} et Γ_{2k+1}, le graphe de f_b est un segment parallèle à la première bissectrice.
- Entre Γ_{2k+1} et Γ_{2k+2}, le graphe de f_b est un segment parallèle à l'axe des t.

Montrer que :

$$\forall t \geqslant 0 \quad x_b(t) \leqslant f_b(t).$$

5) Montrer que le graphe de f_b rencontre la première bissectrice.

En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x_b(t_0) = t_0$.

Montrer que :

$$(\forall t < t_0) \quad (x_b(t) > t) \quad \text{et} \quad (\forall t > t_0) \quad (x_b(t) < t).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Courbes et surfaces

15

Introduction

Les premières courbes que vous avez rencontrées au collège, puis au lycée, sont les droites définies par une équation de la forme : $y = ax + b$, *les hyperboles d'équation :* $y = \dfrac{a}{x}$, *les paraboles d'équation :* $y = ax^2 + bx + c$...

En Première année, vous avez étudié des courbes définies sous forme paramétrique :

$$t \longmapsto (x,\ y) = (x(t),\ y(t)).$$

Les courbes définies par une équation polaire en sont un cas particulier. La représentation paramétrique des courbes généralise la représentation cartésienne explicite $y = f(x)$ *que l'on peut en effet écrire :*

$$x \longmapsto (x,\ y(x)) = (x,\ f(x)).$$

Dans les premiers paragraphes de ce chapitre, on récapitule les principales propriétés des courbes planes. Il s'agit là d'une source importante d'exercices pour les concours. Vous devez refaire tous les exercices de Première année sur ce sujet.

Les derniers paragraphes du chapitre sont consacrés, d'une part à l'étude des courbes planes définies par une équation cartésienne implicite : $f(x,\ y) = k$ *; d'autre part aux surfaces de* $\mathbb{R}^3$, *définies soit par une équation cartésienne, soit par un paramétrage.*

OBJECTIFS

- Changement de paramétrage d'une courbe.
- Propriétés géométriques d'une courbe.
- Étude métrique des courbes.
- Courbe plane définie par une équation cartésienne implicite.
- Surface définie par une équation cartésienne implicite.
- Surface paramétrée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Étude affine des courbes

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Géométrie

C'est de loin la partie la plus faible chez la plupart des candidats qui semblent faire une impasse sur cette partie du programme. On note en particulier [...] d'énormes difficultés à identifier les courbes classiques (coniques, arcs paramétrés...) ou à identifier les surfaces classiques (cônes, cylindres...). »

Les intervalles considérés dans ce paragraphe contiennent toujours au moins deux points. L'entier k considéré est supérieur ou égal à 1.

1.1. Courbe paramétrée, paramétrage

Une **courbe paramétrée** (ou **arc paramétré**) de classe $\mathcal{C}^k (k \geqslant 1)$ du plan ou de l'espace est un triplet (I, f, C) (parfois noté simplement C) tel que :

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
- f est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^p$ $(p \in \{2,3\})$;
- $C = \{M \in \mathbb{R}^p, \exists t \in I \quad M = f(t)\}$.

L'ensemble C est appelé le **support de la courbe** ou, en cinématique, la **trajectoire** du mouvement.

Le couple (I, f) est appelé un **paramétrage** de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe.

Nous noterons indifféremment $M(t)$ ou $f(t)$

1.2. Propriété géométrique d'une courbe

Toute application φ, $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme d'un intervalle J sur l'intervalle I, est dite un **changement de paramétrage** de la courbe. Le couple $(J, f \circ \varphi)$ est alors un autre paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe.

On appelle **paramétrage admissible** de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe (I, f, C) tout couple (J, g) tel qu'il existe un changement de paramétrage φ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant $g = f \circ \varphi$.

Toute propriété des courbes paramétrées, ou des points des courbes, invariante par changement de paramètre admissible est dite **propriété géométrique** des courbes.

Exemple : Le support d'une courbe est une propriété géométrique de la courbe.

Rappel

Une application φ de l'intervalle J dans I vérifiant les conditions :

- φ est bijective de J sur I,
- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J,
- φ' ne s'annule pas sur J, est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J sur l'intervalle I.

1.3. Point régulier, arc régulier

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$ est noté $\overrightarrow{0}$.

Un **point** $M(t)$ de l'arc paramétré (I, f, C) est dit **régulier** lorsque :

$$f'(t) \neq \overrightarrow{0}.$$

Un **point** non régulier est dit **stationnaire** .

Un arc paramétré dont tous les points sont réguliers est appelé **arc régulier** .

Un **point** $M(t)$ de l'arc paramétré (I, f, C) est dit **birégulier** lorsque la famille $\left(f'(t), f''(t)\right)$ est libre.

Les éléments de $\mathbb{R}^p$ notés $f(t)$ ou $M(t)$ sont appelés des points, alors que les éléments de $\mathbb{R}^p$ notés $f^{(j)}(t)$, pour j dans $[\![1, p]\!]$, sont considérés comme des vecteurs.

Exemple

Soit (I, f, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, φ un changement de paramétrage de cette courbe et $M = f(a) = (f \circ \varphi)(b)$ un point de cette courbe.

• Supposons le point M régulier pour le paramétrage f. Posons $g = f \circ \varphi$. Alors :

$$g'(b) = \varphi'(b)\, f'(\varphi(b)).$$

Les notions de point régulier d'une courbe, point birégulier d'une courbe sont des notions géométriques.
La notion d'arc régulier est donc aussi une propriété géométrique de l'arc.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le point M est aussi régulier pour $f \circ \varphi$.

• Supposons ensuite M birégulier pour f :

$$g''(b) = (\varphi'(b))^2\, f''(\varphi(b)) + \varphi''(b)\, f'(\varphi(b)).$$

On en déduit que $(g'(b), g''(b))$ est libre. Le point M est aussi birégulier pour g.

1.4. Orientation d'une courbe

Soit (I, f, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et φ un changement de paramétrage de cette courbe. Lorsque l'application φ est strictement croissante, les **paramétrages** (I, f) et (J, g) de la courbe sont dits **de même sens**. Lorsque l'application φ est strictement décroissante, ils sont dits **de sens contraires** .

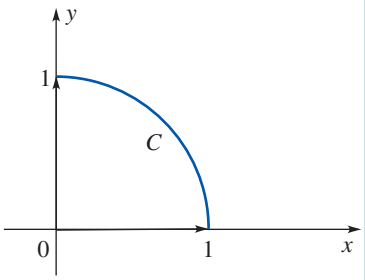
Le choix d'un paramétrage (I, f) de classe $\mathcal{C}^k$ d'un arc régulier permet de définir une orientation de la courbe.

Tout changement de paramétrage strictement croissant conserve l'orientation de la courbe.

Tout changement de paramétrage strictement décroissant modifie l'orientation de la courbe.

Une courbe paramétrée régulière admet deux orientations.

L'orientation n'est pas une propriété géométrique des courbes.



Si la courbe n'est pas régulière, il peut n'exister qu'une seule orientation.
Considérer $I = [0, \pi]$:
$f : t \longmapsto (\sin(t), \cos^2(t))$
$\varphi : t \longmapsto \pi - t$ de I sur I.
L'application φ est décroissante et $f \circ \varphi = f$.
La courbe (I, f, C) n'a qu'une seule orientation.

1.5. Tangente en un point d'une courbe

Dans ce paragraphe, (I, f, C) est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et a un point de I qui n'est pas une borne de I.

1.5.1 Tangente en un point régulier (rappel)

Soit $M = f(a)$ un point régulier de cette courbe, la droite affine :

$$T_a = f(a) + \mathbb{R}\, f'(a)$$

est la **tangente** à la courbe en M.

La tangente en un point régulier est une propriété géométrique de la courbe.

Si les paramétrages (I, f) et (J, g) de la courbe ont même sens, les vecteurs tangents $f'(a)$ et $g'(b)$ en un point régulier $M = f(a) = g(b)$ ont même sens.

1.5.2 Recherche de la tangente par le développement limité

Soit $M = f(a)$ un point de la courbe (stationnaire ou non, peu importe).

f est de classe $\mathcal{C}^k$, donc admet en a un développement limité à l'ordre $k \geqslant 1$:

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{(t-a)^i}{i!}\, f^{(i)}(a) + o\big((t-a)^k\big).$$

On suppose que :

$$\exists\, i \in [\![1, k]\!] \quad f^{(i)}(a) \neq \overrightarrow{0}.$$

On note :

$$m = \min\{i \in [\![1, k]\!],\ f^{(i)}(a) \neq \overrightarrow{0}\}.$$

Alors :

$$\overrightarrow{f(a)f(t)} = \frac{(t-a)^m}{m!}\big(f^{(m)}(a) + \varepsilon_m(t)\big).$$

avec $\lim \varepsilon_m(t) = \overrightarrow{0}$.

On remarque que $m = 1$ si, et seulement si, le point $f(a)$ est un point régulier de la courbe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour t assez proche de a, on a $f(t) \neq f(a)$ et la sécante à la courbe passant par $f(t)$ et $f(a)$ est la droite affine :

$$f(a) + \mathbb{R}\overrightarrow{f(a)f(t)} = f(a) + \mathbb{R}\left(f^{(m)}(a) + \varepsilon_m(t)\right).$$

Lorsque t tend vers a, elle admet une position limite, la droite affine :

$$T_a = f(a) + \mathbb{R}\, f^{(m)}(a).$$

C'est la **tangente** à la courbe en M.

1.5.3 Position par rapport à la tangente pour une courbe plane ($p = 2$)

L'étude de la position par rapport à la tangente est possible lorsque l'hypothèse suivante est vérifiée :

il existe un entier $i > m$ tel que $\left(f^{(m)}(a),\ f^{(i)}(a)\right)$ soit libre.

On note $r = \min\{i \in [\![m+1, k]\!],\ \left(f^{(m)}(a),\ f^{(i)}(a)\right) \text{libre}\}$. On peut écrire :

$$f(t) = f(a) + \frac{(t-a)^m}{m!}\left(1 + \alpha(t)\right) f^{(m)}(a) + \frac{(t-a)^r}{r!}\left(1 + \beta(t)\right) f^{(r)}(a)$$

où α et β sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{t \to a} \alpha(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to a} \beta(t) = 0.$$

Quatre cas sont à distinguer, suivant les parités de m et r .

• Si m est impair et r pair : le point est un point ordinaire (*doc.* 1).

Lorsque la courbe est birégulière au point a, on est dans ce cas puisqu'alors, $m = 1$ et $r = 2$.

• Si m et r sont impairs : le point est un point d'inflexion (*doc.* 2).

• Si m est pair et r impair : le point est un point de rebroussement de première espèce (*doc.* 3).

• Si m et r sont pairs : le point est un point de rebroussement de deuxième espèce (*doc.* 4).

Point stationnaire et point de rebroussement sont des propriétés géométriques de la courbe.

Exemple

On fixe un réel a. Déterminer la tangente, au point de paramètre $t = 0$, à la courbe définie par :

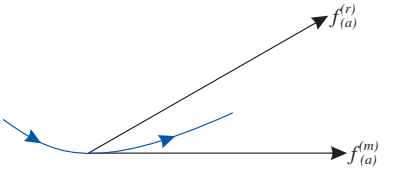
$$\begin{cases} x(t) = \cos t + at^2 \\ y(t) = -\sin t + t \end{cases}$$

On a :

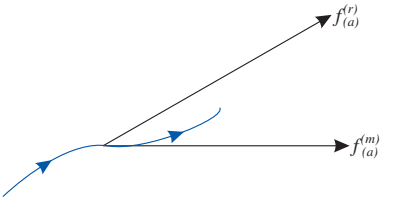
$$x(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + at^2 + o\left(t^3\right) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right).$$

Présentons ce résultat vectoriellement :

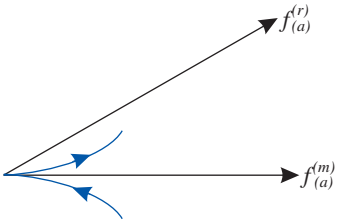
$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + o\left(t^3\right).$$



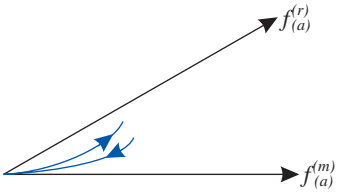
Doc. 1. *m impair et p pair : point ordinaire.*



Doc. 2. *m et r impairs : point d'inflexion.*



Doc. 3. *m pair et r impair : point de rebroussement de première espèce.*



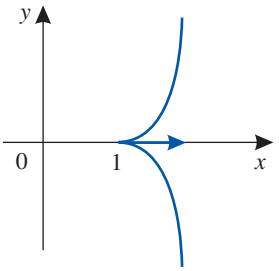
Doc. 4. *m et r pairs : point de rebroussement de deuxième espèce.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

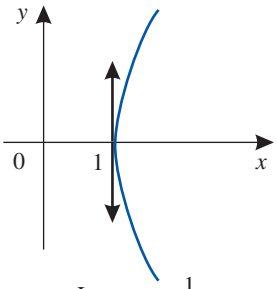
Si $a \neq \dfrac{1}{2}$, la tangente à la courbe en $f(0)$ est horizontale (*doc.* 5).

Si $a = \dfrac{1}{2}$, la tangente à la courbe en $f(0)$ est verticale (*doc.* 5).

De plus x est une fonction paire et y une fonction impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, on en déduit les schémas suivants :



Le cas $a \neq \dfrac{1}{2}$



Le cas $a = \dfrac{1}{2}$

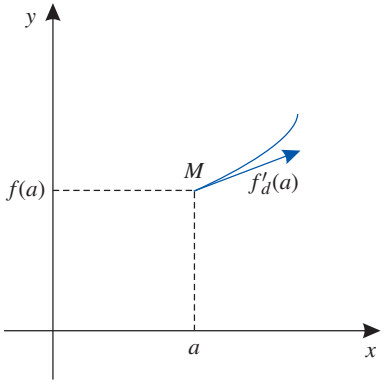
Doc. 5.

1.5.4 Demi-tangentes

Si f est définie sur $[a, a+\delta[$ $(\delta > 0)$ et si sa dérivée à droite en a n'est pas le vecteur nul, alors la courbe admet au point $M(a)$ une demi-tangente de vecteur directeur $f'_d(a)$:

$$T = f(a) + \mathbb{R}^+ f'_d(a) \text{ (doc. 6).}$$

De même, si f est dérivable à gauche en a, et si $f'_g(a) \neq \vec{0}$.



Doc. 6.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.6. Branches infinies

L'étude des branches infinies des courbes planes a été effectuée en Première année. Afin de réviser ceci, vous étudierez les branches infinies des courbes suivantes.

• Le graphe :

$$x \longmapsto y = \sqrt[3]{x^3 + 2x + 1}.$$

• La courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \longmapsto \big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{t^2}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right).$$

• La courbe donnée par son équation polaire :

$$\rho = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

Une calculette graphique permet de *visualiser* ces courbes. Le cours de Première année permet de *démontrer* l'existence de branches infinies et de les *calculer* exactement.

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

Rapport Centrale, 1998

« Les candidats ne savent pas étudier les branches infinies d'une courbe en coordonnées polaires »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« La géométrie reste le gros point noir de l'interrogation. [...]
De simples courbes polaires $\rho = f(\theta)$ posent problème. Qu'en est-il des courbes $\theta = f(\rho)$ ou $\big(\rho = f(t), \theta = g(t)\big)$? »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Les points les plus sensibles :
- impossibilité de tracer une courbe en coordonnées polaires ;
- ... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

La conchoïde de droite

Solution de Nicomède (250 av. J.-C. environ).

1) *Le point C est extérieur à un cercle de centre O et de rayon R. Une corde AB de ce cercle passant par C est telle que $BC = R$. La droite CO coupe le cercle en D et E. Montrer que l'arc $\overset{\frown}{AD}$ est triple de l'arc $\overset{\frown}{BE}$ (ce résultat est dû à Archimède).*

2) *Soit un réel $r > 0$, une droite D et un point A du plan n'appartenant pas à D.*

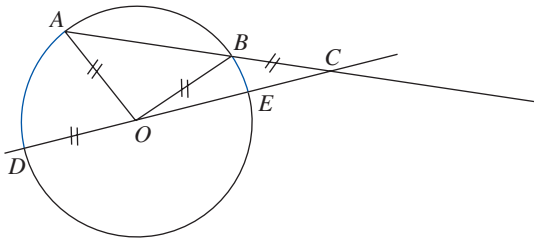
Une droite variable Δ passant par A coupe D en P. L'ensemble des points M (de Δ) tels que $PM = r$ est appelé conchoïde de la droite D, de pôle A et de paramètre r.

Donner une équation polaire de la conchoïde obtenue. La tracer.

3) *Quelle conchoïde choisir et comment l'utiliser pour trisecter un angle ?*

1) Les arcs et angles considérés ne sont pas orientés.

$$\overset{\frown}{BE} = \widehat{BOE} = \widehat{BCO} = \frac{1}{2}\,\widehat{ABO} = \frac{1}{2}\,\widehat{BAO}.$$



Doc. 7.

$$\overset{\frown}{AD} = \widehat{AOD} = \pi - \widehat{BOC} - \left(\pi - 2\widehat{ABO}\right)$$
$$= 2\widehat{ABO} - \widehat{BOC} = \frac{3}{2}\,\widehat{ABO} = 3\,\overset{\frown}{BE}.$$

2) Soit le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que D ait pour équation $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$, avec $a > 0$.

La conchoïde cherchée a pour équation :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm r.$$

Toute la courbe s'obtient en étudiant :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + r,$$

θ décrivant $]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

ρ est paire, on se restreint à $[0, \dfrac{\pi}{2}[\cup]\dfrac{\pi}{2}, \pi]$.

Pour étudier le signe de ρ, trois cas sont à distinguer, suivant que $a < r, a = r, a > r$.

Nous traiterons dans le détail le cas $a < r$ (*doc.* 8).

θ	0			$\frac{\pi}{2}$			θ_o		π
ρ	$a+r$	$+$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$-a+r$

Doc. 8

Étudions les branches infinies.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = \pm\infty,$$

donc la courbe a une direction asymptotique verticale.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} x(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho(\theta)\cos\theta = a.$$

La droite D est asymptote au graphe (*doc.* 9).

3) Considérons le cercle de centre $I(1, 0)$ et de rayon 1, ainsi que sa conchoïde C de pôle O et de paramètre 1.

Cette conchoïde a pour équation polaire :

$$\rho = 2\cos\theta + 1.$$

La question **1)** entraîne que :

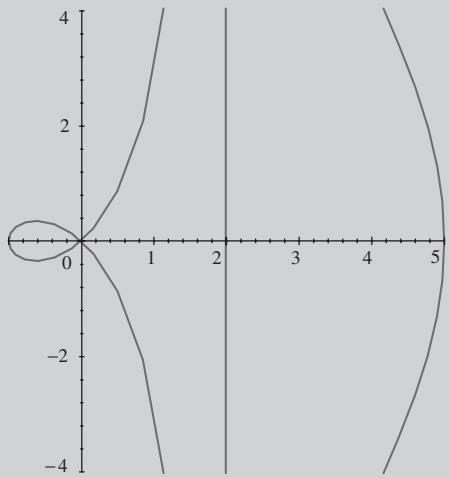
$$\widehat{ICO} = \frac{1}{3}\,\widehat{OID} \quad (doc.\ 10).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec Maple :

```
> restart:with(plots):
  polarplot([2/cos(t)+3,t,t=-Pi..Pi],
  view=[-1..5,-4..4],title='a=2,r=3',
  scaling=constrained);
```

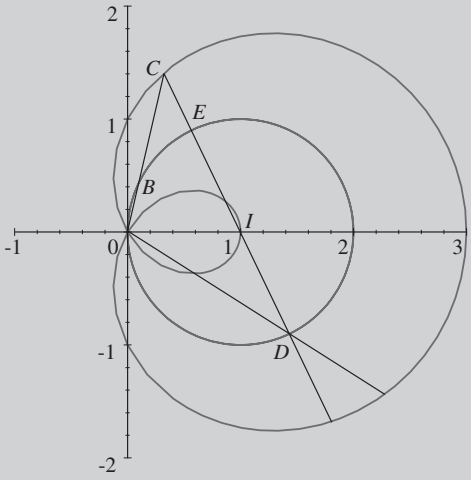
$a = 2, r = 3$



Doc. 9

Avec Maple :

```
> restart:with(plots):
  C1:=polarplot([2*cos(t)+1,
  t,t=-Pi..Pi],view=[-1..3,-2..2],
  scaling=constrained):
  C2:=polarplot([2*cos(t),
  t,t=-Pi..Pi],view=[-1..3,-2..2],
  scaling=constrained):
  display({C1,C2});
```



Doc. 10

2 Étude métrique des courbes

2.1. Abscisse curviligne

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^p$ est muni d'un repère orthonormé.

On considère un arc géométrique (I, f, C) régulier de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ et s une primitive de la fonction continue $t \longmapsto \|f'(t)\|$. L'application s est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ définie sur un intervalle I et appelée **abscisse curviligne** sur cet arc.

Elle définit un changement de paramétrage de la courbe. Le paramétrage $(s(I), f \circ s^{-1})$ est alors un paramétrage admissible. Il est dit **normal** car il possède la propriété :

$$\forall\, s \in s(I) \quad \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,s} \right\| = 1.$$

Si s est une abscisse curviligne sur la courbe, A et B sont deux points de paramètres respectifs a et b, la longueur de l'arc AB est :

$$L = \left| \int_a^b \mathrm{d}\,s \right| = |s(b) - s(a)|.$$

Rapport Centrale, 2000

« La géométrie différentielle fait partie du programme, il est inadmissible que certains candidats soient désemparés devant le moindre tracé de courbe, ou devant le plus élémentaire calcul d'abscisse curviligne. »

La longueur d'un arc de la courbe est une propriété géométrique de la courbe.
L'abscisse curviligne n'en est pas une, car elle dépend de l'orientation de la courbe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Méthode pratique dans $\mathbb{R}^2$

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on orientera l'arc dans le sens des t croissants et on prendra $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t$.

Si l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, on orientera l'arc dans le sens des θ croissants et on prendra $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$.

Méthode pratique dans $\mathbb{R}^3$

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, on orientera l'arc dans le sens des t croissants et on prendra $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t$.

2.2. Repère de Frénet dans $\mathbb{R}^2$

Le repère de Frénet en un point régulier M de la courbe est le repère orthonormé direct $(M, \vec{T}, \vec{N})$ dans lequel $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}$.

Connaissant M en fonction du paramètre t, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T(t)}.$$

Jean Frédéric Frénet *(1816-1900), mathématicien français.*
Il publia, en 1852, dans le Journal de mathématiques pures et appliquées, six des neuf formules de géométrie métrique des courbes planes et dans l'espace.

2.3. Angle que fait la tangente avec l'axe des x

Si la courbe est régulière et de classe $\mathcal{C}^2$ sur J, le théorème de relèvement appliqué à $\vec{T}$ assure qu'il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que, pour tout t de J :

$$\alpha(t) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{T(t)}}).$$

En utilisant l'angle α, par construction :

$$\vec{T} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{N} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Cet angle n'est pas une propriété géométrique de la courbe. En effet, un changement d'orientation de la courbe transforme $\vec{T}$ en $-\vec{T}$, donc α en $\alpha + \pi$.

Lorsque la courbe est définie en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$$
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta).$$

Il existe une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $V = (\widehat{\vec{u}(\theta), \vec{T}})$.

Alors :

$$\vec{T} = \cos V\ \vec{u}(\theta) + \sin V\ \vec{v}(\theta), \quad \alpha = V + \theta \quad \text{et} \quad \tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4. Courbure, rayon de courbure

On considère un arc géométrique (I, M, C), régulier de classe $\mathcal{C}^k (k \geqslant 2)$.

■ La **courbure** en un point régulier M de cet arc est définie par :

$$c(t) = \frac{\left[\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}{\left\|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}\right\|^3}$$

Les formules vectorielles suivantes permettent de calculer la courbure.

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T(t)}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{T(t)} + c(t)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \overrightarrow{N(t)}$$

Dans le cas d'un paramétrage normal, ($t = s$, abscisse curviligne), on a :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T(s)}\ ; \quad \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}s^2} = c(s)\overrightarrow{N(s)}\ ; \quad c(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

Dans le cas d'une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}t^2} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$$

$$c(t) = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

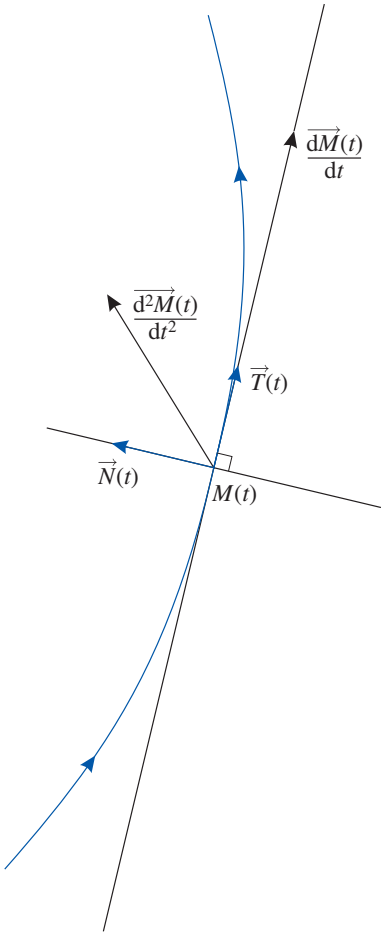
Lorsque l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$:

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\vec{u}(\theta) + \rho\vec{v}(\theta)$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}\theta^2} = (\rho'' - \rho)\vec{u}(\theta) + \rho'\vec{v}(\theta)$$

$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$



Doc. 11. *Le repère de Frénet en un point d'une courbe plane.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Le **rayon de courbure** en un point birégulier est $R = \dfrac{1}{c}$.

Si l'arc est défini paramétriquement par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, on obtient :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')}.$$

Si l'arc est défini par $y = y(x)$, on obtient $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$.

Si l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, on obtient :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Si l'arc est paramétré par l'angle α, on obtient :

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Dans le cas d'un **paramétrage normal**, c'est-à-dire à l'aide de l'abscisse curviligne, on a :

$$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s};$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = c\vec{N} = \frac{\vec{N}}{R};$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -c\vec{T} = -\frac{\vec{T}}{R}.$$

Rapport TPE, 2002

« Une expression du rayon de courbure sous la forme $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ est trois fois sur quatre inconnue. »

La valeur absolue du rayon de courbure est une propriété géométrique. Le signe de R dépend de l'orientation de la courbe.

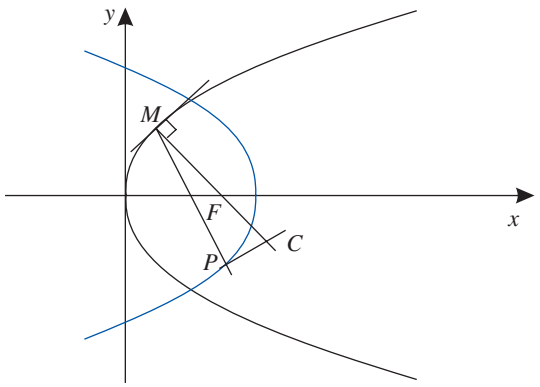
▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

Application 2

La parabole

Soit C le centre de courbure en M d'une parabole de foyer F (c'est-à-dire le point défini par $\overrightarrow{MC} = R\vec{N}$) et P le projeté orthogonal de C sur (FM).

Montrer que F est le milieu de $[P, M]$. En déduire le lieu de P.



Doc. 12.

La parabole admet, dans un repère approprié, une équation de la forme : $y^2 = 2px$.

Le point M a pour coordonnées $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$

La normale en M à la parabole a pour équation :

$$t\left(X - \frac{t^2}{2p}\right) + p(y - t) = 0.$$

Le rayon de courbure en M est :

$$R = -p\left(1 + \frac{t^2}{p^2}\right)^{3/2}$$

Le centre de courbure C a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{t^2}{2p} + p\left(1 + \dfrac{t^2}{p^2}\right) = p + \dfrac{3t^2}{2p} \\ y_C = t - \left(1 + \dfrac{t^2}{p^2}\right)t = -\dfrac{t^3}{p^2} \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les coordonnées de F sont $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Le point P est caractérisé par :

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{FP} = \lambda \overrightarrow{FM} \\ \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \end{cases}$$

On obtient $\lambda = -1$.

F est le milieu de $[P, M]$.

P décrit la parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à F.

3 Courbe du plan donnée par équation cartésienne

Dans ce paragraphe, E est un plan euclidien. Il est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le produit scalaire utilisé est noté $(\ |\ )$ et la norme associée, $\|\ \|$.

Les points de E sont repérés par leur coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On s'autorise, parfois, à parler du point (x, y) du plan, au lieu de dire : le point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit U un ouvert non vide du plan, f une application de U dans $\mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau de la fonction f** l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation du type :

$$f(x, y) = k,$$

où k est un réel.

Cette ligne de niveau sera notée $\mathcal{L}_k$ dans la suite du paragraphe.

L'équation $f(x, y) = k$ est appelé une **équation cartésienne** de $\mathcal{L}_k$.

Le *théorème* suivant donne une condition suffisante pour qu'un tel ensemble soit une courbe, du moins « au voisinage d'un point », et il permet de déterminer directement la tangente et la normale en un point de cette courbe.

Théorème 1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, k un réel, et (x_0, y_0) un point de U.

On suppose que :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- Le point (x_0, y_0) est sur la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$, c'est-à-dire :

$$f(x_0, y_0) = k\ ;$$

- $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Alors :

- au voisinage du point (x_0, y_0), la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ est une courbe qui admet un paramétrage régulier de classe $\mathcal{C}^1$;
- la normale à la courbe $\mathcal{L}_k$ au point (x_0, y_0) est la droite affine :

$$(x_0, y_0) + \mathbb{R}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)\ ;$$

Vous connaissez déjà les courbes suivantes, décrites par leurs équations cartésiennes :

- les *droites*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$ax + by = c,$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$;

- les *cercles*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\ ;$$

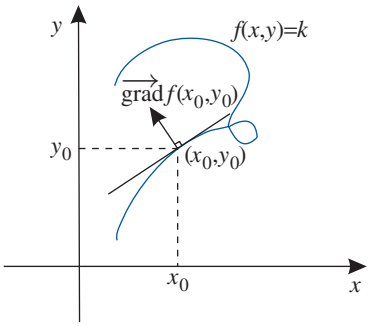
- les *coniques*, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;

- le *graphe* d'une fonction g, ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant une équation de la forme :

$$y - g(x) = 0.$$



Doc. 13.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• la tangente à la courbe $\mathcal{L}_k$ au point (a,b) est la droite d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0)=0.$$

Démonstration

Le premier point est admis. Il s'agit d'un résultat d'existence difficile qui, de plus, n'est pas assorti d'une méthode de calcul permettant de déterminer le paramétrage annoncé.

Il est cependant facile d'en déduire le reste du *théorème*.

Soit $I : t \longmapsto (x(t),y(t))$ un paramétrage régulier et de classe $\mathcal{C}^1$ de la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$, valable au voisinage de (x_0,y_0). On note t_0 la valeur du paramètre telle que $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$. On a :

$$\forall\, t\in I \qquad (x(t),y(t))\in\mathcal{L}_k \quad \text{et} \quad f\big(x(t),y(t)\big)=k.$$

La fonction $t\longmapsto f\big(x(t),y(t)\big)$ est constante. Sa dérivée est nulle et, d'après le *chapitre* précédent, pout tout t de I :

$$\frac{\mathrm{d}f\big(x(t),y(t)\big)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=0.$$

On en déduit, pour $t=t_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y'(t_0)=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $(x'(t_0),y'(t_0))$ au point (x_0,y_0) de la courbe $\mathcal{L}_k$. Le reste du *théorème* en découle.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, k un réel tel que la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ de la fonction f soit non vide et (x_0,y_0) un point de la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$.

• Ce point est dit **régulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

• Ce point est dit **singulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)=(0,0)$.

Exemples

■ *Les droites*

Soit D la droite du plan d'équation $ax+by=c$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$).

C'est une ligne de niveau de la fonction $f(x,y)=ax+by$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et son gradient est, en tout point (x_0,y_0) de D :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)=(a,b).$$

On retrouve un résultat bien connu. Le vecteur (a,b) est un vecteur normal à la droite d'équation $ax+by=c$. Tout point de la droite est un point régulier.

■ *Les graphes de fonctions*

Soit G le graphe de la fonction, g, de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $y=g(x)$. Donc, c'est une ligne de niveau de la fonction :

$$f(x,y)=y-g(x).$$

Le vocabulaire utilisé est celui de la cinématique.
Le paramètre t est assimilé au temps, le vecteur dérivé est appelé « vecteur vitesse ».

Rapport E3A, 2002

« ... on définissait les lignes de niveau d'une fonction de deux variables réelles ; il s'agissait de procéder à une étude qualitative de cette famille de courbes à partir des propriétés de la fonction donnée initialement. Cet exercice semble avoir souffert de la défaveur de la géométrie. [...] On n'a que quelques copies signalant que le vecteur gradient est normal aux lignes de niveau ; la plupart le proposent comme vecteur tangent. »

Rapport Centrale, 1998

« En géométrie différentielle, les hypothèses ne sont jamais invoquées.»

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En tout point (x, y) du plan :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = \big(-g'(x), 1\big).$$

Donc, tout point $(x, y) = (x, g(x))$ de G est régulier et l'équation de la tangente est :

$$-g'(x)(X - x) + (Y - g(x)) = 0.$$

On retrouve l'équation bien connue de la tangente en un point du graphe de g.

■ *Les coniques passant par O, étude au point O*

• L' équation d'une conique passant par O est de la forme :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

• $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(0, 0) = (d, e)$.

O est un point singulier si et seulement si $d = e = 0$.

Dans ce cas, l'équation est : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.

– Si $ac - b^2 > 0$, la conique est $\{O\}$.

– Si $ac - b^2 = 0$, il s'agit d'une droite passant par O.

– Si $ac - b^2 < 0$, c'est l'union de deux droites sécantes en O.

• Le point O est un point régulier lorsque $(d, e) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, la tangente en O a pour équation :

$$dx + ey = 0.$$

Mensa ACADEMY

► **Pour s'entraîner : ex. 4.**

Lorsque la courbe est décrite par une équation du type :

$f(x, y) = 0$, ou $f(x, y) = k$,

on parle d'équation cartésienne implicite.

Lorsque l'on peut exprimer y en fonction de x, ou x en fonction de y :

$y = g(x)$, ou $x = h(y)$,

on parle d'équation cartésienne explicite.

4 Surface définie par une représentation cartésienne

Dans les paragraphes qui suivent, E est un espace euclidien de dimension 3. Il est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le produit scalaire utilisé est noté $(\ |\ )$ et la norme associée, $\|\ \|$.

Les points de E sont repérés par leurs coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On s'autorise, parfois, à parler du point (x, y, z) de l'espace, au lieu de dire : le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Rapport Centrale, 1997

« Trop de candidats ont fait une impasse sur la géométrie différentielle et se sont retrouvés, de ce fait, lourdement pénalisés. »

4.1. Représentation cartésienne explicite

Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et g une application définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur U. L'équation :

$$z = g(x, y)$$

définit une surface $\mathcal{S}$ de E.

Une telle équation est appelée un équation cartésienne explicite.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La section de $\mathcal{S}$ par un plan parallèle à (yOz), d'équation $x = x_0$, est une courbe. Plus précisément, c'est le graphe de la fonction $y \longmapsto z = g(x_0, y)$.

De même, la section de $\mathcal{S}$ par un plan parallèle à (xOz), d'équation $y = y_0$, est le graphe de la fonction $x \longmapsto z = g(x, y_0)$.

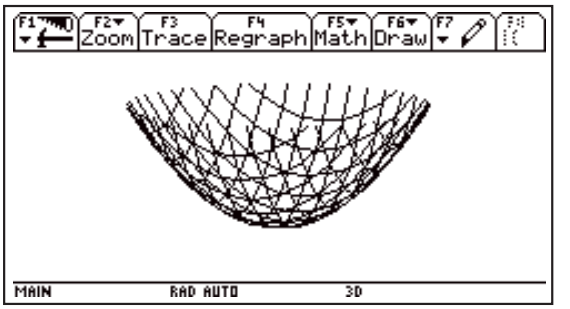
Les calculettes TI permettent de représenter de telles surfaces en utilisant effectivement leurs intersections avec des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Pour cela, dans `MODE`, choisir : `graph....3D`.

Dans l'écran : `Y=`, rentrer la fonction désirée :

```
z1 = x2 + y2.
```

Passer dans l'écran : `GRAPH`.



Doc. 14. *Paraboloïde de révolution d'équation :*

$$z = x^2 + y^2$$

vu par la TI.
La fenêtre utilisée est la fenêtre standard modifiée en prenant : `zmin = 0, zmax = 100.`

4.2. Surface décrite par une équation cartésienne implicite

Soit W un ouvert de l'espace E, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de W dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation du type :

$$f(x, y, z) = 0$$

est appelé une **surface**, et l'équation $f(x, y, z) = 0$ est appelée une **équation cartésienne** implicite de $\mathcal{S}$.

Le premier point du *théorème* 1, ainsi que le fait qu'une équation cartésienne implicite de trois variables définisse une surface pouvant être décrite localement par une équation explicite sont des conséquences du *théorème* suivant que nous admettrons.

Théorème 2 : Théorème des fonctions implicites

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur U et $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de U tels que :

- $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$;
- $(D_n f)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Alors il existe une boule ouverte B' de $\mathbb{R}^{n-1}$ de centre $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ et un réel $\alpha > 0$ tels que :

- $B' \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[\subset U$;
- pour tout $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de B', l'équation : $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, d'inconnue x_n, admet une unique solution dans $]\, a_n - \alpha, a_n + \alpha\, [$:

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) ;$$

- l'application φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^k$ sur B' ;
- les dérivées partielles de φ en un point quelconque de B' sont, pour tout i de $[\![1, n-1]\!]$,

$$D_i\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\frac{D_i f\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\big)}{D_n f\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi\big(x_1, \ldots, x_{n-1}\big)\big)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De plus, les différentes composantes de f jouant ici le même rôle, le théorème s'applique dès que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a_1, \ldots, a_n) \neq \vec{0}.$$

Si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ et $(D_j f)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, on pourra exprimer la j-ième composante des solutions de $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ en fonction de $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ dans un voisinage de $(a_1, \ldots, a_n)$.

4.3. Courbe tracée sur la surface, normale et plan tangent

Dans ce paragraphe, on considère toujours W, un ouvert de l'espace E, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de W dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$, la surface d'équation :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soit (I, Γ, C) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$. On note :

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

On dit que cette **courbe** est **tracée sur la surface** $\mathcal{S}$ lorsque $C \subset \mathcal{S}$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in I \quad f\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0.$$

Théorème 3

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de la surface $\mathcal{S}$, et (I, Γ, C) une courbe régulière, de classe $\mathcal{C}^1$, tracée sur $\mathcal{S}$.

On suppose que :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$;
- la courbe C passe par (x_0, y_0, z_0) pour la valeur t_0 du paramètre :

$$\Gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0).$$

Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $\Gamma'(t_0)$.
- La tangente à la courbe C au point (x_0, y_0, z_0) est incluse dans le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0.$$

Démonstration

Puisque, pour tout t, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$, la fonction $(t \longmapsto f(x(t), y(t)), z(t)))$ est constante. Sa dérivée est nulle et, de même que dans la démonstration du *théorème* 1, on obtient, pour $t = t_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur vitesse $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ au point (x_0, y_0, z_0) de la courbe C. Le reste du *théorème* en découle.

De même qu'au paragraphe précédent, le vocabulaire utilisé est celui de la cinématique. Le paramètre t est assimilé au temps, le vecteur dérivé est appelé « vecteur vitesse ».

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Ceci permet de donner les définitions suivantes :

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de la surface $\mathcal{S}$.

• Ce point est dit **régulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.

• Ce point est dit **singulier** lorsque $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point régulier de la surface $\mathcal{S}$.

Le **plan tangent à la surface** $\mathcal{S}$, au point (x_0, y_0, z_0) est le plan affine d'équation (*doc.* 15) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0.$$

La **normale à la surface** $\mathcal{S}$, au point (x_0, y_0, z_0), est la droite affine (*doc.* 15) :

$$(x_0, y_0, z_0) + \mathbb{R}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0).$$

Exemples

Vous connaissez déjà les surfaces suivantes, décrites par leurs équations cartésiennes.

■ Un plan P, ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation de la forme :

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0\ ;$$

dans ce cas, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z) = (a, b, c)$ et tous les points du plan sont réguliers. Le plan tangent à P en un de ses points est P lui-même, la normale étant dirigée par le vecteur (a, b, c).

■ Une quadrique, ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) vérifiant une équation de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Vous étudierez quand une quadrique contient des points singuliers

■ Une surface connue par une équation explicite, $z = g(x, y)$. C'est aussi l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que :

$$f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0.$$

Lorsque g est de $\mathcal{C}^1$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1\right)$ et tous les points de cette surface sont réguliers ; le plan tangent à cette surface au point $\big(x, y, g(x, y)\big)$ a pour équation :

$$Z = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,(X - x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)(Y - y) + g(x, y).$$

■ Une sphère de centre O. Elle a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

En utilisant ce qui précède, vous vérifierez que :

– le plan tangent en un point $N(x_0, y_0, z_0)$ de cette sphère a pour équation :

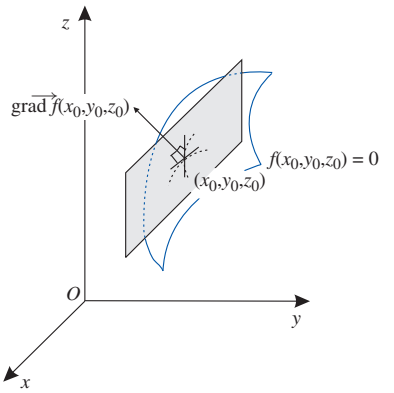
$$x_0X + y_0Y + z_0Z = R^2\ ;$$

– la normale en N à la sphère passe par le centre de la sphère.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Rapport Centrale, 2001

« La notion de point régulier, plan tangent à une surface ou de tangente à une courbe n'est pas toujours maîtrisée. »



Doc. 15.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Droites incluses dans une surface et plan tangent

L'hyperboloïde de révolution à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont des surfaces qui contiennent des droites (cf. chapitre 23*)*

Soit S une telle surface, D une droite incluse dans S et (x_0, y_0, z_0) un point de D.

Prouver que le plan tangent à la surface S au point (x_0, y_0, z_0) contient toute la droite D.

La droite D est une courbe tracée sur la surface S.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de D.

Le *théorème* 2 nous apprend que le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface S contient la tangente à la courbe D en ce point. Or la tangente à une droite est la droite elle-même.

Le résultat en découle.

5 Surfaces définies par une paramétrisation

5.1. Définition

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^k (k \geqslant 1)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \end{cases}.$$

L'image de φ est notée S. Le triplet (U, φ, S) est appelé une **surface paramétrée** de classe $\mathcal{C}^k$.

Le couple (U, φ) est appelé un **paramétrage de la surface**.

L'ensemble S est appelé le **support de la surface**.

On note fréquemment $M(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ un point de la surface.

Un point M de la surface est appelé un **point régulier** lorsque les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$ forment une famille libre.

Le point M est régulier lorsque : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq (0,0,0)$.

5.2. Courbe tracée sur une surface paramétrée

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Considérons une application h d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans U, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I : $h : \begin{cases} I \longrightarrow U \\ t \longmapsto (u(t), v(t)) \end{cases}$

On suppose la fonction h régulière sur I : $(\forall\, t \in I \;\; h'(t) \neq (0,0))$.

L'application $\varphi \circ h : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto \big(x\big(u(t), v(t)\big), y\big(u(t), v(t)\big), z\big(u(t), v(t)\big)\big) \end{cases}$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Elle définit une courbe de $\mathbb{R}^3$ et tout point de cette courbe appartient à la surface (S) paramétrée par (U, φ). Cette **courbe** est dite **tracée sur la surface (S).**

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En un point N de la courbe, régulier sur la surface, la tangente à la courbe est dirigée par le vecteur non nul :

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi\circ h}{\mathrm{d}\,t}(t) = u'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big) + v'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big).$$

On en déduit le *théorème* suivant.

Vect $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est l'image de l'application linéaire $\mathrm{d}\,\varphi(u_0,v_0)$

Théorème 4

Soit (U,φ,S) une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $N=\varphi(u,v)$ un point régulier de S. Le plan affine :

$$P = N + \text{Vect}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)$$

contient la tangente en N à toute courbe régulière tracée sur S et passant par N.

Si l'on note $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, une équation de ce plan est :

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ Y - y(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ Z - z(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci permet de définir le plan tangent et la normale en un point régulier d'une surface paramétrée.

Le plan affine $P = N + \text{Vect}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ est appelé le **plan tangent** en N à la surface paramétrée (U,φ,S).

La droite affine $D = N + \mathbb{R}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\wedge\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$ est appelée la **normale** en N à la surface paramétrée (U,φ,S).

Exemple

Les coordonnées sphériques donnent une représentation paramétrique de la sphère de centre O et de rayon 1.

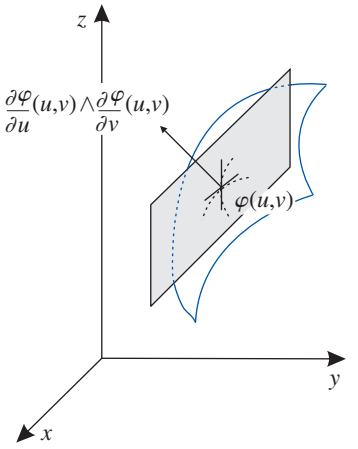
$$\varphi : (u,v) \longmapsto \begin{cases} x(u,v) = \sin u\cos v \\ y(u,v) = \sin u \sin v \\ z(u,v) = \cos u \end{cases}$$

De plus :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\sin u \neq 0$, ces vecteurs sont linéairement indépendants. Tout point de la sphère, paramétrée par φ, autre que les points (0, 0, 1) et (0, 0, -1) est régulier et la normale en un tel point régulier est dirigée par :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = \sin u\,\overrightarrow{OM}.$$



Doc. 16.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.3. Représentation cartésienne explicite et paramétrage

Les représentations cartésiennes explicites de surface :

$$z = g(x, y),$$

avec g définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, ont été le point de départ de notre étude des surfaces.

Soit $\mathcal{S}$ une telle surface.

Elle peut aussi être définie par une représentation paramétrique. En effet, l'application :

$$\varphi : \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{cases}$$

paramètre la surface $\mathcal{S}$.

Exemple

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

• Soit un plan affine P de $\mathbb{R}^3$ défini par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{t}(a, b, c)$ et $\vec{r}(a', b', c')$.

• Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace :

$$M \in P \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = u\vec{t} + v\vec{r}.$$

En posant $\varphi(u, v) = (x_A + ua + va', y_A + ub + vb', z_A + uc + vc')$, on a une paramétrisation du plan P. On constate que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \vec{t} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \vec{r}.$$

On en déduira, avec bonheur, que le plan tangent en tout point de (P) est le plan (P) lui-même !

On pose :

$$f(x, y, z) = z - g(x, y)$$

et on calcule :

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$.

Les vecteurs :

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z)$.

sont colinéaires.

Les deux points de vue (équation cartésienne ou paramétrage) donnent le même plan tangent et la même normale. Heureusement !

6 Intersection de deux surfaces

Soit S_1 et S_2 deux surfaces définies par une représentation cartésienne ou une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^1$, et un point M de $S_1 \cap S_2$ régulier sur chacune des deux surfaces.

Lorsque les plans tangents en M à S_1 et S_2 sont confondus, les **surfaces** S_1 et S_2 sont dites **tangentes** en M.

Théorème 5

Soit S_1 et S_2 deux surfaces de classe $\mathcal{C}^1$, non tangentes en un point M de leur intersection. On suppose que M est régulier sur chacune des deux surfaces. Alors, au voisinage de M, $S_1 \cap S_2$ est une courbe régulière (C) et la tangente à (C) en M est l'intersection des plans tangents en M aux deux surfaces.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

■ Si les deux surfaces sont définies par une représentation cartésienne implicite, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de M dans lequel la surface S_2 admet une représentation paramétrique.

■ Supposons la surface S_1 définie par une représentation cartésienne implicite de classe $\mathcal{C}^1$, $f(x,y,z)=0$, et la surface S_2 par une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

L'intersection des deux surfaces est l'ensemble des points N tels que :

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0.$$

Notons g la fonction définie sur U par $(u,v)\mapsto f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ et $(x_0,y_0,z_0)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$ les coordonnées de M.

Puisque M est régulier sur les deux surfaces, la famille $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est libre et $\text{grad } f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Puisque les surfaces ne sont pas tangentes en M :

$$\text{grad } f(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0 \text{ ou grad } f(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\neq 0.$$

Supposons que : $\text{grad } f(x_0,y_0,z_0)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$. Cette condition entraîne que : $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$.

Le théorème des fonctions implicites permet de conclure qu'il existe un intervalle ouvert I contenant v_0, deux réels $\alpha>0,\beta>0$ et une application ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que :

$$\forall (u,v)\in\,]u_0-\alpha,u_0+\alpha[\times]v_0-\beta,v_0+\beta[\;\; g(u,v)=0\Leftrightarrow u=\psi(v).$$

Au voisinage de M, l'intersection des deux surfaces admet une paramétrisation de la forme : $(x,y,z)=(x(\psi(v),v),y(\psi(v),v),z(\psi(v),v))$.

Nous reconnaissons une courbe de $\mathbb{R}^3$. Cette courbe est de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus, pour tout v de I :

$$(x'(v),y'(v),z'(v))=\psi'(v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v).$$

Or, les vecteurs $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)$ forment une famille libre. Il existe donc un voisinage ouvert V de (u_0,v_0) sur lequel les vecteurs $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v),\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$ forment une famille libre. Nous en déduisons que la courbe est régulière. Nous savons déjà qu'en M, la tangente à la courbe est contenue dans les plans tangents aux deux surfaces.

Exemple : Droite et plans

Soit P et Q deux plans non parallèles, d'équations :

$$\begin{cases} ux+vy+wz+h=0\\ u'x+v'y+w'z+h'=0\end{cases}$$

P et Q non parallèles équivalent à l'indépendance linéaire de leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{N}(u,v,w)$ et $\overrightarrow{N}'(u',v',w')$. L'intersection des deux plans est une droite affine dirigée par $\overrightarrow{N}\wedge\overrightarrow{N}'$.

Pour déterminer l'intersection de deux surfaces, il est préférable d'avoir :
– une équation cartésienne de l'une des deux, $F(x,y,z)=0$;
– une représentation paramétrique de l'autre :

$$(u,v)\longmapsto\varphi(u,v).$$

L'intersection s'obtient alors en résolvant $F(\varphi(u,v))=0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7 Position d'une surface par rapport au plan tangent

Théorème 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, S la surface définie par une équation de la forme $z = f(x, y)$, et M un point régulier de S.

Utilisons les notations de Monge :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) ; \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) ; \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) ;$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

- Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, la surface S est située, au voisinage de M, au-dessus du plan tangent en M à S.
- Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, la surface S est située, au voisinage de M, en-dessous du plan tangent en M à S.
- Si $s^2 - rt > 0$, la surface S traverse le plan tangent en M à S.

Démonstration

Soit M_0 un point régulier de S. Le plan tangent Π à S en M_0 a pour équation :

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Pour tout (x, y) de U, notons $M(x, y, z_M)$ et $P(x, y, z_P)$ les points de S et de Π.

Alors : $z_M = f(x, y)$ et $z_P = p(x - x_0) + q(y - y_0) + z_0$.

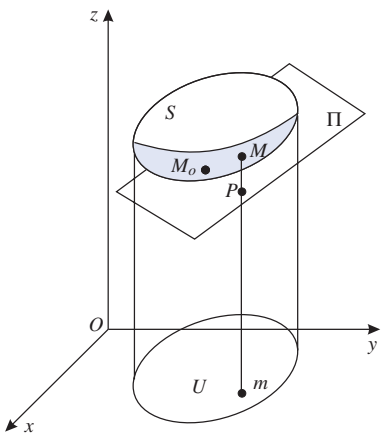
Notons $h = x - x_0, k = y - y_0$. La position de S par rapport à Π s'obtient en étudiant le signe de :

$$z_M - z_P = f(x_0 + h, y_0 + k) - ph - qk - f(x_0, y_0).$$

Nous savons que f admet un développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(\|(h, k)\|^2).$$

D'où : $z_M - z_P = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(\|(h, k)\|^2)$.



Doc. 17. *La surface S et le plan tangent π en M_0.*

8 Quelques exemples de surfaces remarquables

8.1. Cylindres

On appelle **cylindre** une partie $\mathcal{C}$ de l'espace qui admet, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bien choisi, une équation du type :

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On remarque que la troisième composante n'apparaît pas dans l'équation.

Si le couple (x, y) est solution de **(1)**, alors, pour tout z, le point de coordonnées (x, y, z) est dans $\mathcal{C}$.

D'un point de vue géométrique, si le point $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan (xOy) est dans $\mathcal{C}$, alors toute la droite affine $M + \mathbb{R}\vec{k}$ est incluse dans $\mathcal{C}$.

L'intersection de $\mathcal{C}$ avec un plan parallèle à (xOy) est une courbe de ce plan appelée **section droite** du cylindre.

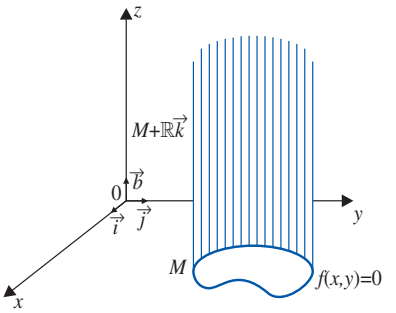
Les droites $M + \mathbb{R}\vec{k}$, sont appelées les **génératrices du cylindre $\mathcal{C}$.**

On suppose la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$. L'*application* 3 montre, sans effectuer de calcul, qu'en un point régulier M du cylindre $\mathcal{C}$, la génératrice $M + \mathbb{R}\vec{k}$ du cylindre est entièrement incluse dans le plan tangent en M à la surface $\mathcal{C}$.

Par ailleurs, l'équation du plan tangent au point M de coordonnées (x, y, z) de $\mathcal{C}$ est, d'après le *théorème* 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(Y - y) = 0.$$

On retrouve, à l'aide de cette équation, le fait que la génératrice $M + \mathbb{R}\vec{k}$ est incluse dans le plan tangent en M.



Doc. 18.

Exenple :

On considère la surface (S) de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

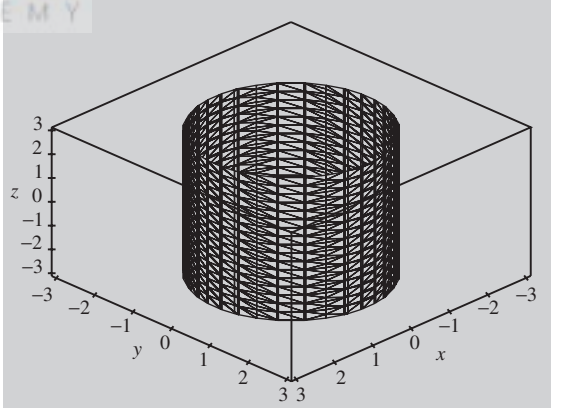
Il s'agit du cylindre de révolution d'axe (Oz), de rayon 2.

Tout point de (S) est régulier.

Le plan tangent en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de (S) a pour équation :

$$x_0 x + y_0 y = 4.$$

```
> restart:with(plots):implicitplot
  (x*exp(y)+y^2*exp(x),x=-1..1,
  y=-1..1,scaling=(constrained);
```



Doc. 19.

8.2. Cônes

Soit S un point de l'espace. On appelle **cône de sommet S** une partie de l'espace qui est la réunion d'une famille de droites affines passant toutes par S.

Cela signifie que, si M est un point du cône, différent de S, alors la droite (SM) est incluse dans le cône.

Ces droites s'appellent les **génératrices du cône**.

Soit une surface $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Cette surface est un cône de sommet O lorsque la fonction f est homogène, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie la propriété :

$$f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0.$$

De même que pour les cylindres, l'*application* 3 montre qu'en un point régulier M du cône $\mathcal{Q}$ de sommet O, la génératrice (OM) du cône est entièrement incluse dans le plan tangent en M à la surface $\mathcal{Q}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

On appelle cône de révolution d'axe Oz, de sommet O et de demi-angle au sommet $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ l'ensemble $\mathcal{Q}$ constitué du point O et des points M tels que l'angle de la droite (OM) et de l'axe Oz soit θ.

Une équation cartésienne de ce cône est :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \tan^2(\theta) z^2 = 0.$$

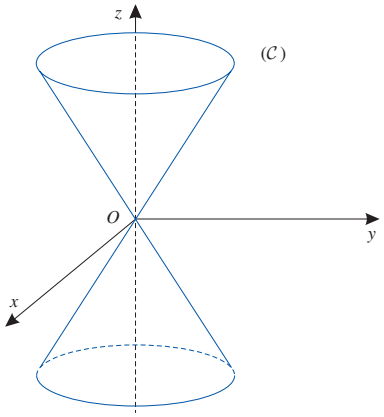
Une représentation paramétrique du cône est :

$$(t, z) \longmapsto \begin{cases} x = z \cos t \tan \theta \\ y = z \sin t \tan \theta \\ z = z \end{cases}$$

Tout point du cône, à l'exception du sommet O, est un point régulier.

L'équation du plan tangent en un point de $\mathcal{Q}$, de coordonnées $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, est :

$$xX + yY - \tan^2(\theta) zZ = 0.$$



Doc. 20. *Un cône d'axe* (Oz).

8.3. Surfaces de révolution

Soit D une droite de l'espace. Une **surface de révolution d'axe** D est une surface obtenue en faisant tourner une courbe d'un plan P contenant la droite D autour de cette droite.

On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace tel que l'axe de rotation soit l'axe $(Oz) = O + \mathbb{R}\vec{k}$.

On utilise les coordonnées cylindriques relatives à ce repère en notant :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}.$$

Une **méridienne d'une surface de révolution** est l'intersection de la surface avec un plan contenant l'axe de rotation :

$$P = O + \mathbb{R}\vec{u}(\theta) + \mathbb{R}\vec{k}.$$

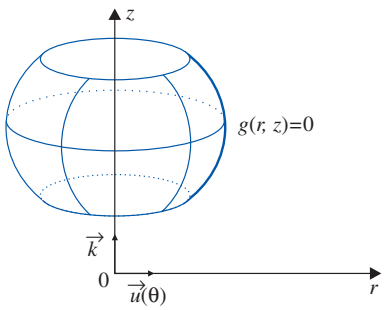
Il s'agit d'une courbe de ce plan qui admet donc une équation de la forme :

$$g(r, z) = 0 \quad \text{ou} \quad h(r^2, z) = 0.$$

La surface de révolution d'axe (Oz), définie par cette méridienne, admet l'équation cartésienne :

$$h(x^2 + y^2, z) = 0.$$

Un **parallèle d'une surface de révolution** est l'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. C'est un cercle ou une union de cercles centrés sur l'axe de rotation.



Doc. 21.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

L'hyperboloïde de révolution à une nappe d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

est une surface de révolution d'axe (Oz).

Avec les coordonnées cylindriques, on trouve l'équation d'une méridienne :

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il s'agit d'une hyperbole.

Un parallèle est l'intersection de la surface avec un plan d'équation $z = k$.

On obtient le cercle de ce plan centré sur l'axe (Oz) et d'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right).$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

- Pour **déterminer la tangente** en un point d'une courbe définie paramétriquement :

• si le point est régulier, la tangente est dirigée par le vecteur dérivé en ce point ;

• si le point n'est pas régulier, la tangente est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul, s'il en existe.

- Les formules suivants permettent de **calculer la courbure** :

$$c(t) = \frac{\left[\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}{\left\|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}\right\|^3}$$

• Avec le repère de Frénet :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T(t)}$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{T(t)} + c(t)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\overrightarrow{N(t)}.$$

• Dans le cas d'une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j}$$
$$c(t) = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

• Lorsque l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\,\vec{u}(\theta) + \rho\,\vec{v}(\theta)$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2} = (\rho'' - \rho)\,\vec{u}(\theta) + \rho'\,\vec{v}(\theta)$$
$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour **déterminer le rayon de courbure**, on peut :

• utiliser les tableaux précédents et la définition $R = 1/c$;

• exprimer $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, puis $\overrightarrow{T}$ et $\varphi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$; alors :

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi};$$

• écrire :

$$R = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3}{\left[\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}.$$

● La **tangente en un point régulier** $M(a,b)$ d'une courbe plane définie par une représentation implicite $f(x,y) = 0$ est la droite passant par M et normale au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b)$.

● Pour montrer qu'**un point M d'une surface est régulier** :

• si la surface est définie par une équation cartésienne explicite $z = g(x,y)$, avec g de classe $\mathcal{C}^1$, on rappelle que tout point de cette surface est régulier ;

• si la surface est définie par une équation cartésienne implicite, $f(x,y,z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on vérifie que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) \neq 0$;

• si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, on vérifie que les vecteurs $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$ sont linéairement indépendants.

● **Plan tangent en un point régulier M d'une surface**

• si la surface est définie par une représentation implicite $f(x,y,z) = 0$ et $M = (a,b,c)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(Y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(Z-c) = 0\,;$$

• si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ et $M = \varphi(u,v)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ Y - y(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ Z - z(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = 0\,;$$

• si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● **Normale en un point régulier** M d'une surface :

• si la surface est définie par une représentation implicite $f(x,y,z)=0$ et $M=(a,b,c)$, la normale est la droite :

$$(a,b,c)+\mathbb{R}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f(a,b,c)\,;$$

• si la surface est définie par une représentation paramétrique $\varphi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ et $M=\varphi(u,v)$, la normale est la droite :

$$D=N+\mathbb{R}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\,;$$

• si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

● Pour étudier en un point la **courbe définie par l'intersection de deux surfaces**, on vérifie :

• si le point est régulier sur chacune des deux surfaces ;

• si les deux surfaces ne sont pas tangentes en ce point.

On peut alors conclure que :

• le point est régulier sur la courbe ;

• la tangente en ce point est l'intersection des deux plans tangents en ce point aux deux surfaces.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

L'hyperbole

ÉNONCÉ

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (H) est l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$.

1) Soit $A, B,$ et C trois points distincts de (H) d'abscisses respectives $a, b,$ et c.

a) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre K du triangle (ABC). Que remarquez-vous ?

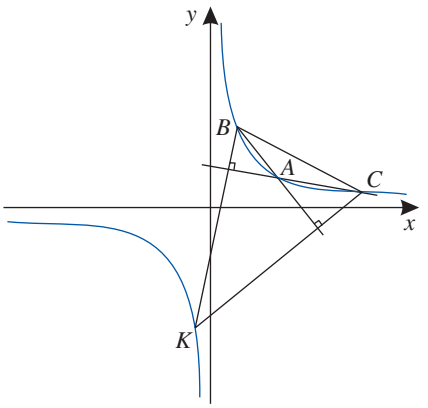
b) Lorsque le cercle circonscrit au triangle ABC recoupe l'hyperbole (H) en un quatrième point D, montrer que D se déduit de K par une transformation géométrique simple.

2) Soit J la projection orthogonale du point O sur la tangente en un point M de l'hyperbole (H). Donner une équation polaire de l'ensemble des points J et tracer cet ensemble et (H) sur le même graphe.

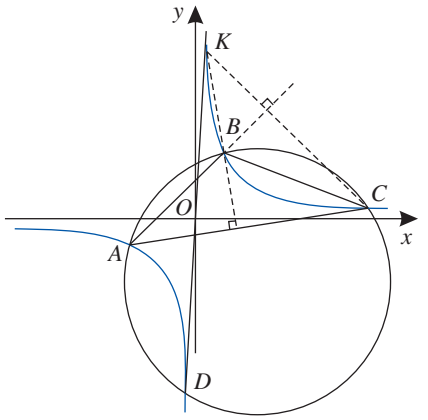
3) Déterminer le rayon de courbure en un point M de l'hyperbole.

CONSEILS

Faites des figures.



Doc. 1.



Doc. 2.

SOLUTION

1) a) Les coordonnées (x, y) de K s'obtiennent par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(c-b) + \left(y - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{b-c}{bc}\right) = 0 \\ (x-b)(c-a) + \left(y - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{a-c}{ac}\right) = 0 \end{cases}.$$

On obtient : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{abc} \\ y = -abc \end{cases}$, donc $K \in (H)$ (*doc.* 1).

b) Le cercle circonscrit au triangle (ABC) a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0.$$

L'intersection de (H) et du cercle circonscrit à (ABC) s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Donc, les valeurs des abscisses des points de l'intersection vérifient :

$$x^4 - 2\alpha x^3 + \gamma x^2 - 2\beta x + 1 = 0.$$

Cette équation admet a, b et c pour racines. On note d la quatrième racine. Le produit des racines est $abcd = 1$. On en déduit que D est le symétrique de K par rapport à O (*doc.* 2).

2) Les tangentes à (H) ne passent jamais par O, donc $J \neq O$. Soit J, de coordonnées polaires (r, θ). L'équation de la droite orthogonale en J à (OJ) est :

$$x \cos\theta + y \sin\theta = r, \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cette droite est tangente à (H) si, et seulement si, elle la rencontre en un point double, ce qui équivaut à dire que l'équation :

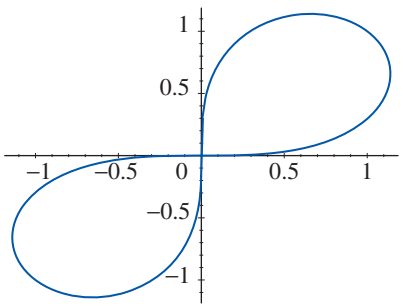
$x^2\cos\theta - rx + \sin\theta = 0$ admet une racine double, c'est-à-dire :

$$\Delta = r^2 - 4\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Une équation polaire du lieu des points J est donc :

$$r = \pm\sqrt{2\sin 2\theta}, \quad \text{avec} \quad \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

Quelles sont les coordonnées de D, quelles sont celles de K ?



Doc. 3. *Attention, dans ce tracé « à la machine », le repère n'est pas orthonormé.*

Étude et graphe

La courbe d'équation $r = -\sqrt{2\sin 2\theta}$ se déduit de celle d'équation $r = \sqrt{2\sin 2\theta}$ par une symétrie par rapport à O.

Étude de $r = \sqrt{2\sin 2\theta}$.

r est défini pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $r(\theta+\pi) = r(\theta)$, donc la courbe s'obtiendra en étudiant et traçant la partie correspondant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis en complétant par une symétrie par rapport à O. Il faut exclure le point O qui n'est pas un point J (*doc.* 3).

3) En utilisant une équation polaire de (H) :

$$R(\theta) = \frac{1}{2(\sin\theta\cos\theta)^{3/2}}.$$

En utilisant le paramétrage $x \longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right)$:

$$R(x) = \frac{1}{2x^3}(x^2+1)^{3/2}.$$

Exercice résolu

Coniques et tangentes

ÉNONCÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) (C) est une conique de centre O, ne passant pas par O. Donner une équation de (C), déterminer ses points réguliers et une équation de la tangente en chacun de ces points.

2) Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u, v et h pour que la droite (D) d'équation $uX + vY + h = 0$ soit tangente à (H).

3) Déterminer l'ensemble des points desquels on peut mener deux tangentes orthogonales à l'hyperbole (H).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

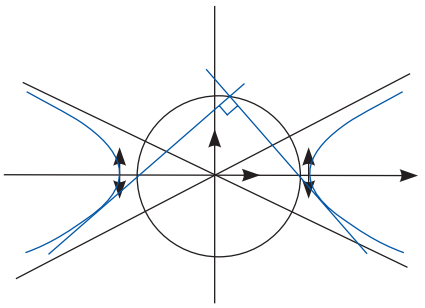
CONSEILS

Une conique à centre est une ellipse ou une hyperbole. Dans l'équation ci-contre, on a donc :

$$ac - b^2 \neq 0.$$

Les équations $uX + vY + h = 0$ et $u'X + v'Y + h' = 0$ définissent la même droite affine si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$(u, v, h) = \lambda(u', v', h').$$



Doc. 1.

SOLUTION

1) Une conique de centre O admet, dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une équation de la forme :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0.$$

Elle ne passe pas par O, donc $d \neq 0$.

Puisque $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = (2ax + 2by, 2bx + 2cy)$, tout point de (C) est régulier.

L'équation de la tangente au point $M(x, y)$ de (C) se simplifie en :

$$(ax + by)X + (bx + cy)Y + d = 0.$$

2) D'après **1)**, la tangente en un point $M(x, y)$ de (H) a pour équation :

$$\frac{x}{a^2}X - \frac{y}{b^2}Y - 1 = 0.$$

On en déduit que la droite (D), d'équation $uX + vY + h = 0$, est tangente à (H) si, et seulement si :

$$a^2u^2 - b^2v^2 = h^2 \quad \text{et} \quad h \neq 0.$$

3) Soit $P(r, s)$ un point du plan, $P \neq O$, et (D) la droite passant par P et de coefficient directeur m. Une équation de (D) est :

$$y = mx + (s - mr).$$

On exclut les droites verticales de notre étude. Pourquoi ?

D'après **2)**, (D) est tangente à (H) si, et seulement si :

$$m^2(a^2 - r^2) + 2mrs - (b^2 + s^2) = 0 \quad \text{et} \quad (s - mr) \neq 0.$$

On sait que :

• un trinôme du second degré a au plus deux racines, donc par un point P passent au plus deux tangentes à (H) ;

• deux droites de pentes m et m', sont orthogonales si, et seulement si, $mm' = -1$.

On en déduit que, si $P(r, s)$ répond à la question, alors :

$$b^2 + s^2 = a^2 - r^2.$$

et le point $P(r, s)$ est sur le cercle d'équation $r^2 + s^2 = a^2 - b^2$.

Si $a^2 - b^2 \leqslant 0$, le problème n'a pas de solution.

Réciproquement, supposons $a^2 - b^2 > 0$ et considérons un point $P(r, s)$ du cercle (Γ) d'équation $r^2 + s^2 = a^2 - b^2$.

Par P, on peut tracer deux tangentes à (H) qui sont orthogonales sauf dans le cas où $\dfrac{r^2}{a^2} - \dfrac{s^2}{b^2} = 0$.

Finalement, lorsque $a^2 - b^2 > 0$, l'ensemble des points P d'où l'on peut tracer deux tangentes à (H) qui soient orthogonales est le cercle (Γ) privé de ses quatre points d'intersection avec les asymptotes de l'hyperbole.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Étudier les points stationnaires de la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t\sin(t) - t^2\cos(t) \\ y(t) = 3t^2\sin(t) - t^3\cos(t) \end{cases}$$

2 Étude et tracé de la courbe définie par :

$$\rho = \frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\sin 2\theta(1 + 2\cos\theta)}{1 - \sin\theta}$$

Déterminer les points multiples.

3 Déterminer le rayon de courbure minimum du graphe de $y = \mathrm{e}^x$.

4 Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^y + y^2\mathrm{e}^x = 0$ définit, dans une boule de centre $O(0,0)$, une courbe passant par O et la tracer au voisinage de O.

5 On considère la surface S d'équation $z = \frac{xy}{a}(a > 0)$.

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer l'allure de S.

2) Exprimer une équation du plan tangent en un point régulier de S.

6 On considère la surface (S) définie par la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \longmapsto (u - v, u^2 + v^2, u^2 - v^2).$$

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour tracer un graphe de la surface.

2) Déterminer les points multiples de cette surface.

3) Déterminer ses points réguliers et une équation du plan tangent en un point régulier.

7 Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a < c$.

Déterminer une équation de la surface de révolution obtenue en faisant tourner l'ellipse du plan (yOz) d'équation :

$$\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

autour de l'axe (Oz).

8 Étude et tracé de la courbe (C) paramétrée par :

$$x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}; y = \frac{t^2}{(t+1)(t-1)}.$$

Montrer que (C) a une parabole asymptote d'axe parallèle à (Ox). Préciser sa position par rapport à cette parabole.

9 La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités.

Elle admet pour équation $y = \frac{\mathrm{ch}(ax)}{a}$, où $a \in \mathbb{R}^*$.

1) Étudier et tracer une telle courbe.

2) Déterminer la longueur d'un arc de chaînette.

3) Préciser le repère de Frénet et le rayon de courbure en un point.

10 On appelle paraboloïde elliptique une surface (S) dont l'équation dans un repère orthonormé convenablement choisi est :

$$mz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

(avec $a, b > 0, m \neq 0$).

1) Utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer l'allure de la surface.

2) Déterminer les intersections de S avec les plans de coordonnées et avec un plan parallèle à (xOy).

3) Déterminer les projections orthogonales de S sur les plans de coordonnées.

4) Déterminer les points réguliers du paraboloïde elliptique et le plan tangent en un de ces points.

11 On note E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne d'autre part par A l'ensemble des couples (α, f) de fonctions à valeurs réelles vérifiant les propriétés suivantes :

- α et f sont définies, continues et croissantes sur $[1, +\infty[$,
- α et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$,
- $\alpha(1) = f(1) = 0$,
- $\forall x \in]1, +\infty[\quad f'(x) > 0$.

Pour tout couple $(\alpha, f) \in A$, on considère la surface $S_{\alpha,f}$ de E définie paramétriquement par :

$$\overrightarrow{OM}(u, v) = \alpha(u)\vec{i} + u\vec{e_v} + f(u)\vec{k}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

où :

$$\overrightarrow{e_v} = \cos v\,\overrightarrow{i} + \sin v\,\overrightarrow{j}$$

et :

$$(u, v) \in [1, +\infty[\times [0, 2\pi].$$

1) Montrer que $S_{\alpha,f}$ admet un plan de symétrie. En donner une équation.

2) Étudier, suivant les valeurs du réel z_0, l'intersection de $S_{\alpha,f}$ avec le plan P_0 d'équation $z = z_0$. Préciser la nature de cette intersection et en déduire une interprétation géométrique des paramètres u et v.

3) Montrer que l'intersection de $S_{\alpha,f}$ et du plan d'équation $y = 0$ est la réunion de deux courbes disjointes. On note C_1 (respectivement C_2) celle de ces deux courbes qui contient le point de coordonnées $(1, 0, 0)$ (respectivement $(-1, 0, 0)$).

4) a) Déterminer en tout point, $M(u, v)$ de $S_{\alpha,f}$ tel que $u \neq 1$, les vecteurs dérivés partiels $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}$.

b) Déterminer en tout point, $M(u, v)$ de $S_{\alpha,f}$ tel que $u \neq 1$, un vecteur normal $\overrightarrow{N}$.

c) Que peut-on dire de $\overrightarrow{N}$ en tout point de C_1 ou de C_2 en lequel ce vecteur est défini ? Quelle propriété de ces deux courbes met-on ainsi en évidence ?

12 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit a et R deux réels tels que $0 < R < a$.

On considère la sphère S de l'espace de centre $(0, 0, a)$ et de rayon R.

1) Déterminer une équation cartésienne du cône de sommet O dont les génératrices sont tangentes à la sphère S.

2) Vous disposez maintenant d'un cornet de glace virtuel surmonté d'une boule parfaite, mais il y a de la place à l'intérieur !

Quel est le rayon maximum d'une petite boule supplémentaire que l'on puisse placer dans le cornet.

Indication : Faites des dessins, car un exercice de géométrie sans dessin, c'est comme un cornet de glace sans glace !

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Structures algèbriques usuelles

16

Introduction

La notion d'appartenance à un ensemble est claire pour Abel (1802-1829) et encore plus pour Galois(1811-1832). Mais il faut attendre les travaux (1855) de Kronecker (1823-1891) et de Dedekind (1831-1916) pour voir apparaître des mots de nature ensembliste qui désignent un ensemble d'éléments ayant une propriété commune.

Dès 1830, Évariste Galois a introduit, pour un groupe fini, la notion de groupe simple (groupe n'ayant aucun sous-groupe distingué autre que lui-même et $\{e\}$). Mais il est incompris de ses contemporains et ses manuscrits ne sont publiés qu'après sa mort, en 1846, par Liouville (1809-1882).

Les recherches sur la théorie des groupes ne se développent vraiment qu'à partir de 1845. Cauchy (1789-1857) reprend à cette époque les travaux qu'il avait abandonnés depuis 30 ans.

En 1854, Cayley (1821-1895) définit de façon générale un groupe fini. La formulation correcte de la définition d'un groupe quelconque apparaît pour la première fois, en 1899, dans le Traité d'Algèbre *de Weber (1842-1913).*

À partir de 1873, Jordan (1838-1922) introduit la notion d'isomorphisme et de groupe quotient. L'étude des groupes simples est reprise par Chevalley (1909-1984) et Mathieu (1835-1890). En 1860, les mathématiciens connaissent 5 groupes simples finis ne se rattachant pas à la théorie générale.

Entre 1960 et 1980, 21 autres groupes simples sont découverts. Le plus grand, appelé le « Monstre », a plus de 10^{53} éléments.

Vers 1975, on commence à penser qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes simples de ce type.

OBJECTIFS

- Consolider les notions abordées en Première année : groupes, sous-groupes, morphisme de groupes, d'anneaux, de sous-anneaux arithmétique dans $\mathbb{Z}$, divisibilité.
- Idéal d'un anneau commutatif.
- Étudier des groupes cycliques.
- Étudier l'anneau quotient : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.
- Idéaux de $\mathbb{K}[X]$
- Algèbre, sous-algèbre et morphisme d'algèbres.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Groupe

1.1. La relation de congruence

Une relation binaire R définie sur une ensemble E est une **relation d'équivalence** si, et seulement si, elle est

réflexive : $\forall x \in E \quad xRx$;

symétrique $\forall (x,y) \in E^2 \quad xRy \Rightarrow yRx$;

transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$;

Pour tout x de E l'ensemble $\{y \in E \,;\ xRy\}$ est appelé **classe d'équivalence** de x. On le notera $C(x)$.

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), mathématicien français d'origine sarde.

Théorème 1

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E. L'ensemble des classes d'équivalence est une **partition** de E, c'est-à-dire que E est la réunion des classes d'équivalence, l'intersection de deux classes est vide et aucune classe n'est vide.

Démonstration

La relation est réflexive, donc $x \in C(x)$. Aucune classe n'est vide et leur réunion est E. Par l'absurde, si deux classes $C(x)$ et $C(z)$ ont un point commun y alors, par transitivité et symétrie, elles sont confondues.

Mensa ACADEMY

Application 1

Théorème de Lagrange

1) *Soit $(G,.)$ un groupe et H un sous-groupe de G.*

Montrer que la relation binaire R, définie sur G par xRy si, et seulement si, $x^{-1}y$ appartient à H, est une relation d'équivalence. On notera $xH = \{xh \,;h \in H\}$ la classe de x.

2) *Soit G un groupe fini. Le cardinal de G est appelé l'ordre de G.*

En déduire le théorème de Lagrange : l'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce groupe.

1) Notons e l'élément neutre de $(G,.)$. Pour tout x dans G on a $x^{-1}x = e$ et e appartient à H.

Donc xR_gx. La relation R_g est réflexive.

Pour tout x et tout y éléments de G, si $x^{-1}y$ appartient à H alors $(x^{-1}y)^{-1}$ appartient à H, car H est un sous-groupe. Par conséquent, xRy entraîne yRx. La relation R_g est symétrique.

Pour x, y et z quelconques dans G, on a :

$$(x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}(yy^{-1})z = x^{-1}z.$$

Donc, si xRy et yRz, alors xRz. La relation R est transitive.

Un élément y de G est dans la classe de x pour R si, et seulement s'il existe un élément h de H tel que $x^{-1}y = h$. Par conséquent, la classe de x pour la relation R est xH.

2) L'application $x \longmapsto ax$ de H dans aH est bijective, car a est inversible. Toutes les classes d'équivalence pour R ont le même cardinal, celui de H.

Les classes d'équivalence réalisent une partition de G, leur nombre p est fini puisque G est fini. Par conséquent : $\text{card}(G) = p\,\text{card}(H)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit n un entier naturel, nous avons vu en Première année que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme. La relation d'équivalence définie dans l'*application* 1 pour ce sous-groupe $n\mathbb{Z}$ est la relation suivante.

Prenons a et b deux entiers relatifs, nous dirons que a est *congru à* b *modulo* n si $a - b \in n\mathbb{Z}$.

On notera $a \equiv b[n]$.

Rapport ENS, 2003

« Les candidats manquent de familiarité avec les calculs sur les entiers, que ce soit : avec les équations diophantiennes (trop de candidats n'ont jamais vu les solutions entières de $a^2 + b^2 = c^2$) ; avec les congruences ; avec le groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (un des rares groupes, pourtant, dont l'étude demeure au programme) ; avec la géométrie de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. »

Théorème 2

La relation de congruence est une relation d'équivalence.

Théorème 3

Deux entiers sont congrus modulo n si, et seulement s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Démonstration

Supposons que $a \equiv b[n]$ et effectuons la division euclidienne par n de a et de b.

Il existe deux entiers q et r tels que : $a = nq + r$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$.

De même, il existe deux entiers q' et r' tels que : $b = nq' + r'$ et $r' \in [\![0, n-1]\!]$.

$$r - r' = (a - b) - n(q - q').$$

Donc : $r - r' \in n\mathbb{Z}$, de plus $|r - r'| < n$, par conséquent $r - r' = 0$.

Réciproquement, si $a = nq + r$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$ et si $b = nq' + r$, alors $a - b = n(q - q')$. D'où : $a \equiv b[n]$.

Théorème 4

Quels que soient les entiers a, b, c et d, si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, on a : $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$. On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition et la multiplication.

Démonstration

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, alors $(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d)$ et $(a+c)-(b+d)$ est un multiple de n. De même, $ac - bd = a(c-d)+d(a-b)$ montre que $ac - bd$ est un multiple de n.

Théorème 5

Pour tout (a, b) dans $\mathbb{Z}^2$ et tout p dans $\mathbb{N}$, si $a \equiv b[n]$, alors :

- $-a \equiv -b[n]$;
- $a^p \equiv b^p[n]$.

Démonstration

Pour tout entier $p \geqslant 2$, $a^p - b^p = (a - b)\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}$. Si $a - b$ est un multiple de n, alors $a^p - b^p$ également.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Recherchons le reste de la division euclidienne de 100^{100} par 13.

• Pour cela, nous remarquons $100 \equiv 9[13]$.

Puis $100^2 \equiv 81[13]$, d'où $100^2 \equiv 3[13]$.

Enfin, $100^3 \equiv 27[13]$ puis, $100^3 \equiv 1[13]$.

D'après le *théorème* 4, pour tout entier $k > 0$, $100^{3k} \equiv 1[13]$.

Ce qui entraîne : $100^{3k+1} \equiv 9[13]$ et $100^{3k+2} \equiv 3[13]$.

• L'étude de l'exposant devra se faire modulo 3.

$100 \equiv 1[3]$, donc $100^{100} \equiv 9[13]$. Le reste de la division de 100^{100} par 13 est 9.

Application 2

Congruence et division

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1) *Soit m un entier relatif premier avec n. Si a et b sont deux entiers tels que $ma \equiv mb[n]$, montrer que a et b sont congrus modulo n.*

2) *Soit a un entier relatif premier avec n. Montrer que la suite des restes r_k de la division euclidienne de a^k par n est périodique.*

1) $ma \equiv mb[n]$. Donc il existe un entier q tel que $m(a-b) = nq$. Or m et n sont premiers entre eux.

Le *théorème de Gauss* entraîne que n divise $a-b$.

2) L'application f de $\mathbb{N}$ dans $[\![0, n-1]\!]$ qui associe à tout entier naturel k le reste r_k de la division euclidienne de a^k par n n'est pas injective, car $\mathbb{N}$ est infini.

Il existe deux entiers k et q tel que $k > q$ et $r_k = r_q$.

Soit $t = k - q$.

$t > 0$ et $a^{t+q} \equiv a^q[n]$.

L'entier a est premier avec n, donc a^q également. La première question entraîne : $a^t \equiv 1[n]$.

Puis, par compatibilité de la congruence avec la multiplication, on a, pour tout entier s,

$$a^{t+s} \equiv a^s[n].$$

L'entier naturel t est une période.

Application 3

Critères de divisibilité

L'écriture d'un entier x en base 10 est :

$x = \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_0} = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x soit divisible par 3. Donner également un critère de divisibilité par 9, par 11.

• $10 \equiv 1[3]$. Donc $x \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k[3]$.

L'entier x est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres de son écriture décimale est divisible par 3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• De même, $10 \equiv 1[9]$.

L'entier x est divisible par 9 si, et seulement si, la somme des chiffres de son écriture décimale est divisible par 9.

• $10 \equiv -1[11]$. Donc $x \equiv \sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_k[11]$.

L'entier x est divisible par 11 si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_k$ est divisible par 11.

► *Pour s'entraîner : 1.*

1.2. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Soit un entier relatif a, l'ensemble $\{a + nk\ ; k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé classe de congruence de a et notée $\overline{a}$. L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sera appelé **ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$.**

Nous noterons ψ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, définie par $\psi : a \longmapsto \overline{a}$.

Remarque

Pour $n = 0$, deux entiers sont congruents si, et seulement s'ils sont égaux.
Pour $n = 1$, deux entiers quelconques sont congruents.

Théorème 6

• Il existe une, et une seule, structure de groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que ψ soit un morphisme de groupes. La surjection ψ est appelée morphisme canonique de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

• $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

• $\text{Ker}\ \psi = n\mathbb{Z}$ et $\text{Im}\psi = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• Le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est n. Ses éléments sont $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$... et $\overline{n-1}$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Remarquons tout d'abord que ψ est surjectif. Soit A et B deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il existe deux entiers a et b tels que $\psi(a) = A$ et $\psi(b) = B$.

Si ψ est un morphisme de groupes, alors $\psi(a) + \psi(b) = \psi(a + b)$ détermine $A + B$ de manière unique.

Réciproquement, vérifions que l'addition que nous venons de définir a un sens et que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

• Pour vérifier que l'addition est bien définie, on doit montrer que la somme $A + B$ est indépendante des représentants a et b des classes A et B. Soit a' et b' deux représentants respectifs de A et B.

$$\psi(a) = \psi(a') = A. \text{ Donc } a \equiv a'[n].$$
$$\psi(b) = \psi(b') = B. \text{ Donc } b \equiv b'[n].$$

La compatibilité de la relation de congruence modulo n avec l'addition est essentielle. Nous obtenons $a + b \equiv a' + b'[n]$, puis $\psi(a + b) = \psi(a' + b')$.

• On vérifie facilement que la loi $+$ ainsi définie est une loi de composition interne, elle est commutative et associative car l'addition de $\mathbb{Z}$ l'est.

L'élément neutre est la classe $\overline{0}$ de 0 et tout élément $A = \psi(a)$ possède un symétrique $\psi(-a)$. Par conséquent, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

• L'entier a appartient à $\text{Ker}\ \psi$ si, et seulement si, $\overline{a} = \overline{0}$. C'est-à-dire, si, et seulement si, $a - 0$ appartient à $n\mathbb{Z}$. Par conséquent, $\text{Ker}\ \psi = n\mathbb{Z}$. La surjectivité de ψ entraîne $\text{Im}\psi = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• Pour tout entier a, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $a = nq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant n - 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, $a \equiv r[n]$. D'où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}..., \overline{n-1}\}$. Ces classes d'équivalence sont distinctes deux à deux. Donc :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}..., \overline{n-1}\}.$$

1.3. Sous-groupe engendré

Théorème 7

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. Alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Démonstration

Montrons que $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G. Notons e l'élément neutre de G.

Alors e appartient à tout sous-groupe de G donc à $\bigcap_{i\in I} H_i$.

Soit un couple quelconque (x, y) d'éléments de $\bigcap_{i\in I} H_i$, alors, pour tout indice i, x et y sont dans H_i.

Or, H_i est un sous-groupe de G. Donc, pour tout indice i, l'élément $x^{-1}y$ appartient à H_i.

Par conséquent, l'élément $x^{-1}y$ appartient à $\bigcap_{i\in I} H_i$.

Mensa

Soit $(G, .)$ un groupe et A une partie de G. Le plus petit sous-groupe de G contenant A est appelé **sous-groupe engendré par A** et on le note $\langle A \rangle$.

Lorsque $\langle A \rangle = G$, on dit que G est **engendré** par A et que A est une **partie génératrice** de G.

Théorème 8

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et A une partie de G.

- Le sous-groupe engendré par A est l'intersection de tous les sous-groupes contenant A.
- Si $A = \varnothing$, alors $\langle A \rangle = \{e\}$.
- Si $A \neq \varnothing$, alors :

$$\langle A \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n};\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\ \ a_i \in A\}.$$

Démonstration

- Le premier point est une conséquence du *théorème* 6.
- Tout sous-groupe contient e et $\{e\}$ est un sous-groupe.
- On vérifie, tout d'abord que :

$$B = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\ \ a_i \in A\}$$

est un sous-groupe de G. Puis on montre que tout sous-groupe contenant A contient l'ensemble B.

Ainsi B est le plus petit sous-groupe contenant A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

■ Soit E un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Le groupe orthogonal $(\mathcal{O}(E), \circ)$ des automorphismes orthogonaux est engendré par l'ensemble des réflexions.

On montrera dans le chapitre que ce résultat se généralise aux dimensions $n \geqslant 3$.

■ Le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ est engendré par l'ensemble des transpositions.

Application 4

Définition du plus grand commun diviseur

Soit $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$ deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et $p = m \wedge n$.

Montrer que le sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ engendré par $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ est l'ensemble $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ de toutes les sommes d'éléments de $m\mathbb{Z}$ et de $n\mathbb{Z}$. Le comparer à $p\mathbb{Z}$.

On a vu en Première année que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

On vérifie facilement que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, qu'il contient les sous-groupes $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$. Tout groupe contenant $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ contient $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.

Par conséquent, $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est le plus petit groupe contenant $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$.

Mensa ACADEMY

Application 5

Générateurs de $\mathfrak{S}_n$

Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est engendré par le cycle $(1, 2, \ldots, n-1)$, et la transposition $(n-1, n)$.

Notons $\gamma = (1, 2, \ldots, n-1)$ et $\tau = (n-1, n)$.

Pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$, nous constatons que : $\gamma^{n-1-i} \tau \gamma^{-n+1+i} = (i, n)$.

Le sous-groupe engendré par γ et τ contient toutes les transpositions (i, n).

Or, pour tout p et q dans $[\![1, n]\!]$ distincts, nous avons :

$$(p, q) = (p, n)(q, n)(p, n).$$

Le sous-groupe engendré par γ et τ contient toutes les transpositions et le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est engendré par les transpositions. Par conséquent, $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est engendré par γ et τ.

► ***Pour s'entraîner : 2 et 3.***

1.4. Groupe monogène

Soit $(G, .)$ un groupe et a un élément de G.

L'élément neutre sera noté 1_G. et le symétrique (inverse) de a sera noté a^{-1}.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout entier naturel n, on définit par récurrence **la puissance $n^{\text{ième}}$: a^n** de l'élément a en posant :

$$a^0 = 1_G.$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n a.$$

Pour tout entier relatif m de $\mathbb{Z}^-$, on pose $a^m = (a^{-1})^{-m}$.

Théorème 9

Soit $(G, .)$ un groupe. Alors, pour tout (m, n) de $\mathbb{Z}^2$ et tout a de G on a :

- $a^{m+n} = a^m a^n$;
- $a^{-m} = (a^{-1})^m$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

Si a et b sont deux éléments de G tels que $ab = ba$, on a, pour tout entier m : $(ab)^m = a^m b^m$.

Un groupe **monogène** est un groupe engendré par un seul élément appelé **générateur** .

Un groupe **cyclique** est un groupe monogène fini.

Théorème 10

Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre n, d'élément neutre e, engendré par l'élément a. Alors :

- $G = \{a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}\}$.
- n est le plus petit entier non nul tel que $a^n = e$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Le groupe $(G, .)$ est monogène, engendré par a. Donc $G = \{a^k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

G est fini, par conséquent les a^k ne peuvent pas être distincts deux à deux. Il existe l dans $\mathbb{N}$ tel que : a^0, $a^1, \ldots,$ a^{l-1} sont distincts deux à deux et il existe k dans $[\![0, l-1]\!]$ tel que $a^l = a^k$.

Notons $r = l - k$.

$$a^r = a^0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant l.$$

Par définition de $l, a^r \neq a^0$ si $r < l$. Donc $r = l$ et le seul cas possible est $a^l = e$.

Réciproquement, supposons que $a^l = e$ et que les éléments a^0, $a^1, \ldots,$ a^{l-1} sont distincts deux à deux.

Pour tout m dans $\mathbb{Z}$, effectuons la division euclidienne de m par l. Il existe q dans $\mathbb{Z}$ et s dans $[\![0, l-1]\!]$ uniques tels que $m = ql + s$.

$$a^m = a^{ql+s} = (a^l)^q a^s = a^s.$$

Par conséquent $G = \{a^0, a^1, \ldots, a^{l-1}\}$.

L'ordre de G est n. Donc $n = l$.

Exemple

Le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est monogène, engendré par $e^{2i\frac{\pi}{n}}$. Il est cyclique d'ordre n car n est le plus petit entier non nul tel que $(e^{2i\frac{\pi}{n}})^n = 1$.

Lorsque la loi de G est notée additivement $(G, +)$, l'élément neutre est noté 0_G et le symétrique (opposé) d'un élément a de G est noté $-a$. En général la notation additive est uniquement employée lorsque la loi est commutative.

Pour tout entier naturel n, on définit de la même manière le **$n^{\text{ième}}$ multiple : na** de a en posant :

$$0a = 0_G.$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a = na + a.$$

Pour tout entier relatif m de $\mathbb{Z}^-$ on pose $ma = (-m)(-a)$.

Les propriétés énoncées dans le *théorème* 9 deviennent :

Pour tout (m, n) de $\mathbb{Z}^2$ et tout a de G on a :

$$(m+n)a = ma + na$$
$$(-m)a = m(-a)$$
$$m(na) = (mn)a.$$

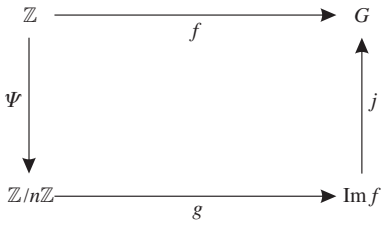
La loi + étant commutative, on a, pour tous a et b de G et tout m de $\mathbb{Z}$, $m(a+b) = ma + mb$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 11

Soit $(G,.)$ un groupe et f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(G,.)$ Alors :

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe H de $(G,.)$.
- Il existe un entier n tel que $\mathrm{Ker}\,(f)=n\mathbb{Z}$.
- Pour $n=0$, f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(H,.)$
- Pour $n\neq 0$, il existe un isomorphisme g de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ dans $(H,.)$ tel que $f=j\circ g\circ\psi$ en notant j l'injection canonique de H dans G et ψ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.



Doc. 1. *Décomposition canonique du morphisme f.*

Démonstration

- L'image du sous-groupe $(\mathbb{Z},+)$ par un morphisme de groupes f est un sous-groupe de $(G,.)$.
- Le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$. Donc, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f)=n\mathbb{Z}$.
- Si $n=0$, alors $\mathrm{Ker}\,(f)=\{0\}$. Le morphisme f est injectif. L'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ sur le sous-groupe $(H,.)$
- Si $n\neq 0$, considérons l'application g de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans H, définie pour toute classe $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{N}$, $g(\overline{k})=f(k)$. Cette application est bien définie, $g(\overline{k})$ ne dépend pas du choix du représentant k de la classe $\overline{k}$. En effet, soit l un autre représentant de $\overline{k}$. Il existe q dans $\mathbb{Z}$ tel que $l=k+nq$.

$f(l)=f(k)f(nq)$. L'élément nq est dans le noyau de f. Donc $f(l)=f(k)$.

D'autre part, pour k et l entiers, $g(\overline{k+l})=f(k+l)=f(k)f(l)=g(\overline{k})g(\overline{l})$. L'application g est un morphisme de groupes.

$$\mathrm{Ker}\,g=\{\overline{k}/f(k)=e\}=\{\overline{k}/k\in\mathrm{Ker}\,f\}=\{\overline{0}\}.$$

L'application g est un morphisme de groupes injectif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G, d'image H.

L'application g est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ dans $(H,.)$.

- Par construction de g, on a $f=j\circ g\circ\psi$. On dit que le diagramme (*doc.* 1) est commutatif.

Corollaire 11.1

Soit $(G,.)$ un groupe d'élément neutre e et a un élément de G.

- L'application f_a de $\mathbb{Z}$ dans G, définie pour tout entier k par $f_a(k)=a^k$, est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(G,.)$.
- $\mathrm{Im}(f_a)=\langle a\rangle$.
- Il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{Ker}\,(f_a)=n\mathbb{Z}$.
- Si $n=0$, l'application f_a est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ sur le sous-groupe engendré par a.

On dit que a est d'**ordre infini**.

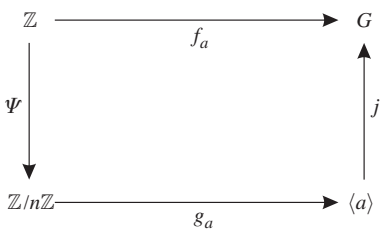
- Si $n\neq 0$, l'application g_a de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\langle a\rangle$, définie pour toute classe $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $g_a(\overline{k})=a^k$, est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ dans le sous-groupe engendré par a.

On dit que a est d'**ordre fini** n.

- Les seuls morphismes de groupe de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(G,.)$ sont les morphismes f_a, pour a dans G.

Remarque

Notons j l'injection canonique de $<a>$ dans G.
Nous avons $f_a=j\circ g_a\circ\psi$. On dit que le diagramme suivant est commutatif.



Doc. 2. *Décomposition canonique de f_a.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Pour k et l dans $\mathbb{Z}$, nous avons $a^{k+l} = a^k a^l$. Par conséquent, l'application f_a est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, .)$.

• $\text{Im}(f_a) = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$.

• C'est un cas particulier du théorème 10 avec $H = \langle a \rangle$.

• Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, .)$. Notons $f(1) = a$. On montre par récurrence que $f(k) = a^k$. Puis le calcul de $f(-k + k)$ montre que $f(-k) = a^{-k}$. D'où $f = f_a$.

Corollaire 11.2

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et a un élément de G d'ordre fini n. Alors n est caractérisé par l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- n est le plus petit entier naturel non nul p tel que $a^p = e$.
- n est l'unique entier naturel non nul tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{Z} \quad a^p = e \Leftrightarrow n \mid p.$$

Exemple

Trouvons l'ordre de $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et de $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$\sigma_1 \neq i$ et $\sigma_1^2 = i$. Donc l'ordre de σ_1 est 2.

$\sigma_2 \neq i$, $\sigma_2^2 \neq i$, $\sigma_2^3 \neq i$ et $\sigma_2^4 = i$. Donc l'ordre de σ_2 est 4.

Mensa ACADEMY

Corollaire 11.3

Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Corollaire 11.4

Soit G un groupe fini, tout élément a de G est d'ordre fini et son ordre divise l'ordre du groupe G.

Démonstration

C'est une conséquence du *théorème de Lagrange* démontré dans l'*application* 1.

► ***Pour s'entraîner : 4 et 5.***

1.5. Générateurs d'un groupe cyclique

Théorème 12

Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes $\overline{k}$ telles que : $k \wedge n = 1$.

Démonstration

La classe $\overline{k}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc il existe un entier p tel que $p\overline{k} = \overline{1}$. Réciproquement, s'il existe p dans $\mathbb{Z}$ tel que $p\overline{k} = \overline{1}$, alors, pour tout classe $\overline{a}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{a} = ap\overline{k}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, la classe $\overline{k}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si, et seulement s'il existe un entier p tel que $p\overline{k} = \overline{1}$. Or $p\overline{k} = \overline{1}$ équivaut à $pk \equiv 1[n]$.

$pk \equiv 1[n]$ si, et seulement s'il existe un entier q tel que $pk + qn = 1$.

Le *théorème de Bézout* assure qu'il existe deux entiers p et q tels que $pk + qn = 1$ si, et seulement si, k et n sont premiers entre eux.

Théorème 13

Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre n, engendré par a.

- Les générateurs de G sont les a^k, où $k \wedge n = 1$.
- Tout sous-groupe de G est cyclique, d'ordre un diviseur de n.

Démonstration

• D'après le *corollaire* 11.1, g_a est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\langle a \rangle$. Or $G = \langle a \rangle$.

L'élément x de G est un générateur de G si, et seulement s'il existe $\overline{k}$ générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $x = g_a(\overline{k})$. Le *théorème* 12 prouve que x est un générateur de G si, et seulement s'il existe un entier k premier avec n tel que $x = a^k$.

• Si H est un sous-groupe de G, alors $f_a^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Il existe un entier naturel h tel que $f_a^{-1}(H) = h\mathbb{Z}$. De plus,

$$\text{Ker}\,(f_a) \subset f_a^{-1}(H),$$

donc :

$$n\mathbb{Z} \subset h\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, h divise n.

L'application f_a est surjective, donc :

$$f_a(f_a^{-1}(H)) = H.H = f_a(h\mathbb{Z}) = \langle a^h \rangle.$$

Le sous-groupe H est monogène, engendré par a^h. Soit $m = n/h$.

$$(a^h)^m = e.$$

L'ordre l de a^h divise m.

Si $l \neq m$, l'ordre de a est inférieur strictement à n. Or n est l'ordre de a.

Par conséquent $l = m$. L'ordre de a^h est n/h.

Exemple

Les générateurs de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ sont $\overline{1}$ et $\overline{5}$.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \overline{5} \rangle$.

Corollaire 13.1

Les générateurs du sous-groupe $\mathbb{U}_n$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les éléments $e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ tels que $k \wedge n = 1$.

Démonstration

Le groupe monogène $\mathbb{U}_n = \langle e^{2i\frac{\pi}{n}} \rangle$ est cyclique d'ordre n car n est le plus petit entier non nul tel que $(e^{2i\frac{\pi}{n}})^n = 1$. Le *théorème* 13 prouve que les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont les éléments $e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ tels que $k \wedge n = 1$.

Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont appelés les **racines primitives** $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 6

Comparaison des ensembles $\mathbb{U}_n$

Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Montrer que $\mathbb{U}_p$ est inclus dans $\mathbb{U}_q$ si, et seulement si, p divise q.

$\mathbb{U}_p = \langle e^{2i\frac{\pi}{p}} \rangle$ et $\mathbb{U}_q = \langle e^{2i\frac{\pi}{q}} \rangle$.

$\mathbb{U}_p$ est inclus dans $\mathbb{U}_q$ si, et seulement si, $\langle e^{2i\frac{\pi}{p}} \rangle$ est inclus dans $\langle e^{2i\frac{\pi}{q}} \rangle$.

Ceci est réalisé si, et seulement si, $e^{2i\frac{\pi}{p}}$ appartient à $\langle e^{2i\frac{\pi}{q}} \rangle$. C'est-à-dire quand il existe un entier k tel et un entier l tel que $\frac{1}{p} = \frac{k}{q} + l$.

$$\frac{1}{p} = \frac{k}{q} + l \Leftrightarrow q = p(k + ql)$$

S'il existe deux entiers k et l tels que $\frac{1}{p} = \frac{k}{q} + l$, alors p divise q.

Réciproquement, si p divise q, il existe un entier r tel que $q = pr$. Dans ce cas, prenons $k = r$ et $l = 0$.

► *Pour s'entraîner : 6.*

1.6. Produit de deux groupes

Considérons deux groupes $(G, \circ)$ et $(H, \perp)$ d'éléments neutres respectifs e et f, nous pouvons définir sur $G \times H$ une loi de composition interne $\cdot$.

Pour tout couple (g, h) et (g', h') de $G \times H$, le couple $(g \circ g', h \perp h')$ appartient à $G \times H$.

Nous poserons $(g, h) \cdot (g', h') = (g \circ g', h \perp h')$.

Vérifions que $G \times H$ muni de la loi $\cdot$ est un groupe.

L'associativité résulte de celle des lois $\circ$ et $\perp$.

Le couple (e, f) est l'élément neutre.

Si g' est le symétrique de g dans $(G, \circ)$ et si h' est le symétrique de h dans $(H, \perp)$, alors (g', h') est le symétrique de (g, h) dans $(G \times H, \cdot)$

Le groupe $(G \times H, \cdot)$ est appelé le **groupe produit** des groupes $(G, \circ)$ et $(H, \perp)$.

Théorème 14

Soit $(G, \circ)$ et $(H, \perp)$ deux groupes.

- La loi $\cdot$ définie sur $G \times H$ par (g, h) et (g', h') de $G \times H$, $(g, h) \cdot (g', h') = (g \circ g', h \perp h')$, est une loi de composition interne.
- $(G \times H, \cdot)$ est un groupe.

Application 7

Groupe de Klein

1) *Donner la table d'addition du groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

2) *Trouver une interprétation géométrique de ce groupe.*

3) *Les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?*

4) *Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est-il cyclique ?*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Le groupe de Klein, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, a pour table d'addition :

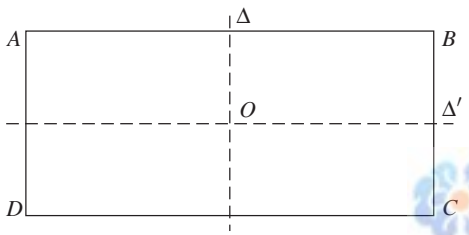
$\cdot$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

2) Cherchons, une interprétation géométrique de ce groupe.

On vérifie que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des isométries du rectangle.

Le groupe des isométries qui laissent $\{A,B,C,D\}$ invariant est constitué de :

- l'identité i ;
- la réflexion d'axe Δ : s_1 ;
- la réflexion d'axe Δ' : s_2 ;
- la symétrie de centre O : $s_1 \circ s_1 = s$.



Doc. 4.

Dressons la table de composition de ce groupe d'isométries.

$\circ$	i	s_1	s_2	s
i	i	s_1	s_2	s
s_1	s_1	i	s	s_2
s_2	s_2	i	s	s_1
s	s	s_2	s_1	i

Nous constatons que les deux tables sont identiques.

3) Montrons que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dans le groupe de Klein, on a $x+x=0$ pour tout élément x.

S'il existait un isomorphisme φ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, comme tout élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est d'ordre inférieur ou égal à 2, tout élément de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ serait d'ordre inférieur ou égal à 2 également. Ce qui n'est pas.

Donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4) Le groupe de Klein n'est pas cyclique, sinon il serait isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Felix Klein (1849-1925), mathématicien allemand.

Mensa ACADEMY

Théorème 15

Soit n et p deux entiers naturels premiers entre eux.

Le groupe produit de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ et de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z},+)$.

Remarque

L'*application* 7, montre que ce n'est pas le cas lorsque n et p ne sont pas premiers entre eux.

Démonstration

Nous allons appliquer le *théorème* 10 au morphisme f de $(\mathbb{Z},+)$ dans le groupe produit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$ défini de la manière suivante.

Soit x un entier relatif, notons $\dot{x}$ la classe de x modulo n et $\overline{x}$ la classe de x modulo p.

Posons $f(x)=(\dot{x},\overline{x})$. Il est clair que f est un morphisme de groupes.

Cherchons le noyau de f.

L'entier x est dans le noyau de f si, et seulement si, n et p divisent x. Or, n et p sont premiers entre eux.

Donc le noyau de f est $np\mathbb{Z}$.

Le *théorème* 10, assure l'existence d'un isomorphisme g de $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathrm{Im}(f),+)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les groupes $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(f)$ ont le même cardinal np.
Il est égal à celui de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Par conséquent : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(f)$.

Corollaire 15.1 : Théorème chinois

Soit n et p deux entiers naturels premiers entre eux.

Le système d'équations $\begin{cases} x \equiv a\,[n] \\ x \equiv b\,[p] \end{cases}$ d'inconnue x, où a et b sont des entiers, admet au moins une solution c dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est $\{c + knp\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration

Considérons $(\dot{a}, \overline{b})$ élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
D'après le *théorème* 15, il existe un unique $\overline{c}$ dans $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$ tel que $f(c) = (\dot{a}, \overline{b})$.
Par conséquent $\dot{a} = \dot{c}$ et $\overline{b} = \overline{c}$. L'entier c est solution.
D'autre part x est solution, si et seulement si, x est un représentant de $\overline{c}$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{c + knp\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

Application 8

Méthode pratique lorsque les entiers sont premiers deux à deux

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ *les systèmes* $\begin{cases} x \equiv 3\,[17] \\ x \equiv 4\,[11] \end{cases}$ *et*

$$\begin{cases} x \equiv 3\,[17] \\ x \equiv 4\,[11] \\ x \equiv 5\,[6] \end{cases}.$$

• 11 et 17 sont premiers entre eux.
Utilisons l'algorithme d'Euclide.
Les divisions successives s'écrivent :

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \times 11 + 6 \\ 11 &= 1 \times 6 + 5 \\ 6 &= 1 \times 5 + 1 \\ 5 &= 1 \times 5 + 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$1 = 2 \times 17 - 3 \times 11. \quad \text{(Identité de Bézout.)}$$

Par conséquent :
$2 \times 17 \equiv 1[11]$, donc $8 \times 17 \equiv 4[11]$
$(-3) \times 11 \equiv 1[17]$, donc $-9 \times 11 \equiv 3[17]$.

D'où une solution particulière :

$$c = 8 \times 17 - 9 \times 11 = 37.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{37 + 187k\,;k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}\,;x \equiv 37[187]\}.$$

• Le deuxième système est équivalent à :

$$\begin{cases} x \equiv 37\,[187] \\ x \equiv 5\,[6] \end{cases}$$

On procède comme pour le premier système. L'ensemble des solutions est :

$$\{785 + 1\,122k\,;k \in \mathbb{Z}\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 9

Méthode pratique lorsque les entiers ne sont pas premiers deux à deux

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, m leur plus petit commun multiple et d leur plus grand commun diviseur. Pour tout entier x, notons $\dot{x}$ la classe de x modulo n et $\overline{x}$ la classe de x modulo p.

1) *Notons ψ le morphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ qui à $\dot{x}$, classe de x modulo n, associe $\overline{\overline{x}}$, classe de x modulo d, et ψ' le morphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ qui à $\overline{x}$, classe de x modulo p, associe $\overline{\overline{x}}$. Vérifier que ψ et ψ' sont bien définis.*

2) *Posons $f(x) = (\dot{x}, \overline{x})$.*

Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, de noyau $m\mathbb{Z}$.

3) *Soit g l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ qui à tout couple $(\dot{a}, \overline{b})$ associe $\psi(a) - \psi'(b)$.*

Prouver que g est un morphisme de groupes surjectif et que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Montrer enfin que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

4) *Montrer que le système $\begin{cases} x \equiv a\,[n] \\ x \equiv b\,[p] \end{cases}$ admet une solution si, et seulement si, d divise $a - b$.*

Déterminer alors toutes les solutions.

5) *Résoudre $\begin{cases} x \equiv 3\,[6] \\ x \equiv 1\,[10] \end{cases}$.*

1) Vérifions que la définition de ψ ne dépend pas du représentant x de la classe $\dot{x}$.

Soit y un autre représentant de $\dot{x}$, alors $y \equiv x[n]$.

Or d divise n donc $y \equiv x[d]$, ce qui entraîne : $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$.

Vérifions que ψ est un morphisme de groupes.

Soit $\dot{x}$ et $\dot{x'}$ deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\psi(\dot{x} + \dot{x'}) = \psi(\dot{x + x'}) = \overline{\overline{x + x'}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{x'}}$$
$$= \psi(\dot{x}) + \psi(\dot{x'}).$$

On procède de la même manière avec ψ'.

2) Il est clair que f est un morphisme. Cherchons son noyau. C'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Il est de la forme $h\mathbb{Z}$ avec h dans $\mathbb{Z}$.

L'entier h est dans le noyau de f si, et seulement si, n et p divisent h. Donc si, et seulement si, m divise h. Le plus petit entier naturel non nul vérifiant cette propriété est m. Donc $\text{Ker}(f) = m\mathbb{Z}$.

3) Les applications ψ et ψ' sont des morphismes, nous en déduisons que g est un morphisme.

Montrons que g est surjectif.

Soit α un élément quelconque de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, notons $\alpha = \overline{\overline{x}}$ où x est un représentant de α.

Alors $\psi(\dot{x}) - \psi'(\overline{0}) = \overline{\overline{x}} = \alpha$.

Montrons maintenant que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Tout élément de $\text{Im}(f)$ s'écrit $(\dot{x}, \overline{x})$.

$$g((\dot{x}, \overline{x})) = \psi(\dot{x}) - \psi'(\overline{x}) = \overline{\overline{x}} - \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{0}}.$$

Pour montrer l'égalité $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, comparons les cardinaux de ces deux ensembles.

D'après l'*application* 7, $\text{Im}(g)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/\text{Ker}(g)$.

Le cardinal de $\text{Im}(g)$ est d, puisque : $\text{Im}g = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

D'après le *théorème de Lagrange* :

$$\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{card}(\text{Ker}(g))d.$$

Donc $\text{card}(\text{Ker}(g)) = \dfrac{np}{d} = m$.

De même $\text{Im}(f)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f) = m\mathbb{Z}$. Nous en déduisons que $\text{card}(\text{Im}(f)) = m$.

Par conséquent :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g) \text{ et } \text{card}(\text{Im}(f)) = \text{card}(\text{Ker}(g)).$$

Donc $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

4) Le système est équivalent à $f(x) = (\dot{a}, \overline{b})$.

Il admet une solution si, et seulement si, $(\dot{a}, \overline{b})$ appartient à l'image de f. Or $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

$$g((\dot{a}, \overline{b})) = \overline{\overline{a - b}}.$$

Le système admet une solution si, et seulement si :

$$a - b \equiv 0[d].$$

Dans ce cas, soit x_0 une solution.

Le système équivaut à $f(x) = f(x_0)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'ensemble des solutions est :

$\{x \in \mathbb{Z} ; x - x_0 \in \text{Ker}(f)\} = \{x_0 + mk ; k \in \mathbb{Z}\}$.

5) 2 est le plus grand diviseur commun de 10 et 6.

30 est le plus petit commun multiple.

$3 - 1$ est divisible par 2. Donc le système a une solution.

Si c est une solution particulière, alors toutes les solutions sont données par $c + 30k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Cherchons une solution particulière c.

L'entier c doit vérifier :

$c = 3 + 6u = 1 + 10v$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$.

Ceci équivaut à choisir u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$1 = 5v - 3u.$$

Une solution est donnée par $u = 3$ et $v = 2$.

Nous pouvons choisir $c = 21$.

L'ensemble des solutions est $\{21 + 30k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

► ***Pour s'entraîner : 7.***

2 Morphismes d'anneaux

2.1. Définition, exemples

Considérons deux anneaux $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ d'éléments neutres respectifs 1_A et $1_{A'}$.

Soit f une application de A dans A'.

On dit que l'application f est un **morphisme d'anneaux** si elle vérifie pour tout a et b de A :

(i) $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$.

(ii) $f(a.b) = f(a) \otimes f(b)$.

(iii) $f(1_A) = 1_{A'}$.

Exemples

■ Soit $(A, +, .)$ un anneau et E un ensemble.

On définit sur l'ensemble A^E des applications de E dans A une structure d'anneau en posant, pour tous f et g de A^E et tout x de E :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

L'élément neutre de A^E pour l'addition est $x \longmapsto 0$ et l'élément neutre de A^E pour la multiplication est $x \longmapsto 1_A$.

Soit x fixé dans E. L'application $f \longmapsto f(x)$ de A^E dans A est un morphisme d'anneaux.

■ Soit n un entier naturel non nul.

Nous avons vu au § 1 que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

La congruence modulo n est compatible avec la multiplication de $\mathbb{Z}$. Nous pouvons définir une multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant pour tout a de $\mathbb{Z}$ et tout b de $\mathbb{Z}$: $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$.

Comme pour l'addition, cette définition ne dépend pas du choix des représentants des classes $\overline{a}$ et $\overline{b}$.

Remarque

Soit $(A, +, .)$ un anneau et B une partie de A.

On dit que B est un **sous-anneau** de $(A, +, .)$ lorsque $(B, +, .)$ est un anneau et que l'injection canonique de B dans A est un morphisme d'anneaux.

⚠ *L'hypothèse $(B, +, .)$ est un anneau ne suffit pas à elle seule. Il existe des anneaux $(B, +, .)$ contenus dans l'anneau $(A, +, .)$ qui ne sont pas des sous-anneaux. Par exemple, lorsque $(A, +, .)$ est un anneau admettant un élément idempotent a tel que $a^2 = 1_A$, l'ensemble aA est muni d'une structure d'anneau avec les mêmes lois que $(A, +, .)$ mais l'élément neutre de $(aA, +, .)$ est a.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On vérifie facilement que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau commutatif d'élément unité : $\overline{1}$.

Notons φ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui associe à tout entier a sa classe $\overline{a}$. On a déjà montré dans le § 1 que φ est un morphisme de groupe.

La relation $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$ s'écrit $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.

De plus $\varphi(1) = \overline{1}$ où $\overline{1}$ est l'unité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

La surjection canonique φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux.

Théorème 16

Soit n un entier naturel non nul.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau commutatif d'élément unité : $\overline{1}$.

La surjection canonique φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux.

Théorème 17

Soit $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ deux anneaux et f un morphisme de A dans A'.

Si l'application f est bijective, alors f^{-1} est un morphisme d'anneaux.

Démonstration

Soit a' et b' deux éléments de A'. Notons $a = f^{-1}(a')$ et $b = f^{-1}(b')$.

Alors :

$$a' + b' = f(a) + f(b) = f(a + b) \quad \text{et} \quad a'b' = f(a)f(b) = f(ab).$$

Ainsi :

$$a + b = f^{-1}(a' + b') \quad \text{et} \quad ab = f^{-1}(a'b').$$

D'autre part $f^{-1}(1_{A'}) = 1_A$.

Un morphisme d'anneaux f de $(A, +, .)$ dans $(A', \oplus, \otimes)$ bijectif est appelé un **isomorphisme d'anneaux** .

Un morphisme d'anneaux f de $(A, +, .)$ dans lui-même bijectif est appelé un **automorphisme d'anneaux** .

Exemple

Soit $(A, +, .)$ un anneau et a un élément inversible de A.

L'application σ définie de A dans A par $\sigma(x) = axa^{-1}$ pour x dans A, est un morphisme d'anneaux.

En effet, pour x et y dans A, on a :

$a(x + y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1}$ et $a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1})$, ainsi que $a1_Aa^{-1} = 1_A$.

D'autre part $y = axa^{-1}$ équivaut à $x = a^{-1}ya$. L'application σ est bijective.

C'est un automorphisme de l'anneau $(A, +, .)$, appelé **automorphisme intérieur** associé à a.

► *Pour s'entraîner : 8 et 9.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Image et image réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux

Théorème 18

Soit $(A,+,.)$ et $(A',\oplus,\otimes)$ deux anneaux, f un morphisme de A dans A', B un sous-anneau de $(A,+,.)$ et B' un sous anneau de $(A',\oplus,\otimes)$.

Alors $f(B)$ est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$ et $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de $(A,+,.)$.

Démonstration

• B est un sous-anneau de $(A,+,.)$.

$(B,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$ et f est également un morphisme de groupes de A dans A'. Par conséquent, $f(B)$ est un sous-groupe de $(A',\oplus)$.

Prenons deux éléments b et c de B alors bc est dans B.

Or $f(b)f(c)=f(bc)$, donc $f(b)f(c)$ appartient à $f(B)$.

De plus 1_A est dans B, donc $1_{A'}$ qui est l'image de 1_A est dans $f(B)$.

Par conséquent, $f(B)$ est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$.

• De même, $f^{-1}(B')$ est un sous-groupe de $(A,+)$.

Prenons deux éléments b et c de $f^{-1}(B')$, alors $f(b)$ et $f(c)$ appartiennent à B'.

B' est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$, donc $f(b)f(c)$ appartient à B'.

Or $f(b)f(c)=f(bc)$, donc bc appartient à $f^{-1}(B')$.

De même 1_A est dans $f^{-1}(B')$. Par conséquent, $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de $(A,+,.)$.

Mensa ACADEMY

Corollaire 18.1

Soit $(A,+,.)$ et $(A',\oplus,\otimes)$ deux anneaux, f un morphisme de A dans A'.

Alors l'image de f, notée $\mathrm{Im}f$ est un sous-anneau de $(A',\oplus,\otimes)$.

Considérons maintenant un anneau $(A,+,.)$ et une application f injective de A sur un ensemble A'.

Nous allons « transporter » la structure d'anneau sur $f(A)$, c'est-à-dire montrer qu'il existe une unique structure d'anneau sur $f(A)$ telle que f soit un morphisme d'anneaux.

Définissons les opérations de $f(A)$.

Soit a' et b' deux éléments de $f(A)$. Il existe a et b dans A uniques tels que $f(a)=a'$ et $f(b)=b'$. Pour que f soit un morphisme d'anneaux, il est nécessaire de choisir :

$$a'\oplus b'=f(a+b) \quad \text{et} \quad a'\otimes b'=f(ab).$$

On vérifie alors que $(f(A),\oplus,\otimes)$ est un anneau et que $f(1_A)$ est l'unité de $(f(A),\oplus,\otimes)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 10

Structure d'anneau sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E

Soit un ensemble E. Notons F l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

D'après l'exemple 1, $(F,+,.)$ est un anneau commutatif.

Soit ψ l'application de F dans $\mathcal{P}(E)$ définie par $\psi(f) = f^{-1}(\{\overline{1}\})$ pour tout f de F.

1) *Montrer que ψ est bijective de F dans $\mathcal{P}(E)$.*

2) *En déduire une structure d'anneau sur $\mathcal{P}(E)$ pour que ψ soit un isomorphisme de $(F,+,.)$ sur $\mathcal{P}(E)$.*

3) *Que peut-on dire du carré de tout élément de cet anneau ? Comment appelle-t-on un anneau qui possède cette propriété ?*

4) *Soit A une partie de E et g une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$, définie par : $g(X) = A \cap X$ pour tout X de $\mathcal{P}(E)$. L'application g est-elle un morphisme d'anneaux ?*

1) Montrons que ψ est surjective. Soit A une partie quelconque de E, notons χ_A la fonction caractéristique de A. Alors $\psi(\chi_A) = A$. L'application ψ est surjective.

Montrons que ψ est injective. Soit f et g dans F telles que $\psi(f) = \psi(g)$.

Notons A l'ensemble $\psi(f)$. Alors :

$$f^{-1}(\{\overline{1}\}) = g^{-1}(\{\overline{1}\}) = A,$$

donc pour tout x de E :

$f(x) = g(x) = \overline{1}$ si x est dans A et

$f(x) = g(x) = \overline{0}$ si x n'est pas dans A.

D'où $f = g$.

2) Les lois de $\mathcal{P}(E)$ sont induites par ψ.

Soit A et B deux parties quelconques de E. On définit une addition Δ par :

$$A\Delta B = \psi(\chi_A)\Delta\psi(\chi_B) = \psi(\chi_A + \chi_B)$$
$$= (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

Il s'agit de la différence symétrique.

De même, $\psi(\chi_A\chi_B) = A \cap B$. La multiplication est l'intersection.

Par conséquent $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. Il est commutatif car isomorphe à $(F,+,.)$.

L'unité est $\psi(\chi_E) = E$ et le zéro est $\psi(\chi_\varnothing) = \varnothing$.

3) Soit A une partie quelconque de E. Alors $A \cap A = A$.

$(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.

4) L'application g vérifie **(i)** et **(ii)**, mais ne vérifie pas **(iii)**. En effet $g(E) = A$ et $g(E) \neq E$ si $A \neq E$.

L'application g n'est pas un morphisme d'anneaux lorsque $A \neq E$.

George Boole *(1815-1864), logicien et mathématicien anglais.*

2.3. Anneau produit et projection

Théorème 19

Soit $(A,+,.)$ et $(A',\oplus,\otimes)$ deux anneaux. On définit sur l'ensemble $A \times A'$ les lois produit, pour a et b dans A et a' et b' dans A', par :

$$(a,a') + (b,b') = (a+b, a' \oplus b') \quad \text{et} \quad (a,a').(b,b') = (a.b, a' \otimes b')$$

$(A \times A',+,.)$ est un anneau appelé **anneau produit** des anneaux $(A,+,.)$ et $(A',\oplus,\otimes)$.

Les projections de $A \times A'$ sur A et sur A' sont des morphismes d'anneaux surjectifs.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Nous savons déjà que $(A \times A', +)$ est un groupe produit.

On vérifie ensuite immédiatement que $(A \times A', +, .)$ est un anneau.

Soit p la projection de $A \times A'$ sur A définie par $p((a, a')) = a$ pour (a, a') dans $A \times A'$. Elle est surjective.

Pour a et b dans A et a' et b' dans B :

$p[(a, a') + (b, b')] = p((a + b, a' \oplus b')) = a + b = p((a, a')) + p((b, b'))$

$p((a, a').(b, b')) = p((a.b, a' \otimes b')) = a.b = p((a, a')).p((b, b'))$

et $p((1_A, 1_{A'})) = 1_A$.

L'application p est un morphisme d'anneaux surjectif.

On procède de même pour la deuxième projection.

■ L'anneau produit des anneaux $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ est commutatif si, et seulement si, les anneaux $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ sont commutatifs.

■ L'anneau produit des anneaux $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ n'est pas intègre :
$(0_A, 1_A).(1_A, 0_{A'}) = (0_A, 0_{A'})$.

Exemple

L'anneau produit des anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$ est l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$

Théorème 20

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \wedge p = 1$.

L'anneau produit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$ est isomorphe à l'anneau : $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}, +, .)$.

Ce *théorème* est également appelé **théorème chinois** .

Démonstration

Soit x un entier relatif, notons $\dot{x}$ la classe de x modulo n et $\overline{x}$ la classe de x modulo p. On définit une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en posant : $f(x) = (\dot{x}, \overline{x})$.

Nous avons vu dans le § 1 que f est un morphisme de groupes de noyau $np\mathbb{Z}$. Il existe un isomorphisme de groupe g de $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ tel que $f = g \circ \psi$ où ψ est la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$.

Vérifions que g est également un morphisme d'anneaux.

Pour tout x dans $\mathbb{Z}$, on note $\overline{\overline{x}}$ la classe de x modulo np.

Nous savons que $g(\overline{\overline{x}}) = (\dot{x}, \overline{x})$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\overline{\overline{x}}$ et $\overline{\overline{y}}$ deux éléments de $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$.

Alors $g(\overline{\overline{x}}.\overline{\overline{y}}) = g(\overline{\overline{xy}}) = (\dot{xy}, \overline{xy}) = (\dot{x}, \overline{x}).(\dot{y}, \overline{y}) = g(\overline{\overline{x}}).g(\overline{\overline{y}})$

et $g(\overline{\overline{1}}) = (\dot{1}, \overline{1})$ où $(\dot{1}, \overline{1})$ est l'unité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$

► ***Pour s'entraîner : 10.***

3 Idéal d'un anneau commutatif

3.1. Caractérisations et exemples

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif.

Un sous-ensemble I de A est un **idéal** de l'anneau $(A, +, .)$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1) $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

2) $\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad ax \in I$.

Rapport Centrale, 2003

« Les définitions d'algèbre générale (anneau intègre, idéal d'un anneau commutatif) sont souvent fantaisistes. Par exemple, un idéal est un sous-anneau. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 21

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif. Un sous-ensemble I de A est un *idéal* de l'anneau $(A,+,.)$ si, et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $I \neq \emptyset$.

(ii) $\forall x \in I \ \forall y \in I \quad x+y \in I$.

(iii) $\forall x \in I \ \forall a \in A \quad ax \in I$.

Démonstration

En effet, la propriété **(iii)** entraîne :

$$\forall x \in I \quad -x \in I.$$

Il suffit d'appliquer **(iii)** à x et à $a = -1_A$.

Exemple

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif.

A et $\{0\}$ sont des idéaux.

Théorème 22

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif et x un élément de A.

L'ensemble $Ax = \{ax\ ;a \in A\}$ est le plus petit idéal de $(A,+,.)$ contenant x. C'est l'**idéal principal engendré par x.**

Démonstration

L'ensemble $\{ax\ ;a \in A\}$ contient x. Il est non vide.

Soit a et b quelconques dans A.

$ax+bx=(a+b)x$. L'élément $ax \ +bx$ appartient à Ax. $a(bx)=(ab)x$. L'élément $a(bx)$ est dans Ax.

C'est un idéal $(A,+,.)$ contenant x.

D'après **(iii)**, tout idéal I de $(A,+,.)$ contenant x contient Ax.

Exemple

Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, pour tout entier naturel n l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit I un idéal de $\mathbb{Z}$. En particulier $(I,+)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont tous de la forme $n\mathbb{Z}$ avec n dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent, il existe un entier n unique dans $\mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

Corollaire 22.1

Les idéaux de $(\mathbb{Z},+,.)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z}$ où n est dans $\mathbb{N}$.

Théorème 23

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif et I un idéal de $(A,+,.)$.

Alors $I = A$ si, et seulement si, 1_A appartient à I.

Si x est inversible, $Ax = A$. En effet, dans ce cas :

$$\forall a \in A \quad a = (ax^{-1})x$$

et $(ax^{-1}) \in Ax$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Si $I = A$ alors $1_A \in I$.

Si $1_A \in I$ alors : $\forall a \in A \quad a1_A \in A$. Donc $A \subset I$.

► ***Pour s'entraîner : 11.***

3.2. Image et image réciproque par un morphisme d'anneaux

Théorème 24

Soit $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ deux anneaux commutatifs, f un morphisme d'anneaux de A dans A', I et I' deux idéaux respectifs de $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$.

Alors $f(I)$ est un idéal du sous-anneau $f(A)$ de $(A', \oplus, \otimes)$ et $f^{-1}(I')$ est un idéal de $(A, +, .)$ contenant le noyau de f.

⚠ *$f(I)$ n'est pas* a priori *un idéal de $(A', \oplus, \otimes)$. L'injection canonique j de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ est un morphisme d'anneaux et cependant $j(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}$. Lorsque f est surjective l'image d'un idéal est un idéal.*

Démonstration

• L'application f est en particulier un morphisme de groupes additifs. Par conséquent $f(I)$ est un sous-groupe additif de $(f(A), +)$.

Soit a un élément quelconque de A et x dans I.

L'ensemble I est un idéal de $(A, +, .)$, donc $ax \in I$.

Alors $f(a)f(x) = f(ax)$ montre que $f(a)f(x) \in f(I)$.

Le sous-ensemble $f(I)$ est un idéal du sous-anneau $f(A)$.

• De même $(f^{-1}(I'), +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

L'élément $0_{A'}$ est dans I', donc $\text{Ker } f \subset f^{-1}(I')$.

Soit x un élément quelconque de $f^{-1}(I')$ et a dans A. Montrons que ax est dans $f^{-1}(I')$.

Nous avons $f(ax) = f(a)f(x)$.

Or I' est un idéal, $f(x) \in I'$ et $f(a) \in A'$, donc $f(a)f(x)$ appartient à I' et ax appartient à $f^{-1}(I')$.

Le sous-ensemble $f^{-1}(I')$ est un idéal de $(A, +, .)$.

Corollaire 24.1

Soit $(A, +, .)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ deux anneaux commutatifs, f un morphisme de A dans A'.

Alors le noyau de f est un idéal de $(A, +, .)$.

Démonstration

$I' = \{0_{A'}\}$ est un idéal de $(A', \oplus, \otimes)$.

► ***Pour s'entraîner : 12.***

3.3. Divisibilité dans un anneau intègre

Soit $(A, +, .)$ un anneau intègre, c'est-à-dire commutatif et sans diviseur de zéro.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Rappelons que « **sans diviseur de zéro** » signifie :

$$\forall (a,b) \in A^2 \quad (ab = 0_A \Rightarrow a = 0_A \text{ ou } b = 0_A).$$

Exemple

Soit n un entier non nul. Cherchons une condition sur n pour que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ soit intègre.

• Supposons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est intègre.

Montrons que n est premier. Par l'absurde, si n est non premier, il existe deux entiers p et q différents de 1 tels que $pq = n$. Alors $\overline{pq} = \overline{0}$ et cependant $\overline{p} \neq \overline{0}$ et $\overline{q} \neq \overline{0}$. L'anneau n'est pas intègre.

• Réciproquement, supposons n premier.

Soit un élément α non nul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dont un représentant est a dans $\mathbb{Z}$.

S'il existe un entier b tel que $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$. Alors n divise ab.

Or n est premier, donc n divise a ou n divise b. De plus α est non nul, donc n ne divise pas a.

Par conséquent : $\overline{b} = \overline{0}$. Donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est intègre.

Théorème 25

L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est intègre si, et seulement si, l'entier n est premier.

Soit a et b deux éléments de l'anneau A. Nous dirons que a est un **diviseur** de b ou que ***a* divise *b*** s'il existe un élément q de A tel que $b = aq$.

On écrit alors $a \mid b$.

Si a est non nul, l'élément q est unique, on l'appelle le **quotient exact** de b par a.

Si a est nul, $0 \mid b$ si, et seulement si, $b = 0$ et, dans ce cas, tout élément q de A convient.

Si a est inversible, alors a divise tous les éléments de A.
En effet :

$$\forall b \in A \quad b = a(a^{-1}b).$$

Théorème 26

Soit $(A, +, .)$ un anneau intègre, a et b deux éléments de A. Alors :

• a divise b si, et seulement si, $Ab \subset Aa$;

• $Aa = Ab$ si, et seulement s'il existe un élément inversible c tel que $b = ac$. Dans ce cas, on dit que a et b sont **associés**.

Démonstration

• Si $a \mid b$, il existe q dans A tel que $b = aq$. Pour tout x de A, on a $bx = aqx$. D'où $(Ab) \subset (Aa)$.

Réciproquement, si $(Ab) \subset (Aa)$ alors $b \in (Aa)$ et il existe q de A tel que $b = aq$. D'où $a \mid b$.

• Si $a \mid b$ et si $b \mid a$, il existe c et d dans A tels que $a = bc$ et $b = ad$.

Nous en déduisons $a = adc$.

Si $a \neq 0$, alors $dc = 1$. Les éléments d et c sont inversibles.

Si $a = 0$, alors $b = 0$. Nous pouvons écrire $a = 1b$.

Réciproquement, s'il existe c inversible tel que $a = bc$ alors $b \mid a$. De plus $b = ac^{-1}$, donc $a \mid b$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 11

La relation « divise » est-elle une relation d'ordre ?

1) *Montrer que la relation divise est réflexive et transitive.*

2) *Est-elle antisymétrique ?*

3) *Montrer que la relation « être associé » est une relation d'équivalence*

4) *Étudier le cas de* $\mathbb{Z}$.

1) Soit a, b, c quelconques dans A.

Nous avons $(a) \subset (a)$ puis $a \mid a$. La relation est réflexive.

Si $(a) \subset (b)$ et $(b) \subset (c)$, alors $(a) \subset (c)$. Par conséquent, si $c \mid b$ et si $b \mid a$ alors $c \mid a$.

La relation est transitive.

On dit que la relation « divise » est un préordre.

2) La relation n'est pas antisymétrique, puisque nous pouvons avoir $a \mid b$ et $b \mid a$ sans $a = b$.

(Regarder ce qui se passe dans $\mathbb{Z}$.)

3) On vérifie facilement la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

4) Dans $\mathbb{Z}, a$ et b sont associés si, et seulement si, $|a| = |b|$.

Un élément a non inversible de l'anneau intègre $(A, +, .)$ est **irréductible** si ses seuls diviseurs sont les éléments inversibles et les éléments associés à a.
Dans $\mathbb{Z}$, les éléments irréductibles sont les nombres premiers et les opposés des nombres premiers.

4 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

4.1. Plus grand commun diviseur

Théorème 27
Soit m et n deux entiers.

- L'ensemble $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, .)$.
- Il existe un entier naturel d unique tel que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$
- d est le plus **grand commun diviseur** de m et n, noté $d = m \wedge n$.

$m \wedge n = 0$ si, et seulement si, $m = n = 0$.

⚠ *m et n sont des entiers relatifs, mais, par définition, d est un entier naturel non nul. En particulier, si $m = 0$, alors $d = |n|$.*

Rapport X, 2001

« Toute notation (comme « $\wedge$ » ou « $\vee$ ») doit être définie. D'autre part, certains candidats confondent le plus petit commun multiple, le maximum et le pgcd. »

Démonstration

Montrons que l'ensemble $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{ma + nb \,;\, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, .)$. Soit a, b, c, d et x des entiers quelconques.

$0 \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.

$(ma + nb) + (mc + nd) = m(a + c) + n(b + d)$.

$x(ma + nb) = m(ax) + n(bx)$.

L'ensemble $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Le *corollaire* 22.1 assure l'existence d'un entier naturel d unique tel que $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

Si les entiers n et m ne sont pas simultanément nuls, $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est différent de $\{0\}$ et d est non nul.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• D'autre part $m\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$, donc $d \mid m$. De même $d \mid n$.

Soit k un diviseur de m et de n. Alors $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \subset k\mathbb{Z}$, puis $d\mathbb{Z} \subset k\mathbb{Z}$. Par conséquent $k \mid d$.

L'entier d est le plus grand commun diviseur de m et n.

Deux entiers m et n non nuls sont dit **premiers entre eux** lorsque $m \wedge n = 1$.

Nous retrouvons ainsi une autre démonstration du *théorème de Bézout* étudié en Première année.

Théorème 28 : Théorème de Bézout

Soit m et n deux entiers non nuls.

- m et n sont premiers entre eux si, et seulement si, $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
- m et n sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $mu + nv = 1$.

Démonstration

m et n sont premiers entre eux si $d = 1$. C'est-à-dire, si, et seulement si, $d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Or un idéal est égal à l'anneau, si et seulement s'il contient l'unité.

Corollaire 28.1

Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors : $a \wedge (bc) = 1$.

Démonstration

Il existe u, v, w et t entiers tels que $au + bv = 1$ et $aw + ct = 1$.

Le produit des deux égalités donne : $a(uaw + uct + wbv) + bc(vt) = 1$.

D'après le *théorème de Bézout* : $a \wedge bc = 1$.

Corollaire 28.2

Soit $a, b_1, \ldots, b_p$ des entiers non nuls tels que, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $a \wedge b_i = 1$.

Alors : $a \wedge (b_1 \ldots b_p) = 1$.

Corollaire 28.3

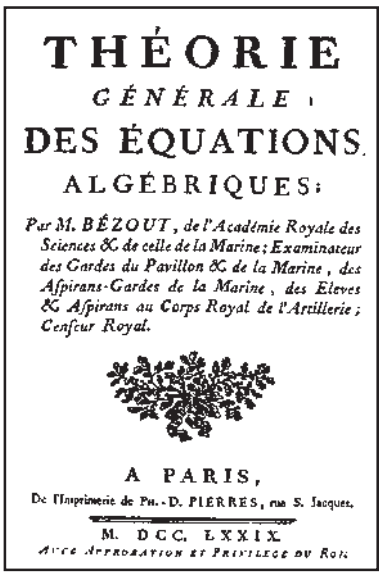
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels :

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a^p \wedge b^q = 1.$$

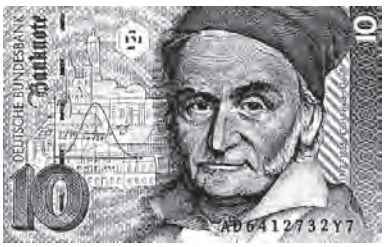
Corollaire 28.4 : Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers non nuls.

Si $a \wedge b = 1$ et $a \mid (bc)$, alors $a \mid c$.


THÉORIE
GÉNÉRALE
DES ÉQUATIONS
ALGÉBRIQUES;
Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de la Marine; Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Aspirans-Gardes de la Marine, des Eleves & Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie; Censeur Royal.
A PARIS,
De l'Imprimerie de Ph.-D. PIERRES, rue S. Jacques.
M. DCC. LXXIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Étienne Bézout *(1730-1783), mathématicien français. Le fruit de ses importantes recherches sur les équations algébriques est publié en 1779 dans « Théorie générale des équations algébriques ». Examinateur des gardes du Pavillon et de la Marine, il rédige un « Cours de Mathématiques » qui connaîtra de nombreuses rééditions et sera utilisé par les premiers candidats à l'école Polytechnique, fondée une dizaine d'années après sa mort.*



Karl Friedrich Gauss *(1777-1855), mathématicien allemand. Surnommé « le prince des mathématiciens », son œuvre est immense. Il aborde les mathématiques avec un point de vue résolument moderne. Il déclare : « Le mathématicien fait complètement abstraction de la nature des objets et de la signification de leurs relations / il n'a qu'à énumérer les relations et les comparer entre elles. »*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Si $a \wedge b = 1$, on a $ac \wedge bc = |c|$.

L'entier a divise ac et bc donc a divise c.

▶ *Pour s'entraîner : 13.*

4.2. Plus petit commun multiple

Théorème 29

Soit m et n deux entiers.

- L'ensemble $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, .)$.
- Il existe un entier naturel r unique tel que : $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$.
- r est le plus petit commun multiple des entiers m et n.

On note $r = m \vee n$.

$m \vee n = 0$ si, et seulement si, $m = 0$ ou $n = 0$.

Démonstration

L'intersection de deux idéaux est un idéal. La vérification est immédiate.

Il existe un entier naturel r tel que : $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$.

D'autre part $r\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. Par conséquent, m divise r. De même $n \mid r$.

L'entier r est un multiple commun de m et n.

Soit s un entier naturel multiple de m et n. Alors s appartient à $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ et, par conséquent, à $r\mathbb{Z}$. Donc r divise s. L'entier naturel r est le plus petit commun multiple de m et n.

Mensa ACADEMY

Théorème 30

Soit a, b deux entiers naturels non nuls, d leur plus grand commun diviseur, m leur plus petit commun multiple et les deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Alors : $ab = md$ et $m = a'b'd$.

Si a et b sont dans $\mathbb{Z}$, on a $|ab| = md$.

Démonstration

Les entiers a' et b' sont premiers entre eux. Soit m' leur plus petit commun multiple.

$a'b'$ est un multiple commun de a' et b', donc m' divise $a'b'$.

Il existe deux entiers u et v tels que $m' = a'u = b'v$.

On a $a'u = b'v$, donc a' divise $b'v$. Or $a' \wedge b' = 1$, d'après le *théorème de Gauss* a' divise v.

Il existe un entier w tel que $v = a'w$.

Par conséquent, $m' = a'b'w$ et $a'b'$ divise m'.

En conclusion :

$$a' \vee b' = m' = a'b'.$$

$$da' \vee db' = da'b'.$$

Donc $m = da'b'$ et $md = ab$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.3. Éléments inversibles dans un anneau

Exemple

Soit n un entier naturel non nul et $\overline{k}$ la classe modulo n de l'entier k.

Cherchons à quelle condition l'élément $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ?

Dire que $\overline{k}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ signifie : il existe u dans $\mathbb{Z}$ tel que $\overline{k}\overline{u} = \overline{1}$.

$$\overline{k}\overline{u} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists\, v \in \mathbb{Z} \quad ku = 1 + nv.$$

Par conséquent, $\overline{k}$ est inversible si, et seulement s'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $ku - nv = 1$. Le *théorème de Bézout* montre alors que $\overline{k}$ est inversible si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.

Théorème 31

Soit n un entier naturel non nul et k un entier.

L'élément $\overline{k}$ de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est inversible si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.

Dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ il y a équivalence entre « $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ » et « $\overline{k}$ est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ».

Rapport X, 2001

« Les structures de type $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont pratiquement les seules structures quotients que les candidats étudient. Il est bon qu'ils sachent raisonner et calculer algébriquement avec assez d'aisance dans ces quotients de façon à pouvoir résoudre des équations simples ou à pouvoir transposer des résultats classiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et ne pas perdre inutilement du temps sur le problème purement formel de savoir comment écrire l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. »

Rapport X, 2001

« Souvent le petit théorème de Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, p premier et $a \wedge p = 1$, semble inconnu alors que le théorème de Lagrange plus général est connu, mais le rapport entre les deux n'apparaît pas toujours clairement aux candidats. »

Application 12

Mensa ACADEMY

L'indicatrice d'Euler

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E_n l'ensemble des entiers p de $[\![1, n]\!]$, premiers avec n. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est noté $G(n)$.

On appelle **indicateur d'Euler** *de n et on note $\varphi(n)$ le cardinal de $G(n)$. L'application φ est l'indicatrice d'Euler.*

1) *Soit m et p deux entiers premiers entre eux.*

Montrer que $G(m) \times G(p)$ est isomorphe à $G(mp)$.

En déduire $\varphi(mp) = \varphi(m)\varphi(p)$.

2) *Soit p un nombre premier et q un entier naturel non nul.*

Montrer que $\varphi(p^q) = p^{q-1}(p-1)$.

3) *Soit $\prod_{i=1}^{k} p_i^{q_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de n.*

En déduire $\varphi(k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{q_i - 1}(p_i - 1)$.

4) *Théorème d'Euler*

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier naturel k premier avec n, on a $k^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

5) *En déduire le petit théorème de Fermat : pour tout entier naturel k et tout entier p premier non diviseur de k on a : $k^{p-1} \equiv 1[p]$.*

6) *Vérifier que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.*

7) *Soit un entier naturel k premier avec n. Montrer $k^{n!} \equiv 1[n]$.*

1) $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$ et $(\mathbb{Z}/mp\mathbb{Z}, +, .)$ sont isomorphes. Le groupe produit $G(m) \times G(p)$ des inversibles de $h\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est alors isomorphe au groupe $G(mp)$ des inversibles de $\mathbb{Z}/mp\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\varphi(mp) &= \operatorname{card} G(mp) = \operatorname{card}\big(G(m) \times G(p)\big)\\ &= \operatorname{card} G(m) \operatorname{card} G(p) = \varphi(m)\varphi(p).\end{aligned}$$

2) $\varphi(p^q)$ est le nombre d'entiers inférieurs à p^q qui ne sont pas divisibles par p. Cherchons les en-

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

tiers non nuls inférieurs à p^q multiples de p. Ils sont de la forme rp avec $r \in [\![1, p^{q-1}]\!]$.

Leur nombre est p^{q-1}. Par conséquent :

$$\varphi(p^q) = p^q - p^{q-1}.$$

3) Conséquence immédiate de **2)**.

4) $k \wedge n = 1$. Donc $\overline{k}$ appartient à $G(n)$.

$\varphi(n)$ est l'ordre du groupe $(G(n), .)$ et pour tout élément x de ce groupe, $x^{\varphi(n)}$ est l'élément neutre du groupe. En particulier $\overline{k}^{\varphi(n)} = \overline{1}$. D'où $k^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

5) Conséquence immédiate de **4)** et de $\varphi(p) = p - 1$.

6) Considérons l'ensemble $\left\{\frac{k}{n} ; k \in [\![1, n]\!]\right\}$.

Chaque $\frac{k}{n}$ s'écrit sous forme irréductible $\frac{a}{d}$ où d est un diviseur de n et $a \wedge d = 1$.

Pour chaque d, il y a exactement $\varphi(d)$ valeurs possibles pour a.

Il y a, au total, n fractions $\frac{k}{n}$ et pour chaque dénominateur d, il y a $\varphi(d)$ fractions.

Par conséquent, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

7) Il suffit de prouver que $\varphi(n)$ divise $n!$. On remarque que $\varphi(n) < n$. Donc $\varphi(n)$ est l'un des facteurs de $n\,!$ et $\varphi(n)$ divise $n\,!$.

Il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $n\,! = \varphi(n)q$.

$$k^{\varphi(n)} \equiv 1[n] \Rightarrow k^{\varphi(n)q} \equiv 1^q[n].$$

D'où $k^{n\,!} \equiv 1[n]$.

Application 13

Le chiffrement RSA

L'étude des nombres premiers est fréquemment utilisée en cryptographie.

Blake et Mortimer souhaitent échanger des messages secrets et décident d'utiliser le chiffrement RSA (du nom de Rivest, Shamir et Adleman qui le réalisèrent pour la première fois en 1977).

Chacun commence par le chiffrement d'un message (il suffit de chiffrer un alphabet).

Blake choisit deux nombres premiers p et q tels que $n = pq$ soit suffisamment grand.

Actuellement les algorithmes de factorisation peuvent factoriser des nombres d'au plus 130 chiffres décimaux.

Aussi Blake va choisir des nombres premiers de plus de 100 chiffres, pour que son ennemi Olrik ne découvre pas les valeurs secrètes de p et q à partir du nombre n.

Pour que les calculs soient plus simples, nous nous contenterons dans cet exemple de $p = 101$ et $q = 113$.

Dans ce cas, $n = 11\,413$.

L'indicateur d'Euler de n est :

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 11\,200 = 2^6 5^2 7.$$

Blake choisit un entier b premier avec $\varphi(n)$.

Par exemple : $b = 3\,533$.

L'algorithme d'Euclide permet de trouver a tel que $ab \equiv 1[\varphi(n)]$.

On obtient $a = 6\,597$.

Blake publie $n = 11\,413$ et $b = 3\,533$, c'est la clé publique.

Mais a, p et q restent secrets.

Mortimer souhaite envoyer le message chiffré $x = 9\,726$ à Blake.

Il calcule x^b modulo n et obtient $5\,761$.

Blake reçoit le message $5\,761$, il calcule $5\,761^{6\,597}$ modulo n. Il trouve $9\,726$.

Olrik qui ne connaît pas a ne peut pas déchiffrer le message.

1) *Expliquez pourquoi Blake retrouve le message x ?*

2) *Maintenant, supposons que Blake reçoive un message, comment peut-il être sûr qu'il provient de Mortimer ?*

1) Il s'agit de montrer que $(x^b)^a \equiv x[n]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

ab est congru à 1 modulo $\varphi(n)$, donc il existe un entier k tel que $ab = 1 + k\varphi(n)$.

$$(x^b)^a \equiv x(x^{\varphi(n)})^k [n].$$

• Si $x \wedge n = 1$, alors $x^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ d'après le *théorème d'Euler*. La conclusion est immédiate.

• Si $x \wedge n \neq 1$, nous ne pouvons pas conclure de la même manière.

$n = pq$ où p et q sont premiers. Nous allons montrer que $x^{ab} \equiv x[p]$ et $x^{ab} \equiv x[q]$.

Si $x \wedge p = 1$, alors $x^{\varphi(p)} \equiv 1[p]$.

$x^{ab} = x^{1+k\varphi(p)} = (x^{\varphi(p)})^k x$.

$(x^{\varphi(p)})^k \equiv 1[p]$. Donc $(x^{\varphi(p)})^k x \equiv x[p]$.

Ceci entraîne : $x^{ab} \equiv x[p]$.

Si $x \wedge p \neq 1$, alors $p \mid x$ et $x \equiv 0[p]$ puis $x^{ab} \equiv 0[p]$. Dans ce cas : $x^{ab} \equiv x[p]$.

On montre de la même manière que : $x^{ab} \equiv x[q]$.

Mais $p \wedge q = 1$, donc $x^{ab} \equiv x[q]$ et $x^{ab} \equiv x[p]$ entraîne : $x^{ab} \equiv x[n]$.

2) Il suffit que Mortimer chiffre sa signature de la même manière.

Exemple

Cherchons à quelle condition l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps.

L'élément $\overline{k}$ de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est inversible si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.

Tout élément non nul est inversible si, et seulement si, pour tout entier naturel k non multiple de n, on a $k \wedge n = 1$. C'est-à-dire si, et seulement si, n est un nombre premier.

Théorème 32

L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps si, et seulement si, n est un nombre premier.

Mensa ACADEMY

Étudions maintenant les idéaux d'un corps.

Théorème 33

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$.

Alors $(A, +, .)$ est un corps si, et seulement si, les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

Démonstration

Supposons que $(A, +, .)$ soit un corps. Soit I un idéal non réduit à $\{0\}$.

Il existe un élement a de I non nul. L'élément a est inversible donc $I = A$.

Réciproquement, on suppose que les seuls idéaux de $(A, +, .)$ sont $\{0\}$ et A.

$A \neq \{0\}$. Il existe un élément x non nul. Montrons que x est inversible.

L'idéal Ax engendré par x est différent de $\{0\}$.

$Ax = A$.

$1 \in Ax$, donc il existe y dans A tel que $yx = 1$. Par conséquent, x est inversible.

Que peut-on dire des morphismes de corps ?

Considérons deux corps $(K, +, .)$ et $(K', \oplus, \otimes)$.

Soit f une application de K dans K'. Nous dirons que l'application f est un **morphisme de corps** si f est un morphisme d'anneaux.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple : Image d'un corps par un morphisme

Soit $(K,+,.)$ un corps commutatif, $(A,\oplus,\otimes)$ un anneau non réduit à $\{0\}$ et f un morphisme d'anneaux de K dans A.

Le sous-anneau $f(\mathbb{K})$ de $(A,\oplus,\otimes)$ est un corps et f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $f(\mathbb{K})$

Il suffit de montrer que f est un isomorphisme de K sur $f(K)$.

Dans ce cas, par « transport » de la structure de K, on vérifiera que le sous-anneau $f(K)$ est muni d'une structure de corps.

Le noyau de f est un idéal de K. D'après le *théorème* 33, $\text{Ker } f = K$ ou $\text{Ker } f = \{0\}$.

$f(1_K) = 1_A$, donc f n'est pas l'application nulle et $\text{Ker } f = \{0\}$.

Le morphisme f est injectif. C'est une bijection de K sur $f(K)$.

► ***Pour s'entraîner : 14.***

5 Caractéristique d'un anneau, d'un corps

5.1. Factorisation d'un morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans un anneau

Soit $(A,+,.)$ un anneau d'élément unité 1_A.

On définit $k.1_A$ pour tout entier k de la manière suivante :

$$0.1_A = 0_A \text{ et}$$

pour $k > 0$, on définit par récurrence $k.1_A = (k-1).1_A + 1_A$;

pour $k < 0$, on pose $k.1_A = -(-k).1_A$.

Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans $(A,+,.)$.

Théorème 34

Soit $(A,+,.)$ un anneau.

• Le seul morphisme de l'anneau $(\mathbb{Z},+,.)$ dans $(A,+,.)$ est :

$$f : k \longmapsto k.1_A.$$

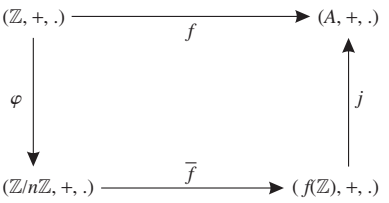
Le sous-anneau $f(\mathbb{Z})$ est le plus petit sous-anneau de $(A,+,.)$. Il existe un entier naturel m unique tel que $\text{Ker } f = m\mathbb{Z}$, appelé **caractéristique** de l'anneau $(A,+,.)$.

• Soit n un entier naturel multiple de m, φ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et j l'injection canonique de $f(\mathbb{Z})$ dans A. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\overline{f}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $f(\mathbb{Z})$ tel que $f = j \circ \overline{f} \circ \varphi$.

On dit que $j \circ \overline{f} \circ \varphi$ est une **factorisation de f à travers φ.**

Le morphisme $\overline{f}$ est surjectif. Le morphisme $\overline{f}$ est injectif si, et seulement si, $m = n$.

• L'anneau $(f(\mathbb{Z}),+,.)$ est isomorphe à l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$.



Doc. 3. *Le diagramme est commutatif lorsque* $f = j \circ \overline{f} \circ \varphi$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Soit f un morphisme de l'anneau $(\mathbb{Z},+,.)$ dans $(A,+,.)$.

Alors $f(0)=0_A$, $f(1)=1_A$, $f(2)=f(1)+f(1)=2.1_A$

On suppose que $f(k-1)=(k-1).1_A$ pour k entier naturel non nul, alors :

$$f(k)=f(k-1)+f(1)=(k-1).1_A+1_A=k.1_A.$$

De plus $f(-k)=-f(k)=-k.1_A=(-k).1_A$.

Par conséquent, f est de la forme $f : k \longmapsto k.1_A$.

On vérifie ensuite, par récurrence, que $k \longmapsto k.1_A$ est un morphisme d'anneaux.

$f(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $(A,+,.)$. C'est le plus petit sous-anneau de $(A,+,.)$.

Tout sous-anneau doit contenir 1_A, donc contenir tous les éléments de la forme $k.1_A$ avec k dans $\mathbb{Z}$. Par conséquent, tout sous-anneau contient $f(\mathbb{Z})$.

$f(\mathbb{Z})$ est le plus petit sous-anneau de $(A,+,.)$.

Ker f est un idéal de $\mathbb{Z}$. Il est de la forme $m\mathbb{Z}$, où m est un entier naturel.

• Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. C'est-à-dire que $m \mid n$.

Notons φ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui associe à tout entier a sa classe.

Montrons qu'il existe une unique application $\overline{f}$ telle que le diagramme ci-dessus (*doc.* 3) soit commutatif :

Étudions l'existence de $\overline{f}$.

Soit α un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il existe un représentant a dans $\mathbb{Z}$ tel que $\overline{a}=\alpha$.

Alors, nécessairement $\overline{f}(\alpha)=f(a)$.

Pour que la définition de $\overline{f}$ soit correcte, nous devons vérifier que la valeur choisie pour $\overline{f}(\alpha)$ est indépendante du représentant a de α. Soit b un autre représentant de α, alors $b \equiv a[n]$.

$b-a \in n\mathbb{Z}$. Or $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, par conséquent $b-a \in m\mathbb{Z}$ et $f(b-a)=0$, puis $f(b)=f(a)$.

Vérifions que $\overline{f}$, ainsi définie, est un morphisme.

Soit α et β deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de représentants respectifs a et b.

Alors $a+b$ est un représentant de $\alpha+\beta$ et ab un représentant de $\alpha\beta$. Par conséquent :

$$\overline{f}(\alpha+\beta)=f(a+b)=f(a)+f(b)=\overline{f}(\alpha)+\overline{f}(\beta)$$
$$\overline{f}(\alpha\beta)=f(ab)=f(a)f(b)=\overline{f}(\alpha)\overline{f}(\beta)$$
$$\overline{f}(\overline{1})=f(1)=1_A.$$

Étudions maintenant les propriétés de $\overline{f}$.

L'image de $\overline{f}$ est $f(\mathbb{Z})$, le plus petit sous-anneau de A. Le morphisme $\overline{f}$ est surjectif.

Un élément $\overline{a}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est dans le noyau de $\overline{f}$, si, et seulement si, m divise a.

$$\text{Ker } \overline{f}=\{\overline{km}\,;k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\overline{f}$ est injectif si, et seulement si : $\forall k \in \mathbb{Z}\ \ \overline{km}=\overline{0}$, c'est-à-dire si, et seulement si, n divise km pour tout k de $\mathbb{Z}$. Or m divise n. Donc, $\overline{f}$ est injectif si, et seulement si, $m=n$. Dans ce cas $\overline{f}$ est un isomorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+,.)$ dans l'anneau $(f(\mathbb{Z}),+,.)$.

Corollaire 34.1

Si 0 est le seul entier k tel que $k.1_A=0_A$, on dit que l'anneau $(A,+,.)$ est de **caractéristique** nulle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

$(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$ et $(\mathbb{R},+,.)$ sont de caractéristique nulle.

Corollaire 34.2

Si $\{k \in \mathbb{Z}\,;k.1_A = 0_A\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors la caractéristique m d'un anneau $(A,+,.)$ est le plus petit entier naturel non nul tel que $m.1_A = 0_A$.

$$k.1_A = 0_A \Leftrightarrow m \mid k.$$

Exemples

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,.)$ et $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ sont de caractéristique 2.

■ Tout anneau de caractéristique 0 est infini, car il contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.

■ Un anneau n'est de caractéristique 1 que s'il est réduit à $\{0\}$.

■ Tout anneau totalement ordonné, non réduit à $\{0\}$ est de caractéristique nulle.
En effet, pour n entier naturel non nul, on a : $n.1_A \geqslant 1_A > 0_A$.
C'est le cas de $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

► *Pour s'entraîner : 15.*

5.2. Caractéristique d'un anneau intègre, d'un corps

Théorème 35

La caractéristique de tout anneau intègre, non réduit à $\{0\}$, est soit nulle, soit un nombre premier.

Démonstration

Soit $(A,+,.)$ un anneau intègre de caractéristique m.

Si m est non nul, l'anneau $(A,+,.)$ contient un sous-anneau isomorphe à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+,.)$

L'anneau $(A,+,.)$ est un anneau intègre, donc tout sous-anneau est également intègre.

Par conséquent $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+,.)$ est intègre et m est un nombre premier.

Corollaire 35.1

La caractéristique de tout corps est soit nulle, soit un nombre premier.

Application 14

Corps et sous-corps premiers

On dit qu'un corps est premier s'il n'admet pas d'autre sous-corps que lui-même.

1) *Montrer que tout corps admet un unique sous-corps qui est premier, appelé sous-corps premier.*

2) *Soit $(K,+,.)$ un corps.*

Montrer que le centre :

$$C = \{a \in K\,;\forall x \in K \quad ax = xa\}$$

est un sous-corps de $(K,+,.)$.

3) *Montrer que tout corps premier est commutatif et que le seul morphisme d'un corps premier dans lui-même est l'identité.*

4) *Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier, sont des corps premiers.*

5) *Montrer que tout corps premier de caractéristique nulle est isomorphe à $\mathbb{Q}$ et que tout corps premier de caractéristique p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

6) *Soit $(K,+,.)$ un corps.*

Montrer que tout sous-corps et tout sur-corps de $(K,+,.)$ ont la même caractéristique que $(K,+,.)$.

7) *Montrer qu'un corps est de caractéristique p non nulle, si et seulement si, son sous-corps premier est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

8) *Montrer qu'un corps est de caractéristique nulle, si, et seulement si, son sous-corps premier est isomorphe à* $\mathbb{Q}$.

9) *Montrer que le cardinal de tout corps fini est une puissance de sa caractéristique.*

1) Soit $(K,+,.)$ un corps.Vérifier que l'intersection d'une famille de sous-corps de $(K,+,.)$ est un sous-corps de $(K,+,.)$. L'intersection P de tous les sous-corps de $(K,+,.)$ est alors le plus petit sous-corps de $(K,+,.)$ au sens de l'inclusion.

Le sous-corps P est premier car c'est le plus petit sous-corps de $(K,+,.)$.

2) On vérifie facilement que :

$$C = \{a \in K\ ; \forall x \in K \quad ax = xa\}$$

est un sous-corps de $(K,+,.)$.

3) Soit $(K,+,.)$ un corps premier. Son centre C est un sous-corps. Or $(K,+,.)$ est premier, il ne possède pas de sous-corps autre que lui même, donc $K = C$.

Soit h un morphisme de corps de $(K,+,.)$ dans lui-même. Considérons l'ensemble :

$$H = \{x \in K\ ; h(x) = x\}.$$

On vérifie que H est un sous-corps, donc $H = K$ et $h =$ Id.

4) Vous avez vu en Première année que tout anneau intègre A est un sous-anneau d'un corps appelé le corps des fractions de A. C'est le plus petit corps contenant A.

Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$.

Tout sous-corps de $\mathbb{Q}$ contient 1 et 0. On en déduit que tout sous-corps de $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$ et le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Tout sous-corps de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$.

• Soit p un nombre premier.

Tout sous-corps de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$ contient au moins un élément non nul x de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Or x est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$. Par conséquent, tout sous-corps de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$ contient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

5) Soit $(K,+,.)$ un corps premier de caractéristique p nombre premier.

Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans K définie par $f(k) = k1_K$. Comme p est la caractéristique de K, on a :

$$\text{Ker } f = p\mathbb{Z}.$$

Donc $f(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $(K,+,.)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$.

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$ est un corps, donc $f(\mathbb{Z})$ est un sous-corps de $(K,+,.)$ qui est un corps premier.

Donc $f(\mathbb{Z})$ est K. Par conséquent $(K,+,.)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$.

Soit $(K,+,.)$ un corps premier de caractéristique nulle.

Le même raisonnement conduit à $f(\mathbb{Q})$ isomorphe à $\mathbb{Q}$.

L'anneau $(f(\mathbb{Z}),+,.)$ est contenu dans le corps $(K,+,.)$, il est intègre.

Le corps des fractions de $(f(\mathbb{Z}),+,.)$ est isomorphe au corps des fractions $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Z}$.

Le corps des fractions de $(f(\mathbb{Z}),+,.)$ est un sous-corps de $(K,+,.)$ qui est un corps premier. Il est égal à K.

Par conséquent $(K,+,.)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

6) Soit $(K,+,.)$ un corps de caractéristique p et L un sous-corps. $1_k = 1_L$.

$\{k \in \mathbb{Z}\ ; k1_K = 0_K\} = \{k \in \mathbb{Z}\ ; k1_L = 0_L\}$.

Donc K et L ont même caractéristique.

Si $(H,+,.)$ est un sur-corps de K, alors K est un sous-corps de $(H,+,.)$. D'où la conclusion.

7) Tout corps $(K,+,.)$ et son sous-corps premier P ont même caractéristique.

D'après la question **5)**, le corps P est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si, et seulement si, sa caractéristique est p.

8) Le raisonnement est identique à celui de la question **7)**.

9) Soit un corps $(K,+,.)$ fini.

Sa caractéristique est non nulle, sinon il serait infini.

Soit p l'entier premier, caractéristique du corps $(K,+,.)$.

Le sous-corps premier de $(K,+,.)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Son cardinal est p.

On peut munir K d'une structure d'espace vectoriel sur P.

Le cardinal de K est fini, donc K est de dimension finie d sur P.

Alors : Card $K = p^d$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

6.1. Structure des idéaux

Appliquons les résultats du § 3.3 à l'anneau des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Nous retrouvons les définitions données en Première année.

Le produit $P \times Q$ de deux polynômes sera noté PQ.

Pour tout polynôme P et tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme P divise le polynôme Q si, et seulement s'il existe un polynôme S de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PS$.

On note $P \mid Q$ et on dit que P est un diviseur de Q ou que Q est un **multiple** de P.

Ceci se traduit à l'aide des idéaux par $(Q) \subset (P)$ en notant (Q) l'idéal engendré par Q.

Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont **associés** si $(P) = (Q)$, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme inversible U tel que $P = UQ$.

Or les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Par conséquent, les polynômes P et Q sont associés si, et seulement s'il existe k dans $\mathbb{K}^*$ tel que :

$$P = kQ.$$

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** sur le corps $\mathbb{K}$ s'il est non constant et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls et les polynômes associés à P.

Mensa ACADEMY

Théorème 36
Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Démonstration

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si $I = \{0\}$, I est l'idéal principal engendré par le polynôme nul.

Si $I \neq \{0\}$, considérons l'ensemble D des degrés des polynômes non nuls de I.

L'ensemble D est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément n.

Soit P un polynôme de I de degré n et (P) l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par P.

Le polynôme P est dans l'idéal I, donc $(P) \subset I$.

Montrons l'inclusion $I \subset (P)$. Soit A dans I. Effectuons la division euclidienne de A par P.

Il existe un unique couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que : $A = PQ + R$ et deg $R < n$.

Le polynôme Q est dans $\mathbb{K}[X]$, le polynôme P est dans l'idéal I, donc PQ est dans I.

Les polynômes A et PQ sont dans l'idéal I. Par conséquent, $A - PQ$ est dans I.

Nous avons construit un polynôme R de I, dont le degré est strictement inférieur à n. Or n est le plus petit degré des polynômes non nuls de I. Par conséquent, $R = 0$ et P divise A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 36.1
Tout idéal est engendré par un polynôme P, unique à un coefficient multiplicatif non nul près.

Démonstration
Si $I \neq \{0\}$, il existe un polynôme P tel que $(P) = I$. Soit Q un polynôme tel que $(P) = (Q)$. D'après le *théorème* 26, P et Q sont associés.

Corollaire 36.2
Tout idéal non réduit à $\{0\}$ est engendré par un unique polynôme unitaire.

Un anneau intègre dans lequel tout idéal est principal est appelé **anneau principal**. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal.

Exemple
L'idéal $\mathbb{K}[X]$ est l'idéal engendré par 1.

Il est possible de définir des polynômes sur un anneau $(A, +, .)$ commutatif. Dans ce cas $(A[X], +, .)$ est encore un anneau commutatif.
Si A est intègre, on montre que $(A[X], +, .)$ est intègre.
Mais la structure de corps est essentielle pour affirmer que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est principal, comme le montre l'exemple suivant.
Soit I l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ ayant pour terme constant un nombre pair.
Il est immédiat que cet ensemble est un idéal.
Or cet idéal est engendré par 2 et X, car tout polynôme de la forme $2a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ s'écrit $2a_0 + X(a_1 + \cdots + a_nX^{n-1})$.
Supposons que I soit principal. Il existe un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $I = (P)$.
Par conséquent, le polynôme P est un diviseur commun de 2 et de X. Donc P est 1 ou -1, ce qui est en contradiction avec $P \in I$. L'anneau $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$ n'est pas principal.

6.2. Plus grand commun diviseur

Rapport ENS, 2003
« L'arithmétique de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{K}[X]$ est mal maîtrisée, elle est rarement appelée à bon escient. »

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Considérons $A = \{P, Q\}$.
L'idéal engendré par P et Q est l'ensemble :

$$\{AP + BQ; A \in \mathbb{K}[\mathbb{X}] \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Vérifiez que c'est un idéal et que c'est le plus petit contenant P et Q.
Nous le noterons $(P) + (Q)$.

Théorème 37
Soit P et Q deux polynômes non simultanément nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Il existe un polynôme unitaire unique D tel que $(P) + (Q) = (D)$.
Le polynôme D est le **plus grand commun diviseur** de P et Q, noté $P \wedge Q = D$.

Démonstration
$(P) + (Q)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Or $\mathbb{K}[X]$ est principal, donc il existe un unique polynôme unitaire D tel que $(P) + (Q) = (D)$.

Comparer cette démonstration à la démonstration du *théorème* 27.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'autre part $(P) \subset (D)$ donc D divise P. De même D divise Q. Le polynôme D est un diviseur commun de P et Q. Montrons que c'est le plus grand au sens de la relation d'ordre « divise ».

Soit S un autre diviseur commun de P et Q. Alors $(P) + (Q) \subset (S)$, puis $(D) \subset (S)$. Par conséquent, S divise D.

On dit que deux polynômes P et Q sont **premiers entre eux** lorsque $P \wedge Q = 1$.

Théorème 38 : Théorème de Bézout

Deux polynômes P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, $(P) + (Q) = \mathbb{K}[X]$.

Deux polynômes P et Q sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Corollaire 38.1

Soit P et Q deux polynômes non nuls premiers entre eux.

Alors pour tout n et tout m de $\mathbb{N}$, les polynômes P^n et Q^m sont premiers entre eux.

Corollaire 38.2

Soit P, Q et R trois polynômes non nuls.

Si $P \wedge Q = 1$ et $P \wedge R = 1$, alors $P \wedge (QR) = 1$.

Mensa ACADEMY

Corollaire 38.3

Soit P un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Alors P et A sont premiers entre eux si, et seulement si, P ne divise pas A.

Corollaire 38.4

Soit P un polynôme non nul et $(P_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls telle que, pour i dans $[\![1,n]\!]$, $P \wedge P_i = 1$. Alors $P \wedge (P_1 \dots P_n) = 1$.

Corollaire 38.5

Soit P un polynôme irréductible et $(P_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls. Pour que P divise $P_1 \dots P_n$, il faut et il suffit que P divise l'un des P_i.

Corollaire 38.6 : Théorème de Gauss

Soit P, Q et R trois polynômes non nuls.

Si $P \wedge Q = 1$ et si P divise QR, alors P divise R.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 38.7

Soit P un polynôme non nul et $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux telle que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, P_i divise P. Alors $P_1 \dots P_n$ divise P.

6.3. Plus petit commun multiple

Théorème 39

Soit P et Q deux polynômes non nuls.

L'ensemble $(P)\cap(Q)$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$.

Il existe un unique polynôme unitaire M tel que $(P)\cap(Q)=(M)$. Le polynôme M est le **plus petit commun multiple** de P et Q, noté $M = P\vee Q$.

Démonstration

Vérifiez que l'intersection de deux idéaux est un idéal.

L'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est principal et l'idéal $(P)\cap(Q)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ car PQ appartient à $(P)\cap(Q)$, donc il existe un polynôme unitaire M tel que $(P)\cap(Q)=(M)$.

D'autre part $(M)\subset(P)$, donc P divise M. De même Q divise M.

Le polynôme M est un multiple commun de P et Q. Vérifiez que c'est le plus petit au sens de la relation « divise ».

Mensa ACADEMY

Corollaire 39.1

Soit P et Q deux polynômes unitaires, D leur plus grand commun diviseur et M leur plus petit commun multiple, R et S les polynômes tels que $P = DS$ et $Q = DR$. Alors :

$$PQ = MD \quad \text{et} \quad M = DRS.$$

► *Pour s'entraîner : 16, 17, 18 et 19.*

7 Algèbre

On appelle **$\mathbb{K}$-algèbre** un ensemble muni de deux lois internes, notées $+$ et $\times$ et une loi externe sur le corps $\mathbb{K}$, notée $\cdot$, telle que :

- $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;
- $(E,+,\times)$ est un anneau ;
- $\forall \alpha\in\mathbb{K}\quad \forall (x,y)\in E^2\quad (\alpha\cdot x)\times y = x\times(\alpha\cdot y)=\alpha\cdot(x\times y)$.

L'algèbre est dite commutative si la multiplication interne $\times$ est commutative.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

■ Vous avez vu en Première année que $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une algèbre commutative.

■ Soit I un ensemble. L'ensemble $\mathbb{K}^I$ des applications de I dans $\mathbb{K}$ muni de l'addition, de la multiplication de deux applications et du produit d'une application par un élément de $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

■ Si E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, vous avez étudié l'algèbre non commutative $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ des endomorphismes de E.

Soit n un entier naturel non nul. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative lorsque $n > 1$.

■ L'ensemble des séries complexes absolument convergentes muni de l'addition, du produit de Cauchy et de la multiplication par un complexe est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Soit $(E, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Tout sous-ensemble F de E qui, muni des lois induites, est encore une $\mathbb{K}$-algèbre est une **sous-algèbre** de $(E, +, \times, \cdot)$.

Vous avez démontré, en Première année qu'une partie F de E est une **sous-algèbre** de $(E, +, \times, \cdot)$ si :

- $1_E \in F$;
- F est stable par combinaison linéaire :
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \alpha x + \beta y \in F \ ;$$
- F est stable par multiplication interne :
$$\forall (x, y) \in F^2 \quad xy \in F.$$

Exemples

■ L'ensemble $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \times, \cdot)$.

■ L'ensemble des suites réelles convergentes est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$.

Soit $(E, +, \times, \cdot)$ et A une partie de E.

Comme pour les structures algébriques déjà étudiées, on montre que l'intersection d'une famille de sous-algèbres est une sous-algèbre.

La **sous-algèbre engendrée** par A est la plus petite sous-algèbre de $(E, +, \times, \cdot)$ contenant A. C'est l'intersection de toutes les sous-algèbres de $(E, +, \times, \cdot)$ contenant A.

Soit $(E, +, \times, \cdot)$ et $(E', +, *, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Les applications linéaires qui sont également des morphismes d'anneaux sont des **morphismes d'algèbres**.

Un morphisme d'algèbres bijectif est un **isomorphisme d'algèbres** .

Théorème 40

L'image et l'image réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres sont des sous-algèbres.

Exemple

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application qui, à u dans $\mathcal{L}(E)$, associe sa matrice M dans la base B est un isomorphisme d'algèbres de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**un sous-groupe H d'un groupe $(G,.)$ est engendré par une partie A non vide**, on peut :

• montrer que H est le plus petit groupe contenant A ;

• montrer que H est l'intersection de tous les sous-groupes contenant A ;

• vérifier que $H = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n} ; n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \varepsilon_i \in \{-1,1\} \quad a_i \in A\}$.

● Pour montrer qu'**un groupe $(G,.)$ est cyclique**, on peut :

• vérifier qu'il existe un élément a de G et un entier naturel non nul n tel que $G = \{a^0, \ldots, a^{n-1}\}$;

• vérifier qu'il existe un élément a de G d'ordre n et que le cardinal de G est n ;

• vérifier qu'il existe un entier naturel n non nul tel que le groupe $(G,.)$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.

● Pour montrer qu'**un groupe $(G,.)$ est monogène infini**, on peut :

• vérifier qu'il existe un élément a de G tel que $G = < a >$ et que le cardinal de G est infini ;

• vérifier que le groupe $(G,.)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$.

● Soit **n et p deux entiers naturels premiers entre eux**.

Le système d'équations $\begin{cases} x \equiv a\,[n] \\ x \equiv b\,[p] \end{cases}$ d'inconnue x, où a et b sont des entiers, admet au moins une solution c dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est $\{c + knp\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour déterminer une solution particulière c, on utilise l'algorithme d'Euclide.

● Pour montrer qu'**un sous-ensemble B d'un anneau $(A,+,.)$ est un sous-anneau**, on peut :

• vérifier les propriétés suivantes :

$(B,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$;

B est stable pour la multiplication de $(A,+,.)$;

$1_A = 1_B$;

• montrer que B est l'image d'un anneau par un morphisme d'anneaux à valeurs dans $(A,+,.)$;

• montrer que B est l'image réciproque d'un anneau par un morphisme d'anneaux défini sur $(A,+,.)$.

● Pour montrer qu'**un ensemble I est un idéal d'un anneau $(A,+,.)$ commutatif** on peut :

• vérifier la définition ;

• vérifier les propriétés suivantes :

$I \neq \varnothing$

$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x + y \in I$;

$\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad ax \in I$;

• montrer qu'il existe un élément x de A tel que $I = xA$.

• montrer que I est l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux défini sur $(A,+,.)$;

• montrer que I est le noyau d'un morphisme d'anneaux défini sur $(A,+,.)$;

• montrer que I est l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux d'image $(A,+,.)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer que **deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux**, on peut :
- montrer qu'ils n'ont pas de diviseur irréductible commun ;
- trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

- Pour montrer qu'un sous-ensemble B d'une algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ est une sous-algèbre on peut :
- vérifier les propriétés suivantes :

  $1_A \in B$,

  B est stable par combinaison linéaire,

  B est stable pour la multiplication interne ;
- montrer que B est l'image d'une algèbre par un morphisme d'algèbres à valeurs dans $(A, +, \times, .)$;
- montrer que B est l'image réciproque d'une algèbre par un morphisme d'algèbres défini sur $(A, +, \times, .)$.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Nombres algébriques sur un corps et construction à la règle et au compas

D'après Mines-Ponts, 1996

Nombres algébriques et nombres transcendants

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ et a un réel. Un réel a est **algébrique** sur $\mathbb{K}$ si, et seulement s'il existe un polynôme non nul annulateur de a dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas contraire, on dit que a est **transcendant** sur le corps $\mathbb{K}$.

Nombres algébriques

Soit a un nombre algébrique sur $\mathbb{K}$, on note $I(a)$ l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X]\,;\, P(a) = 0\}$.

1) Montrer que $I(a)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire l'existence d'un polynôme unitaire π_a unique tel que $I(a) = \{P\pi_a\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$. Démontrer que, pour qu'un polynôme P unitaire et irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, soit le polynôme π_a, il faut et il suffit que le réel a soit racine du polynôme P.

Par définition le polynôme π_a est le **polynôme minimal** de a sur $\mathbb{K}$. Le degré du polynôme minimal, noté $\deg(a, \mathbb{K})$ est le degré de a sur $\mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}[a]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les puissances de a.

$$\mathbb{K}[a] = \left\{ \sum_{p=0}^{q} x_p a^p ; q \in \mathbb{N} \text{ et } (x_i)_{i \in [\![0,q]\!]} \in \mathbb{K}^{q+1} \right\}.$$

On admettra que $\mathbb{K}[a]$ est un anneau. Montrer que $\deg(a, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}[a]$.

2) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) le réel a appartient à $\mathbb{K}$.

(ii) $\deg(a, \mathbb{K}) = 1$.

(iii) $\mathbb{K}[a] = \mathbb{K}$.

3) Dans cette question, le degré de a sur $\mathbb{K}$ est $n \geqslant 2$. On se propose de montrer que $\mathbb{K}[a]$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{K}$ et a et contenu dans $\mathbb{R}$.

a) Soit x un réel non nul de $\mathbb{K}[a]$. Expliquer pourquoi on peut lui associer un unique polynôme R de degré $n-1$ tel que $x = R(a)$. Montrer que R est premier avec π_a.

b) En déduire l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $U(a)R(a) = 1$.

c) Conclure.

4) Dans cette question, le degré de a sur $\mathbb{K}$ est 2.

Montrer qu'il existe un réel k strictement positif dans $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}[a] = \mathbb{K}[\sqrt{k}]$. Dans ce cas, on dit que $\mathbb{K}[a]$ est une **extension quadratique** de $\mathbb{K}$.

Le corps $\mathbb{K}$ est maintenant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$

Considérons les suites des polynômes définis, pour tout entier naturel n, par les relations :

$P_0(X) = 1$; $P_1(X) = 2X + 1$; $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

$Q_n(X) = P_n(\frac{1}{2}X)$.

1) Propriétés générales des polynômes P_n et Q_n.

a) Déterminer P_2, P_3 et P_4.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

b) Déterminer le degré du polynôme P_n, son coefficient de plus haut degré et son terme constant.

c) Démontrer que les coefficients des polynômes Q_n sont des entiers relatifs.

d) Démontrer que les seules racines rationnelles possibles du polynôme Q_n sont les entiers 1 et -1.

Exprimer $Q_{n+3}(X) + XQ_n(X)$ en fonction de $Q_{n+1}(X)$. En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes.

e) Préciser les polynômes P_n qui ont une racine rationnelle.

2) Étude des racines de P_n.

Soit θ un réel de $]0, \pi[$.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0, de u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n.$$

a) Déterminer l'expression du terme général u_n en fonction des réels n, θ et de deux scalaires λ et μ déterminés par θ, u_0 et u_1.

b) Utiliser les résultats précédents pour exprimer le réel $v_n = P_n(\cos\theta)$ en fonction des réels n et θ. En déduire toutes les racines $x_{k,n}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

c) Démontrer que les trois réels $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Déterminer leurs polynômes minimaux.

Exemples de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$. Les nombres de Liouville

1) Soit S un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Démontrez qu'il existe un entier naturel C non nul tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ où p est dans $\mathbb{Z}$, et q dans $\mathbb{N}^*$, on ait :

$$|S(r)| \geqslant \frac{1}{Cq^n}.$$

Mensa ACADEMY

2) Supposons que le réel α soit une racine de S. Prouver l'existence d'une constante K de $\mathbb{R}^{*+}$ telle que, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ de $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ où p est dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, l'inégalité $|\alpha - r| \geqslant \frac{K}{q^n}$ ait lieu.

En déduire que, pour tout réel algébrique α de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe un réel $A > 0$ et un entier $n \geqslant 2$ tels que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^n}.$$

3) Un réel α de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ $q \geqslant 2$ et $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$, est appelé **nombre de Liouville**.

Montrer qu'un nombre de Liouville est transcendant*.

4) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réels définis par la relation : $t_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$ pour n dans $\mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite t.

Établir l'inégalité $|t - t_n|10^{n.n!} \leqslant 1$.

En déduire la transcendance de t sur $\mathbb{Q}$.

*Ce résultat, montré par **Liouville** en 1844, est la première preuve d'existence de nombres transcendants. Tout nombre transcendant n'est pas un nombre de Liouville.
C'est le cas du nombre π qui est transcendant. **Chudnovsky** a montré, en 1984, que π n'est pas un nombre de Liouville.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Constructions à la règle et au compas

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents pour caractériser les points du plan qui peuvent être construits à la règle et au compas.

Soit P un plan affine euclidien orienté et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct.

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Notons :

$\mathcal{K}$ l'ensemble des points du plan P dont chaque coordonnée appartient au corps $\mathbb{K}$,

$\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan qui joignent deux points de $\mathcal{K}$,

$\mathcal{C}$ l'ensemble des cercles du plan P centrés en un point de $\mathcal{K}$ et de rayon égal à la distance de deux points de $\mathcal{K}$.

Soit E un ensemble fini de points du plan P. Considérons toutes les droites passant par deux points de E et tous les cercles centrés en un de ces points de rayon égal à la distance de deux points quelconques de E. Les points d'intersection de ces droites et cercles deux à deux sont dits « points construits à partir de E à la règle et au compas » ou plus brièvement « construits à partir de E ».

Considérons deux points O et I du plan P. Un point M du plan P est dit **constructible** à partir des points O et I s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que :

• M_1 soit construit à partir des deux points O et I ;

• pour tout i de $[\![2, n]\!]$, le point M_i est construit à partir de l'ensemble $\{O, I, M_1, \ldots, M_{i-1}\}$.

Dans la suite, seuls le point O et le point I tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ sont donnés. Tout point constructible à partir des points O et I est dit constructible.

Un réel est dit constructible s'il est égal à l'abscisse d'un point constructible de l'axe $(O, \vec{i})$ ou à l'ordonnée d'un point constructible de l'axe $(O, \vec{j})$.

Intersection de droites et de cercles appartenant à $\mathcal{D}$ ou à $\mathcal{C}$

Montrer les résultats suivants :

1) Toute droite appartenant à $\mathcal{D}$ et tout cercle appartenant à $\mathcal{C}$ admettent au moins une équation cartésienne dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$.

2) Le point commun à deux droites sécantes de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{K}$.

3) Un point commun à une droite de $\mathcal{D}$ et à un cercle de $\mathcal{C}$ est soit un point de l'ensemble $\mathcal{K}$, soit un point dont chaque coordonnée appartient à une extension quadratique de $\mathbb{K}$.

4) Que dire d'un point commun à deux cercles de $\mathcal{C}$?

Exemples de points construits et de points et de réels constructibles

Démontrer, en justifiant un dessin effectué à l'aide d'une règle et d'un compas, les propriétés suivantes :

1) Soit E un ensemble de trois points A, B, C du plan P, deux à deux distincts et non alignés. Montrer que le quatrième sommet D du parallélogramme $ABCD$ est un point construit à partir de E.

En déduire que, si une droite d du plan P et un point A n'appartenant pas à d, sont donnés, la droite parallèle à d passant par A peut être construite à la règle et au compas.

2) Démontrer que le point J symétrique du point I par rapport à O est constructible ainsi que le point K de l'axe $(O, \vec{j})$ d'ordonnée égale à 1.

3) Soit α et β deux réels strictement positifs constructibles.

Démontrer que les réels $\alpha + \beta, \dfrac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta$ et $\sqrt{\alpha}$ sont constructibles.

Recherche de conditions nécessaires et suffisantes de constructibilité

Une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ est dite avoir la propriété (R) si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(R_1) $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{K}_n$

(R_2) Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, le corps $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique du corps $\mathbb{K}_{i-1}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Soit M un point constructible. Montrer qu'il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R) telle que les coordonnées de M appartiennent au corps $\mathbb{K}_n$.

2) Soit une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R). Démontrer par récurrence que tous les points M du plan dont les coordonnées appartiennent au corps $\mathbb{K}_n$ sont constructibles.

3) a) Soit F, G et H trois sous-corps du corps des réels tels que $F \subset G \subset H$. Supposons de plus que G est un espace vectoriel sur F de dimension q et que H est un espace vectoriel sur G de dimension r. Montrer que H est un espace vectoriel sur F de dimension qr.

b) Considérons une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R). Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n$ sur $\mathbb{Q}$?

c) Montrer que, si le réel α est constructible, le degré $\deg(\alpha, \mathbb{Q})$ est une puissance de l'entier 2.

4) Considérons les polygones réguliers à n côtés inscrits dans le cercle de centre O et de rayon 1. Désignons par $A_1, \ldots, A_n$ leurs sommets. Supposons le premier sommet A_1 confondu avec I. L'abscisse du deuxième sommet est $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Quels sont, parmi ces polygones réguliers à n côtés $(3 \leqslant n \leqslant 10)$ ceux qui sont constructibles ?

Algorithmique, TD 1

L'algorithme d'Euclide proposé dans ce TD figure au programme des concours.

Dans sa version rapide, il utilise, de façon implicite, l'écriture en base 2 d'un entier.

Algorithme d'Euclide dans $\mathbb{N}$

Objectif mathématique

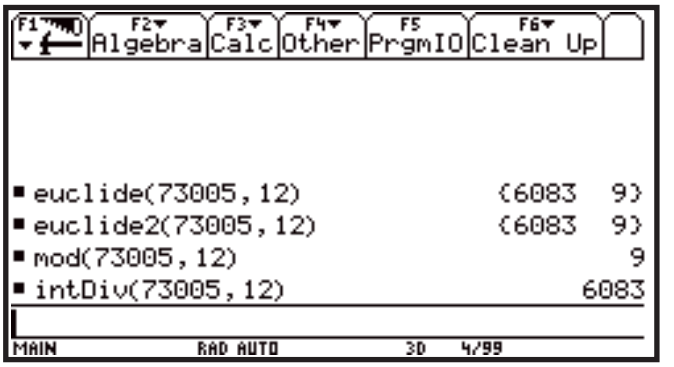
Étant donnés deux entiers a et b strictement positifs, calculer les deux entiers q et r tels que :

$a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Fonctions TI existantes

mod (a, b) donne le reste r de la division euclidienne de a par b.

intDiv (a, b) donne le quotient q qui n'est autre que la partie entière de a/b (*doc.*1).

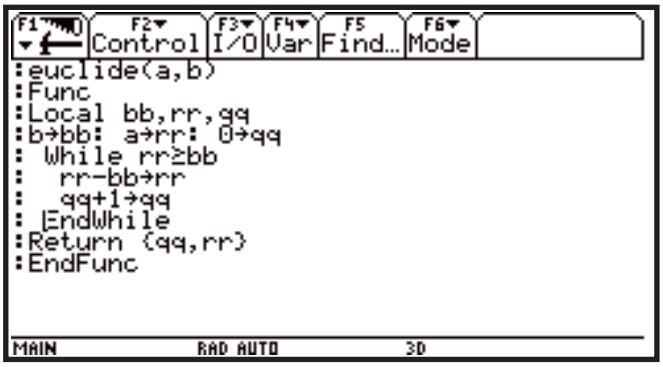


Doc. 1.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithme « naif »

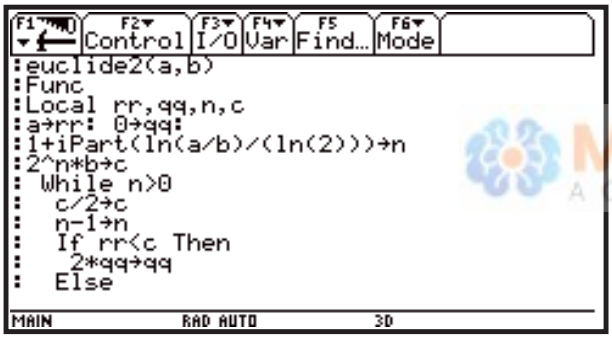
L'écran suivant (*doc.* 2) donne un programme très simple de division euclidienne dont le nombre d'itérations est la partie entière de (a/b). C'est très lent lorsque a est grand et b petit (plus d'une minute pour le calcul avec $a = 73005$ et $b = 12$).



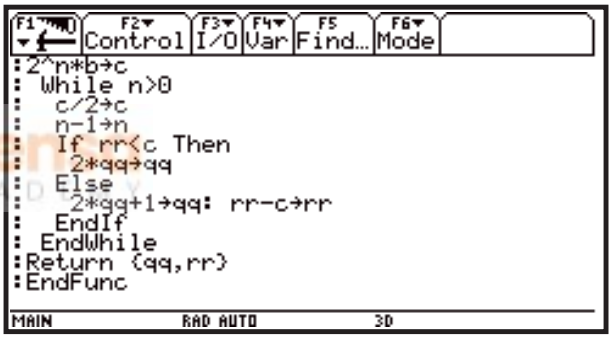
Doc. 2.

Algorithme « rapide »

Les deux écrans suivants (*doc.* 3 et 4) donnent un programme de division euclidienne dont le nombre d'itérations est environ $\log_2(a/b)$. Le tester sur le même exemple !



Doc. 3.



Doc. 4.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices résolus

1. Existence d'éléments idempotents non triviaux

ÉNONCÉ

1) Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif. Un élément a est idempotent si $a^2 = a$.

Montrer que A admet des éléments idempotents a autre que 0_A et 1_A si, et seulement si, A est le produit de deux anneaux non réduits à $\{0_A\}$.

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ admet des éléments idempotents différents de la fonction nulle et de la fonction constante égale à 1 si, et seulement si, D n'est pas un intervalle.

CONSEILS

Montrer que aA est un anneau quand a est idempotent.
Construire un isomorphisme d'anneaux de A dans $aA \times (1 - a)A$.

Revoir la caractérisation des connexes par arcs par les fonctions continues.

SOLUTION

1) Si A est le produit de deux anneaux $B \times C$, alors les couples $(1_B, 0_C)$ et $(0_B, 1_C)$ sont idempotents. Réciproquement, soit a un élément idempotent : $a^2 = a$ tel que $a \neq 0$ et $a \neq 1_A$.

On vérifie alors $(1_A - a)^2 = 1_A - a$ et $a(1_A - a) = 0$.

Montrons que $(aA, +, .)$ est un anneau.

C'est un idéal, donc $(aA, +)$ est un groupe.

Pour tout x et tout y de A, nous avons $(ax).(ay) = a^2xy = axy$. La loi . est interne.

La loi. est distributive par rapport à l'addition.

Pour tout x de A, nous avons $a(ax) = ax$. L'élément a est neutre pour la multiplication .

L'ensemble aA est un anneau.

De même, $(1_A - a)A$ est un anneau d'élément unité $1_A - a$.

Considérons l'application φ de A dans $aA \times (1_A - a)A$ qui, à x de A, associe $(ax, (1_A - a)x)$. On vérifie facilement que c'est un morphisme d'anneaux.

Le morphisme φ est injectif.

En effet, si x et y dans A sont tels que $(ax, (1_A - a)x) = (ay, (1_A - a)y)$ alors $ax = ay$ et $x - ax = y - ay$.

En ajoutant ces deux égalités, on obtient $x = y$.

Montrons que φ est surjectif.

Soit x et y deux éléments de A. On cherche un élément z de A tel que $(az, (1_A - a)z) = (ax, (1_A - a)y)$.

En identifiant les deux termes, nous obtenons l'expression de z :

$$z = ax + (1 - a)y$$

puis nous vérifions qu'il convient.

L'anneau A est isomorphe à l'anneau produit $aA \times (1_A - a)A$.

2) L'existence de f continue sur D différente de 0 et de 1, telle que $f(1 - f)$ soit la fonction nulle équivaut à l'existence d'une fonction continue non constante de D à valeurs dans $\{0, 1\}$. Ceci a lieu si, et seulement si, D n'est pas connexe par arcs, c'est-à-dire si D n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices résolus

2. Algèbre des polynômes à deux indéterminées

ÉNONCÉ

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif

■ On appelle polynôme à 2 indéterminées sur $\mathbb{K}$ toute famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}^2$. L'ensemble des polynômes à 2 indéterminées est noté $\mathbb{K}[X,Y]$.

On définit les coefficients du polynôme, le polynôme nul, un monôme de la même manière que dans $\mathbb{K}[X]$.

Soit $P=(a_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ et $Q=(b_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X,Y]$ et k un élément de $\mathbb{K}$.

Les suites $(c_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ et $(d_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ définies en posant pour tout i de $\mathbb{N}^n$,

$c_i=a_i+b_i, d_i=\sum_{k+l=i} a_k b_l$ et $c_i=ka_i$ sont des polynômes appelés somme, produit de P et de Q et produit du polynôme P par le scalaire k ; on les note $P+Q, P\times Q$ et kP.

1) Montrer que $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

2) On appelle « indéterminées » les polynômes $X=(a_i)_{i\in\mathbb{N}^n}$ et $Y=(b_i)_{i\in\mathbb{N}^n}$ définis par :

$a_i=1$ si $i=(i_1,i_2)$ vérifie $i_1=1$ et $i_2=0$, $a_j=0$ dans les autres cas ;

$b_i=1$ si $i=(i_1,i_2)$ vérifie $i_1=0$ et $i_2=1$ et $b_j=0$ dans les autres cas.

Vérifier que $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times,.)$ est l'algèbre engendrée (d'où le nom « polynôme à n indéterminées ») par les indéterminées X et Y.

3) Montrer que l'anneau $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times)$ est intègre et qu'il n'est pas principal.

4) Le degré d'un monôme $X^\alpha Y^\beta$ est $\alpha+\beta$. Le degré d'un polynôme non nul est le plus grand des degrés de ses monômes. Un polynôme P est dit homogène de degré n, si tous ses monômes sont de degré n.

Soit H_n l'ensemble des polynômes homogènes de degré n.

Vérifier que H_n est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X,Y],+,.)$ et que pour tout entier p et tout entier q, $H_pH_q\subset H_{p+q}$.

■ Dans cette partie $K=\mathbb{C}$.

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de sous-espaces stricts de H_n telle que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*\ \forall n\in\mathbb{N}^*\quad F_nH_p\subset F_{n+p}.$$

1) Pour tout entier naturel n non nul, on définit φ_n l'application de H_n dans $\mathbb{C}_n[X]$ par :

$$\varphi_n(P(X,Y))=P(X,1).$$

Montrer que φ_n est un isomorphisme.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on définit $G_n=\varphi_n(F_n)$ et $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G_n$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}[X],+,.)$

b) Montrer que G est un idéal de l'anneau $(\mathbb{C}[X],+,\times)$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on définit ψ_n l'application de F_n dans $\mathbb{C}_n[X]$ par :

$$\psi_n(P(X,Y))=P(1,X), G'_n=\psi_n(F_n)\quad\text{et}\quad G'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G'_n.$$

On se propose de montrer par l'absurde que $G\neq\mathbb{C}[X]$ ou $G'\neq\mathbb{C}[X]$.

Supposons que $G=G'=\mathbb{C}[X]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

a) Montrer qu'il existe un entier m non nul tel que : $X^m \in F_m$ et $Y^m \in F_m$.

b) Montrer que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les monômes $X^{m+i}, X^{m+i-1}Y, \ldots, XY^{m+i-1}, Y^{m+i}$ sont dans F_{m+i}.

c) Conclure.

4) En déduire qu'il existe un couple non nul de complexes annulant tous les éléments de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$.

CONSEILS

Introduire les fonctions polynomiales et fixer une des deux variables.

Considérer l'idéal engendré par X et Y.

SOLUTION

■ **1)** Vérifier que l'addition et la multiplication sont des lois internes, puis que $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times)$ est un anneau commutatif. Étudier ensuite la structure d'espace vectoriel.

2) X et Y sont dans $\mathbb{K}[X,Y]$. Soit $P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}^2}$ dans $\mathbb{K}[X,Y]$.
Si $i = (i_1, i_2)$ on écrit $P = \sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} Y^{i_2}$.

3) • Montrons que $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times)$ est intègre.
On suppose que $\sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} Y^{i_2} \sum_{i\in\mathbb{N}^2} b_i X^{i_1} Y^{i_2} = 0$.
La fonction polynomiale associée est nulle :
Fixons y dans $\mathbb{K}$, non nul.
$\forall x \in \mathbb{K} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i x^{i_1} y^{i_2} \sum_{i\in\mathbb{N}^2} b_i x^{i_1} y^{i_2} = 0$ donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} y^{i_2} \sum_{i\in\mathbb{N}^2} b_i X^{i_1} y^{i_2} = 0.$$

Or $\mathbb{K}[X]$ est intègre, donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} y^{i_2} = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{ou} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}^2} b_i X^{i_1} y^{i_2} = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Par exemple $\sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} y^{i_2} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Par conséquent : $\forall i \in \mathbb{N}^2 \quad a_i y^{i_2} = 0_K$. D'où $\forall i \in \mathbb{N}^2 \quad a_i = 0_K$.
• Montrons que $(\mathbb{K}[X,Y],+,\times)$ n'est pas principal.
Considérons l'idéal I engendré par X et Y.

$$I = \{XP(X,Y) + YQ(X,Y);\ P \in \mathbb{K}[X,Y],\ Q \in \mathbb{K}[X,Y]\}.$$

Si I est principal, il existe $A \in \mathbb{K}[X,Y]$ tel que $A \mid X$ et $A \mid Y$. Par conséquent, A est un polynôme constant non nul.
Dans ce cas $I = \mathbb{K}[X,Y]$ ce qui est faux, car les polynômes constants ne sont pas dans I.

4) $H_n \neq \varnothing$, il contient X^n par exemple. La somme de deux polynômes homogènes de degré n est un polynôme homogène de degré n. L'opposé d'un polynôme homogène de degré n est un polynôme homogène de degré n. Le produit d'un polynôme homogène de degré n par un scalaire est un polynôme homogène de degré n. Par conséquent, $(H_n,+,.)$ est un sous-espace de $(\mathbb{K}[X,Y],+,.)$.
De plus, le produit d'un polynôme homogène de degré p et d'un polynôme homogène de degré q est un polynôme homogène de degré $p+q$. Il suffit de le vérifier sur le produit de deux monômes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Comparer les dimensions de H_n et $\mathbb{C}_n[X]$.

■ **1)** Soit $P = \sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} Y^{i_2}$ avec, pour tout $i \in \mathbb{N}^2$ tel que $a_i \neq 0$, $i_1 + i_2 = n$. Le degré du polynôme $\varphi_n(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1}$ est inférieur ou égal à n.

L'application φ_n est linéaire.

Vérifions son injectivité. Si $\varphi_n(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}^2} a_i X^{i_1} = 0_{\mathbb{C}[X]}$, alors tous les coefficients sont nuls, puis $P = 0_{\mathbb{C}[X,Y]}$.

Le sous-espace H_n est engendré par $\{X^k Y^{n-k}; k \in [\![0, n]\!]\}$. Cette famille est libre et génératrice, c'est une base de H_n.

$\dim H_n = n + 1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$.

L'application φ_n est linéaire injective, et les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Par conséquent, l'application φ_n est un isomorphisme.

Comparer F_n et F_{n+1}.

2) a) Montrons que $G_n \subset G_{n+1}$.

Soit P dans H_n. Alors :

$$YP(X,Y) \in F_{n+1} \quad \text{et} \quad \varphi_{n+1}(YP(X,Y)) = P(X,1) = \varphi_n(P(X,Y)).$$

Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

$$G \neq \varnothing.$$

Soit P et Q deux éléments de G. Il existe p dans $\mathbb{N}^*$ et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que P soit dans G_p et Q dans G_q.

Soit $n = \max(p, q)$. Les polynômes P et Q sont dans G_n.

Pour tout couple de complexes (a, b), le polynôme $aP + bQ$ est également dans G_n, donc dans G.

b) Vérifions que G est un idéal. Nous savons déjà que G est un sous-groupe additif, puisque c'est un sous-espace vectoriel.

Soit P dans G et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Montrons que PQ est dans G.

Il existe un entier n non nul tel que $P \in G_n$ et un polynôme A dans F_n tel que $P = A(X, 1)$.

Soit p le degré de Q. Il existe un unique B dans H_p tel que : $Q = B(X, 1)$.

Alors : $AB \in H_p F_n$. Or $H_p F_n \subset F_{n+p}$, donc :

$$AB \in F_{n+p} \quad \text{puis} \quad PQ \in G_{n+p}.$$

Le polynôme PQ est dans G.

3) On montre de même que G' est un sous-espace vectoriel et un idéal de l'algèbre $(\mathbb{C}[X], +, \times, .)$.

Considérer les $\varphi_n^{-1}(\{1\})$.

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi_n^{-1}(\{1\}) = \{Y^k; k \in \mathbb{N}^*\}$.

$1 \in G$. Il existe q dans $\mathbb{N}^*$ tel que Y^q soit dans F_q. De même, il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que X^p soit dans F_p. Prenons $m = \max(p, q)$.

$X^m = X^{m-p} X^p$ et $F_p H_{m-p} \subset F_m$. Donc $X^m \in F_m$. De même, $Y^m \in F_m$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Faites une récurrence.

b) Faisons une récurrence sur i.

Pour $i = 0$, c'est le a).

Supposons le résultat acquis pour i et montrons le pour $i+1$.

Soit $0 \leqslant k \leqslant m+i$.

$$X^{m+i+1-k}Y^k = X(X^{m+i-k}Y^k).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $X^{m+i-k}Y^k$ appartient à F_{m+i}.

$X \in H_1$ et $H_1 F_{m+i} \subset F_{m+i+1}$, donc $X^{m+i+1-k}Y^k \in F_{m+i+1}$.

Pour $k = m+i+1$, on écrit $Y^{m+i+1} = Y(Y^{m+i})$, puis on conclut de la même manière.

Que peut-on dire de H_{2m+1} ?

c) On applique le **b)** à $i = m+1$.

Les polynômes $X^{2m+1}, X^{2m}Y, \ldots, Y^{2m+1}$ de F_{2m+1} forment une base de H_{2m+1}.

Or F_{2m+1} est un sous-espace de H_{2m+1}, donc $H_{2m+1} = F_{2m+1}$.

Mais F_{2m+1} est un sous-espace strict de H_{2m+1}, et $H_{2m+1} \neq F_{2m+1}$. D'où la contradiction attendue.

Que peut-on dire des idéaux de $\mathbb{C}[X]$?

4) Ainsi $G \neq \mathbb{C}[X]$ ou $G' \neq \mathbb{C}[X]$.

Supposons, par exemple, que $G \neq \mathbb{C}[X]$.

L'anneau $\mathbb{C}[X]$ est un anneau principal. Il existe P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $G = \langle P \rangle$.

$G \neq \mathbb{C}[X]$. Donc P n'est pas constant. Il possède au moins une racine x_0 dans $\mathbb{C}$.

Or P divise tout polynôme Q de G.

$\forall Q \in G \quad Q(x_0) = 0$. Le couple $(x_0, 1)$ annule tous les polynômes de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, 11 divise $3^{2n}+2^{6n-5}$.

2 Soit $(G,.)$ un groupe et A et B deux sous-groupes.

Montrer que le sous-groupe engendré par $A\cup B$ est l'ensemble :

$\{x_1x_2...x_{2n+1}\,;n\in\mathbb{N},\ x_i\in A$ pour i impair et $x_i\in B$ pour i pair $\}$

3 Soit $(G,.)$ un groupe et A et B deux sous-groupes. On note $AB=\{ab\,;a\in A,b\in B\}$.

1) Montrer que AB est un sous-groupe si, et seulement si, $AB=BA$. Dans ce cas, vérifier que AB est le sous-groupe engendré par $A\cup B$.

2) Si $AB=BA$, et si C est un sous-groupe contenant A, montrer que $A(B\cap C)=(B\cap C)A=C\cap AB$.

4 Soit $(G,.)$ un groupe cyclique d'ordre n, d'élément neutre e et a un générateur de G.

Soit m un entier naturel non nul. Montrer que $a^m=e$ si, et seulement si, n divise m.

5 Soit $(G,.)$ un groupe cyclique d'ordre n, d'élément neutre e et a un générateur de G.

Soit p dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\langle a^p\rangle=\langle a^d\rangle$ où d est le plus grand commun diviseur de n et p.

6 Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z},+)$ et de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

7 Soit $(G,.)$ et $(H,\circ)$ deux groupes, g un élément de G d'ordre p et h un élément de H d'ordre q.

1) Montrer que l'élément (g,h) du groupe produit $G\times H$ a pour ordre le plus petit commun multiple de p et q.

2) En déduire, que si G et H sont cycliques d'ordres respectifs p et q premiers entre eux, alors $G\times H$ est cyclique d'ordre pq.

8 Trouver les solutions dans $\mathbb{Z}$ des équations :

1) $5x\equiv 12\ [7]$.

2) $4x\equiv 9\ [8]$.

3) $4x\equiv 12\ [8]$.

9 Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

10 Soit n un entier naturel non nul. Trouver tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}$.

11 Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif et M une partie de A.

On appelle annulateur de M l'ensemble des x de A tels que $xy=0$ pour tout y de M.

Montrer que l'annulateur de M est un idéal de $(A,+,.)$.

12 Trouver tous les idéaux de l'anneau produit $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

13 Soit un entier $p\geqslant 2$.

Montrer que p est premier si, et seulement si, pour tout k de $[\![1,p-1]\!]$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

14 Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif.

Un idéal I est dit premier s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y)\in A^2\quad xy\in I\Rightarrow x\in I \text{ ou } y\in I.$$

On se propose de montrer qu'un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers est un corps.

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers.

1) Montrer qu'il est intègre.

2) Soit x un élément non nul. Comparer les idéaux engendrés (x) et (x^2). En déduire que x est inversible.

15 Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif dont la caractéristique est l'entier p premier.

Montrer que l'application $x\longmapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux.

16 Déterminer le PGCD de $X^4+3X^3+3X^2+3X+2$ et de X^3+4X^2+5X+2.

17 Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Montrer que $(X^a-1)\wedge(X^b-1)=X^{a\wedge b}-1$ dans $\mathbb{K}[X]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

18 Montrer que $P = X^3 + 1$ et $Q = X^4 + 1$ sont premiers entre eux.

Déterminer les polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$ avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.

19 Soit A, B et C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.

Montrer que ABC et $AB + BC + CA$ sont premiers entre eux.

20 Soit $(G, .)$ un groupe, A un sous-ensemble de G.

On définit l'ensemble $C(A) = \{c \in G\,;\forall a \in A \quad ac = ca\}$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de A. L'ensemble $C(A)$ est appelé *centralisateur* de A.

L'ensemble $C(G)$ est le *centre* de G.

Un sous-groupe H d'un groupe $(K, .)$ est distingué dans K si, et seulement si, pour tout k de K et pour tout h de H l'élément khk^{-1} appartient à H. On note $H \triangleleft K$.

On définit l'ensemble $N(A) = \{c \in G\,; Ac = cA\}$, appelé *normalisateur* de A.

1) Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G.

2) Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

3) Si A est un sous-groupe de G. Montrer que A est distingué dans $N(A)$.

Montrer que A est distingué dans G si, et seulement si, $N(A) = G$.

Si A est un sous-groupe commutatif de G. Montrer que A est distingué dans $C(A)$.

21 **1)** Soit m un entier naturel non nul et $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Pour a et b dans S, on définit :

$a \circ b = a + b$ si $a + b < m$.

$a \circ b = a + b - m$ si $a + b \geqslant m$.

Montrer que $(S, \circ)$ est un groupe d'ordre m.

2) Écrire les tables de multiplication pour $m = 3$ et $m = 4$.

3) En considérant le cas $m = 6$, montrer que la réunion de deux sous-groupes n'est pas nécessairement un sous-groupe.

4) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ est isomorphe à S pour $m = 2$.

5) Montrer que $(S, \circ)$ est cyclique d'ordre m.

22 **1)** Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$ avec k dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $2^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{k+1}\,[p]$.

(On pourra introduire l'entier $m = 2^{(p-1)/2}(\dfrac{p-1}{2})$! et remarquer que :

$$m = 2 \times 4 \times \cdots \times (2k) \times (2k+2) \times \cdots \times (4k+2).)$$

2) Si p est un nombre premier de la forme $4k+3$ avec k dans $\mathbb{N}^*$ et si $2p+1$ est premier, montrer que le *nombre de Mersenne* $2^p - 1$ n'est pas premier.

23 Soit $(G, .)$ un groupe commutatif fini, d'élément neutre e, et n un entier tel que, pour tout x dans G,

$$x^n = e.$$

On suppose que $n = rs$ avec $r \wedge s = 1$.

Soit R l'ensemble des x de G tels que $x^r = e$ et S l'ensemble des x de G tels que $x^s = e$.

1) Montrer que R et S sont des sous-groupes de G.

2) On définit l'application f du groupe produit $R \times S$ dans G par $f(x, y) = xy$.

Montrer que f est un isomorphisme.

3) Montrer que R est l'ensemble $\{x \in G\,; \exists\, y \in G x = y^s\}$ et que $S = \{x \in G\,; \exists\, y \in G x = y^r\}$.

4) On suppose que r et s sont premiers. Montrer que $\text{card}(R) = r$ et $\text{card}(S) = s$.

24 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2\,[8] \\ 5x + 4y \equiv 16\,[8] \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2\,[9] \\ 5x + 4y \equiv 16\,[9] \end{cases}$.

25 Soit B le sous-ensemble de l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des suites stationnaires d'entiers relatifs.

Vérifier que B est un sous-anneau.

Trouver tous les morphismes d'anneaux de B dans $\mathbb{Z}$.

26 Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif et I un idéal de $(A, +, .)$. On appelle radical de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble des éléments x de A pour lesquels il existe un entier naturel n tel que x^n appartienne à I.

1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.

2) Soit I et J deux idéaux tels que $I \subset J$. Montrer que $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. En déduire $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

3) Soit I et J deux idéaux. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

4) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

27 Un anneau $(A,+,.)$ est dit euclidien, s'il est commutatif intègre et s'il existe une application φ de A^* dans $\mathbb{N}$ telle que :

(i) pour tout a et tout b de A, si b divise a, alors $\varphi(b) \leqslant \varphi(a)$;

(ii) pour tout a de A et tout b de A^*, il existe (q,r) dans A^2 tel que $a = bq + r$ avec $(r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b))$.

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y/(x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1) Vérifier que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,.)$ est un anneau commutatif intègre.

2) Soit l'application φ de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(x + \sqrt{2}y) = |x^2 - 2y^2|.$$

Montrer que l'anneau est euclidien.

Trouver les solutions (q,r) de **(ii)** pour $a = 7 + 3\sqrt{2}$ et $b = 2 - \sqrt{2}$.

28 Soit A et B dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$(A \wedge B)^2 = (A^2 + B^2) \wedge (AB).$$

29 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1) $X^6 + 1$

2) $X^8 + X^4 + 1$

3) $X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1$ pour $\alpha \in [0,\pi]$.

30 Transcendance de e, base des logarithmes népériens.

1) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Pour simplifier, nous noterons de la même manière la fonction polynôme. On définit $S(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P^{(k)}$. Pourquoi cette somme a-t-elle un sens ?

Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{C}$, on a :

$$e^x S(P)(0) = S(P)(x) + x\int_0^1 e^{x(1-t)} P(xt)\,dt.$$

2) Soit Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et p un entier supérieur ou égal à 2.

On définit $P(X) = \dfrac{Q(X)\,X^{p-1}}{(p-1)!}$.

Montrer que $S(P)(0)$ est un entier congru à $Q(0)$ modulo p.

3) On se propose de montrer par l'absurde que e n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ admettant e pour racine.

Quitte à multiplier par une constante non nulle et à diviser par une puissance de X, nous pouvons supposer qu'il existe un polynôme de degré n :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ de } \mathbb{Z}[X] \text{ tel que } Q(e) = 0 \text{ et } Q(0) \neq 0.$$

a) Pour tout entier $m > 0$, on définit :

$$P_m(X) = \frac{X^{m-1}}{(m-1)!}\left[\prod_{i=1}^{n}(X-i)\right]^m.$$

Montrer que, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $(P_m)(k)$ est un entier divisible par m.

b) Montrer que, pour tout k de $[\![1,n]\!]$ fixé, le réel :

$$\int_0^1 e^{k(1-t)} P_m(kt)\,dt$$

tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$.

c) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 e^{k(1-t)} P_m(kt)\,dt \equiv a_0(-1)^{nm+1}(n!)^m [m].$$

d) Conclure.

Indications

a) Calculer $P_m(X+k)$.

b) Majorer $P_m(kt)$.

c) Appliquer **1)** puis exprimer $\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 e^{k(1-t)} P_m(kt)\,dt$ à l'aide de $S(P_m)(k)$.

Conclure à l'aide de **3) a)**.

d) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 e^{k(1-t)} P_m(kt)\,dt$ est un entier non nul et mettez en place une contradiction en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Familles de vecteurs. Somme de sous-espaces

17

Mensa ACADEMY

Introduction

Vous avez vu en Première année que les propriétés géométriques du plan ou de l'espace s'étendent à d'autres espaces vectoriels, en particulier à l'algèbre des polynômes et à des espaces de suites ou de fonctions.
Dans ces espaces, vous ne pouviez pas toujours trouver une base de cardinal fini.
Ce chapitre va vous permettre d'étudier les familles infinies de vecteurs.
Puis, nous généraliserons la somme et la somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
Nous allons étendre ces notions à plusieurs sous-espaces vectoriels.
Enfin, nous ferons le lien avec les bases et les applications linéaires.

OBJECTIFS

- Extension de l'étude des familles de vecteurs faite en Première année à des familles infinies.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
- Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.
- Somme directe et familles de vecteurs.
- Sous-espaces supplémentaires.
- Restrictions d'une application linéaire à des sous-espaces en somme directe.
- Image et noyau d'une application linéaire.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Famille de vecteurs

1.1. Combinaisons linéaires

Rapport X, 2002
« L'algèbre linéaire reste une partie mal dominée. »

Vous avez défini, en Première année, une combinaison linéaire x de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E.

Plus généralement, considérons une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de E indexée par un ensemble I non vide, fini ou infini.

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ est à **support fini,** s'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que :

$$\forall\, i \in I \setminus J \quad \alpha_i = 0.$$

Le support de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est le plus petit sous-ensemble J de I tel que $\forall\, i \in I \setminus J \quad \alpha_i = 0$.

Nous noterons $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini, indexées par I.

L'ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Nous dirons qu'un vecteur x de E est **combinaison linéaire** des x_i pour i dans I, s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$, à support fini J, telle que :

$$x = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i.$$

Lorsque la famille de vecteurs de E est vide, la seule combinaison linéaire est 0_E.

Puisque les α_i sont nuls pour $i \in I \setminus J$, la somme infinie $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ a un sens et nous écrirons :

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i.$$

Exemple

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

L'ensemble $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ des fonctions réelles en escalier sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Toute fonction en escalier sur I est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\chi_{]x,y[}$ et $\chi_{\{x\}}$ où x et y décrivent I.

Rappel
Le sous-espace engendré par A est le plus petit sous-espace contenant A. C'est l'intersection de tous les sous-espaces qui contiennent A.

Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel E. L'espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$ associée à A.

Soit A une partie de l'espace vectoriel E. La famille des éléments de A pourra s'écrire $(a)_{a\in A}$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E. Le sous-espace engendré par $\{x_i \ ; \ i \in I\}$ est appelé **sous-espace engendré par la famille** $(x_i)_{i\in I}$ et noté $\text{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$.

1.2. Famille génératrice

Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E, est dite **famille génératrice** si le sous-espace engendré par cette famille est E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 1
Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E est génératrice si, et seulement si, tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs x_i pour i dans I.

La famille vide $(x_i)_{i\in\varnothing}$ est génératrice si, et seulement si, $E = \{0\}$.

Corollaire 1.1
Toute famille de vecteurs contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

L'ensemble $\mathcal{E}(I\ ,\ \mathbb{R})$ des fonctions réelles en escalier sur I est engendré par l'ensemble S des fonctions de la forme $\chi_{[x,y]}$ où x et y décrivent I.

En effet, il suffit de vérifier que $\chi_{[x,x]} = \chi_{\{x\}}$ et $\chi_{]\,x,y\,[} = \chi_{[x,y]} - \chi_{[x,x]} - \chi_{[y,y]}$.

La famille $(\chi_{[x,y]})_{(x,y)\in I\times I}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(I\ ,\ \mathbb{R})$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

1.3. Famille libre

Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E, est dite **libre** si tout élément du sous-espace engendré par cette famille s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs x_i, pour i dans I.

On dit aussi que les vecteurs x_i pour i dans I sont **linéairement indépendants** (ou plus simplement **indépendants**).

Rapport X, 2003
« La détermination de la liberté de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ peut donner lieu à des refus d'obstacles, comme à des innovations hardies comme les déterminants rectangulaires. »

Théorème 2
La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est libre si, et seulement si :

$$\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad \left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in I \quad \alpha_i = 0\right).$$

La famille vide $(x_i)_{i\in\varnothing}$ vérifie le critère du *théorème* 3. Elle est libre de cardinal 0.

Nous retrouvons ici la définition donnée en Première année pour une famille libre finie.

Corollaire 2.1
Une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre.

Voici quelques propriétés élémentaires des familles libres :

Théorème 3
- Aucun vecteur d'une famille libre n'est nul.
- La famille réduite à un élément (x) est libre si, et seulement si, $x \neq 0_E$.
- Deux vecteurs quelconques d'une famille libre ne sont pas colinéaires.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

- Dans une famille libre, aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exemple

Une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts est libre.

► ***Pour s'entraîner : ex.2.***

Application 1

Un exemple de famille libre

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Pour tout x de I, on définit f_x de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_x(t) = |t - x|.$$

1) *Montrer que la famille $(f_x)_{x\in I}$ est libre.*

2) *Quel est le sous-espace de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ engendré par cette famille ?*

1) Soit $(\alpha_x)_{x\in I}$ une famille de $\mathbb{R}$, à support fini, telle que $\sum_{x\in I} \alpha_x f_x = 0$.

Soit J l'ensemble $\{i \in I \ ; \quad \alpha_i \neq 0\}$.

Supposons J non vide. Soit j dans J. Alors :

$$\alpha_j f_j = -\sum_{\substack{i\in J\\ i\neq j}} \alpha_i f_i.$$

La fonction $-\sum_{\substack{i\in J\\ i\neq j}} \alpha_i f_i$ est dérivable en j et la fonction $\alpha_j f_j$ ne l'est pas. Par conséquent, J est vide et la famille $(\alpha_x)_{x\in I}$ est identiquement nulle.

2) Les fonctions f_x sont affines par morceaux et continues. Toute combinaison linéaire de la famille $(f_x)_{x\in I}$ est affine par morceaux et continue. Réciproquement, montrons que toute fonction affine par morceaux continue est combinaison linéaire des fonctions f_x.

Soit f une fonction affine par morceaux sur I et n le nombre de points de I où f n'est pas dérivable.

• Pour $n = 1$, soit $[a, c]$ et $[c, b]$ les intervalles sur lesquels f est affine.

Soit m la pente de f sur $[a, c]$ et m' sa pente sur $[c, b]$. Alors : pour x dans $[a, c]$,

$$f(x) = m(x - c) + f(c)$$

et pour x dans $[c, b]$,

$$f(x) = m'(x - c) + f(c).$$

Dans les deux cas :

$$f(x) = \frac{1}{2}(m'-m)\,|x-c\,| + \frac{1}{2}(m+m')\,(x-c) + f(c).$$

Soit $\gamma = \frac{1}{2}(m' - m)$.

La fonction $f - \gamma\, f_c$ est affine sur $[a, b]$.

Vérifier ensuite qu'il existe α et β tels que, pour x dans $[a, b]$:

$$\frac{1}{2}(m+m')\,(x-c) + f(c) = \alpha|x-a\,| + \beta|x-b\,|.$$

Alors $f = \alpha\, f_a + \beta\, f_b + \gamma\, f_c$.

• Supposons l'assertion démontrée jusqu'au rang n. Soit f une fonction affine par morceaux continue sur $[a, b]$ telle que le nombre de points en lesquels f n'est pas dérivable est $n + 1$.

Soit $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ la famille de ces points. On suppose que :

$$a = a_0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} = b.$$

Soit k dans $[\![1, n + 1]\!]$. L'application f est affine sur $[a_{k-1}, a_k]$ et $[a_k, a_{k+1}]$. Alors il existe α dans $\mathbb{R}$ tel que $f - \alpha\ \ f_{a_k}$ soit affine sur $[a_{k-1}, a_{k+1}]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La fonction $f - \alpha\ f_{a_k}$ est affine par morceaux et le nombre de points en lesquels $f - \alpha\ f_{a_k}$ n'est pas dérivable est n. D'après l'hypothèse de récurrence, $f - \alpha\ f_{a_k}$ est combinaison linéaire de fonctions de la famille $(f_x)_{x\in I}$.

Le sous-espace engendré par la famille $(f_x)_{x\in I}$ est l'espace vectoriel des fonctions affines par morceaux continues sur I.

1.4. Famille liée

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E qui n'est pas libre est dite **liée**. Dans ce cas, les vecteurs x_i pour i dans I sont dits **linéairement dépendants.**

Théorème 4

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est liée si, et seulement si, il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$ non identiquement nulle telle que :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E.$$

Théorème 5

Une famille est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Si $\{x\} \cup \{x_i ; i \in I\}$ est liée et $\{x_i ; i \in I\}$ libre, alors x est combinaison linéaire des x_i.

Voici également quelques propriétés élémentaires :

Théorème 6

- La famille (0_E) est liée.
- Toute famille contenant 0_E est liée.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

► ***Pour s'entraîner : ex.3.***

Application 2

Recherche d'une relation de dépendance linéaire

Soit a et b deux réels et E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Trouver une relation de dépendance linéaire entre les trois fonctions :

$$f : (x \to \sin x); \quad g : \big(x \to \sin(x+a)\big);$$
$$h : \big(x \to \cos(x+b)\big).$$

Nous recherchons s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin x + \beta \sin(x+a) + \gamma \cos(x+b) = 0$ **(1)**

L'équation devient, pour tout x :

$(\alpha + \beta \cos a - \gamma \sin b) \sin x + (\beta \sin a + \gamma \cos b) \cos x = 0.$

Or, la famille $(\sin, \cos)$ est libre.

La condition **(1)** est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta \cos a - \gamma \sin b = 0 \\ \beta \sin a + \gamma \cos b = 0 \end{cases}$$

On choisit comme inconnues principales α et β.

Le déterminant principal est $\begin{vmatrix} 1 & \cos a \\ 0 & \sin a \end{vmatrix} = \sin a.$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $a \neq 0\ [\pi]$, $\sin a \neq 0$. On obtient :

$$\alpha = \frac{\gamma \cos(a-b)}{\sin a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\gamma \cos b}{\sin a}.$$

La relation cherchée est :

$$\cos(a-b)\ \ f - \cos b\ \ g + \sin a\ \ h = 0_E.$$

Pour $a = 0\ [2\pi]$, la relation $f - g = 0_E$ convient.

Pour $a = \pi\ [2\pi]$, la relation $f + g = 0_E$ convient.

L'existence de cette relation prouve que (f, g, h) est liée.

1.5. Base

Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E libre et génératrice est une **base de E.**

Théorème 7

Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E, est une base de E si, et seulement si, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ un vecteur de E.

Les scalaires α_i pour i dans I sont les **coordonnées** ou les composantes du vecteur x.

Exemples

■ L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ admet $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour base canonique.

Plus généralement, toute famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg P_n = n$ pour tout entier n, est une base de $\mathbb{K}[X]$. En effet, cette famille est libre.

Vérifions qu'elle est génératrice.

Il suffit de vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme X^n est combinaison linéaire des polynômes P_k où k est dans $[\![0, n]\!]$.

Recherchons $n+1$ scalaires α_k, pour k dans $[\![0, n]\!]$, tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n.$$

En identifiant les coefficients de ces deux polynômes, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n$$

est équivalente à un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues.

Les degrés des polynômes P_k sont échelonnés. Donc, la matrice du système est triangulaire et aucun terme sur la diagonale n'est nul. Il s'agit d'un système de Cramer qui admet une unique solution.

Une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg P_n = n$, pour tout entier n, est dite **échelonnée en degrés**.

Une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\mathrm{Val} P_n = n$, pour tout entier n, est dite **échelonnée en valuations**.

On démontrera de la même manière qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« On peut rappeler que, pour prouver que les vecteurs (e_k) avec $2 \leqslant k \leqslant n$ constituent une base de l'espace E, il faut déjà vérifier qu'ils sont dans cet espace. »

Pour tout entier naturel n, une famille de $(n+1)$ polynômes échelonnée en valuations dans $\mathbb{K}_n[X]$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Une famille de polynômes échelonnée en valuations dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas une base de $\mathbb{K}[X]$.
Considérer la famille :

$$\left(X^k + X^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Montrons par l'absurde que le polynôme X n'est pas une combinaison linéaire des polynômes $X^k + X^{k+1}$.
En effet, supposons que :

$$X = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(X^k + X^{k+1}\right) \text{ où } a_p \neq 0.$$

Le polynôme :

$$a_0 + (a_0 + a_1 - 1)X + \sum_{k=2}^{p} \left(a_k + a_{k-1}\right) X^k + a_p X^{p+1}$$

est le polynôme nul. Ce qui est en contradiction avec $a_p \neq 0$.

Rapport Centrale, 1997

« Si on travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$, il faut commencer par réfléchir au choix d'une base, en fonction du problème posé et ne pas hésiter à travailler dans une autre base que $(1, X, \ldots, X^n)$. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{N}^n$.

On appelle **polynôme à n indéterminées** sur $\mathbb{K}$ toute famille de $\mathbb{K}$ à support fini indexé par $\mathbb{N}^n$: $P = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)}$.

L'ensemble des polynômes à n indéterminées sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^n}$ sera noté $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

On définit la somme et le produit de deux polynômes $P = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ et $Q = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)}$ en posant :

$$P + Q = (a_\alpha + b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \quad \text{et} \quad PQ = \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \right)_{\gamma \in \mathbb{N}^n}$$

et, pour λ dans $\mathbb{K}$, on note $\lambda P = (\lambda a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$.

On vérifie facilement que $(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$ on note X_k la suite $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ définie par $a_\alpha = 1$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)}$ avec $\alpha_k = 1$ et $\alpha_i = 0$ si $i \neq k$ et $a_\alpha = 0$ dans tous les autres cas.

Tout polynôme $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ peut s'exprimer d'une et d'une seule façon comme une combinaison linéaire de la famille $(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n})_{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}^n}$: $P = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ s'écrit $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Cette somme a un sens, car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Les X_k sont les **indéterminés**. D'où le nom de **polynômes à n indéterminés** et la notation $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

La famille $(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_n^{\alpha_n})_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Les a_α sont les **coefficients** de P.

L'entier $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est le degré du monôme $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Pour P non nul, on définit le degré de P par :

$$P = \max \{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \ ; \ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } a_\alpha \neq 0\}.$$

Si P est nul, on pose $\deg P = -\infty$.

Un polynôme est dit p-**homogène** si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq p \Rightarrow a_\alpha = 0.$$

L'application $\widetilde{P}$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\widetilde{P}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

est appelée **fonction polynomiale de n variables** associée au polynôme P de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

L'ensemble des fonctions polynomiales à n variables sur $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$.

La famille $\left(\widetilde{X}_1^{\alpha_1} \widetilde{X}_2^{\alpha_2} \dots \widetilde{X}_n^{\alpha^n}\right)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n}$ est la base canonique des fonctions polynomiales à n variables sur $\mathbb{K}$.

► **Pour s'entraîner : ex. 4.**

Rapport concours X, 1997

« Un polynôme à deux variables s'annulant en un ensemble infini de points n'est pas forcément le polynôme nul, c'est une équation de courbe algébrique. »

Rapport concours X, 1997

« La division euclidienne n'est pas définie dans l'algèbre des polynômes à deux variables sauf cas particulier à justifier.
Un seul candidat a su maîtriser l'argument algébrique d'effectuer la division euclidienne par $x_2 - x_1$ dans $\mathbb{R}[X_1][X_2]$ et de remarquer que le quotient est dans $\mathbb{R}[X_1][X_2]$. »

⚠ *Tous les résultats démontrés dans $\mathbb{K}[X]$ ne s'étendent pas à $\mathbb{K}[X_1, \dots X_n]$. En particulier, la division euclidienne n'existe pas. Vous devez alors vous ramener à une seule indéterminée pour conclure.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Base de l'espace vectoriel des fonctions en escalier

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

L'ensemble $\mathcal{E}(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles, en escalier sur I, est engendré par l'ensemble S des fonctions de la forme $\chi_{[x,y]}$ où x et y décrivent I.

1) *La famille S est-elle libre ?*

2) *Soit a dans I. Montrer que l'ensemble B des fonctions $\chi_{[a,x]}$, où x décrit $I\setminus\{a\}$, et des fonctions $\chi_{\{x\}}$, où x décrit I, est une base de $\mathcal{E}(I,\mathbb{R})$.*

1) Pour tout triplet (x,y,z) de I tel que $x \leqslant y \leqslant z$, nous avons :

$$\chi_{[x,z]} = \chi_{[x,y]} + \chi_{[y,z]} - \chi_{\{y\}}.$$

La famille est liée.

2) • Montrons que B est génératrice.

Il suffit de montrer que, pour tout couple (x,y) de I, la fonction $\chi_{[x,y]}$ est combinaison linéaire de fonctions de B.

Pour $x \leqslant a \leqslant y$, nous avons :

$$\chi_{[x,y]} = \chi_{[a,x]} + \chi_{[a,y]} - \chi_{\{a\}}.$$

Vérifier les autres cas.

• Montrons que B est libre.

Considérons deux familles $(\alpha_i)_{i\in I\setminus\{a\}}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^{(I)}$ telles que :

$$\sum_{i\in I-\{a\}} \alpha_i \chi_{[a,i]} + \sum_{j\in I} \beta_j \chi_{\{j\}} = 0.$$

Soit J l'ensemble fini : $\{i \in I\setminus\{a\}\ ;\ \alpha_i \neq 0\}$ et K l'ensemble fini : $\{j \in I\ ;\ \beta_j \neq 0\}$.

Si $\operatorname{card} J \geqslant 2$ et si J contient des éléments supérieurs à a, considérons le plus grand élément c de J et le plus grand élément d de $J\setminus\{c\}$.

La fonction $\sum_{i\in I\setminus\{a\}} \alpha_i \chi_{[a,i]}$ prend la valeur α_c non nulle sur l'intervalle $]d,c]$ qui contient une infinité d'éléments, alors que l'ensemble des éléments de $[a,b]$ où la fonction $-\sum_{j\in I} \beta_j \chi_{\{j\}}$ est non nulle est fini.

Si $\operatorname{card} J \geqslant 2$ et si J ne contient pas d'élément supérieur a, travailler de la même manière en considérant le plus petit élément de J.

Si $\operatorname{card} J = 1$, pour $c \neq a$, considérer l'intervalle $[a,c]$ avec c l'unique élément de J.

$$\alpha_c\ \chi_{[a,x]} = -\sum_{j\in I} \beta_j \chi_{\{j\}}.$$

Sur cet intervalle qui contient une infinité d'éléments, la fonction $\alpha_c\ \chi_{[a,x]}$ prend la valeur non nulle α_c alors que l'ensemble des éléments de $[a,b]$ où la fonction $-\sum_{j\in I} \beta_j \chi_{\{j\}}$ est non nulle est fini.

Pour $c = a$, on considère l'intervalle $[c,b]$.

Dans tous les cas, on obtient la même contradiction. Donc $J = \varnothing$.

La relation $\sum_{j\in I} \beta_j \chi_{\{j\}} = 0$ entraîne : $K = \varnothing$.

Par conséquent, la famille B est libre.

1.6. Espace vectoriel de dimension finie

Vous avez vu en Première année, qu'on appelle **espace vectoriel de dimension finie,** tout espace vectoriel admettant au moins une famille génératrice finie.

Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**. Revoir les résultats établis en Première année.

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 4

Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme f est dit **nilpotent**, *s'il existe un entier naturel p tel que f^p soit l'application nulle.*

Le plus petit entier p tel que f^p soit nulle est l'indice de nilpotence.

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension n.

Montrer que f^n est l'application nulle.

Soit f nilpotente et p son indice de nilpotence.

L'application f^p est nulle et l'application f^{p-1} est non nulle.

Il existe a dans E tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$.

La famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est libre.

En effet, soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,p-1]\!]}$ telle que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(a) = 0_E.$$

Appliquons la fonction f^{p-1} au vecteur :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(a).$$

On obtient : $\alpha_0 f^{p-1}(a) = 0_E$, puis $\alpha_0 = 0$.

Ensuite, on applique successivement par f^{p-2}, f^{p-3}... au même vecteur, on obtiendra $\alpha_1 = 0$, puis la nullité de tous les scalaires α_i.

Il existe une famille libre de cardinal p donc $n \geqslant p$.

Alors : $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

I.7. Image d'une famille libre, d'une famille génératrice

Théorème 8

Soit E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F.

L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}u$.

Corollaire 8.1

Une application linéaire u d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est surjective si, et seulement si, l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Théorème 9

Une application linéaire u d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est injective si, et seulement si, l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F.

Démonstration

• Supposons l'application u injective. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E.

Soit la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i) = 0_F$.

Alors $u\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = 0_F$. Or u est injective, donc $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre donc $\alpha_i = 0$ pour tout i de I.

• Supposons l'application u non injective.

Il existe x dans E tel que $u(x) = 0_E$ et $x \neq 0_E$.

La famille (x) est libre et la famille $(u(x))$ est liée.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et φ l'application : $(P \mapsto P(X+1) - P(X))$.

L'application φ est clairement un endomorphisme de E.

Soit $B = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de E.

Étudions l'image de B par l'application φ.

$\varphi(X^0) = 1 - 1 = 0 \qquad \varphi(X) = 1$

$$\varphi(X^n) = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k}.$$

Le polynôme $\varphi(X^n)$ est un polynôme de degré $n-1$ pour $n \geqslant 1$.

L'image de la famille libre B n'est pas libre car elle contient le vecteur nul. Donc l'application φ n'est pas injective.

L'image de la famille génératrice B contient une famille de polynômes échelonnée en degrés. Elle est génératrice. L'application φ est surjective.

Application 5

Étude d'un endomorphisme de l'espace des polynômes réels

Soit φ l'application qui, à un polynôme réel P, fait correspondre $\varphi(P)$ défini par la relation :

$$\varphi(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

1) *Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer le noyau de l'application φ.*

Peut-on en déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$?

2) *Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ, c'est-à-dire $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.*

Montrer que la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) *Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*

1) Nous vous laissons le soin de vérifier que φ est un endomorphisme.

$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(X+1) = -P(X)$.

Soit P dans $\operatorname{Ker}\varphi$. Supposons qu'il soit non constant. Il admet au moins une racine a dans $\mathbb{C}$.

Alors $a+1$ est une racine de P, puis, par une récurrence simple, $a+n$ est également une racine de P pour tout n de $\mathbb{N}$. Ce qui est absurde puisque P ne peut pas avoir une infinité de racines.

Par conséquent, P est constant. Le sul polynôme constant qui vérifie $P(X+1) = -P(X)$ est le polynôme nul.

L'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ est injectif. Les espaces de départ et d'arrivée sont égaux, mais ils ne sont pas de dimension finie. Nous ne pouvons pas en déduire que φ est un automorphisme.

2) Si $\deg P = m$ alors :

$$\deg(P(X+1) + P(X)) = m.$$

Le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. Par conséquent, la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomrophisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'application φ est injective. Donc sa restriction φ_n est également injective. La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est finie. φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour montrer que l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme, on peut également montrer que l'image d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. L'image de la base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est une famille de degrés échelonnés, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Montrons que φ est surjective.

Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et n son degré.

L'application φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n(P) = Q$. Puis $\varphi(P) = Q$.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

I.8. Application linéaire déterminée par l'image d'une base

Théorème 10

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de l'espace vectoriel F.

• Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in I \qquad u(x_i) = y_i.$$

• L'application u ainsi déterminée est surjective si, et seulement si, la famille $(y_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.

• L'application u ainsi déterminée est injective si, et seulement si, la famille $(y_i)_{i\in I}$ est libre dans F.

• L'application u ainsi déterminée est bijective si, et seulement si, la famille $(y_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration

• Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout x de E, il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ à support fini, telle que $x = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i$.

Si u est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F.

Alors $u(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Il suffit de connaître l'image des vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$ pour connaître $u(x)$.

Réciproquement, soit la famille $(y_i)_{i\in I}$ de F.

Existe-t-il une application linéaire u de E dans F telle que $u(x_i) = y_i$ pour tout i de I ?

Pour $x = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i$, nous avons nécessairement : $u(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Nous vous laissons le soin de vérifier la linéarité de u pour conclure.

Ainsi, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $u(x_i) = y_i$, pour tout i de I.

• Étudions la surjectivité de l'application u.

L'image de u est Vect $((y_i)_{i\in I})$. Elle est égale à F si, et seulement si, la famille $(y_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.

• Étudions l'injectivité de l'application u.

$\text{Ker } u = \{\sum_{i\in J} \alpha_i x_i;\ \sum_{i\in I} \alpha_i y_i = 0_F\}$.

$\text{Ker } u = \{0_E\}$ si, et seulement si, $\sum_{i\in I} \alpha_i y_i = 0_F$ équivaut à $\forall i \in I \quad \alpha_i = 0$.

L'application u est injective si, et seulement si, la famille $(y_i)_{i\in I}$ est libre dans F.

L'étude de la bijectivité est alors immédiate.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si les matrices A et B vérifient :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \quad AMB = 0.$$

Alors : $A = 0$ ou $B = 0$.

Supposons que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Soit a l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et b celui qui est associé à B.

Les endomorphismes a et b sont non nuls. Il existe y et z dans $\mathbb{K}^n$ tels que $a(y) \neq 0$ et $b(z) \neq 0$. Posons : $x = b(z)$.

La famille $\{x\}$ est libre. D'après *le théorème de la base incomplète*, il existe $e_2, \ldots, e_n$ dans $\mathbb{K}^n$ tels que $(x, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.

Soit $(y, e_2, \ldots, e_n)$ la famille de $\mathbb{K}^n$. D'après *le théorème* 11, il existe un endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(x) = y$ et, pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $u(e_i) = e_i$.

Alors : $(a \circ u \circ b)(z) = (a \circ u)(x) = a(y) \neq 0$.

Soit M la matrice de u dans la base canonique : $AMB \neq 0$.

Une application linéaire de E dans F bijective est un **isomorphisme**. Dans ce cas, nous disons que les espaces E et F sont **isomorphes**.

Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

Théorème 11

Soit E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) L'application u est un isomorphisme.

2) L'image par u de toute base de E est une base de F.

3) L'image par u d'une base de E est une base de F.

Rapport Centrale, 1998

« Une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de dimension finie n'est pas nécessairement un isomorphisme. »

Rapport TPE, 1994

« Certains candidats démontrent la bijectivité d'une application linéaire entre espaces de même dimension finie par injectivité ***et*** *surjectivité. »*

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

Application 6

Intégration et dérivation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et D l'endomorphisme de E qui associe à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

Pour tout polynôme P, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $D(Q) = P$.

Le polynôme $Q(X+1) - Q(X)$ ne dépend que de P. Nous le noterons $\int_X^{X+1} P$.

Soit ψ l'application qui, à tout polynôme P, associe le polynôme noté $\int_X^{X+1} P$.

1) *Montrer que ψ est un automorphisme de E.*

2) *Soit φ l'endomorphisme de E défini dans l'exemple du § 1.7. Exprimer φ et ψ en fonction de D.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) L'image de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par ψ est la famille :

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^{n+1-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Il s'agit d'une famille échelonnée en degrés. L'image par ψ d'une base de E est une base de E.

L'application ψ est un automorphisme de E.

2) D'autre part, d'après la formule de Taylor, nous écrivons, pour tout polynôme P, l'égalité :

$$P(X+1)-P(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(X)}{k\,!},$$

où n est le degré de P.

Les dérivées de P d'ordre strictement supérieur à n sont nulles. Nous pouvons donc noter :

$$P(X+1)-P(X)=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{P^{(k)}(X)}{k\,!}=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^k}{k\,!}(P).$$

Nous obtenons $\varphi=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^k}{k\,!}$.

Cette égalité est définie sur E car la somme porte en réalité sur un nombre fini de termes.

Or nous avons $\varphi=\psi\circ D$, puis

$$\left(\psi-\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^{k-1}}{k\,!}\right)\circ D=0.$$

Par conséquent, l'image de D est contenue dans le noyau de :

$$\psi-\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^{k-1}}{k\,!}.$$

L'application D est surjective. Donc :

$$\psi=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^{k-1}}{k\,!}.$$

En conclusion, nous obtenons :

$$\varphi=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{D^k}{k\,!}\quad\text{et}\quad\psi=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{D^k}{(k+1)\,!}.$$

Mensa ACADEMY

2 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

2.1. Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

On appelle **somme de la famille** $(E_i)_{i\in I}$ et on note $\sum_{i\in I}E_i$ (ou $E_1+\cdots+E_n$ si $I=[\![1\,,\,n]\!]$) le sous-espace de E engendré par $\bigcup_{i\in I}E_i$.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

La somme $\sum_{i\in I}E_i$ est l'ensemble $\left\{\sum_{i\in I}x_i\quad;\quad\forall\,i\in I\quad x_i\in E_i\right\}$.

Rapport Centrale, 1997

« La somme et la réunion de sous-espaces sont confondues »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est **directe** si tout élément de la somme $\sum_{i\in I} E_i$ s'écrit de manière unique comme une somme d'éléments de E_i.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i\in I} E_i$ sera notée $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si, :

$$\forall\ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \qquad \left(\sum_{i\in I} x_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I \quad x_i = 0_E\right).$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

L'espace vectoriel E est dit **somme directe de la famille** $(E_i)_{i\in I}$ si :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i.$$

Théorème 14

Soit E un espace vectoriel somme directe d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels.

- Pour tout i de I :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i = E_i \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j\Big).$$

- Pour tout i de I, soit p_i la projection sur E_i de noyau $\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j$.

Alors $\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$, $\quad p_i \circ p_i = p_i$ et $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $i \neq j$.

Exemple

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n.

Pour tout polynôme A de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que :

$$A = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < n.$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ de degré n, les sous-espaces $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P\mathbb{K}[X]$ sont supplémentaires.

► *Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.*

Rapport Mines-Ponts, 2003

« La somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels est mal comprise et nous entendons toujours parler du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. »

Rapport TPE, 1996

« Introduire les projecteurs associés à une décomposition en somme directe est parfois utile. »

Rapport IIE, 2003

« Pour qu'une somme de sous-espaces vectoriels soit directe, il ne sufit pas que les intersections deux à deux des sous-espaces soit réduites à 0. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 7

Intersection et somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel somme directe d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E.

1) *Pour tout i de I, soit F_i un sous-espace de E_i. Montrer que la somme des F_i est directe.*

2) *Soit F un sous-espace de E.*

Comparer $\bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F)$ et F. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces sous-espaces soient égaux.

1) Pour tout x de $\sum_{i\in I} F_i$, il existe une famille d'éléments x_i de F_i telle que $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Cette écriture est aussi une écriture de x dans la somme directe $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Elle est donc unique.

La somme des F_i pour i dans I est directe.

2) D'après la question **1)**, la somme $\bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F)$ est bien directe. Tout élément de cette somme est dans F.

Donc $\bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F) \subset F$.

La deuxième inclusion $F \subset \bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F)$ n'est pas toujours vérifiée.

Soit x un élément de F. Il existe une famille d'éléments x_i de E_i telle que $x = \sum_{i\in I} x_i$.

De plus, x appartient à F, mais rien ne permet d'affirmer que chaque x_i est dans F.

Soit p_i la projection de E sur E_i de noyau :

$$\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j.$$

Si $F \subset \bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F)$, alors :

$$\forall x \in F \quad \exists\,!\,(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(E_i \cap F) \quad x = \sum_{i\in I} x_i.$$

$$\forall i \in I \quad p_i(x) \in E_i \cap F.$$

Par conséquent, F est stable par p_i $p_i(F) \subset F$ pour tout i de I.

Réciproquement, supposons que $p_i(F) \subset F$ pour tout i de I.

Soit x dans F. Il est dans E. Donc il existe une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} E_i$ telle que :

$$x = \sum_{i\in I} x_i.$$

Pour tout i de I, $x_i = p_i(x)$ et x_i appartient à $p_i(F)$.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ appartient à $\prod_{i\in I}(E_i \cap F)$.

En conclusion, $F = \bigoplus_{i\in I}(E_i \cap F)$ si, et seulement si, F est stable par tous les projecteurs p_i, pour i dans I.

2.2. Somme de sous-espaces et familles de vecteurs

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, et, pour tout i dans I, S_i une famille génératrice de E_i. Alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est une famille génératrice de $\sum_{i\in I} E_i$.

Théorème 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E et pour tout i dans I, S_i une famille de vecteurs de E_i.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On suppose que la somme des $(E_i)_{i\in I}$ est directe.

- Si, pour tout i dans I, la famille S_i est libre, alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est libre dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$.
- Si, pour tout i dans I, la famille S_i est une base de E_i, alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est une base de $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Démonstration

Montrons le premier point.

Soit $\left((\alpha_s)_{s\in S_i}\right)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini telle que :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{s\in S_i}\alpha_s s\right) = 0_E.$$

Montrons qu'elle est nulle.

La somme est directe. L'unicité de la décomposition de x entraîne :

$$\forall i \in I \quad \sum_{s\in S_i}\alpha_s s = 0_E.$$

Or chaque S_i est une famille libre, par conséquent :

$$\forall \quad i \in I \quad \forall\ s \in S_i \quad \alpha_s = 0.$$

La famille $\bigcup_{i\in I} S_i$ est libre.

Le second point se traite de la même manière.

Théorème 17

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un espace vectoriel E et $(I_k)_{k\in J}$ une partition finie de I.

Pour tout k de J, on définit E_k le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{i\in I_k}$.

Alors $E = \bigoplus_{k\in J} E_k$.

Démonstration

• La famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base d'un espace vectoriel E. Tout vecteur x s'écrit : $x = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$. $(I_k)_{k\in J}$ est une partition de I, donc $x = \sum_{k\in J}\left(\sum_{i\in I_k}\alpha_i e_i\right)$ est un élément de $\sum_{k\in J} E_k$.

Par conséquent : $E = \sum_{k\in J} E_k$.

• Montrons que la somme est directe.

Cela revient à montrer que, pour tout k et tout x_k de E_k, $\sum_{k\in J} x_k = 0_E$ entraîne la nullité de tous les x_k.

Chaque x_k s'écrit $x_k = \sum_{i\in I_k}\alpha_i e_i$. Nous avons : $\sum_{k\in J}\left(\sum_{i\in I_k}\alpha_i e_i\right) = 0_E$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La famille $(I_k)_{k\in J}$ est une partition de I, donc $\sum_{i\in I}\alpha_i e_i = 0_E$.

Or la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base. Par conséquent, la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est nulle et chaque x_k est nul.

Une base $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E est dite **adaptée à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{k\in J} E_k$ s'il existe une partition $(I_k)_{k\in J}$ de I telle que, pour tout k de J, la famille $(e_i)_{i\in I_k}$ soit une base de E_k.

Pour construire une base adaptée à la décomposition en somme directe $\bigoplus_{k=1}^{n} E_k$, vous pourrez utiliser le *théorème* 17.

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

2.3. Caractérisation d'une somme directe

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

La somme des E_i, pour i dans I, est directe si, et seulement si :

$$\forall\, j \in I \qquad E_j \cap \left(\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_i\right) = \{0_E\}.$$

Rapport Centrale, 1997

« La majorité des candidats considère que :

$$i \neq j \;\Rightarrow\; F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la somme des F_i soit directe. »

Démonstration

• Supposons la somme directe. Soit j dans I et x un élément de : $E_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} E_i\right)$.

Il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E telle que :

$$\forall\, i \in I \quad x_i \in E_i \quad \text{et} \quad x = x_j = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i.$$

Par conséquent, $\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i - x_j = 0_E$.

L'écriture est unique donc : $\forall\, i \in I \quad x_i = 0_E$ et $x = 0_E$.

• Réciproquement, pour tout i de I, x_i désigne un vecteur de E_i.

Supposons $\sum_{i\in I} x_i = 0_E$. Pour tout j dans I, on a : $\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i = -x_j$

Par conséquent x_j, qui appartient à $E_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} E_i\right)$ est le vecteur nul.

Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont en somme directe, si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Cette caractérisation ne se généralise pas en écrivant :

$$\forall\, i \in I \quad \forall\, j \in I \setminus \{j\} \quad E_i \cap E_j = \{0_E\}.$$

Considérer trois droites coplanaires, non confondues dans un espace vectoriel de dimension supérieure à deux. Leur intersection deux à deux est $\{0_E\}$ et, cependant, elles ne sont pas en somme directe.

Théorème 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si : $\dim \sum_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Si la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, d'après le *théorème* 16, une base de $\sum_{i\in I} E_i$ est constituée d'une réunion disjointe de bases des E_i. Donc :

$$\dim \sum_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i.$$

• Soit $F = \sum_{i\in I} E_i$. Supposons $\dim F = \sum_{i\in I} \dim E_i$.

Soit, pour tout i dans I, une base b_i de E_i. La réunion des b_i est une famille génératrice de F, donc une base car :

$$\dim F = \sum_{i\in I} \dim E_i.$$

Le *théorème* 15 permet de conclure.

► ***Pour s'entraîner : ex. 11.***

Application 8

Caractérisation d'une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

La somme des E_i est directe si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![2,n]\!] \quad E_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} E_i\right) = \{0_E\}.$$

• Supposons la somme directe.

$\forall i \in [\![2,n]\!]$

$$E_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} E_i\right) \subset E_i \cap \left(\sum_{j=1}^{n} E_i\right) = \{0_E\}.$$

• Supposons que :

$$\forall i \in [\![2,n]\!] \quad E_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} E_i\right) = \{0_E\}.$$

Soit :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 0_E$$

telle que, x_j appartient à E_j pour tout j de $[\![1,n]\!]$. Montrons par récurrence que tous les vecteurs x_j sont nuls.

$$x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} x_j.$$

Par conséquent, x_n appartient à $E_n \cap \left(\sum_{j=1}^{n-1} E_j\right)$.

Or, $E_n \cap \left(\sum_{j=1}^{n-1} E_j\right) = \{0_E\}$, donc $x_n = 0_E$.

Soit k dans $[\![0, n-3]\!]$. Supposons que :

$$x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{n-k} = 0_E.$$

Alors : $x_{n-k-1} = -\sum_{j=1}^{n-k-2} x_j$.

Par conséquent, x_{n-k-1} appartient à :

$$E_{n-k-1} \cap \left(\sum_{j=1}^{n-k-2} E_i\right)$$

qui est réduit à $\{0_E\}$, donc $x_{n-k-1} = 0_E$.

En conclusion, pour tout $m \geqslant 2$, on a $x_m = 0_E$.

Il reste $x_1 = 0_E$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4. Détermination d'une application définie sur un espace vectoriel décomposé en une somme directe de sous-espaces

Théorème 20

Soit E un espace vectoriel, somme directe d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels et F un espace vectoriel.

Pour tout i de I, soit u_i une application linéaire de E_i dans F.

Alors, il existe une unique application linéaire de E dans F telle que, pour tout i de I, l'application u_i soit la restriction de u à l'espace E_i.

Démonstration

Soit x dans E, il existe une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} E_i$ telle que :

$$x = \sum_{i\in I} x_i.$$

Si l'application u existe, elle vérifie nécessairement $u(x) = \sum_{i\in I} u_i(x_i)$.

On vérifie ensuite que l'application u est linéaire et que chaque u_i est la restriction de u à E_i.

Exemple

Si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, alors Id_E est l'unique application linéaire de E dans E dont la restriction à chaque E_i est p_i.

2.5. Isomorphisme entre l'image et un supplémentaire du noyau

Théorème 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Alors :

- la restriction de u à un supplémentaire G de $\mathrm{Ker}\, u$ est un isomorphisme de G dans $\mathrm{Im} u$;
- tout supplémentaire du noyau de u est isomorphe à l'image de u.

Rapport E3A, 2002

« Les questions 2 et 3 posent beaucoup plus de problèmes aux élèves qui ne parviennent à les résoudre que pour une minorité d'entre eux, n'utilisant pas le fait que l'image de u soit isomorphe à tout supplémentaire du noyau de u. »

Démonstration

Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$.

Soit v la restriction de u à G.

$$\mathrm{Ker}\, v = G \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$$

Par conséquent, l'application v est injective.

$$\mathrm{Im} v \subset \mathrm{Im} u.$$

Montrons $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} v$.

Soit y dans $\mathrm{Im} u$. Il existe x dans E tel que $u(x) = y$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or $E = G \oplus \operatorname{Ker} u$. Il existe x' dans G et x'' dans $\operatorname{Ker} u$ tels que :

$$x = x' + x''. \quad u(x) = u(x') = v(x').$$

Par conséquent, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, et v est un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} u$.

Corollaire 21.1

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E étant de dimension finie et u une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\dim \operatorname{Im}(u) + \dim \operatorname{Ker}(u) = \dim(E).$$

Exemple : Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts et u l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad u(P) = \big(P(a_0), P(a_1), ..., P(a_n)\big).$$

Le noyau de u est l'idéal engendré par : $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$

$$\text{noté } \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)\,\mathbb{K}[X].$$

Le degré de $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ est $n+1$. Nous avons montré dans l'exemple du § 2.1 que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

La restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\operatorname{Im} u$. De plus $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{K}^{n+1}$ et $\dim \operatorname{Im} u = n+1$.

Donc : $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}^{n+1}$.

$$\forall (b_0, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \qquad \exists P \in \mathbb{K}_n[X] \qquad u(P) = (b_0, b_1, ..., b_n).$$

Déterminons le polynôme P.

Si on décompose $\dfrac{P(X)}{\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)}$ en éléments simples, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P(a_i)}{X - a_i} \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

On en déduit :

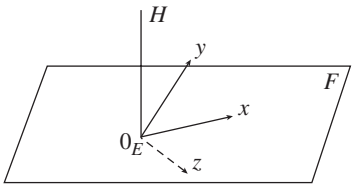
$$\frac{P(X)}{\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{X - a_i} \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

Le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \left(b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)} \right)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ prenant les valeurs b_i aux points a_i. On l'appelle **polynôme d'interpolation de Lagrange**.

Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace de E distinct de E admettant un supplémentaire et v une application linéaire de F dans un espace vectoriel G.

1) Existe-t-il une application linéaire u de E dans G dont la restriction à F est v et nulle sur $E \setminus F$?

Prenons x dans F, si $E \neq F$, il existe y et z dans $E \setminus F$ tels que $x = y + z$.



Doc. 1.

Alors $u(x) = u(y) + u(z) = 0_G$.

L'application u est identiquement nulle.

L'existence de u n'est possible que pour v identiquement nulle ou $F = E$.

2) Existe-t-il une application linéaire u de E dans G dont la restriction à F est v ?

D'après le *théorème* 22, il y a plusieurs solutions.

Vous pouvez considérer un supplémentaire H de F dans E. (On admet son existence en dimension quelconque.)

Il existe une unique application linéaire u de E dans G dont la restriction à F est v et la restriction à H est une application linéaire arbitrairement choisie, par exemple l'application nulle de H dans G.

Rapport IIE, 2003

« Les théorèmes doivent être clairement énoncés (hypothèses + conclusion), et non se réduire à une simple formule technique : Exemples :

- Énoncé direct de la « formule du rang » sans avoir précisé qu'il s'agit d'une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. »

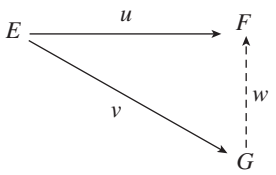
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 9

Factorisation d'une application linéaire à travers une autre

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1) a) *Soit u une application linéaire de E dans F et v une application linéaire de E dans G. Montrer qu'il existe une application linéaire w de G dans F telle que $u = w \circ v$ si, et seulement si,* $\text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.



Doc. 2.

b) *Soit f un endomorphisme de E. Montrer que l'application f est injective si, et seulement si, elle est inversible à gauche.*

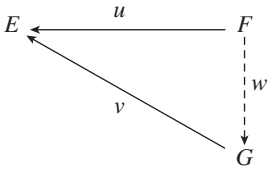
c) *Soit p un entier naturel non nul, $f_1, f_2, ..., f_p$ et u des applications linéaires de E dans F.*

Montrer qu'il existe p endomorphismes de $F, g_1, ..., g_p$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^{p} g_i \circ f_i$$

si, et seulement si $\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\, f_i \subset \text{Ker}\, u$.

2) a) *Soit u une application linéaire de F dans E et v une application linéaire de G dans E. Montrer qu'il existe une application linéaire w de F dans G telle que $u = v \circ w$ si, et seulement si* $\text{Im}u \subset \text{Im}v$.



Doc. 3.

b) *Soit f un endomorphisme de E. En déduire que l'application f est surjective si, et seulement si, elle est inversible à droite.*

c) *Soit p un entier naturel non nul, $f_1, f_2, ..., f_p$, et u des applications linéaires de F dans E.*

Montrer qu'il existe p endomorphismes de $F, g_1, ..., g_p$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} f_i \circ g_i$ si, et seulement si, $\text{Im}u \subset \sum_{i=1}^{p} \text{Im}\, f_i$.

1) a) Si $u = w \circ v$ alors : $\text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.

Réciproquement, supposons que $\text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.

On voit que $u = w \circ v$ nous conduit à construire w sur $\text{Im}v$.

Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}\, v$ dans E. D'après le *théorème* 22, v induit un isomorphisme v' de H dans $\text{Im}v$.

On définit l'application linéaire $w' = u \circ v'^{-1}$ de $\text{Im}v$ dans F.

D'après le *théorème* 21, il existe une application linéaire w de G dans F telle que la restriction de w à $\text{Im}v$ soit w'.

Vérifions que $u = w \circ v$. Pour tout x de E, il existe x' dans $\text{Ker}\, v$ et h dans H tels que $x = x' + h$. Nous avons :

$$\begin{aligned} w \circ v(x) &= w \circ v(h) = w \circ v'(h) \\ &= w' \circ v'(h) = u \circ v'^{-1} \circ v'(h)' \\ &= u(h) = u(x), \end{aligned}$$

car x' appartient à $\text{Ker}\, v$ et $\text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.

b) L'application f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}\, f = \{0_E\}$.

Or :

$$\text{Ker}\, I_E = \{0_E\}.$$

Donc, l'application f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, \text{Id}_E$.

D'après la question **1)a)**, l'inclusion $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, Id_E$ a lieu si, et seulement s'il existe un endomorphisme g de E tel que $\text{Id}_E = g \circ f$.

c) Si $u = \sum_{i=1}^{p} g_i \circ f_i$ alors : $\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\, f_i \subset \text{Ker}\, u$.

Réciproquement, supposons que :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\, f_i \subset \text{Ker}\, u.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Considérer l'application v de E dans F^p définie par :

$$v(x) = \big(f_1(x), ..., f_p(x)\big).$$

Vérifier que : $\text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.

D'après la question **1) a)**, il existe une application linéaire w de F^p dans F telle que $u = w \circ v$. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, soit θ_i l'application de F dans F^p définie par $\theta_i(x) = (0, .., 0, x, 0, ..., 0)$ où toutes les composantes d'indice différent de i sont nulles.

Vérifier que $u = \sum_{i=1}^{p} w \circ \theta_i \circ f_i$, puis conclure.

2) a) Si $u = v \circ w$ alors $\text{Im}u \subset \text{Im}v$.

Réciproquement, supposons que $\text{Im}u \subset \text{Im}v$.

Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}\, v$ dans G. L'endomorphisme v induit un isomorphisme v' de H dans $\text{Im}v$.

Pour tout y dans F, le vecteur $u(y)$ appartient à $\text{Im}v$. On pose :

$$w(y) = v'^{-1}\big(u(y)\big).$$

Vérifier que w convient.

b) Constater que l'endomorphisme f est surjectif si, et seulement si, $\text{Im}\,\text{Id}_E \subset \text{Im}f$.

c) Si $u = \sum_{i=1}^{p} f_i \circ g_i$ alors $\text{Im}u \subset \sum_{i=1}^{p} \text{Im}f_i$. Réciproquement, supposons $\text{Im}u \subset \sum_{i=1}^{p} \text{Im}f_i$.

Considérer l'application v de F^p dans E définie par :

$$v(x_1, ..., x_p) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i).$$

Vérifier que : $\text{Im}v = \sum_{i=1}^{p} \text{Im}f_i$.

On en déduit $\text{Im}\ u \subset \text{Im}v$.

Il existe une application linéaire w de F dans F^p telle que $u = v \circ w$.

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on définit p_i par $p_i(x_1, ..., x_p) = x_i$.

Montrer que : $u = \sum_{i=1}^{p} f_i \circ p_i \circ w$, puis conclure.

Mensa ACADEMY

2.6. Isomorphisme entre deux supplémentaires d'un même sous-espace

Théorème 22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux sous-espaces supplémentaires de F dans E.

- La restriction à H de la projection sur G de noyau F est un isomorphisme de H dans G.
- Les supplémentaires G et H sont isomorphes.

Démonstration

Soit p la projection de E sur G de noyau F.

Notons u la restriction de p à H.

D'après le théorème 21, u est un isomorphisme de H sur $\text{Im}p$.

Or $\text{Im}p = G$.

G et H sont isomorphes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 22.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E.

Si F admet un supplémentaire G de dimension finie, tous les supplémentaires de F sont de dimension finie égale à la dimension de G.

On dit que F est de **codimension finie**. La dimension commune de tous les supplémentaires de F est la **codimension** de F, notée $\operatorname{codim} F$.

Lorsque E est de dimension finie :

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F.$$

Un **hyperplan** est un sous-espace vectoriel de codimension 1.

Exemple

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n.

$$P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathbb{K}[X]$$

Le sous-espace $P\mathbb{K}[X]$ est de codimension n.

⚠ *Un sous-espace peut être de codimension finie sans être de dimension finie.*

2.7. Rang d'une application linéaire

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, F étant de dimension finie, et u une application linéaire de E dans F.
On appelle **rang** de u la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im}(u)$.
Alors $\operatorname{Ker} u$ est de codimension finie dans E et :

$$\operatorname{rg}(u) = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker}(u).$$

Mensa ACADEMY

Théorème 23

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, F étant de dimension finie, et u un isomorphisme de E dans F. Alors :

$$\dim E = \dim F \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(u) = \dim(E) = \dim(F).$$

Corollaire 23.1

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, F et G étant de dimension finie, et u une application linéaire de E dans F. Alors :

- pour tout isomorphisme v de F dans G :

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v \circ u) ;$$

- si E est de dimension finie, H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et w un isomorphisme de H dans E :

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u \circ w).$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 12.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E est génératrice**, on peut montrer :

• que tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$;

• que l'espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'espace E ;

• que le rang de la famille de vecteurs est égal à la dimension de l'espace E ;

• que la famille $(x_i)_{i\in I}$ contient une famille génératrice ;

• qu'elle est l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective ;

• qu'elle est une base.

● Pour montrer qu'**une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est libre**, on peut montrer :

• $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I \quad \alpha_i = 0\right)$;

• que tout élément du sous-espace engendré par cette famille s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs x_i pour i dans I ;

• si la famille est finie, que le sous-espace engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est de dimension égale au cardinal de la famille ;

• si la famille est finie, que le rang de la famille est égal à son cardinal ;

• que toute sous-famille finie est libre ;

• qu'elle est l'image d'une famille libre par une application linéaire injective ;

• qu'elle est l'image réciproque d'une famille libre par une application linéaire ;

• qu'elle est une base.

● Pour montrer qu'**une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est liée**, on peut montrer :

• qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres ;

• qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$;

• qu'elle contient une sous-famille liée ;

• qu'elle est l'image d'une famille liée par une application linéaire.

● Pour montrer qu'une famille **$(x_i)_{i\in I}$ est une base de l'espace vectoriel E**, on peut montrer :

• qu'elle est libre et génératrice ;

• qu'elle est libre et de cardinal n si l'espace vectoriel E est de dimension n ;

• qu'elle est génératrice et de cardinal n si l'espace vectoriel E est de dimension n ;

• qu'elle est l'image d'une base par un isomorphisme.

● Pour montrer qu'**une famille de polynômes est une base de $\mathbb{K}[X]$**, on peut :

• reconnaître la base canonique ;

• montrer que la famille de polynômes est échelonnée en degrés, c'est-à-dire telle que les degrés des polynômes soient distincts deux à deux et que tout entier naturel n soit le degré de l'un des polynômes de la famille ;

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

• montrer que la famille de polynômes est échelonnée en valuations, c'est-à-dire telle que les valuations des polynômes soient distinctes deux à deux et que tout entier naturel n soit la valuation de l'un des polynômes de la famille ;

• qu'elle est libre et génératrice.

● Pour montrer qu'**un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$** , on peut montrer :

• qu'il existe une famille de scalaires à support fini $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que :

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \ ;$$

• que le vecteur x appartient au sous-espace engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie

ÉNONCÉ

Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

1) Soit α une racine réelle d'un polynôme $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ de $\mathbb{Z}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré m et M le plus grand élément de $\left\{ \left| \frac{a_i}{a_m} \right| \ ; \ i \in [\![0, m]\!] \right\}$. Montrer que $|\alpha| < 1 + M$.

2) Si $\frac{p}{q}$ est une valeur approchée rationnelle à $\frac{1}{q}$ près de α, montrer qu'il existe un réel strictement positif K qui ne dépend que de P, tel que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{K\, q^m}$.

3) Soit β le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\,!}}$. Démontrer que la famille $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

En déduire que la dimension de $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$ est infinie.

CONSEILS

Raisonner par l'absurde.

Utiliser le *théorème des accroissements finis*.

SOLUTION

1) Par l'absurde, si $|\alpha| \geqslant 1 + M$, on aurait :

$$1 = \left| \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_i}{a_m \alpha^{m-i}} \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+M)^k} < \frac{M}{1+M} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+M}} = 1.$$

Donc $|\alpha| < 1 + M$.

2) Appliquons le *théorème des accroissements finis* à la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée à P entre α et $\frac{p}{q}$.

Il existe c dans $\left] \alpha, \frac{p}{q} \right[$ tel que :

$$\widetilde{P}(\alpha) - \widetilde{P}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) \widetilde{P}'(c).$$

Majorons $\widetilde{P}'(c)$:

$$|\alpha - c| < |\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q}.$$

$$|c| < |\alpha| + \frac{1}{q} < M + 2.$$

Donc :

$$|\widetilde{P}'(c)| < \sum_{i=1}^{m} i\, |a_i|\, (M+2)^{i-1} = K$$

K est un réel strictement positif ne dépendant que de P.

Nous en déduisons :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{|\widetilde{P}'(c)|} \left| \widetilde{P}\left(\frac{p}{q}\right) \right| > \frac{1}{K} \left| \widetilde{P}\left(\frac{p}{q}\right) \right|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Raisonner par l'absurde pour construire un polynôme vérifiant les hypothèses de la question **1)**.
Puis introduire une valeur approchée $\frac{p}{q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k\,!}}$ de β et appliquer le résultat de la question **2)**.

Or le polynôme P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et $\frac{p}{q}$ n'est pas racine.

Il existe un entier A non nul tel que :

$$\left|\widetilde{P}\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{A}{q^m} \geqslant \frac{1}{q^m}.$$

Par conséquent :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Kq^m}.$$

3) Supposons que la famille $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Il existe $m+1$ rationnels $a_0, \ldots, a_m$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{m} a_i \beta^i = 0$.

Nous pouvons supposer que les coefficients du polynôme $\sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ sont des entiers. En effet, il suffit de multiplier l'égalité par le plus petit commun multiple des dénominateurs des rationnels α_i.

Le développement dyadique de β n'est pas périodique. Le réel β n'est pas un rationnel. Nous pouvons supposer que le polynôme $\sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ n'a pas de racines rationnelles, quitte à diviser par un facteur.

Nous retrouvons les hypothèses de la question **1)**.

Une valeur approchée de β est $\frac{p}{q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k\,!}}$. Nous avons $q = 2^{n\,!}$.

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\,!}}.$$

Nous pouvons majorer $\left|\beta - \frac{p}{q}\right|$ par $\frac{1}{2^{(n+1)\,!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{(n+1)\,!-1}}$. Donc :

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}.$$

D'après la question **2)**, il existe un réel K strictement positif indépendant de n tel que :

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Kq^m}.$$

Il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ entraîne $q > K$.

Pour $n \geqslant N$, nous avons : $\frac{1}{Kq^m} > \frac{1}{q^{m+1}}$, puis $\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{m+1}}$.

D'autre part, $\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2^{(n+1)\,!-1}}$.

Par conséquent, pour $q > K$, nous avons $\frac{1}{2^{(n+1)\,!-1}} > \frac{1}{q^{m+1}}$. Cette inégalité n'a pas lieu pour n assez grand, car $q = 2^{n\,!}$. Il suffit de considérer $n \geqslant \max(m, N)$.

En conclusion, la famille $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$ est donc de dimension infinie.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $X = (-1, 1, 2)$, $Y = (1, 2, 5)$, $Z = (3, 1, a)$ et $T = (2, 1, b)$.

Trouver les réels a et b pour que la famille (X, Y) engendre le même sous-espace que la famille (Z, T).

Quel est ce sous-espace ?

2 Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application définie pour x réel par $f_n(x) = \cos nx$.

Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déterminer tous les endomorphismes u de E tels que $\big(x, u(x)\big)$ soit liée pour tout x de E.

4 La théorie du signal débute avec les travaux de Joseph Fourier montrant qu'il est possible de représenter certaines fonctions périodiques à l'aide de superposition de fonctions sinus ou cosinus.

Vous avez vu en analyse que la série de Fourier d'une fonction f qui converge vers f en moyenne quadratique peut diverger ponctuellement. Pour assurer une meilleure convergence les mathématiciens cherchèrent de nouveaux développements.

En 1909, le mathématicien Alfred Haar* introduisit de nouvelles fonctions qui portent son nom. Elles sont considérées comme les premières ondelettes.

Soit p un entier naturel. On considère les points $x_k = \dfrac{k}{2^p}$ de $[0, 1]$ pour k dans $[\![0, 2^p - 1]\!]$. À chacun de ces points x_k, on associe un réel f_k.

Ceci représente un signal. On associe à cet échantillonage la fonction f définie par : $f(x) = f_k$ pour x dans $\left[\dfrac{k}{2^p}, \dfrac{k+1}{2^p}\right[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Soit E_p l'ensemble des fonctions constantes sur chacun des intervalles $\left[\dfrac{k}{2^p}, \dfrac{k+1}{2^p}\right[$ pour k dans $[\![0, 2^p - 1]\!]$ et nul en dehors de $[0, 1[$ et E la réunion des E_p pour p dans $\mathbb{N}$.

Pour p dans $\mathbb{N}$ et k dans $[\![0, 2^p - 1]\!]$, nous définissons la fonction $\varphi_{p,k}$ par : $\varphi_{p,k}(x) = 1$ pour x dans $\left[\dfrac{k}{2^p}, \dfrac{k+1}{2^p}\right[$ et $\varphi_{p,k}(x) = 0$ sinon. Montrer que E est un espace vectoriel et que, pour tout entier p, la famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est une base de E_p. Trouver une base de E.

5 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E nilpotent d'indice de nilpotence égal à 2.

Montrer que le rang de u est 1 et qu'il existe une base telle que la matrice de u dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\varphi(P) = P(X + 1) - 2\,P(X) + P(X - 1).$$

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer son noyau et son image.

7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que :

$$\operatorname{Ker} u = A \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u = B.$$

8 Soit F, G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que :

$$F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H).$$

9 Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$F = \{f \in E\ ;\quad f(1) = 0\}$$

et

$$G = \{f \in E\ ;\ \exists\ a \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = ax\}$$

sont supplémentaires.

10 Soit A et B deux sous-espaces de même dimension p d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel C supplémentaire commun à A et à B.

*__Alfred Haar__ *(1885-1933), mathématicien hongrois, travailla également sur la théorie de la mesure.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $\mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v = \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v = E$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Que peut-on dire lorsque E n'est plus de dimension finie ?

12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, F et G deux sous-espaces de E.

On suppose que $F \subset G$ et que $\mathrm{codim}\,F = \mathrm{codim}\,G$.

Montrer que $F = G$.

13 Soit α un réel de $\mathbb{R}^+ \setminus 2\mathbb{N}$.

Pour tout réel a on note f_a la fonction définie pour tout réel x par $f_a(x) = |x - a|^\alpha$.

Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

14 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$ non réduit à un point et E l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur I.

1) Pour tout z de $\mathbb{C}$ on note f_z la fonction définie pour tout x de I, par $f_z(x) = x^z$.

Montrer que la famille $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ est libre.

2) Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé F et f une application continue non constante sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que la famille $(f^z)_{z\in\mathbb{C}}$ est libre.

Montrer que ce résultat ne s'étend pas au cas d'une fonction f définie sur un ensemble A quelconque et prenant une infinité de valeurs.

15 Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$ et a un vecteur de E non nul.

Déterminer tous les endomorphismes u de E tels que $(a, x, u(x))$ soit liée pour tout x dans E.

16 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) On suppose qu'il existe un endomorphisme u tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Montrer que u est un automorphisme de E.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des vecteurs de E tels que la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u(a_1), u(a_2), \ldots, u(a_{p-1}))$ soit libre.

Montrer que la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u(a_1), u(a_2), \ldots, u(a_p))$ est libre.

2) Dans cette question, l'espace E est de dimension finie non nulle. On suppose qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la dimension de E est paire et que u admet une matrice très simple dans une base de E bien choisie.

3) Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension paire non nulle. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}u$.

2) $\mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$.

3) $\mathrm{Im}u^2 = \mathrm{Im}u$.

Ce résultat est-il vrai si E est de dimension infinie ?

18 Soit E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u dans $\mathcal{L}(E, E')$ non nulle.

Montrer que u est injective si, et seulement si, pour toute décomposition $E = F \oplus G$, alors $u(E) = u(F) \oplus u(G)$.

19 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que :

(i) $p \leqslant \dim E$;

(ii) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $\mathrm{Ker}\,u^k \neq \mathrm{Ker}\,u^{k+1}$ et $\mathrm{Im}u^k \neq \mathrm{Im}u^{k+1}$;

(iii) $\forall k \geqslant p$ $\mathrm{Ker}\,u^k = \mathrm{Ker}\,u^{k+1}$ et $\mathrm{Im}u^k = \mathrm{Im}u^{k+1}$.

Montrer que $E = \mathrm{Im}u^p \oplus \mathrm{Ker}\,u^p$ et que la restriction de u à $\mathrm{Im}u^p$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}u^p$.

20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et p un projecteur sur F de noyau G.

Soit u un endomorphisme de E tel que u^n soit l'identité I de E et tel que $u(F) \subset F$.

On note :

$$q = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

Montrer que q est un projecteur sur F et que :

$$p = q \;\Leftrightarrow\; p \circ u = u \circ p \;\Leftrightarrow\; u(G) \subset G.$$

21 Soit E (respectivement E') un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F (resp. F') un sous-espace de E (resp E').

On suppose que F et F' ont la même codimension finie.

Montrer que $F \times E'$ et $E \times F'$ sont isomorphes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dualité. Systèmes d'équations linéaires

18

Introduction

Les hyperplans jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire. En particulier, tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie est l'intersection d'une famille finie d'hyperplans. Nous verrons qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

L'étude de l'espace dual, ensemble des formes linéaires, permettra de mieux les connaître en dimension finie aussi bien qu'en dimension infinie.

Les coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire sont exprimées en fonction des coordonnées de ce vecteur par un système d'équations linéaires.

Les matrices et les systèmes d'équations linéaires sont des outils fondamentaux pour l'étude des applications linéaires.

Vous avez utilisé, en Première année, les opérations élémentaires pour l'étude des matrices et des systèmes linéaires. En relation avec la dualité, cette étude est revisée dans ce chapitre.

OBJECTIFS

- Le dual et les propriétés des formes linéaires.
- La trace d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- Les hyperplans.
- Les bases duales en dimension finie.
- Équations d'un sous-espace en dimension finie.
- Matrices équivalentes.
- Rang et matrices équivalentes.
- Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
- Méthode du pivot de Gauss et applications à la recherche du rang, de l'image, du noyau, du déterminant ou de l'inverse si elle existe, d'une application linéaire.
- Interprétation géométrique et résolution des systèmes d'équations linéaires.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Formes linéaires et espace dual

1.1. Forme bilinéaire canonique

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Une application linéaire, u, de E dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur l'espace E.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé l'**espace dual** de E.

Il est noté E^*.

Bien noter que E^* n'a rien à voir avec $E \setminus \{0_E\}$.

Rapport Centrale, 1997

« Les questions qui touchent à la dualité sont souvent mal maîtrisées. »

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application φ définie de $E^* \times E$ sur $\mathbb{K}$, par $\varphi(u,x) = u(x)$ est une forme bilinéaire appelée **forme bilinéaire canonique**

Le scalaire $\varphi(u,x)$ est noté $< u,x >$, où $<,>$ est appelée **crochet de dualité**.

Un objet mathématique est dit canonique quand il ne dépend que de la structure initiale. Ici, l'application φ ne dépend que de la structure de l'espace vectoriel E. Par exemple, il ne dépend pas du choix d'une base.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 1*

Mensa ACADEMY

1.2. Propriétés duales.

Nous allons voir dans ce paragraphe que toute propriété concernant la première variable correspond à une propriété similaire pour la seconde variable.

Nous dirons que ces **propriétés** sont **duales** l'une de l'autre.

Le zéro de E^* est l'application nulle. Il sera noté 0^*.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u dans E^*. Alors :

$$u = 0^* \Leftrightarrow \forall x \in E \quad < u,x > = 0.$$

Voici la propriété duale :

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x dans E. Alors :

$$x = 0_E \Leftrightarrow \forall u \in E^* \quad < u,x > = 0.$$

Démonstration

• Si $x = 0_E$, alors nous avons immédiatement :

$$\forall u \in E^* \quad < u,x > = 0.$$

• Réciproquement, soit x dans E tel que :

$$\forall u \in E^* \quad < u,x > = 0.$$

Supposons x non nul.

Considérons F un supplémentaire de $\mathbb{K}x$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après le *théorème* 20 du *chapitre* 17, il existe une forme linéaire u unique définie par ses restrictions à F et à $\mathbb{K}x$.

Prenons par exemple $u_{|F}$ nulle et $u(x) = 1$ car $x \neq 0_E$.

Ainsi, il existe u dans E^* tel que : $< u, x > \neq 0$. Ceci contredit l'hypothèse. Donc le vecteur x est nul.

En dimension finie, nous savons que le supplémentaire de tout sous-espace vectoriel existe. En dimension infinie, nous admettrons qu'il existe.

Corollaire 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x dans E.

Si x n'est pas le vecteur nul 0_E, alors il existe une forme linéaire u telle que $u(x) = 1$.

Corollaire 3.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x et y dans E.

$$x = y \Leftrightarrow \forall u \in E^* \quad < u, x > = < u, y > .$$

La propriété duale est la traduction évidente de l'égalité de deux formes linéaires. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u et v dans E^*.

$$u = v \Leftrightarrow \forall x \in E \quad < u, x > = < v, x >$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

1.3. Un exemple important : la trace

Soit A une matrice carrée d'ordre n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ est appelé la **trace** de A et noté $\mathrm{Tr}(A)$.

Mensa ACADEMY

Théorème 4

L'application trace, Tr, est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration

Soit $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,i} + b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

Soit k dans $\mathbb{K}$. Vérifier de même que $\mathrm{Tr}(kA) = k\mathrm{Tr}(A)$.

Théorème 5

Pour toute matrice A et toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Démonstration

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\right) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Corollaire 5.1

Deux matrices semblables ont la même trace.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((PA)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(PA)) = \mathrm{Tr}(A).$$

Corollaire 5.2

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie, B une base de E et u un endomorphisme de E.

La trace de la matrice de u dans la base B ne dépend pas du choix de la base B.

Elle ne dépend que de l'endomorphisme u. On l'appelle **trace de l'endomorphisme** u, notée $\mathrm{Tr}(u)$.

Corollaire 5.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur.

La trace de p est égale au rang de p.

Démonstration

Soit F l'image de p et G le noyau de p : $F \oplus G = E$.

Il existe une base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ adaptée à la décomposition en somme directe de E.

La matrice de p dans cette base est : $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où I_r désigne la matrice identité d'ordre r. Sa trace est $r = \dim F = \mathrm{rg}\ p$.

Mensa ACADEMY

► *Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.*

2 Hyperplans

Un **hyperplan** H de E est un sous-espace de E de codimension 1.

Il existe une droite D telle que $H \oplus D = E$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si H est un hyperplan de E, pour tout vecteur a de E n'appartenant pas à H, on a : $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

Démonstration

La somme $H + \mathbb{K}a$ est directe si, et seulement si, a n'appartient pas à H.

$H \oplus \mathbb{K}a \subset E$ et tout supplémentaire de H est de dimension 1. Donc $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

Corollaire 6.1

Pour tout hyperplan H de E et tout vecteur a de E n'appartenant pas à H, il existe une forme linéaire u unique telle que $u_{|H}$ soit nulle et telle que $u(a) = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Appliquer le *théorème* 20 du *chapitre* 17 à la somme directe $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

Théorème 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• Un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement s'il est le noyau d'une forme linéaire *non nulle*.

• Soit u dans E^* non nulle et H le noyau de u. Alors $u(x) = 0$ est appelée une équation de H et :

$$\forall v \in E^* \quad H = \text{Ker } v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \qquad v = \lambda u.$$

• Toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles entre elles.

Démonstration

• Soit H un hyperplan et D une droite telle que $H \oplus D = E$.

Soit a un vecteur non nul de D.

D'après le *corollaire* 6.1, il existe une forme linéaire u telle que $u_{|H}$ soit nulle et telle que $u(a) = 1$.

Par conséquent, u est une forme linéaire non nulle de noyau H.

Réciproquement, soit u une forme linéaire non nulle.

La forme linéaire est non nulle. Son image est $\mathbb{K}$, espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même.

Le *théorème* 21 du *chapitre* 17 montre que :

$$\text{codim Ker } u = \text{rg } u = 1.$$

Le sous-espace Ker u est un hyperplan.

• Soit u et v deux formes linéaires telles que Ker u = Ker $v = H$, où H est un hyperplan de E.

Les formes u et v sont non nulles, car $H \neq E$.

Montrons que u et v sont proportionnelles.

Soit a n'appartenant pas à H. Alors $u(a) \neq 0$ et $v(a) \neq 0$.

Vérifier que, pour tout x de H et pour tout x de $\mathbb{K}a$, on a :

$$< u(a)v - v(a)u, x > = 0.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in E \quad < u(a)v - v(a)u, x > = 0.$$

D'après le *théorème* 2 : $u(a)v - v(a)u = 0^*$.

La réciproque est immédiate.

Exemple

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

L'ensemble $\left\{ f \in E; \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un hyperplan de E car $\left(f \longmapsto \int_0^1 f \right)$ est une forme linéaire non nulle.

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Endomorphismes de trace nulle

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Nous allons rechercher l'hyperplan noyau de la forme linéaire Tr *définie sur* $\mathcal{L}(E)$.

1) *Soit u un endomorphisme non nul de E tel que $Tr\,(u) = 0$.*

a) *Montrer que u n'est pas une homothétie.*

b) *Soit x un vecteur de E tel que $\big(x, u(x)\big)$ soit libre. Considérons un supplémentaire F de la droite $\mathbb{K}x$ contenant $u(x)$, p la projection sur F de noyau $\mathbb{K}x$.*

Montrer que l'application $v = p \circ u_{|F}$ est un endomorphisme de F de trace nulle.

2) *En déduire que, pour tout endomorphisme u de trace nulle, il existe une base B de E dans laquelle la matrice $M_B(u)$ de l'endomorphisme u a une diagonale identiquement nulle.*

3) *Soit D une matrice diagonale d'ordre n et $(d_1, ..., d_n)$ ses éléments diagonaux.*

Considérons l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad f(M) = DM - MD$$

a) *Déterminer le noyau de f.*

b) *Montrer que* Ker f *est l'ensemble des matrices diagonales si, et seulement si, les scalaires $d_1, ..., d_n$ sont distincts deux à deux.*

Dans ce cas, quelle est l'image de f ?

4) *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la trace d'un endomorphisme u de E soit nulle est l'existence de deux endomorphismes v et w de E tels que :*

$$u = v \circ w - w \circ v.$$

1) a) Si u était une homothétie de rapport k, alors on aurait $\mathrm{Tr}(u) = nk$. Par conséquent, $k = 0$ et u serait l'application nulle.

b) L'endomorphisme u n'est pas une homothétie. Il existe x dans E tel que la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit libre. Nous pouvons la compléter en une base de E et construire ainsi un supplémentaire F de $\mathbb{K}x$ contenant $u(x)$.

Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de F telle que $e_{n-1} = u(x)$.

Notons $e_n = x$. $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E.

Soit N la matrice de $p \circ u_{|F}$ dans la base $(e_1, ..., e_{n-1})$ et M la matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$.

La matrice M s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} N & C \\ L & 0 \end{bmatrix}$$

où L est une matrice ligne de $n-1$ colonnes et C une matrice colonne de $n-1$ lignes.

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(u) = 0.$$

2) Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$.

Le résultat est évident lorsque $n = 1$.

Supposons l'assertion démontrée pour tout espace de dimension $n-1$ et soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit u un endomorphisme de E de trace nulle.

Si u est l'application nulle, c'est immédiat.

Sinon, d'après la question **1)b)**, l'endomorphisme $p \circ u_{|F}$ de F est de trace nulle et dim $F = n-1$. L'hypothèse de récurrence s'applique à F et à $p \circ u_{|F}$. Il existe une base $(e'_1, ..., e'_{n-1})$ de F telle que la matrice N' de $p \circ u_{|F}$ dans cette base a une diagonale nulle.

Dans la base $(e'_1, ..., e'_{n-1}, e_n)$, la matrice M' de M a également une diagonale nulle.

La récurrence est vérifiée.

3) a) Soit $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$M \in \mathrm{Ker}\ f \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad d_i m_{i,j} = m_{i,j} d_j.$$

b) Si les d_i sont distincts deux à deux, la condition précédente devient :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,n]\!] \quad i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0.$$

Réciproquement, s'il existe deux indices i et j distincts tels que $d_i = d_j$, alors tout $m_{i,j}$ convient. La matrice $E_{i,j}$ appartient au noyau de f et n'est pas diagonale.

On suppose maintenant que les scalaires $d_1, ..., d_n$ sont distincts deux à deux.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n et $N_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de diagonale nulle d'ordre n.

$$\text{Im}\, f \subset N_n(\mathbb{K}).$$

Comparons les dimensions :

$$\begin{aligned}\dim \text{Im}\, f &= n^2 - \dim \text{Ker}\ f \\ &= n^2 - \dim D_n(\mathbb{K}) \\ &= n^2 - n \\ &= \dim N_n(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

Par conséquent $\text{Im}\, f = N_n(\mathbb{K})$.

4) S'il existe deux endomorphismes v et w de E tels que $u = v \circ w - w \circ v$, il est immédiat que $\text{Tr}(u) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\text{Tr}(u) = 0$.

D'après la question **2)**, il existe une base B de E dans laquelle la matrice M de u vérifie :

$$M \in N_n(\mathbb{K}).$$

Le corps $\mathbb{K}$ est infini car de caractéristique nulle.

Il existe n scalaires $d_1, ..., d_n$ distincts deux à deux, une matrice D diagonale de diagonale $(d_1, ..., d_n)$ et f l'application associée à D dans la question **3)**.

$$\text{Im}\, f = N_n(\mathbb{K}).$$

Par conséquent, il existe W dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = f(W) = DW - WD$.

Soit v l'endomorphisme de E de matrice D dans la base B et w celui de matrice W.

Alors : $u = v \circ w - w \circ v$.

3 Expression en dimension finie

3.1. Équation d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Une forme linéaire u est entièrement déterminée par l'image de B. Notons a_i, pour i dans $[\![1, n]\!]$, le scalaire $< u, e_i >$.

La matrice de u dans la base B est $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Soit x dans E, il existe $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Alors $< u, x >= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a_1, a_2, ..., a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$.

Une **équation d'hyperplan** est de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est un élément *non nul* de $\mathbb{K}^n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Bases duale et préduale

Pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, nous allons utiliser le symbole δ_i^j défini par :

$$\delta_i^j = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad \delta_i^j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Ce symbole est appelé **symbole de Kronecker** .

Théorème 9

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on définit la forme linéaire e_i^* sur E par les **relations d'orthogonalité de Kronecker** :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!] \quad < e_i^*, e_j > = \delta_i^j.$$

Les formes linéaires $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$ sont appelées les **formes linéaires coordonnées.**

Alors E^* est de dimension n et $B^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, appelée **base duale** de B.

La base B est dite **préduale** ou **anté-duale** de B^*.

Démonstration

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = n.$$

Les n formes linéaires e_i^*, pour i dans $[\![1,n]\!]$, forment une famille libre.

En effet, soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0^*$.

Soit j quelconque dans $[\![1,n]\!]$.

$$0 = \sum_{i=1}^{n} < \alpha_i e_i^*, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < e_i^*, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \delta_i^j = \alpha_j.$$

La famille $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*.

Corollaire 9.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

• Toute forme linéaire de E^* se décompose de manière unique dans la base B^* et $u = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i >\ e_i^*$.

• Tout vecteur x de E se décompose de manière unique dans la base B et $x = \sum_{i=1}^{n} < e_i^*, x >\ e_i$.

Démonstration

• Soit u dans E^*. La famille B^* est une base de E^*.

Il existe une unique famille $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$.

Soit j dans $[\![1,n]\!]$. Nous obtenons : $< u, e_j >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*, e_j >= \alpha_j$.

Léopold Kronecker *(1823-1891), mathématicien allemand.*
Il introduit la notion d'indéterminée ***X*** *dans l'étude des polynômes, insistant sur le fait qu'il s'agit d'une quantité algébrique et non d'une variable au sens de l'Analyse. Son œuvre est d'une grande importance en Algèbre (théorie des groupes, théorie des nombres).*
Kronecker est aussi connu pour son opposition farouche aux travaux de Cantor sur l'infini et la théorie des ensembles.

Si x a pour coordonnées $x_1, .., x_n$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ alors $e_i^*(x) = x_i$.
C'est pourquoi les formes e_i^* sont appelées formes linéaires coordonnées.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 2

Méthode pratique pour déterminer une base préduale

Soit $E = \mathbb{R}^3, u_1, u_2$ *et* u_3 *trois formes linéaires sur* E *définies par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad u_1(x,y,z) = x + 2y - 3z$$
$$u_2(x,y,z) = 5x - 3y$$
$$u_3(x,y,z) = 2x - y - z.$$

1) *Vérifier que la famille* (u_1, u_2, u_3) *est une base de* E^*.

2) *Déterminer la base préduale.*

3) *En déduire une méthode pratique pour déterminer une base préduale.*

1) Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'application e_1^* est définie par :

$$e_1^*(x,y,z) = x.$$

De même :

$$e_2^*(x,y,z) = y \quad \text{et} \quad e_3^*(x,y,z) = z.$$

Ainsi :

$$u_1 = e_1^* + 2e_2^* - 3e_3^*, \quad u_2 = 5e_1^* - 3e_2^*$$

et : $u_1 = 2e_1^* - e_2^* - e_3^*$.

Le déterminant de (u_1, u_2, u_3) dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est : $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Il est non nul. La famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Son cardinal est la dimension de l'espace. La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E^*.

2) D'après le *théorème* 9 , nous recherchons 3 vecteurs $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $X_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de E tels que :

$\forall i \in [\![1,3]\!] \quad \forall j \in [\![1,3]\!] \quad < u_i, X_j > = \delta_i^j$.

Il s'agit de résoudre :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Nous constatons que X_1 est donné par la première colonne de A^{-1}, X_2 par la deuxième et X_3 par la troisième.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 5 & 5 & -15 \\ 1 & 5 & -13 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent :

$$X_1 = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right), \quad X_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

et $X_3 = \left(\frac{-9}{10}, \frac{-3}{2}, \frac{-13}{10}\right)$.

La famille (X_1, X_2, X_3) est la base préduale de la base (u_1, u_2, u_3) de E^*.

3) Soit A la matrice dans la base canonique $(e_1^*, ..., e_n^*)$ de la famille $(u_1, ..., u_n)$ de E^*.

Si $(u_1, ..., u_n)$ est une base, la matrice A est inversible.

Alors la base préduale est donnée par les vecteurs colonnes de A^{-1}.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de E et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de E^* telles que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,n]\!] \quad < u_i, e_j > = \delta_i^j.$$

Alors :
- la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.
- la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de E^*, duale de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Il suffit de vérifier que la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base, puis d'appliquer le *théorème* 9.

Exemple

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une famille de $n+1$ scalaires distincts deux à deux.

On définit, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la forme linéaire u_k par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \qquad u_k(P) = \widetilde{P}(a_k) \quad \text{et le polynôme :} \quad Q_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

On reconnaît les polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$ associés à la famille $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de $n+1$ scalaires distincts deux à deux.

Théorème 11

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \dots u_p)$ une famille libre de E^*. Il existe p vecteurs $(x_1, \dots x_p)$ de E tels que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \quad < u_i, x_j >= \delta_i^j$$

Démonstration

On complète $(u_1, \dots, u_p)$ en une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E^*. Puis on vérifie que l'application f de E dans $\mathbb{K}^n$: $x \mapsto (u_1(x), \dots, u_n(x))$ est linéaire injective. L'existence des p vecteurs se déduit de la surjectivité de f.

Corollaire 11.1

Étant donnée une base $L = (u_1, \dots, u_n)$ de E^*, il existe une base $B = (x_1, \dots x_n)$ de E telle que $L = B^*$.

Elle est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ pour l'isomorphisme f de E dans $\mathbb{K}^n$ définie par $\forall x \in E \quad f(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$.

Retrouver la méthode annoncée dans l'*application* 2.

► ***Pour s'entraîner : ex. 6***

Application 3

Isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual

Soit n un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1) *Montrer que :*

$$\forall u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \quad \exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad u(X) = \mathrm{Tr}(AX).$$

2) *Soit v dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire telle que :*

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad v(XY) = v(YX).$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{K}$ tel que : $v = k\mathrm{Tr}$.

1) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier tout d'abord que $f_A : X \longmapsto \mathrm{Tr}(AX)$ est une forme linéaire.

Réciproquement, soit u dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, montrons qu'il existe A unique telle que $u = f_A$.

Il s'agit de deux formes linéaires. Elles sont identiques si, et seulement si, elles coïncident sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour p et q dans $[\![1,n]\!]$, nous définissons la matrice $E_{p,q} = [\delta_i^p \delta_j^q]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$(E_{p,q})_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} f_A(E_{p,q}) &= \mathrm{Tr}\left(AE_{p,q}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}} a_{i,j}E_{i,j}E_{p,q}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}} a_{i,j}\delta_j^p E_{i,q}\right) \\ &= \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_{q,j}\delta_j^p = a_{q,p}. \end{aligned}$$

La matrice A est entièrement déterminée par $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec $a_{i,j} = u(E_{j,i})$

2) Soit v dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tel que :

$$\forall (X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad v(XY) = v(YX).$$
$$\forall (X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad v(XY-YX) = 0.$$

D'après l'application 1, l'ensemble :

$$\{XY - YX/(X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$$

est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. C'est-à-dire le noyau de Tr.
L'hyperplan Ker Tr est contenu dans Ker v.
Si v n'est pas la forme nulle 0^*, Ker v est un hyperplan.
Dans ce cas, v et Tr sont deux formes linéaires non nulles de même noyau. D'après le *théorème* 7, il existe k non nul dans $\mathbb{K}$ tel que $v = k\mathrm{Tr}$.
La forme nulle 0^* correspond à $k = 0$.

3.3. Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 12
Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension p. Alors l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n-p$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Considérons une base $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de F, que nous complétons en une base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E. D'après le *corollaire* 9.1, une forme linéaire quelconque u de E^* se décompose, de manière unique, sous la forme $u = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i^*$.

$$\begin{aligned} F \subset \mathrm{Ker}\, u &\Leftrightarrow \forall\, j\in[\![1,p]\!] \quad < u, e_j >= 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^{n} < u, e_i > e_i^* \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \ldots e_n^*). \end{aligned}$$

Théorème 13
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ une famille libre de formes linéaires. Alors :

- l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires u_i est un sous-espace vectoriel F de E, de dimension $n-q$;
- toute forme linéaire u s'annulant sur F est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

Démonstration

- Soit g l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^q$ définie par $x \mapsto (u_1(x), \ldots, u_q(x))$.

On complète $(u_1 \ldots u_q)$ en une base $(u_1 \ldots u_n)$ de E^*.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après la démonstration du *théorème* 11, l'application $f : x \to (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

$\forall (a_1 \ldots a_q) \in \mathbb{K}^q \quad \exists ! x \in E \quad f(x) = (a_1, \ldots, a_q, 0 \ldots 0)$.

On en déduit la surjectivité de g.

De plus : $\text{Ker } g = \bigcap_{j=1}^{p} \text{Ker } u_j = F$. Donc : $\dim F = n - \dim(\text{Im} g) = n - q$.

Corollaire 13.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et un entier naturel $p < n$. Un sous-espace F de E est de dimension p si, et seulement s'il est l'intersection de $n - p$ hyperplans associés a des formes lineaires $u_1, \ldots, u_{n-p}$ indépendantes.

Le système $\begin{cases} u_1(x) = 0 \\ \vdots \\ u_{n-p}(x) = 0 \end{cases}$ est un système d'équations de F.

► *Pour s'entraîner : ex.7.*

4 Calcul matriciel

4.1. Matrices équivalentes

Soit n et p deux entiers non nuls, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La matrice B est **équivalente** à la matrice A s'il existe une matrice P inversible dans $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et une matrice Q inversible dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q\,A\,P$.

Théorème 14

L'équivalence de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

L'application linéaire u de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ associée à la matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ est appelée **application linéaire canoniquement associée** à la matrice A.

Théorème 15

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent une même application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension p dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension n relativement à deux couples de bases de E et de F.

Démonstration

• Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivalentes. Il existe P dans $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q\,A\,P$.

Pour P dans $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, il existe une base B_2 de E telle que P soit la matrice de passage de B_1 à B_2.

De même, pour Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une base B_2' de F telle que Q^{-1} soit la matrice de passage de B_1' à B_2'.

Rapport X, 2000

« Nous avons été surpris de voir un bon nombre de candidats qui manifestement ne connaissent pas le calcul matriciel. »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Le calcul matriciel et les formules de changement de base ne sont pas toujours bien maîtrisées. »

Remarque

Revoir les opérations de décompositions en blocs sur les matrices (cf. *H-Prépa, Algèbre et géométrie euclidienne*, 1re année, page 189).

Rapport X, 2001

« Pour réussir cette question, il fallait connaître le calcul par blocs du produit matriciel. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit u dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que : $M_{B_1}^{B_1'}(u) = A$.

Alors B est la matrice de u dans les bases B_2 et B_2' .

• La réciproque est immédiate.

4.2. Matrices semblables

Lorsque $n = p$, vous avez étudié en Première année la notion de matrices semblables. Rappelons quelques résultats.

Une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **semblable** à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Théorème 16

La similitude de deux matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 17

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n dans deux bases de E .

Rapport Centrale, 2001

« La notion de matrices semblables est parfois mal comprise. Certains candidats se cramponnent à la définition formelle : il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, au lieu de chercher une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A deviendrait A'. »

Rapport Centrale, 1997.

« La confusion entre matrices équivalentes et matrices semblables est fréquente. »

4.3. Rang des matrices équivalentes

Vous avez défini, en Première année, le rang d'une matrice A.

Le rang de A est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A . C'est aussi le rang des vecteurs colonnes de A.

Le *théorème* suivant est une conséquence du *corollaire* 23.1 du *chapitre* 17.

Théorème 18

On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.

Théorème 19

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice $J_{n,p,r}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par blocs par :

$$J_{n,p,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque deux matrices sont semblables, elles sont équivalentes.
La réciproque est fausse. Il existe des matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.
Exemple : toute matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à I_n et la seule matrice semblable à I_n est I_n .

Rapport X, 2002

« Soulignons l'importance de bien connaître non seulement les résultats du cours, mais aussi certaines démonstrations importantes. Par exemple, c'est sur l'idée de la démonstration du théorème du rang que s'appuie la décomposition de toute matrice sous la forme PJ_rQ, P et Q inversibles. Beaucoup d'exercices portant sur le rang des endomorphismes utilisent la démonstration de ce théorème... De façon générale, on constate que très peu de candidats raisonnent de manière géométrique, ce qui est pourtant utile dans bien des situations... Il ne faut donc pas hésiter à tracer des figures. »

Démonstration

Soit A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r et u l'application linéaire canoniquement associée à A :

$$\dim(\text{Ker } u) = p - r.$$

Soit G un supplémentaire de Ker u dans $\mathbb{K}^p$.

Il existe une base $B = (e_1, \ldots, e_p)$ adaptée à la décomposition G $\oplus$ Ker $u = \mathbb{K}^p$.

Tout supplémentaire de Ker u est isomorphe à Imu .

Donc la restriction v de u à G est injective. La famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Nous la complètons en une base $B' = (u(e_1), \ldots, u(e_r), f_{r+1}, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

La matrice de u dans les bases B et B' est la matrice $J_{n,p,r}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 19.1
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Démonstration

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $\text{rg } A = \text{rg } B = r$, alors A et B sont équivalentes à $J_{n,p,r}$. Par transitivité, les matrices A et B sont équivalentes.

Réciproquement, supposons les matrices A et B équivalentes. D'après le *corollaire* 19.1, elles ont le même rang.

Corollaire 19.2
Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

Démonstration

Soit A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang r.

Il existe P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et Q dans $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que : $A = P\,J_{n,p,r}\,Q$.

$$^tA = {}^tQ\,{}^tJ_{n,p,r}\,{}^tP = {}^tQ\,J_{p,n,r}\,{}^tP.$$

Le rang de $J_{p,n,r}$ est r. La matrice ^tA est équivalente à $J_{p,n,r}$.

Corollaire 19.3
Le rang d'une matrice est le rang de la famille des vecteurs lignes de cette matrice.

► *Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.*

Rapport ENS, 1998
« Beaucoup de candidats ne savent pas caractériser de plusieurs manières une matrice de rang donné. »

5 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

5.1. Opérations sur les lignes

Nous allons utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, constituée des matrices $E_{i,j}$ définies par :

$$\forall\ i \in [\![1,n]\!] \quad \forall\ j \in [\![1,n]\!] \quad E_{i,j} = (\delta_k^i \delta_l^j)_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \downarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Une formule très utile :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 20

Soit i et j dans $[\![1,n]\!]$.

Quand on multiplie à gauche une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{ième}$ ligne qui est remplacée par la $j^{ième}$ ligne de A.

Démonstration

Soit A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice $E_{i,j}\,A$ est une matrice $B=(b_{k,l})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et $l\in[\![1,p]\!]$.

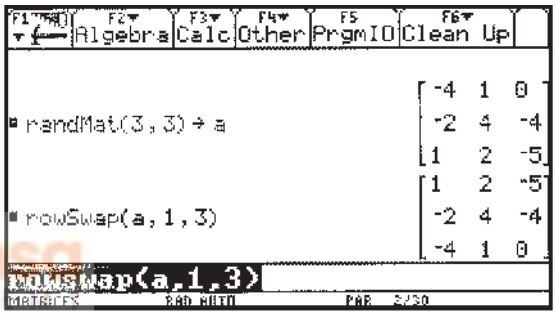
$$b_{k,l}=\sum_{s=1}^{n}\delta_k^i\delta_s^j a_{s,l}=\delta_k^i a_{j,l}.$$

• Si $k\neq i$, le terme $b_{k,l}$ est nul pour tout l. La ligne k est nulle.

• Si $k=i$, le terme $b_{k,l}$ est $a_{j,l}$. La ligne i est la $j^{ième}$ ligne de A.

Corollaire 20.1

Soit i et j distincts dans $[\![1,n]\!]$. Pour échanger la $i^{ième}$ ligne avec la $j^{ième}$ ligne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on multiplie à gauche la matrice A par la matrice $P_{i,j}=\mathrm{I}_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i}$.



Doc. 1. *L'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ s'obtient par :*
`rowSwap (A,i,j).`

Démonstration

Nous annulons la $i^{ième}$ et la $j^{ième}$ ligne de A en remplaçant A par $A-E_{i,i}\,A-E_{j,j}\,A$.

Nous plaçons la $j^{ième}$ ligne de A dans la $i^{ième}$ de :

$$A-E_{i,i}\,A-E_{j,j}\,A$$

en ajoutant la matrice $E_{i,j}\,A$.

Nous plaçons la $i^{ième}$ ligne de A dans la $j^{ième}$ de :

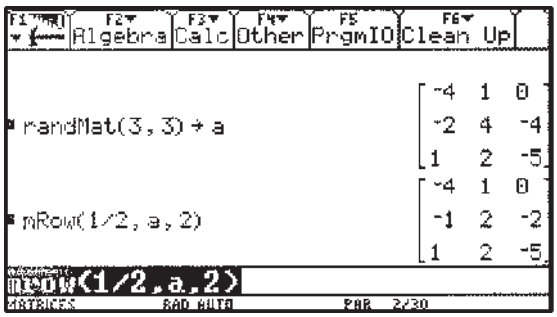
$$A-E_{i,i}\,A-E_{j,j}\,A+E_{i,j}\,A$$

en ajoutant la matrice $E_{j,i}A$.

Corollaire 20.2

Soit i dans $[\![1,n]\!]$. Pour multiplier par un scalaire α la $i^{ième}$ ligne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on multiplie à gauche la matrice A par la matrice :

$$Q_i(\alpha)=\mathrm{I}_n+(\alpha-1)\,E_{i,i}.$$



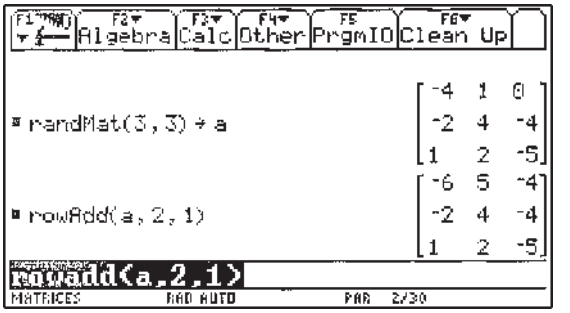
Doc. 2. *L'opération $L_i \longleftarrow kL_i$ s'obtient par :*
`Row (k,A,i).`

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 20.3

Soit i et j dans $[\![1, n]\!]$.

Pour ajouter à la $i^{ième}$ ligne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{K})$ le produit par un scalaire α de la $j^{ième}$ ligne de A, on multiplie à gauche la matrice A par la matrice $R_{i,\,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha\ E_{i,\,j}$.



Doc. 3. *L'opération* $L_i \longleftrightarrow L_i + L_j$ *s'obtient par :* `rowAdd (A,j,i)`.

Théorème 21

On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on échange deux lignes, lorsqu'on multiplie une ligne par un scalaire non nul ou lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Démonstration

Effectuer ces opérations sur la matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, revient à multiplier à gauche par des matrices du type $R_{i,\,j}(\alpha), Q_i(\alpha)$ ou $P_{i,\,j}$.

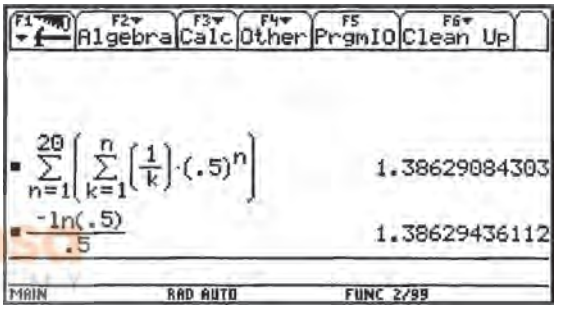
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, le déterminant de la matrice $Q_i(\alpha)$ est α. La matrice $Q_i(\alpha)$ est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq 0$.

Pour tout i et tout j distincts de $[\![1, n]\!]$, le déterminant de la matrice $P_{i,\,j}$ est - 1. La matrice $P_{i,\,j}$ est inversible.

Pour tout i et tout j de $[\![1, n]\!]$ distinct de i et pour tout scalaire α, le déterminant de la matrice $R_{i,\,j}(\alpha)$ est 1. La matrice $R_{i,\,j}(\alpha)$ est inversible.

Le *théorème* 18 permet de conclure.

Les opérations citées dans le *théorème* 21, sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.** Elles conservent le rang de la matrice.



Doc. 4. *L'opération* $L_i \longleftrightarrow L_i + kL_j$ *s'obtient par :* `mRowSwap (k,A,j,i)`.

5.2. Opérations sur les colonnes

La transposition inverse les lignes et les colonnes.

En transposant les égalités matricielles précédentes, nous obtenons des opérations sur les colonnes.

Nous allons utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ constituée des matrices $E'_{i,\,j}$ définies par :

$$\forall\ i \in [\![1, p]\!] \quad \forall\ j \in [\![1, p\ ]\!] \quad E'_{i,\,j} = (\delta^i_k \delta^j_l)_{(k,l)\in[\![1,p]\!]^2}.$$

Théorème 22

Soit i et j dans $[\![1, p]\!]$.

Quand on multiplie à droite une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $E'_{j,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $i^{ième}$ colonne qui est remplacée par la $j^{ième}$ colonne de A.

Rapport X, 2002

« L'usage d'une calculette bien maniée peut être proposé par le candidat à l'examinateur ; c'est un réflexe rare, mais qui peut être judicieux pour suggérer une récurrence ou examiner les variations d'une fonction ou d'une suite, ou encore l'allure d'une courbe... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 22.1

Soit i et j dans $[\![1, p]\!]$.

• Pour échanger la $i^{ième}$ colonne avec la $j^{ième}, (i \neq j)$ colonne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on multiplie à droite la matrice A par la matrice $P'_{i,j} = \mathrm{I}_p - E'_{i,i} - E'_{j,j} + E'_{i,j} + E'_{j,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

• Pour multiplier par un scalaire α la $i^{ième}$ colonne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on multiplie à droite la matrice A par la matrice $Q'_i(\alpha) = \mathrm{I}_p + (\alpha - 1)\, E'_{i,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

• Pour ajouter à la $i^{ième}$ colonne d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le produit par un scalaire α de la $j^{ième}$ colonne de A, on multiplie à droite la matrice A par la matrice $R'_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_p + \alpha E'_{j,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Théorème 23

On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on échange deux colonnes, lorsqu'on multiplie une colonne par un scalaire non nul ou lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Les opérations citées dans ce corollaire sont appelées les **opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.** Elle ne modifient pas le rang de la matrice.

5.3. Méthode du pivot de Gauss et détermination du rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, on effectue une permutation de colonnes pour obtenir une première colonne non nulle.

• S'il existe dans la première colonne un coefficient non nul $a_{i,1}$, appelé **pivot**, on échange la première ligne avec la $i^{ième}$.

• On retranche alors à chaque ligne un multiple de la première ligne, afin d'annuler le premier terme de cette ligne.

On obtient ainsi une matrice A_1 dont la première colonne ne contient qu'un terme non nul, le premier.

Si la matrice A'_1 constituée des $n-1$ dernières lignes et des $p-1$ dernières colonnes de A_1 n'est pas nulle. On lui applique le même procédé.

On répète l'opération r fois, jusqu'à ce que la matrice constituée des $n-r$ dernières lignes et des $p-r$ dernières colonnes soit nulle ou jusqu'à disparitions des lignes (cas $r = n$) ou des colonnes (cas $r = p$).

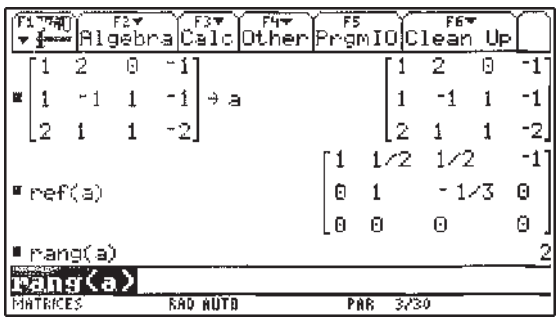
Les opérations élémentaires effectuées sur les lignes ou sur les colonnes ne modifient pas le rang de la matrice.

Le rang de la matrice A est r.

La méthode décrite ci-dessus est appelée « **méthode du pivot de Gauss** ».

Rapport CCP, 1997

« La méthode du pivot de Gauss est connue, mais rarement utilisée pour d'autres questions que la résolution de systèmes linéaires, comme par exemple l'inversion d'une matrice carrée ou le calcul du rang d'une matrice. »



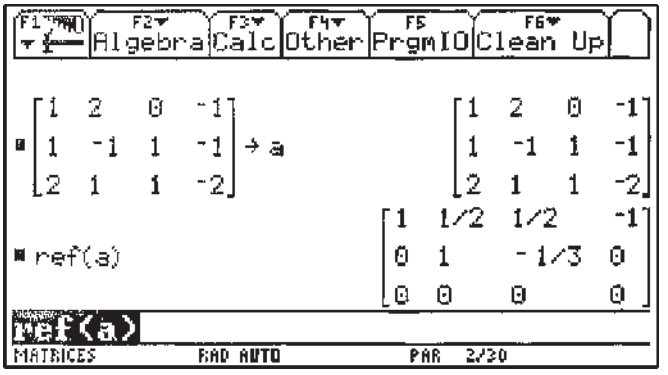
Doc. 5.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 24

Par la méthode du pivot de Gauss, on ne change pas le rang d'une matrice.

La TI ne possède pas de fonction donnant directement le rang d'une matrice. Il est facile de construire une fonction `rang` en comptant le nombre de lignes non nulles de `ref (A)` :




```
rang (a)
Func
Local n, p, i, j, nul
rowDim (a) ⟶ n
colDim (a) ⟶ p
ref (a) ⟶ a
n ⟶ i
true ⟶ nul
While nul and i > 0
   For j, 1, p
    If not (a[i,j] = 0) Then
     false ⟶ nul
    EndIf ⟶ nul
   EndFor
   i - 1 ⟶ i
EndWhile
If nul Then
    0
   Else
    i + 1
EndIf
EndFunc
```

Doc. 6.

Application 4

Détermination du rang d'une matrice

Déterminer le rang A la matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vous vérifierez que les opérations suivantes sur les lignes :

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

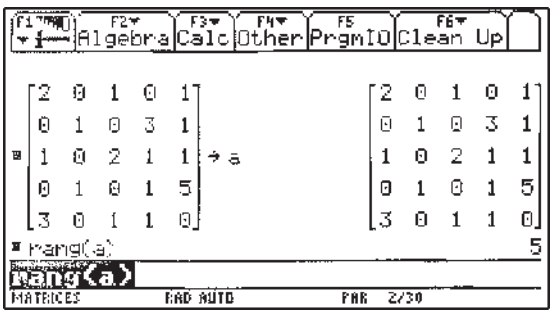
$L_5 \leftarrow L_5 - \frac{5}{3}L_3$

$L_5 \leftarrow L_5 + \frac{2}{3}L_4$

transforment A en :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

La matrice A est de rang 5.



Doc. 7.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.4. Inverse d'une matrice carrée inversible

Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Aucune colonne n'est nulle. Nous pouvons appliquer la méthode du pivot de Gauss. On obtient une matrice triangulaire supérieure à diagonale non nulle.

Procéder de la même manière en commençant par la dernière ligne, on peut annuler les termes du triangle strictement supérieur.

On obtient une matrice diagonale.

Maintenant, il ne reste plus qu'à diviser chaque ligne par le pivot correspondant, pour obtenir la matrice identité.

Chaque opération correspond à une multiplication à gauche par une matrice inversible.

Il existe k matrices inversibles $(T_1, \dots, T_k)$ telles que $T_k \dots T_1 A = \mathrm{I}_n$.

L'inverse de la matrice A est $T_k \dots T_1$.

Méthode pratique

Pour obtenir facilement $T_k \dots T_1$, remarquer que :

$$\forall\ i \in [\![1, k]\!] \quad T_i \dots T_1\ \mathrm{I}_n = T_i \dots T_1.$$

Il suffit d'effectuer en parallèle les mêmes opérations élémentaires sur A et sur I_n.

En même temps que l'on transforme A en I_n, on transforme I_n en A^{-1}.

Remarque

On obtient une méthode analogue en travaillant de la même manière sur les colonnes.

Dans ce cas, il existe l matrices inversibles $(T'_1, \dots, T'_l)$ telles que : $AT'_1 \dots T'_l = \mathrm{I}_n$. Puis $A^{-1} = T'_1 \dots T'_l$.

Rapport ENS, 2000

« ... La plupart des candidats a évoqué de faux arguments pour inverser le système linéaire (analogie avec une suite récurrente double, évocation du nombre de degrés de liberté du système, certains feignant même de croire que toute matrice carrée est inversible. »

Rapport CCP, 2000

« ...questions qui ont posé problème :
- calculer l'inverse d'une matrice A en résolvant le système linéaire $AX = Y$... »

On ne peut pas travailler alternativement sur les lignes et sur les colonnes.
Dans ce cas, il existe k matrices inversibles $(T_1, \dots, T_k)$ et l matrices inversibles $(T'_1, \dots, T'_l)$ telles que :

$$T_k \dots T_1 A\ T'_1 \dots T'_l = \mathrm{I}_n.$$

Alors $A^{-1} = T'_1 \dots T'_l\ T_k \dots T_1$.
Mais cette expression ne permet pas un calcul en parallèle sur A et I_n.

Application 5

Inverse d'une matrice

Montrer que la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5} L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Il n'y a pas de terme nul sur la diagonale de la première matrice. Le rang de A est 3. La matrice A est inversible.

Nous pouvons continuer.

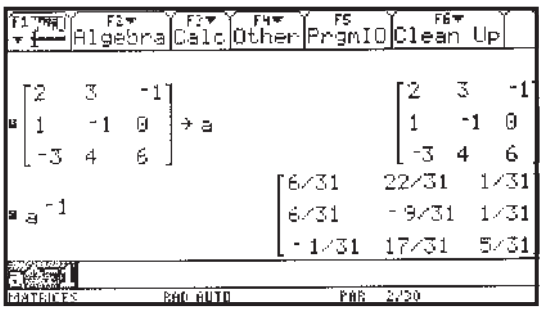
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$L_2 \leftarrow L_2+\frac{5}{31}L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{30}{31} & -\frac{45}{31} & \frac{5}{31} \\ -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse de A est $\begin{bmatrix} \frac{6}{31} & \frac{22}{31} & \frac{1}{31} \\ \frac{6}{31} & -\frac{9}{31} & \frac{1}{31} \\ -\frac{1}{31} & \frac{17}{31} & \frac{5}{31} \end{bmatrix}$.

$$L_1 \leftarrow L_1+\frac{1}{5}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{31} & \frac{22}{31} & \frac{1}{31} \\ \frac{30}{31} & -\frac{45}{31} & \frac{5}{31} \\ -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ L_3 \leftarrow \frac{5}{31} L_3 \end{cases} \begin{bmatrix} \frac{6}{31} & \frac{22}{31} & \frac{1}{31} \\ \frac{6}{31} & -\frac{9}{31} & \frac{1}{31} \\ -\frac{1}{31} & \frac{17}{31} & \frac{5}{31} \end{bmatrix}$$



Doc. 8.

5.5. Déterminant d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La méthode du pivot de Gauss nous donne le rang r de la matrice A.

Si $r < n$, le déterminant de A est 0.

Si $r = n$, la matrice obtenue est triangulaire supérieure et sa diagonale $(\alpha_1, .., \alpha_n)$ ne contient aucun scalaire nul.

Les opérations élémentaires effectuées sur les lignes correspondent à des produits à gauche par des matrices de la forme $P_{i,\,j}$ ou $R_{i,\,j}(\alpha)$ où $i \neq j$.

$$\text{Det } P_{i,j} = -1 \quad \text{et} \quad \text{Det } R_{i,j}(\alpha) = 1.$$

Soit p le nombre d'échanges de deux lignes de A.

Alors $\text{Det } A = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ la matrice de l'*application* 5.

Nous avons obtenu la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix}$ après un seul échange de deux lignes. $\text{Det } A = 31$.

Rapport CCP, 2000

« Le calcul des déterminants, en particulier à paramètres, semble une épreuve de force et nombre de candidats n'ont pas le courage de conclure. »

Rapport TPE, 2002

« Les déterminants sont souvent développés de manière grossière. Cela n'aide pas en général à leur factorisation. »

Rapport TPE, 1996

« Les déterminants donnent lieu aux problèmes habituels : règle de Sarrus utilisée à tort et à travers, difficulté pour factoriser, utilisation de combinaisons linéaires de lignes (ou colonnes) qui modifient le signe du résultat. »

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.6. Système de n équations linéaires à p inconnues

Soit $(a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ dans $\mathbb{K}^{np}$ et $b=(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ dans $\mathbb{K}^n$.

Nous allons étudier le système S de n équations linéaires d'inconnues $(x_1,\dots,x_p)$:

$$\forall\ i\in[\![1,n]\!]\quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j=b_i.$$

Soit u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A=(a_{i\ j})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ et r le rang de A.

Le rang de A est appelé le **rang du système** S.

Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, notons u_i la forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ de matrice $(a_{i\ j})_{j\in[\![1,p]\!]}$.

Le système S_0 : $\forall\ i\in[\![1,n]\!]\quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j=0$ est appelé **système homogène associé** au système S.

Le vecteur b est le **second membre** de S.

L'ensemble des solutions du système S_0 est $E=\operatorname{Ker}u=\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}u_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-r$.

Nous avons vu, dans le § 3.3, que $\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}u_j$ est l'intersection de r hyperplans de $\mathbb{K}^p$ associés à r formes linéaires indépendantes.

Le système S admet une solution si, et seulement si, le vecteur b appartient à l'image de u.

Un système S est dit **compatible** dans ce cas.

Dans le cas où b est dans $\operatorname{Im}u$, l'ensemble des solutions de S est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}u$. Il s'agit de l'intersection de r hyperplans affines associés à r formes affines indépendantes.

Si α est une solution de S, alors l'ensemble des solutions de S est $\alpha+E$, où E désigne l'ensemble des solutions de S_0.

Théorème 25

Soit S un système de n équations à p inconnues de rang r :

- si S n'est pas compatible, l'ensemble des solutions est vide ;
- si S est compatible, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $p-r$, de direction le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène associé S_0.

Si α est une solution de S, alors l'ensemble des solutions de S est $\alpha+E$, où E désigne l'ensemble des solutions de S_0.

L'espace affine des solutions est l'intersection de r hyperplans affines correspondant à des formes affines indépendantes.

Notons I une partie de $[\![1,\ n]\!]$, de cardinal r, telle que la famille des formes linéaires $(u_i)_{i\in I}$ soit libre. Soit J une partie de $[\![1,\ p]\!]$, de cardinal r, telle que les vecteurs colonnes de la matrice A soient linéairement indépendants.

Les inconnues d'indices j dans J sont les **inconnues principales**, les autres sont les **inconnues secondaires.**

Rapport CCP, 2001

« Les systèmes linéaires, même simples, posent une réelle difficulté. La structure des solutions n'est pas connue et de nombreux candidats n'ont pas l'impression qu'il s'agit là d'un problème d'algèbre linéaire. »

Rapport X, 2002

« On a noté des lacunes sur la résolution des systèmes linéaires : un système de deux équations à trois inconnues a posé des problèmes insurmontables à certains candidats. »

Rapport X, 1997

« On a trop souvent lu "on a $r+1$ relations pour $r+1$ coefficients, d'où l'existence et l'unicité", parfois agrémenté de la formule magique affirmée sans preuve mais avec autorité "le système est de Cramer". »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les équations d'indices i dans I sont les **équations principales,** les autres sont les **équations secondaires.**

Nous connaissons déjà la méthode du pivot de Gauss.

Vous effectuez simultanément les opérations élémentaires sur les lignes de A et sur les lignes du vecteur colonne b.

Les dernières lignes donnent les conditions de compatibilité.

Remarque

Lorsque $r = n = p$, l'application u est un isomorphisme.

$$\forall\ b \in \mathbb{K}^n \quad \exists\ !\ x \in \mathbb{K}^n \ \ u(x) = b.$$

On dit qu'il s'agit d'un **système de Cramer**.

La résolution du système homogène associé est équivalente au calcul de l'inverse d'une matrice.

L'étude précédente nous conduit à une deuxième méthode pratique.

Après avoir déterminé les équations principales, on peut exprimer de manière unique les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires (système de Cramer).

En remplaçant dans les équations secondaires, vous obtenez les $n - r$ conditions qui vous permettent de vérifier la compatibilité du système.

Théorème 26 : Théorème de Rouché-Fontené

Les solutions d'un système compatible sont celles de l'un quelconque de ses systèmes d'équations principales.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Soit S un système et S' un système d'équations principales associé à S.

Toute solution de S est solution de S' et les ensembles des solutions de ces deux systèmes sont deux sous-espaces affines de même dimension. Ils sont donc égaux.

Rapport TPE, 1994

« Il est difficile d'obtenir des candidats une résolution d'un système d'équations linéaires par des méthodes élémentaires de lignes et de colonnes et plus difficile encore d'obtenir un calcul d'inverse de matrice par le biais du système linéaire $Y = AX$. »

► *Pour s'entraîner : ex. 11.*

Application 6

Résolution d'un système d'équations linéaires

Déterminer, par deux méthodes, les réels a et b tels que le système S suivant soit compatible, puis le résoudre.

$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 7x + 5y + 2z = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Méthode des équations principales

Les équations $\begin{cases} 4x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$ sont des équations principales.

Les inconnues x et y sont des inconnues principales.

Nous exprimons x et y en fonction de z.

$$x = 8 - z \quad \text{et} \quad y = -9 + z.$$

Remplaçons ces valeurs dans les équations secondaires. Nous obtenons :

$$a = 11 \quad \text{et} \quad b = -1.$$

Si $a = 11$ et $b = -1$, l'ensemble des solutions est la droite affine $(8, -9, 0) + \mathbb{R}(-1, 1, 1)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 4x+3y+z=5 \\ 3x+2y+z=6 \\ 7x+5y+2z=a \\ x+y=b \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_4$

$$\begin{cases} x+y=b \\ 3x+2y+z=6 \\ 7x+5y+2z=a \\ 4x+3y+z=5 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$.
$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$.
$L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$.

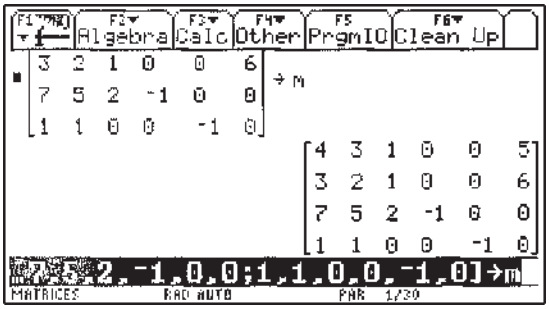
$$\begin{cases} x+y=b \\ -y+z=6-3b \\ -2y+2z=a-7b \\ -y+z=5-4b \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$.
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$.

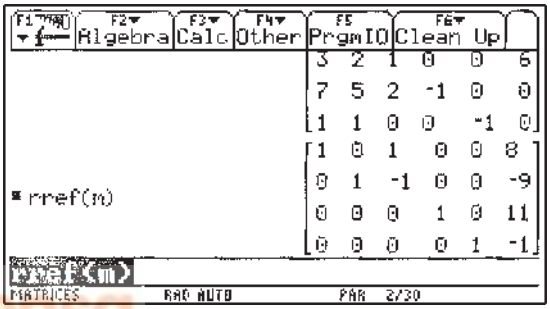
$$\begin{cases} x+y=b \\ -y+z=6-3b \\ 0=a-b-12 \\ 0=-1-b \end{cases}$$

Nous obtenons les conditions $a=11$ et $b=-1$.

Nous résolvons ensuite le système des deux premières équations en commençant par la dernière.



Doc. 9.



Doc. 10. *Il faut parfois ruser avec la calculatrice.*

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**un sous-espace H d'un espace vectoriel E est un hyperplan**, on peut montrer :
- qu'il existe une droite D supplémentaire de H ;
- que le sous-espace H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;
- si l'espace E est de dimension finie n, que la dimension de H est $n-1$.

● Pour trouver **une droite supplémentaire d'un hyperplan** H, il suffit de choisir un vecteur a dans $E \setminus H$. Dans ce cas : $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

● Pour montrer que **la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel** E de dimension n et que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E^*, duale de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, il suffit de montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,n]\!] \quad < u_i, e_j > = \delta_i^j .$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer que **la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de l'espace dual** E^* d'un espace vectoriel E de dimension n, il suffit de montrer qu'il existe une famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad < u_i, e_j > = \delta_i^j$$

Dans ce cas, la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E et la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est duale de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

● Soit E un espace vectoriel de dimension n.

• Un sous-espace de E est de dimension p si, et seulement s'il est l'intersection de $n - p$ hyperplans associés à des formes linéaires indépendantes.

• Tout sous-espace de dimension p est l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base B sont solutions d'un système de rang $n - p$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

• Réciproquement, l'ensemble des solutions d'un système de p équations de rang p est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - p$.

● Pour calculer **l'inverse d'une matrice A inversible**, on peut :

• résoudre le système $Y = A\,X$;

• appliquer la méthode de Gauss en parallèle sur les lignes de A et sur les lignes de la matrice identité I . En même temps que l'on transforme A en I , la matrice I est transformée en A^{-1} .

On peut également travailler sur les colonnes, mais on ne peut pas alterner les opérations sur les lignes et les opérations sur les colonnes.

• Calculer la matrice $\widetilde{A}$ transposée de la matrice des cofacteurs, puis utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$.

● Pour résoudre **un système de n équations linéaires à p inconnues**, on peut :

• utiliser une méthode du pivot de Gauss sur les lignes. Puis, s'il y à compatibilité, résoudre en commençant par les dernières équations ;

• déterminer les équations et les inconnues principales, puis exprimer, par la méthode de Cramer, les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithmique, TD 2

Décomposition *LU*

L'étude de cet algorithme et des résultats mathématiques nécessaires se trouvent dans le problème de concours *Centrale-Supelec PSI 2001 math II*. Sa solution est dans le livre d'exercices *H-Prépa Maths, 2de année*.

L'objectif mathématique

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver deux matrices L et U telles que :

- L soit triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale ;
- U soit triangulaire supérieure ;
- $A = LU$.

Les notations

• Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on note $A_k = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant k}}$ la matrice $k \times k$ extraite de A en supprimant dans A les lignes d'indices $k+1$ à n ainsi que les colonnes de mêmes indices.

Par exemple, pour $k = 1$, on obtient la matrice 1×1 : $A_1 = (a_{11})$, et pour $k = n$, $A_n = A$.

La fonction *Maple* effectuant ce travail est `submatrix(A,1..k,1..k)`

• L'échange de deux lignes ou de deux colonnes d'une matrice A est une opération que vous avez pratiquée en étudiant la méthode de Gauss.

La fonction *Maple* effectuant l'échange des lignes i et j de la matrice A est `swaprow(A,i,j)`

La fonction *Maple* effectuant l'échange des colonnes i et j de la matrice A est `swapcol(A,i,j)`

La condition d'existence d'une décomposition *LU*

La matrice A admet une décomposition LU si, et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \text{Det} A_k \neq 0.$$

Le calcul de L

On impose `L[i,i] :=1` et, pour `j>i, L[i,j] :=0`.

Pour `j<i`, on effectue la permutation des lignes `i` et `j` : `B :=swaprow(A,i,j)`

et on a la formule : `L[i,j] := det(submatrix(B,1..j,1..j))/det(submatrix(A,1..j,1..j))`

Le calcul de U

On impose, pour `j<i, U[i,j] :=0.`

Pour la première ligne `U[1,j] :=A[1,j]`

Sur la diagonale, pour `j` $\geqslant 2$ `U[j,j] := det(submatrix(A,1..j,1..j))/det(submatrix(A,1..j-1,1..j-1))`

Enfin, pour `j>i`, on effectue la permutation des colonnes `i` et `j` : `C :=swapcol(A,i,j)` et on a la formule :

`U[i,j] := det(submatrix(C,1..i,1..i))/det(submatrix(A,1..i-1,1..i-1))`

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec Maple

```
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> LU:=proc(A,n)
local i,j;
global L,U;
L:=matrix(n,n);U:=matrix(n,n);
  for i to n do
     L[i,1]:=A[i,1]/A[1,1];
     L[i,i]:=1;
     for j from i+1 to n do
       L[i,j]:=0;
     od;
  od;
   for i from 3 to n do
     for j from 2 to i-1 do
       L[i,j]:=det(submatrix(swaprow(A,i,j),1..j,1..j))
       /det(submatrix(A,1..j,1..j));
     od;
   od;
   for j to n do
     U[1,j]:=A[1,j];
     for i from j+1 to n do
       U[i,j]:=0;
     od;
   od;
   for j from 2 to n do
     U[j,j]:=det(submatrix(A,1..j,1..j))/det(submatrix(A,1..j-1,1..j-1));
     for i from 2 to j-1 do
       U[i,j]:=det(submatrix(swapcol(A,i,j),1..i,1..i))
       /det(submatrix(A,1..i-1,1..i-1));
     od;
   od;
end;
```

Avec Maple :

```
> A:=matrix(4,4,[1,1,3,1,1,2,1,3,0,1,
  -1,2,1,-1,2,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LU(A,4):evalm(L);evalm(U);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithmique, TD 3

Matrices magiques

(D'après Centrale PSI, 1997)

Dans ce texte, n est un entier strictement supérieur à 1. Une matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n[\mathbb{K}]$ est dite magique si les $2n$ sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

obtenues pour i et j variant de 1 à n sont égales et égale à :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1}.$$

On propose un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique d'ordre n impair quelconque et dont les cœfficients sont entiers $1, 2, 3, ..., n^2$.

On place l'entier n au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $I = i-1$ (sauf si $i = 1$, auquel cas on pose $I = n$) et $J = j+1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $J = 1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la $I^{\text{ième}}$ ligne et $J^{\text{ième}}$ colonne, on y place $k+1$;
- si cet emplacement est pris, on pose $I = i+1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k+1$ en $I^{\text{ième}}$ ligne et $J^{\text{ième}}$ colonne.

1) Pour $n = 5$, construire une matrice magique utilisant l'algorithme précédent.

2) La constante impaire n étant supposée prédéfinie, écrire un programme qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique d'ordre n.

Avec Maple :

```
> restart:with (linalg):
Warning new definition for norm
Warning new definition for trace
> Magique:=proc(n)
  local i,j,II,J,k;
  global A;
  A:=matrix(n,n,0):
  A[1,(n+1)/2]string:=1;i:=1;j:=(n+1)/2;
  for k from 2 to n^2 do
    if i=1 then II:=n else II:=i-1;fi;
    if j=1 then J:=n else J:=j+1;fi;
    if A[II,J]=0 then A[II,J]:=k else
      if i=n then II:=1 else II:=i+1 fi;
      J:=j;A[II,J]:=k;fi;
    i:=II;j:=J;
  od;evalm(A);
  end:
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
> Magique(5);
```

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> Magique(7);
```

$$\begin{bmatrix} 30 & 39 & 48 & 1 & 10 & 19 & 28 \\ 38 & 47 & 7 & 9 & 18 & 27 & 29 \\ 46 & 6 & 8 & 17 & 26 & 35 & 37 \\ 5 & 14 & 16 & 25 & 34 & 36 & 45 \\ 13 & 15 & 24 & 33 & 42 & 44 & 4 \\ 21 & 23 & 32 & 41 & 43 & 3 & 12 \\ 22 & 31 & 40 & 49 & 2 & 11 & 20 \end{bmatrix}$$

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

Méthode des différences finies

ÉNONCÉ

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E défini, pour tout P de E par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, nous définissons u_k dans E^*, par : $u_k(P) = \Delta^k(P)(0)$.

1) Montrer que $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de E^* et trouver la base préduale.

Donner l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

2) Montrer que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $\widetilde{P}(0) = 0$.

Donner l'expression de P à l'aide des composantes de Q dans la base précédente.

3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \widetilde{Q}(k)$ en fonction de $\widetilde{P}$.

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

CONSEILS

Trouver une famille $(P_0, ..., P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\Delta(P_k) = P_{k-1} \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 1.$$

2) Étudier la surjectivité et l'injectivité de Δ.

3) Exprimer $\widetilde{Q}(k)$ à l'aide de $\Delta(P)$.

SOLUTION

1) Remarquons tout d'abord que $\deg \Delta(P) = (\deg P) - 1$, pour tout polynôme P de degré supérieur à 1.

Soit k un entier naturel non nul.

Par conséquent, si $\deg P = k$, alors $\Delta^{k+1}(P) = 0$.

Soit $P_0 = 1$ et, pour k dans $[\![1, n]\!]$,

$$P_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

Vérifier que :

$$\Delta(P_k) = P_{k-1} \quad \text{et} \quad \Delta(P_0) = 0.$$

Nous obtenons :

$$\forall l \in [\![0, n]\!] \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad \Delta^l(P_k) = \begin{cases} P_{k-l} & \text{si} \quad l \leqslant k \\ 0 & \text{si} \quad l > k \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\forall l \in [\![0, n]\!] \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad \Delta^l(P_k)(0) = \delta_k^l.$$

D'après le *théorème* 10, la famille $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de E^* et la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, préduale de la base $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Le *corollaire* 9.1 donne l'expression d'un polynôme P dans cette base :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Étudier la surjectivité et l'injectivité de Δ.

2) L'image par l'application linéaire Δ de la base $(P_0, ..., P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $(0, P_0, ..., P_{n-1})$.

Par conséquent, $\text{Im}\Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\text{Ker}\,\Delta = \mathbb{K}_0[X]$.

$$\forall\, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \qquad \exists\, R \in \mathbb{K}_n[X] \qquad \Delta(R) = Q.$$

Le polynôme R n'est pas unique. Mais $\mathbb{K}_n[X] = X\mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}_0[X]$.

Par conséquent :

$$\forall\, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \exists\, !P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \Delta(P) = Q \quad \text{et} \quad \widetilde{P}(0) = 0.$$

Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=1}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k$.

Or $\Delta^0(P)(0) = P(0) = 0$.

Donc, $P = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^{k+1}(P)(0) P_{k+1}$.

Puis, par définition de Q, l'expression du polynôme P est :

$P = \sum_{k=1}^{n} \Delta^{k-1}(Q)(0) P_k$.

Exprimer $\widetilde{Q}(k)$ à l'aide de $\Delta(P)$.

3) • $\forall\, k \in [\![0, n]\!] \quad \widetilde{Q}(k) = \Delta(P)(k) = \widetilde{P}(k+1) - \widetilde{P}(k)$

$$\sum_{k=0}^{n} \widetilde{Q}(k) = \widetilde{P}(n+1) - \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(n+1).$$

Mensa

• Calculons $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Soit $Q = X^2$.

Recherchons le polynôme P tel que $\Delta(P) = Q$ et $\widetilde{P}(0) = 0$.

D'après la question **2)**, ce polynôme P vérifie :

$$P = \Delta^0(Q)(0)P_1 + \Delta^1(Q)(0)P_2 + \Delta^2(Q)(0)P_3$$

$$P = P_2 + 2P_3 = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \widetilde{P}(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

• Pour le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^3$, procéder de la même manière.

En considérant $Q = X^3$, on obtiendra :

$$P = \frac{X^2(X-1)^2}{4}, \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Montrer que $E^* \times F^*$ et $(E \times F)^*$ sont isomorphes.

2 Soit u et v deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que :

$$\forall x \in E \quad u(x)v(x) = 0.$$

Montrer que $u = 0^*$ ou $v = 0^*$.

3 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation d'inconnue X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X + \mathrm{Tr}(X)A = B.$$

4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur.

Quelle est la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ défini, pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, par :

$$\varphi(u) = u \circ p + p \circ u.$$

5 Soit E un espace vectoriel de dimension $p \geqslant 2$ sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier non nul quelconque et une famille $(F_1, ..., F_n)$ de n sous-espaces vectoriels de E distincts de E.

Montrer que la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est différente de E.

6 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.

Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on définit u_k de E dans $\mathbb{K}$ en posant, pour tout P de $\mathbb{K}_n[X]$, $u_k(P) = \widetilde{P}^{(k)}(0)$.

1) Montrer que $(u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de E^* et déterminer la base préduale.

2) Soit v définie sur E, pour tout P de E, par :

$$v(P) = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Décomposer v dans la base $(u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

7 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel :
$\{ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ A\,B\,A = 0 \}$.

8 Montrer que toute matrice de rang r est la somme de r matrices de rang 1.

9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ et u l'application linéaire canoniquement associée à A.

Discuter suivant les valeurs des réels a, b et c, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le rang, le déterminant, l'image et le noyau de u.

10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

où a et b désignent deux complexes.

11 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On définit les formes linéaires u_1, u_2, u_3 et u_4 par :

$$\forall P \in E \quad u_1(P) = \widetilde{P}(0) \quad u_2(P) = \widetilde{P}'(0)$$
$$u_3(P) = \widetilde{P}(1) \quad u_4(P) = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de E^*. Déterminer la base préduale.

12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour toute partie A de E on définit :

$$A^\perp = \{u \in E^* / \forall x \in A \quad u(x) = 0\}.$$

1) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace de E^*.

2) Soit deux sous-espaces supplémentaires F et G de E.

Montrer que $F^\perp \oplus G^\perp = E^*$.

13 ** *D'après CAPES, 1999.*

Pour toute matrice $M = [m_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ nous définissons :

$$l_i(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}, c_i(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}, \mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}.$$

et

$$D(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n+1-k}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La lettre K désigne un réel. On définit les ensembles :

$$L_K = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,;\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad l_i(M) = K\}$$
$$C_K = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,;\forall\, j \in [\![1,n]\!] \quad c_j(M) = K\}$$
$$L = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} L_K \quad \text{et} \quad C = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} C_K.$$

Nous dirons que la matrice M est pseudo-magique s'il existe un réel K appelé somme magique tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$

Nous dirons qu'une matrice pseudo-magique M de somme magique K est quasi-magique si $\mathrm{Tr}(M) = K$.

Nous dirons qu'une matrice quasi-magique M est magique si $D(M) = K$.

1) Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices

$$(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}.$$

Préciser la dimension de L_0.

2) Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M \in L_K \Leftrightarrow M - K\mathrm{I}_n \in L_0.$$

En déduire que L est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

3) Montrer que, quelle que soit la matrice :

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n})$$

appartenant à L_0, M appartient à C_0 si, et seulement si :

$$\forall\, j \in [\![1,n-1]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0.$$

En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$.

4) Montrer que, quelle que soit la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si, et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

En déduire la dimension de $L \cap C$.

5) Soit $\mathfrak{Q}$ l'ensemble des matrices quasi-magiques réelles d'ordre n et $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices magiques réelles d'ordre n. Vérifier que $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{M}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser leurs dimensions.

14 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le rang de $\widetilde{A}$ transposée de la matrice des cofacteurs.

15 Soit P une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = P\,M\,P^{-1}.$$

Calculer le déterminant et la trace de f.

16 ** Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, et D dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

On suppose que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, M = n$.

Montrer que $D = C\,A^{-1}\,B$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Sous-espaces stables, éléments propres

19

Introduction

Vers 1762, Lagrange étudie un système différentiel linéaire :

$$\forall\ j \in [\![1,n]\!] \quad x_j'' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k.$$

Il recherche une solution suivant la méthode d'Euler de la forme : $y_j\, e^{\lambda t}$ *et aboutit au système :*

$$\lambda^2 y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k.$$

λ^2 doit être une « valeur propre » de la matrice (a_{ij}).

L'idée générale de « valeur propre » sera développée vers 1836 par Sturm et Liouville. La théorie des matrices est mise en place par Cayley dans son mémoire de 1858. On y trouve le célèbre théorème de Cayley-Hamilton. Laguerre développe une théorie analogue en 1867 sans connaître la théorie de Cayley.

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $X - \lambda$. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux polynômes d'endomorphisme de la forme $u - \lambda I$ et à leurs noyaux.

Un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(u - \lambda I)$ engendre une droite stable par u.

Lorsqu'un espace est décomposé en une somme directe de sous-espaces stables par un endomorphisme, nous verrons que la matrice de cet endomorphisme est diagonale par blocs.

OBJECTIFS

- Définition et propriétés des sous-espaces stables par un endomorphisme.
- Applications à l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des propriétés des sous-algèbres engendrées par un élément.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme.
- Théorème de décomposition des noyaux.
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.
- Le théorème de Cayley-Hamilton.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Sous-espaces stables par un endomorphisme

1.1. Définitions et premiers exemples

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et u dans $\mathcal{L}(E)$.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u lorsque $u(F) \subset F$.

Pourquoi s'intéresse-t-on aux sous-espaces stables ?

Quand un sous-espace F est stable par u, la restriction $u_{|F}$ de u à F est alors une application linéaire à valeurs dans F. Il s'agit donc d'un endomorphisme de F. On l'appelle **endomorphisme induit** par u sur F.

Lorsque F n'est pas un sous-espace stable par u, l'application $u_{|F}$ appelée « application linéaire induite par u sur F » n'est pas un endomorphisme.

Rapport Centrale, 1997

« La plupart des candidats confondent une application linéaire induite et la restriction à un sous-espace stable. »

Théorème 1

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Démonstration

• Montrons que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

Soit x dans $\operatorname{Ker} u$.

Les endomorphismes u et v commutent. Donc :

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E.$$

• Montrons que $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

Soit y quelconque dans $\operatorname{Im} u$. Il existe x dans E tel que $y = u(x)$:

$$v(y) = v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big).$$

Corollaire 1.1

Soit u un endomorphisme de E. Alors les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

Application 1

Caractérisation des hyperplans stables

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $(e_1, ..., e_n)$.

Notons v l'endomorphisme de E^* de matrice ${}^tA$ dans la base $(e_1^*, ..., e_n^*)$ duale de la base $(e_1, ..., e_n)$.

Pour tout hyperplan H de E, il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Soit D la droite de E^* engendrée par φ.

Montrer que H est stable par u si, et seulement si, D est stable par v.

• Supposons l'hyperplan H stable par u. Montrons que la droite D est stable par v.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notons X la matrice colonne des composantes d'un vecteur x de E dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et L la matrice ligne de l'application φ dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ de E et 1 de $\mathbb{K}$. La matrice ${}^tL$ est alors la matrice des coordonnées de φ dans la base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

$$x \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow LX = 0.$$

L'hyperplan H est stable par u. Par conséquent :

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad LX = 0 \Rightarrow LAX = 0.$$

Soit ψ la forme linéaire sur E de matrice LA.

Nous obtenons $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$.

– Si $\psi \neq 0^*$, alors $\operatorname{Ker}\psi$ est un hyperplan et $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

Il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\,\varphi$.

– Si $\psi = 0^*$, alors $\psi = \lambda\,\varphi$ avec $\lambda = 0$.

Dans les deux cas, $LA = \lambda\,L$.

Donc ${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$. C'est-à-dire : $v(\varphi) = \lambda\,\varphi$.

La droite D est engendrée par φ. Elle est stable par v.

• Réciproquement, supposons la droite D stable par v.

Il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $v(\varphi) = \lambda\,\varphi$.

Nous en déduisons : $LA = \lambda\,L$.

Si $LX = 0$, alors $LAX = 0$.

L'hyperplan H est stable par u.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.2. Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

Étudions maintenant les matrices correspondantes dans le cas où E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $B_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Le *théorème de la base incomplète* nous permet de compléter cette base en une base $B = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E.

On dit que B est une base **adaptée** à F. .

Théorème 2

Soit $B = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ une base de E adaptée au sous-espace vectoriel F de E et u un endomorphisme de E. Alors :

• le sous-espace F est stable par u si, et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\ \ u(e_k) \in F\ ;$$

• le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans la base B est de la forme $\begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix}$ avec M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, N dans $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, P dans $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et 0 matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, M est la matrice de $u_{|F}$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Remarque

Soit B et B' deux éléments de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, C et C' deux éléments de $\mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$ et D et D' deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit les matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Alors : $$AA' = \begin{pmatrix} BB' & BC' + CD' \\ 0 & DD' \end{pmatrix}$$

Théorème 3

Soit M dans $\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, N dans $\mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, P dans $\mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et 0 la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{n-p,p}(K)$.

Alors le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est donné par :

$$\text{Det}\begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix} = \text{Det}(M)\text{Det}(P).$$

Démonstration

Soit $B = (e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$ une base de E, u l'endomorphisme de E associé à cette matrice dans la base B, F le sous-espace $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et G le sous-espace $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Le sous-espace F est stable par u et $v = u_{|F}$ appartient à $\mathfrak{L}(F)$.

Le sous-espace G n'est pas stable par u. Soit p la projection sur G parallèlement à F, alors $w = p \circ u_{|G}$ appartient à $\mathfrak{L}(G)$.

Avec ces notations, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Det}\begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix} = \text{Det}_B(u) &= \text{Det}_B\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right) \\ &= \text{Det}_B\left(v(e_1), \ldots, v(e_p), u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n)\right). \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le résultat fondamental sur les formes p-linéaires alternées sur un espace de dimension p : elles sont toutes proportionnelles, en particulier elles sont toutes proportionnelles à $\text{Det}_{(e_1,\ldots,e_p)}$ qui est une forme p-linéaire alternée non nulle.

Soit $f : \begin{pmatrix} F^p & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \text{Det}_B\left(x_1, \ldots, x_p, u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n)\right) \end{pmatrix}$.

C'est une forme p-linéaire alternée sur F, espace vectoriel de dimension p. L'application f est proportionnelle à $\text{Det}_{(e_1,\ldots,e_p)}$.

$$f = f(e_1, \ldots, e_p) \quad \text{Det}_{(e_1,\ldots,e_p)}.$$

$$f\left(v(e_1), \ldots, v(e_p)\right) = f(e_1, \ldots, e_p) \quad \text{Det}_{(e_1,\ldots,e_p)}\left(v(e_1), \ldots, v(e_p)\right).$$

D'après la définition du déterminant d'un endomorphisme :

$$f\left(v(e_1), \ldots, v(e_p)\right) = f(e_1, \ldots, e_p)\ \text{Det}\ v.$$

Mais la matrice de v dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ est M, en remplaçant Det v par Det M nous obtenons :

$$\text{Det}_B(u) = \text{Det}\ M\ \text{Det}_B(e_1, \ldots, e_p, u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n)).$$

Par construction de w nous pouvons écrire :

$$\forall k \in \{p+1, \ldots, n\} \quad u(e_k) - w(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p).$$

Or on ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.

$$\text{Det}_B(e_1, \ldots, e_p, u(e_{p+1}), \ldots, u(\text{e}_\text{n})) = \text{Det}_B(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}), \ldots, w(\text{e}_\text{n})).$$

Nous pouvons faire un travail analogue avec l'application g définie par :

$$g : \begin{pmatrix} G^{n-p} & \to & \mathbb{K} \\ (y_{p+11}, \ldots, y_n) & \mapsto & \text{Det}_B(e_1, \ldots, e_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Remarque

Retrouver le résultat du *théorème* 3 en remarquant :

$$\begin{bmatrix} M & N \\ O & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & N \\ O & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

et en comparant les déterminants.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous obtenons de la même manière :

$$g\ (w(e_{p+1}), \ldots, w(e_n)) = (\text{Det } w)\ g(e_{p+1}, \ldots, e_n).$$

La matrice de w dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est P et finalement :

$$\text{Det}_B(u) = \text{Det}(M)\ \text{Det}(P)\ \text{Det}_B\ (e_1, \ldots, e_n).$$

De plus, par définition de Det_B, nous avons $\text{Det}_B(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

$$\text{Det}_B(u) = \text{Det}(M)\ \text{Det}(P).$$

Théorème 4

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et u un endomorphisme de E. La matrice de u dans la base B est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_i).$$

1.3. Matrice d'un endomorphisme lorsque *E* est somme directe de sous-espaces stables

Théorème 5

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit u un endomorphisme de E et $(B_1, \ldots, B_p)$ une base de E adaptée à la somme directe. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, notons k_i la dimension de E_i.

Alors, les sous-espaces E_i sont stables par u, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$ si, et seulement s'il existe p matrices M_i dans $\mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{K})$ pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, telles que la matrice de u dans la base $(B_1, \ldots, B_p)$ soit de la forme :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & M_p \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, la matrice M_i est la matrice de la restriction de u à E_i.

Corollaire 5.1

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, soit k_i dans $\mathbb{N}^*$ et M_i dans $\mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{K})$.

Le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & M_p \end{bmatrix}$ est $\prod_{i=1}^{p} \text{Det} M_i$.

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence à partir du résultat du *théorème* 4.

Rapport X, 2003

« La manipulation hasardeuse de produits de matrices par blocs conduit parfois à des expressions qui n'ont tout simplement pas de sens. »

Rapport CCP, 1997

« L'utilisation des polynômes d'endomorphisme est en général bien maîtrisée. On ne peut pas en dire autant des notions de sous-espace stable et d'endomorphisme induit, beaucoup plus mal comprises, et pourtant davantage mises en avant dans les nouveaux programmes. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 5.2

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et u un endomorphisme de E. La matrice de u dans la base B est diagonale si, et seulement si :

- chaque sous-espace $E_i = \text{Vect}(e_i)$ est stable par u ;
- l'endomorphisme induit par u sur E_i est une homothétie vectorielle.

Théorème 6

Soit $B = (e_1 \dots e_n)$ une base de E. Pour tout k de $[\![1, p]\!]$, on note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Un endomorphisme u de E admet dans la base B une matrice triangulaire supérieure si, et seulement si, les sous-espaces F_k sont stables par u.

1.4. Polynômes d'endomorphismes

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Encore cette année, les polynômes d'endomorphisme ont donné lieu à de nombreux non-sens. »

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non réduit à $\{ 0_E \}$ et u fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

On définit par récurrence les puissances de u en posant :

$$u^\circ = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{K} \quad u^{n+1} = u^n \circ u.$$

Si P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ on définit l'élément $P(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ en écrivant :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i.$$

L'application θ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $(\theta : P \longrightarrow P(u))$ est un morphisme d'algèbres.

$\text{Im}\theta = \mathbb{K}[u] = \{P(u) ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, cette sous-algèbre est commutative car :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad P(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = P(u).$$

L'application θ est en particulier un morphisme d'anneaux. Donc, l'ensemble $\text{Ker}\,\theta = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il est principal.

Lorsque $\text{Ker}\,\theta \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, il existe un unique polynôme unitaire Π_u tel que $\text{Ker}\,\theta$ soit engendré par Π_u. Π_u est appelé le **polynôme minimal** de u.

Théorème 7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E.

- L'endomorphisme u possède un polynôme minimal Π_u si, et seulement si, la sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie.
- Si n est la dimension de $\mathbb{K}[u]$ alors $\deg \Pi_u$ et $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 8

Tout endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme minimal :

$$\exists \Pi_u \in \mathbb{K}[X] \quad \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\} = \Pi_u \,\mathbb{K}[X].$$

Exemples

- $u = \lambda \mathrm{Id}_E$

$X - \lambda$ est le polynôme minimal.

- u rotation du plan vectoriel euclidien orienté d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$u^2 = -\mathrm{Id}_E$ donc $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de u. Il est de degré minimal car $X + \mathrm{i}$ et $X - \mathrm{i}$ n'annulent pas u.

Le polynôme minimal de u est $X^2 + 1$.

Corollaire 8.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace stable par u.

Alors le polynôme minimal de v divise celui de u.

Démonstration

Le polynôme Π_u est annulateur de v.

Mensa ACADEMY

Théorème 9

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent et les sous-espaces $\mathrm{Ker}\, P(u)$ et $\mathrm{Im} P(u)$ sont stables par u, par $P(u)$ et par $Q(u)$.

Démonstration

C'est une conséquence du *théorème* 1 car $u, P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Marius Sophus Lie *(1842-1899). Ce mathématicien norvégien effectua des travaux fondamentaux sur la théorie des groupes et ses applications à l'analyse et à la géométrie.*

Application 2

Polynôme minimal et crochet de Lie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non réduit à $\{0_E\}$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

$[u, v] = u \circ v - v \circ u$ *est appelé crochet de Lie.*

1) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u \circ v^n - v^n \circ u = n v^{n-1}.$$

2) *Montrer que :*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad u \circ P(v) - P(v) \circ u = P'(v).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) *En déduire que* u *et* v *n'admettent pas de polynôme minimal et que* E *n'est pas de dimension finie. Retrouver ce résultat en utilisant l'application trace.*

4) *Montrer qu'il n'existe aucun polynôme non constant* P *tel que* $P(u)$ *ou* $P(v)$ *soit de rang fini.*

1) Éffectuons une récurrence sur n.

Pour $n = 0$, l'endomorphisme $u\ v^0 - v^0 u$ est nul.

Pour $n = 1$, nous avons $uv - vu = \mathrm{Id}_E$.

Supposons que :

$$uv^n - v^n u = nv^{n-1}$$

pour un entier n non nul.

$$\begin{aligned} uv^{n+1} &= (uv^n)v = (v^n u + nv^{n-1})v \\ &= v^n uv + nv^n \\ &= v^n(vu + \mathrm{Id}_E) + nv^n = v^{n+1}u + (n+1)v^n. \end{aligned}$$

L'égalité est prouvée au rang $n+1$.

2) L'application θ :

$$\big(P \mapsto uP(v) - P(v)u - P'(v)\big)$$

est linéaire.

D'après la question **1)**, l'image de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ par l'application θ est l'endomorphisme nul.

L'application θ est l'application nulle.

3) Montrons par l'absurde que v n'admet pas de polynôme minimal.

Si Π_v est le polynôme minimal, alors Π'_v est un polynôme annulateur de v d'après la question **2)**.

Ceci contredit la définition du polynôme minimal, puisque $\deg \Pi'_v < \deg \Pi_v$.

On remarque : $(-v)\,u - u\,(-v) = \mathrm{Id}_E$.

Le résultat précédent appliqué à $-v$ et à u montre que l'endomorphisme u n'admet pas de polynôme minimal.

En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme minimal, ce n'est pas le cas de u ni de v.

S'il existe u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$uv - vu = \mathrm{Id}_E,$$

alors l'espace vectoriel E est de dimension infinie.

Si la dimension de E était finie, nous aurions :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Tr}\,(uv - vu) = 0.$$

Ce qui contredit l'existence de u et de v.

4) Par l'absurde, s'il existe un polynôme P tel que $P(u)$ soit de rang fini, montrons que $P(u)$ admet un polynôme minimal.

Si $P(u) = 0$, alors u admet un polynôme minimal.

Supposons maintenant $P(u)$ non nul.

Le sous-espace $\mathrm{Im}P(u)$ est stable par u.

La restriction w de u à $\mathrm{Im}P(u)$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}P(u)$.

L'espace vectoriel $\mathrm{Im}P(u)$ est de dimension finie. L'endomorphisme w admet un polynôme minimal π. Alors :

$$\forall\ x \in E \qquad \pi(u)(P(u)(x)) = 0_E.$$

Le polynôme P est non nul puisque $P(u) \neq 0$.

Le polynôme $\pi\ P$ est un polynôme non nul annulateur de u. L'application u admet un polynôme minimal. Ceci contredit le résultat de la question **3)**.

Par conséquent, il n'existe pas de polynôme P non constant tel que $P(u)$ soit de rang fini.

► ***Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.***

1.5. Le théorème de décomposition des noyaux

Théorème 10

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $D = A \wedge B$ leur PGCD.

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Alors :

$$\mathrm{Ker}\ A(u) \cap \mathrm{Ker}\ B(u) = \mathrm{Ker}\ D(u).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

• Montrons l'inclusion : $\text{Ker } D(u) \subset \text{Ker } A(u) \cap \text{Ker } B(u)$.

Soit x dans $\text{Ker } D(u)$: $D(u)(x) = 0_E$.

D divise A donc il existe un polynôme R tel que $A = RD$.

$$A(u)(x) = R(u)[D(u)(x)] = R(u)(0_E) = 0_E.$$

Une démonstration analogue donne :

$$\text{Ker } D(u) \subset \text{Ker } B(u).$$

• Montrons la deuxième inclusion : $\text{Ker } A(u) \cap \text{Ker } B(u) \subset \text{Ker } D(u)$

Le *théorème de Bézout* assure l'existence de deux polynômes P et Q tels que :

$$AP + BQ = D.$$

Soit x quelconque dans $\text{Ker } A(u) \cap \text{Ker } B(u)$.

Alors :

$$A(u)(x) = 0_E \quad \text{et} \quad B(u)(x) = 0_E.$$

$$D(u)(x) = P(u)(A(u)(x)) + Q(u)(B(u)(x)) = P(u)(0_E) + Q(u)(0_E) = 0_E.$$

Par conséquent, x appartient à $\text{Ker } D(u)$.

Théorème 11 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Alors :

$$\text{Ker } A(u) \oplus \text{Ker } B(u) = \text{Ker } AB(u).$$

Démonstration

Dans ce cas, $D = 1$.

Par conséquent : $\text{Ker } A(u) \cap \text{Ker } B(u) = \text{Ker Id}_E = \{0_E\}$

Montrons :

$$\text{Ker } A(u) + \text{Ker } B(u) = \text{Ker } AB(u).$$

• Montrons tout d'abord l'inclusion : $\text{Ker } A(u) + \text{Ker } B(u) \subset \text{Ker } AB(u)$.

A divise AB donc $\text{Ker } A(u) \subset \text{Ker } AB(u)$. De même : $\text{Ker } B(u) \subset \text{Ker } AB(u)$ et, finalement :

$$\text{Ker } A(u) + \text{Ker } B(u) \subset \text{Ker } AB(u).$$

• Montrons la deuxième inclusion : $\text{Ker } AB(u) \subset \text{Ker } A(u) + \text{Ker } B(u)$.

Le *théorème de Bézout* assure l'existence de deux polynômes P et Q tels que : $AP+BQ = 1$.

Soit x dans $\text{Ker } AB(u)$.

$$\text{Id}(x) = P(u)\big(A(u)(x)\big) + Q(u)\big(B(u)(x)\big).$$

Soit $y = P(u)\big(A(u)(x)\big)$. Montrons que y appartient à $\text{Ker } B(u)$.

$$B(u)(y) = B(u)\big[P(u)\big(A(u)(x)\big)\big] = P(u)A(u)\big(B(u)(x)\big) = P(u)\big(AB(u)(x)\big).$$

Or $x \in \text{Ker } AB(u)$, le vecteur $AB(u)(x)$ est nul.

Notons z le vecteur $Q(u)\big(B(u)(x)\big)$. Il appartient à $\text{Ker } A(u)$.

La décomposition $x = y + z$ convient.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

La méthode utilisée au cours de la démonstration pour construire y et z permet de déterminer les projecteurs associés à la décomposition en somme directe.

Rapport Centrale, 1997

« Si les candidats citent abondamment le théorème de décomposition des noyaux, ils ignorent souvent l'algorithme de Bézout qui permet de construire les projecteurs associés à la décomposition. »

Corollaire 11.1

Soit $A_1, \ldots, A_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Alors :

$$\text{Ker } A_1 \ldots A_p(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } A_i(u).$$

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur p.

Pour $p = 1$ c'est immédiat. Pour $p = 2$ c'est le *théorème* 11.

On suppose le résultat démontré au rang p. Soit $A_1, \ldots, A_{p+1}$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.

Les polynômes sont premiers entre eux deux à deux. Alors le *théorème de Gauss* assure que A_{p+1} et $B = \prod_{i=1}^{p} A_i$ sont premiers entre eux. Appliquons le *théorème* 11 à A_{p+1} et à B, nous obtenons :

$$\text{Ker } A_{p+1}(u) \oplus \text{Ker } B(u) = \text{Ker } A_{p+1}B(u).$$

La propriété est vraie au rang p, donc $\text{Ker } B(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } A_i(u)$.

En remplaçant dans l'égalité précédente, nous obtenons :

$$\text{Ker } A_{p+1}(u) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } A_i(u)\right) = \text{Ker } A_{p+1}B(u).$$

Finalement :

$$\bigoplus_{i=1}^{p+1} \text{Ker } A_i(u) = \text{Ker} \prod_{i=1}^{p+1} A_i(u).$$

La propriété est donc démontrée pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

Supposons la dimension de E finie. L'endomorphisme u de E admet alors un polynôme minimal Π_u.

Ce polynôme Π_u se décompose en facteurs premiers sous la forme $\Pi_u = \prod_{i=1}^{p} P_i^{\alpha_i}$, les P_i étant premiers. Alors : $\Pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et, par conséquent, $\text{Ker } \Pi_u(u) = E$. Nous obtenons ainsi une décomposition en somme directe de E :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$$

constituée de sous-espaces stables par u.

Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de u est diagonale par blocs.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4 et 5.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 Éléments propres d'un endomorphisme

2.1. Définitions

Théorème 12

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$;
- $\text{Ker}\ (u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$;
- $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

Dans ces conditions, on dit que λ est une **valeur propre** de u et que x est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

Théorème 13

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E et x un vecteur non nul de E. La droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

L'ensemble des valeurs propres de u est le **spectre** de u noté $\text{Sp}(u)$. Pour λ dans $\text{Sp}(u)$, le sous-espace :

$$\text{Ker}\ (u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \ / \ u(x) = \lambda x\}$$

est appelé **sous-espace propre relatif à** λ. Nous le noterons $E_\lambda(u)$ ou seulement E_λ, s'il n'y a pas de risque de confusion sur l'endomorphisme considéré.

Exemples

■ Pour l'homothétie $u = \lambda \text{Id}_E$:

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda\} \quad \text{et} \quad E_\lambda(u) = E.$$

■ Étudions la rotation u d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ du plan vectoriel euclidien orienté.

Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, soit x un vecteur propre associé.

Nous avons $u(x) \cdot x = 0$. Donc $\lambda \ \| x \ \|^2 = 0$.

Or, x est non nul. Par conséquent, λ est nul.

Réciproquement, 0 est-il valeur propre de u ?

L'application u est un isomorphisme : $\text{Ker}\ u = \{0_E\}$

Donc 0 n'est pas une valeur propre de u : $\text{Sp}(u) = \varnothing$.

■ Étudions la dérivation D sur $\mathbb{K}[X]$.

Le scalaire λ appartient à $\text{Sp}(D)$ si, et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que $P' = \lambda P$. Or :

$$\deg P' < \deg P \quad \text{et} \quad \deg \lambda P = \deg P \quad \text{si} \quad \lambda \neq 0.$$

Donc $\lambda = 0$. Le polynôme P est constant.

$\text{Sp}(D) = \{0\}$ et $E_0(D)$ est l'ensemble des polynômes constants.

► ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Pour affirmer que la relation $AX = \lambda X$ prouve que le nombre complexe λ est valeur propre de la matrice A, il faut préciser, voire démontrer, que le vecteur X est non nul. »

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Il est stupéfiant de découvrir dans beaucoup trop de copies que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de M. »

Rapport Centrale, 2000

« Un manque de réflexion ou de rigueur intellectuelle conduit certains candidats à oublier de préciser qu'un vecteur propre est non nul, à parler "du" vecteur propre associé à la valeur propre étudiée. »

Un vecteur x de $E_\lambda(u)$ ne sera appelé « vecteur propre » que dans le cas où il est non nul.
En revanche, le scalaire 0 peut être une valeur propre. Dans ce cas, u n'est pas injective et le sous-espace propre relatif à 0 est $\text{Ker}\ u$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« On peut toutefois regretter que trop de candidats se lancent aveuglément dans des calculs de valeurs propres par déterminant au lieu d'analyser l'endomorphisme ou la matrice proposée. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Sous-espaces propres en somme directe

Théorème 14

Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme u de E, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Démonstration

Soit $P(X) = \Pi_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$. Les polynômes $X - \lambda_i$ sont premiers deux à deux. D'après le *théorème de décomposition des noyaux*, on a :

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } (u - \lambda_i \text{I}_E).$$

La somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe.

Corollaire 14.1

Soit p vecteurs propres $x_1, ..., x_p$ associés à p valeurs propres distinctes deux à deux. Alors la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre.

Exemple : Étude d'une famille libre

Pour tout réel α, on définit l'application $f_\alpha : (x \longmapsto \text{e}^{\alpha x})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'application f_α est un vecteur propre associé à la valeur propre α pour l'endomorphisme $(f \longmapsto f')$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les valeurs propres associées sont distinctes deux à deux. La famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

Rapport X, 2000

« De nombreux étudiants ne reconnaissent pas un vecteur ou des valeurs propres. Pour rechercher des vecteurs propres, peu d'entre eux ont le réflexe de dire que $(x, f(x))$ est lié (où f est l'endomorphisme étudié). »

2.3. Sous-espaces propres, stabilité et polynômes d'endomorphismes

Théorème 15

Quand deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

Démonstration

C'est une conséquence du *théorème* 1.

Corollaire 15.1

Tout sous-espace propre d'un endomorphisme u est stable par u.

Rapport Centrale, 2001

« Points qui ne sont pas toujours connus :
– lorsque deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre... »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Rapport Centrale, 1997

« ...la recherche de polynômes annulateurs d'un endomorphisme est souvent très efficace pour trouver ses éléments propres, mais la définition de ceux-ci ne peut s'y réduire. »

Théorème 16

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme u et P un polynôme. Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Démonstration

Soit x un vecteur propre associé à λ, $u(x) = \lambda x$. On montre facilement que $\forall\ k \in \mathbb{N}\quad u^k(x) = \lambda^k x$.

Pour tout polynôme P, nous obtenons $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Corollaire 16.1

Si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont racines de P.

La réciproque est fausse. Par exemple, le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de I_E et la racine 0 de $X^2 - X$ n'est pas une valeur propre de I_E.

Corollaire 16.2

En dimension finie, les valeurs propres de u sont racines du polynôme minimal de u.

Théorème 17

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E et F un sous-espace de E stable par u. Alors le scalaire λ est une valeur propre de $u_{|F}$ si, et seulement si :

$$F \cap \mathrm{Ker}\ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$

Mensa ACADEMY

2.4. Étude des projecteurs, affinités, symétries

Théorème 18

Soit p un endomorphisme de l'espace vectoriel E différent de l'identité et de l'application nulle.

Alors l'application p est un projecteur si, et seulement si :

$$\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad E_0(p) \oplus E_1(p) = E.$$

Dans ces conditions, p est la projection sur $E_1(p)$ parallèlement à $E_0(p)$.

Démonstration

Nous savons que p est un projecteur si, et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que :

$$E = F \oplus G\ ;$$
$$F = \{x \in E\ /\ p(x) = x\}\ ;$$
$$G = \{x \in E\ /\ p(x) = 0_E\}.$$

$E_0(p) = G$ et $E_1(p) = F$ sont des sous-espaces propres si, et seulement s'ils ne sont pas réduits à $\{0_E\}$.

C'est-à-dire si, et seulement si, p est un projecteur différent de l'identité et de l'application nulle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 19

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On suppose que l'application u n'est pas une homothétie. Alors l'application u est une affinité si, et seulement si :

$\exists k \neq 1 \quad \mathrm{Sp}(u) = \{k, 1\} \quad$ et $E_k \oplus E_1(u) = E$.

Dans ces conditions, u est l'affinité de rapport k de base $E_1(u)$ et de direction $E_k(u)$.

Démonstration

Nous savons que u est une affinité si, et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E supplémentaires et un scalaire k tels que :

$$\forall\ x \in E \quad u(x) = x_F + k x_G,$$

où $x = x_F + x_G$ est l'écriture de x dans $E = F \oplus G$.

$E_1(u) = F$ et $E_k(u) = G$ sont des sous-espaces propres si, et seulement s'ils ne sont pas réduits à $\{0_E\}$, c'est- à-dire si, et seulement si, u est une affinité différente d'une homothétie.

Corollaire 19.1

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E différent de Id_E et de $-\mathrm{Id}_E$. Alors l'application u est une symétrie si, et seulement si :

$\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(u) \oplus E_1(u) = E$.

Dans ces conditions, l'application u est la symétrie de base $E_1(u)$, de direction $E_{-1}(u)$.

Démonstration

C'est le *théorème* 17 appliqué à $k = -1$.

Rapport E4A, 2002

« La majorité des candidats savent exploiter l'existence d'une base de diagonalisation pour la recherche de noyau et d'image, les erreurs commises sont dues à la non-connaissance des valeurs propres d'une symétrie. »

Application 3

Détermination de la nature d'une application affine

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(3x + y + z - 1) \\ y' = x + 2y + z - 1 \\ z' = \dfrac{1}{2}(-x - y + z + 1) \end{cases}$$

L'endomorphisme associé a pour matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recherchons λ dans $\mathbb{R}$ tel que le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 3x + y + z = 2\lambda x \\ 2x + 4y + 2z = 2\lambda y \\ -x - y + z = 2\lambda z \end{cases}$$

ait une solution non triviale.

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} (3 - 2\lambda)x + y + z = 0 \\ 2x + (4 - 2\lambda)y + 2z = 0 \\ -x - y + (1 - 2\lambda)z = 0 \end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le système a une solution non triviale si son déterminant est nul.

$$\text{Det}(S) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Les deux valeurs propres sont 1 et 2.

Le sous-espace propre associé à 1 est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Le sous-espace propre associé à 2 est la droite d'équations :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 2z \end{cases} \quad \text{de vecteur directeur } \vec{v}(1,2,-1).$$

Il s'agit donc d'une affinité de rapport 2, de direction la droite $\mathbb{R}\,\vec{v}$ et de base le plan affine d'équation $x+y+z=1$ obtenu en recherchant les points invariants.

```
> restart:with(linalg):
> A:=linalg[matrix](3,3,
[3/2,1/2,1/2,1,2,1,-1/2,-1/2,1/2]);
> eigenvects(A) ;
>
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
[2, 1, { [-1, -2, 1] }], [1, 2, { [-1, 1, 0], [-1, 0, 1] }]
```

2.5. Étude des automorphismes intérieurs

Théorème 20

Soit u un endomorphisme de E et a un automorphisme de E. Alors :

• les applications u et aua^{-1} ont les mêmes polynômes annulateurs et les mêmes spectres ;

• pour toute valeur propre λ de u, nous avons :

$$E_\lambda\left(aua^{-1}\right) = a\left(E_\lambda(u)\right).$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

• Nous pouvons tout d'abord comparer les polynômes annulateurs de u et aua^{-1}.

Pour cela, nous remarquons que :

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \qquad \left(aua^{-1}\right)^k = au^k a^{-1}$$

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{K} \qquad a(\alpha u)a^{-1} = \alpha\left(aua^{-1}\right)$$

$$\forall\ u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall\ v \in \mathcal{L}(E) \quad a(u+v)a^{-1} = aua^{-1} + ava^{-1}$$

Tout polynôme s'écrit comme une combinaison de monômes, et s'obtient à partir des opérations précédentes. Nous obtenons :

$$\forall\ P \in \mathbb{K}[X] \qquad P\left(aua^{-1}\right) = aP(u)a^{-1}.$$

• Soit λ une valeur propre de u.

Il existe x non nul dans E tel que $u(x) = \lambda x$.

L'application a est un automorphisme. Le vecteur $a(x)$ est non nul et :

$$aua^{-1}\left(a(x)\right) = a\left(u(x)\right) = a(\lambda x) = \lambda a(x).$$

Le vecteur $a(x)$ est un vecteur propre de aua^{-1} associé à la valeur propre λ. Par conséquent :

$$\text{Sp}(u) \subset \text{Sp}\left(aua^{-1}\right) \quad \text{et} \quad a\left(E_\lambda(u)\right) \subset E_\lambda\left(aua^{-1}\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notons v l'endomorphisme aua^{-1} et appliquons ce que nous venons de démontrer à v et $a^{-1}va$:

$$\mathrm{Sp}\left(aua^{-1}\right) \subset \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et} \quad a^{-1}\left(E_\lambda\left(aua^{-1}\right)\right) \subset E_\lambda(u).$$

Or a est un automorphisme. Donc :

$$a^{-1}\left(E_\lambda\left(aua^{-1}\right)\right) \subset E_\lambda(u) \quad \Rightarrow \quad E_\lambda\left(aua^{-1}\right) \subset a\left(E_\lambda(u)\right).$$

Les doubles inclusions prouvent que :

$$\mathrm{Sp}\left(aua^{-1}\right) = \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et} \quad E_\lambda\left(aua^{-1}\right) = a\left(E_\lambda(u)\right).$$

3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

3.1. Définition

Soit λ dans $\mathbb{K}$ et u dans $\mathcal{L}(E)$.

λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective.

En dimension finie, cela se traduit par $\mathrm{Det}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Introduisons la fonction polynôme : $(\lambda \longrightarrow \mathrm{Det}(u - \lambda \mathrm{Id}_E))$.

Le polynôme $P_u(x) = \mathrm{Det}(u - X\mathrm{Id}_E)$ est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Si A est la matrice de u dans une base B de E le polynôme caractéristique de u est :

$$P_u(x) = \mathrm{Det}(A - X\mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

Rapport Centrale, 1997

« Il y a souvent des maladresses pour le calcul des polynômes caractéristiques : le candidat développe souvent l'expression avant de chercher la factorisation, alors qu'il faut faire l'inverse. »

Rapport X, 2000

« Une partie des candidats a omis de mentionner que le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base choisie. »

Théorème 21

Si u est un endomorphisme de E alors :

$$P_u(x) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\, u X^{n-1} + \ldots + \mathrm{Det} u.$$

Démonstration

Développons ce déterminant suivant la première ligne. Nous obtenons :

$$P_u(X) = (a_{11} - X)\Delta_{11}(X) + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\Delta_{1j}(X)$$

où $\Delta_{1j}(X)$ est le mineur obtenu en supprimant la première ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

$$\forall\ j \in \{2, \ldots, n\} \quad \mathrm{Det}\Delta_{1j}(x) \leqslant n - 2.$$

Les termes en X^n et X^{n-1} se trouvent dans le développement de $(a_{11} - X)\ \Delta_{11}(x)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par une récurrence simple, nous obtenons les mêmes termes dans le développement de $\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-X)$.

Le coefficient de X^n est donc $(-1)^n$ et celui de X^{n-1} est $(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$.

Le terme constant s'obtient ensuite pour $X=0$.

Théorème 22
Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme caractéristique de u.

Corollaire 22.1
Si l'espace vectoriel E est de dimension n, alors tout endomorphisme de E a au plus n valeurs propres.

Corollaire 22.2
Si l'espace vectoriel E est de dimension $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme de E admet au moins une valeur propre et un vecteur propre.

Rapport X, 2001
« Les rapports entre racines du polynôme caractéristique et valeurs propres étant mal maîtrisés, cette question n'a quasiment jamais été traitée. »

Mensa ACADEMY

Application 4

Vecteur propre commun à deux endomorphismes qui commutent

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et (u,v) un couple d'endomorphismes de E qui commutent.

Montrer qu'ils ont un vecteur propre commun.

L'espace vectoriel E est de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique admet au moins une racine complexe λ. L'espace $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Il est stable par v car u et v commutent.

Nous pouvons donc considérer l'endomorphisme induit w par v sur $E_\lambda(u)$. Le polynôme caractéristique de w admet également au moins une racine μ.

μ est une valeur propre de w, donc il existe un vecteur x non nul de $E_\lambda(u)$ tel que :

$$w(x)=\mu x.$$

D'une part :

$$v(x)=w(x)=\mu x$$

car w est l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$.

D'autre part :

$$u(x)=\lambda x$$

car x appartient à $E_\lambda(u)$.

Le vecteur x est bien un vecteur propre commun à u et à v.

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Propriétés du polynôme caractéristique

Théorème 23

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u.

Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

Démonstration

Soit $B_F = (e_1, ..., e_p)$ une base de F et $B = (e_1, ..., e_p, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F.

Dans cette base, la matrice A de u s'écrit $\begin{bmatrix} M & N \\ O & P \end{bmatrix}$ où M est la matrice de $u_{|F}$ dans la base B_F.

$$P_u(x) = \text{Det}\,(A - X\text{I}_n) = \text{Det}\begin{bmatrix} M - XI_p & N \\ O & P - X_{n-p} \end{bmatrix}$$
$$= \text{Det}\,(M - X\text{I}_p)\,\text{Det}\,(P - X\text{I}_{n-p})\,.$$

Or $\text{Det}\,(M - X\text{I}_p)$ est le polynôme caractéristique de $u_{|F}$. Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

Corollaire 23.1

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, u dans $\mathcal{L}(E)$ et λ dans $\text{Sp}(u)$. Alors l'ordre de multiplicité m de λ dans P_u vérifie :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m.$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

Soit $F = E_\lambda(u) = \text{Ker}\,(u - \lambda\text{Id}_E)$. Le sous-espace F est stable par u et la restriction $v = u|_F$ est une homothétie de rapport λ. $P_v(x) = (\lambda - X)^{\dim F}$ et $P_v(x)$ divise $P_u(x)$.

L'ordre de multiplicité de λ est m.

Le polynôme $(\lambda - X)^m$ divise $P_u(x)$ et le polynôme $(\lambda - X)^{m+1}$ ne divise pas $P_u(x)$.

Nous pouvons affirmer que $\dim F \leqslant m$.

D'autre part, $F \neq \{0_E\}$ donc $\dim F \geqslant 1$.

Corollaire 23.2

Si λ est une racine simple de P_u, alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Théorème 24

Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :

$$\text{Tr}\,u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \qquad \text{et} \qquad \text{Det}u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda,$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité.

Rappelons qu'un polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se décompose en un produit de facteurs du premier degré à coefficients dans $\mathbb{K}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Dans ce cas $P_u(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$ où $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

Nous retrouvons l'équivalence : u non injective si, et seulement si : $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

3.3. Étude matricielle

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Nous pouvons associer à A un endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Si λ est une valeur propre de u, nous dirons que λ est une **valeur propre de la matrice** A. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de A dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

Si λ est une valeur propre de A, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est appelé **sous-espace propre** de la matrice A associé à la valeur propre λ et noté $E_\lambda(A)$.

Théorème 25

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

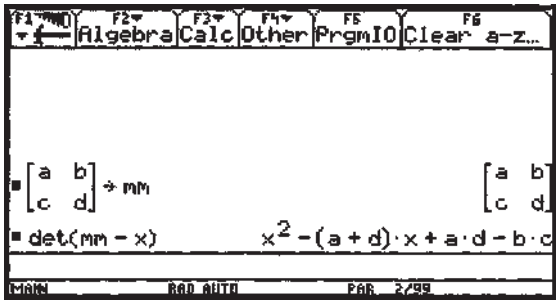
Le scalaire λ est une valeur propre de la matrice A si, et seulement si, l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\mathrm{Det}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$

(ii) $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X$.

Mensa ACADEMY

Ceci nous amène à définir le **polynôme caractéristique de la matrice** A par $P_A(x) = \mathrm{Det}(A - X\mathrm{I}_n)$.



Le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2.

Théorème 26

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- les matrices A et PAP^{-1} ont les mêmes polynômes annulateurs et les mêmes spectres ;
- pour toute valeur propre λ de A, nous avons : $E_\lambda\left(PAP^{-1}\right) = P\left(E_\lambda(A)\right)$.

⚠ *A et ${}^tA$ ont le même spectre, mais les vecteurs propres sont différents en général.*

Théorème 27

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^tA$ le même polynôme caractéristique que A.

Démonstration

$P_A(X) = \mathrm{Det}(A - X\mathrm{I}_n) = \mathrm{Det}^t(A - X\mathrm{I}_n) = \mathrm{Det}\left({}^tA - X\mathrm{I}_n\right) = P_{{}^tA}(X)$ car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Le **polynôme minimal de la matrice** A est celui de u. Il sera noté Π_A.

Rapport E4A, 2002

« Le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux sont peu cités ou alors leur évocation est beaucoup trop vague. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.4. Théorème de Cayley-Hamilton

Ce théorème va faire le lien entre le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

Théorème 28
Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u :

$$P_u(u) = 0$$

Démonstration

Nous allons montrer que, pour tout vecteur x de E, $P_u(u)(x) = 0_E$.

Si $x = 0_E$, c'est immédiat.

Supposons maintenant que x est différent de 0_E.

Soit $I = \{p \in \mathbb{N} \ / \ \left(u^k(x)\right)_{k \leqslant p}$ libre$\}$.

La partie I est non vide, majorée par $n = \dim E$. L'ensemble I possède un plus grand élément s.

Soit $E(x)$ l'espace vectoriel engendré par :

$$\{u^k(x) \ / \ k \leqslant s\}.$$

$B = \left(u^k(x)\right)_{k \leqslant s}$ est une base de $E(x)$.

D'autre part, la famille $\{u^k(x) \ / \ k \leqslant s+1\}$ est liée car s est le plus grand élément de I. Il existe $(a_0, ..., a_s)$ de $\mathbb{K}^{s+1}$ tel que :

$$u^{s+1}(x) = \sum_{k=0}^{s} a_k u^k(x).$$

L'image de $E(x)$ par u est le sous-espace vectoriel engendré par :

$$\{u^{k+1}(x) \ / \ k \leqslant s\}.$$

La relation précédente prouve que $u^{s+1}(x)$ appartient à $E(x)$.

Par conséquent, le sous-espace $E(x)$ est stable par u.

La stabilité de $E(x)$ par u permet de considérer l'endomorphisme $v = u_{|E(x)}$ de $E(x)$.

Le polynôme caractéristique P_v de v divise celui de u.

Il existe un polynôme Q tel que $P_v Q = P_u$.

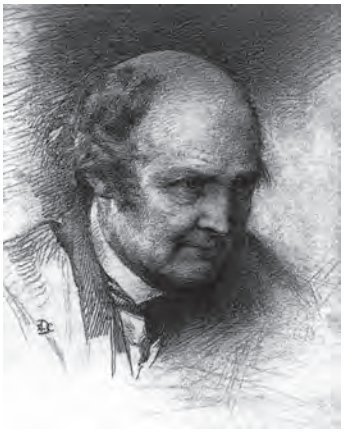
$$Q(u) \circ P_v(u) = P_u(u).$$

Il suffit donc de montrer $P_v(u)(x) = 0$.

La matrice de v dans la base B de $E(x)$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_s \end{bmatrix}$$

La démonstration de ce *théorème* n'est pas exigible des étudiants.



Arthur Cayley *(1821-1895), mathématicien anglais.*
Avocat talentueux, il décide à 42 ans de se consacrer aux mathématiques, moins rémunératrices. Il publie plus de 900 articles sur pratiquement tous les domaines des mathématiques. Dans son mémoire de 1858, il présente la théorie des matrices sous sa forme actuelle. Il démontre le théorème de Cayley-Hamilton dans les cas n = 2 *et* n = 3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

et

$$P_v(X) = \text{Det}\begin{bmatrix} -X & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & -X & \cdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_s - X \end{bmatrix}$$

On remplace la ligne L_1 par : $\sum_{k=0}^{s} X^k L_{k+1}$.

Nous obtenons :

$$P_v(X) = \text{Det}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & R(X) \\ 1 & -X & \cdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_s - X \end{bmatrix}$$

où $R(X) = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k - X^{s+1}$.

En développant suivant la première ligne, nous avons :

$$P_v(X) = (-1)^s R(X).$$

$$P_v(u)(x) = (-1)^s \left[\sum_{k=0}^{s} a_k u^k(x) - u^{s+1}(x)\right] = 0_E .$$

Corollaire 28.1
Le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u.

Corollaire 28.2
Le degré du polynôme minimal est inférieur ou égal à la dimension de E.

Corollaire 28.3
Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines à des ordres de multiplicité éventuellement différents.

Démonstration

Nous savons déjà que $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de P_u et que $\text{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de Π_u.

Π_u divise P_u donc l'ensemble des racines de Π_u est inclus dans l'ensemble des racines de P_u.

Corollaire 28.4
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $P_A(A) = 0$.

Exemples

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad P_A(x) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \text{Det}A$ et par conséquent :

$$P_A(A) = A^2 - \text{Tr}(A)A + \text{Det}A.$$

Rapport TPE, 2002

« ...questions qui ont posé problème :
- calculer l'inverse d'une matrice A en utilisant un polynôme annulateur. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$P_A(x) = (2 - X)^3$, donc $\Pi_A(x) = (X - 2)^k$ avec $k \in \{1; 2; 3\}$

Si $k = 1$, alors $2 - X$ est annulateur de A. Or $A \neq I_3$. Donc $k \neq 1$.

Le calcul de $(A - 2I_3)^2$ nous montre que $(A - 2I_3)^2 \neq 0$. Donc : $k = 3$ et $\Pi_A = P_A$.

$P_B(X) = (2 - X)^3$, donc : $\Pi_B(X) = (X - 2)^k$ avec $k \in \{1; 2; 3\}$.

Nous trouvons de même que : $k \neq 1$ mais, cette fois, $(B - 2I_3)^2 = 0$. Donc :

$$k = 2 \quad \text{et} \quad \Pi_B(X) = (X - 2)^2.$$

Vous vérifierez que :
$B^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}B$.

```
> restart:with(linalg):
> A:=linalg[matrix](3,3, [2,1,3,0,2,5,0,0,2]);
> charpoly(A,x) ;
> minpoly(A,x) ;
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(x-2)^3$$

$$-8 + 12x - 6x^2 + x^3$$

```
> B:=linalg[matrix](3,3, [2,0,6,0,2,0,0,0,2]);
> charpoly(B,x) ;
 > minpoly(B,x) ;
```

$$4 - 4x + x^2$$

3.5. Méthode pratique pour déterminer un polynôme minimal en dimension finie

La démonstration du *théorème de Cayley-Hamilton* nous donne une méthode pratique pour déterminer le polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Avec les notations de cette démonstration, nous constatons que le polynôme $Q_x = X^{s+1} - \sum_{k=0}^{s} a_k X^k$ est le polynôme minimal de l'application v.

En effet :

• Pour tout i de $[\![0, s]\!]$,

$$u^{s+1}\left(u^i(x)\right) - \sum_{k=0}^{s} a_k u^k\left(u^i(x)\right) = u^i\left(u^{s+1}(x) - \sum_{k=0}^{s} a_k u^k(x)\right) = u^i(0_E) = 0_E.$$

Or $\left(u^k(x)\right)_{k \leqslant s}$ est une base de $E(x)$. Le polynôme Q_x est annulateur de v.

• La famille $\left(u^k(x)\right)_{k \leqslant s}$ est libre. Donc il n'existe pas de polynôme annulateur de v de degré inférieur ou égal à s. Par conséquent, Q_x est bien le polynôme minimal de v.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, soit v_j la restriction de u à $E\left(e_j\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous pouvons définir comme ci-dessus le polynôme minimal Q_j de chaque v_j.

Alors le plus petit commun multiple Q des polynômes $Q_1, ..., Q_n$ est le polynôme minimal de u.

En effet :

• D'après le *corollaire* 5.1, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, le polynôme Q_j divise le polynôme minimal Π_u de u. Le polynôme Q divise Π_u.

• Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $Q(u)\left(e_j\right) = Q\left(v_j\right)\left(e_j\right)$ et il existe P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PQ_j$. Par conséquent :

$$Q(u)\left(e_j\right) = P\left(v_j\right) Q_j\left(v_j\right)\left(e_j\right) = P\left(v_j\right)(0_E) = 0_E.$$

Le polynôme Q est annulateur de u.

Application 5

Recherche d'un polynôme minimal

Trouver le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *de deux manières différentes.*

Première méthode

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. En utilisant les notations de la démonstration précédente, nous obtenons :

$$E(e_1) = \text{Vect}\left(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\right).$$
$$u(e_1) = e_1 + 2e_3.$$
$$u^2(e_1) = 3e_1 + 2e_3.$$

Le polynôme Q_1 minimal de la restriction de u à $E(e_1)$ est $X^2 - X - 2$.

$E(e_1)$ est de dimension 2.

De même, le polynôme Q_2 minimal de la restriction de u à $E(e_2)$ est $X - 2$.

La dimension de $E(e_1) + E(e_2)$ est 3. Il est inutile de calculer Q_3.

Le polynôme minimal de A est le plus petit commun multiple de $X^2 - X - 2$ et de $X - 2$, il s'agit de $X^2 - X - 2$.

Deuxième méthode

Le polynôme caractéristique est :

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 1 \\ 0 & 2 - X & 0 \\ 2 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3 + 3X^2 - 4.$$

D'après le *théorème de Cayley-Hamilton*, il est annulateur de A.

Le polynôme minimal divise :

$$-X^3 + 3X^2 - 4.$$

Il n'est pas de degré 1, car u n'est pas une homothétie.

Les deux polynômes de degré 2 qui divisent :

$$-X^3 + 3X^2 \text{ sont } X^2 - 2X + 4 \text{ et } X^2 - X - 2.$$

Nous vérifions que :

$$A^2 - A - 2I_3 = 0.$$

Le polynôme $X^2 - X - 2$ est le polynôme minimal de A.

```
> restart:with(linalg):
> A:=linalg[matrix](3,3, [1,0,1,0,2,0,2,0,0]) ;
> charpoly(A,x) ;
> minpoly(A,x) ;
>
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
                          [1  0  1]
                      A := [0  2  0]
                          [2  0  0]
                        x^3 - 3 x^2 + 4
                        -2 - x + x^2
>
```

► ***Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'un **sous-espace F d'un espace vectoriel E est stable** par un endomorphisme u, on peut montrer que :

- $u(F) \subset F$;
- F est le noyau ou l'image d'un endomorphisme v qui commute avec u.

● Pour montrer qu'un **scalaire λ est une valeur propre d'un endomorphisme** u de E, on peut :

- en dimension finie, vérifier que λ est une racine du polynôme caractéristique de u ;
- trouver un vecteur x de E non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

● Pour montrer qu'un **scalaire λ est une valeur propre d'une matrice** A, on peut :

- vérifier que λ est une racine du polynôme caractéristique de A ;
- trouver une matrice X colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$.

● Pour trouver le **polynôme minimal d'un endomorphisme** u de E, on peut :

- trouver un polynôme annulateur de u (par exemple, en dimension finie, le polynôme caractéristique de u) puis rechercher le polynôme minimal parmi ses diviseurs ;
- rechercher, pour chaque e_i d'une base de E, une relation entre les $u^k(e_i)$, en déduire un polynôme Q_i annulateur de la restriction de u à $\text{Vect}\left(u^k(e_i)\ ;\ k \in \mathbb{N}\right)$.

Le polynôme minimal est alors le P.P.C.M. des polynômes Q_i.

● Pour montrer qu'une **famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de E est libre**, on peut chercher un endomorphisme de E admettant les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ comme vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux.

● Pour trouver la **nature d'une application affine**, on peut chercher s'il s'agit d'une affinité, d'une projection ou d'une symétrie en étudiant les sous-espaces propres de l'application linéaire associée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices résolus

1. Un endomorphisme en dimension infinie

ÉNONCÉ

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E défini pour f dans E par :

$$\forall\ x \in [0,1] \quad u\big(f(x)\big) = \int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme u.

CONSEILS

Donner l'expression de l'intégrale en distinguant les cas $t \leqslant x$ et $x \leqslant t$. Étudier la dérivabilité d'un vecteur propre f. Penser à vérifier que f n'est pas la fonction nulle.

SOLUTION

Soit f dans E. La fonction $((x,t) \longmapsto \inf(x,t) f(t))$ est continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Par conséquent, $u(f)$ appartient à E.

Le réel λ est une valeur propre pour u si, et seulement s'il existe une application f dans E non nulle telle que :

$$\forall\ x \in [0,1] \quad \int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$$
$$\forall\ x \in [0,1] \quad \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x).$$

L'application $t \longmapsto t f(t)$ est continue sur $[0,1]$. Donc l'application $\left(x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

De même, l'application $\left(x \longmapsto \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

Pour $\lambda \neq 0$, nous en déduisons par une récurrence triviale que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

• Pour $\lambda \neq 0$, on a : $u(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall\ x \in [0,1] \quad \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f'(x)$ et $\lambda f(0) = 0 \Leftrightarrow \forall\ x \in [0,1] \quad -f(x) = \lambda f''(x)$, $\lambda f(0) = 0$ et $\lambda f'(1) = 0$

Pour $\lambda > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Il existe a et b réels tels que :

$$\forall x \in]0,1[\quad f(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x).$$

Les réels a et b doivent vérifier $a = 0$ et $b\cos\alpha = 0$.

La fonction f n'est pas identiquement nulle si, et seulement si, α appartient à $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

$$\mathrm{Sp}(u) \cap \mathbb{R}_+^* = \left\{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}$ est la droite engendrée par la fonction $\left(x \longmapsto \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)\right)$.

Pour $\lambda < 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Il existe a et b réels tels que $\forall\ x \in]0,\ 1[\quad f(x) = a\mathrm{ch}\,(\alpha x)+b\mathrm{sh}\,(\alpha x)$.

Les réels a et b doivent vérifier $a = 0$ et $b\mathrm{ch}\,(\alpha) = 0$.

La fonction f est identiquement nulle et ne peut pas être un vecteur propre.

$$\mathrm{Sp}(u) \cap \mathbb{R}^{-*} = \varnothing.$$

Pour $\lambda = 0$, un vecteur propre f associé vérifie :

$$\forall\ x \in [0,1] \quad \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}\,t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

En dérivant deux fois, nous obtenons $f = 0$ sur $]0,1[$. La continuité de f entraîne la nullité de f sur $[0,1]$. Le réel 0 n'est pas une valeur propre. En conclusion :

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{ \frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mensa ACADEMY

2. Crochet de Lie et vecteurs propres

ÉNONCÉ

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E.

Notons w l'endomorphisme $w = uv - vu$.

On suppose que $uw = wu$ et que $vw = wv$.

1) Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \ u^{k+1}v - vu^{k+1} = (k+1)\ u^k\ w$.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\ w \neq \{0_E\}$.

3) En déduire que u, v et w possèdent un vecteur propre commun.

CONSEILS

1) Faire une récurrence sur k.

SOLUTION

1) Montrons par récurrence sur k que :

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\quad u^{k+1}v - vu^{k+1} = (k+1)\,u^k w.$$

Pour $k = 0$, c'est la définition de w.

Supposons que $u^k v - vu^k = ku^{k-1}w$ pour un entier $k \geqslant 1$. Montrons le résultat au rang $k+1$.

$$u^{k+1}v - vu^{k+1} = uu^k v - vu^{k+1} = u\left(ku^{k-1}w + vu^k\right) - vu^{k+1} = ku^k w + wu^k.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or u et w commutent, donc :

$$u^{k+1}v - vu^{k+1} = (k+1)\,u^k w = (k+1)\,u^k w.$$

En conclusion : $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \ u^{k+1}v - vu^{k+1} = (k+1)\,u^k w.$

2) Montrer par l'absurde que : Ker $w \neq \{0_E\}$. Vous pourrez utiliser une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

2) Montrons par l'absurde que : $\ker w \neq \{0_E\}$.

Si $\ker w = \{0_E\}$, alors w est inversible.

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \left(u^{k+1}v - vu^{k+1}\right) w^{-1} = (k+1)\,u^k.$$

L'espace E est de dimension finie n. Choisissons une base de E et la norme infinie associée.

Notons $\|\quad\|$ la norme subordonnée associée. Alors :

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad (k+1)\|u^k\| \leqslant 2\|u^k\|\ \ \|v\|\ \ \|w^{-1}\|\ \ \|u\|.$$

Si : $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad u^k \neq 0$, alors : $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad (k+1) \leqslant 2\|v\|\ \ \|w^{-1}\|\ \ \|u\|$.

Ceci est absurde.

Par conséquent, il existe un entier k non nul tel que :

$$u^k = 0 \quad \text{et} \quad u^{k-1} \neq 0.$$

Alors $ku^{k-1}w = 0$. Puis $u^{k-1} = 0$. Ceci n'a pas lieu.

Donc w n'est pas inversible.

3) Inspirez-vous de l'application 4.

3) $uw = wu$ et $vw = wv$. Donc $F = \operatorname{Ker} w$ est stable par u et par v.

Les restrictions $u_{|F}$ et $v_{|F}$ sont des endomorphismes de F.

$$\forall\ x \in F \quad uv(x) - vu(x) = 0_E.$$

Par conséquent, les endomorphismes $u_{|F}$ et $v_{|F}$ commutent. D'après l'*application* 4, il existe un vecteur x de F vecteur propre commun à $u_{|F}$ et à $v_{|F}$.

Ce vecteur x est également un vecteur propre de w pour la valeur propre 0.

3. Les disques de Gerschgörin d'une matrice carrée

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Soit λ dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]\ \ |a_{ii} - \lambda| > \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}|$. Montrer que λ n'est pas valeur propre de A.

2) Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $D(a,r)$ le disque du plan complexe de centre a de rayon r :

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}\ \ |z-a| \leqslant r\}.$$

Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on pose $l_i = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}|$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} D(a_{ii}, l_i)$.

Montrer que l'on a aussi $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} D(a_{ii}, c_i)$, où $c_i = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} |a_{ki}|$.

Les disques apparaissant dans cet exercice sont les disques de Gerschgörin de la matrice A. Ils permettent de localiser (assez grossièrement) les valeurs propres d'une matrice complexe.

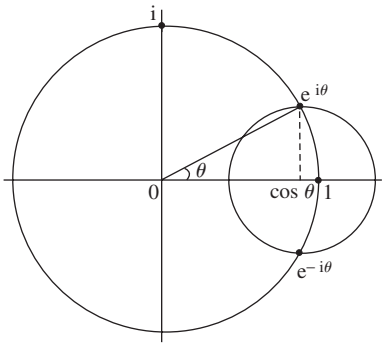
3) Tracer les disques de Gerschgörin de la matrice de rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ et ses valeurs propres complexes.

CONSEILS

Considérer un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = \lambda X$ et i_0 tel que : $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.

On rappelle que, par hypothèse,

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}|.$$



SOLUTION

1) Suivons l'indication ci-contre.

La ligne i_0 de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit :

$$(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0 j} x_j.$$

Donc : $$|(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j} x_j| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}||x_{i_0}|.$$

Si $|x_{i_0}|$ est non nul, on peut simplifier par ce terme. On aboutit à une contradiction.

Donc $|x_{i_0}| = 0, X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et λ n'est pas valeur propre de A.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La question précédente prouve l'implication :

$$[\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda \notin D(a_{ii}, l_i)] \Rightarrow \lambda \notin \mathrm{Sp}\, A.$$

Par contraposée, on en déduit l'inclusion :

$$\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} D(a_{ii}, l_i).$$

En utilisant la transposée de A, on trouve l'autre inclusion.

3) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Il y a un seul disque de Gerschgörin, de centre $\cos(\theta)$ de rayon $|\sin(\theta)|$.

Les valeurs propres complexes de A sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension n et k dans $[\![1, n-1]\!]$. On suppose que tous les sous-espaces de E de dimension k sont stables par u.

1) Montrer alors que tout sous-espace de E de dimension $k-1$ est stable par u.

2) Montrer que u est une homothétie.

2 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur de u qui ne s'annule pas en 0. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} en fonction de u et des coefficients de ce polynôme.

3 Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} M_1 & O & O \\ O & M_2 & O \\ & \ddots & \\ O & O & M_p \end{bmatrix}$ avec, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $M_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$. Calculer le polynôme minimal Π_M en fonction des polynômes minimaux des matrices M_i.

4 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et P un polynôme annulateur de u.

On suppose qu'il existe Q et R premiers entre eux tels que $P = QR$. Montrer que :

$$\text{Ker } Q(u) = \text{Im} R(u) \quad \text{et que } \text{Im} Q(u) = \text{Ker } R(u).$$

5 Un endomorphisme dont le spectre est infini non dénombrable.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on définit l'application T par :

$$\forall f \in E \; T(f)(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0,1] \; T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

6 Pour tout n entier, on définit les fonctions f_n et g_n par : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \cos(nx)$ et $g_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7 Soit A dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, exprimer le polynôme caractéristique de BA en fonction de celui de AB. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

8 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $2n$ muni d'une base $(e_1, \ldots e_{2n})$ et un endomorphisme u défini par : $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad u(e_i) = e_{i+n}$ et $u(e_{i+n}) = -e_i$.

Trouver le polynôme minimal. En déduire le polynôme caractéristique, puis les valeurs propres et les vecteurs propres.

9 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$\text{Det}A \neq 0, \; \text{Det}B \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{Det}A \wedge \text{Det}B = 1.$$

Montrer qu'il existe deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que : $AU + BV = UA + VB = I_n$.

10 * Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, u dans $\mathcal{L}(E)$ et α réel tels que $u^3 = -\alpha\, u$ et $\alpha > 0$. Montrer que $\text{Im}u = \text{Ker}\,(u^2 + \alpha \text{Id}_E)$ et que le rang de u est pair.

11 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur de u qui admet 0 pour racine simple. Montrer que :

$$E = \text{Im}u \oplus \text{Ker } u.$$

12 * Montrer que le produit de n matrices nilpotentes d'ordre n qui commutent deux à deux est nul.

13 * Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On définit l'application φ qui, à un polynôme P, associe le polynôme R, reste de la division euclidienne de AP par B.

Vérifier que φ dans $\mathcal{L}(E)$ et étudier le noyau, l'image, les valeurs propres, les vecteurs propres de φ.

14 Soit A dans $\mathcal{M}_n(K)$. Donner le polynôme caractéristique de la transposée de la comatrice de A en fonction de celui de A, du déterminant de A et de la trace de la comatrice de A.

15 * Soit u dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ nilpotente d'indice 3. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u ?

16 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système d'inconnues A et B suivant : $\begin{cases} ABA = I_2 \\ BAB = I_2 \end{cases}$.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et (u, v) dans $\mathcal{L}(E)^2$ un couple d'endomorphismes tels que $uv - vu = au + bv$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Réduction des endomorphismes en dimension finie

20

Mensa ACADEMY

Introduction

Il est souvent indispensable de trouver une base par rapport à laquelle la matrice d'un endomorphisme est aussi simple que possible. Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales. Pour les obtenir, on utilise la théorie des éléments propres étudiée au chapitre 19. C'est la diagonalisation. Lorsque la matrice étudiée n'est pas diagonalisable, on peut chercher à la trianguliariser.

OBJECTIFS

- Différentes caractérisations des endomorphismes diagonalisables.
- Diagonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice.
- Trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice.
- Étude des sous-espaces caractéristiques.
- Puissances et exponentielle de matrices.
- Suites à récurrence linéaire.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Endomorphismes diagonalisables

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rapport TPE, 2002

« Pour tout problème de réduction, la seule réaction est la recherche du polynôme caractéristique, même pour des matrices sans particularité. Peu de candidats arrivent à poser correctement ce type de problème. »

1.1. Définition et caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathcal{L}(E)$. Nous dirons que u est **diagonalisable** si E est somme directe des sous-espaces propres associés à u :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Dans ce cas, $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$ en notant p_λ la projection sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\mu \in \mathrm{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} E_\mu(u)$.

Théorème 1

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à celle de E :

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u).$$

Démonstration

Les sous-espaces propres sont en somme directe, donc nous avons :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E.$$

Théorème 2

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de u.

Corollaire 2.1

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, on suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Alors u est diagonalisable.

Démonstration

Si u est diagonalisable, nous avons $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. En prenant une base B_λ dans chaque $E_\lambda(u)$, nous formons une base de E constituée de vecteurs propres.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Réciproquement, s'il existe une base B de vecteurs propres, alors l'espace vectoriel engendré par B est inclus dans $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Or il s'agit de E. Donc $E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Théorème 3
Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Théorème 4
Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, E est somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquels u induit une homothétie.

Diagonaliser un endomorphisme u, c'est trouver une base formée de vecteurs propres de u.

Vérifier que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du plan euclidien orienté n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Certains endomorphismes ne sont pas diagonalisables.

► *Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.*

Mensa ACADEMY

1.2. Exemples

- Toute homothétie est diagonalisable.

Si k est le rapport de l'homothétie u, alors $E = E_k(u)$

- D'après le § 2.4 du *chapitre* 19, nous avons :

Théorème 5
Un endomorphisme p est un projecteur si, et seulement si, p est diagonalisable et si :
$$\mathrm{Sp}(p) \subset \{0,1\}.$$

Théorème 6
Un endomorphisme u est une affinité si, et seulement si, u est diagonalisable et s'il existe un réel k tel que :
$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{k,\ 1\}.$$

Théorème 7
Un endomorphisme s est une symétrie si, et seulement si, s est diagonalisable et si :
$$\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1,\ 1\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Diagonalisation et crochet de Lie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u dans $\mathcal{L}(E)$. On définit l'endomorphisme θ_u de $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall\ v \in \mathcal{L}(E)\quad \theta_u(v) = u\ v - v\ u.$$

1) *Montrer que, si u est diagonalisable, alors θ_u est diagonalisable.*

2) *Montrer que, si θ_u est diagonalisable et si $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$, alors u est diagonalisable.*

1) L'endomorphisme u est diagonalisable. Il existe une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres pour u associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Considérons les endomorphismes $u_{i,j}$ de E définis par :

$$\forall\ k \in [\![1,n]\!]\quad u_{i,j}(e_k) = \delta_j^k e_i.$$

Ils forment une base de $\mathcal{L}(E)$.

Alors, pour tout k de $[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\theta_u(u_{i,j})(e_k) &= \delta_j^k u\ (e_i) - u_{i,j}\ (u(e_k))\\ &= \delta_j^k \lambda_i\ e_i - u_{i,j}\ (\lambda_k\ e_k)\\ &= \delta_j^k\ (\lambda_i - \lambda_k)\ e_i\\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\ u_{i,j}(e_k).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\theta_u(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)\ u_{i,j}$.

La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres pour θ_u. L'endomorphisme θ_u est diagonalisable.

2) L'endomorphisme θ_u est diagonalisable. Il existe une base $(u_k)_{k\in[\![1,n^2]\!]}$ de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres pour θ_u respectivement associés aux valeurs propres $(\alpha_k)_{k\in[\![1,n^2]\!]}$.

Soit λ dans $\mathrm{Sp}(u)$. Il existe x non nul dans E tel que $u(x) = \lambda\ x$.

L'application φ de $\mathcal{L}(E)$ dans E définie par $\varphi(v) = v(x)$ est surjective car x est non nul.

Par conséquent, la famille $(\varphi\ (u_k))_{k\in[\![1,n^2]\!]}$ est génératrice dans E.

Il existe une partie finie I de $[\![1,n^2]\!]$ de cardinal n telle que $(u_k(x))_{k\in I}$ soit une base de E.

Pour tout k dans I, on a : $\theta_u(u_k) = \alpha_k\ u_k$.

Donc $u(u_k(x)) - u_k(u(x)) = \alpha_k\ u_k(x)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}u(u_{\ k}(x)) &= u_k(u(x)) + \alpha_k\ u_k(x)\\ &= u_k(\lambda\ x)) + \alpha_k\ u_k(x)\\ &= (\lambda + \alpha_k)u_k(x).\end{aligned}$$

La base $(u_k(x))_{k\in I}$ de E est constituée de vecteurs propres pour u. L'endomorphisme u est diagonalisable.

► *Pour s'entraîner : ex. 3.*

2 Endomorphismes diagonalisables et polynômes d'endomorphisme

Théorème 8

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique P_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ a pour dimension l'ordre de multiplicité de λ dans P_u.

Démonstration

Supposons u diagonalisable, la matrice de u est diagonale dans une base de vecteurs propres adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces propres.

Le polynôme caractéristique de u s'écrit :

$$P_u(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,u} (\lambda - X)^{\dim\ E_\lambda(u)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Réciproquement, supposons :

$$P_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i} \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, ..., p\} \quad m_i = \dim E_{\lambda_i}(u).$$

Nous avons : $\deg P_u(X) = \sum_{i=1}^{p} m_i = n = \dim E$.

Donc $\dim \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Le *théorème* 1 permet de conclure.

L'endomorphisme u est diagonalisable.

Corollaire 8.1

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples, est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Théorème 9

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal Π_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples.

Nous retrouvons ainsi une autre formulation du *corollaire* 2.1.

Démonstration

Supposons tout d'abord u diagonalisable.

Dans ce cas, $P_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$.

$P = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)$ divise $\Pi_u(X)$ car le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.

Montrons que le polynôme P est annulateur de u.

Soit x un vecteur de E.

L'endomorphisme u est diagonalisable donc : $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$.

$\forall i \in \{1, ..., p\} \quad \exists\, x_i \in E_{\lambda_i}(u) \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$P(u)(x) = \sum_{i=1}^{p} P(u)(x_i)$.

Or chaque $P(u)(x_i)$ est nul car :

$$P(u)(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\lambda_j Id - u) \circ (\lambda_i Id - u)(x_i) = 0_E$$

puisque $u(x_i) = \lambda_i x_i$.

Ainsi, le polynôme P est annulateur de u et divise $\Pi_u(X)$. Par conséquent :

$$\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i).$$

Réciproquement, supposons que $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le *théorème de décomposition des noyaux* donne :

$$\text{Ker } \Pi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } (u - \lambda_i \text{I}_E).$$

Or : $\Pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Par conséquent $\text{Ker } \Pi_u(u) = E$.

Ainsi $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker } (u - \lambda_i \text{I}_E)$. L'endomorphisme u est diagonalisable.

Corollaire 9.1

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples.

Démonstration

Si u est diagonalisable, alors, d'après le *théorème* 10, Π_u convient.

Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme P annulateur de u scindé dont toutes les racines sont simples.

Le polynôme Π_u divise P. Par conséquent, il est également scindé et ses racines sont simples.

Corollaire 9.2

L'endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement s'il annule le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Mensa ACADEMY

Rapport Centrale, 2001

« ... points qui ne sont pas toujours connus :

- les projecteurs spectraux : si un endomorphisme est diagonalisable, il est combinaison linéaire des projecteurs associés à la somme des sous-espaces propres ;

- la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation d'un endomorphisme utilisant l'existence d'un polynôme scindé à racines simples n'est pas toujours clairement énoncée, et, si les candidats la connaissent, ils ne pensent pas assez à l'utiliser dans des cas où elle leur épargnerait de longs calculs. »

Exemples

■ *Étude des projecteurs*

Soit p un projecteur. Il vérifie : $p \circ p = p$.

Le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de p. Il est scindé et ses racines sont simples.

Tout projecteur est diagonalisable.

■ *Étude des symétries*

Une symétrie s vérifie $s \circ s = \text{Id}_E$.

Le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de s. Il est scindé et ses racines sont simples.

Toute symétrie est diagonalisable.

■ *Étude de l'automorphisme intérieur*

Soit a dans $\mathcal{GL}(E)$ et $v = a\, u\, a^{-1}$.

Nous avons montré que u et v ont les même polynômes annulateurs.

Supposons u diagonalisable. Il existe un polynôme P annulateur de u scindé dont toutes les racines sont simples.

Le polynôme P est également annulateur de v. Donc v est diagonalisable.

Tout automorphisme intérieur de $\mathcal{L}(E)$ transforme un endomorphisme diagonalisable en un endomorphisme diagonalisable.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 9.3

Si u est diagonalisable, pour tout sous-espace F stable par u, l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

Démonstration

L'endomorphisme u est diagonalisable. Son polynôme minimal Π_u est scindé et n'a que des racines simples.

Soit v l'endomorphisme de F induit par u.

D'après le *corollaire* 5.1 du *chapitre* 19, le polynôme minimal Π_v de v divise celui de u. Il est donc également scindé et n'a que des racines simples.

L'endomorphisme v est diagonalisable.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4, 5 et 6.***

Application 2

Diagonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que :

$$\forall\ i \in I \quad \forall\ j \in I \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes diagonales.

Montrons ce résultat par une récurrence sur la dimension n de E.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

Supposons que le résultat soit démontré pour tout espace de dimension inférieure ou égale à n et pour toute famille d'endomorphismes diagonalisables de cet espace lorsqu'ils commutent deux à deux.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.

• Si pour tout i de I, l'endomorphisme u_i est une homothétie, le résultat est immédiat. Toute base de E est une base de vecteurs propres pour chacun des u_i.

• Sinon, il existe j dans I tel que u_j ne soit pas une homothétie.

L'endomorphisme u_j est diagonalisable.

$$E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_j)} E_\lambda(u_j).$$

Puisque u_j n'est pas une homothétie :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u_j) \quad \dim E_\lambda(u_j) \leqslant n.$$

Soit λ dans $\mathrm{Sp}(u_j)$.

Pour tout i dans I, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Donc $E_\lambda(u_j)$ est stable par u_i.

Notons v_i l'endomorphisme de $E_\lambda(u_j)$ induit par u_i.

Les endomorphismes v_i commutent deux à deux.

D'après le *corollaire* 9.2, ils sont diagonalisables et $\dim E_\lambda(u_j) \leqslant n$.

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(v_i)_{i\in I}$.

Nous obtenons, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(u_j)$, l'existence d'une base B_λ de $E_\lambda(u_j)$ dans laquelle les matrices des v_i sont toutes diagonales.

Soit B la base de E obtenue par réunion des B_λ.

Dans la base B, les matrices des u_i sont toutes diagonales.

La récurrence est vérifiée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Matrices diagonalisables

3.1. Définition d'une matrice diagonalisable

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous dirons que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice A dans la base canonique.

La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable. Tous les critères étudiés précédemment pour un endomorphisme s'appliqueront aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Diagonaliser une matrice A diagonalisable, c'est diagonaliser l'endomorphisme associé, déterminer la matrice de passage P utilisée et la matrice diagonale D correspondante et donner l'expression matricielle :

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

Exemples

■ *La matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? sur* $\mathbb{C}$ *?*

Le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ est $P(X) = X^2 + 1$.

Le polynôme P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ et ses deux racines i et $-$i sont simples.

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

■ *La matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? sur* $\mathbb{C}$ *?*

Le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est $Q(X) = X^2$.

Le polynôme Q possède une unique racine : 0. Si la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ était diagonalisable, le polynôme X serait annulateur. Or ce n'est pas le cas.

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

3.2. Méthode pratique de diagonalisation d'une matrice diagonalisable

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Recherche des valeurs propres

On détermine le spectre de A en étudiant le polynôme caractéristique de A ou un polynôme annulateur de A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Détermination des sous-espaces propres

Pour λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, on résout l'équation matricielle $(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)X = 0$ où l'inconnue X appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour déterminer le sous-espace propre associé E_λ.

On vérifie que A est diagonalisable en comparant $\dim E_\lambda$ et l'ordre de multiplicité de λ.

3) Choix d'une base de vecteurs propres

On choisit alors une base dans chaque E_λ et la réunion de ces bases constitue une base de vecteurs propres.

Soit P la matrice de passage de l'ancienne base à cette nouvelle base de vecteurs propres. Il existe une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Application 3

Diagonalisation de matrices

1) *Diagonaliser sur* $\mathbb{C}$ *la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2) *Diagonaliser sur* $\mathbb{R}$ *la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Les valeurs propres sont i et $-\mathrm{i}$.

Le sous-espace propre associé à i a pour équations : $\begin{cases} -\mathrm{i}\,x + y = 0 \\ -x - \mathrm{i}\,y = 0 \end{cases}$.

Le système est équivalent à $y = \mathrm{i}\,x$.

Le vecteur $(1,\ \mathrm{i})$ est un vecteur propre pour la valeur propre i.

Le sous-espace propre associé à $-\mathrm{i}$ a pour équations : $\begin{cases} \mathrm{i}\,x + y = 0 \\ -x + \mathrm{i}\,y = 0 \end{cases}$.

Le système est équivalent à $y = -\mathrm{i}\,x$.

Le vecteur $(\mathrm{i},\ 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $-\mathrm{i}$.

La matrice de passage est $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$.

Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\mathrm{i}/2 \\ -\mathrm{i}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2) Le polynôme caractéristique est :

$$-(X+1)^2(X-5).$$

Les valeurs propres sont -1 de multiplicité 2 et 5 de multiplicité 1.

• Le sous-espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 a pour équations :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Le système équivaut à l'équation $x + y + z = 0$. Le sous-espace E_{-1} est un plan.

Une base de E_{-1} est $((1,\ -1,\ 0);\ (1,\ 0,\ -1))$.

• Le sous-espace propre E_5 associé à la valeur propre 5 a pour équations

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}.$$

Le système est équivalent au système $\begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$.

Le sous-espace E_5 est une droite.

Le vecteur $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• La dimension de E_{-1} est égale à la multiplicité de la valeur propre -1. La dimension de E_5 est égale à la multiplicité de la valeur propre 5. La matrice est diagonalisable.

La matrice de passage est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

4 Endomorphismes trigonalisables

4.1. Définitions

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$.

Il n'est pas toujours possible de trouver une base dans laquelle la matrice de u est diagonale. Nous chercherons alors une base dans laquelle la matrice de u est la plus simple possible.

Nous dirons que l'endomorphisme u est **trigonalisable** sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Trigonaliser un endomorphisme signifie trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Réduire un endomorphisme signifie trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ou triangulaire supérieure.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous dirons que A est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice A dans la base canonique.

La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable. Tous les critères que nous étudierons pour les endomorphismes s'appliqueront aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trigonaliser une matrice A signifie trigonaliser l'endomorphisme associé, déterminer la matrice de passage P utilisée et la matrice triangulaire T correspondante et donner l'expression matricielle : $A = PTP^{-1}$.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Alors la matrice de u dans la base $B' = (e_n, ..., e_1)$ est triangulaire inférieure.
C'est pour cette raison que nous étudierons uniquement le cas des matrices triangulaires supérieures.

Lorsqu'on veut démontrer une propriété concernant des matrices trigonalisables, on peut la vérifier pour les matrices diagonalisables, puis conclure en utilisant la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables et la continuité d'une application bien choisie.

Application 4

Densité des matrices diagonalisables dans l'ensemble des matrices trigonalisables

1) *Montrer que* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert dense de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la matrice $M - \frac{1}{k}I_n$ est inversible si, et seulement si, 0 n'appartient pas au spectre de $M - \frac{1}{k}I_n$. C'est-à-dire, si, et seulement si, $\frac{1}{k}$ n'appartient pas au spectre de M.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or le spectre de M est fini. Donc $M - \frac{1}{k}\mathrm{I}_n$ est inversible pour k assez grand.

De plus : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(M - \frac{1}{k}\mathrm{I}_n\right) = M$.

D'autre part, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue Det.

$\mathcal{GL}(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose M trigonalisable.

Il existe une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telles que $M = PTP^{-1}$.

Pour tout entier k, notons T_k la matrice

$$T - \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k+2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & \cdots & & \frac{1}{k+n} \end{pmatrix}$$

et $M_k = PT_kP^{-1}$.

Pour k assez grand, les termes de la diagonale de T_k sont tous distincts.

Les matrices M_k sont alors diagonalisables.

$$\lim_{k\to+\infty} T_k = T.$$

Or, l'application $N \longmapsto PNP^{-1}$ est linéaire en dimension fine. Elle est continue.

La matrice M est la limite des matrices M_k.

4.2. Caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable

Théorème 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Un endomorphisme de E est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

• Si u est trigonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$P_u(X) = \mathrm{Det}(T - X\mathrm{I}_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - X).$$

Le polynôme caractéristique de u est scindé.

• Réciproquement, supposons que le polynôme caractéristique de u est scindé. Montrons que u est trigonalisable par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

Supposons que ce résultat soit vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à un entier $n \geqslant 2$ et pour tout endomorphisme de cet espace dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique P_u soit scindé sur $\mathbb{K}$.

$$\deg P_u \geqslant 1.$$

Notons λ une racine de P_u.

Il existe un vecteur propre x_1 tel que $u(x_1) = \lambda x_1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Prenons un supplémentaire, H, de $\mathbb{K}x_1$. Rien ne permet d'affirmer qu'il est stable par u.

Soit p la projection sur H de direction $\mathbb{K}x_1$. L'application $v = p \circ u_{|H}$ est un endomorphisme de H.

Vérifions que nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme v de H.

Pour toute base B de H, la matrice de u dans la base $B_1 = (x_1, B)$ est de la forme :

$$M_{B_1}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & \\ \vdots & M_B(v) \\ 0 & \end{pmatrix}$$ avec L dans $\mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $M_B(v)$ dans $\mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, matrice de v dans la base B.

$$P_u(X) = (\lambda - X)\text{Det}(M_B(v) - X\text{I}_{n-1}) = (\lambda - X)P_v(X).$$

Le polynôme caractéristique de v divise celui de u. Il est donc scindé sur $\mathbb{K}$.

Il existe une base B' de H dans laquelle la matrice de v est triangulaire supérieure.

La matrice de u dans la base $B'_1 = (x_1, B')$ est triangulaire.

Corollaire 10.1

Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 10.2

S'il existe un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, scindé sur $\mathbb{K}$, alors u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

Monad ACADEMY

Démonstration

Dans ce cas, le polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$. Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les mêmes que celles du polynôme minimal. Il est donc également scindé sur $\mathbb{K}$.

Méthode pratique

La démonstration du *théorème* 10 donne une méthode pratique.

On recherche la plus grande famille libre de vecteurs propres, puis on considère un supplémentaire du sous-espace engendré par cette famille et on procède comme dans la démonstration du *théorème*.

La diagonalisation, si elle est possible, détermine une matrice diagonale unique à l'ordre près des termes de la diagonale. En revanche, la trigonalisation ne détermine pas une matrice triangulaire unique, il y a cependant unicité des termes de la diagonale à l'ordre près.

Application 5

Un exemple de trigonalisation dans $\mathbb{R}^3$

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $(2 - X)^3$. Il est scindé. La matrice A est trigonalisable.

Est-elle diagonalisable ?

Si A était diagonalisable, on aurait $A = 2\text{I}_3$. Par conséquent, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Recherchons le sous-espace propre $E_2(u)$ associé à la valeur propre 2.

Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} -x+y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ -2x+2y+2z=0 \end{cases}.$$

Il est équivalent à $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

$E_2(u)$ est la droite engendrée par le vecteur $x_1=(1,1,0)$. Sa dimension est effectivement différente de la multiplicité de la valeur propre 1.

Appliquons la méthode de la démonstration.

Notons e_i, pour i dans $[\![1,3]\!]$, les vecteurs de la base canonique.

La famille (x_1,e_1,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $H=\text{Vect}(e_1,e_3)$ un supplémentaire de $\mathbb{K}x_1$.

$$u(e_1)=(1,1,-2)=x_1-2e_3\,.$$

$$u(e_3)=(3,1,4)=x_1+2e_1+4e_3\,.$$

La matrice de u dans la base (x_1,e_1,e_3) est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit v l'endomorphisme de H de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1,e_3).

Son polynôme caractéristique est $(2-X)^2$.

Recherchons le sous-espace propre $E_2(v)$.

Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} -2x+2y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}.$$

Il est équivalent à $x=y$.

Le vecteur de coordonnées $(1,1)$ dans la base (e_1,e_3) engendre l'espace des solutions.

$$E_2(v)=\text{Vect}(e_1+e_3).$$

Recherchons la matrice de u dans la base (x_1,e_1+e_3,e_1).

$$u(e_1+e_3)=2x_1+2(e_1+e_3)$$

$$u(e_1)=x_1-2(e_1+e_3)+2e_1.$$

La matrice de u dans la base (x_1,e_1+e_3,e_1) est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est souvent nécessaire de réduire simultanément deux endomorphismes. L'*application* suivante montre que c'est possible dès que les endomorphismes commutent.

Application 6

Réduction simultanée de deux endomorphismes.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, u et v deux endomorphismes trigonalisables.

On suppose que $uv=vu$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont triangulaires supérieures.

Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E.

Pour $\dim E=1$, c'est immédiat.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Supposons le résultat acquis pour tout espace de dimension n et tous les couples d'endomorphismes trigonalisables de cet espace qui commutent.

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n+1$, u et v deux endomorphismes de E tels que $uv = vu$.

Nous avons déjà montré dans le *chapitre* précédent, que u et v ont un vecteur propre commun e.

Soit F un supplémentaire de e et p la projection sur F de direction $\mathbb{K}e$.

Notons $\overline{u}$ l'endomorphisme $p \circ u_{|F}$ et $\overline{v}$ l'endomorphisme $p \circ v_{|F}$.

Considérons une base $B_0 = (e_1, ..., e_n)$ de F, la famille $(e, e_1, ..., e_n)$ est une base B_0' de E.

Notons $M(u)$ et $M(v)$ les matrices respectives de u et v dans la base B_0' de E et $M(\overline{u})$ et $M(\overline{v})$ les matrices $\overline{u}$ et $\overline{v}$ dans la base B_0 de F.

Il existe une matrice ligne $L(u)$ et un complexe λ tels que :

$$M(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L(u) \\ 0_{n,1} & M(\overline{u}) \end{pmatrix}.$$

En écrivant $M(v)$ de la même manière, l'égalité :

$$M(u)M(v) = M(v)M(u)$$

donne :

$$M(\overline{u})M(\overline{v}) = M(\overline{v})M(\overline{u}).$$

D'autre part, les polynômes caractéristiques de u et v sont scindés sur $\mathbb{K}$.

Or, les polynômes caractéristiques de $\overline{u}$ et $\overline{v}$ divisent ceux de u et v. Ils sont scindés sur $\mathbb{K}$.

On en déduit que $\overline{u}$ et $\overline{v}$ vérifient les hypothèses de récurrence, puis qu'il existe une base $B_0' = (e_1', ..., e_n')$ de F dans laquelle les matrices de $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont triangulaires supérieures.

Dans la base $(e', e_1', ..., e_n')$, les matrices de u et v sont également triangulaires supérieures.

► *Pour s'entraîner : ex. 8*

Mensa ACADEMY

5 Sous-espaces caractéristiques

5.1. Définition et premières propriétés

Parmi les matrices triangulaires, il existe des matrices encore plus simples : les matrices diagonales par blocs. Nous allons voir comment les obtenir.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose que le polynôme caractéristique P_u de u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Nous écrirons $P_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$, où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Dans ce cas : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, nous noterons : $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{I}_E)$ le sous-espace propre associé à λ_i et $F_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{I}_E)^{m_i}$.

Le sous-espace $F_{\lambda_i}(u)$ sera appelé **sous-espace caractéristique** associé à λ_i.

Théorème 11

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, les sous-espaces caractéristiques :

$$F_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{I}_E)^{m_i}$$

ont les propriétés suivantes :

- $\forall\ i \in [\![1, p]\!] \quad E_{\lambda_i}(u) \subset F_{\lambda_i}(u)$;

Les résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles des étudiants et peuvent donc n'être pas étudiés en première lecture. Cependant, cette méthode de réduction permet d'obtenir des matrices triangulaires et diagonales par blocs. Sous cette forme, les calculs de puissances de matrice sont souvent plus simples.
De plus, les calculs nécessaires à la réduction sont plus simples que ceux de la méthode générale, surtout pour les matrices d'ordre supérieur à 3.

Rapport Centrale, 2001

« On ne tiendra pas rigueur à un candidat de ne pas avoir vu une "astuce" ; en revanche, on sanctionnera lourdement la méconnaissance des notions fondamentales même (et surtout !) si elle est masquée par une utilisation intempestive de résultats hors programme. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Rapport X, 2001

« Avoir recours à une culture mathématique (maîtrisée !) dépassant le programme n'est pas un défaut en soi, bien au contraire. »

- pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, le sous-espace $F_{\lambda_i}(u)$ est stable par u ;
- $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$;
- $\forall\ i \in [\![1, p]\!] \quad \dim F_{\lambda_i}(u) = m_i$.

Démonstration

• Pour tout x de $E_{\lambda_i}(u)$, nous avons :

$$(u - \lambda_i \mathrm{I}_E)^{m_i}(x) = (u - \lambda_i \mathrm{I}_E)^{m_i - 1}((u - \lambda_i \mathrm{I}_E)(x)) = 0_E.$$

• C'est le noyau d'un polynôme de l'endomorphisme u.

• Il suffit d'appliquer le *théorème de décomposition des noyaux* et le *théorème de Cayley-Hamilton*.

• Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, notons v_i la restriction de u à $F_{\lambda_i}(u)$.

Le polynôme $(X - \lambda_i)^{m_i}$ est annulateur de v_i.

Le polynôme minimal de v_i admet λ_i comme unique racine. Le polynôme caractéristique de v_i admet donc également λ_i comme unique racine.

Le polynôme caractéristique de v_i est :

$$P_i(X) = (\lambda_i - X)^{n_i}$$

où n_i est la dimension de $F_{\lambda_i}(u)$.

Il divise celui de u.

Par conséquent : $n_i \leqslant m_i$.

Or : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$.

Donc : $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

Le degré de P_u est n. D'où : $n = \sum_{i=1}^{p} m_i$.

Montrons par l'absurde que : $\forall\ i \in [\![1, p]\!] \quad n_i = m_i$.

Sinon, il existe j dans $[\![1, p]\!]$ tel que $n_j < m_j$.

Alors : $n = \sum_{i=1}^{p} n_i < \sum_{i=1}^{p} m_i = n$ est absurde.

En conclusion, nous avons : $\forall\ i \in [\![1, p]\!] \quad \dim F_{\lambda_i}(u) = m_i$.

Corollaire 11.1

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad E_\lambda(u) = F_\lambda(u).$$

Démonstration

C'est une conséquence du *théorème* 11.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2. Réduction à l'aide des sous-espaces caractéristiques

Théorème 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure et diagonale par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0A_{p,p} \end{bmatrix}$$

De plus, pour tout i dans $\{1, ..., p\}$, les matrices $A_{i,i}$ de $\mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ sont triangulaires supérieures.

Démonstration

Utilisons les notations du *théorème* 11.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}.$$

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, le polynôme caractéristique de v_i est scindé. L'endomorphisme v_i de $F_{\lambda_i}(u)$ est trigonalisable.

Il existe une base B_i de $F_{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice A_{ii} de v_i est triangulaire supérieure.

La matrice de u dans la base obtenue par réunions des B_i est :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{bmatrix}.$$

Corollaire 12.1

Toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice triangulaire diagonale par blocs.

Méthode pratique pour la réduction d'un endomorphisme suivant les sous-espaces caractéristiques :

1) Nous calculons le polynôme caractéristique de u et nous vérifions qu'il est scindé. Il s'écrit alors :

$$P_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}.$$

2) Nous recherchons une base B_i de $F_{\lambda_i}(u)$.

Pour cela, nous introduisons les noyaux itérés $N_j = \text{Ker } (u - \lambda_i \text{I}_E)^j$ qui vérifient :

$$E_{\lambda_i}(u) = N_1 \subset N_2 \subset ..... \subset N_{m_i} = F_{\lambda_i}(u).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On construit la base B_i en partant d'une base de N_1, en la complétant en une base de N_2, puis en une base de N_3 et ainsi de suite jusqu'à obtention de m_i vecteurs indépendants.

La base B_i trigonalise l'endomorphisme induit par u sur $F_{\lambda_i}(u)$.

3) La réunion des bases B_i ainsi obtenues constitue alors une base B dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure et diagonale par blocs.

Remarque

Considérons deux noyaux itérés consécutifs distincts :

$$\text{Ker } (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^j \subset \text{Ker } (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^{j+1}.$$

Soit un vecteur e tel que :

$$e \in \text{Ker } (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^{j+1} \quad \text{et} \quad e \notin \text{Ker } (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^j.$$

Alors :

$$(u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^j (e) \neq 0 \text{ et } (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^{j+1} (e) = 0.$$

En posant $f = (u-\lambda_i \mathrm{I}_E)(e)$ nous obtenons un vecteur non nul tel que $(u-\lambda_i \mathrm{I}_E)^j (f) = 0$ puis une relation simple $u(e) = f + \lambda_i e$.

Quand cela est possible, il est intéressant de construire la base B_i en partant d'un dernier vecteur et en construisant le précédent comme nous venons de le faire pour construire f à partir de e.

Application 7

Un exemple de trigonalisation à l'aide des sous-espaces caractéristiques

Réduire, en utilisant les sous-espaces caractéristiques, les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1) Le polynôme caractéristique est $(1-X)(X-2)^2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -x+3y-2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

On obtient la droite engendrée par le vecteur $f_1 = (-1,1,2)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

C'est la droite engendrée par le vecteur $(1,0,-1)$.

$$(A-2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour équation :

$$x-2y+z=0.$$

Prenons $f_3 = (1,1,1)$.

$$(A-2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons $f_2 = (-1,0,1)$.

```
> with(linalg):
  factor(charpoly(A,x));v := [eigenvects(A)];
> A:=matrix(3,3, [0,3,-2,1,0,1,3,-5,5]):
```

$$(x-1)(x-2)^2$$

$$v := [[1, 1, \{[-1, 1, 2]\}], [2, 2, \{[-1, 0, 1]\}]]$$

```
> I3:=matrix(3,3,proc(i,j)
  if i=j then 1 else 0 fi end);
> kernel(multiply(A-2*I3,A-2*I3));
```

$$I3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{[2, 1, 0], [-1, 0, 1]\}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$$u(f_1) = f_1$$
$$u(f_2) = 2f_2 \quad \text{et}$$
$$u(f_3) = 2f_3 + f_2\,.$$

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PTP^{-1}.$$

2) Le polynôme caractéristique est $(X+1)^2(X-2)^2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -2x + y - 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il est de dimension 2, engendré par les vecteurs :

$$f_1 = (1, 2, 0, 0) \text{ et } f_2 = (0, 2, 0, 1).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -9x + 3y + z - 6t = 0 \\ -6x + z - 6t = 0 \\ 6x - 3y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

C'est la droite engendrée par le vecteur : $(1, 1, 0, -1)$.

$$(B + 2\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 0 & 18 \\ 18 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 9 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ -2x + y - t = 0 \end{cases}$$

Il est engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, -1)$ et $(0, 0, 1, 0)$.

Considérons $f_4 = (0, 0, 1, 0)$.

$$(B + 2\mathrm{I}_4)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nous prenons $f_3 = (1, 1, 0, -1)$.

```
> with(linalg) :A := matrix(4,4,
  [-7,3,1,-6,-6,2,1,-6,0,0,2,0,6,-3,-1,5]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> factor(charpoly(A,x)) ;v := [eigenvects(A)];
```

$$(x+1)^2(x-2)^2$$

$$v := [[-1, 2, \{[0, 2, 0, 1], [1, 2, 0, 0]\}], [2, 2, \{[-1, -1, 0, 1]\}]]$$

```
> I4:=matrix(4,4,proc(i,j)
  if i=j then 1 else 0 fi end);
```

$$I4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(multiply(A-2*I4,A-2*I4));
```

$$\{[-1, -1, 0, 1], [0, 0, 1, 0]\}$$

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à B.

$$u(f_1) = -f_1$$
$$u(f_2) = -f_2$$
$$u(f_3) = 2f_3 \quad \text{et}$$
$$u(f_4) = 2f_4 + f_3\,.$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) est

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = PTP^{-1}.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6 Puissance d'une matrice ou d'un endomorphisme

6.1. Puissance d'une matrice dont on connaît un polynôme annulateur

Voici une première méthode applicable dès que l'on connaît un polynôme annulateur.

Soit P un polynôme annulateur d'une matrice A dans $\mathcal{M}_n(K)$ et un entier k dans $\mathbb{N}$. Nous pouvons effectuer la division euclidienne de X^k par P : il existe un unique couple de polynômes (Q_k, R_k) tel que :

$$X^k = PQ_k + R_k \quad \text{avec} \quad \deg R_k < \deg P.$$

En appliquant ceci à la matrice A, nous obtenons :

$$A^k = Q_k(A)P(A) + R_k(A).$$

Or $P(A) = 0$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = R_k(A).$$

Remarques

- Il n'est pas nécessaire d'effectuer la division euclidienne, il suffit souvent de déterminer directement les coefficients de R_k en remplaçant x par des racines de P dans $x^k = Q_k(x)P(x) + R_k(x)$.
- Lorsque P admet une racine multiple, il n'y a plus assez de racines pour déterminer les coefficients de R_k. On utilise alors les polynômes dérivés de X^k.
- Lorsque la matrice A est inversible, nous pouvons également calculer A^k pour k dans $\mathbb{Z}$ en convenant d'écrire : $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Application 8

Polynôme annulateur et puissances de matrices

1) *Calculer les puissances successives des matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

2) *En déduire* e^A *et* e^B.

1) Calcul des puissances de A :

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P = -X^3 + 3X^2 - 2X = -X(2 - X)(1 - X)$$

$0 \in \mathrm{Sp}(A)$. La matrice A n'est pas inversible.

Effectuons la division euclidienne des puissances de X par P :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists ! Q_k \in \mathbb{R}[X] \quad \exists ! (a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$$
$$X^k = P(X)Q_k(X) + a_kX^2 + b_kX + c_k$$

Remplaçons successivement par les valeurs 0, 1 et 2 . Nous obtenons le système :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} c_k = 0 \\ a_k + b_k + c_k = 1 \\ 4a_k + 2b_k + c_k = 2^k \end{cases}$$

$a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = 1$ et pour tout entier k non nul : $a_k = -1 + 2^{k-1}$, $b_k = 2 - 2^{k-1}$ et $c_k = 0$.

Puis, d'après le *théorème de Cayley-Hamilton* :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad A^k = a_kA^2 + b_kA + c_kI_3$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

$$A^k = \begin{pmatrix} -4 + 3 \cdot 2^k & 8 - 4 \cdot 2^k & -20 + 12 \cdot 2^k \\ 3 \cdot 2^{k-1} & -2 \cdot 2^k & 6 \cdot 2^k \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous en déduisons :

$$e^A = \begin{pmatrix} 2-4e+3e^2 & -4+8e-4e^2 & 8-20e+12e^2 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}e^2 & 3-2e^2 & -6+6e^2 \\ -1+e & 2-2e & -4+5e \end{pmatrix}.$$

2) Calcul des puissances de B :

Le polynôme caractéristique de B est :

$$P = -X^3+5X^2-8X+4 = (2-X)^2(1-X).$$

Effectuons la division euclidienne des puissances de X par P :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists ! Q_k \in \mathbb{R}[X] \quad \exists ! (a_k,\ b_k\ ,\ c_k) \in \mathbb{R}^3$$
$$X^k = P(X)Q_k(X) + a_kX^2 + b_kX + c_k\ .$$

Le réel 2 est une racine double. Dérivons l'expression :

$$kX^{k-1} = P'(X)Q_k(X) + P(X)Q_k'(X) + 2a_kX + b_k$$

Remplaçons successivement par les valeurs 1 et 2 .

Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 4a_k + 2b_k + c_k = 2^k \\ 4a_k + b_k = k2^{k-1} \end{cases}.$$

Nous obtenons : $a_k = 1 + k2^{k-1} - 2^k$
$b_k = -4 - 3k2^{k-1} + 4.2^k$
et $c_k = 4 + 2k2^{k-1} - 3.2^k$.

Puis, d'après le *théorème de Cayley-Hamilton* :

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad B^k = a_kB^2 + b_kB + c_k.\mathrm{I}_3$$

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$

$$B^k = \begin{pmatrix} 1-k2^{k-1} & -2+2\cdot 2^k+k2^{k-1} & 1-2^k-k2^{k-1} \\ 2^k-1 & 2-2^k & 2^k-1 \\ -2+2\cdot 2^k+k2^{k-1} & 4-4\cdot 2^k-k2^{k-1} & -2+3\cdot 2^k+k2^{k-1} \end{pmatrix}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(B)$. La matrice B est inversible.

On vérifie que l'expression de la matrice B^k reste la même pour $k < 0$.

$$e^B = \begin{pmatrix} e-e^2 & -2e+3e^2 & e-2e^2 \\ e^2-e & 2e-e^2 & e^2-e \\ -2e+3e^2 & 4e-5e^2 & -2e+4e^2 \end{pmatrix}.$$

6.2. Puissance d'une matrice diagonalisable

Soit une matrice diagonalisable A de $\mathcal{M}_n(K)$. Il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ et une matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

telles que : $A = PDP^{-1}$. Soit un entier k dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ avec } D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Si A est inversible, la formule précédente reste encore valable pour k dans $\mathbb{Z}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 9

Diagonalisation et puissance d'une matrice

Calculer les puissances de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$X(X-1)(2-X).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite engendrée par $f_1 = (-4, 3, 2)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $f_2 = (-4, 0, 1)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite engendrée par $f_3 = (2, 1, 0)$.

Soit P la matrice de passage et $D = P^{-1}AP$.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons, pour tout entier naturel k non nul :

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8+3\times 2^{k+1} & 16-2^{k+3} & -40+3\times 2^{k+3} \\ 3\times 2^k & -2^{k+2} & 3\times 2^{k+2} \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas inversible, car 0 est valeur propre. Les puissances négatives de A n'existent pas.

Attention, cette expression n'est pas valable pour $k = 0$, car 0^k n'est nul que pour k non nul.

Mensa ACADEMY

6.3. Puissance d'une matrice trigonalisable

Soit une matrice A dans $\mathcal{M}_n(K)$ trigonalisable ; il existe une matrice P dans $\mathcal{GL}_n(K)$ et une matrice triangulaire diagonale par blocs :

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & A_p \end{bmatrix}$$

telles que : $A = PTP^{-1}$. Chaque A_i est de la forme $A_i = \lambda_i \mathrm{I} + N_i$ avec N_i nilpotente.

Soit un entier naturel k. Alors $A^k = PT^kP^{-1}$ avec :

$$T^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & A_p^k \end{bmatrix}.$$

Chaque A_i^k se calcule alors à l'aide de la formule du binôme puisque les matrices N_i et I commutent. Le calcul est assez court car les puissances de N_i sont nulles à partir d'un certain rang.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 10

Trigonalisation et puissances de matrices

Réduire la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calculer les puissances de B.

Le polynôme caractéristique de B est $(1-X)(2-X)^2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par le vecteur $f_1 = (-1, 1, 2)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite engendrée par le vecteur $(1, 0, -1)$.

$$(B - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour équation $x - 2y + z = 0$.

Considérons $f_3 = (1, 1, 1)$.

$$(B - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $f_2 = (-1, 0, 1)$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = 2\,\mathrm{I}_2 + N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la formule du binôme appliqué à $(2\mathrm{I}_2 + N^k)$ donne : $C^k = 2^k\mathrm{I}_2 + k2^{k-1}N$.

```
> with(linalg):
  P:=matrix(3,3,[-1,-1,1,1,0,1,2,1,1]):
  T:=matrix(3,3,[1,0,0,0,2^k,k*2^(k-1),0,0,2^k]):
  Q:=matrix(3,3,[-1,2,-1,1,-3,2,1,-1,1]):
  Bk:=evalm(P&*T&*Q);
```

$$B^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 - k2^{k-1} & -2 + 2^k + k2^{k-1} & 1 - 2^k - k2^{k-1} \\ -1 + 2^k & 2 - 2^k & -1 + 2^k \\ -2 + 2^{k+1} + k2^{k-1} & 4 - 2^{k+2} - k2^{k-1} & -2 + 3 \times 2^k + k2^{k-1} \end{pmatrix}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(B)$

La matrice B est inversible et :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & -2^{-2} \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'expression de B^k est encore vraie pour k dans $\mathbb{Z}$.

Application 11

Exponentielle de matrice e^A et $\lim_{p\to+\infty}\left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right)^p$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) a) *Déterminer le spectre de e^A en fonction de celui de A.*

b) *Montrer que :* $\mathrm{Det}(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

En déduire que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice e^A appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2) *Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que :*

$$\forall\ n \geqslant n_0 \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) a) *Pour tout* p *de* $\mathbb{N}^*$, *montrer que :*

$$N\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I_n} + \frac{A}{p}\right)^p\right) \leqslant \frac{N(A)^2}{2p}\mathrm{e}^{N(A)},$$

puis que la suite de fonctions :

$$\left(\mathrm{A} \ :\longmapsto \ \left(\mathrm{I_n} + \frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$$

converge uniformément sur tout compact vers la fonction exponentielle.

b) *Démontrer que :*

$$\mathrm{Det}\left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right) = 1 + \frac{\mathrm{Tr}(A)}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

En déduire que : $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathrm{Det}\left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right)^p = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

c) *Retrouver* $\mathrm{Det}(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.

1) a) La matrice A se décompose à l'aide des sous-espaces caractéristiques. Elle est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{bmatrix}.$$

De plus $A_{j,j}$ est dans $\mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$, en notant m_j la mutiplicité de la valeur propre λ_j de A.

Pour chaque bloc $A_{j,j}$, il existe une matrice M_j nilpotente telle que $A_{j,j} = \lambda_j \mathrm{I}_{m_j} + M_j$, Notons s l'indice de nilpotence de M_j.

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad A_{j,j}^k = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{k}{i} \lambda_j^{k-i} M_j^i$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_j\ ;\ j \in [\![1, r]\!]\}$.

La matrice T^k est triangulaire supérieure et les termes diagonaux sont les λ_j^k, chaque λ_j^k apparaissant autant de fois que λ_j.

Les termes diagonaux de la matrice e^T sont les e^{λ_j}, chaque e^{λ_j} apparaissant m_j fois.

La matrice e^A est semblable à la matrice e^T.

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{e}^A) = \{\mathrm{e}^\lambda\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

b) Par conséquent :

$$\mathrm{Det}(\mathrm{e}^A) = \prod_{j=1}^{r} (\mathrm{e}^{\lambda_j})^{m_j} = \mathrm{e}^{\sum\limits_{j=1}^{r} m_j\lambda_j} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Le déterminant de e^A n'est jamais nul.

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \mathrm{e}^A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}).$$

2) Soit N une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le déterminant est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image réciproque par Det de l'ouvert $\mathbb{C}^*$.

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathrm{e}^A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et e^A est la limite de la suite :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Il existe un rang n_0 à partir duquel le terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ de la suite appartient au voisinage $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ de e^A.

3) a) $\left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{p^k} A^k$

$$e^A - \left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right)^p$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{p}{k}}{p^k}\right) A^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

$$= \sum_{k=2}^{p} \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{p}\right)\right) \frac{1}{k!} A^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Or N est une norme d'algèbre.

$$N\left(e^A - \left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p})^p\right)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{p} \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{p}\right)\right) \frac{1}{k!} N(A)^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} N(A)^k$$

On montre par récurrence que :

$$1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{p} \leqslant \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{p}\right)$$

pour tout k de $[\![2, p]\!]$.

$$N\left(e^A - \left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{p}\right)^p\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{p} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{p}\right) \frac{1}{k!} N(A)^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} N(A)^k$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{p} \left(\frac{k(k-1)}{2p}\right) \frac{1}{k!} N(A)^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} N(A)^k$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\leqslant \frac{N(A)^2}{2p}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{1}{k!}N(A)^k+\frac{N(A)^2}{p(p-1)}\sum_{k=p-1}^{+\infty}\frac{1}{k!}N(A)^k$$

$$\leqslant \frac{N(A)^2}{2p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}N(A)^k \quad \text{pour } p \geqslant 3$$

Par conséquent :

$$\forall\, A \in BF(0,R)\quad N\left(\mathrm{e}^A-\left(\mathrm{I}_n+\frac{A}{p}\right)^p\right)\leqslant \frac{R^2}{2p}\mathrm{e}^R.$$

La suite : $\left(A \ :\longmapsto\ \left(\mathrm{I}_n+\frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction exponentielle.

b) $$\mathrm{Det}\left(\mathrm{I}_n+\frac{A}{p}\right)=\frac{1}{p^n}\mathrm{Det}(p\mathrm{I}_n+A)$$

$$=\frac{1}{p^n}P_A(-p)$$

en notant $P_A=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ le polynôme caractéristique de A.

$$\frac{1}{p^n}P_A(-p)=\sum_{i=0}^{n}a_i\,(-1)^i\,\frac{1}{p^{n-i}}$$

$$=a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{1}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$=1+\frac{\mathrm{Tr}(A)}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\mathrm{Det}\left(\mathrm{I}_n+\frac{A}{p}\right)^p=\left(\mathrm{Det}\left(\mathrm{I}_n+\frac{A}{p}\right)\right)^p$$

$$=\left(1+\frac{\mathrm{Tr}(A)}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)+o(1)}$$

c) Lorsque p tend vers $+\infty$, nous obtenons par continuité de Det et de l'exponentielle complexe :

$$\mathrm{Det}(\mathrm{e}^A)=\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$$

7 Suites à récurrence linéaire

7.1. Définition d'une suite à récurrence linéaire

Rapport X, 2000

« Plusieurs candidats ne trouvent pas toujours la forme générale des solutions d'une suite récurrente linéaire. »

Soit p un entier naturel non nul.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à **récurrence linéaire d'ordre p** s'il existe p scalaires $a_0,\dots,a_{p-1}$ tels que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\quad u_{n+p}=\sum_{k=0}^{p-1}a_ku_{n+k}\quad\text{et}\quad a_0\neq 0.$$

Une suite de ce type est entièrement déterminée par la connaissance de ses p premiers termes $u_0,\dots,u_{p-1}$.

Théorème 13

Soit $(a_0,\dots,a_{p-1})$ dans $\mathbb{K}^p$ avec $a_0\neq 0$. L'ensemble des suites vérifiant la relation :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\quad u_{n+p}=\sum_{k=0}^{p-1}a_ku_{n+k}$$

est un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

L'ensemble S des suites vérifiant cette relation est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de $\mathbb{K}$.

L'application φ de S dans $\mathbb{K}^p$ définie par $\varphi(u) = (u_0, ..., u_{p-1})$ est un isomorphisme.

Par conséquent, la dimension de S est celle de $\mathbb{K}^p$.

Pour déterminer u à partir des premiers termes nous allons poser :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = \begin{bmatrix} u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Avec cette notation nous obtenons la relation matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n \quad \text{en posant :} \quad A = \begin{bmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots\cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par une récurrence immédiate, nous obtenons l'expression : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$. Il suffit alors d'exprimer A^n.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A = (-1)^p \left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \right)$.

Le scalaire r est une valeur propre de A si, et seulement si :

$$r^p = \sum_{k=o}^{p-1} a_k r^k.$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique** de la suite u.

Application 12

Recherche d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 4

Déterminer la suite réelle u définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n,$$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 11 \ \textit{et} \ u_3 = 20.$$

Notons X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions, par une récurrence immédiate que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0.$$

Le polynôme caractéristique de A est $(X+1)^2(X-2)^2$. Il est scindé sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, il existe deux réels α et β et une matrice inversible P tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout entier n, la formule du binôme de Newton prouve que :

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n + n \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & n\alpha(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Nous avons également :

$$\begin{pmatrix} 2 & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\beta 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout entier n nous écrivons :

$$X_n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & n\alpha(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n\beta 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

Nous en déduisons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n = (a+nb)(-1)^n + (c+nd)2^n.$$

Ils sont déterminés de manière unique par le système :

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ -a - b + 2c + 2d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 11 \\ -a - 3b + 8c + 24d = 20 \end{cases}.$$

Nous obtenons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n+1)(-1)^n + n2^n.$$

```
> restart:sol:=rsolve(f(n+4) = 2*f(n+3) +3*f(n+2)
  -4*f(n+1)-4*f(n) , f(k)) ;
```

$$sol := \left(-\frac{4}{9}f(2) - \frac{4}{9}f(1) + \frac{32}{27}f(0) + \frac{5}{27}f(3)\right)(-1)^k + \left(-\frac{4}{9}f(0) - \frac{1}{9}f(3) + \frac{1}{3}f(2)\right)(k+1)(-1)^k - \left(-\frac{1}{9}f(2) - \frac{11}{18}f(1) - \frac{10}{27}f(0) + \frac{7}{54}f(3)\right)2^k + \left(-\frac{1}{6}f(1) - \frac{1}{9}f(0) + \frac{1}{18}f(3)\right)(k+1)2^k$$

```
> f(0) :=1:f(1) :=0:f(2) :=11:f(3) :=20:sol;
```

$$(k+1)(-1)^k - 2^k + (k+1)2^k$$

```
> simplify(sol);
```

$$(-1)^k k + (-1)^k + 2^k k$$

7.2. Suites recurrentes d'ordre 2

Mensa ACADEMY

Théorème 14

Soit a dans $\mathbb{C}$, b dans $\mathbb{C}^*$ et S l'ensemble des suites complexes vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Alors :

- S est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$;
- l'équation caractéristique est $r^2 - ar - b = 0$;
- si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes α et β, alors l'espace vectoriel S est :

$$\{(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}\}\ ;$$

- si l'équation caractéristique admet une racine double α, alors l'espace vectoriel S est :

$$\{(\lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Démonstration

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

Pour tout entier n, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

Une récurrence immédiate donne : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

Calculons A^n.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^2 - aX - b$.

• Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes α et β, alors la matrice A admet deux valeurs propres distinctes α et β. Elle est diagonalisable.

Le vecteur e_1 n'est jamais un vecteur propre car $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$.

Il existe une base de vecteurs propres, $\left(\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f\\1\end{pmatrix}\right)$ respectivement associés à α et à β.

Il existe λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}f\\1\end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$X_n = \lambda A^n\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix} + \mu A^n\begin{pmatrix}f\\1\end{pmatrix}.$$

Or $A\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate prouve que $A^n\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix} = \alpha^n\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix}$.

De même, $A^n\begin{pmatrix}f\\1\end{pmatrix} = \beta^n\begin{pmatrix}f\\1\end{pmatrix}$.

En reportant dans X_n, nous obtenons $u_n = \lambda\,\alpha^n + \mu\ \beta^n$.

Réciproquement, on vérifie que ces suites conviennent.

• Si l'équation caractéristique admet une racine double $\alpha = \frac{1}{2}a$. Alors $b = -\frac{1}{4}a^2$ et le sous-espace propre associé admet $x - \frac{1}{2}ay = 0$ pour équation. Il est de dimension 1. La matrice A n'est pas diagonalisable. Dans la base $\left(\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice $B = \begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1\\0 & \frac{a}{2}\end{pmatrix}$.

Il existe λ' et μ' dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix} = \lambda'\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix} + \mu'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad X_n = \lambda' A^n\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix} + \mu' A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix}\left(\frac{a}{2}\right)^n & n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\\0 & \left(\frac{a}{2}\right)^n\end{pmatrix}$.

Donc :

$$A^n\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix} = \left(\frac{a}{2}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{a}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_n = \lambda'\alpha^n + \mu' n\alpha^{n-1}.$$

Si $\alpha = 0$, la suite u est nulle à partir du rang 2.

Si $\alpha \neq 0$, posons $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'\alpha^{-1}$.

Dans les deux cas, il existe λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_n = \lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n.$$

Réciproquement, on vérifie que ces suites conviennent.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 14.1

Soit a dans $\mathbb{R}$, b dans $\mathbb{R}^*$ et S l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Alors :

- S est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- l'équation caractéristique est $r^2 - ar - b = 0$;
- si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes α et β, alors l'espace vectoriel S est :

$$\{(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}\ ;$$

- si l'équation caractéristique admet une racine double α, alors l'espace vectoriel S est :

$$\{(\lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}\ ;$$

- si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha = re^{i\theta}$ et $\overline{\alpha} = re^{-i\theta}$, alors l'espace vectoriel S est :

$$\{(\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Lorsque la forme trigonométrique n'est pas simple on écrit :

$$S = \{\lambda\alpha^n + \overline{\lambda}\overline{\alpha}^n\ ;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Démonstration

Il suffit d'étudier le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

On vérifie que toute solution de la forme $(\lambda' r^n e^{in\theta} + \mu' r^n e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit : $(\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et que, réciproquement, ces solutions conviennent.

Application 13

Étudier les suites réelles suivantes :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ *avec* $u_0 = 0$ *et* $u_1 = 1$.

2) $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$ *avec* $v_0 = 1$ *et* $v_1 = 1$.

3) $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n$ *avec* $w_0 = 1$ *et* $w_1 = 1$.

1) L'équation caractéristique de u est $r^2 - 2r - 1 = 0$. Elle admet deux racines distinctes $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ et $\beta = 1 + \sqrt{2}$.

Il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_n = \lambda(1 - \sqrt{2})^n + \mu(1 + \sqrt{2})^n.$$

Les réels λ et μ sont déterminés de manière unique par la donnée de $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Ils vérifient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda(1 - \sqrt{2}) + \mu(1 + \sqrt{2}) = 1 \end{cases}.$$

Nous obtenons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n.$$

2) L'équation caractéristique de v est $(r - 2)^2 = 0$.

Il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\quad v_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

Les réels λ et μ sont déterminés de manière unique par la donnée de $v_0 = 1$ et $v_1 = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Ils vérifient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\lambda + 2\mu = 1 \end{cases}.$$

Nous obtenons : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n - n2^{n-1}$.

3) L'équation caractéristique de v est $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \lambda(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mu(\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

Les réels λ et μ sont déterminés de manière unique par la donnée de $w_0 = 1$ et $w_1 = 1$.

Ils vérifient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}.$$

Nous obtenons : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad w_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 12.***

Mensa ACADEMY

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'un **endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie n** ou que **la matrice A associée à u est diagonalisable**, on peut montrer :

- qu'il existe un polynôme annulateur de u scindé qui ne possède que des racines simples ;
- que l'endomorphisme u admet n valeurs propres distinctes ;
- qu'il existe une base de vecteurs propres ;
- que le polynôme caractéristique de u est scindé et, pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension égale à la multiplicité de λ ;
- que la somme des dimensions des sous-espaces propres est la dimension de E ;
- que E est somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquels u induit une homothétie ;
- E est la somme directe des sous-espaces propres de u ;
- que le polynôme minimal de u est scindé et n'admet que des racines simples ;
- que l'endomorphisme u est la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour **diagonaliser une matrice A** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on procédera de la manière suivante :

• on détermine le spectre de A en étudiant le polynôme caractéristique de A ou un polynôme annulateur de A ;

• pour λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, on résout l'équation matricielle $(A-\lambda\, \mathrm{I}_n)X = 0$ où l'inconnue X appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On détermine le sous-espace propre associé E_λ ;

• on vérifie que A est diagonalisable en comparant $\dim E_\lambda$ et l'ordre de multiplicité de λ ;

• on choisit alors une base dans chaque E_λ et la réunion de ces bases constitue une base de vecteurs propres.

Soit P la matrice de passage de l'ancienne base à cette nouvelle base de vecteurs propres. Il existe une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

● Pour montrer qu'**un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie n** ou que la **matrice A associée à u est trigonalisable**, on peut montrer que :

• le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$;

• il existe un polynôme annulateur de u scindé ;

• le polynôme caractéristique de u est scindé.

● Pour **trigonaliser un endomorphisme u ou sa matrice canoniquement associée** A, on procédera de la manière suivante :

• on calcule le polynôme caractéristique P_A et le spectre de A ;

• on recherche la plus grande famille libre de vecteurs propres, puis on considère un supplémentaire F du sous-espace G engendré par cette famille ;

• soit p la projection sur F de direction G. On considère alors, l'endomorphisme $v = p \circ u_{|F}$ et sa matrice B dans une base de F ;

• on applique la méthode précédente à B et on continue ainsi jusqu'à la réduction complète.

● Pour **trigonaliser un endomorphisme u ou sa matrice canoniquement associée A sous la forme d'une matrice triangulaire et diagonale par blocs**, on procédera de la manière suivante :

• on calcule le polynôme caractéristique P_A et le spectre de A ;

• on cherche pour chaque valeur propre λ , de multiplicité $m(\lambda)$, la suite croissante des noyaux itérés associés :

$$\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^{m(\lambda)} ;$$

• puis, on détermine une base de $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^{m(\lambda)}$ adaptée à chacune de ces suites ;

• on réunit toutes les bases obtenues.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithmique TD 4

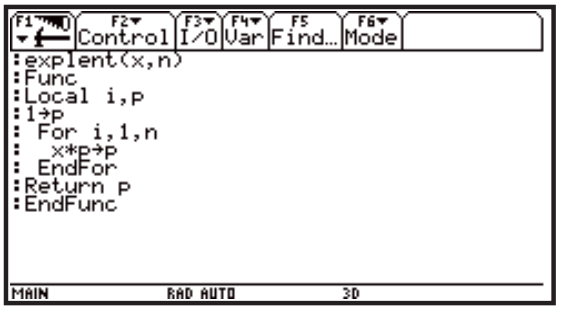
Exponentiation d'un nombre ou d'une matrice

L'algorithme d'exponentiation rapide proposé dans ce TD figure au programme des concours.

Il utilise, de façon implicite, l'écriture en base 2 d'un entier.

Algorithme « naif »

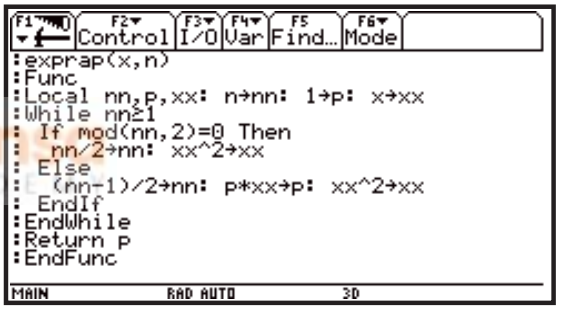
Le premier écran (*doc.* 1) donne un programme très simple de calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre ou d'une matrice. Le nombre d'itérations est n.



Doc. 1

Algorithme « rapide »

Le deuxième écran (*doc.* 2) donne un programme qui effectue le même calcul par un algorithme appelé « exponentiation rapide » et dont le nombre d'itérations est environ $\log_2(n)$.



Doc. 2

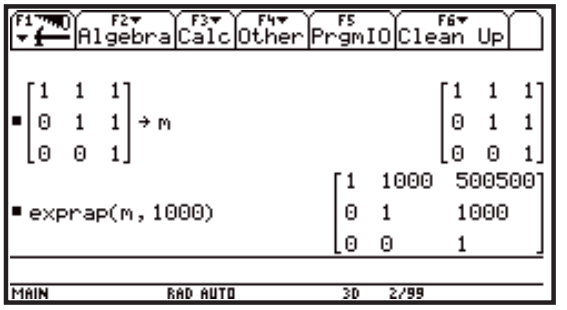
Tests

Nous vous invitons à comparer les temps de calcul de la puissance 1 000 d'une matrice 3×3 :

– avec la fonction existante : m^1 000,

– avec le programme : exprap (m, 1 000),

– avec le programme : explent (m, 1 000),



Doc. 3

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice résolu

Diagonalisation des endomorphismes de translation

ÉNONCÉ

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et w dans $\mathcal{L}(E)$. On définit les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ suivants :

$$\varphi_u : v \longmapsto uv, \quad \psi_w : v \longmapsto v\,w \quad \text{et} \quad \theta : v \longmapsto uv - v\,w.$$

1) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, φ_u est diagonalisable.

Lorsque u est diagonalisable, comparer $\mathrm{Sp}(u)$, $\mathrm{Sp}(\varphi_u)$

2) Montrer que w est diagonalisable si, et seulement si, ψ_u est diagonalisable.

Lorsque w est diagonalisable, comparer $\mathrm{Sp}(w)$ et $\mathrm{Sp}(\psi_w)$.

3) Si u et w sont diagonalisables, que peut-on dire de θ ?

4) On suppose que $\mathrm{Sp}(w) \neq \varnothing$ et θ diagonalisable.

a) Soit λ dans $\mathrm{Sp}(w)$. Montrer que :

$$\forall x \in E_\lambda(w) \quad \forall v \in \mathcal{L}(E) \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(\theta)(v((x) = P(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v(x).$$

b) En déduire que u et w sont diagonalisables. Retrouver le résultat de l'*application* 1.

c) Que peut-on dire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

CONSEILS

SOLUTION

1) • Montrons que les polynômes annulateurs de u et de φ_u sont les mêmes.

Montrons que : $\forall\ P \in \mathbb{K}[X]\ \ P(\varphi_u) = \varphi_{P(u)}$.

Il suffit de vérifier les égalités suivantes.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall v \in \mathcal{L}(E) \quad \varphi_u^k(v) = u^k\ v.$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\ \varphi_u\ (v) = (\alpha\ u)v.$$
$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall u' \in \mathcal{L}(E) \quad \forall v \in \mathcal{L}(E) \quad \varphi_{u+u'}(v) = \varphi_u(v) + \varphi_{u'}(v).$$

Or φ_u est nulle si, et seulement si, u est l'endomorphisme nul.

Par conséquent, $P(\varphi_u)$ est nul si, et seulement si, $P(u)$ est nul.

• Si u est diagonalisable, alors il existe un polynôme annulateur de u scindé dont les racines sont simples. Il est également annulateur de φ_u, donc φ_u est diagonalisable. La démonstration de la réciproque est analogue.

• Les polynômes annulateurs de u, φ_u sont les mêmes.

Par conséquent, les endomorphismes u, φ_u ont le même polynôme minimal et le même spectre.

2) La démonstration est identique.

3) • Si u et w sont diagonalisables, alors φ_u et ψ_w sont diagonalisables.

Or les endomorphismes φ_u et ψ_w commutent.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il existe une base B de E dans laquelle les matrices de φ_u et ψ_w sont simultanément diagonales.

Par conséquent, la matrice de θ est diagonale dans la base B.

Si u et w sont diagonalisables, alors θ est diagonalisable.

4) a) Soit v dans $\mathcal{L}(E)$.

Montrons par récurrence que :

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \forall\ x \in E_\lambda(w) \quad (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k(v(x)) = \theta^k(v)(x)).$$

Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est immédiat.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai au rang $k - 1$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k(v(x)) &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\ (v(x)) \\ &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(u\ v(x) - \lambda v(x)) \\ &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(u\ v(x) - v(\lambda\ x)) \\ &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(u\ v - vw)(x) \\ &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}u(v(x)) - (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(v(w(x)).\end{aligned}$$

Or u et $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}$ commutent, donc :

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k(v(x)) = u\ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(v(x)) - (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(v(w(x)).$$

L'hypothèse de récurrence au rang $k - 1$ nous donne :

$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(v(x)) = \theta^{k-1}\ (v)(x)$ car x appartient à $E_\lambda(w)$.

$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1}(v(w(x)) = \theta^{k-1}\ (v)(w\ (x))$ car $w(x)$ appartient également à $E_\lambda(w)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k(v(x)) &= u\theta^{k-1}\ (v)(x) - \theta^{k-1}\ (v)(w\ (x)). \\ &= \theta^k\ (v)(x).\end{aligned}$$

La récurrence est vérifiée.

Nous en déduisons, par combinaison linéaire que :

$$\forall\ x \in E_\lambda(w) \quad \forall\ v \in \mathcal{L}(E) \quad \forall\ P \in \mathbb{K}[X]$$

$$P(\theta\ )\ (v((x) = P(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v(x).$$

b) Supposons que θ est diagonalisable.

• Alors, il existe un polynôme Q annulateur de θ scindé dont les racines sont simples.

D'après **a)** nous avons :

$$\forall\ x \in E_\lambda(w) \quad \forall\ v \in \mathcal{L}(E) \quad Q(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v(x) = 0_E.$$

Puisque x est non nul :

$$\forall\ y \in E \quad \exists\ v \in \mathcal{L}(E) \quad v(x) = y.$$

Par conséquent :

$$\forall\ y \in E \quad Q(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(y) = 0_E.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le polynôme $Q(X-\lambda)$ est annulateur de u. Ce polynôme est scindé et ses racines sont simples.

L'endomorphisme u est diagonalisable.

• Montrons que w est également diagonalisable.

L'endomorphisme u est diagonalisable. Donc l'endomorphisme φ_u est diagonalisable.

Or $\theta = \varphi_u - \psi_w$ est diagonalisable.

Les endomorphismes φ_u et ψ_w commutent. Donc φ_u et θ commutent.

Il existe une base B de $\mathcal{L}(E)$ dans laquelle les matrices de φ_u et θ sont simultanément diagonales.

Par conséquent, la matrice de ψ_w est diagonale dans la base B.

L'endomorphisme ψ_w est diagonalisable. Donc l'endomorphisme w est diagonalisable.

• Pour $u = w$, on retrouve le résultat de l'*application* 1.

c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme u admet une valeur propre. Donc $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.

Danc ce cas, nous pouvons affirmer que : θ est diagonalisable si, et seulement si, u et w sont diagonalisables.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit s une permutation de $[\![1,n]\!]$ et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall\ i\in[\![1,n]\!]\quad u(e_i)=e_{s(i)}.$$

Utiliser une décomposition de s en cycles pour calculer les valeurs propres de u.

Montrer que u est diagonalisable.

2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$u(P)=nXP-(X^2-4)P'.$$

Montrer que u est diagonalisable et donner les sous-espaces propres.

3 Soit E un espace affine réel de dimension 3 et $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ un repère cartésien.

Reconnaître les applications affines définies analytiquement par :

1) $\begin{cases} x'=-2y+z-1\\ y'=-x-y+z-1\\ z'=-2x-4y+3z-2 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x'=-3x-4y+4z-6\\ y'=-2x-y+2z-3\\ z'=-4x-4y+5z+a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

3) $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}(3x+y+z-1)\\ y'=x+2y+z-1\\ z'=\dfrac{1}{2}(-x-y+z+1) \end{cases}$.

4 On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $u(N)=\mathrm{Tr}(N)\,I_n-N$.

1) Montrer que u est diagonalisable.

2) En déduire que, si $n\neq 1$, u est inversible.

5 Déterminer l'application u^{-1} réciproque de l'application u définie dans l'*exercice* 4 pour $n\neq 1$.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $B=(e_1,\ \dots,\ e_n)$ une base de E.

On définit l'endomorphisme u de E par :

$$\forall\ i\in[\![1,n]\!]\quad u(e_i)=\sum_{k=1}^{n}e_k.$$

Montrer que u est diagonalisable puis donner son spectre, son polynôme caractéristique et une base de vecteurs propres.

7 Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-3&4\\2&-2&3\end{pmatrix}$.

8 Réduire la matrice $A=\begin{pmatrix}-4&0&5\\0&1&1\\-2&0&3\end{pmatrix}$.

9 Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1&1&2\\-12&1&5&8\\0&-1&3&0\\-4&-1&1&6\end{pmatrix}$ en utilisant les sous-espaces caractéristiques.

10 Calculer les puissances entières de la matrice de l'*exercice* 9 de deux manières différentes.

11 Déterminer toutes les suites de réels vérifiant :

$$\forall\ n\in\mathbb{N}\quad u_{n+5}=u_{n+4}+5u_{n+3}-u_{n+2}-8u_{n+1}-4u_n.$$

12 Discuter suivant les valeurs des réels a, b et c, la possibilité de diagonaliser $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&2\end{pmatrix}$.

13 Soit un entier n strictement supérieur à 1, $(a_1,\ \dots,\ a_n)$, $(b_1,\ \dots,\ b_n)$ dans $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$ et M la matrice $(a_i\,b_j)_{i\in[\![1,n]\!],\ j\in[\![1,n]\!]}$.

Calculer les puissances de M. En déduire ses valeurs propres et ses vecteurs propres. La matrice M est-elle diagonalisable ?

14 Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Que dire si A n'est pas inversible ?

15 * Soit u, v et w trois endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

$$uw-wu=vw-wv=0\ \text{ et }\ uv-vu=w.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u, v et w sont triangulaires.

16 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et n deux endomorphismes de E tels que $un = nu$, n étant nilpotent.

1) Montrer que u est inversible si, et seulement si, $u+n$ est inversible.

2) Prouver que $\mathrm{Det}(u+n) = \mathrm{Det}(u)$.

17 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé.

Déterminer tous les sous-espaces stables par u.

18 ** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables et commutant deux à deux.

1) Montrer qu'ils admettent un vecteur propre commun.

2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les u_i sont triangulaires supérieures.

19 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer e^A.

20 ** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p. Pour toute norme N sur E on notera : $\overline{N}$ la norme subordonnée à N sur $\mathcal{L}(E)$.

Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, on notera :

$$\rho(u) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\},$$

appelé rayon spectral de u.

1) Montrer que $\rho(u) = 0$ si, et seulement si, u est nilpotent.

2) Vérifier que : $\forall\ \alpha \in \mathbb{C} \quad \rho(\alpha u) = |\alpha|\rho(u)$.

3) Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer que $\rho(u+v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$ et que $\rho(u \circ v) \leqslant \rho(u)\rho(v)$.

4) Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ et n dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\rho(u^n) = \rho(u)^n$.

5) Soit u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $\rho(u \circ v) = \rho(v \circ u)$.

6) Soit u dans $\mathcal{GL}(E)$. Montrer que $\rho(u^{-1}) \geqslant \rho(u)^{-1}$.

7) Montrer que pour toute norme N sur E et tout endomorphisme u, on a $\rho(u) \leqslant \overline{N}(u)$.

8) a) Pour toute base $(e_1, ..., e_p)$ de E et pour $N = \| \quad \|_\infty$ définie par :

$$N\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \max\{|x_i| \ ; \ i \in [\![1, p]\!]\}.$$

Montrer que la norme subordonnée de u de matrice A dans la base $(e_1, ..., e_p)$ est :

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \ ; \ i \in [\![1, p]\!]\right\}.$$

b) Soit une base $(e_1, ..., e_p)$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ dans $\mathbb{C}^{*p}$. Pour tout endomorphisme u de matrice A dans cette base, donner la matrice B de u dans la base $(\alpha_1 e_1, \ ..., \ \alpha_p e_p)$.

c) En déduire que, pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur E telle que $\overline{N}(u) < \rho(u) + \varepsilon$.

9) En déduire que pour u dans $\mathcal{L}(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'application nulle ;

(ii) pour tout x de E, la suite $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E ;

(iii) le rayon spectral de u est strictement inférieur à 1 ;

(iv) il existe une norme N sur E telle que $\overline{N}(u) < 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Espaces préhilbertiens réels

21

Mensa ACADEMY

Introduction

La donnée d'un produit scalaire sur un espace vectoriel permet de définir la notion d'orthogonalité et de construire des familles orthonormales.
Les espaces fonctionnels usuels sont munis d'une telle structure.
Ils ne sont pas de dimension finie.
Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement aux propriétés de ces espaces lorsque la dimension est quelconque. Le chapitre suivant sera consacré au cas de la dimension finie.

OBJECTIFS

- Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques sur un espace vectoriel.
- Formes quadratiques positives et définies positives.
- Produit scalaire réel.
- Espaces préhilbertiens réels.
- Orthogonalité, famille orthonormale.
- Supplémentaire orthogonal, somme directe orthogonale, projections orthogonales.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Formes bilinéaires

1.1. Espace vectoriel des formes bilinéaires

Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est dite **bilinéaire** sur E lorsque les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies pour tout x et y dans E par $g_x : y \longmapsto \varphi(x,y)$ et $d_y : x \longmapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires.

Théorème 1
L'ensemble $\mathcal{BL}(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{R})$.

Rapport CCP, 2003
« On affirme trop souvent que "c'est évident" (par exemple que $(A,B) \to \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est bilinéaire). »

On vérifie facilement que les applications g définie par : $g(x) = g_x$ et d définie par $d(x) = d_x$ sont linéaires de E dans E^*.

Une forme bilinéaire φ est **symétrique** lorsque :

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Théorème 2
L'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{BL}(E)$.

Dans ce cas, les applications linéaires associées à gauche et à droite sont les mêmes.

Mensa ACADEMY

Exemples

- L'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$$

est bilinéaire symétrique.

- Soit a dans $\mathbb{R}$. L'application φ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = P(a)Q(a)$ est bilinéaire symétrique.

- Soit φ une forme bilinéaire sur E et F un sous-espace de E. La restriction ψ de φ à $F \times F$ est une forme bilinéaire sur F. Si φ est symétrique, alors ψ est également symétrique.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.2. Forme quadratique

Soit φ une forme bilinéaire sur E. L'application Φ définie de E dans $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \varphi(x,x)$ est appelée **forme quadratique associée à φ**.

Exemples

- L'application Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(a)^2$ est une forme quadratique.

- La restriction d'une forme quadratique à un sous-espace F de E est une forme quadratique sur F.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 3

L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^E, +, \cdot)$.

Soit x et y deux vecteurs de E et Φ une forme quadratique associée à une forme bilinéaire φ sur E.

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \Phi(y).$$

Notons ψ la forme bilinéaire sur E définie par :

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x)).$$

Elle est symétrique.

Pour tout x de E, on a $\psi(x,x) = \varphi(x,x) = \Phi(x)$.

La forme quadratique Φ est également associée à la forme bilinéaire symétrique ψ.

Réciproquement, soit ψ une forme bilinéaire symétrique associée à Φ.

Pour tous x et y de E :

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + 2\psi(x,y) + \Phi(y).$$

L'application ψ est déterminée de manière unique par :

$$\psi'(x,y) = \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)].$$

Théorème 4

Soit Φ une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ associée. On l'appelle la **forme polaire de Φ.**
Elle est donnée par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)].$$

(Identité de polarisation)

L'application qui associe à toute forme quadratique sa forme polaire est un isomorphisme de $\mathcal{Q}(E)$ dans $\mathcal{BS}(E)$.

Corollaire 4.1

Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)]$ est bilinéaire sur E ;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = \Phi(x)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 4.2

Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- l'application $\varphi : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{4}[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]$ est bilinéaire sur E ;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = \Phi(x)$.

Théorème 5

Soit Φ une forme quadratique sur E. Alors :

- $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x)$;
- $\forall x \in E \quad \Phi(-x) = \Phi(x)$;
- $\Phi(0_E) = 0$.

Théorème 6 : Identité du parallélogramme

Soit Φ une forme quadratique sur E. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2(\Phi(x) + \Phi(y)).$$

⚠ *Une application qui possède ces propriétés n'est pas nécessairement une forme quadratique. Considérer l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ *et* $f(0, 0) = 0$.

Mensa ACADEMY

Application 1

L'application déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \text{Det}(A)$.

Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notons a et a' les deux vecteurs colonnes d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et b et b' ceux d'une matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\text{Det}(A+B) - \text{Det}A - \text{Det}B &= \text{Det}(a+b, a'+b') - \text{Det}(a, a') - \text{Det}(b, b') \\ &= \text{Det}(a, b') + \text{Det}(b, a').\end{aligned}$$

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2}[\text{Det}(a, b') + \text{Det}(b, a')].$$

Vérifions que φ est bilinéaire. Elle est symétrique par construction, il suffit de montrer qu'elle est linéaire à gauche.

Soit A_1, A_2 deux matrices et α_1, α_2 deux réels.

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B) \\ &= \frac{1}{2}[\text{Det}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b') + \text{Det}(b, (\alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2')] \\ &= \frac{1}{2}[\alpha_1 \text{Det}(a_1, b') + \alpha_2 \text{Det}(a_2, b') \\ &\qquad + \alpha_1 \text{Det}(b, a_1') + \alpha_2 \text{Det}(b, a_2')] \\ &= \alpha_1 \varphi(A_1, B) + \alpha_2 \varphi(A_2, B).\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\varphi(A, A) = \Phi(A)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'application Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'application φ :

$$(A, B) \longmapsto \frac{1}{2}[\mathrm{Det}(a, b') + \mathrm{Det}(b, a')]$$

est sa forme polaire.

Attention, Det n'est pas une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \neq 2$.

► *Pour s'entraîner : ex. 2.*

1.3. Expression en dimension finie

On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension n.

Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour tous vecteur x et y de E, notons :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k.$$

Alors :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Notons A la matrice $(\varphi(e_i, ej))_{i \in [\![1,n]\!] j \in [\![1,n]\!]}$.

La matrice $A = (\varphi(e_i, ej))_{i \in [\![1,n]\!] j \in [\![1,n]\!]}$ est appelée **matrice de la forme bilinéaire φ** dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Si nous notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, nous obtenons :

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY.$$

Remarque

Nous constatons que A est la matrice de l'application d associée à droite à φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et sa base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

Théorème 7

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit X et Y les matrices colonnes des coordonnées des deux vecteurs x et y de E dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $\varphi(x, y) = {}^tXAY$.

Exemple

Soit f dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et A la matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

L'expression de la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ associée à la matrice est :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \int_0^1 t^{i+j} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j t^{i+j} \right) f(t)\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j t^j \right) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 8

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application de $\mathcal{BL}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui associe à toute forme bilinéaire sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

La dimension de $\mathcal{BL}(E)$ est n^2.

Démonstration

La linéarité est immédiate. L'application φ est entièrement déterminée par la connaissance des $\varphi(e_i, e_j)$. Ceci prouve la bijectivité.

Les sous-espaces $\mathcal{BL}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Ils ont la même dimension n^2.

Corollaire 8.1

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad {}^tXAY = {}^tXBY.$$

Alors $A = B$.

Exemple

Soit u un endomorphisme de E et φ une forme bilinéaire sur E de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On définit la forme bilinéaire ψ sur E par :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \psi(x, y) = \varphi(u(x), u(y)).$$

Soit M la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Si nous notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, nous obtenons :

$$\psi(x, y) = {}^t(MX)\, A\, (MY) = {}^tX({}^tMAM)Y.$$

La matrice de ψ est $({}^tMAM)$.

Théorème 9

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. La forme bilinéaire φ est symétrique si, et seulement si, A est une matrice symétrique.

Démonstration

Supposons que la forme bilinéaire φ soit symétrique, alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \varphi(e_j, e_i) = \varphi(e_i, e_j).$$

Par conséquent, A est une matrice symétrique de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si ${}^tA = A$ nous avons :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY\,{}^tAX = {}^tYAX.$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 9.1

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application de $\mathcal{BS}(E)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute forme bilinéaire symétrique, sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, est un isomorphisme.

La dimension de $\mathcal{BS}(E)$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit Φ la forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire φ.

Notons A la matrice de φ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors, si nous notons X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, nous obtenons $\Phi(x) = {}^tXAX$.

Théorème 10

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Notons X la matrice colonne des coordonnées du vecteur x de E dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Alors $\Phi(x) = {}^tXAX$.

Exemple

Soit f dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et A la matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'expression de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à la matrice est :

$$\Phi(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^j\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 11

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application de $\mathcal{Q}(E)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute forme quadratique la matrice, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, de sa forme polaire, est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. La dimension de $\mathcal{Q}(E)$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice dans cette base de la forme polaire φ d'une forme quadratique Φ est appelée **matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de la forme quadratique Φ.**

Rapport Saint-Cyr, 1998

« La matrice d'une forme quadratique est souvent laborieuse à déterminer... »

Corollaire 11.1

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = {}^tXBX.$$

Alors $A = B$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associée à la forme polaire de la forme quadratique Φ est appelée **matrice** de la forme quadratique Φ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Comment reconnaître une forme quadratique sur son expression analytique ?

Soit A la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de Φ.

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, a_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (a_{i,j} + a_{j,i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_{i,i} + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\, a_{i,j}.$$

L'expression de Φ est un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ du vecteur x de E.

Réciproquement, soit Φ une application de E dans $\mathbb{R}$ qui s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ du vecteur x de E.

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 b_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j b_{i,j}.$$

Introduisons la matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,i} = b_i,$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \quad a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} b_{i,j}.$$

Alors : $$^tXAX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 b_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j b_{i,j}.$$

Si ψ est la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, alors :

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = \psi(x, x).$$

L'application Φ est une forme quadratique sur E. De plus :

$$\forall x \in E \quad \psi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i b_i + \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i y_j + y_i x_j) b_{i,j}.$$

Nous remarquons que l'on passe de $\Phi(x)$ à $\psi(x, y)$ en remplaçant les termes :

$$x_i^2 \text{ par } x_i y_i \quad \text{et} \quad x_i x_j \text{ par } \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i).$$

Théorème 12 : Règle du dédoublement des termes

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ du vecteur x de E.

⚠ *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non toutes deux symétriques, on peut avoir :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = {}^tXBX$$

et $$A \neq B.$$

Considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rapport X, 2000

« Nous avons de nouveau constaté des difficultés à relier les coefficients de la matrice d'une forme quadratique à ceux de son expression sous forme analytique. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 b_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j b_{i,j}$$

avec pour tout i et tout j de $[\![1, n]\!]$ distincts, b_i et $b_{i,j}$ réels.

Dans ce cas, on obtient l'expression de la forme polaire de Φ en dédoublant les termes de la manière suivante :

$$x_i y_i \text{ se substitue à } x_i^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) \text{ se substitue à } x_i x_j.$$

Application 2

Encore l'application déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \mathrm{Det}(A)$.

Considérons maintenant la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) *Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

2) *Donner l'expression de la forme polaire φ et la matrice de Φ.*

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$A = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$$

dans la base :

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}).$$

L'expression de $\Phi(A)$ dans cette base est :

$$\Phi(A) = xt - yz.$$

Il s'agit d'un polynôme homogène de degré 2 en (x, y, z, t). L'application Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) La règle du dédoublement des termes donne :

$$\varphi(A, A') = \frac{1}{2}(x't + xt') - \frac{1}{2}(y'z + yz').$$

La matrice de Φ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 12.1

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et Φ une forme quadratique sur E. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x quelconque de E. Alors la matrice de Φ dans cette base B est la matrice de la famille :

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)$$

dans la base B^*.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

En effet, si $\forall x \in E \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 b_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j b_{i,j}$,

pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) = b_k x_k + \sum_{i \neq k} x_i a_{i,k}.$$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E. Considérons la forme quadratique Φ sur E définie par :

$$\Phi(x) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

Alors : $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = 2(n-1)x_j - 2 \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} x_i.$

La matrice de Φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est :

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & & n-1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 13

Soit $(e_1, \ldots, e_n), (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E et P la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Si φ est une forme bilinéaire sur E de matrices A et A' respectivement dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Alors $A' = {}^tPAP$.

Démonstration

Notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et X', Y' les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$:

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y'.$$

Par conséquent :

$$\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \forall Y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX'A'Y' = {}^tX'({}^tPAP)Y'.$$

Le *corollaire* 8.1 prouve que $A' = {}^tPAP$.

Corollaire 13.1

Soit $(e_1, \ldots, e_n), (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E, P la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(e'_1, \ldots, e'_n)$ et Φ une forme quadratique sur E de matrice A dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Alors la matrice de Φ dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est ${}^tPAP$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui représentent la même forme quadratique dans des bases différentes, sont dites **congruentes**. Les matrices A et B sont congruentes si, et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que : $B = {}^tPAP$.

► *Pour s'entraîner : ex. 3.*

1.4. Rang d'une forme bilinéaire symétrique ou d'une forme quadratique

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et φ une forme bilinéaire symétrique.

Le noyau de φ noté $\operatorname{Ker}\varphi$ est le noyau de l'application linéaire g associée à gauche :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E\,;\forall\, y \in E \quad \varphi(x,y) = 0\}.$$

Le noyau d'une forme quadratique Φ est le noyau de sa forme polaire φ.

Exemple

Considérons la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x,y) = x^2 - y^2$.

L'expression de q est un polynôme homogène de degré 2 en (x,y).

La forme polaire associée est :

$$\varphi((x,y),(x',y')) = xx' - yy'.$$

Le noyau de q est :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\forall\,(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad xx' - yy' = 0\} = \{(0,0)\}.$$

Le cône isotrope $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ q(x,y) = 0\}$ est :

$$\{(x,x)\,;x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x)\,;x \in \mathbb{R}\}$$

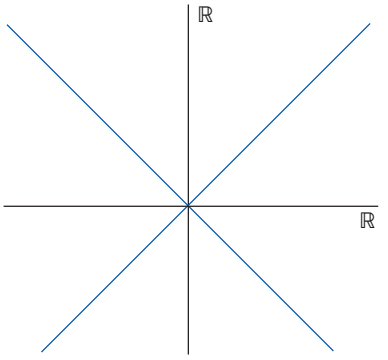
réunion de deux droites de $\mathbb{R}^2$ (*doc.* 1).

Ne pas confondre le noyau de Φ avec :

$$\{x \in E\,;\Phi(x) = 0\}.$$

Un vecteur x tel que $\Phi(x) = 0$ est appelé un **vecteur isotrope**. L'ensemble $\{x \in E\,;\Phi(x) = 0\}$ est un cône, appelé **cône isotrope** de Φ.
Nous avons cependant :

$$\operatorname{Ker}\Phi \subset \{x \in E\,;\Phi(x) = 0\}.$$



Doc. 1.

Théorème 14

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, Φ une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire et A sa matrice dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$. Le noyau de Φ est le sous-espace de E d'équation $AX = 0$.

Démonstration

$x \in \operatorname{Ker}\Phi \Leftrightarrow \forall\, y \in E \quad \varphi(x,y) = 0.$

$\Leftrightarrow \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAY = 0$

$\Leftrightarrow {}^tXA = 0$

$\Leftrightarrow {}^tAX = 0$

$\Leftrightarrow AX = 0.$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Une forme bilinéaire symétrique φ ou une forme quadratique Φ sont dites **non dégénérées** lorsque leur noyau est réduit à $\{0_E\}$, c'est-à-dire lorsque l'application linéaire d associée à droite (ou g à gauche) est injective.

Elles sont dites **dégénérées** dans le cas contraire.

Corollaire 14.1

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, Φ une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire et A sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Les formes Φ ou φ sont dégénérées si, et seulement si, $\text{Det}(A) = 0$.

Le déterminant $\text{Det}(A)$ est appelé **discriminant de Φ dans la base** $(e_1, \dots, e_n)$.

On note :

$$\Delta_{(e_1,\dots,e_n)}(\Phi) = \text{Det}(A).$$

Corollaire 14.2

Une forme quadratique Φ sur un espace vectoriel E de dimension finie est non dégénérée si, et seulement si, son discriminant dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est non nul.

Exemple

Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Mensa ACADEMY

La matrice de q est :

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}.$$

Son discriminant dans la base canonique est :

$$\text{Det}A = -\frac{1}{4}(b^2 - 4ac).$$

Soit φ une forme bilinéaire symétrique, le **rang** de φ est le rang de l'application linéaire g associée à gauche (ou d à droite).

Soit Φ une forme quadratique. Le **rang** de Φ est celui de sa forme polaire φ. On note :

$$\text{rg}\,(\varphi) = \text{rg}\,(\Phi).$$

Remarque

La nullité du discriminant est indépendante de la base considérée.

$\text{Det}({}^t P A P) = (\text{Det}(P))^2 \text{Det}(A)$.

La matrice P étant inversible, $(\text{Det}(P))^2 > 0$.

Corollaire 14.3

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, Φ une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire et A sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Alors :

$$\text{rg}\,(\varphi) = \text{rg}\,(\Phi) = \text{rg}\,(A).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 3

Recherche de quelques noyaux

Déterminer les noyaux des formes quadratiques suivantes, donner leurs rangs et dire si elles sont dégénérées lorsque c'est possible.

1) *La forme quadratique* Φ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2).$$

2) *Soit* a *dans* $\mathbb{R}$. *La forme quadratique* Φ *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\Phi(P) = P(a)^2.$$

3) *La forme quadratique* Φ *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\Phi(A) = \mathrm{Det}(A).$$

4) *La forme quadratique* Φ *sur* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$\Phi(x, y, z) = (x - y)^2 + z^2.$$

1) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A est dans le noyau de Φ si, et seulement si :

$$\forall\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Tr}(AB) = 0.$$

En particulier, pour $B = {}^tA$ on obtient :

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}^2 = 0,$$

puis $A = 0$.

La réciproque est immédiate.

$$\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}.$$

La forme Φ est non dégénérée et le rang de Φ est n^2.

2) Soit P un polynôme, il appartient au noyau de Φ si, et seulement si :

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}[X] \quad P(a)Q(a) = 0.$$

Le noyau de Φ est l'idéal engendré par $(X - a)$:

$$\{(X - a)P\ ;\ P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

La forme quadratique Φ est dégénérée. L'image de l'application linéaire d n'est pas de dimension finie. Nous ne pouvons pas déterminer le rang de Φ.

3) La matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartient au noyau de Φ si, et seulement si :

$$\forall\, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Det}(a, b') + \mathrm{Det}(b, a') = 0.$$

En particulier pour b nul, on obtient :

$$\forall\, b' \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Det}(a, b') = 0.$$

Si a n'est pas nul, il existe un vecteur b' de $\mathbb{R}$ tel que (a, b') soit libre. Dans ce cas :

$$\mathrm{Det}(a, b') \neq 0.$$

Par conséquent, a est nul. De même, nous obtenons a' nul, puis $A = 0$. La réciproque est immédiate :

$$\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}.$$

La forme quadratique Φ est non dégénérée et son rang est 4.

4) L'expression analytique de Φ est un polynôme homogène de degré 2 en (x, y, z). L'application Φ est une forme quadratique et sa forme polaire est :

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z), (x', y', z')) &= xx' - xy' - x'y + yy' + zz' \\ &= (x - y)(x' - y') + zz'.\end{aligned}$$

Le vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de Φ si, et seulement si :

$$\forall\, (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \quad (x - y)(x' - y') + zz' = 0.$$

Nous obtenons la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations :

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

La forme quadratique Φ est dégénérée et son rang est 2.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 4

Orthogonalité pour une forme quadratique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, Φ une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux pour Φ quand $\varphi(x, y) = 0$.

1) *Soit A une partie de E, l'orthogonal de A est l'ensemble, noté $A^\perp$, des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A.*

a) *Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Comparez A et $(A^\perp)^\perp$.*

b) *Donner $E^\perp$ et $\{0_E\}^\perp$.*

2) *Dans cette question, on suppose E de dimension finie.*

Si Φ est non dégénérée, montrer que, pour tout sous-espace F de E :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Peut-on en déduire que $F \oplus F^\perp = E$?

1) $0_E \in A^\perp$, $A^\perp \subset E$. On vérifie facilement la stabilité par combinaison linéaire de $A^\perp$ et l'inclusion : $A \subset (A^\perp)^\perp$.

$$E^\perp = \operatorname{Ker} \Phi \quad \text{et} \quad \{0_E\}^\perp = E.$$

2) La forme quadratique Φ est non dégénérée. Donc l'application linéaire g associée à gauche à φ est injective de E dans E^*.

L'espace vectoriel E est de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$. Par conséquent, g est un isomorphisme de E dans E^*.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Notons $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale dans E^*.

Soit x dans E.

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall\, y \in F \quad \varphi(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, y \in F \quad g(x)(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad g(x)(e_i) = 0. \end{aligned}$$

Or $g(x)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle g(x), e_i \rangle\, e_i^*$$

dans la base B^*.

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow g(x) \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$$

$$F^\perp = g^{-1}(\operatorname{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)).$$

$$\dim F^\perp = \dim g^{-1}(\operatorname{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)).$$

Or g est un isomorphisme.

Par conséquent :

$$\dim F^\perp = n - p.$$

Puis :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Nous avons $F \subset (F^\perp)^\perp$.

L'égalité des dimensions assure l'égalité :

$$F = (F^\perp)^\perp.$$

On ne peut pas en déduire $F \oplus F^\perp = E$. En effet, considérez la forme Φ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x, y) = x^2 - y^2.$$

Nous avons déjà montré qu'elle est non dégénérée.

Soit la droite $D = \operatorname{Vect}((1, 1))$. Vous vérifierez que $D^\perp = D$.

► *Pour s'entraîner : ex. 4.*

1.5. Formes quadratiques positives et définies positives

Une forme quadratique Φ est **positive** lorsque $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout x de E.

Elle est **définie positive** lorsque $\Phi(x) > 0$ pour tout x non nul de E.

Une forme quadratique Φ est **négative** lorsque $-\Phi$ est positive et **définie négative** lorsque $-\Phi$ est définie positive.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

- La forme quadratique Φ sur $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\Phi(x, y, z) = (x - y)^2 + z^2$$

est positive, mais elle n'est pas définie positive.

- La forme quadratique Φ, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$$

est définie positive.

En effet

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}^2$$

et $\mathrm{Tr}({}^tAA) > 0$ pour A non nulle.

- La forme quadratique Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$, n'est ni positive, ni négative.

Nous savons que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}).$$

Soit A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}({}^tAA).$$

La restriction de Φ à $\mathcal{S}$ est définie positive.

Soit B une matrice de $\mathcal{AS}_{n(\mathbb{R})}$. Alors ${}^tB = -B$.

$$\Phi(B) = \mathrm{Tr}(B^2) = \mathrm{Tr}(-{}^tBB) = -\mathrm{Tr}({}^tBB).$$

La restriction de Φ à $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ est définie négative.

La forme quadratique Φ n'est ni positive ni négative.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique. On dira que φ est **positive** (resp. **négative**) lorsque la forme quadratique associée est positive (resp. négative).

On dira que φ est **définie positive** (resp. **définie négative**) lorsque la forme quadratique associée est définie positive (resp. définie négative).

Soit A une matrice symétrique.

On dira que A est **positive** si la forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associée est positive :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX \geqslant 0.$$

On dira que A est **définie positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0.$$

A est **négative** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX \leqslant 0,$$

et **définie négative** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX < 0.$$

Remarque

Supposons qu'il existe deux vecteurs x et y tels que :

$$\Phi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \Phi(y) < 0.$$

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on a :

$$\Phi(y + tx) = t^2\Phi(x) + 2t\varphi(x, y) + \Phi(y).$$

Le trinôme du second degré en t obtenu admet au moins une racine non nulle.

Si une forme quadratique change de signe, alors elle s'annule au moins une fois en un point z de E distinct de 0_E.

Le mot « défini » ne sera employé que pour des formes quadratiques de signe constant.

⚠ *Lorsqu'une quantité mathématique a un sens, on dit également qu'elle est bien définie. Attention de ne pas confondre cette notion avec celle de définie positive.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Matrices de Hilbert

Montrer que la matrice :

$$H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i\in[\![1,n]\!]\, j\in[\![1,n]\!]}$$

est définie positive.

Remarquons tout d'abord, que :

$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \forall\, j \in [\![1,n]\!]$

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}\,t.$$

L'expression de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à la matrice est :

$$\Phi(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}\,t.$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \Phi(x) \geqslant 0.$

$$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}\,t = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [0,1] \quad \sum_{i=1}^n x_i t^i = 0.$$

Or un polynôme de degré n qui admet une infinité de racines est nul.

Donc :

$$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0$$

La forme quadratique Φ est définie positive, la matrice H également.

Mensa ACADEMY

Théorème 15 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit Φ une forme quadratique positive de forme polaire φ. On a :

$$\forall\,(x,y) \in E^2 \quad \varphi(x,y)^2 \leqslant \Phi(x)\Phi(y).$$

Si la forme Φ est définie positive, il y a égalité si, et seulement si, la famille (x,y) est liée.

Démonstration

Soit x et y dans E. Pour tout t de $\mathbb{R}$, le réel $\Phi(y+tx)$ est positif.

$$\Phi(y+tx) = t^2\Phi(x) + 2t\varphi(x,y) + \Phi(y).$$

Pour $\Phi(x) = 0$, le réel $\Phi(y+tx)$ est de signe constant si, et seulement si : $\varphi(x,y) = 0$. L'inégalité est vérifiée.

Pour $\Phi(x) \neq 0$, le trinôme du second degré $t^2\Phi(x) + 2t\varphi(x,y) + \Phi(y)$ est du signe de $\Phi(x)$ si, et seulement si, son discriminant $\varphi(x,y)^2 - \Phi(x)\Phi(y)$ est négatif ou nul.

Il y a égalité pour x non nul lorsque le trinôme du second degré admet une unique racine t_0.

Dans ce cas $\Phi(y+t_0x) = 0$. Si on suppose Φ définie positive, on a $y + t_0x = 0$.

Pour x nul, la famille (x,y) est liée. Réciproquement, si la famille (x,y) est liée, on vérifie facilement que :

$$|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 15.1

Une forme quadratique est définie positive si, et seulement si, elle est positive et non dégénérée.

Démonstration

Soit Φ une forme quadratique positive.

Montrons que $\text{Ker}\,\Phi = \{x \in E\,;\Phi(x) = 0\}$.

On a déjà : $\text{Ker}\,\Phi \subset \{x \in E\,;\Phi(x) = 0\}$. Montrons la deuxième inclusion. Soit x dans E tel que $\Phi(x) = 0$ et y dans E. L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* prouve que $\forall\, y \in E \quad \varphi(x, y) = 0$. Par conséquent :

$$\{x \in E\,;\Phi(x) = 0\} \subset \text{Ker}\,\Phi.$$

La forme quadratique Φ est définie positive si, et seulement si, elle est positive et $\text{Ker}\,\Phi = \{0_E\}$.

Remarque

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* est vérifiée dès que Φ est de signe constant.

Corollaire 15.2 : Inégalité de Minkowski

Soit Φ une forme quadratique positive. On a :

$$\forall\,(x, y) \in E^2 \quad \sqrt{\phi(x+y)} \leqslant \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}.$$

Si la forme Φ est définie positive, il y a égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est positivement liée : $x = ky$ ou $y = kx$, où k appartient à $\mathbb{R}^+$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* donne :

$$\forall\,(x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) \leqslant \sqrt{\phi(x)}\sqrt{\phi(y)}.$$

Puis : $\Phi(x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$

$$\leqslant \Phi(x) + 2\sqrt{\phi(x)}\sqrt{\phi(y)} + \Phi(y)$$

$$\leqslant (\sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)})^2.$$

Il y a égalité si, et seulement si : $\varphi(x, y) = \sqrt{\phi(x)}\sqrt{\phi(y)}$. Ceci a lieu s'il y a égalité dans l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* et si $\varphi(x, y)$ est positif.

Application 6

Décomposition en carrés

Les formes quadratiques suivantes sont-elles positives ? définies positives ?

1) $\Phi(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + \dfrac{1}{8}z^2 + 4xy + yz.$

2) $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + xz + yz).$

3) $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 6xy - 4xz + 7yz.$

4) $\Phi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy - 6yz + 2xz.$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) $\Phi(x,y,z) = (x+2y)^2 + 2y^2 + \frac{1}{8}z^2 + yz$

$= (x+2y)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}z\right)^2$.

La forme quadratique Φ est positive, son cône isotrope est égal au noyau. Le noyau a pour système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

C'est la droite engendrée par le vecteur (1, 1, 1).
Le rang de Φ est 2.

La forme quadratique Φ n'est pas définie positive.

2) $\Phi(x,y,z) = 2\left(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 - 3yz.$

$= 2\left(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{2}(y-z)^2.$

La forme quadratique Φ est positive. Le noyau a pour système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

C'est la droite engendrée par le vecteur (1, 1, 1). Le rang est 2. La forme quadratique Φ n'est pas définie positive.

3) $\Phi(x,y,z)$

$= 2\left(x + \frac{3}{2}y - z\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}y - z\right)^2 + 4y^2 - 9z^2 + 7yz.$

$= 2\left(x + \frac{3}{2}y - z\right)^2 - \frac{1}{2}y^2 - 11z^2 + 13yz.$

$= 2\left(x + \frac{3}{2}y - z\right)^2 - \frac{1}{2}(y - 13z)^2 + \frac{147}{2}z^2.$

La forme quadratique Φ n'est pas positive.

4) $\Phi(x,y,z) = (x - y + z)^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4yz$

$= (x - y + z)^2 + (y - z)^2 + 3z^2.$

La forme quadratique Φ est définie positive, donc non dégénérée. Le rang est 3.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.*

2 Structure d'espace préhilbertien réel

2.1. Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, définie positive, est un **produit scalaire** sur E.

Un produit scalaire φ est donc, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (x,y) \in E \times E \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- pour tout x de E, l'application $y \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire ;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Dans ce chapitre, nous noterons $(\,|\,)$ le produit scalaire.

Nous avons vu, dans le § 1, qu'une forme bilinéaire positive est définie positive si, et seulement si, elle est non dégénérée.

Théorème 16
Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire si, et seulement si, elle est bilinéaire, symétrique, positive et non dégénérée.

Rapport CCP, 2003
« La définition complète d'un produit scalaire n'est pas toujours connue (oubli de la bilinéarité ou encore de définie positive...). »

Rapport X, 2000
« La surprise est venue du fait que des quatre propriétés d'un produit scalaire : forme bilinéaire, symétrique définie positive, c'est la première, c'est-à-dire la bilinéarité, qui donne le plus lieu à erreur, beaucoup de candidats se contentant de vérifier simplement l'homogénéité par rapport à la multiplication par un scalaire, et d'autres au contraire l'oubliant pour ne vérifier que son caractère de morphisme de groupe additif.
La positivité a parfois donné lieu à des formulations sidérantes. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 16.1
Soit φ un produit scalaire sur E. Alors :

$$x = 0_E \Leftrightarrow \forall\, y \in E \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Rapport ENS Lyon, 1997

« Certains candidats pensent que non dégénérée signifie :
$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$. *»*

Soit φ un produit scalaire sur E. En analyse, nous avons montré que :

L'application $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ définit sur E une norme, appelée *norme euclidienne* et notée $\| \ \|_2$.

Dans ce chapitre, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible avec une autre norme, nous noterons $\| \ \|$ la norme euclidienne $\| \ \|_2$.

L'application $x \longmapsto \|x\|^2$ est une forme quadratique et φ est sa forme polaire.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ, est appelé **espace préhilbertien réel** et noté (E, φ).

Lorsqu'il est complet, on l'appelle **espace de Hilbert.**

Lorsqu'il est de dimension finie non nulle, on dit que c'est un **espace euclidien.**

Un espace euclidien est de dimension finie. Il est complet.

Tout espace euclidien est un espace de Hilbert.

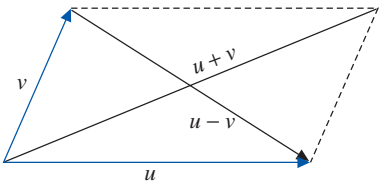
► *Pour s'entraîner : ex.7.*

2.2. Relations et inégalités entre produit scalaire et norme

Rappelons sans démonstration, quelques relations, déjà étudiées en Première année.

Théorème 17
Soit $(\ |\ )$ un produit scalaire sur E et $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. Alors :

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$;
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$;
- $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (**Identité du parallèlogramme**) ;
- $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (**Identité de polarisation**).



Doc. 2.

Théorème 18
Soit $(\ |\ )$ un produit scalaire sur E. Alors :

$\forall (x, y) \in E \times E \quad |(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$ (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**) ;

$\forall (x, y) \in E \times E \quad |(x \mid y)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ liée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 18.1

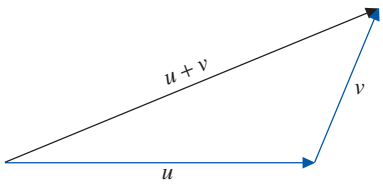
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel.

Le produit scalaire $(\ |\ )$ est continu lorsqu'on munit $E \times E$ de la norme produit.

Corollaire 18.2

Soit φ un produit scalaire sur E. Alors :

- $\forall (x, y) \in E \times E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**Inégalité de Minkowski**) :
- $\forall (x, y) \in E \times E \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ \quad x = ky$ ou $y = kx$.



Doc. 3.

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

2.3. Exemples usuels d'espaces préhilbertiens réels

Exemples

■ Vous avez vu en Première année que l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \longmapsto (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé **produit scalaire canonique**.

La norme associée est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

L'espace $(\mathbb{R}^n, (\ |\ ))$ est un espace euclidien

■ Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices réelles.

L'application φ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} = \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t AB).$$

en notant : $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

La norme associée est :

$$A \longmapsto \sqrt{\int_{i=1}^{m} \int_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, la norme correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{n^2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'espace $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi)$ est un espace euclidien.

■ Dans $\mathbb{R}[X]$, notons :

$$P = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$$

deux polynômes, les familles $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels sont à support fini. L'application φ de $\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(P \mid Q) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i,$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. La norme associée est :

$$P \longmapsto \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}.$$

L'espace $(\mathbb{R}[X], (\ \mid\ ))$ est un espace préhilbertien réel. Nous avons vu dans *Analyse* 1 qu'il n'est pas complet.

La restriction de $(\ \mid\ )$ à $\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.$(\mathbb{R}_n[X], (\ \mid\ ))$ est un espace euclidien.

■ Soit a et b deux réels fixés tels que : $a < b$.

L'application $\varphi : (f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$, définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}[\![a,b]\!],\mathbb{R}$.

La norme associée, notée N_2 est définie par :

$$N_2(f) = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}\,t}.$$

Il s'agit de la norme de la convergence en moyenne quadratique.

L'espace $(\mathcal{C}^0([a,\mathrm{b}],\mathbb{R}),\varphi)$ est un espace préhilbertien réel. Il n'est pas complet. Il suffit de considérer la suite de fonctions impaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur [- 1, 1] par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, 1-\dfrac{1}{n+1}\right] \\ (n+1)(1-t) & \text{si} \quad x \in \left[1-\dfrac{1}{n+1}, 1\right] \end{cases}.$$

■ L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'application φ de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(u,v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. La norme associée $u \longmapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$ sera notée N_2. L'espace $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}),\varphi)$ est un espace de Hilbert.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

■ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. L'application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f,g)\longmapsto (f\mid g)=\int_I fg$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable, à valeurs réelles.

La norme définie par ce produit scalaire est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique et notée N_2.

$$\forall\, f\in E\quad N_2(f)=\left(\int_I f^2\right)^{1/2}.$$

L'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien réel. Il n'est pas complet.

■ En analyse vous avez défini un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions réelles continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (f,g)\in \mathcal{C}_{2\pi}\times\mathcal{C}_{2\pi}\quad (f\mid g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg.$$

La norme associée est $f\longmapsto\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2}$.

L'espace $(\mathcal{C}_{2\pi},(\mid))$ est un espace préhilbertien réel. Il n'est pas complet.

2.4. Construction d'espaces préhilbertiens réels

Exemples

■ *Sous-espace préhilbertien*

Soit $(E,(\mid))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de $(\mid)$ à $F\times F$ est encore un produit scalaire. On dit qu'il est **induit** par celui de E. On garde, en général, la même notation.

F est appelé sous-espace préhilbertien réel de $(E,(\mid))$.

La topologie de $(F,(\mid))$ est la topologie induite sur F par celle de $(E,(\mid))$.

■ *Produit d'une famille finie d'espaces préhilbertiens réels*

Soit $(E_1,(\mid)_1)\ldots(E_p,(\mid)_p)$ une famille de p espaces préhilbertiens réels.

On définit sur $E=E_1\times\cdots\times E_p$ la forme bilinéaire symétrique φ en posant : pour tout $x=(x_1,\ldots,x_p)$ de E et tout $y=(y_1,\ldots,y_p)$ de E :

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{p}(x_i\mid y_i)_i.$$

On vérifie facilement que φ est un produit scalaire sur E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'espace $(E_1 \times \cdots \times E_p, \varphi)$ est un espace préhilbertien réel.

La norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est $x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2}$.

Si on note $\| \ \|_\infty$ la norme produit définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x_i\|_i \ ; i \in [\![1, p]\!]\}.$$

$\forall x \in E \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{p}\|x\|_\infty.$

Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|$ sont équivalentes.

La topologie produit est identique à la topologie de $(E_1 \times \cdots \times E_p, \varphi)$.

En particulier, si les $(E_1, (\ |\ )_1) ... (E_p, (\ |\ )_p)$ sont des espaces de Hilbert, l'espace $(E_1 \times \cdots \times E_p, \varphi)$ est un espace de Hilbert.

C'est le cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Il est le produit des n espaces $(\mathbb{R}, (\ |\ ))$.

2.5. Isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels

Soit (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) deux espaces préhilbertiens réels.

On appelle **isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels** tout isomorphisme d'espaces vectoriels f de E_1 sur E_2 qui conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E_1^2 \quad \varphi_2(f(x), f(y)) = \varphi_1(x, y).$$

Les espaces (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de E_1 sur E_2.

Un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de (E, φ) sur lui-même est appelé **automorphisme orthogonal**.

On vérifie facilement que :

- le composé de deux isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels ;
- l'isomorphisme réciproque d'un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels ;
- l'identité d'un espace préhilbertien réel (E, φ) sur lui-même est un automorphisme orthogonal.

En particulier, on en déduit le *théorème* suivant.

Théorème 19

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel. L'ensemble des automorphisme orthogonaux de E forme un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ noté $\mathcal{O}(E)$ et appelé **groupe orthogonal** de E.

Rapport CCP, 2003

« Le groupe orthogonal est mal connu et les matrices orthogonales sont souvent des matrices "dont les colonnes sont orthogonales". »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 20

Soit (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) deux espaces préhilbertiens réels, N_1 et N_2 les normes associées.

Une application linéaire f de E_1 dans E_2, surjective, est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels, si et seulement si, elle est isométrique :

$$\forall x \in E_1 \quad N_2(f(x)) = N_1(x).$$

Démonstration

Soit f une application linéaire surjective de E_1 dans E_2 qui conserve les normes.

Montrons que l'application f est injective.

Soit x quelconque dans E_1 :

$$\begin{aligned} f(x) = 0_{E_2} &\Leftrightarrow N_2(f(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow N_1(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0_{E_1}. \end{aligned}$$

L'application f est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Le produit scalaire s'exprime à partir de la norme par l'identité de polarisation. Par conséquent, l'application f conserve les produits scalaires.

L'application f est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels.

La réciproque est immédiate.

Mensa ACADEMY

Corollaire 20.1

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un automorphisme de E.

Il est équivalent de dire :

(i) l'automorphisme u est orthogonal ;

(ii) l'automorphisme u conserve le produit scalaire ;

(iii) L'automorphisme u conserve la norme : $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

2.6. Norme subordonnée d'un endomorphisme d'un espace préhilbertien réel

Théorème 21

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel, $\|\ \|$ la norme associée et u un endomorphisme continu de E. Alors la norme subordonnée à la norme euclidienne de u est :

$$\|u\| = \sup\{(u(x) \mid y)\,;(x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\}.$$

Démonstration

Soit x et y dans E. L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* permet d'écrire :

$$(u(x) \mid y) \leqslant |(u(x) \mid y)| \leqslant \|u(x)\|\,\|y\| \leqslant \|u\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

Remarque

Un automorphisme orthogonal conserve la norme, donc il conserve les distances :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|u(x - y)\| \\ &= \|u(x) - u(y)\|. \end{aligned}$$

C'est pourquoi un automorphisme orthogonal est parfois appelé une isométrie vectorielle de l'espace préhilbertien $(E, \langle\ |\ \rangle)$.

Le programme de Deuxième année n'aborde pas l'étude des applications affines d'un espace préhilbertien dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal. Ces applications conservent aussi les distances et sont nommées isométries. En dimension 2 ou 3, ce sont les déplacements et antidéplacements que vous avez étudiés en Première année.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent l'ensemble :

$$\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\}$$

est majoré par $\|u\|$ et :

$$\sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \|u\|.$$

Si l'endomorphisme u est nul,

$$\sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \|y\| \leqslant 1\} = \|u\| = 0.$$

Sinon :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in E \quad \|a\| = 1 \quad \text{et} \quad \|u\| - \varepsilon < \|u(a)\| \leqslant \|u\|.$$

$\|u\| > 0$, en choisissant ε assez petit, on peut être certain de la non nullité de $\|u(a)\|$.

$$\left(u(a) \mid \frac{u(a)}{\|u(a)\|}\right) = \|u(a)\|.$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in E \quad \|a\| = 1 \quad \text{et} \quad \|u\| - \varepsilon < \left(u(a) \mid \frac{u(a)}{\|u(a)\|}\right) \leqslant \|u\|.$$

Or :

$$\left(u(a) \mid \frac{u(a)}{\|u(a)\|}\right) \leqslant \sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \|u\|.$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|u\| - \varepsilon < \sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \|u\|.$$

On en déduit :

$$\sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \quad \|y\| \leqslant 1\} = \|u\|.$$

Mensa ACADEMY

3 Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée.
Un vecteur x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.
Un vecteur x est dit **orthogonal** à un vecteur y lorsque $(x \mid y) = 0$.
On note $x \perp y$.

Théorème 22 : Théorème de Pythagore
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée. Alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Soit A une partie de E, **l'orthogonal** de A est l'ensemble :

$$\{x \in E\,;\forall a \in A \quad x \perp a\}.$$

On le note $A^\perp$ ou A°. Rappelons les propriétés de l'orthogonal.

Rapport Centrale, 2003

« Le fait qu'un espace vectoriel soit euclidien ou préhilbertien permet d'utiliser des notions comme celles de distance, d'orthogonalité etc... »

Rapport CCP, 2003

« On pense à utiliser Pythagore mais on oublie parfois les carrés des normes. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 23

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel, A et B des parties de E. Alors :

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$;
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$.

Lorsque deux parties A et B de E vérifient l'une des propriétés équivalentes $A \subset B^\perp$ ou $B \subset A^\perp$ on dit que les **parties** A et B sont **orthogonales.**

Théorème 24

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E. Alors :

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$;
- $F \subset (F^\perp)^\perp$. En particulier $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration

Soit x dans $F \cap F^\perp$. Alors $\|x\|^2 = (x \mid x) = 0$.

Deux **sous-espaces** F et G de E sont dit **orthogonaux** lorsque :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y.$$

F et G sont orthogonaux si, et seulement si : $G \subset F^\perp$ ou $F \subset G^\perp$.

Application 7

Recherche de l'orthogonal d'un sous-espace

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire :*

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

et F *le sous-espace des fonctions polynômiales sur* $[0, 1]$. *Trouver* $F^\perp$.

Soit f dans $F^\perp$. L'application f est continue sur $[0, 1]$.

D'après le *théorème de Weierstrass*, l'application f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(fp_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2.

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)p_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or f appartient à $F^\perp$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f(t)p_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$, puis $f = 0_E$.

Par conséquent $F^\perp = \{0_E\}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 9.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Familles orthogonales

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée.

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est **orthogonale** si :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0.$$

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est **orthonormale** si :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad (e_i \mid e_j) = \delta_i^j$$

où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.

Exemple

Dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}_{2\pi}, (\ |\ ))$, la famille $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_p(x) = \cos(px)$ est orthogonale.

$$(f_p \mid f_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $p \neq q$, on trouve $(f_p \mid f_q) = 0$

Pour $p = q$ non nul, $(f_p \mid f_q) = \frac{1}{2}$

Pour $p = q = 0, (f_p \mid f_q) = 1$.

Mensa ACADEMY

Théorème 25

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormale est libre.

Démonstration

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E orthogonale formée de vecteurs non nuls.

Considérons une combinaison linéaire nulle de cette famille :

$$\sum_{i\in J} \lambda_i e_i = 0_E.$$

Pour tout k de J, on a : $0 = \left(e_k \mid \sum_{i\in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in J} \lambda_i (e_k \mid e_i) = \lambda_k (e_k \mid e_k)$.

Or $(e_k \mid e_k) \neq 0$ car $e_k \neq 0_E$. Donc $\lambda_k = 0$. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

Théorème 26 : Relation de Pythagore

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de E finie. Alors :

$$\left\|\sum_{i\in I} e_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|e_i\|^2.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.3. Supplémentaires orthogonaux

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien réel. Deux sous-espaces F et G sont dits **supplémentaires orthogonaux** lorsque :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G.$$

On note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Théorème 27
Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors :

$$G = F^\perp \quad \text{et} \quad F = (F^\perp)^\perp.$$

Démonstration

Par hypothèse : $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.

$F \perp G \Rightarrow G \subset F^\perp$. Par conséquent : $F + F^\perp = E$.

Mais : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Donc $E = F \oplus F^\perp$.

Nous avons :

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus G \quad \text{et} \quad G \subset F^\perp.$$

Nous obtenons $G = F^\perp$.

On montre de la même manière que $F = G^\perp$. On en déduit $F = (F^\perp)^\perp$.

On appelle **projecteur orthogonal** tout projecteur p de E tel que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires orthogonaux.

Théorème 28
Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal, si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal $G = F^\perp$ et si $\mathrm{Ker}\, p = F^\perp$.

Si F admet un supplémentaire orthogonal, le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de direction $F^\perp$, on le note p_F.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 11.*

⚠ *Un sous-espace quelconque d'un espace préhilbertien réel n'admet pas toujours de supplémentaire orthogonal.*
Le sous-espace de l'application 7 vérifie $F^\perp = \{0_E\}$.
Par conséquent :

$$(F^\perp)^\perp = E \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp \neq F.$$

Le sous-espace F ne peut pas admettre de supplémentaire orthogonal.

3.4. Distance d'un élément à un sous-espace

Théorème 29
Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée.

Soit a un élément de E et F un sous-espace de E. Alors :

- pour tout x de F : $\|a - x\| = \mathrm{d}(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^\perp$;
- il existe au plus un vecteur x qui vérifie $\|a - x\| = \mathrm{d}(a, F)$;
- si F admet un supplémentaire orthogonal, $p_F(a)$ est l'unique vecteur x de F tel que :

$$\|a - x\| = \mathrm{d}(a, F) \quad \text{et} \quad \|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \mathrm{d}(a, F)^2.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Si l'utilisation du théorème de projection orthogonale est assez bien maîtrisée, sa justification à l'aide du théorème de Pythagore ne l'est pas toujours aussi bien. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit x dans F.

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad \|a-(x+ky)\|^2 - \|a-x\|^2 = -2k(a-x \mid y) + k^2\|y\|^2.$$

Si x vérifie $\|a-x\| = \mathrm{d}(a,F)$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad -2k(a-x \mid y) + k^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Ceci exige : $\forall y \in F \quad (a-x \mid y) = 0$. Par conséquent $a-x \in F^\perp$.

Réciproquement, on suppose que $a-x$ appartient à $F^\perp$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad \|a-(x+ky)\|^2 - \|a-x\|^2 \geqslant 0.$$

Or, tout z de F peut s'écrire $x+ky$. Par conséquent :

$$\forall z \in F \quad \|a-z\| \geqslant \|a-x\|.$$

On en déduit que $\mathrm{d}(a,F)$ est atteint en x et vaut $\|a-x\|$.

On suppose qu'il existe un x de F tel que $a-x \in F^\perp$.

Montrons par l'absurde, l'unicité de x.

S'il existe un vecteur x' de F tel que $a-x' \in F^\perp$, alors $(x-a)-(x'-a)$ appartient à $F^\perp$.

On en déduit que $x-x'$ appartient à $F \cap F^\perp$. Puis $x = x'$.

Montrons l'existence de x lorsque F admet un supplémentaire orthogonal.

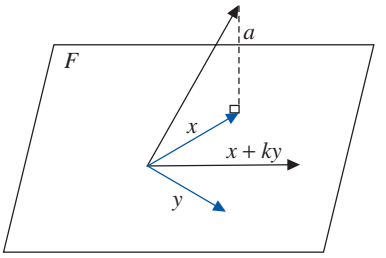
On sait que dans ce cas, $p_F(a)$ appartient à F et que $a-p_F(a)$ est dans $F^\perp$.

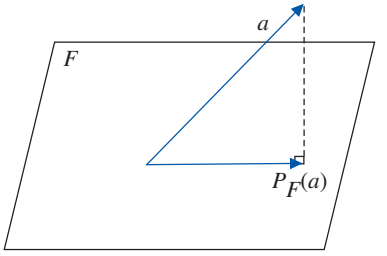
Le vecteur $p_F(a)$ convient.

D'autre part : $a = p_F(a) + (a-p_F(a))$. Le *théorème de Pythagore* donne :

$$\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \|a-p_F(a)\|.^2$$

puis $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \mathrm{d}(a,F)^2$.





Doc. 4.

Application 8

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace complet

Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée.

Soit F un sous-espace complet de E.

1) *Montrer que, pour tout a de E, il existe un élément b de F tel que $\|a-b\| = d(a,F)$.*

2) *En déduire que F admet un supplémentaire orthogonal.*

1) Soit $\alpha = \mathrm{d}(a,F)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in F \quad \alpha \leqslant \|a-x_n\| \leqslant \alpha + \frac{1}{n+1}.$$

Nous allons montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant p \Rightarrow \alpha^2 \leqslant \|a-x_n\|^2 \leqslant \alpha^2 + \varepsilon.$$

Pour $m \geqslant p$ et $n \geqslant p$, on utilise l'identité du parallèlogramme :

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|(a-x_n)-(a-x_m)\|^2 = 2(\|a-x_n\|^2 + \|a-x_m\|^2) - \|2a-(x_n+x_m)\|^2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, $2(\|a - x_n\|^2 + \|a - x_m\|^2) \leqslant 4(\alpha^2 + \varepsilon)$ et $\|a - \dfrac{x_n + x_m}{2}\| \geqslant \alpha$.

On en déduit :

$$m \geqslant p \quad \text{et} \quad n \geqslant p \Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \leqslant 4\varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F.

Or F est complet. Il existe un élément b de F tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

Par continuité de $\|\ \|$, on obtient :

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \|a - x_n\| = \|a - b\|.$$

D'après le *théorème* 28, $a - b \in F^\perp$.

On en déduit :

$$\forall a \in E \quad \exists b \in F \quad a - b \in F^\perp.$$

2) Pour tout vecteur a de E il existe un vecteur b de F qui vérifie $\|a - b\| = \mathrm{d}(a, F)$. Alors $a - b$ appartient à $F^\perp$. Le vecteur a s'écrit $a = b + (a - b)$ avec b dans F et $a - b$ dans $F^\perp$.

Par conséquent $E = F + F^\perp$.

Mais $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Donc $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

3.5. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Théorème 30

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel.

Tout sous-espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal.

Démonstration

Il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F. Soit x dans E et $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$.

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad (e_k \mid y) = (e_k \mid x).$$

On en déduit : $x - y \in F^\perp$. Or, tout x de E s'écrit $x = y + (x - y)$.

Donc $E = F + F^\perp$.

On sait que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Par conséquent $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

Corollaire 30.1

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E de dimension finie.

- $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.
- $\operatorname{codim} F^\perp = \dim F$.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$$

et

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \textbf{(Inégalité de Bessel)}.$$

Remarque

C'est aussi une conséquence de l'*application* 8.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Les trois premiers points résultent du *théorème* 27.

Au cours de la démonstration précédente, nous avons vu que $x - y \in F^{\perp}$.

D'après le *théorème* 29, $y = p_F(x)$.

De plus $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \mathrm{d}(x, F)^2$. Donc $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

Nous en déduisons : $\sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 12.***

3.6. Somme directe orthogonale

Théorème 31

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien réel.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux.

Alors la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe.

Démonstration

Soit k dans I. $\forall i \in I \quad i \neq k \Rightarrow F_i \subset F_k^{\perp}$.

On en déduit que $\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} F_i \subset F_k^{\perp}$.

Puis : $F_k \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} F_i \right) \subset F_k \cap F_k^{\perp} = \{0_E\}$.

En conclusion : $\forall k \in I \quad F_k \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} F_i \right) = \{0_E\}$.

La somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux. La somme directe $\bigoplus_{i \in I} F_i$ est dite **somme directe orthogonale**.

On la note $\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in I}} F_i$.

Théorème 32

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien réel.

Soit $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E telle que : $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in [\![1,n]\!]}} F_i$.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$, on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \qquad \textbf{(Théorème de Pythagore)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$, on a :

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que : $E = \overset{\perp}{\underset{i\in I}{\oplus}} F_i$. Pour tout i de I, soit p_i la projection sur F_i de noyau $\overset{\perp}{\underset{\substack{j\in I\\ j\neq i}}{\oplus}} F_j$. Comme pour toute somme directe, on a : $\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$, $p_i \circ p_i = p_i$ et $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $i \neq j$.

Le projecteur p_i est un projecteur orthogonal, car $\overset{\perp}{\underset{\substack{j\in I\\ j\neq i}}{\oplus}} F_j$ est un supplémentaire orthogonal de F_i.

Les projecteurs p_i sont appelés les projecteurs orthogonaux associés à la décomposition de E en somme directe orthogonale $E = \overset{\perp}{\underset{i\in I}{\oplus}} F_i$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique** sur E, on peut :

• montrer que l'expression de $\Phi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans une base B est un polynôme homogène de degré 2 ;

• vérifier que l'application $\varphi : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)]$ est bilinéaire sur E et que :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = \Phi(x) ;$$

• vérifier que l'application $\varphi : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{4}[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]$ est bilinéaire sur E et que :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = \Phi(x).$$

● Pour trouver **la forme polaire φ d'une forme quadratique Φ sur E**, on peut :

• si la forme quadratique s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base B du vecteur x de E, dédoubler les termes de la manière suivante :

$$x_i^2 \text{ en } x_i y_i \text{ et } x_i x_j \text{ en } \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) ;$$

• si la forme quadratique s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base B du vecteur x de E, écrire la matrice de φ dans cette base qui est la matrice de la famille $\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)$ dans la base B^* ;

• exprimer $\varphi(x, y)$ sous la forme $\dfrac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)]$;

• exprimer $\varphi(x, y)$ sous la forme $\dfrac{1}{4}[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]$.

● Pour montrer que **deux matrices A et B de $\mathcal{M}$ sont égales** on peut :

• montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAY = {}^tXBY.$$

• Si elles sont symétriques, montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = {}^tXBX.$$

● Pour montrer qu'**une somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe orthogonale**, on montre que les sous-espaces F_i sont orthogonaux deux à deux. Dans ce cas, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$, on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \qquad \textbf{(Théorème de Pythagore)}.$$

● Pour calculer **la distance d'un vecteur a** à un sous-espace F dans un espace préhilbertien réel $(E, (\ |\ ))$, on peut chercher un vecteur x de F tel que : $a - x \in F^{\perp}$. Lorsque x est déterminé, on sait qu'il est unique et que $\|a - x\| = \mathrm{d}(a, F)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E.

Pour tout a de E non nul, on définit φ_a de $E \times E$ dans E par $\varphi_a(x, y) = \varphi(a, a)\varphi(x, y) - \varphi(a, x)\varphi(a, y)$.

Montrer que φ_a est bilinéaire. Quand est-elle symétrique ?

2 Soit q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q(M) = \mathrm{Tr}(M^2) + (\mathrm{Tr}(M))^2.$$

Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donner sa forme polaire.

3 Soit a dans $\mathbb{R}$ et $U = (1,1,\ldots,1)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Notons X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On définit une application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $q(x) = {}^tXX + a(UX)^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soit q_a la forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ_a de l'*exercice* 1.

Comparer les noyaux de φ et de q_a. La forme q_a est-elle non dégénérée ?

5 Soit $f_1, \ldots, f_n$ une famille de n applications continues d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A la matrice de terme général :

$$a_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que A est symétrique positive.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit définie positive.

6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique positive sur E.

Soit q_a la forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ_a de l'*exercice* 1. La forme q_a est-elle positive ? Est-elle définie positive ? Lorsque φ est définie positive, préciser le noyau de q_a.

7 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0, 1]$. Pour f et g dans E, on définit :

$$\varphi_a(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ_a soit un produit scalaire sur E. Existe-t-il une suite a telle que (E, φ_a) soit un espace de Hilbert ?

8 Soit x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, (\ |\ ))$.

Calculer $\| \|x\|^2 y - (x \mid y)x\|^2$. Que peut-on en déduire ?

9 Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces.

Comparer $(F + G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$. Que dire de $F^\perp + G^\perp$ et de $(F \cap G)^\perp$?

10 Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ un famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que E est de dimension n et que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

11 Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associée. On note N la norme subordonnée à $\|\ \|$ de $\mathcal{LC}(E)$. Soit p un projecteur continu et non nul. Montrer que :

a) le noyau et l'image de p sont fermés ;

b) si le noyau et l'image de p sont complets, alors E est complet ;

c) $N(p) \geqslant 1$;

d) p est un projecteur orthogonal non nul si, et seulement si, $N(p) = 1$.

e) une limite simple de projecteurs orthogonaux est un projecteur orthogonal. Montrer, par un exemple, qu'une suite de projecteurs orthogonaux non nuls peut posséder une limite nulle.

12 Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice colonne B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire canonique et $\|\ \|$ la norme associée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si l'équation $AX = B$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ n'a pas de solution, on cherche X tel que $\|AX - B\|$ soit minimal.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) On suppose que le rang de A est p.

a) Montrer qu'il existe une seule matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \text{Inf}\{\|AX - B\| \,;\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

b) Montrer que X_0 est l'unique solution de ${}^tAAX = {}^tAB$.

2) Déterminer :

$$\text{Inf}\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 \,;\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

13 * Soit u et v deux vecteurs de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ On définit l'application q de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$q(x) = [x, u, v \wedge x].$$

Vérifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Préciser son noyau.

14 * Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ et ψ deux formes bilinéaires symétriques sur E telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \varphi(x,y)\psi(x,y) = 0.$$

Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

15 * Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et f dans $\mathcal{GL}(E)$

On suppose que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \alpha\|x\|.$$

En déduire que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (f(x) \mid f(y)) = \alpha^2 (x \mid y).$$

16 * Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On se propose de calculer :

$$\text{inf}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2\,dx \,;\, (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

1) Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\text{Inf}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2\,dx; (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n)^2\,dx.$$

2) Calculer $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^k\,dx$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

3) Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad I_i + \alpha_1 I_{i+1} + \cdots + \alpha_n I_{i+n} = 0.$$

4) Soit :

$$P = 1+\alpha_1(X+1)+\alpha_2(X+1)(X+2)+\cdots+\alpha_n(X+1)(X+2)\ldots(X+n).$$

Montrer qu'il existe un scalaire k_n tel que :

$$P = k_n(X-1)(X-2)\ldots(X-n).$$

Le calculer.

5) En déduire :

$$\text{inf}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2\,dx \,;\, (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Espaces vectoriels euclidiens

22

Mensa ACADEMY

Introduction

En dimension finie, l'existence de bases orthonormales et des supplémentaires orthogonaux facilite de nombreuses démonstrations. Le groupe des transformations qui conservent la structure d'un espace vectoriel est le « groupe linéaire », groupe des automorphismes de cet espace vectoriel. Dans ce chapitre, nous étudierons le groupe orthogonal. C'est le groupe des bijections d'un espace euclidien qui conservent le produit scalaire.

OBJECTIFS

- Bases orthonormales.
- Supplémentaires orthogonaux.
- Sous-espaces perpendiculaires.
- Groupe orthogonal.
- Groupe spécial orthogonal.
- Isomorphisme avec le dual.
- Produit mixte et produit vectoriel.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre $(E, (\ |\ ))$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$.

Bases orthonormales dans un espace vectoriel euclidien

Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est orthonormale lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \|e_i\| = 1.$$

1.1. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Jorgen Pederson Gram (1850-1916), mathématicien danois et ***Erhard Schmidt*** *(1876-1959), mathématicien allemand.*

Théorème 1

Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.

Il existe une et une seule famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ orthonormale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad (e_k \mid \varepsilon_k) > 0.$$

Démonstration

Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.

Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et pour tout k de $[\![1,p]\!]$, $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Le sous-espace F_k est de dimension finie, la projection orthogonale p_k sur F_k existe.

Montrons que l'on peut construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de manière unique.

Il existe un seul vecteur ε_1 colinéaire à e_1 et de même sens : $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Soit k dans $[\![1, p-1]\!]$ et supposons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ déjà construit tel que :

$$\forall j \in [\![1,k]\!] \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) \quad \text{et} \quad (e_j \mid \varepsilon_j) > 0.$$

Montrons l'existence et l'unicité d'un vecteur ε_{k+1} tel que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) \quad \text{et} \quad (e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) > 0.$$

Montrons l'unicité.

Le vecteur ε_{k+1} appartient à Vect $(e_1, \dots, e_{k+1})$.

Or $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1})$.

Par conséquent, il existe $k+1$ réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et α tels que :

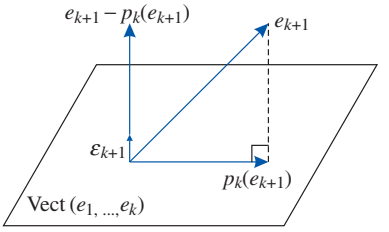
$$\varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Pour tout i de $[\![1,k]\!]$, on a : $(\varepsilon_{k+1} \mid \varepsilon_i) = 0$. On en déduit $\alpha_i = -\alpha(e_{k+1} \mid \varepsilon_i)$.

D'où :

$$\varepsilon_{k+1} = \alpha(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i).$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i$ est le projeté orthogonal du vecteur e_{k+1} sur F_k.



Doc. 1. $p_k(e_{k+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i$ *est le projeté orthogonal de* e_{k+1} *sur* $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
ε_{k+1} *est un vecteur de norme* 1 *colinéaire à* $e_{k+1} - p_k(e_{k+1})$ *et de même sens.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notons e'_{k+1} le vecteur $e_{k+1} - p_k(e_{k+1})$. Il est non nul car e_{k+1} n'appartient pas à F_k.

Les conditions $\|\varepsilon_{k+1}\| = 1$ et $(\varepsilon_{k+1} \mid e_{k+1}) > 0$ imposent $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$.

Montrons l'existence.

Soit e'_{k+1} le vecteur non nul $e_{k+1} - p_k(e_{k+1})$.

Par définition de la projection orthogonale p_k, le vecteur unitaire $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$ est orthogonal à tous les ε_i, pour i dans $[\![1, k]\!]$. La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ est orthonormale.

De plus :

$$e_{k+1} = \|e'_{k+1}\|\varepsilon_{k+1} + p_k(e_{k+1}).$$

Donc :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) \quad \text{et} \quad (\varepsilon_{k+1} \mid e_{k+1}) = \|e'_{k+1}\| > 0.$$

Le vecteur $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$ convient.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ ainsi construite répond à la question.

Méthode pratique

Le procédé décrit au cours de cette démonstration permet de construire, par récurrence, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec :

$$e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i.$$

On l'appelle le procédé d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt.**

On peut déduire un algorithme à partir de ces formules.

Mais pour un calcul manuel, il est plus simple de rechercher par récurrence une famille orthogonale en posant :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Puis on normalise les vecteurs obtenus.

Rapport Centrale, 1997

« L'orthonormalisation de Schmidt est mal sue : certains candidats l'ignorent, d'autres connaissent les formules par cœur (!), sans connaître toujours le principe de la méthode. ».

Rapport CCP, 2003

« Le procédé de Schmidt se réduit, la plupart du temps à une série de formules apprises par cœur. »

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt se généralise sans difficulté aux espaces préhilbertiens réels.
Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille libre dénombrable dans $(E, (\ \mid\ ))$ préhilbertien réel. Il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad (e_k \mid \varepsilon_k) > 0.$$

Elle est définie par :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec :

$$e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Polynômes de Jacobi, de Legendre, de Tchebychev

Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et h une application continue de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ intégrable sur $]a,b[$.

Notons E le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Il est muni d'un produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g)\in E^2 \quad (f\mid g)=\int_a^b fgh.$$

1) *Vérifier que $(\mid)$ est un produit scalaire.*

2) *Pour tout entier naturel n, on définit sur $]a,b[$ l'application e_n par $e_n(x)=x^n$.*

Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormalisée de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que les applications p_n sont les applications polynômiales définies sur $]a,b[$ associées à des polynômes P_n de degré n.

3) *Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont simples.*

4) *Fixons :*

$$a=-1 \quad \text{et} \quad b=1$$

et : $h : x\longmapsto (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

avec α et β dans $]-1,+\infty[$.

On obtient les polynômes de Jacobi.

a) *Si $\alpha=\beta=0$, montrer que :*

$$p_n(X)=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$$

pour tout entier naturel n.

Les polynômes L_n définis par $L_n=\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}P_n$ sont les polynômes de Legendre.

b) *Soit T_n le polynôme de Tchebytchev de première espèce défini par :*

$$\forall \theta\in\mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta)=\cos n\theta.$$

Si $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$, montrer que $P_n=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n$ pour tout entier naturel n.

c) *Soit U_n le polynôme de Tchebytchev de deuxième espèce défini par :*

$$\forall \theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \quad U_n(\sin\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Si $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$, montrer que $P_n=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}U_n$ pour tout entier naturel n.

1) Puisque f et g sont continues sur $[a,b]$, il existe un réel M tel que :

$$\forall x\in[a,b] \quad |f(x)g(x)|\leqslant M.$$

Par conséquent :

$$\forall x\in]a,b[\quad |f(x)g(x)h(x)|\leqslant Mh(x).$$

On en déduit que la fonction fgh est intégrable sur $]a,b[$ et que $(\mid)$ existe.

On vérifie facilement que $(\mid)$ est bilinéaire symétrique et positive.

Soit f dans E tel que :

$$\int_a^b f(x)^2h(x)\,\mathrm{d}(x)=0.$$

L'application $x\longmapsto f(x)^2h(x)$ est continue, intégrable et positive sur $]a,b[$. Par conséquent, elle est nulle sur $]a,b[$. L'application h est non nulle.

On en déduit la nullité de f sur $]a,b[$, puis par continuité, sur $[a,b]$.

L'application $(\mid)$ est définie positive. C'est un produit scalaire.

2) Pour tout entier naturel n, soit F_n le sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n définies sur $[a,b]$. Notons F le sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de F et pour tout entier naturel n, $\mathrm{Vect}(e_0,\ldots,e_n)=F_n$.

Par conséquent, la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormalisée de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans F et pour tout entier naturel n, $\mathrm{Vect}(p_0,\ldots,p_n)=\mathrm{Vect}(e_0,\ldots,e_n)=F_n$.

On en déduit que $p_0\in F_0$ et que, pour tout entier $n>0$, $p_n\in F_n\backslash F_{n-1}$.

L'application p_n est une fonction polynomiale de degré n.

3) Soit $n>0$ et $a_1,\ldots,a_p$ les racines réelles d'ordre impair de P_n. Alors $p\leqslant n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous allons montrer par l'absurde que $p = n$. Supposons $p < n$.

On introduit le polynôme $Q(X) = (X-a_1)...(X-a_p)$. S'il n'y a pas de racine réelle d'ordre impair on prendra $Q = 1$. On notera q la fonction polynomiale associée.

Le polynôme qp_n est de signe constant et non identiquement nul. Donc :

$$\int_a^b qp_n h > 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b qp_n h < 0.$$

Or : $\displaystyle\int_a^b qp_n h = (q \mid p_n).$

Mais $q \in F_p$. Puisque $n > p$, l'application p_n est orthogonale à F_p.

Par conséquent, $(q \mid p_n) = 0$, ce qui est contradictoire.

Le polynôme P_n de degré n possède n racines réelles distinctes d'ordre impair. Il est scindé et ses racines sont simples.

4)a) Le polynôme $P_n(X)$ est de degré n.

Pour tout entier n et tout entier k, en intégrant successivement par parties, on obtient :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(x^2-1)^k\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[(x^2-1)^n\right] \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left[(x^2-1)^k\right]\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^k\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^{n+k}}{\mathrm{d}x^{n+k}}\left[(x^2-1)^n\right]\left[(x^2-1)^k\right]\mathrm{d}x$$

car les dérivées d'ordre strictement inférieur ou égal à k s'annulent en 1 et en -1.

Pour $k > n$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}^{n+k}}{\mathrm{d}x^{n+k}}\left[(x^2-1)^n\right]$ est identiquement nulle.

Dans ce cas, on en déduit $(p_n \mid p_k) = 0$.

Pour $k = n$:

$$(-1)^n\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left[(x^2-1)^n\right]\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^n\int_{-1}^1 (2n)!\,(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$$

$$= 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

$$(p_n \mid p_n) = 1.$$

De plus, pour tout entier n, on a :

$$\mathrm{Vect}(p_0,\dots,p_n) = \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n) = F_n.$$

Le réel $(p_n \mid e_n)$ a le signe de :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]x^n\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]x^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\int_{-1}^1 (x^2-1)^n\,n!\,\mathrm{d}x > 0.$$

Donc $(p_n \mid e_n) > 0$.

La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille orthonormalisée de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On vérifie que le polynôme T_n est de degré n.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{Vect}(p_0,\dots,p_n) = \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n).$$

Il suffit de vérifier que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale et que $(p_n \mid e_n) > 0$ pour tout n.

Soit n et k deux entiers.

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}t_n(x)t_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi t_n(\cos\theta)t_k(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos n\theta\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour $n \neq k$, on a $(p_n \mid p_k) = 0$.

Pour $n = k$, on trouve $(p_n \mid p_n) = 1$.

Le signe du réel $(p_n \mid e_n)$ est celui de :

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}t_n(x)x^n\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}t_n(x)x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi t_n(\cos\theta)\cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos n\theta\cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Or, $\cos^n\theta$ est la somme de $\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta$ et d'une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ où $k \neq n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}t_n(x)x^n\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi}\cos^2 n\theta\,\mathrm{d}\,\theta > 0.$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille orthonormalisée de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) La démonstration semblable à la précédente est laissée à vos bons soins.

Carl Gustav Jacob Jacobi *(1804-1851), mathématicien allemand. Il étudie les fonctions elliptiques et introduit les fonctions hyperelliptiques. Il s'intéressa également aux équations différentielles et au calcul des variations.*

Adrien Marie Legendre *(1752-1833), mathématicien français, auteur, en particulier, de la méthode des moindres carrés.*

Pafnoutiy Lvovitch Tchebychev *(1821-1894), mathématicien russe. Il a beaucoup travaillé sur les nombres premiers, les formes quadratiques et l'approximation des fonctions continues par des polynômes.*

Mensa ACADEMY

1.2. Existence de bases orthonormales

Corollaire 1.1

Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales et le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.

Corollaire 1.2

Dans un espace euclidien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration

Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille orthonormale. Le *théorème de la base incomplète* permet de la compléter en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne une nouvelle base :

$$(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n).$$

Il conserve les p premiers vecteurs.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 1.3

Soit A une matrice symétrique définie positive. Il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = {}^tPP.$$

Le discriminant d'un produit scalaire est strictement positif.

Démonstration

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et A la matrice de $(\ |\ )$. Il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. Soit P la matrice de passage de la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ à la base $(e_1, \dots, e_n)$. La matrice de $(\ |\ )$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est l'identité.
Par conséquent $A = {}^tP\mathrm{I}_nP$.

André-Louis Cholesky *(1875-1918), mathématicien français.*

Application 2

Décomposition de Choleski d'une matrice symétrique définie positive

Soit E l'ensemble des matrices réelles d'ordre n triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont strictement positifs.

1) *Montrer que E est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$*

2) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer l'existence et l'unicité de T dans E telle que $A = {}^tTT$.*

1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admettant T pour matrice dans $(e_1, \dots, e_n)$ et, pour tout k de $[\![1, n]\!]$:

$$F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Si T est dans E, alors les sous-espaces F_k sont stables par t. Notons t_k la restriction de t au sous-espace F_k stable par t.

$$T \in E \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!] \quad t(F_k) \subset F_k$$

et :

$$\mathrm{Det}t_k > 0.$$

• Soit T dans E. Son déterminant est non nul.

$$E \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$$

• E contient I_n.

• E est stable pour la loi $\times$.

Pour toute matrice T et toute matrice T' de E on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad (t(F_k) \subset F_k \quad \text{et} \quad \mathrm{Det}t_k > 0)$$

et :

$$(t'(F_k) \subset F_k \quad \text{et} \quad \mathrm{Det}t'_k > 0).$$

Alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad t \circ t'(F_k) \subset F_k$$

et :

$$\mathrm{Det}(t_k \circ t'_k) > 0.$$

Par conséquent TT' appartient à E.

• Soit T dans E. Montrons que T^{-1} appartient à E. L'endomorphisme t est un automorphisme.

Alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad t(F_k) = F_k$$

et t_k est un automorphisme de F_k.

Par conséquent, t est inversible et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad t^{-1}(F_k) \subset F_k$$

et :

$$\mathrm{Det}(t^{-1})_k = \frac{1}{\mathrm{Det}t_k} > 0.$$

On en déduit l'appartenance de T^{-1} à E.

L'ensemble E est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

2) Soit φ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après le *corollaire* 1.1, on obtient une base orthonormale pour φ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base :

$$B = (e_1, \dots, e_n).$$

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ la base obtenue et P la matrice de passage de B à B'.

Le changement de base pour φ se traduit par :

$${}^tPAP = \mathrm{I}_n.$$

La matrice P appartient à E car :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_k)$$

et :

$$\varphi(e_k, e'_k) > 0.$$

La matrice $T = P^{-1}$ convient. Montrons l'unicité.

Soit θ la bijection de l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute base B' de E la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à B'.

À toute matrice T de E qui vérifie $A = {}^tTT$, on associe une base :

$$B' = \theta^{-1}(T^{-1}).$$

La base B' est l'orthonormalisée de $(e_1, \dots, e_n)$ pour φ. Elle est unique. D'où l'unicité de T de E qui vérifie $A = {}^tTT$.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.3. Coordonnées dans une base orthonormale

Rappelons quelques résultats de Première année.

Mensa ACADEMY

Théorème 2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien $(E, (\ |\ ))$. Alors :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} (x|\, e_i)\, e_i.$$

Corollaire 2.1

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien $(E, (\ |\ ))$ et u un endomorphisme de E. Alors la trace de u est :

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} (u(e_i)|\, e_i)$$

et le déterminant de u est :

$$\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}((e_i \mid u(e_j)).$$

Théorème 3

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien $(E, (\ |\ ))$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Alors, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et tout vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ de E :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(x \,|\, e_i\big)^2}$$

et

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \big(x \,|\, e_i\big)\big(y \,|\, e_i\big).$$

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Pour munir E d'une structure euclidienne, il suffit de choisir arbitrairement une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et de la considérer orthonormale.

Le produit scalaire est alors défini par :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exemple

Pour $E = \mathbb{R}^n$, le choix du produit scalaire associé à la base canonique munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure euclidienne dite canonique. C'est le seul produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel la base canonique est orthonormale.

Remarque

Le produit scalaire ainsi défini est le seul pour lequel la base $(e_1, \ldots, e_n)$ soit orthonormale.

Théorème 5

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$.

L'application θ de $\mathbb{R}^n$ dans E, définie par $\theta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un isomorphisme d'espaces euclidiens de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique sur $(E, (\,|\,))$.

Démonstration

La relation $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \big(x \,|\, e_i\big)\big(y \,|\, e_i\big)$ du *théorème* 3 prouve que l'isomorphisme θ conserve le produit scalaire.

Remarque

Les espaces euclidiens de dimension n sont tous isomorphes à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique. Cependant il n'y a pas d'isomorphisme canonique, c'est-à-dire indépendant du choix de la base de E et ne dépendant que de la structure euclidienne de E.

2 Orthogonalité et perpendicularité

2.1. Supplémentaire orthogonal.

Rappelons quelques propriétés étudiées en Première année ou dans le cadre des espaces préhilbertiens réels.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 6

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien et F un sous-espace de E. Alors :

- F admet un supplémentaire orthogonal :

$$F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E\ ;$$

- $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = \operatorname{codim} F$;
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$;
- si $(e_1,\dots,e_k)$ est une base orthonormale de F, la projection orthogonale p_F sur F existe et, pour tout x de E, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x\,|e_i)\,e_i.$$

- Pour tout a de E, la distance de a au sous-espace F est :

$$\mathrm{d}(a,F) = \|a - p_F(a)\|.$$

Rapport, Centrale 2003

« Reconnaître le théorème de projection orthogonale peut faire gagner beaucoup de temps. »

Application 3

Matrice et déterminant de Gram

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel.

Pour toute suite $(x_1,\dots,x_p)$ de p vecteurs de E, on appelle matrice de Gram associée à la suite $(x_1,\dots,x_p)$ la matrice :

$$G(x_1,\dots,x_p) = ((x_i \mid x_j))_{i\in[\![1,p]\!]\,j\in[\![1,p]\!]}.$$

On appelle déterminant de Gram associée à la suite $(x_1,\dots,x_p)$ le déterminant $g(x_1,\dots,x_p)$ de la matrice de Gram.

1) *Montrer que :*

$$(x_1,\dots,x_p) \quad \textit{libre} \quad \Leftrightarrow g(x_1,\dots,x_p) \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow g(x_1,\dots,x_p) > 0.$$

2) *Montrer que le rang de $(x_1,\dots,x_p)$ est le rang de la matrice de Gram $G(x_1,\dots,x_p)$.*

3) *On suppose dans cette question que E est de dimension finie p. Soit u un endomorphisme de E.*

Montrer que :

$$g(u(x_1),\dots,u(x_p)) = (\mathrm{Det}u)^2 g(x_1,\dots,x_p).$$

4) *On suppose dans cette question que $(x_1,\dots,x_p)$ est libre. Notons F le sous-espace engendré par $(x_1,\dots,x_p)$. Montrer que, pour tout a de E :*

$$d(a,F) = \sqrt{\frac{g(a,x_1,\dots,x_p)}{g(x_1,\dots,x_p)}}.$$

5) *Calculer :*

$$\mathrm{Inf}\Big\{\int_0^1 (1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2\,dx\ ;(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\Big\}.$$

1) Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$.

La restriction de $(\ |\ )$ à $F\times F$ est un produit scalaire sur F.

- Si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée, toute relation de dépendance linéaire entre les x_i entraîne la même relation de dépendance sur les colonnes de la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$. Donc $g(x_1,\dots,x_p) = 0$.
- Si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, c'est une base de F et la matrice de Gram est la matrice $(\ |\ )$ dans la base $(x_1,\dots,x_p)$. Le discriminant d'un produit scalaire est strictement positif.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, $g(x_1,\dots,x_p) > 0$. On en déduit que :

$$(x_1,\dots,x_p) \text{ libre } \Leftrightarrow g(x_1,\dots,x_p) \neq 0.$$
$$\Leftrightarrow g(x_1,\dots,x_p) > 0.$$

2) Soit r le rang de $(x_1,\dots,x_p)$.

On peut extraire une famille libre de r vecteurs de $(x_1,\dots,x_p)$. Supposons qu'il s'agit des r premiers. Ceci est toujours possible, quitte à réordonner la famille.

Alors $g(x_1,\dots,x_r) > 0$.

La matrice $G(x_1,\dots,x_r)$ est inversible.

Or, elle est extraite de $G(x_1,\dots,x_p)$.

Par conséquent, le rang de $G(x_1,\dots,x_p)$ est supérieur ou égal à r.

Les $n-r$ derniers vecteurs de $(x_1,\dots,x_p)$ sont des combinaisons linéaires des r vecteurs de $(x_1,\dots,x_r)$. Donc les $n-r$ dernières colonnes de $G(x_1,\dots,x_p)$ sont combinaison linéaire des r premières.

Le rang de $G(x_1,\dots,x_p)$ est inférieur ou égal à r.

On en déduit :

$$\text{rg}\,(x_1,\dots,x_p) = \text{rg}\,G(x_1,\dots,x_p).$$

3) Montrons que :

$$g(u(x_1),\dots,u(x_p)) = (\text{Det}u)^2 g(x_1,\dots,x_p).$$

• Si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée, la famille $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est également liée. Les deux termes de l'égalité sont nuls.

• Si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, c'est une base de E.

Si la famille $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est liée, l'endomorphisme u n'est pas injectif. $\text{Det}u = 0$.

Les deux termes de l'égalité sont nuls.

Si la famille $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est libre, soit M la matrice de passage de la base $(x_1,\dots,x_p)$ à la base $(u(x_1),\dots,u(x_p))$.

M est également la matrice de u dans la base $(x_1,\dots,x_p)$.

Soit A la matrice de $(\ |\ )$ dans la base $(x_1,\dots,x_p)$.

L'application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = (u(x)\mid u(y))$ est également un produit scalaire car u est inversible.

Sa matrice dans la base $(x_1,\dots,x_p)$ est ${}^tMAM$.

Or, $G(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est la matrice de φ dans la base $(x_1,\dots,x_p)$.

$$G(u(x_1),\dots,u(x_p)) = {}^tMAM.$$
$$g(u(x_1),\dots,u(x_p)) = (\text{Det}M)^2\text{Det}A$$
$$= (\text{Det}u)^2 g(x_1,\dots,x_p).$$

4) F est de dimension finie. Il admet un supplémentaire orthogonal et p_F existe.

$$\text{d}(a,F)^2 = \|a - p_F(a)\|^2.$$

L'application g est n-linéaire.

$$g(a,x_1,\dots,x_p) = g(a - p_F(a),x_1,\dots,x_p)$$
$$+ g(p_F(a),x_1,\dots,x_p).$$

La famille $(p_F(a),x_1,\dots,x_p)$ est liée.

Donc $g(p_F(a),x_1,\dots,x_p) = 0$.

$$g(a,x_1,\dots,x_p) = g(a - p_F(a),x_1,\dots,x_p).$$

Or, $a - p_F(a)$ est orthogonal à tous les x_i.

La matrice $G(a - p_F(a),x_1,\dots,x_p)$ est :

$$\begin{pmatrix} \|a-p_F(a)\|^2 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & G(x_1,\dots,x_p) \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

$$g(a - p_F(a),x_1,\dots,x_p)$$
$$= \|a - p_F(a)\|^2 g(x_1,\dots,x_p).$$

On en déduit :

$$\text{d}(a,F) = \sqrt{\frac{g(a,x_1,\dots,x_p)}{g(x_1,\dots,x_p)}}.$$

5) Dans cette question, on choisit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P,Q) \longmapsto \int_0^1 \widetilde{P}(x)\widetilde{Q}(x)\,\text{d}x$$

et

$$F = \text{Vect}(X,\dots,X^n).$$

Le réel :

$$\alpha = \inf\Big\{\int_0^1 (1 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2\,\text{d}x\ ;$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$

est le carré de la distance de 1 à F.

D'après la question **4)**, on a :

$$\alpha = \frac{g(1, X, \dots, X^n)}{g(X, \dots, X^n)}.$$

Or $g(1, X, \dots, X^n)$ est le déterminant de Cauchy :

$$\text{Det}\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i\in[\![1,n+1]\!], j\in[\![1,n+1]\!]}$$

et :

$$g(X, \dots, X^n)$$

est le déterminant de Cauchy :

$$\text{Det}\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,n]\!]}.$$

On montre que :

$$\text{Det}\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,n]\!]t} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i+b_j)}.$$

Vous en déduirez :

$$g(1, X, \dots, X^n) = \frac{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2}{\prod_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}(i+j+1)}$$

et :

$$g(X, \dots, X^n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2}{\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(i+j+1)}.$$

On obtient :

$$\alpha = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 2.*

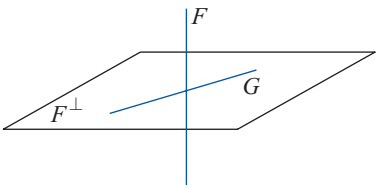
2.2. Sous-espaces perpendiculaires

Théorème 7

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

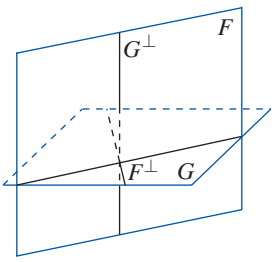
- $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux ;
- $G^\perp \subset F$;
- $F^\perp \subset G$.

Deux **sous-espaces** F et G qui vérifient ces propriétés sont dit **perpendiculaires**.

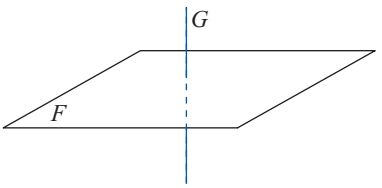


Doc. 2.

Deux sous-espaces F et G sont orthogonaux et perpendiculaires si, et seulement s'ils sont supplémentaires orthogonaux.
En effet, l'orthogonalité de F et G se traduit par $F \subset G^\perp$ et leur perpendicularité par $G^\perp \subset F$.



Doc. 3.



Doc. 4.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Groupe orthogonal

3.1. Caractérisation des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Nous avons étudié dans le *chapitre* précédent, quelques généralités sur les automorphismes orthogonaux d'un espace préhilbertien réel. Étudions maintenant le cas particulier des espaces euclidiens.

Théorème 8

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E ;

(ii) l'endomorphisme u conserve le produit scalaire ;

(iii) l'endomorphisme u conserve la norme ;

(iv) la matrice A de u dans une base orthonormale vérifie : ${}^tAA = I_n$;

(v) l'endomorphisme u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale ;

(vi) l'endomorphisme u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale.

Démonstration

Montrons seulement les implications suivantes.

• Montrons **(iii)** $\Rightarrow$ **(i)**.

On suppose que u est un endomorphisme qui conserve la norme.

Par conséquent, pour tout x de E :

$$\begin{aligned} u(x) = 0_E &\Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0_E. \end{aligned}$$

On en déduit l'injectivité de u. La dimension de E est finie. L'endomorphisme u est bijectif. D'après le *corollaire* 20.1 du *chapitre* précédent, on en déduit que u est un automorphisme orthogonal de E.

• Montrons que **(iii)** $\Leftrightarrow$ **(iv)**.

Si A est la matrice de u et X la matrice colonne d'un vecteur x dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, la norme de $u(x)$ est ${}^tX{}^tAAX$.

(iii) $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\quad {}^tX{}^tAAX = {}^tXX$.

Or la matrice ${}^tAA$ est symétrique. Par unicité de la matrice symétrique associée à une forme quadratique, on en déduit **(iii)** $\Leftrightarrow {}^tAA = \mathrm{I}_n$.

Par conséquent, les propriétés **(iv)** et **(iii)** sont équivalentes.

• En exprimant les vecteurs dans une base orthonormée, on vérifie facilement que :

(vi) $\Rightarrow$ **(iii)**.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie : ${}^tAA = A{}^tA = \mathrm{I}_n$ est appelée **matrice orthogonale**.

Rapport Centrale, 2003

« Les automorphismes orthogonaux ne se caractérisent pas par une relation du type $\mathrm{Det}A = 1$ *et il ne suffit pas que les colonnes d'une matrice soient orthogonales entre elles pour que celle-ci soit orthogonale. À ce sujet rappelons aux candidats que la terminologie est une convention et qu'il faut être attentif aux "pièges" qu'elle peut tendre : par exemple, la définition de matrice orthogonale ou le fait que la matrice d'une projection orthogonale n'est pas orthogonale... »*

Rapport Centrale, 1997

« Les caractérisations des automorphismes orthogonaux sont très mal connues. ».

L'hypothèse « orthonormale » est indispensable.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Rapport CCP, 2003

« Revoir la définition d'une matrice orthogonale, celle-ci étant trop souvent écrite avec des colonnes ni orthogonales ni orthonormale. »

Corollaire 8.1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la matrice A est orthogonale ;

(ii) la matrice ${}^tA$ est orthogonale ;

(iii) la matrice A admet ${}^tA$ pour matrice inverse ;

(iv) les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale ;

(v) les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale.

Exemples

■ Vous avez vu en Première année que les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$.

■ La matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

■ On remarque, en particulier, que toute matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est orthogonale.

On en déduit la traduction matricielle du procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

Corollaire 8.2

Pour toute matrice A de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice O orthogonale et une matrice T de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = OT$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

3.2. Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

Nous avons vu dans le *chapitre* précédent que l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(E)$, appelé groupe orthogonal de E et noté $\mathcal{O}(E)$.

Théorème 9

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(E)$ appelé **groupe orthogonal d'ordre** n et noté $\mathcal{O}_n$.

$$\mathcal{O}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tAA = A{}^tA = \mathrm{I}_n\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 10

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E.

Alors le déterminant de u est 1 ou -1.

Démonstration

$\det u = \det A = \det {}^tA$ en notant A la matrice de u dans une base orthonormale de E.

Or ${}^tAA = I_n$. Donc $(\det u)^2 = 1$.

Rapport Centrale, 1997

« $\mathcal{O}E) \neq \{u \in \mathcal{L}(E), \det(u) = \pm 1\}$ »

« *Pour éviter cette erreur trop répandue, pensez à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Son déterminant vaut* 1 *mais ce n'est pas une matrice orthogonale.* »

Corollaire 10.1

Le déterminant de toute matrice orthogonale est 1 ou -1.

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien.

On appelle **rotation** ou **déplacement** tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à 1.

Une matrice orthogonale dont le déterminant est 1 est appelé **matrice de rotation.**

On appelle **antidéplacement** tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à -1.

Exemple

Soit s une symétrie orthogonale, E est la somme directe orthogonale de $\operatorname{Ker}(u - I_E)$ et de $\operatorname{Ker}(u + I_E)$.

Soit $m = \operatorname{codim} \operatorname{Ker}(u - I_E) = \dim \operatorname{Ker}(u + I_E)$.

$$\det u = (-1)^m.$$

Une symétrie orthogonale est un déplacement si, et seulement si, la codimension de l'espace des vecteurs invariants est paire.

On appelle **réflexion** ou **réflexion d'hyperplan** H ou **symétrie hyperplane** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H.

Les réflexions sont des antidéplacements.

On appelle **demi-tour** ou **retournement** toute symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de codimension 2. Les retournements sont des déplacements.

Soit B et B' deux bases orthonormales. La matrice de passage de B à B' est orthogonale. Par conséquent, $\det_B B' = 1$ ou $\det_B B' = -1$.
Vous avez vu en Première année que deux bases orthonormales B et B' définissent la même orientation si, et seulement si, $\det_B B' = 1$.
Orienter un espace euclidien, c'est choisir une base B orthonormale. Une base qui définit la même orientation que B est dite **base orthonormale directe**. Sinon, elle est dite **orthonormale indirecte.**

Rapport Centrale, 1997

« *Comme chaque année, nous signalons qu'une matrice ayant un déterminant égal à* –1 *ou* 1 *n'est pas nécessairement orthogonale, et qu'une matrice* 3-3 *ayant pour valeurs propres* $1, e^{i\theta}$ *et* $e^{-i\theta}$ *n'est pas nécessairement une rotation.* »

Théorème 11

L'ensemble des rotations de E est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$, appelé **groupe spécial orthogonal** et noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant -1, souvent noté $\mathcal{O}^-(E)$, n'est pas stable pour la loi $\circ$ et ne constitue pas un groupe.

Démonstration

$\mathcal{SO}(E)$ est le noyau du morphisme de groupe Det de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 11.1

L'ensemble des matrices de rotation est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n, \times)$ appelé **groupe spécial d'ordre** ***n*** et noté $\mathcal{SO}_n$ ou $\mathcal{O}_n^+$.

$$\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n ; \text{Det} A = 1\}.$$

Application 4

Condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations d'un espace euclidien de dimension 3 commutent

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension 3, R une rotation d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par le vecteur unitaire a et r une rotation.

1) *Montrer que $r \circ R \circ r^{-1}$ est la rotation d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par $r(a)$.*

2) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que R et r commutent.*

3) *Le groupe $\mathcal{SO}_3$ est-il commutatif.*

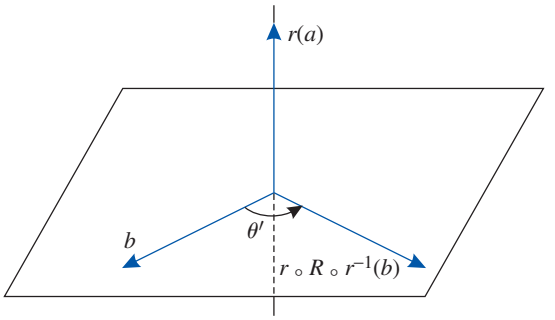
1) • La composée de trois rotations est une rotation. L'endomorphisme $r \circ R \circ r^{-1}$ est une rotation.

• Le vecteur a est invariant par R. Soit $a' = r(a)$.

$$r \circ R \circ r^{-1}(a') = r \circ R(a) = r(a) = a'.$$

Le vecteur a' est invariant par $r \circ R \circ r^{-1}$. Choisissons d'orienter l'axe de $r \circ R \circ r^{-1}$ par a'.

Soit θ' l'angle de la rotation $r \circ R \circ r^{-1}$, d'axe dirigé par le vecteur a'.



Doc. 5.

Étudions sa trace :

$$1 + \cos\theta' = \text{Tr}(r \circ R \circ r^{-1}) = \text{Tr}(R \circ r^{-1} \circ r)$$
$$= \text{Tr}\, R = 1 + \cos\theta.$$

On en déduit $\cos\theta = \cos\theta'$.

Pour montrer que $\theta = \theta'$, nous allons montrer que $\sin\theta$ et $\sin\theta'$ sont de même signe.

Soit b' un vecteur non colinéaire à a'.

$\sin\theta'$ a le signe du produit mixte :

$$[b', r \circ R \circ r^{-1}(b'), a'].$$

Soit b un vecteur non colinéaire à a. Alors $r(b)$ n'est pas colinéaire à a'. Prenons $b' = r(b)$.

$\sin\theta'$ a le signe du produit mixte :

$$[r(b), r \circ R(b), r(a)].$$

Or $[r(b), r \circ R(b), r(a)] = \text{Det} r\,[b, R(b), a]$.

L'endomorphisme r est une rotation. Donc, $\text{Det} r = 1$.

De plus, $[b, R(b), a]$ a le signe de $\sin\theta$. Donc, $\theta = \theta\,'[2\pi]$.

2) $R \circ r = r \circ R \Leftrightarrow r \circ R \circ r^{-1} = R.$

$$\Leftrightarrow [r(a) = a \text{ ou } (r(a) = -a \text{ et } \theta = -\theta[2\pi])].$$

Les conditions : $r(a) = -a$ et $\theta = -\theta[2\pi]$ sont vérifiées si, et seulement si, r et R sont des demi-tours d'axes orthogonaux.

En conclusion, deux rotations d'un espace euclidien de dimension 3 commutent si, et seulement si, elles ont le même axe ou s'il s'agit de deux demi-tours d'axes orthogonaux.

3) Le groupe $\mathcal{SO}_3$ n'est pas commutatif.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.3. Automorphismes orthogonaux et sous-espaces stables

Théorème 12

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n, F un sous-espace de E et u un automorphisme orthogonal.

Si F est stable par u, alors :

- $u(F) = F$;
- $F^\perp$ est stable par u et $u(F^\perp) = F^\perp$;
- $u_{|F}$ appartient à $\mathcal{O}(F)$;
- $u_{|F^\perp}$ appartient à $\mathcal{O}(F^\perp)$.

Démonstration

L'espace E est de dimension finie.

$u(F) \subset F$. L'application $u_{|F}$ est un endomorphisme de F.

L'endomorphisme u conserve le produit scalaire sur E donc $u_{|F}$ conserve également le produit scalaire sur F. D'après le *théorème* 8, l'endomorphisme $u_{|F}$ est un automorphisme orthogonal de F.

En particulier, $u(F) = F$ et $u_{|F}$ appartient à $\mathcal{O}(F)$.

Montrons que $F^\perp$ est stable par u. Soit x quelconque dans $F^\perp$.

$$\forall\, y \in F \quad (u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(u^{-1}(y))) = (x \mid u^{-1}(y)).$$

Or $u^{-1}(y)$ appartient à F. Donc $(x \mid u^{-1}(y)) = 0$.

Par conséquent, $\forall\, y \in F \quad (u(x) \mid y) = 0$.

Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u. On lui applique alors le premier et le troisième points.

Pour déterminer un automorphisme orthogonal, on pourra étudier ses restrictions à un sous-espace stable F et à son orthogonal.

Théorème 13

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal.

Alors :

- Sp $u \in \{-1, 1\}$;
- $\text{Ker}\,(u - I_E) \perp \text{Ker}\,(u + I_E)$;
- l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie orthogonale ;
- $(\text{Im}\,(u - I_E))^\perp = \text{Ker}\,(u - I_E)$.

Démonstration

- Soit λ une valeur propre réelle de u et x un vecteur propre associé.

$\|u(x)\| = \|x\|$.

Or $u(x) = \lambda x$. Par conséquent $|\lambda|\|x\| = \|x\|$.

Le vecteur x est non nul donc $|\lambda| = 1$.

- Soit x dans $\text{Ker}\,(u - I_E)$ et y dans $\text{Ker}\,(u + I_E)$.

$$(x \mid y) = (u(x) \mid -u(y)) = -(u(x) \mid u(y)) = -(x \mid y).$$

Par conséquent, $(x \mid y) = 0$ et $x \perp y$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Si u est diagonalisable, on est dans l'une des trois situations suivantes :

$E = \text{Ker}\,(u - I_E)$ et l'endomorphisme u est I_E (symétrie orthogonale de base E),

ou $E = \text{Ker}\,(u + I_E)$ et l'endomorphisme u est $-I_E$ (symétrie orthogonale de base $\{0_E\}$),

ou $E = \text{Ker}\,(u - I_E) \oplus \text{Ker}\,(u + I_E)$ et l'endomorphisme u est la symétrie orthogonale de base $\text{Ker}\,(u - I_E)$.

Réciproquement, toute symétrie orthogonale est de l'une des formes précédentes.

Montrons que $(\text{Im}(u - I_E))^\perp \subset \text{Ker}\,(u - I_E)$.

Soit x quelconque dans $(\text{Im}(u - I_E))^\perp$.

$\forall\, y \in E \quad (x \mid u(y) - y) = 0.$

$\forall\, y \in E \quad (x \mid u(y)) = (x \mid y).$

Or u est un automorphisme.

$\forall\, y \in E \quad (u(u^{-1}(x) \mid u(y)) = (x \mid y).$

L'automorphisme u conserve le produit scalaire. Donc :

$$\forall\, y \in E \quad (u^{-1}(x) \mid y) = (x \mid y).$$

On en déduit $u^{-1}(x) = x$, puis $u(x) = x$.

Les dimensions de ces deux sous-espaces sont égales.

$$(\text{Im}(u - I_E))^\perp = \text{Ker}\,(u - I_E).$$

Application 5

Sous-espaces irréductibles et automorphismes orthogonaux

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

Un sous-espace F non réduit à $\{0_E\}$ de E est dit irréductible sous u quand :

(i) *F est stable par u ;*

(ii) *Tout sous-espace G de F stable par u est F ou $\{0_E\}$.*

1) *Montrer que E contient au moins un sous-espace irréductible de dimension 1 ou 2 sous u.*

2) *Montrer que, si u est dans $\mathcal{O}(E)$, alors E est somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles sous u de dimension 1 ou 2.*

3) *Montrer qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice M de u est diagonale par blocs :*

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & & \cdots & \\ 0 & & A_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

avec : $\forall\, k \in [\![1, r]\!] \quad \exists\, \theta_k \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}.$$

4) *Montrer que u est un déplacement si, et seulement si, le sous-espace des vecteurs invariants par u est de codimension $n - p$ paire.*

5) *Montrer que $\mathcal{SO}(E)$ est connexe par arcs et que $\mathcal{O}(E)$ n'est pas connexe par arcs.*

1) Soit P le polynôme caractéristique de u.

S'il admet une racine réelle λ, toute droite engendrée par un des vecteurs propres associés convient.

Si p n'admet pas de racine réelle, soit λ une racine complexe et x un vecteur propre associé. Les coordonnées de x dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ sont des complexes $x_1, \ldots, x_n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le complexe $\overline{\lambda}$ est également une valeur propre et $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} e_i$ est un vecteur propre associé.

Alors le sous-espace engendré par $a = x + \overline{x}$ et par $b = \mathrm{i}\overline{x} - \mathrm{i}x$ est stable par u et de dimension 2.

En effet : (a, b) est libre dans E et :

$$u(a) = \lambda x + \overline{\lambda}\overline{x} = \frac{1}{2}[(\lambda + \overline{\lambda})a + \mathrm{i}(\lambda - \overline{\lambda})b]$$

$$u(b) = \mathrm{i}\overline{\lambda}\overline{x} - \mathrm{i}\lambda x = \frac{1}{2}[-\mathrm{i}(\lambda - \overline{\lambda})a + (\lambda + \overline{\lambda})b].$$

De plus $\mathrm{Vect}(a, b)$ n'admet pas de sous-espace stable par u autre que $\{0_E\}$ et lui- même, car sinon la restriction de u à ce sous-espace admettrait une valeur propre réelle, ainsi que u.

2) On le démontre par récurrence sur la dimension de E.

Si $\dim E = 1$, c'est immédiat.

On suppose le résultat acquis pour tout espace de dimension strictement inférieure à $n \geqslant 2$.

Soit E de dimension n, il existe au moins un sous-espace F irréductible sous u de dimension 1 ou 2.

Si $F = E$ c'est terminé.

Si $F \neq E, F^{\perp} \neq \{0_E\}$.

D'après le *théorème* 14, $F^{\perp}$ est stable par u. Soit v la restriction de u à $F^{\perp}$.

$\dim F^{\perp} < n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $F^{\perp}$ et à v prouve que $F^{\perp}$ est somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles sous v. Ils sont également irréductibles sous u.

Or $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$. Donc $E^{\perp}$ est somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles sous u.

3) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale, adaptée à la décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles sous u.

La matrice de u dans cette base est diagonale par blocs. Chacun des blocs étant d'ordre 1 ou 2.

Les $p + q$ premiers sous-espaces irréductibles $(0 \leqslant p + q \leqslant n)$ sont de dimension 1, ils correspondent, d'après la question **1)**, à une valeur propre réelle.

D'après le *théorème* 12, la restriction de u à chacun d'eux est un automorphisme orthogonal. Cette valeur propre est donc 1 ou -1.

Les p premiers sont associés à 1 et les q suivants à -1.

Ils correspondent aux blocs I_p et $-\mathrm{I}_q$.

Les $(n - p - q)$ sous-espaces irréductibles F_k suivants sont de dimension 2 et la restriction de u à chacun d'eux est un automorphisme orthogonal de spectre réel vide.

Il s'agit d'une rotation d'angle θ_k de $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi les $(n - p - q)$ blocs A_k de la matrice M.

4) $\mathrm{Det}M = (-1)^q = (-1)^{n-p-2r} = (-1)^{n-p}$.

$\mathrm{Det}M = 1 \Leftrightarrow n - p$ est pair.

5) $\mathrm{I}_E \in \mathcal{SO}(E)$. Pour construire un arc joignant I_E à tout u de $\mathcal{SO}(E)$, il suffit de fixer une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et de relier par un chemin la matrice I_n et celle de u dans cette base.

Choisissons $(e_1, \ldots, e_n)$ de telle sorte que la matrice de u soit de la forme M obtenue à la question **3)**.

L'endomorphisme u appartient à $\mathcal{SO}(E)$. Par conséquent, q est pair et $-\mathrm{I}_q$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{q'} \end{pmatrix}$$

où $B_j = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ pour $j \in [\![1, q']\!]$.

La matrice M s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_{r+q'} \end{pmatrix}$$

où $C_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$ avec θ_k dans $\mathbb{R}$ pour $k \in [\![1, r + q']\!]$.

On définit :

$$M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1(t) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_{r+q'}(t) \end{pmatrix}$$

où $C_k(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_k) & -\sin(t\theta_k) \\ \sin(t\theta_k) & \cos(t\theta_k) \end{pmatrix}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $f(t)$ l'endomorphisme de E de matrice $M(t)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

$f(0) = I_E$

$f(1) = u$

$\forall\, t \in [0,1] \quad f(t) \in \mathcal{SO}(E)$.

L'application M est continue, car ses composantes le sont.

L'isomorphisme φ qui associe à une matrice A l'endomorphisme de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est continu car linéaire et la dimension est finie.

$f = \varphi \circ M$ est continue.

L'application f est un arc joignant I_E à u dans $\mathcal{SO}(E)$.

$\mathcal{SO}(E)$ est connexe par arcs.

Soit w un antidéplacement. L'application $\mu : u \longmapsto w \circ u$ de $\mathcal{SO}(E)$ dans $\mathcal{O}^-(E)$ est bijective et continue.

On en déduit que $\mathcal{O}^-(E)$ est connexe par arcs. Mais $\mathcal{O}(E)$ n'est pas connexe par arcs, car l'application continue Det envoie $\mathcal{O}(E)$ dans $\{-1, 1\}$ qui n'est pas connexe par arcs.

Les ensembles $\mathcal{O}^-(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$ sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}(E)$.

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

3.4. Les réflexions

Théorème 14

Soit a et b deux vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$. Alors :

- il existe une unique réflexion $s_{a,b}$ échangeant a et b ;
- $\forall\, x \in E \quad s_{a,b}(x) = x - 2(x \mid e)e$ où $e = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

Considérons a et b deux vecteurs distincts de norme 1.

- Supposons qu'il existe une réflexion s d'hyperplan H telle que $s(a) = s(b)$.

Notons D la droite $H^\perp$.

$\operatorname{Ker}(s + I_E) = D$ et $\operatorname{Ker}(s - I_E) = H$.

$$s(a-b) = s(a) - s(b) = b - a.$$

Donc $a - b$ est un vecteur non nul directeur de la droite D.

La droite D est déterminée de manière unique, ainsi que H qui est $D^\perp$.

En conclusion, si s est une réflexion qui échange a et b, s est la réflexion d'hyperplan $(a-b)^\perp$.

- Réciproquement, soit s la réflexion d'hyperplan $(a-b)^\perp$. Montrons qu'elle échange a et b.

$$(a - b \mid a + b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0.$$

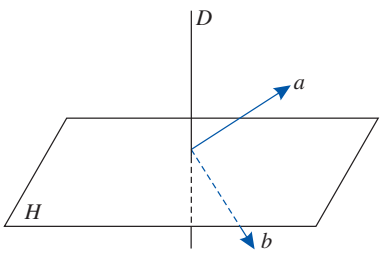
Par conséquent, le vecteur $a + b$ appartient à H.

$$s(a-b) = b - a \quad \text{et} \quad s(a+b) = a + b.$$

Or $a = \dfrac{1}{2}(a-b) + \dfrac{1}{2}(a+b)$, donc $s(a) = b$

- Soit $e = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$, $D = \mathbb{R}e$ et $H = D^\perp$.

$$E = H \oplus D.$$



Doc. 6. *La droite D est dirigée par $a - b$. $H = D^\perp$.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit p la projection orthogonale de E sur D.

$$\forall x \in E \quad p(x) = (x \mid e)e.$$

Or $s = I_E - 2p$. Donc :

$$\forall x \in E \quad s(x) = x - 2(x \mid e)e.$$

Corollaire 14.1
Étant données deux droites distinctes D et D' de vecteurs directeurs unitaires respectifs a et b, les réflexions échangeant D et D' sont $s_{a,b}$ et $s_{a,-b}$.

Application 6

Décomposition d'un automorphisme orthogonal en un produit de réflexions

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un automorphisme orthogonal de E.

On se propose de démontrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que :

(i) *u est la composée d'au moins p réflexions ;*

(ii) *la dimension du sous-espace des vecteurs invariants par u est $n - p$.*

L'ensemble des vecteurs invariants est alors l'intersection des hyperplans de ces réflexions et p est le nombre minimal de réflexions dans la décomposition de u.

Nous allons effectuer une récurrence sur la dimension de E. On pourrait aussi le démontrer en utilisant l'expression matricielle de l'application 4.

Étudier le cas $n = 1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On suppose le théorème démontré pour tout espace euclidien de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et tout endomorphisme orthogonal de cet espace.

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un automorphisme orthogonal de E.

La dimension du sous-espace des vecteurs invariants par u est $n - p$.

1) *On suppose que l'automorphisme u admet au moins un vecteur e non nul invariant.*

Soit H l'orthogonal de e.

a) *Montrer que H est stable par u. On note v la restriction de u à H.*

b) *Comparer les dimensions des sous-espaces des vecteurs invariants de u et de v.*

c) *Montrer que v est la composée de p réflexions d'hyperplans F_i de H.*

d) *En déduire que l'automorphisme orthogonal u est la composée de p réflexions d'hyperplans :*

$$H_i = F_i \oplus \mathbb{R}e.$$

2) *On suppose que l'automorphisme u n'a pas de vecteur invariant non nul.*

Montrer qu'on peut trouver une réflexion s telle que $s \circ u$ admette au moins un vecteur invariant non nul. Conclure.

3) *Montrer que tout déplacement d'un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$ est la composée de p retournements.*

Si $n = 1$, on montre que $u = I_E$ ou $u = -I_E$.

1) a) La droite $\mathbb{R}e$ est stable par u et u est un automorphisme orthogonal. D'après le *théorème* 12 l'orthogonal H de $\mathbb{R}e$ est stable par u et v est un automorphisme orthogonal de H.

b) Soit G le sous-espace des vecteurs invariants de u.

Le sous-espace des invariants de v est $G' = G \cap H$

$$\dim G' = \dim G + \dim H - \dim(G + H).$$

Or $\mathbb{R}e \subset G$ donc $E = \mathbb{R}e + H \subset G + H$ et $\dim(G + H) = n$.

$$\dim G' = n - p + (n - 1) - n = n - 1 - p.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

c) L'hypothèse de récurrence appliquée à H de dimension $n-1$ et à l'automorphisme orthogonal v permet d'affirmer qu'il existe p hyperplans $F_1, \dots, F_p$ de H tels que v soit la composée des p réflexions s'_i d'hyperplans F'_i.

$v = s'_1 \circ \cdots \circ s'_p$ et $\text{Ker}\,(v - I_H) = F_1 \cap \cdots \cap F_p$.

d) Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on pose $H_i = F_i \oplus \mathbb{R}e$. La somme est directe car F_i est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}e$.

$$\dim H_i = \dim F_i + \dim \mathbb{R}e = n - 1.$$

Le sous-espace H_i est un hyperplan de E.

Notons s_i la réflexion d'hyperplan H_i. Alors $s_{i|H} = s'_i$.

Pour tout x de E, il existe un unique y de H et un unique réel k tel que $x = y + ke$.

$$u(x) = v(y) + ku(e) = s'_1 \circ \cdots \circ s'_p(y) + ke$$
$$= s_1 \circ \cdots \circ s_p(y) + ke.$$

Or, pour tout i, $s_i(e) = e$.

$$u(x) = s_1 \circ \cdots \circ s_p(y + ke) = s_1 \circ \cdots \circ s_p(x).$$

On en déduit $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$.

Cherchons les invariants de u.

$$u(x) = x \Leftrightarrow v(y) = y$$

car $u(e) = e$.

On en déduit :

$$G = G' \oplus \mathbb{R}e = F_1 \cap \cdots \cap F_p \oplus \mathbb{R}e = H_1 \cap \cdots \cap H_p.$$

Or $\dim G = n - p$. Les formes linéaires de noyaux $H_1, \dots, H_p$, sont indépendantes.

Peut-on décomposer u en un nombre inférieur de réflexions ? Dans ce cas, l'ensemble des vecteurs invariants aurait une dimension supérieure à $n - p$. Donc p est le nombre minimal de réflexions de la décomposition de u.

2) Dans ce cas $p = n$.

Soit e un vecteur unitaire de E.

$u(e)$ est unitaire et distinct de e. Il existe une unique réflexion s qui échange e et $u(e)$, la réflexion d'hyperplan H orthogonal de $e - u(e)$.

Soit $w = s \circ u$.

Alors w est un automorphisme orthogonal de E qui admet au moins un vecteur invariant.

Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants de w.

$e \notin H$. Donc $E = H \oplus \mathbb{R}e$.

Pour tout x de E, il existe un unique y de H et un unique réel k tel que $x = y + ke$.

$$w(x) = x \Leftrightarrow w(y) + ke = y + ke.$$
$$\Leftrightarrow s \circ u(y) = y.$$

Or $s(y) = y$. Donc :

$$w(x) = x \Leftrightarrow s \circ u(y) = s(y).$$
$$\Leftrightarrow u(y) = y.$$
$$\Leftrightarrow y = 0_E.$$

Le sous-espace des vecteurs invariants de w est $\mathbb{R}e$. Il est de dimension 1.

D'après la question **2)**, l'automorphisme w se décompose en $n-1$ réflexions s_i.

$$w = s_1 \circ \cdots \circ s_{n-1}.$$
$$u = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_{n-1}.$$

L'automorphisme u se décompose en n réflexions.

3) Si u est un déplacement, p est pair. On regroupe les réflexions deux à deux. Chacun des automorphismes obtenus v admet un sous-espace F des vecteurs invariants de codimension 2.

La restriction de v à $F^\perp$ est une rotation plane d'angle θ.

Soit D et D' deux droites de $F^\perp$ faisant un angle $\frac{1}{2}\theta$.

Soit s la réflexion d'hyperplan $F \overset{\perp}{\oplus} D$ et s' celle d'hyperplan $F \overset{\perp}{\oplus} D'$ de sorte que $v = s \circ s'$

Soit Δ une droite de F et G son supplémentaire orthogonal dans F.

Soit s'' la réflexion d'hyperplan $G \oplus D \oplus D'$.

L'application $s \circ s''$ est un retournement de base $G \oplus D$ et $s'' \circ s'$ un retournement de base $G \oplus D'$.

Ils conviennent car : $v = (s \circ s'') \circ (s'' \circ s')$.

► *Pour s'entraîner : ex.6.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.5. Les automorphismes orthogonaux en dimensions 2 et 3

L'étude des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3 fait partie intégrante du programme de Première année et du programme des concours.

Il est impératif de réviser ces notions pour parfaire votre préparation.

Un des objectifs du cours d'algèbre linéaire de Deuxième année est la bonne compréhension des notions de valeurs propres et de sous-espaces propres. Nous vous présentons deux tableaux récapitulatifs sur les automorphismes orthogonaux vus à ce niveau.

Notez bien que ceux-ci ne remplacent pas ceux étudiés en Première année. Ils les complètent.

Notations : $f \in \mathcal{O}(E)$; $E_1 = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$ est le sous-espace des vecteurs invariants de f ; et $E_{-1} = \text{Ker}\,(f + \text{Id}_E)$.

Rapport Centrale, 1998

« La classification des isométries vectorielles en dimension 3 est méconnue, et trop de candidats persistent à croire qu'une projection orthogonale est un automorphisme orthogonal. »

Mines-Ponts, 2003

« Le jury déplore une certaine méconnaissance des isométries vectorielles en dimension 3 ».

Le cas dim $E = 2$

Sp(f)	sous-espaces propres de f	nature de f	Det(f)
$\varnothing$	pas de sous-espace propre.	f est une rotation d'angle $\theta \neq 0 \bmod (\pi)$.	$+1$
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = 0 \bmod (2\pi)$.	$+1$
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$. f est une rotation d'angle $\theta = \pi \bmod (2\pi)$.	$+1$
$\{1, -1\}$	E_1 et E_{-1} sont des droites orthogonales du plan E.	f est la réflexion par rapport à E_1.	-1

L'ensemble des rotations du plan euclidien E est commutatif.

La matrice, relativement à une base orthonormée directe, de la rotation d'angle θ de E ne dépend pas de cette base et est toujours :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le cas dim $E = 3$

Sp(f)	sous-espaces propres de f	nature de f	Det(f)
$\{1\}$	$E_1 = E$.	$f = \text{Id}_E$.	$+1$
	E_1 est une droite.	f est une rotation d'axe E_1.	$+1$
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$.	$f = -\text{Id}_E$.	-1
	E_{-1} est une droite.	f est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$.	-1
$\{1, -1\}$	E_1 est un plan, E_{-1} est la droite $E_1^{\perp}$.	f est la réflexion par rapport à E_1.	-1
	E_1 est une droite, E_{-1} est le plan $E_1^{\perp}$.	f est le demi-tour d'axe E_1 (symétrie orthogonale par rapport à E_1).	$+1$

L'ensemble des rotations de l'espace euclidien E, de dimension 3, n'est pas commutatif.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La matrice, relativement à une base orthonormée, d'une rotation r d'angle θ de E dépend de cette base. Il existe une base orthonormée directe de E telle que la matrice de r dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Application 7

Deux études de matrices orthogonales

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices, relativement à la base canonique, sont respectivement :

1) $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs colonnes de ces deux matrices sont orthogonaux et unitaires.

Ceci prouve que f et g sont des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

1) La matrice M est symétrique et orthogonale. Donc f est une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Vérifier que, d'une manière générale, la trace d'une symétrie f de $\mathbb{R}^3$ vaut :

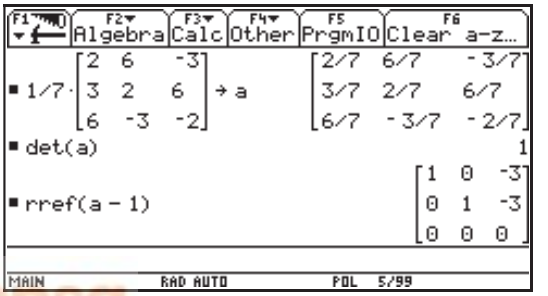
3 si f est l'identité,
1 si f est une symétrie par rapport à un plan,
-1 si f est une symétrie par rapport à une droite,
-3 si f est la symétrie par rapport à $(0,0,0)$.

Ici, $\operatorname{tr} M = -1$. Donc f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Tous calculs effectués :

f est le demi-tour d'axe $\mathbb{R}(3,1,2)$.

2) $\operatorname{Det} A = 1$, donc g est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons son axe.



Doc. 7.

Sur la TI, la fonction `rref` transforme une matrice en une matrice équivalente par opérations sur les lignes uniquement. Le résultat de `rref(a-1)` sur l'écran précédent indique que le système :

$(A - \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour solution la droite $\mathbb{R}(3,3,1)$. Donc g est une rotation d'axe $\mathbb{R}(3,3,1)$.

Calculons son angle.

Dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur de base est $e_1 = (3,3,1)$, la matrice de g est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{tr} g = 1 + 2\cos(\theta) = \operatorname{tr} A = \frac{2}{7}$.

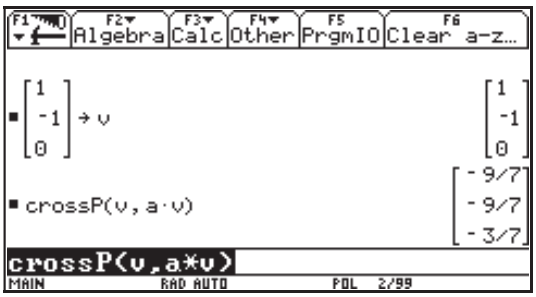
$$\cos(\theta) = \frac{-5}{14} \quad \text{et} \quad \theta = \pm\operatorname{Arccos}\left(\frac{-5}{14}\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour déterminer le signe de θ, considérons un vecteur du plan orthogonal à e_1. Par exemple $(1,-1,0)$.

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad AV = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$V \wedge (AV) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



Doc. 8.

Ce dernier vecteur étant de sens opposé à e_1, on a :

$$\theta = -\text{Arccos}\left(\frac{-5}{14}\right).$$

Application 8

Trois méthodes pour l'étude d'une rotation de $\mathbb{R}^3$

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur $(1,1,1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est noté $\vec{v}$.

Le but de cette application est de calculer la matrice M, relativement à la base canonique, de la rotation r, d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) *En étudiant la restriction de r au plan affine P d'équation :*

$$x + y + z = 1,$$

déterminer la matrice M.

2) *En utilisant la matrice de r dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur est le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$, déterminer la matrice M.*

3) a) *Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ est noté $(\,|\,)$ et le produit vectoriel $\wedge$.*

Soit $\vec{e_1}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{e_1}$ et d'angle θ est l'application :

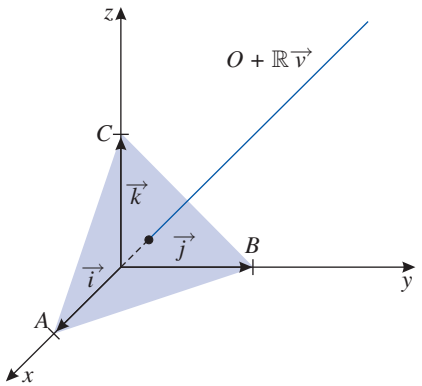
$$\vec{x} \longmapsto (1-\cos\theta)(\vec{e_1} \mid \vec{x})\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{e_1} \wedge \vec{x}.$$

b) *En déduire la matrice M.*

1) Utilisons les notations affines suivantes :

$$O = (0,0,0); A = O + \vec{i}; B = O + \vec{j}; C = O + \vec{k}.$$

Le triangle (A,B,C) est un triangle équilatéral du plan P. La droite affine $O + \mathbb{R}\vec{v}$ est orthogonale au plan P et coupe ce plan au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, centre de gravité du triangle équilatéral (A,B,C).



Doc. 9.

Donc la restriction de la rotation r au plan P transforme A en B ; B en C ; C en A.

Ceci permet de conclure que :

$$r(\vec{i}) = \vec{j}; r(\vec{j}) = \vec{k}; r(\vec{k}) = \vec{i}.$$

Donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

N.B. Une interprétation géométrique aussi simple n'est pas toujours possible. C'est pourquoi nous vous proposons deux autres méthodes de détermination de cette matrice.

2) Soit $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ est unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$.

On pose $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

La famille $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Puisque r est la rotation d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{e_1}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, sa matrice dans la base B est :

$$M_B(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique à la base B est la matrice orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

La matrice M de la rotation r, relativement à la base canonique, est telle que :

$$M = PM_B(r){}^tP.$$

Votre calculette favorite effectuera ce produit matriciel et vous montrera que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) a) Dans cette question, $\overrightarrow{e_1}$ est un vecteur unitaire quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$f(\overrightarrow{x}) =$

$(1-\cos\theta)(\overrightarrow{e_1} \mid \overrightarrow{x})\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{x}$ **(1)**

La linéarité de f est immédiate.

Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est $\overrightarrow{e_1}$.

Vérifier que :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1},$$
$$f(\overrightarrow{e_2}) = \cos\theta\overrightarrow{e_2} + \sin\theta\overrightarrow{e_3},$$
$$f(\overrightarrow{e_3}) = -\sin\theta\overrightarrow{e_2} + \cos\theta\overrightarrow{e_3}.$$

La matrice de f relativement à la base B est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Donc, f est la rotation d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{e_1}$ et d'angle θ.

b) Dans notre cas particulier :

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

La formule **(1)** devient, pour tout $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$r(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{x})(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{x} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{x}.$$

On retrouve alors $r(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$; $r(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}$; $r(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i}$ et la matrice M.

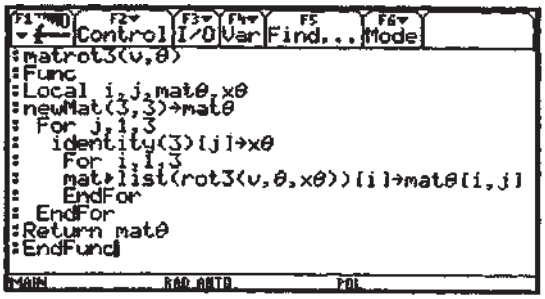
Allons plus loin. La TI permet d'automatiser la formule **(1)**. La fonction :

```
(1-cos θ )*dotP(v,x)/dotP(v,v)*v
  +cos θ *x+sin θ /norm(v)*crossP(v,x)
                        → rot3(v, θ ,x)
```

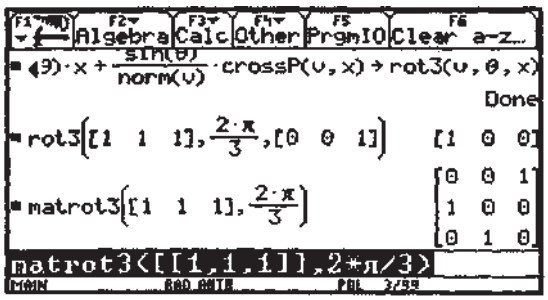
calcule, pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, v et x et un nombre θ, l'image du vecteur x par la rotation d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle θ.

Procédant de façon similaire à l'*application* 3 du *chapitre* précédent, les écrans suivants montrent la programmation de la fonction `matrot3(v, θ )` qui calcule la matrice, dans la base canonique, de la rotation d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle θ, ainsi que sa mise en œuvre sur notre exemple.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



Doc. 10.



Doc. 11.

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

4 Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien sur son dual

Théorème 15

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien. Notons E^* son dual.

• Pour tout a de E, l'application $j(a) : x \longmapsto (a \mid x)$ est une forme linéaire sur E.

• L'application $j : a \longmapsto j(a)$ est un isomorphisme canonique de E sur son dual E^* :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists\, !a \in E \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = (a \mid x).$$

Démonstration

La vérification du premier point est immédiate.

L'application j est linéaire de E dans E^*.

Or, $\dim E = \dim E^* = n > 0$. Il suffit de montrer que j est injective.

Soit a dans E tel que : $\forall x \in E (a \mid x) = 0$.

Le produit scalaire est non dégénéré. Donc $a = 0_E$. L'application j est injective.

La construction de j ne dépend pas du choix d'une base de E. Elle ne dépend que du produit scalaire. Il s'agit d'un isomorphisme canonique.

L'image d'une base orthonormale de $(E,(\ |\ ))$ par j en est la base duale.
Si on munit E^* de la structure euclidienne associée à la base duale. L'application j est un isomorphisme d'espaces euclidiens.

Exemple : La définition du produit vectoriel

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 3$.

On a défini dans le cours de Première année le produit mixte de n vecteurs de E.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Le produit mixte de cette famille ordonnée, noté $[x_1, \ldots, x_n]$, est le déterminant dans la base B de cette famille : $[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{Det}_B(x_1, \ldots, x_n)$.

Si B et B' sont deux bases orthonormales directes : $\mathrm{Det}_B B' = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On en a déduit que le produit mixte $[x_1, \dots, x_n]$, ne dépend pas de la base considérée. Il ne dépend que de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 16

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 3$.

Pour toute famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de $n-1$ vecteurs de E, il existe un unique vecteur a de E tel que :

$$\forall x \in E \quad [x_1, \dots, x_{n-1}, x] = (a \mid x).$$

Ce vecteur a est appelé **produit vectoriel** de la famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Il est noté : $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$.

Démonstration

Soit φ l'application $x \longmapsto [x_1, \dots, x_{n-1}, x]$. C'est une forme linéaire sur E.

D'après le *théorème* 15, il existe un unique vecteur a tel que :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (a \mid x).$$

Voici quelques propriétés du produit vectoriel.

Théorème 17

- L'application produit vectoriel $(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ de E^{n-1} dans E est $(n-1)$-linéaire alternée.
- Une famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de E est liée si, et seulement si, son produit vectoriel $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est nul
- $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in (\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}))^{\perp}$.
- Pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_{n-1})$, la famille : $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$ est une base directe de E.

Démonstration

Montrons le deuxième point.

Si $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est liée alors, pour tout x de E, on a $[x_1, \dots, x_{n-1}, x] = 0$.

$\forall x \in E \quad (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid x) = 0$. Par conséquent, $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = 0_E$.

Si $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est libre alors, on peut la compléter en une base $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

On a $[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] \neq 0$. Par conséquent, $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid x_n) \neq 0$ et $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq 0_E$.

Montrons le troisième point. Soit k quelconque dans $[\![1, n-1]\!]$.

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid x_k) = \mathrm{Det}_B(x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, x_k).$$

Ce déterminant est nul puisqu'il possède deux colonnes identiques.

On en déduit : $\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad x_k \perp (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe de E arbitrairement choisie.

Pour tout j de $[\![1, n-1]\!]$ et tout i de $[\![1, n]\!]$, notons $a_{i,j}$ le réel $(x_j \mid e_i)$ et α_i le réel $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid e_i)$. Les deux formes linéaires :

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) \longmapsto \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

et

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)\longmapsto\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & \beta_1\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & \beta_n\end{vmatrix}$$

sont égales. On identifie les coefficients de chaque β_i.

La $i^{\text{ième}}$ coordonnée de $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ orthonormale directe de E est le cofacteur d'indice (i,n) dans la matrice de la famille $(x_1,\dots,x_k,\dots,x_{n-1},x)$ où x est un vecteur arbitraire de E.

Application 9

Division vectorielle

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension 3, a et b deux vecteurs de E. On suppose que le vecteur a n'est pas nul.

Montrer que l'équation : $a\wedge x=b$ d'inconnue x dans E a des solutions si, et seulement si, $(a\mid b)=0$ et que lorsque cette condition est remplie, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{b\wedge a}{\|a\|^2}+\lambda a;\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Si $a\wedge x=b$, alors $a\perp b$. Donc $(a\mid b)=0$.

Réciproquement, supposons $(a\mid b)=0$.

$$a\wedge(b\wedge a)=\|a\|^2 b.$$

Or $a\neq 0_E$. Par conséquent le vecteur $z=\dfrac{b\wedge a}{\|a\|^2}$ est une solution.

$$\begin{aligned} a\wedge x=b &\Leftrightarrow a\wedge x=a\wedge z\\ &\Leftrightarrow a\wedge(x-z)=0_E\\ &\Leftrightarrow x-z\in\mathbb{R}a.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{b\wedge a}{\|a\|^2}+\lambda a;\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour orthonormaliser **une famille libre** $(e_1, \dots, e_p)$ **d'un espace euclidien**, on construit par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec $e'_{k+1} = e_{k+1} - p_k(e_{k+1}) = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_i)\varepsilon_i$ où p_k est la projection orthogonale sur Vect $(e_1, \dots, e_k)$ (*Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*).

Il est parfois plus simple de poser :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i$$

et de déterminer les coefficients pour que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ soit orthogonale. Puis on normalise les vecteurs obtenus en les divisant par leur norme.

● Pour montrer qu'**un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien est orthogonal**, on peut montrer que :

- l'endomorphisme u conserve le produit scalaire ;
- l'endomorphisme u conserve la norme ;
- la matrice A de u dans une base orthonormale vérifie : ${}^tAA = I_n$:
- l'endomorphisme u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale ;
- l'endomorphisme u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale ;
- l'endomorphisme u est la composée de réflexions.

● Pour montrer qu'**un automorphisme orthogonal est un déplacement**, on peut montrer :

- que son déterminant est positif ;
- qu'il est la composée d'un nombre pair de réflexions ;
- que le sous-espace des vecteurs invariants est de codimension paire.

● Pour montrer qu'**un automorphisme orthogonal est un antidéplacement** on peut montrer :

- que son déterminant est négatif ;
- qu'il est la composée d'un nombre impair de réflexions ;
- que le sous-espace des vecteurs invariants est de codimension impaire.

● Pour reconnaître un automorphisme orthogonal dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3, on utilise les tableaux présentés dans ce chapitre, après avoir recherché les sous-espaces propres et le déterminant.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 On définit sur $\mathbb{R}_3[X]$ le produit scalaire :

$$(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Construire une base orthonormale à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2 On considère dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique le sous-espace F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

1) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F.

2) Soit $a = (1,1,1,3)$ dans $\mathbb{R}^4$. Calculer $\mathrm{d}(a, F)$.

3 Soit $S = (s_{ij})_{i\in[\![1,n]\!]\ j\in[\![1,n]\!]}$ une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = n \quad \text{et} \quad \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\right| \leqslant n.$$

Indication : Pour l'inégalité, déterminer d'abord un vecteur colonne X tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = {}^{t}XSX$.

4 Soit un entier $n \geqslant 2$.

a) Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n$ n'est pas commutatif.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{SO}_n$ des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n$ et que, pour $n \geqslant 3$, il n'est pas commutatif.

c) Que dire de $\mathcal{SO}_2$?

5 Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien et u un automorphisme orthogonal de E.

Pour tout entier naturel non nul, on définit $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge simplement vers la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E)$.

6 L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$ est noté (x_1, x_2, x_3, x_4).

Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, de la réflexion de $\mathbb{R}^4$ par rapport à l'hyperplan d'équation :

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

7 Caractériser géométriquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et M la matrice de $(\ |\ )$ dans cette base.

1) Montrer qu'on peut trouver une base $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \quad \Rightarrow (e_i \mid f_j) = 0$$
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad (e_i \mid f_i) = 1.$$

Cette base s'appelle la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans l'espace euclidien $(E, (\ |\ ))$.

2) Vérifier que l'on a : $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (f_i \mid f_j)\, e_j$.

3) Soit N la matrice de $(\ |\ )$ dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$. Montrer que $N = M^{-1}$.

9 L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Que dire de l'application $P(X) \longmapsto P(-X)$?

10 Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

11 Soit x_1, x_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (respectivement v_1, v_2, v_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$).

Montrer que $|[x_1, x_2]|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs x_1, x_2 et $|[v_1, v_{2,v3}]|$, le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs x_1, x_2 et x_3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

12 Soit $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Caractériser géométriquement les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

a) $X \longmapsto X' = AX + B$;

b) $X \longmapsto X' = AX + C$.

13 ** Inégalité de Hadamard

Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle | \rangle$ et la norme euclidienne associée, $\| \ \|$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de M.

Montrer que $|\text{Det}(M)| \leqslant \|C_1\| \, \|C_2\| \ldots \|C_n\|$. Discuter le cas d'égalité.

14 Soit a, b, c trois réels et M la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1) Prouver que M est une matrice de rotation si, et seulement si, a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

2) Lorsque ceci est réalisé, déterminer l'axe de la rotation et son angle en fonction de a, b et c.

15 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ dans E^n.

Montrer que $[v_1, \ldots, v_n]^2 = g(v_1, \ldots, v_n)$ où g désigne le déterminant de Gram défini dans l'*application* 3.

16 ** Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 2$ et $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille libre de vecteurs de E. On note $F = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$ et $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$. On oriente F.

1) Montrer qu'il existe un unique vecteur unitaire w de $F^\perp$ tel que, pour toute base orthonormale directe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de F, la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, w)$ soit une base orthonormale directe de E.

Vérifier que $v = [v_1, \ldots, v_{n-1}]w$ où $[v_1, \ldots, v_{n-1}]$ désigne le produit mixte de $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ dans l'espace euclidien orienté F.

2) Déduire de **1)** et de l'*exercice* 15 :

$$\forall (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in E^{n-1} \quad g(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\|^2.$$

Pour $n = 3$, on obtient l'identité de Lagrange.

17 * Soit $(E, (\ | \ ))$ un espace euclidien. On note s_D la symétrie orthogonale par rapport à une droite D de E et s_P la symétrie orthogonale par rapport à un plan P de E.

Montrer que :

$$s_P \circ s_D = s_D \circ s_P \Leftrightarrow D \subset P^\perp \quad \text{ou} \quad D \subset P.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

23 Adjoint d'un endomorphisme

Mensa ACADEMY

Introduction

Nous définirons l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace préhilbertien réel et nous étudierons ses propriétés.
Le deuxième volet de ce chapitre aborde la réduction des matrices symétriques réelles, source de nombreuses applications

OBJECTIFS

- Adjoint d'un endomorphisme.
- Endomorphismes auto-adjoints.
- Réduction des endomorphismes auto-adjoints.
- Application à la norme subordonnée.
- Automorphisme auto-adjoint associé à une forme bilinéaire symétrique.
- Réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme quadratique définie positive.
- Réduction des coniques et des quadriques

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce chapitre, $(E,(\ |\ ))$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$.

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace préhilbertien réel

1.1. Définition de l'adjoint

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme de E.
S'il existe un endomorphisme v de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)\mid y) = (x \mid v(y)),$$

on dit que v est un **adjoint** de u.

Théorème 1
Si un endomorphisme u de l'espace préhilbertien réel $(E,(\ |\ ))$ admet un adjoint, il est unique. On le note u^*.

Démonstration
Si v et w sont des adjoints de u, nous pouvons écrire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)\mid y) = (x \mid v(y)) = (x \mid w(y)).$$

Par conséquent, pour tout y de E, nous avons :

$$\forall x \in E \quad (x \mid v(y) - w(y)) = 0.$$

Nous en déduisons $\forall y \in E \quad v(y) = w(y)$, puis $v = w$.

Exemples

- $I_E{}^* = I_E$.
- On suppose que F admet un supplémentaire orthogonal.

Soit p une projection orthogonale d'image F.

$$\forall x \in E \quad \exists\,!(x',x'') \in F \times F^\perp \quad x = x' + x''.$$

De même : $\forall y \in E \quad \exists\,!(y',y'') \in F \times F^\perp \quad y = y' + y''$.

$$(p(x)\mid y) = (x' \mid y' + y'') = (x' \mid y') = (x' + x'' \mid y') = (x \mid p(y)).$$

Par conséquent :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (p(x)\mid y) = (x \mid p(y)).$$

Toute projection orthogonale p admet un adjoint et $p^* = p$.

Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = u$ est dit **auto-adjoint** ou **endomorphisme symétrique**.

Il est caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)\mid y) = (x \mid u(y)).$$

Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = -u$ est dit **endomorphisme antisymétrique.**

Il est caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)\mid y) = -(x \mid u(y)).$$

Il peut arriver qu'un endomorphisme n'admette pas d'adjoint.
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire canonique et u défini par $P \longmapsto \widetilde{P}(1)X^0$.
S'il existait un endomorphisme v adjoint de u, on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u(X^n)\mid X^0) = (X^n \mid v(X^0)).$$

C'est-à-dire :

$$1 = (X^0 \mid X^0) = (X^n \mid v(X^0)).$$

Or ceci est en contradiction avec :

$$v(X^0) = \sum_{n=0}^{\infty} (X^n \mid\ v(X^0))\, X^n$$

car la famille $\left((X^n \mid\ v(X^0))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être à support fini.

Rapport Centrale, 2003
« Certains candidats sont incapables de donner un exemple non trivial d'une notion qu'ils utilisent, par exemple citer un endomorphisme auto-adjoint autre que l'identité ou l'endomorphisme nul. »

Rapport CCP, 2003
« Erreur rencontrée : Une matrice est soit symétrique, soit antisymétrique. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Un adjoint en dimension infinie

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire :*

$$(f,g) \longmapsto (f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

1) *Soit* u *l'application de* E *dans* E *définie par :*

$$\forall f \in E \quad \forall x \in [0,1] \quad u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que u *est un endomorphisme de* E *et qu'il admet un adjoint* u^*.

2) *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* $u^* \circ u$.

1) Soit f et g deux éléments de E.

La fonction $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $u(f)(0) = 0$ et $u(f)' = f$.

L'application $u(f)$ appartient à E.

Le calcul de $(u(f) \mid g)$ se fait en intégrant par parties.

Soit G la primitive de g qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned}(u(f) \mid g) &= \int_0^1 u(f)(x)g(x)\,dx \\ &= \big[u(f)(x)G(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f(x)G(x)\,dx \\ &= \big(f \mid -G\big).\end{aligned}$$

On pose $u^*(g) = -G = \displaystyle\int_x^1 g(t)\,dt$.

2) Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$ et f un vecteur propre associé.

- On montre tout d'abord que $\lambda > 0$.

$$(u^* \circ u(f) \mid f) = \|u(f)\|^2 = \lambda \|f\|^2.$$

Sachant que $\|f\|^2 > 0$, on en déduit $\lambda \geqslant 0$.

Si $\lambda = 0$, alors $u(f) = 0$ et $f = u(f)' = 0$.

Ce n'est pas possible donc :

$$\mathrm{Sp}(v^* \circ v) \subset \mathbb{R}^{+*}.$$

- On note $\lambda = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$. Pour tout x de $[0,1]$:

$$u^* \circ u(f)(x) = \int_x^1 u(f)(t)\,dt.$$

$u^* \circ u(f) = \alpha^2 f \Leftrightarrow \big(-u(f) = \alpha^2 f' \text{ et } f(1) = 0\big)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned}&u^* \circ u(f) = \alpha^2 f \\ &\Leftrightarrow \big(-u(f)' = \alpha^2 f'',\ f'(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\big). \\ &\Leftrightarrow \big(-f = \alpha^2 f'',\ f'(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\big).\end{aligned}$$

$u^* \circ u(f) = \alpha^2 f$ si, et seulement si, la fonction f est de la forme :

$$f(x) = A\cos\left(\frac{1}{\alpha}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{\alpha}x\right)$$

avec $B = 0$ et $A\cos\dfrac{1}{\alpha} + B\sin\dfrac{1}{\alpha} = 0$. Pour qu'il existe des solutions non nulles, il faut $\cos\dfrac{1}{\alpha} = 0$.

Puis $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous avons procédé par équivalence, la réciproque est inutile.

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\, u^* \circ u &= \left\{\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \mid k \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

Le sous-espace propre de $u^* \circ u$ associé à $\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$ est la droite de E engendrée par la fonction : $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}x\right)$.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.2. Propriétés algébriques

Théorème 2

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel, u et v deux endomorphismes de E admettant des adjoints u^* et v^*. Alors :

- u^* admet un adjoint et $(u^*)^* = u$;
- $u \circ v$ admet un adjoint et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;
- pour tous réels α et β, l'endomorphisme $\alpha u + \beta v$ admet un adjoint et $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$.

Exemple

Toute symétrie orthogonale s admet un adjoint et $s^* = s$.

Soit s la symétrie orthogonale de base F et de direction $F^\perp$.

Notons p la projection orthogonale d'image F. $s = 2p - I_E$.

Or $p^* = p$ et $I_E^* = I_E$.

Donc s admet un adjoint et :

$$s^* = 2p^* - I_E^* = 2p - I_E = s.$$

Théorème 3

Soit u un endomorphisme admettant un adjoint u^*. Alors :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

Mensa ACADEMY

Démonstration

Soit x quelconque dans E.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} u^* &\Leftrightarrow u^*(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall z \in E \quad (z \mid u^*(x)) = 0. \\ &\Leftrightarrow \forall z \in E \quad (u(z) \mid x) = 0. \\ &\Leftrightarrow x \in (\operatorname{Im} u)^\perp. \end{aligned}$$

Théorème 4

Soit u un endomorphisme admettant un adjoint u^* et F un sous-espace de E stable par u.

Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration

Soit x quelconque dans $F^\perp$. Montrons que $u^*(x)$ est également dans $F^\perp$.

$$\forall y \in F \quad \big(y \mid u^*(x)\big) = \big(u(y) \mid x\big).$$

Or $u(y)$ appartient à F car F est stable par u et x appartient à $F^\perp$.

Donc $(u(y) \mid x) = 0$.

On en déduit que $u^*(x)$ appartient à $F^\perp$.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 2.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.3. Étude dans un espace euclidien

Théorème 5
Tout endomorphisme d'un espace euclidien admet un adjoint.

Démonstration

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base.

En notant X le vecteur colonne des coordonnées de x et Y celui de y dans cette base, on obtient :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(u(x) \mid y\big) = {}^t(AX)Y = ({}^tX\,{}^tA)Y = {}^tX({}^tAY).$$

Soit v l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid v(y)\big) \quad \text{et} \quad v = u^*.$$

Théorème 6
Si A est la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale, alors ${}^tA$ est la matrice de u^* dans la même base.

Théorème 7
Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien et F un sous-espace de E. Alors :

- l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $u \longmapsto u^*$ est un automorphisme involutif ;
- si u appartient à $\mathcal{GL}(E)$, alors u^* appartient à $\mathcal{GL}(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$;
- le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u^* ;
- $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$;
- les endomorphismes u et u^* ont le même rang, la même trace et le même déterminant ;
- les endomorphismes u et u^* ont le même polynôme caractéristique et le même spectre.

Démonstration

Montrons seulement le troisième et le quatrième points.

- On sait que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Si $F^\perp$ est stable par u^*, d'après le résultat précédent, on a $(F^\perp)^\perp$ stable par $(u^*)^*$, donc par u.

La dimension est finie. Par conséquent $(F^\perp)^\perp = F$.

- On sait que :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

On l'applique à u^* :

$$\operatorname{Ker} (u^*)^* = (\operatorname{Im} u^*)^\perp.$$

D'où :

$$\operatorname{Im} u^* = \big((\operatorname{Im} u^*)^\perp\big)^\perp = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 3.*

Rapport X, 2003

« La transposée d'une matrice A n'est pas seulement la matrice B telle que $B_{i,j} = A_{j,i}$ mais également la matrice telle que :

$$(AX \mid Y) = (X \mid BY). \text{ »}$$

⚠ *L'hypothèse « base orthonormale » est essentielle. Si la base n'est pas orthonormale, la matrice du produit scalaire est une matrice Ω distincte de l'identité.*

Le calcul de $\big(u(x) \mid y\big)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\big(u(x) \mid y\big) &= {}^t(AX)\,\Omega\,Y \\ &= ({}^tX\,{}^tA)\Omega\,Y \\ &= {}^tX\Omega\,(\Omega^{-1}\,{}^tA\,\Omega\,Y).\end{aligned}$$

La matrice de u^* est $\Omega^{-1}\,{}^tA\Omega$.

Mais pas nécessairement les mêmes vecteurs propres.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.4. Norme subordonnée et adjoint

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme continu de E.

Nous avons démontré dans le *chapitre* précédent que la norme subordonnée de u est :

$$\|u\| = \sup\{(u(x) \mid y)\ ;\ x \in E\ \ y \in E\ \ \|x\| \leqslant 1\ \ \|y\| \leqslant 1\}.$$

Cette expression va nous permettre d'étudier la norme subordonnée de u^*, de $u \circ u^*$ et de $u^* \circ u$.

Théorème 8

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme continu admettant un adjoint u^*. Alors :

$$\|u\| = \|u^*\| \quad \text{et} \quad \|u \circ u^*\| = \|u^* \circ u\| = \|u\|^2.$$

Démonstration

Soit $B = \{x \in E\ ;\|x\| \leqslant 1\}$. $\forall (x,y) \in B^2 \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$.

Par conséquent : $\|u\| = \|u^*\|$. $\forall (x,y) \in B^2 \quad (u^* \circ u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(y))$.

D'après l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, on a :

$$(u(x) \mid u(y)) \leqslant \|u(x)\|\ \|u(y)\|.$$

$$\forall (x,y) \in B^2 \quad (u^* \circ u(x) \mid y) \leqslant \|u(x)\|\ \|u(y)\| \leqslant \|u\|^2\|x\|\ \|y\| \leqslant \|u\|^2.$$

On en déduit que $\|u^* \circ u\| \leqslant \|u\|^2$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left(\sup\{\|u(x)\|\ ;\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\}\right)^2 \\
&= \sup\{\|u(x)\|^2\ ;\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{(u(x) \mid u(x))\ ;\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{(u^* \circ u(x) \mid x)\ ;\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\} \\
&\leqslant \sup\{(u^* \circ u(x) \mid y)\ ;\quad x \in B\ \ y \in B\} \\
&\leqslant \|u^* \circ u\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\|$.

On écrit ensuite cette égalité en remplaçant u par u^*.

On obtient : $\|u \circ u^*\| = \|u^*\|^2 = \|u\|^2$.

1.5. Automorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien réel

Théorème 9

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un automorphisme de E.

L'automorphisme u est orthogonal si, et seulement si, u^{-1} est l'adjoint de u.

Démonstration

Supposons que l'automorphisme u soit orthogonal.

Soit x et y quelconques dans E et $z = u^{-1}(y)$.

$$(u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(z)) = (x \mid z) = (x \mid u^{-1}(y)).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u^{-1}(y)).$$

On en déduit l'existence de u^* et l'égalité $u^* = u^{-1}$.

Supposons maintenant que u admet un adjoint et que $u^* = u^{-1}$. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid u^* \circ u(y)) = (x \mid u^{-1} \circ u(y)) = (x \mid y).$$

L'automorphisme u conserve le produit scalaire. Il est orthogonal.

Exemple

Une symétrie orthogonale s vérifie $s^* = s$ et $s^{-1} = s$.

Par conséquent, une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal auto-adjoint.

Rapport Centrale, 1997

« Certaines confusions ont pour cause la méconnaissance de la signification exacte des termes employés : un projecteur orthogonal n'est, en général, pas un endomorphisme orthogonal, de même qu'un endomorphisme symétrique n'est pas toujours une symétrie. »

1.6. Caractérisation des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Théorème 10

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E ;

(ii) $u^* u = \mathrm{I}_E$;

(iii) $u u^* = \mathrm{I}_E$;

(iv) l'endomorphisme u est inversible et $u^{-1} = u^*$.

Mensa ACADEMY

► *Pour s'entraîner : ex. 4.*

⚠ *Lorsque la dimension de E n'est pas finie et que u admet un adjoint, la propriété* **(ii)** *n'entraîne pas la propriété* **(i)**. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire canonique. L'endomorphisme u défini par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u(X^n) = X^{n+1}$$

admet pour adjoint l'endomorphisme v défini par $v(1) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v(X^n) = X^{n-1}$. On vérifie que $u^* u = \mathrm{I}_E$ mais u n'est pas surjectif.

2 Endomorphismes auto-adjoints

2.1. Propriétés des endomorphismes auto-adjoints

Théorème 11

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n.

L'endomorphisme u de E est auto-adjoint si, et seulement si, la matrice A de u dans une base orthonormale vérifie :

$$^t A = A.$$

Théorème 12

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n. L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints de E est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

$\mathcal{S}(E)$ est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $u \longmapsto u - u^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. L'application, qui associe à tout endomorphisme u sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, induit un isomorphisme entre $\mathcal{S}(E)$ et l'espace $\mathcal{S}$ des matrices symétriques réelles.

Théorème 13

Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien, F un sous-espace de E et u un endomorphisme de E auto-adjoint. Alors :

- le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u ;
- $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Rapport Centrale, 1998

« Rappelons par ailleurs que, lorsque f est un endomorphisme auto-adjoint, son image et son noyau sont supplémentaires orthogonaux, et sont tous deux stables par f. »

Application 2

Supplémentaires orthogonaux et endomorphismes auto-adjoints.

Soit V et W deux sous-espaces de l'espace euclidien $\big(E, (\ |\ )\big)$ tels que $E = V \oplus W$.

Le projecteur sur V parallèlement à W est noté p et celui sur W parallèlement à V est noté q.

1) *On fixe deux réels distincts α et β et on pose $f = \alpha p + \beta q$.*

Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint de E si, et seulement si, V et W sont supplémentaires orthogonaux.

2) *Soit u un projecteur de E. Montrer que u est un projecteur orthogonal si, et seulement si : $u^* = u$.*

3) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie s de E soit telle que $s = s^*$.*

1) Soit x et y deux éléments quelconques de E. On note :

$$x = v + w \quad \text{et} \quad y = v' + w',$$

avec v et v' dans V, w et w' dans W.

$$(f(x) \mid y) = \alpha(v \mid v') + \beta(w \mid w') + \alpha(v \mid w') + \beta(w \mid v')$$

$$(x \mid f(y)) = \alpha(v \mid v') + \beta(w \mid w') + \beta(v \mid w') + \alpha(w \mid v').$$

On en déduit que, si V et W sont supplémentaires orthogonaux, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$$

et f est auto-adjoint.

Réciproquement, si V et W ne sont pas orthogonaux, il existe $(v, w') \in V \times W$ tel que $(v \mid w') \neq 0$.

Dans ce cas,

$$(f(v) \mid w') = \alpha(v \mid w')$$

et

$$(v \mid f(w')) = \beta(v \mid w').$$

Or $\alpha \neq \beta$ et $(v \mid w') \neq 0$, donc :

$$(f(v) \mid w') \neq (v \mid f(w'))$$

et f n'est pas auto-adjoint.

2) Il suffit d'appliquer la question **1)** à $V = \operatorname{Im} u$, $W = \operatorname{Ker} u$, $p = u$ et $q = \operatorname{Id}_E - u$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

N.B. : Vous pouvez aussi démontrer la question **2)** d'abord et en déduire la question **1)**.

3) Soit s la symétrie par rapport à V parallèlement à W. En utilisant les notations de la question **1)** on a $s = p - q$ et s est un endomorphisme auto-adjoint si, et seulement si, V et W sont supplémentaires orthogonaux.

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Théorème 14

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E auto-adjoint. Alors :

- u est diagonalisable ;
- ses valeurs propres sont réelles ;
- ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux ;
- il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale réelle.

Démonstration

Soit A la matrice de u dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale.

Le polynôme caractéristique P_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$. Soit λ une valeur propre complexe de u et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$.

$\overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Or A est réelle. Donc $A = \overline{A}$.

$$ {}^tXA\overline{X} = {}^tX\,(A\overline{X}) = {}^tX\,\overline{\lambda}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,{}^tX\,\overline{X}. $$

Un autre calcul de ${}^tX\,A\overline{X}$ donne :

$$ {}^tXA\overline{X} = \left({}^tXA\right)\overline{X} = \lambda\,{}^tX\,\overline{X}. $$

On en déduit : $(\lambda - \overline{\lambda})\,{}^tX\,\overline{X} = 0$. Or X est non nul. Donc ${}^tX\,\overline{X} \neq 0$. Puis $\lambda = \overline{\lambda}$ et λ est réel.

Soit λ et μ deux valeurs propres de u distinctes.

Pour tout x appartenant au sous-espace propre $E_\lambda(u)$ et tout y appartenant au sous-espace propre $E_\mu(u)$, on a :

$$ (u(x) \mid y) = \lambda(x \mid y) = (x \mid u(y)) = \mu(x \mid y). $$

On en déduit $(\lambda - \mu)(x \mid y) = 0$. Or $\lambda \neq \mu$. Donc $(x \mid y) = 0$.

Montrons que u est diagonalisable.

Soit $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

Nous allons montrer par l'absurde, que $F = E$.

Si $F \neq E$. Alors $F^\perp \neq \{0_E\}$. Or F est stable par u. Donc $F^\perp$ est stable par u également.

Soit v la restriction de u à $F^\perp$. $F^\perp \neq \{0_E\}$. Donc v admet au moins une valeur propre λ complexe. λ est également une valeur propre de u. Par conséquent, λ est réelle.

Il existe x dans $F^\perp$ non nul tel que $v(x) = \lambda x$.

$x \in F \cap F^\perp$. Ceci est contradictoire avec x non nul.

En conclusion : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et u est diagonalisable.

On peut choisir dans chaque $E_\lambda(u)$ une base orthonormale et constituer, en réunissant ces bases, une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres.

Corollaire 14.1

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{S}$. Il existe une matrice D diagonale réelle d'ordre n et une matrice orthogonale P d'ordre n telles que :

$$ A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP. $$

Rapport CCP, 2003

« La première partie proposait du calcul, en particulier de diagonaliser une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en demandant une matrice de passage orthogonale. La matrice était simple et le candidat pouvait avec un minimum de réflexion calculer le polynôme caractéristique en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et ensuite trouver les sous-espaces propres sans résoudre de systèmes. Cette question rapportait par ailleurs beaucoup de points, les calculatrices n'étant pas autorisées. Cette question simple ayant été réussie par moins d'un candidat sur cinq ! »

Rapport Centrale, 1997

« Pour les matrices symétriques [réelles], le caractère orthogonal des sous-espaces propres est souvent cité, mais rarement exploité de façon constructive. »

Rapport CCP, 1997

« Nombreux sont les candidats qui ne savent pas qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée. »

Mines-Ponts, 2003

« Concernant les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien, le théorème spectral semble bien assimilé, mais les caractérisations des endomorphismes orthogonaux restent un mystère pour quelques étudiants. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Il existe une base orthonormale constituée de vecteurs propres.

Soit P la matrice de passage.

Il existe une matrice D diagonale réelle d'ordre n telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

La matrice de passage P transforme une base orthonormale en une base orthonormale. Elle est orthogonale. $P^{-1} = {}^tP$. Donc :

$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP.$$

■ Il est intéressant de remarquer que, réciproquement, si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}$ et P une matrice de $\mathcal{O}$, la matrice $PDP^{-1} = PD\,{}^tP$ est symétrique. Ceci prouve que tout endomorphisme d'un espace euclidien qui admet une base orthonormale de vecteurs propres est auto-adjoint.

■ Il est faux de dire qu'une matrice symétrique complexe soit diagonalisable. Essayer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$.

Application 3

Réduction d'une matrice symétrique réelle

Soit b un nombre réel. La matrice M est définie par $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) *Diagonaliser M en utilisant l'orthogonalité des sous-espaces propres.*

2) *Que dire de M lorsque b est complexe ?*

1) • La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable.

• La matrice $M - 2\mathrm{I}_3$ a deux lignes identiques, son déterminant est nul et 2 est valeur propre de M.

Le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M associé à la valeur propre 2.

• Puisque M est symétrique réelle, on cherche une base orthogonale de vecteurs propres de M.

Les vecteurs orthogonaux à V_1 sont de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0$, V n'est pas vecteur propre de M. Quitte à diviser par α, on se ramène à la recherche de vecteurs propres de la forme $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur V est vecteur propre de M si, et seulement si :

$$2 + b\beta = (4 + \beta)\beta.$$

Soit :

$$\beta^2 - (b-4)\beta - 2 = 0. \qquad (1)$$

Pour une telle valeur de β, la valeur propre associée est $\lambda = 4 + \beta$.

L'équation **(1)** admet deux racines distinctes :

$$\beta_1 = \frac{b - 4 + \sqrt{(b-4)^2 + 8}}{2}$$

et

$$\beta_2 = \frac{b - 4 - \sqrt{(b-4)^2 + 8}}{2}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres de M dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

La matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \\ 0 & \frac{\beta_1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{\beta_2}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2 + \beta_2^2}} \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale qui diagonalise M.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Lorsque b est complexe, deux cas sont possibles.

Cas 1 : $(b-4)^2+8 \neq 0$.

Les calculs précédents restent valables, l'équation **(1)** a deux racines complexes distinctes β_1 et β_2.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\beta_1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\beta_2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de M.

La matrice $Q = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&\beta_1&\beta_2\\-1&1&1\end{pmatrix}$ diagonalise M :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4+\beta_1&0\\0&0&4+\beta_2\end{pmatrix}.$$

Cas 2 : $(b-4)^2+8=0$.

Pour les deux valeurs de b obtenues, vérifier que le polynôme caractéristique de M n'a que deux racines et que le sous-espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1. Dans ce cas, la matrice M n'est pas diagonalisable.

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

2.3. Caractérisation des endomorphismes auto-adjoints positifs et définis positifs

Soit u un **endomorphisme auto-adjoint**.

Il est **positif** lorsque :

$$\forall x \in E \quad (u(x) \mid x) \geqslant 0.$$

Il est **défini positif** lorsque :

$$\forall x \in E\backslash\{0_E\} \quad (u(x) \mid x) > 0.$$

Soit A la matrice de u dans une base orthonormale.

$$u \text{ est positif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX\,AX \geqslant 0.$$

On retrouve la définition des matrices symétriques positives étudiées dans le *chapitre* précédent.

De même, u est défini positif $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\} \quad {}^tX\,AX > 0$.

Théorème 15

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, u un endomorphisme auto-adjoint et A sa matrice dans une base orthonormale.

- u est positif $\Leftrightarrow A$ est positive ;
- u est défini positif $\Leftrightarrow A$ est définie positive.

Théorème 16

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

Alors $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints positifs.

Si, de plus, u est un automorphisme, $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints définis positifs.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

$$(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u.$$

$$\forall x \in E \quad (u^* \circ u(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) = \|u(x)\|^2 \geqslant 0.$$

$$\forall x \in E \quad (u^* \circ u(x) \mid x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} u.$$

On procède de même avec $u \circ u^*$.

Corollaire 16.1

Pour tout A dans $\mathcal{M}_n$, les matrices ${}^tA\,A$ et $A\,{}^tA$ sont symétriques positives.
Pour tout A dans $\mathcal{GL}_n$, les matrices ${}^tA\,A$ et $A\,{}^tA$ sont symétriques définies positives.

Théorème 17

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors :

- u est positif si, et seulement si : $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$;
- u est défini positif si, et seulement si : $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Démonstration

Supposons u auto-adjoint positif. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre de u associé :

$$\lambda\|x\|^2 = (u(x) \mid x) \geqslant 0.$$

Or $\|x\| \neq 0$. Par conséquent, $\lambda \geqslant 0$.

De même, si on suppose u défini positif, on obtient $\lambda > 0$. Réciproquement, considérons u auto-adjoint tel que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

On en déduit : $\forall x \in E \quad (u(x) \mid x) \geqslant 0$.

L'endomorphisme u est positif. De même, si on suppose que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$, avec les mêmes notations, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$ si, seulement si, $x_i = 0$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'endomorphisme auto-adjoint u est défini positif.

Corollaire 17.1

Soit A une matrice symétrique réelle. Alors :

- A est positive si, et seulement si : $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$;
- A est définie positive si, et seulement si : $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

► *Pour s'entraîner : ex. 7.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.4. Application à la norme subordonnée, rayon spectral

Soit u un endomorphisme de E. On appelle **rayon spectral de l'endomorphisme u** le plus grand élément de $\{|\lambda| ; \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Nous le noterons $\rho(u)$.

Théorème 18

Soit u un **endomorphisme auto-adjoint** de l'espace euclidien $\big(E, (\ |\ )\big)$. Alors la norme de u subordonnée à la norme euclidienne est égale à son rayon spectral :

$$\|u\| = \rho(u).$$

Démonstration

L'endomorphisme u est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs quelconques de E. Alors :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad (u(x) \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

$$|(u(x) \mid y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i x_i y_i| \leqslant \rho(u) \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i|.$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* donne alors :

$$|(u(x) \mid y)| \leqslant \rho(u)\|x\|\,\|y\|$$

Si x et y ont une norme inférieure ou égale à 1 on obtient $|(u(x) \mid y)| \leqslant \rho(u)$.

Par conséquent, l'ensemble $\{|(u(x) \mid y)| ; (x, y) \in E^2, \ \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$ est majoré par $\rho(u)$.

Il admet une borne supérieure et :

$$\sup\{|(u(x) \mid y)| ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \ \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \rho(u).$$

Or on a montré au *chapitre* précédent que :

$$\|u\| = \sup\{(u(x)|y) ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \|y\| \leqslant 1\}.$$

La boule unité de E est invariante par $-\mathrm{I}_E$.

Les ensembles $\{(u(x) \mid y) ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \|y\| \leqslant 1\}$ et

$\{(u(x) \mid -y) ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 \ \|y\| \leqslant 1\}$ sont égaux.

Donc : $\sup\{(u(x) \mid y) ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1\}$

$$= \sup\{|(u(x) \mid y)|; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1\}$$

$\|u\| = \sup\{|(u(x) \mid y)| ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \rho(u)$.

Il existe k dans $[\![1, n]\!]$ tel que : $|\lambda_k| = \rho(u)$.

$$|(u(e_k) \mid e_k)| = |\lambda_k| = \rho(u).$$

Or $|(u(e_k) \mid e_k)| \in \{|(u(x) \mid y)| ; (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1 , \|y\| \leqslant 1\}$.

Par conséquent, $\rho(u) \leqslant \|u\|$. D'où l'égalité.

Rapport ENS, 2003

« Le manque d'esprit critique, présent même chez certains candidats de bon niveau, amène souvent des conséquences affligeantes. Par exemple, cette année : le rayon spectral est une norme sur les matrices carrées. »

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 18.1

Si u est un endomorphisme auto-adjoint positif alors :

- $\rho(u) = \max(\mathrm{Sp}(u))$;
- $\|u\| = \rho(u) = \sup\{(u(x) \mid x)\,;x \in E \quad \|x\| \leqslant 1\}$.

Démonstration

Lorsque l'endomorphisme auto-adjoint u est positif, son spectre est dans $\mathbb{R}^+$. On en déduit le premier point.

De plus avec les mêmes notations que celles de la démonstration du *théorème* 18, on peut écrire :

$$(u(e_k) \mid e_k) = \lambda_k = |\lambda_k| = \rho(u).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\rho(u) &\leqslant \sup\{(u(x) \mid x)\,;x \in E \quad \|x\| \leqslant 1\}\\ &\leqslant \sup\{(u(x) \mid y)\,;(x,y) \in E^2 \quad \|x\| \leqslant 1\ \|y\| \leqslant 1\} = \rho(u).\end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$\sup\{(u(x) \mid x)\,;x \in E \quad \|x\| \leqslant 1\} = \rho(u).$$

Corollaire 18.2

Soit u un endomorphisme de l'espace euclidien $\big(E,(\ \mid\ )\big)$.

Alors $\|u\| = \sqrt{\rho(u^*u)}$.

Mensa ACADEMY

Démonstration

$\|u\|^2 = \|u^*u\|$. Or u^*u est un endomorphisme auto-adjoint positif.

Donc $\|u^*u\| = \rho(u^*u)$. D'où $\|u\| = \sqrt{\rho(u^*u)}$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$$^tAA = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de ^tAA est $\big(1-X\big)\big(X^2-4X+1\big)$.

Le spectre de u^*u est $\{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$.

Le rayon spectral de u^*u est $2+\sqrt{3}$.

Par conséquent :

$$\|u\| = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 8.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3 Automorphismes auto-adjoints et formes quadratiques

3.1. Endomorphisme auto-adjoint associé à une forme bilinéaire symétrique

Théorème 19

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et φ une forme bilinéaire symétrique. Il existe un unique endomorphisme auto-adjoint u tel que :

$$\forall\, y \in E \quad \varphi(x, y) = (u(x) \mid y).$$

L'endomorphisme u est appelé **endomorphisme auto-adjoint associé** à φ .

Démonstration

Soit x fixé dans E. L'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.

Or E et E^* sont isomorphes. Il existe un unique vecteur $u(x)$ dans E tel que :

$$\forall\, y \in E \quad \varphi(x, y) = (u(x) \mid y).$$

L'application u de E dans E est ainsi bien déterminée.

• Montrons que u est linéaire. Soit x et x' quelconques dans E, α et β quelconques dans $\mathbb{R}$.

Pour tout y de E, on a :

$$\varphi(x, y) = (u(x) \mid y) \quad \text{et} \quad \varphi(x', y) = (u(x') \mid y).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta x', y) &= \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)\\ &= \alpha(u(x) \mid y) + \beta(u(x') \mid y)\\ &= (\alpha u(x) + \beta u(x') \mid y).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\alpha u(x) + \beta u(x')$ est l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall\, y \in E \quad \varphi(\alpha x + \beta x', y) = (\alpha u(x) + \beta u(x') \mid y).$$

Donc $\alpha u(x) + \beta u(x') = u(\alpha x + \beta x')$. L'application u est linéaire.

• Montrons que u est auto-adjoint.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = (u(y) \mid x) = (x \mid u(y)).$$

• Montrons que u est unique.

Supposons que u et v soient deux endomorphismes de E tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = (u(x) \mid y) = (v(x) \mid y).$$

Alors : $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) - v(x) \mid y) = 0.$

On en déduit : $\forall\, x \in E \quad u(x) - v(x) = 0_E,$ puis $u = v.$

Théorème 20

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien, φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

La matrice de l'endomorphisme u auto-adjoint associé à φ dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est la matrice de φ dans cette même base.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (u(e_j) \mid e_i) = \varphi(e_i, e_j).$$

Le terme d'ordre (i,j) de la matrice de u dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est $(u(e_j) \mid e_i)$, celui de la matrice de φ est $\varphi(e_i,e_j)$.

3.2. Réduction simultanée

Théorème 21

Soit $\big(E,(\ |\ )\big)$ un espace euclidien de dimension n et φ une forme bilinéaire symétrique.

Il existe une base de E orthonormale pour $(\ |\ )$ et orthogonale pour φ.

Démonstration

Notons u l'endomorphisme auto-adjoint associé à φ.

Il existe une base orthonormale B dans laquelle u a pour matrice une matrice diagonale réelle D.

Par conséquent, D est également la matrice de φ dans la base B.

On en déduit que la base B est orthogonale pour φ.

Corollaire 21.1

Soit $\big(E,(\ |\ )\big)$ un espace euclidien de dimension n et Q une forme quadratique.

Il existe une base de E orthonormale pour $(\ |\ )$ et orthogonale pour Q.

Mensa ACADEMY

Corollaire 21.2

Soit $\big(E,(\ |\ )\big)$ un espace euclidien, Q une forme quadratique sur E de forme polaire φ et u l'endomorphisme auto-adjoint associé. On note :

$$p = \operatorname{card}\big(\operatorname{Sp}(u) \cap \mathbb{R}^{*+}\big) \quad \text{et} \quad q = \operatorname{card}\big(\operatorname{Sp}(u) \cap \mathbb{R}^{*-}\big).$$

Le couple $s = (p,q)$ est appelé **signature** de Q.

Alors le rang de Q est $p+q$ et :

$$\begin{aligned}
&Q \text{ est non dégénérée} &&\Leftrightarrow p+q = \dim E\\
&Q \text{ est positive} &&\Leftrightarrow q = 0\\
&Q \text{ est définie positive} &&\Leftrightarrow p = \dim E\\
&Q \text{ est négative} &&\Leftrightarrow p = 0\\
&Q \text{ est définie négative} &&\Leftrightarrow q = \dim E.
\end{aligned}$$

Démonstration

Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base B introduite au cours de la démonstration précédente et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la diagonale de la matrice D. Dans cette base, orthogonale pour Q, l'expression de Q est :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notons $p = \text{card}\big(\text{Sp}(D) \cap \mathbb{R}^{*+}\big)$ et $q = \text{card}\big(\text{Sp}(D) \cap \mathbb{R}^{*-}\big)$.
Alors le rang de Q qui est également celui de la matrice D est $p+q$.
Quitte à réordonner la base B, on peut supposer que :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \mu_i x_i^2,$$

où les μ_i sont strictement positifs. On en déduit les équivalences du *corollaire.*

Corollaire 21.3
Le discriminant d'une forme quadratique positive est positif.
Le discriminant d'une forme quadratique définie positive est strictement positif.

Corollaire 21.4
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, Q_1 une forme quadratique sur E définie positive et Q_2 une forme quadratique sur E.
Il existe une base de E orthonormale pour Q_1 et orthogonale pour Q_2.

Démonstration
Il suffit de prendre sur E la structure euclidienne associée à Q_1 et d'appliquer le *corollaire* 21.1.

On en déduit l'expression matricielle de cette réduction simultanée :

Corollaire 21.5
Soit A et B deux matrices symétriques dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose A définie positive. Alors il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = {}^tP\,P \quad \text{et} \quad B = {}^tP\,DP.$$

Application 4

Relation d'ordre sur les formes quadratiques et discriminant

Soit Q et R deux formes quadratiques sur E.

On dit que $Q \geqslant R$ lorsque :

$$\forall\, x \in E \quad Q(x) \geqslant R(x).$$

Pour toute forme quadratique Q sur E on note $\Delta(Q)$ le disciminant de Q dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E fixée.
Montrer que :

$$Q \geqslant R \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(Q) \geqslant \Delta(R).$$

Étudier le cas d'égalité.

Soit Q et R deux formes quadratiques sur E telles que $Q \geqslant R \geqslant 0$. Elles sont donc positives.

Notons M et N les matrices respectives de Q et R dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

• Supposons Q définie positive. Il existe une base $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ orthogonale pour R et orthonormale pour Q. Soit P la matrice de passage de B à B'.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il existe n réels positifs $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que ${}^tP\,N\,P$ soit la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

${}^tP\,M\,P = \mathrm{I}_n$.

$\Delta(Q) = \mathrm{Det}M = (\mathrm{Det}P)^{-2}$.

$\Delta(R) = \mathrm{Det}N = (\mathrm{Det}P)^{-2} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Or $Q \geqslant R$. Donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad Q(e_i') \geqslant R(e_i') \geqslant 0.$$

On en déduit $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$.

Par conséquent :

$$0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant 1.$$

D'où : $\Delta(R) \leqslant \Delta(Q)$.

Il n'y a égalité que si tous les λ_i sont égaux à 1. C'est-à-dire si $N = M$.

• Supposons la forme quadratique Q non définie positive. Elle est positive. Donc Q est dégénérée et $\Delta(Q) = 0$. Or $Q \geqslant R \geqslant 0$.

Par conséquent R n'est pas définie positive et :

$$\Delta(R) = 0.$$

• Dans les deux cas, on a bien : $\Delta(R) \leqslant \Delta(Q)$.

Il y a égalité, si et seulement si, $Q = R$ ou si les deux formes Q et R sont dégénérées.

► ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

Mensa ACADEMY

4 Les coniques

La première étude des coniques est sans doute due à Ménechme (IVe siècle av. J.-C.). Il les obtient en coupant un cône de révolution par un plan perpendiculaire à une génératrice, droite contenue dans le cône et passant par son sommet. Avec un angle au sommet du cône aigu, droit, obtus, la courbe est respectivement une ellipse, une parabole ou une hyperbole (*doc*. 1 et 2).

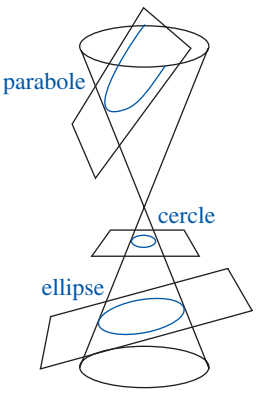
Un siècle plus tard, avec un cône quelconque, en modifiant l'angle d'inclinaison du plan de la section, Apollonius retrouve ces trois types de coniques.

Vers 320 ap. J.-C., Pappus, dans le livre, *La Collection*, les définit comme « ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant ».

La définition bifocale de l'ellipse est due à Guiodobaldo del Monte, en 1579.

Fermat (1601-1665) définit les coniques par des équations que nous écririons :

$$x^2 = ay, \quad k^2 - x^2 = ay^2 \quad \text{et} \quad k^2 + x^2 = ay^2.$$



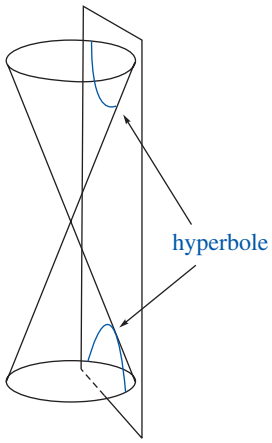
Doc. 1.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Philippe de La Hire (1640-1718) présente l'ellipse et l'hyperbole par leur définition bifocale et la parabole par sa définition foyer-directrice.

Euler (1707-1783) définit les coniques comme courbes d'équation cartésienne :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$



Doc. 2.

4.1. Réduction de l'équation d'une conique

Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit six réels a, b, c, d, e et f tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et (C) la courbe d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

dans ce repère.

La courbe (C) est appelée une **conique**.

Théorème 22

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et (C) la conique dont l'équation dans ce repère est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont notées λ et μ.

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de vecteurs propres telle que : $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ et $A\vec{v} = \mu\vec{v}$, alors l'équation de (C) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0.$$

Démonstration

Notons A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$. Alors :

$$M \in (C) \Leftrightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tXAX + (d, e)X + f = 0.$$

Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, $A = PD\,{}^tP$.

Alors :

$$M \in (C) \Leftrightarrow {}^t({}^tPX)D({}^tPX) + (d, e)X + f = 0.$$

${}^tPX$ est le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

On a $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Notons $(g, h) = (d, e)P$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tPX$.

L'équation de (C) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0.$$

Quitte à permuter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou à changer un des vecteurs en son opposé, on peut imposer aux bases $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ d'avoir même orientation.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4.2. Nature de la conique

Considérons une conique dont une équation dans un repère orthonormé est :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + gx + hy + f = 0 \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

• Lorsque $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, la courbe est une **parabole**, ou deux droites parallèles, ou une droite, ou $\varnothing$.

• Lorsque $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, la mise sous forme canonique d'une équation du second degré, permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$\lambda\left(x + \frac{g}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 + \beta = 0.$$

Il s'agit alors d'une **conique à centre**.

• Lorsque $\lambda\mu > 0$, la courbe est une **ellipse** de centre $\left(-\frac{g}{2\lambda}, -\frac{h}{2\mu}\right)$, ou un singleton (lorsque $\beta = 0$), ou $\varnothing$ (lorsque $\mu\beta < 0$).
Le cercle est un cas particulier de l'ellipse. Il correspond à $\lambda = \mu$.

• Lorsque $\lambda\mu < 0$, la courbe est une **hyperbole** de centre $\left(-\frac{g}{2\lambda}, -\frac{h}{2\mu}\right)$, ou deux droites sécantes (lorsque $\beta = 0$).
Les **asymptotes** de l'hyperbole d'équation :

$$\lambda\left(x + \frac{g}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 + \beta = 0.$$

sont les droites sécantes d'équation :

$$\lambda\left(x + \frac{g}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 = 0.$$

On déduit de ceci le *théorème* suivant.

Théorème 23
Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (a,b,c) dans $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ et (C) la conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans ce repère.

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont notées λ et μ.

• Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu > 0$, la conique (C) est une ellipse, ou un singleton ou l'ensemble vide.

• Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu < 0$, la conique (C) est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

• Si $\text{Det}(A) = \lambda\mu = 0$, la conique (C) est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

► *Pour s'entraîner : ex. 10 et 11.*

Deux lueurs d'espoir sous un déluge de critiques !

Rapport E3A, 2002
« Cet exercice consiste en la représentation d'une ellipse. Il s'est avéré le plus accessible et le plus réussi. »

Rapport Centrale, 2001
« Il semblerait que les rapports des années antérieures aient incité à ne plus considérer la géométrie comme partie négligeable et méprisable. Le mot "conique" ne fait plus peur. »

Mais tout n'est pas si facile.

Rapport CCP, 2000
« Les candidats ont aussi beaucoup de mal à reconnaître l'équation d'un cercle, par exemple, pour $x^2 + y^2 - x = 0$, ils y arrivent par approximations successives, ils proposent d'abord une conique, puis une parabole (!), puis une ellipse et enfin un cercle. »

La conique (C) est un cercle lorsque $a = c$ et $b = 0$. Dans ce cas, il est inutile de changer de repère pour le voir. L'équation est déjà sous la forme :

$$ax^2 + ay^2 + dx + ey + f = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 5

Une équation bien compliquée

(D'après TPE, 1993.)

Déterminer la nature de la conique et les coordonnées des foyers de la conique (C) définie dans un repère orthonormé d'un plan euclidien par l'équation :

$$481x^2+384xy+369y^2+2118x-324y-2124=0.$$

Avec les notations du *théorème* 23, les valeurs propres de la matrice associée, A, sont 225 et 625.

Les sous-espaces propres associés sont engendrés respectivement par $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ et $\left(\frac{4}{3},1\right)$.

Avec Maple :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[481,192,192,369]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 481 & 192 \\ 192 & 369 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(A);
```

$$[225,\ 1,\ \{\left[1,\ \frac{-4}{3}\right]\}],\ [625,\ 1,\ \{\left[\frac{4}{3},\ 1\right]\}]$$

Doc. 3.

Posons $\vec{u}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ et $\vec{v}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est orthonormé. Appelons $(x,y),(x',y')$ les coordonnées d'un point M dans les bases $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $(O,\vec{u},\vec{v})$ respectivement.

Nous savons que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$M\in(C) \Leftrightarrow 481x^2+384xy+369y^2+2118x -324y-2124=0.$$

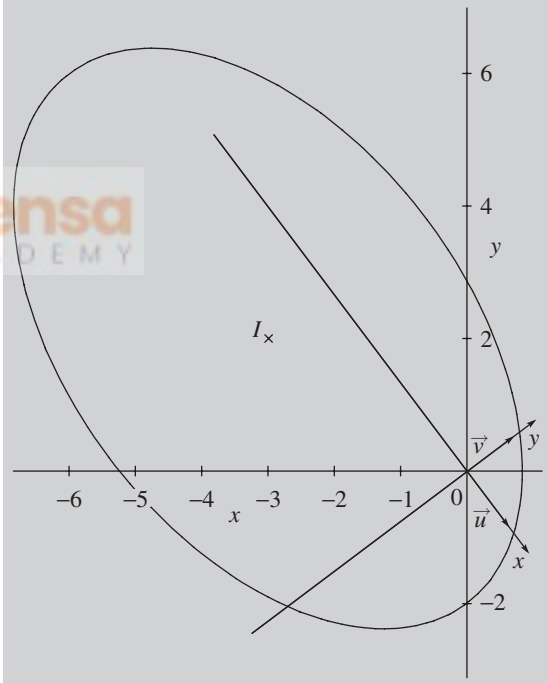
$$\Leftrightarrow 225x'^2+625y'^2+1530x' +1500y'-2124=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x'+\frac{17}{5}\right)^2}{25}+\frac{\left(y'+\frac{6}{5}\right)^2}{9}-1=0.$$

(C) est une ellipse de centre $I\left(-\frac{17}{5},-\frac{6}{5}\right)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$. Son axe principal est la droite passant par I et dirigée par $\vec{u}$, son axe secondaire est la droite passant par I et dirigée par $\vec{v}$. Son demi-grand-axe vaut $a=5$, son demi-petit-axe $b=3$ et la distance de I aux foyers $c=4$.

Avec Maple :

```
> with(plots):
> implicitplot(481*x^2+384*x*y
+369*y^2+2118*x-324*y-2124,
x=-7..1,y=-3..8,
scaling=constrained);
```



Doc. 4.

Les foyers sont les points définis par :

$$\overrightarrow{IF}=4\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IF'}=-4\vec{u}.$$

Ils ont respectivement pour coordonnées, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$:

$$\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{37}{5},-\frac{6}{5}\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 Les quadriques

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 3.

5.1. Présentation des quadriques et principe de la réduction

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E et $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ et j des réels tels que $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, \ldots, 0)$.

On désigne par Q l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ satisfont à l'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

L'ensemble Q est appelé une **quadrique**.

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de M.

Un calcul similaire à celui de la démonstration du *théorème* 22 prouve que :

$$M \in Q \Leftrightarrow {}^tXAX + (g, h, i)X + j = 0.$$

Ce point de départ permet de prouver, en diagonalisant A, le *théorème* suivant.

Théorème 24

Soit la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0$$

dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique réelle A, α, β, γ les valeurs propres associées respectivement à $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et (x', y', z') les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Alors l'équation de $\mathcal{Q}$ dans ce repère est de la forme :

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + kx' + ly' + mz' + j = 0.$$

Les coefficients devant les termes de degré 2 sont les valeurs propres de A.
Le terme constant j ne change pas d'une équation à l'autre lorsqu'on ne change pas d'origine.

La factorisation canonique permet ensuite de simplifier encore plus cette équation. De même que pour les coniques, cette opération correspond à un changement d'origine.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2. Les principales quadriques

Vous trouverez, dans ce paragraphe, les quadriques usuelles présentées par leurs équations réduites ainsi qu'un exemple de représentation graphique de chacune d'elle obtenu grâce à *Maple*.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.2.1 Les ellipsoïdes

Un **ellipsoïde** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

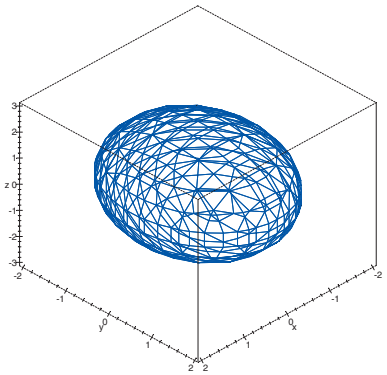
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les trois plans $(xOy), (yOz)$ et (xOz) sont des plans de symétrie.

Les trois axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz) sont des axes de symétrie.

Le point O est un centre de symétrie.

Sa section par un plan parallèle à un des plans de coordonnées est une ellipse, un point ou $\varnothing$.



Doc. 5. *Un ellipsoïde.*

5.2.2 Les hyperboloïdes

Mensa ACADEMY

Un **hyperboloïde** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon,$$

ε valant $+1$ ou -1.

Les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

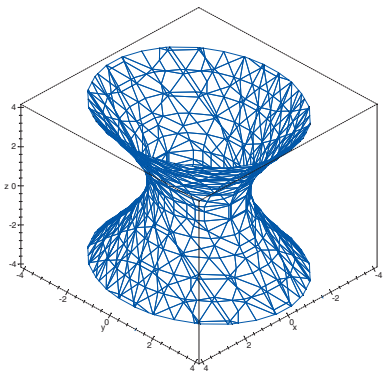
Les trois axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz) sont des axes de symétrie.

Le point O est un centre de symétrie.

Lorsque $\varepsilon = +1$, la section de l'hyperboloïde par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.

Pour un point $M(x, y, z)$ de l'hyperboloïde, il n'y a pas de restriction sur z.

C'est un **hyperboloïde à une nappe**.

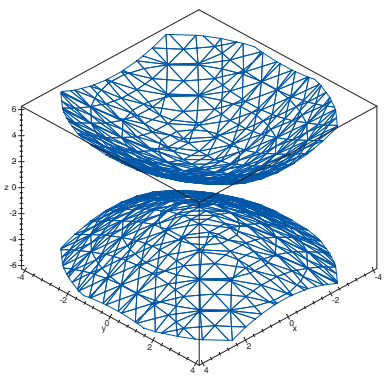


Doc. 6. *Un hyperboloïde à une nappe.*

Lorsque $\varepsilon = -1$, la section de l'hyperboloïde par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse, un point ou $\varnothing$; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.

Pour un point $M(x, y, z)$ de l'hyperboloïde, on a : $|z| \geqslant |c|$.

C'est un **hyperboloïde à deux nappes**.



Doc. 7. *Un hyperboloïde à deux nappes.*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.2.3 Les cônes elliptiques

Un **cône elliptique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

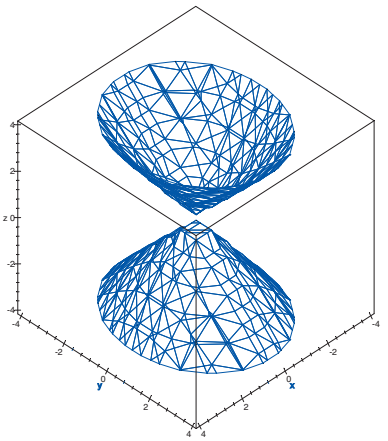
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les trois plans (xOy), (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

Les trois axes (Ox), (Oy) et (Oz) sont des axes de symétrie.

Le point O est un centre de symétrie.

La section du cône elliptique par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse ou un point ; sa section par un plan contenant l'axe (Oz) est la réunion de deux droites sécantes en O ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.



Doc. 8. *Un cône elliptique.*

5.2.4 Les paraboloïdes elliptiques

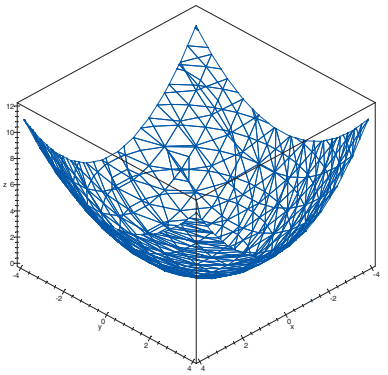
Un **paraboloïde elliptique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Les plans (yOz) et (xOz) sont des plans de symétrie.

L'axe Oz est un axe de symétrie.

La section du paraboloïde elliptique par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse, un point ou $\varnothing$; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une parabole.



Doc. 9. *Un paraboloïde elliptique.*

5.2.5 Les paraboloïdes hyperboliques

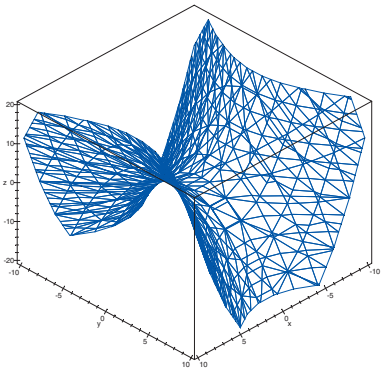
Un **paraboloïde hyperbolique** est une quadrique dont l'équation réduite est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Les plans (yOz), (xOz) sont des plans de symétrie.

L'axe (Oz) est un axe de symétrie.

La section du paraboloïde hyperbolique par un plan parallèle à (xOy) est une hyperbole ou deux droites sécantes (dans le cas $z=0$) ; sa section par un plan parallèle à (yOz) ou (xOz) est une parabole.



Doc. 10. *Un paraboloïde hyperbolique.*

5.2.6 Les cylindres

Lorsque, dans l'équation réduite, une des trois variables a disparu, on a affaire à un cylindre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans le cadre de notre étude, on trouve :

– le **cylindre elliptique**, d'équation réduite :

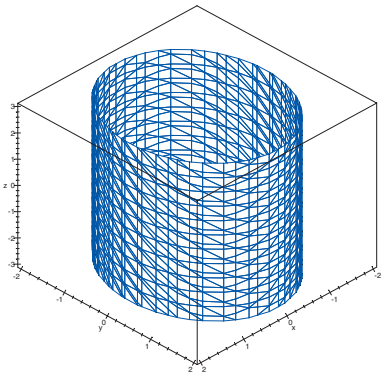
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ;$$

– le **cylindre hyperbolique**, d'équation réduite :

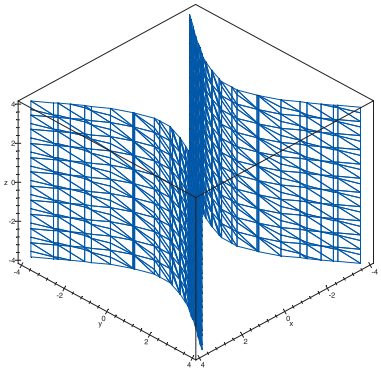
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ;$$

– le **cylindre parabolique**, d'équation réduite :

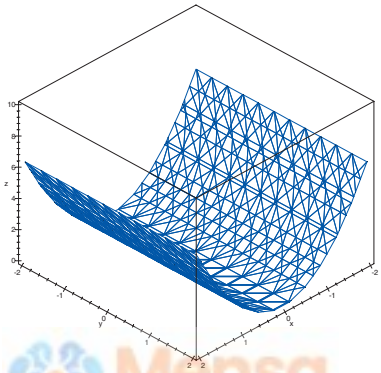
$$z = ax^2.$$



Doc. 11. *Un cylindre elliptique.*



Doc. 12. *Un cylindre hyperbolique.*



Doc. 13. *Un cylindre parabolique.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 15 et 16.***

Application 6

Quadriques de révolution

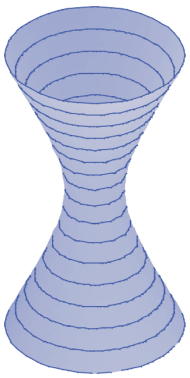
1) *Déterminer, parmi les quadriques présentées précédemment sous leur forme réduite, celles qui sont invariantes par rotation d'axe* (Oz).

2) *Montrer que l'hyperboloïde de révolution à une nappe,* $\mathcal{H}$, *d'équation :*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

3)a) *Prouver que le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x = 1$ *coupe* $\mathcal{H}$ *selon deux droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$.

b) *On note* $\mathcal{D}_\theta$ *la droite image de* $\mathcal{D}$ *par la rotation d'axe (Oz) est d'angle* θ. *Prouver que* $\mathcal{H}$ *est la réunion des droites* $\mathcal{D}_\theta$, *avec* $\theta \in [0, 2\pi]$ *(doc. 14).*



Doc. 14. *« Mais où sont les droites dans cet hyperboloïde de révolution ? »*

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1) Une telle quadrique est de révolution d'axe (Oz) lorsque sa section par un plan parallèle à (xOy) (d'équation $z = k$) est un cercle de ce plan (ou un point ou $\varnothing$), dont le centre est sur l'axe (Oz).

On doit donc pouvoir se ramener, lorsque $z = k$, à une équation du type $x^2 + y^2 = R^2$.

Avec les notations précédentes, on obtient $|a| = |b|$ et la liste suivante :

• Ellipsoïde de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

• Hyperboloïde de révolution à une nappe :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

• Hyperboloïde de révolution à deux nappes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

• Cône de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

• Paraboloïde de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z.$$

• Cylindre de révolution :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

2) Soit $\mathcal{M}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{H}$. D'après l'équation, on a :

$$\begin{vmatrix} x-1 & z-y \\ z+y & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux colonnes de ce déterminant sont liées.

Il existe un couple (α, β) de réels distincts de (0, 0), tel que :

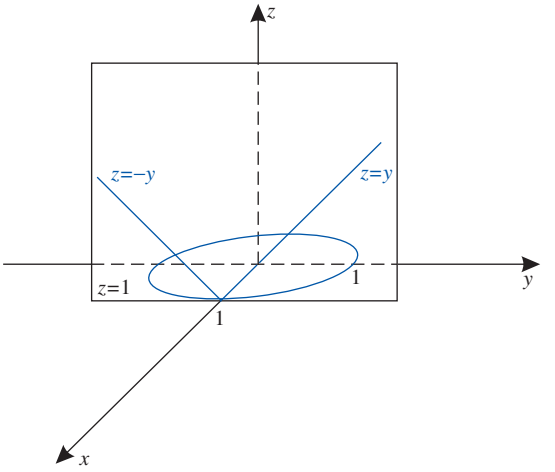
$$\begin{cases} \alpha(x-1) + \beta(z-y) = 0 \\ \alpha(z+y) + \beta(x+1) = 0 \end{cases}.$$

Le point $\mathcal{M}$ est sur la droite $D_{(\alpha,\beta)}$, intersection des deux plans d'équations ci-dessus.

Réciproquement, pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tout point $\mathcal{M}$ de la droite $D_{(\alpha,\beta)}$ vérifie la formule **(1)**.

Ceci permet de conclure que $\mathcal{H}$ est la réunion des droites $D_{(\alpha,\beta)}$.

3)a) L'interxection est la réunion des droites $\mathcal{D}$, d'équation ($x = 1$ et $y = z$) et $\mathcal{D}'$, d'équation ($x = 1$ et $y = -z$) (*doc.* 15).

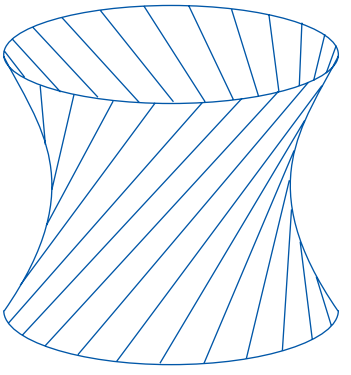


Doc. 15.

b) Fixons un réel z. Le plan parallèle à xOy, de cote z, coupe la droite $\mathcal{D}$ au point M de coordonnées $(1, z, z)$.

Le carré de la distance de M à l'axe Oz est $R^2 = 1 + z^2$. Par une rotation d'axe Oz, le point M est transformé en M', de coordonnées (x, y, z), tel que $x^2 + y^2 = R^2 = 1 + z^2$.

Ceci prouve que la réunion des droites $\mathcal{D}_\theta$ est incluse dans $\mathcal{H}$. L'inclusion réciproque reste à prouver.



Doc. 16. *Génération rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe.*

► ***Pour s'entraîner : ex.15. et 16.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5.3. Quadriques et droites

L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique peuvent être décrits comme des réunions de droites de l'espace. Prouvons-le.

5.3.1 L'hyperboloïde à une nappe

Son équation dans un repère orthonormé bien choisi est :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)-\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)=\begin{vmatrix}\frac{x}{a}-1 & \frac{z}{c}-\frac{y}{b}\\ \frac{z}{c}+\frac{y}{b} & \frac{x}{a}+1\end{vmatrix}=0.$$

On en déduit que le point $M(x,y,z)$ de l'espace est sur l'hyperboloïde si, et seulement s'il existe un couple (α,β) de réels distincts de $(0,0)$, tel que :

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}-1\right)+\beta\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)=0\\ \alpha\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)+\beta\left(\frac{x}{a}+1\right)=0\end{cases}$$

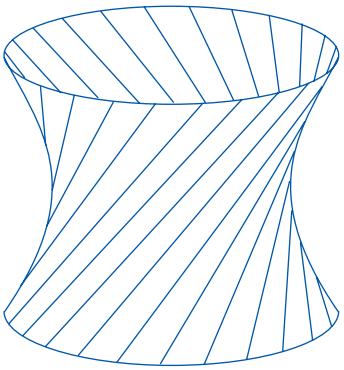
Pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ donné, ceci est l'équation d'une droite de l'espace, $D_{(\alpha,\beta)}$, et l'hyperboloïde est la réunion de ces droites. On dit aussi qu'il est engendré par ces droites.

On peut aussi factoriser l'équation de l'hyperboloïde en :

$$\left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{y}{b}+1\right)-\left(\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right)=0.$$

Ceci permet de trouver une deuxième famille de droites qui engendre l'hyperboloïde à une nappe.

Réciproquement, on montre que ce sont les seules droites contenues dans l'hyperboloïde.



Doc. 17. *Génération rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe.*

Dans la forme réduite usuelle :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z,$$

on a mis $\alpha=1/a$ et $\beta=1/b$. Cette forme est plus pratique pour effectuer les calculs algébriques de ce paragraphe.

5.3.2 Le paraboloïde hyperbolique

Son équation dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ bien choisi est :

$$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=z \qquad \textbf{(1)}$$

On désigne par $\mathcal{P}$ ce paraboloïde. Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathcal{P}$.

Chercher les droites de l'espace passant par M et incluses dans $\mathcal{P}$, c'est chercher un vecteur non nul, $\vec{V}$, tel que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad M+\lambda\vec{V}\in\mathcal{P}.$$

Le problème équivaut à trouver les triplets de réels $(u,v,w)\neq(0,0,0)$ tels que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \alpha^2(x+\lambda u)^2-\beta^2(y+\lambda v)^2=z+\lambda w.$$

Sachant que (x,y,z) est solution de **(1)**, ceci est réalisé si, et seulement si :

$$\alpha^2u^2-\beta^2v^2=0\quad\text{et}\quad w=2(\alpha^2xu-\beta^2yv).$$

On peut remarquer également que :

$$\begin{vmatrix}\frac{x}{a}-\frac{y}{b} & z\\ 1 & \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\end{vmatrix}=0$$

équivaut à l'existence d'un réel α tel que :

$$\begin{cases}z=\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\alpha\end{cases}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

C'est-à-dire : $(u, v, w) = c(\beta, \alpha, 2\alpha\beta(\alpha x - \beta y))$,

ou bien : $(u, v, w) = c(\beta, -\alpha, 2\alpha\beta(\alpha x + \beta y))$,

où c est un réel non nul.

Notons :

$$\overrightarrow{V_M} = \beta\,\overrightarrow{i} + \alpha\,\overrightarrow{j} + 2\alpha\beta(\alpha x - \beta y)\,\overrightarrow{k}$$

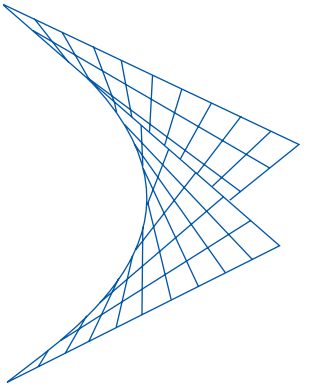
et

$$\overrightarrow{W_M} = \beta\,\overrightarrow{i} - \alpha\,\overrightarrow{j} + 2\alpha\beta(\alpha x + \beta y)\,\overrightarrow{k}.$$

Le paraboloïde $\mathcal{P}$ est la réunion des droites $M+\mathbb{R}\overrightarrow{V_M}$ lorsque M parcourt $\mathcal{P}$.

C'est aussi la réunion des droites $M + \mathbb{R}\overrightarrow{W_M}$.

Réciproquement, on montre que ce sont les seules droites contenues dans le paraboloïde.



Doc. 18. *Double génération rectiligne d'un paraboloïde hyperbolique.*

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien est orthogonal**, on peut montrer que :

- $u^*u = I_E$;
- $uu^* = I_E$;
- l'endomorphisme u est inversible et $u^{-1} = u^*$.

● Pour montrer qu'une **matrice** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est orthogonale,** on peut montrer l'une des caractérisations suivantes :

- la matrice A admet ${}^tA$ pour matrice inverse ;
- les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale ;
- les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale ;
- la matrice ${}^tA$ est orthogonale.

● Pour montrer qu'une **matrice est diagonalisable**, on peut regarder si elle est symétrique réelle et conclure directement.

● Pour montrer qu'un **endomorphisme auto-adjoint** u d'un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$ **est positif**, on peut montrer l'une des caractérisations suivantes :

- $\forall x \in E \quad (u(x) \mid x) \geqslant 0$;
- $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$;
- sa matrice dans une base orthonormale est positive.

● Pour montrer qu'un **endomorphisme auto-adjoint** u d'un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$ **est défini positif**, on peut montrer l'une des caractérisations suivantes :

- $\forall x \in E\backslash\{0_E\} \quad (u(x) \mid x) > 0$;
- $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$;
- sa matrice dans une base orthonormale est définie positive.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

● Pour calculer la norme d'un **endomorphisme *auto-adjoint* u subordonnée** à la norme euclidienne, on cherche le rayon spectral $\rho(u) = \{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Puis on écrit : $\|u\| = \rho(u)$.

Si de plus u est positif alors :

- $\rho(u) = \max(\mathrm{Sp}(u))$;
- $\|u\| = \rho(u) = \mathrm{Sup}\{(u(x) \mid x) \,;\, x \in E \|x\| \leqslant 1\}$

● Pour calculer la **norme d'un endomorphisme** u subordonnée à la norme euclidienne :

- on cherche le spectre de u^*u ;
- on écrit : $\|u\| = \sqrt{\rho(u^*u)}$ où ρ désigne le rayon spectral.

● Pour pouvoir **réduire simultanément deux formes quadratiques** Q_1 et Q_2 sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, on montre que l'une, par exemple Q_1, est une forme quadratique définie positive. Il existe alors une base de E orthonormale pour Q_1 et orthogonale pour Q_2.

● Pour montrer qu'**une forme quadratique** sur un espace vectoriel réel E **est positive** :

- on cherche sa matrice A dans une base fixée quelconque de E ;
- on vérifie que le spectre de A est dans $\mathbb{R}^{*+}$.

● Pour montrer qu'**une forme quadratique** sur un espace vectoriel réel E est définie positive :

- on cherche sa matrice A dans une base fixée quelconque de E ;
- on vérifie que le spectre de A est dans $\mathbb{R}^{*+}$.

● Soit une conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad \text{avec } b \neq 0,$$

pour **réduire l'équation de la conique :**

- on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;
- on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de $A, (\vec{u}, \vec{v})$ et on écrit l'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$;
- on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la conique.

● Pour **déterminer la nature d'une conique** sans en réduire l'équation, on calcule $\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$:

- si $\mathrm{Det}(A) > 0$, la conique (C) est une ellipse, ou un singleton ou l'ensemble vide ;
- si $\mathrm{Det}(A) < 0$, la conique (C) est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes ;
- si $\mathrm{Det}(A) = 0$, la conique (C) est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

FICHE MÉTHODE

Soit une quadrique d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Pour **réduire l'équation de la quadrique** :

- on écrit $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;
- on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de $A, (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et on écrit l'équation de la quadrique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; celle-ci est de la forme :

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + kx' + ly' + mz' + j = 0$$

où α, β et γ sont les valeurs propres de A associées à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement ;

- on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la quadrique.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Endomorphismes antisymétriques

A. Dans cette partie, $(E, (\ |\ ))$ est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

1) Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E \quad (x \mid u(x)) = 0$;

(ii) $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$;

(iii) La matrice de u, relativement à une base orthonormée de E, est antisymétrique ;

(iv) $u^* = -u$.

Un endomorphisme de E vérifiant une de ces quatre propriétés est dit antisymétrique. L'ensemble de ces endomorphismes est noté $\mathcal{A}(E)$.

2) Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. En donner la dimension.

3) Montrer que le spectre d'un endomorphisme antisymétrique est soit $\varnothing$, soit $\{0\}$.

En déduire qu'un endomorphisme antisymétrique non nul de E n'est jamais diagonalisable.

4) Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que :

a) $\mathrm{Im}u = (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp}$,

b) le rang de u est pair (étudier la restriction de u à $\mathrm{Im}u$),

c) u^2 est diagonalisable.

Que dire des valeurs propres de u^2 ?

B. 1) Soit λ une valeur propre non nulle de u^2 et α le réel strictement positif tel que $\lambda = -\alpha^2$. Nous noterons u_λ la restriction de u au sous-espace propre $E_\lambda(u^2)$.

Montrer qu'il existe une base B_λ de $E_\lambda(u^2)$ orthonormale dans laquelle la matrice de u_λ est diagonale par blocs de la forme :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} J(\alpha) & O & \cdots\cdots & O \\ O & J(\alpha) & & O \\ & & & \\ O & \cdots\cdots & O & J(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\ u^2 = \mathrm{Ker}\ u$.

3) En déduire qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & A(\lambda_2) & & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 \quad A(\lambda_r) & 0 \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & O' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \{\lambda_i\ ; i \in [\![1, r]\!]\} = \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et où } O' \text{ est une matrice nulle.}$$

C. Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^3$. Le produit scalaire usuel est noté $(\ |\ )$, le produit vectoriel $\wedge$ et la norme euclidienne $\|\ \|$.

1) Montrer que, pour tout endomorphisme antisymétrique f de E, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{b}$ tel que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E \quad f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x}.$$

2) En déduire une interprétation géométrique d'un tel endomorphisme.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Montrer que toute matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Quel lien y a-t-il entre le réel δ et le vecteur $\overrightarrow{b}$ de la question **B. 1).**

4) Soit x, y, z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$M = \begin{pmatrix} x^2 & yx - z & zx + y \\ xy + z & y^2 & zy - x \\ xz - y & yz + x & z^2 \end{pmatrix}.$$

En déduire que cette matrice est une matrice orthogonale.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Algorithmique TD 5

Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi pour le calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle est étudiée dans les problèmes suivants : *Centrale-Supelec MP 2000, Maths II* et *CCP PSI 1997, 2e épreuve*. Elle figure au programme d'algorithmique des concours.

La démarche mathématique

■ *L'idée de départ*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $B = {}^tPAP$ et A sont semblables.

■ *L'itération*

On part d'une matrice symétrique réelle A et on construit une suite (A_k) de matrices en posant :

$$A_0 = A \quad \text{et} \quad A_{k+1} = {}^tP_kA_kP_k$$

où la matrice P_k est une matrice orthogonale particulière, telle que la suite (A_k) converge vers une matrice diagonale D, (c'est la grande idée de Jacobi, la technique employée est exposée plus loin, vous la programmerez).

■ *Le test d'arrêt*

La suite de matrices (A_k) converge vers une matrice diagonale D semblable à A. La liste des valeurs propres de A est la liste des termes diagonaux de D.

Mais, un algorithme informatique doit s'arrêter après un nombre fini d'itérations.

On décide, au départ, d'une précision souhaitée, ε. À chaque étape, on teste si la matrice A_k est diagonale à ε près. Tant que la précision n'est pas atteinte, on poursuit l'itération.

■ *Le résultat*

À l'arrêt du test, la diagonale de la dernière matrice A_k calculée fournit la liste des valeurs propres approchées de la matrice A.

■ *Et les vecteurs propres ?*

On constate que $A_k = {}^t(P_0P_1\ldots P_{k-1})A(P_0P_1\ldots P_{k-1})$.

On pose $Q_k = (P_0P_1\ldots P_{k-1})$. Pour l'entier k auquel on a arrêté l'itération, les colonnes de la matrice Q_k fournissent une approximation d'une base de vecteurs propres de A. À vous de concevoir le complément de programme permettant de donner la liste de ces vecteurs.

La démarche algorithmique

Vous trouverez ci-dessous une présentation des différents éléments de l'algorithme en question.

À vous de les assembler pour créer un programme qui fonctionne.

La syntaxe utilisée est celle de la TI.

Les données de départ sont une matrice symétrique réelle, notée $a = (a[i, j])$ et un réel *epsilon* > 0.

```
:jacobi(a,epsilon)
:
:© Initialisation :
:Local aa, n, orth, max, i, j, p, q, theta, bb
: a → aa : rowdim(a) → n : identity(n) → orth : epsilon → max
:
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
:ⓒ La boucle principale et son arrêt
:ⓒ On va calculer le maximum (max) des valeurs absolues des composantes hors dia-
gonale de la matrice aa. Tant que max ⩾ epsilon, on répète le processus itératif.
Lorsque l'on sort de cette boucle, la matrice aa est diagonale à epsilon près.
:
:While max ⩾ epsilon
:
:ⓒ Détermination de Max{ |aa[i,j]| , i ≠ j } et des indices p et q donnant ce max.
:
:  For i, 2, n
:      For j, 1, i-1
:          If abs(aa[i,j]) ⩾ max Then
:              abs(aa[i,j] → max
:              i → q : j → p
:          Endif
:      Endfor
:  Endfor
:
:ⓒ Construction de la matrice orthogonale (orth). C'est la matrice identité sauf pour
les 4 coefficients d'indices [p,p], [p,q], [q,p], [q,q]. Les valeurs de p et q ont été
calculées dans le premier bloc et p < q.
:
:  If aa[p,p] = aa[q,q] Then
:      pi/4 → theta
:  Else
:      1/2*arctan(2*aa[p,q]/(aa[q,q]-aa[p,p]) → theta
:  Endif
:
:  cos(theta) → orth[p,p] : cos(theta) → orth[q,q]
:  sin(theta) → orth[q,p] : -sin(theta) → orth[p,q]
:
:ⓒ L'itération torth * aa * orth → bb.
:ⓒ La matrice orth définie ci-dessus est telle que les termes hors diagonale de
(bb = torth * aa * orth) sont plus petits que ceux de aa.
:ⓒ Le produit matriciel général ferait calculer les n² coefficients du produit (aa *
orth), puis les n² coefficients du produit orth * (aa * orth). Mais ici, les coeffi-
cients hors des lignes et colonnes p et q sont inchangés. Il n'y a pas plus de 4n co-
efficients à calculer (2 lignes et 2 colonnes). On aura intérêt à utiliser une formule
spécifique à notre problème. Ces calculs constituent une des questions du problème de
Centrale.
:
:ⓒ Remplissage de la matrice bb
:  aa → bb
:
```

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
:ⓒ Modification de la colonne p de bb. la valeur de theta est celle qui annule le
coefficient d'indices [q,p] du produit. Pour les autres coefficients, on admet les
formules utilisées.
:
:  0 → bb[q,p]
:  (cos(theta))^2*aa[p,p] - sin(2*theta)*aa[p,q]
        + (sin(theta))^2*aa[q,q] → bb[p,p]
:  For i, 1, n
:       If i ≠ p and i ≠ q Then
:            cos(theta)*aa[i,p] - sin(theta)*aa[i,q] → bb[i,p]
:       Endif
:  Endfor
:ⓒ Pour la ligne p, la matrice est symétrique.
:  For i, 1, n
:       bb[i,p] → bb[p,i]
:  Endfor
:
:ⓒ Pour la colonne q de bb, le coefficient bb[p,q] est déjà le bon.
:  (sin(theta))^2*aa[p,p] + sin(2*theta)*aa[p,q]
        + (cos(theta))^2*aa[q,q] → bb[q,q]
:  For i, 1, n
:       If i ≠ p and i ≠ q Then
:            sin(theta)*aa[i,p] + cos(theta)*aa[i,q] → bb[i,q]
:       Endif
:  Endfor
:ⓒ Pour la ligne q, la matrice est symétrique.
:  For i, 1, n
:       bb[i,q] → bb[q,i]
:  Endfor
:
:ⓒ Les calculs sont terminés, on réaffecte bb à aa, et on recommence.
:
:  bb → aa
:
:Endwhile
:
:ⓒ affichage de la liste des termes diagonaux de aa qui donne la liste des valeurs
propres approchées
:
:seq(aa[i,i],i,1,n)
```

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto (f \mid g) = \int_0^1 fg.$$

Pour tout f de E, on définit la fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par, pour tout x de $[0,1]$,

$$g(x) = \int_0^1 \sin(\pi|x-t|) f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Notons F l'application qui associe g à toute application f de E.

Montrer que F est un endomorphisme de E auto-adjoint.

2 Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E admettant un adjoint u^*.

Montrer que e^u a pour adjoint e^{u^*}.

Que dire lorsque u est auto-adjoint ?

3 Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E.

On suppose que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1) Montrer que $\forall x \in E \quad \|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.

2) Montrer $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E)$.

3) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

4 Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E antisymétrique.

1) Montrer que $\mathrm{I}_E + u$ est un automorphisme de E.

2) Montrer que $v = (\mathrm{I}_E - u) \circ (\mathrm{I}_E + u)^{-1}$ est un déplacement.

3) Soit v un automorphisme orthogonal n'admettant pas -1 pour valeur propre. Montrer qu'il existe un endomorphisme antisymétrique u tel que :

$$v = (\mathrm{I}_E - u) \circ (\mathrm{I}_E + u)^{-1}.$$

5 $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$.

1) Montrer que l'application φ de E dans E définie par :

$$\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $(E,(\ \mid\ ))$.

2) Déterminer le spectre de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

6 Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien, u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E tels que :

$$u \circ v = v \circ u.$$

Montrer l'existence d'une base orthonormale de E dont les vecteurs soient simultanément vecteurs propres de u et de v.

7 Soit A et B deux matrices symétriques et positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $A + B$ est une matrice symétrique positive.

2) Montrer que, si l'une des deux matrices est définie positive, $A + B$ l'est aussi.

8 Calculer :

$$\sup\left\{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\,;(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\right\}.$$

9 Soit $(E,(\ \mid\ ))$ un espace euclidien, Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques sur E telles que :

$$\forall x \in E\backslash\{0_E\} \quad Q_1(x) + Q_2(x) > 0.$$

Montrer qu'il existe une base orthogonale à la fois pour Q_1 et Q_2.

10 Déterminer la nature des courbes dont les équations suivent, les dessiner.

1) $x^2 + 8xy - 5y^2 + 14\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + \dfrac{264}{7} = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 7\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = 0$;

3) $2{,}9x^2 - 0{,}6xy + 2{,}1y^2 + 3\sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y + 15 = 0$;

4) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 500x + 500y - 600 = 0$;

5) $x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2 + 8\sqrt{2}x = 0$.

11 Discuter, suivant λ, la nature de la conique d'équation :

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 0.$$

12 Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 2x + 2y - 4z + 2 = 0.$$

13 Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

14 Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

Montrer que $\text{Ker}\,(u + u^*) = \text{Ker}\,u \cap \text{Ker}\,u^*$.

15 Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0.$$

Prouver que la matrice $A = (\alpha_i \alpha_j)_{i \in [\![1,n]\!]\ j \in [\![1,n]\!]}$ est symétrique mais n'est pas diagonalisable.

16 Diagonaliser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -8 & -4 & 10 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

17 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice complexe $Z = A + \mathrm{i}I_n$ est-elle inversible ?

18 Soit $A = (a_{ij})_{i \in [\![1,n]\!] j \in [\![1,n]\!]}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Montrer que :

- pour tout i de $[\![1,n]\!]$ $\quad a_{ii} > 0$;
- pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$|a_{ij}| < \max\{a_{kk} \mid k \in [\![1,n]\!]\}.$$

19 Soit un entier $n \geqslant 2$ et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application ψ est définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\Psi(M) = A\,{}^{\mathrm{t}}MA.$$

1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire :

$$(M \mid N) = \text{tr}({}^{\mathrm{t}}MN).$$

Calculer l'adjoint de ψ.

20 Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille libre de vecteurs de l'espace euclidien $(E, (\ \mid\ ))$. L'endomorphisme f de E est défini par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} (v_i \mid x) v_i.$$

1) Prouver que f est un endomorphisme auto-adjoint de E.

2) Déterminer $\text{Im}f$ et $\text{Ker}\,f$.

21 Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1) Prouver que la suite de matrices (M^n) converge.

2) Soit $N = \lim\limits_{n \to +\infty} M^n$.

Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à N.

3) Soit (X_n) la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = MX_n.$$

Prouver que la suite (X_n) converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.

22 On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n (n = 1, 2, \ldots)$ muni de son produit scalaire usuel noté $(\ \mid\ )$; par $\text{Ker}\,A$, $\text{Im}A$, A^* respectivement le noyau, le sous-espace image et l'adjoint d'un endomorphisme A ; par $F^\perp$ le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E. On note $A\,B$ la composée de deux applications A et B, et $A\,x$ l'image d'un élément x par A.

1) Soit A un endomorphisme symétrique de E.

a) Montrer que, si A et B sont deux endomorphismes symétriques, positifs tels que $B^2 = A$, A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

b) En déduire que, si A est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif B tel que $B^2 = A$.

On le notera $A^{1/2}$.

2) Donner un exemple simple d'endomorphisme positif, mais non symétrique.

3) Soit A un endomorphisme de E.

a) Comparer le noyau de A^*A et celui de A, son image et celle de A^*.

b) On posera $|A| = (A^*\,A)^{1/2}$. Déterminer $|k\,A|$, k étant un réel.

Exemple

Déterminer $|A|$ lorsque $n = 3$ et lorsque A est représentée dans la base canonique de E par une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \quad \text{et} \quad \beta \text{ sont deux réels non nuls.}$$

23 * Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Ω, S) de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n$ tel que : $A = \Omega S$ et S définie positive.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

24 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f dans $\mathcal{GL}_n(E)$.

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) \wedge f(y) = (\mathrm{Det}(f))(f^{-1})^*(x \wedge y).$$

Que dire si f est une rotation ?

25 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, q une forme quadratique positive sur E et φ sa forme polaire.

Montrer que :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \begin{vmatrix} q(x) & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) \\ \varphi(y,x) & q(y) & \varphi(y,z) \\ \varphi(z,x) & \varphi(z,y) & q(z) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

26 **1)** Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si, et seulement s'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^tMM.$$

2) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si, et seulement s'il existe une matrice M de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^tMM.$$

27 ** Soit $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!] j \in [\![1,n]\!]}$ une matrice symétrique réelle. Pour tout p de $[\![1, n]\!]$, on note A_p la matrice $(a_{i,j})_{i \in [\![1,p]\!] j \in [\![1,p]\!]}$. Montrer que :

1) Si A est positive, alors :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Det} A_p \geqslant 0.$$

2) La matrice A est définie positive si, et seulement si :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Det} A_p > 0.$$

28 Déterminer le lieu des projections orthogonales du foyer sur les tangentes à :

1) la parabole ; **2)** l'ellipse ; **3)** l'hyperbole.

29 Montrer que tout cercle centré sur une directrice D d'une hyperbole d'excentricité 2 et passant par le foyer associé à cette directrice, recoupe l'hyperbole en quatre points, un sur (Ox), les trois autres formant un triangle équilatéral.

30 Soit $[MN]$ une corde d'une parabole (P) passant par son foyer F. Montrer que le cercle de diamètre $[MN]$ est tangent à la directrice.

31 Un point M se promène sur une ellipse. La normale en M recoupe l'ellipse en P. Déterminer la longueur minimale de MP.

Indication : Paramétrer l'ellipse, puis écrire que $\overrightarrow{MP} = s\vec{u}$, où $\vec{u}$ désigne un vecteur normal à l'ellipse en M...

32 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a, b et c trois réels non nuls et D_1, D_2 les droites affines définies par :

$$D_1 = O + \mathbb{R}\vec{k}\,; \quad D_2 = O + b\vec{j} + \mathbb{R}(a\vec{i} + c\vec{k}).$$

1) Déterminer le lieu des points de l'espace équidistants des deux droites et reconnaître cette quadrique.

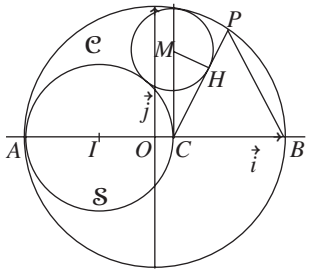
2) Déterminer une équation, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de la surface obtenue par rotation de la droite D_2 autour de la droite D_1 et reconnaître cette quadrique.

33 ** **Sangaku** * **de 1803**

Les trois cercles sont tangents deux à deux.

Deux des cercles ont un diamètre commun et le triangle est isocèle et tangent au troisième cercle $\mathcal{C}$. Sa base repose sur ce diamètre.

Montrer que le segment reliant le centre du cercle $\mathcal{C}$ au point de contact du triangle et du cercle $\mathcal{S}$ est perpendiculaire à ce diamètre.



Conseil

Considérer le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure et montrer que le point M appartient à une ellipse de foyer I et O ; écrire l'équation de cette ellipse ; en déduire le rayon r du cercle de centre M en fonction du rayon R du cercle de centre I et de l'abscisse x de M ; écrire une équation de la droite (PC), puis... conclure.

* Entre 1639 et 1854, le Japon s'isola du reste du monde et les sciences s'y développèrent sans contact avec l'extérieur. Depuis plusieurs siècles, l'offrande de tablettes votives en bois coloré et sculpté était une pratique religieuse courante dans ce pays polythéiste.
Vers la fin du XVIIe siècle, apparaissent les **sangaku**, tablettes mathématiques.
Offrandes aux dieux ou défis aux autres visiteurs, elles exposent des problèmes mathématiques et leur solution.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

34 L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé.

1) Donner l'équation du cylindre (C) d'axe vertical dont la section par le plan xOy est le cercle d'équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 4y \\ z = 0 \end{cases}$$

2) On considère la courbe (γ) définie paramétriquement par :

$$x = \frac{2-4t}{1+t^2}\,; \quad y = t\frac{2-4t}{1+t^2}; \quad z = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

a) Montrer que la courbe (γ) est contenue dans le cylindre (C).

b) Montrer que la courbe (γ) est plane.

c) En déduire la nature de la courbe (γ).

35 On considère les droites D et D' d'équation :

$$D \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Deux plans variables P et P' contiennent respectivement D et D' et sont perpendiculaires entre eux. Déterminer la surface engendrée par $P \cap P'$. Préciser sa nature.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

24

Mensa ACADEMY

Introduction

La plupart des propriétés des espaces préhilbertiens réels et des espaces euclidiens se généralisent aux espaces préhilbertiens complexes et aux espaces hermitiens. Il faudra cependant, prendre garde aux différences.

OBJECTIFS

- Produit scalaire complexe, norme hermitienne, espace hermitien.
- Orthogonalité dans un espace préhilbertien complexe.
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Distance d'un point à un sous-espace.
- Projecteurs orthogonaux.
- Bases orthonormales.
- Semi-isomorphisme entre un espace hermitien et son dual.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Structure d'espace préhilbertien complexe

1.1. Définitions

Nous avons défini la notion de produit scalaire complexe dans le *chapitre* 1.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ sesquilinéaire, hermitienne, définie positive est un **produit scalaire complexe** sur E.

Un produit scalaire complexe φ est donc une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (*hermitienne*) ;
- $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$ (*linéarité à droite*) ;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien complexe**.

Une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et linéaire par rapport à la seconde variable possède la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \overline{\lambda} \varphi(x_1, y) + \overline{\mu} \varphi(x_2, y).$$

Elle est dite semi-linéaire à gauche ou par rapport à la première variable.

Semi-linéaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la seconde, elle est qualifiée de sesquilinéaire.

Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est appelé **espace hermitien.**

Dans ce chapitre, nous noterons $(\,|\,)$ le produit scalaire.

Théorème 1

Soit φ un produit scalaire sur E. Alors :

$$x = 0_E \Leftrightarrow \forall y \in E \quad (x \mid y) = 0.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

1.2. Norme associée à un produit scalaire complexe

Nous avons démontré dans le *chapitre* 1 :

Théorème 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x, x) \varphi(y, y).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille (x, y) est liée :

$$x = 0_E \quad \text{ou} \quad (\exists k \in \mathbb{C})(y = kx).$$

... ainsi que l'inégalité de Minkowski :

Corollaire 2.1 : Inégalité de Minkowski

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \sqrt{\varphi(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)}.$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille (x, y) est positivement liée :

$$x = 0_E \quad \text{ou} \quad (\exists k \in \mathbb{R}^+)(y = kx).$$

On en a déduit :

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors la fonction $\| \ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$, définie par : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$, est une norme sur E, dite norme associée au produit scalaire complexe ou norme hermitienne.

L'espace E est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

Lorsqu'il est complet, on l'appelle **espace de Hilbert.**

Mensa ACADEMY

Théorème 4

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe. L'espace vectoriel $E \times E$ est muni de la norme produit. Le produit salaire $(\ |\ )$ est continu.

Voici quelques relations entre produit scalaire et norme :

Théorème 5

Soit $(\ |\ )$ un produit scalaire complexe sur E et $\| \ \|$ la norme hermitienne associée. Alors, pour tout x de E et tout y de E, on a :

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x \mid y)$;
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(x \mid y)$;
- $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (**identité du parallélogramme**) ;
- $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\mathrm{Re}(x \mid y)$;
- $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + \mathrm{i}\|y + \mathrm{i}x\|^2 - \mathrm{i}\|y - \mathrm{i}x\|^2)$ (**identité de polarisation**) ;
- $\|x\| = \sup\{|(x \mid y)|; \|y\| \leqslant 1\} = \sup\{|(x \mid y)| \|y\| = 1\}$;
  $= \sup\{\dfrac{|(x \mid y)|}{\|y\|}; y \neq 0_E\}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

1.3. Exemples usuels d'espaces préhilbertiens complexes

■ Lorsque $E = \mathbb{C}^n$, l'application φ définie par :

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

est appelée le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$. L'espace $(\mathbb{C}^n, \varphi)$ est un espace hermitien.

La norme associée au produit scalaire canonique est :

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}.$$

■ Dans le *chapitre* 11 nous avons étudié de manière approfondie l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

L'application suivante $(\ |\ )$ de $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. La norme associée est $\| \ \|_2$:

$$f \longmapsto \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2}.$$

L'espace $(\mathcal{C}_{2\pi}, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien complexe. Il n'est pas complet.

■ $(a < b)$ $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. muni de la norme N_2 :

$$f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

est un espace préhilbertien complexe. La norme N_2 découle du produit scalaire défini par :

$$(f \mid g) = \int_a^b \overline{f} g.$$

■ On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ un produit scalaire, en posant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})^2 \quad (A \mid B) = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A} B).$$

La norme hermitienne associée est définie par :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

en notant $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ des matrices complexes muni de cette norme est un espace hermitien.

■ $\mathbb{C}[X]$, muni de la norme N_2, définie pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$ est un espace préhilbertien complexe.

■ L'ensemble $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |u_n|^2$ converge, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

L'application φ de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})^2$ dans $\mathbb{C}$, définie par $\varphi(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u}_n v_n$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

La norme associée : $u \longmapsto \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\, u_n \,|^2}$ sera notée N_2.

L'espace $(l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}),\varphi)$ est un espace de Hilbert.

1.4. Construction d'espaces préhilbertiens complexes

■ *Sous-espace préhilbertien*

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace vectoriel de E.

La restriction de $(\ |\ )$ à $F\times F$ est encore un produit scalaire. On dit qu'il est *induit* par celui de E.

On garde, en général, la même notation. F est appelé sous-espace préhilbertien complexe de $(E,(\ |\ ))$.

La topologie de $(F,(\ |\ ))$ est la topologie induite sur F par celle de $(E,(\ |\ ))$.

■ *Produit d'une famille finie d'espaces préhilbertiens complexes*

Soit $(E_1,(\ |\ )_1)...(E_p,(\ |\ )_p)$ une famille de p espaces préhilbertiens complexes.

On définit sur $E = E_1\times\cdots\times E_p$ la forme sesquilinéaire hermitienne φ en posant : pour tout $x = (x_1,\ldots,x_p)$ de E et tout $y = (y_1,\ldots,y_p)$ de E,

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{p} (x_i \mid y_i)_i.$$

On vérifie facilement que φ est un produit scalaire sur E. L'espace $(E_1\times\cdots\times E_p,\varphi)$ est un espace préhilbertien complexe.

La norme sur $E_1\times\cdots\times E_p$ est $x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2}$.

Si on note $\|\ \|_\infty$ la norme produit définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x_i\|_i\ ;i\in[\![1,p]\!]\}.$$

$$\forall x\in E \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{p}\|x\|_\infty.$$

Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|$ sont équivalentes.

La topologie produit est identique à la topologie de $(E_1\times\cdots\times E_p,\varphi)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En particulier, si les $(E_1,(\ |\ )_1)...(E_p,(\ |\ )_p)$ sont des espaces de Hilbert, l'espace $(E_1\times\cdots\times E_p,\varphi)$ est un espace de Hilbert.

C'est le cas de $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique. Il est le produit des n espaces $(\mathbb{C},(\ |\ ))$.

1.5. Isomorphismes d'espaces préhilbertiens complexes

Soit (E_1,φ_1) et (E_2,φ_2) deux espaces préhilbertiens complexes

On appelle **isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes** tout isomorphisme d'espaces vectoriels f de E_1 sur E_2 qui respecte le produit scalaire :

$$\forall (x,y)\in E_1^2\quad \varphi_2(f(x),f(y))=\varphi_1(x,y).$$

Les **espaces** (E_1,φ_1) et (E_2,φ_2) sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes de E_1 sur E_2.

Un isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes de (E,φ) sur lui-même est appelé **automorphisme unitaire**.

On vérifie facilement que :

- le composé de deux automorphismes unitaires est un automorphisme unitaire ;
- l'isomorphisme réciproque d'un automorphisme unitaire est un automorphisme unitaire ;
- l'identité d'un espace préhilbertien complexe (E,φ) sur lui-même est un automorphisme unitaire.

Mensa ACADEMY

Théorème 6

Soit (E_1,φ_1) et (E_2,φ_2) deux espaces préhilbertiens complexes, N_1 et N_2 les normes associées.

Une application linéaire f de E_1 dans E_2 surjective est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes si, et seulement si, elle est isométrique, c'est-à-dire si, et seulement si, elle respecte les normes :

$$\forall x\in E_1\quad N_2(f(x))=N_1(x).$$

2 Orthogonalité

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $\|\ \|$ la norme associée.

2.1. Vecteurs orthogonaux

Un **vecteur** x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\|=1$.

Un **vecteur** x est dit **orthogonal** à un vecteur y lorsque $(x\mid y)=0$.

On note $x\perp y$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 7 : Théorème de Pythagore

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $\|\ \|$ la norme associée.

- $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow (x \mid y) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Démonstration

Ceci résulte de l'égalité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x \mid y)$.

Soit A une partie de E, **l'orthogonal de A** est l'ensemble :

$$\{x \in E\ ; \quad \forall a \in A \quad x \perp a\}.$$

On le note $A^\perp$ ou A°.

Nous laisserons aux soins du lecteur les démonstrations qui sont analogues au cas réel.

Théorème 8

Soit (E, φ) un espace préhilbertien complexe, A et B des parties de E. Alors :

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$;
- $A \subset (A^\perp)^\perp$;
- $A \subset B \quad \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- $A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$.

Mensa ACADEMY

Lorsque deux parties A et B de E vérifient l'une des propriétés équivalentes, $A \subset B^\perp$ ou $B \subset A^\perp$, on dit que les **parties** A et B sont **orthogonales.**

Théorème 9

Soit (E, φ) un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace de E. Alors :

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$;
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.

En particulier :

$$\{0_E\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0_E\}.$$

Deux **sous-espaces** F et G de E sont dits **orthogonaux** lorsque :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y.$$

Les sous-espaces F et G de E sont donc orthogonaux si, et seulement si : $G \subset F^\perp$ (ou bien $F \subset G^\perp$).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 1

Quand l'orthogonal d'un hyperplan est réduit à $\{0_E\}$

Soit E l'ensemble des suites à support fini sur $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire canonique. On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^n$ qui n'appartient pas à E.

Soit f l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout u de E, par $f(u) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i u_i$.

1) *Montrer que* Ker f *est un hyperplan H de E.*

2) *Déterminer l'orthogonal de H.*

1) L'application f est une forme linéaire. Montrons qu'elle est non nulle.

La suite α n'est pas à support fini. Il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\alpha_k \neq 0$.

Considérons la suite w dont le seul terme non nul est w_k égal à 1. Alors $f(w) = \alpha_k \neq 0$.

La forme linéaire f est non nulle. Son noyau est un hyperplan.

2) Montrons par l'absurde que $H^\perp = \{0_E\}$.

Soit v dans $H^\perp$, supposons que v soit non nulle.

$$\forall\, u \in H \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{v}_i u_i = 0.$$

Soit g l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout u de E par $g(u) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{v}_i u_i$.

L'application g est une forme linéaire sur E.

Elle est non nulle car la suite v est non nulle.

Le noyau de g est un hyperplan. Il contient l'hyperplan H. Par conséquent, Ker $g = H$.

Les formes linéaires f et g sont donc proportionnelles. Ceci est absurde, puisque le support de la suite v est fini, alors que celui de la suite α ne l'est pas. Par conséquent : $H^\perp = \{0_E\}$.

Mensa ACADEMY

2.2. Supplémentaires orthogonaux

Deux **sous-espaces** F et G sont dits **supplémentaires orthogonaux** lorsque :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G.$$

On note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Théorème 10

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors $G = F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

On appelle **projecteur orthogonal** tout projecteur p de E tel que Imp et Ker p sont supplémentaires orthogonaux.

Théorème 11

Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal $G = F^\perp$ et si Ker $p = F^\perp$.

Si F admet un supplémentaire orthogonal, le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de direction $F^\perp$, on le note p_F.

⚠ *Un sous-espace quelconque d'un espace préhilbertien complexe n'admet pas toujours de supplémentaire orthogonal.*
Le sous-espace de l'application 1 *vérifie $H^\perp = \{0_E\}$.*
Par conséquent :

$$(H^\perp)^\perp = E \quad \text{et} \quad (H^\perp)^\perp \neq H.$$

Le sous-espace H ne peut pas admettre de supplémentaire orthogonal.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2.3. Distance d'un élément à un sous-espace

Théorème 12

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $\|\ \|$ la norme associée.

Soit a un élément de E et F un sous-espace de E. Alors :

- pour tout x de F :

$$\|a - x\| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^{\perp} ;$$

- il existe au plus un vecteur x dans F qui vérifie :

$$\|a - x\| = d(a, F) ;$$

- si F admet un supplémentaire orthogonal, $p_F(a)$ est l'unique vecteur x de F tel que :

$$\|a - x\| = d(a, F) \quad \text{et} \quad \|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2.$$

Démonstration

Soit x dans F.

$$\forall k \in \mathbb{C} \quad \forall y \in F \quad \|a - (x + ky)\|^2 - \|a - x\|^2 = -2\mathrm{Re}(k(a - x \mid y)) + |k|^2\|y\|^2.$$

- Si x vérifie $\|a - x\| = d(a, F)$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{C} \quad \forall y \in F \quad -2\mathrm{Re}(k(a - x \mid y)) + |k|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

En particulier, pour tout réel k, on a :

$$-2k\mathrm{Re}(a - x \mid y) + k^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Ceci exige :

$$\forall y \in F \quad \mathrm{Re}(a - x \mid y) = 0.$$

De même, pour tout imaginaire pur $k = \mathrm{i}t$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 2t\mathrm{Im}(a - x \mid y) + t^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Ceci exige : $\forall y \in F \quad \mathrm{Im}(a - x \mid y) = 0$. Donc finalement :

$$\forall y \in F \quad (a - x \mid y) = 0.$$

Par conséquent $a - x \in F^{\perp}$.

- Réciproquement, on suppose que $a - x$ appartient à $F^{\perp}$. Alors :

$$\forall y \in F \quad \|a - (x + y)\|^2 - \|a - x\|^2 \geqslant 0.$$

Or, l'application $y \longmapsto x + y$ est une bijection de F dans F.

$$\forall z \in F \quad \|a - z\| \geqslant \|a - x\|.$$

On en déduit que $d(a, F)$ est atteint en x et vaut $\|a - x\|$.

On suppose qu'il existe un x de F tel que : $a - x \in F^{\perp}$.

Montrons, par l'absurde, l'unicité de x.

S'il existe un vecteur x' de F tel que $a - x' \in F^{\perp}$, alors $(x - a) - (x' - a)$ appartient à $F^{\perp}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit que $x - x'$ appartient à $F \cap F^\perp$. Puis $x = x'$.
Montrons l'existence de x lorsque F admet un supplémentaire orthogonal.
On sait que, dans ce cas, $p_F(a)$ appartient à F et que $a - p_F(a)$ est dans $F^\perp$.
Le vecteur $p_F(a)$ convient.
D'autre part : $a = p_F(a) + (a - p_F(a))$. Le *théorème de Pythagore* donne :

$$\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \|a - p_F(a)\|^2$$

puis :

$$\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

2.4. Somme directe orthogonale

Théorème 13
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux. Alors la somme $\sum_{i\in I} F_i$ est directe.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux. La somme directe $\bigoplus_{i\in I} F_i$ est dite **somme directe orthogonale**.

On la note $\overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} F_i$.

Mensa ACADEMY

Théorème 14
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe. Soit $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in[\![1,n]\!]}} F_i$.
Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$, on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \qquad \textit{(Théorème de Pythagore)}.$$

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} F_i.$$

Pour tout i de I, soit p_i la projection sur F_i de noyau $\overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}} F_j$.
Comme pour toute somme directe, on a :

$$\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E, \quad p_i \circ p_i = p_i \quad \text{et} \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

pour $i \neq j$.
Le projecteur p_i est un projecteur orthogonal, car $\overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}} F_j$ est un supplémentaire orthogonal de F_i.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les projecteurs p_i sont appelés les **projecteurs orthogonaux associés à la décomposition de E en somme directe orthogonale** $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} F_i$.

2.5. Familles orthogonales

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $\|\ \|$ la norme associée.

Une **famille** $(e_i)_{i\in I}$ de E est **orthogonale** quand :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0.$$

Une **famille** $(e_i)_{i\in I}$ de E est **orthonormale** quand :

$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad (e_i \mid e_j) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.

Exemple

Dans l'espace préhilbertien complexe $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (\ |\ ))$ la famille $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ définie par : $f_p(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,px}$ est orthonormale.

$$(f_p \mid f_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-p+q)x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Pour $p \neq q$, on trouve $(f_p \mid f_q) = 0$; pour $p = q$, on a $(f_p \mid f_q) = 1$.

Théorème 15

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormale est libre.

Théorème 16 : Relation de Pythagore

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de E finie. Alors :

$$\left\|\sum_{i\in I} e_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|e_i\|^2 .$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

2.6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 17

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe, p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E.

Il existe une et une seule famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ orthonormale de E telle que :

$\forall k \in [\![1, p]\!]$ $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ et $(e_k \mid \varepsilon_k) \in \mathbb{R}^{+*}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.

Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et pour tout k de $[\![1, p]\!]$, $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

La projection orthogonale p_k de F_{k+1} sur F_k existe.

Montrons que l'on peut construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de manière unique.

Il existe un seul vecteur ε_1 colinéaire à e_1 et de même sens : $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Soit k dans $[\![1, p-1]\!]$ et supposons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ déjà construit tel que :

$$\forall\, j \in [\![1,k]\!] \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) \quad \text{et} \quad (e_j \mid \varepsilon_j) > 0.$$

Montrons l'existence et l'unicité d'un vecteur ε_{k+1} tel que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) \quad \text{et} \quad (e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) > 0.$$

Montrons l'unicité. Le vecteur ε_{k+1} appartient à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$.

Or $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. Par conséquent, il existe $k+1$ complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et α tels que :

$$\varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Pour tout i de $[\![1,k]\!]$, on a $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_{k+1}) = 0$. On en déduit $\alpha_i = -\alpha(\varepsilon_i \mid e_{k+1})$.

D'où :

$$\varepsilon_{k+1} = \alpha(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1})\varepsilon_i).$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1})\varepsilon_i$ est le projeté orthogonal du vecteur e_{k+1} de F_{k+1} sur F_k. Notons e'_{k+1} le vecteur $e_{k+1} - p_k(e_{k+1})$. Il est non nul car e_{k+1} n'appartient pas à F_k.

Les conditions $\|\varepsilon_{k+1}\| = 1$ et $(\varepsilon_{k+1} \mid e_{k+1}) > 0$ imposent $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$.

Montrons l'existence.

Soit e'_{k+1} le vecteur non nul $e_{k+1} - p_k(e_{k+1})$.

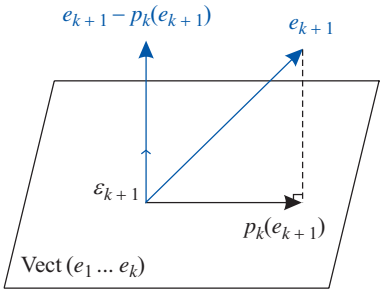
Par définition de la projection orthogonale p_k, le vecteur unitaire $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$ est orthogonal à tous les ε_i, pour i dans $[\![1,k]\!]$. La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ est orthonormale.

De plus, $e_{k+1} = \|e'_{k+1}\|\varepsilon_{k+1} + p_k(e_{k+1})$.

Donc, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ et $(\varepsilon_{k+1} \mid e_{k+1}) = \|e'_{k+1}\| > 0$.

Le vecteur $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$ convient.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ ainsi construite répond à la question.



Doc. 1.

Méthode pratique :

Le procédé décrit au cours de cette démonstration permet de construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec $e'_{k+1} = e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1})\varepsilon_i$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On l'appelle le procédé d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt.**

On peut déduire un algorithme à partir de ces formules.

Mais, pour un calcul manuel, il est plus simple de rechercher par récurrence une famille orthogonale en posant :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Puis on normalise les vecteurs obtenus en les divisant par leur norme.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt se généralise sans difficulté aux familles libres dénombrables.
Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille libre dénombrable dans $(E, (\ |\ ))$ préhilbertien complexe. Il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$

et $(e_k \mid \varepsilon_k) > 0$.

Elle est définie par :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec :

$$e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1}) \varepsilon_i.$$

3 Espaces hermitiens

3.1. Expression du produit scalaire dans une base

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Notons X le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x quelconque de E et Y celui d'un vecteur y quelconque dans E.

À toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $m_{i,j}$, on associe la matrice $\overline{M}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $\overline{m_{i,j}}$. La matrice $\overline{M}$ est dite **matrice conjuguée** de M.

Une forme sesquilinéaire $(\ |\ )$ est entièrement déterminée par la matrice :

$$A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,n]\!]}$$

définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,j} = (e_i \mid e_j).$$

Alors :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \overline{x_i} y_j = {}^t\overline{X} A Y.$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice $M^* = {}^t\overline{M}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ appelée **matrice transconjuguée de M.**

La forme sesquilinéaire $(\ |\ )$ de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est hermitienne si, et seulement si, la matrice A vérifie $A^* = A$. On dit que A est une **matrice hermitienne.**

Soit A une **matrice hermitienne**, elle est dite **positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\overline{X} A X \geqslant 0.$$

Elle est dite **définie positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^t\overline{X} A X > 0.$$

La forme sesquilinéaire $(\ |\ )$, de matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, est un produit scalaire complexe si, et seulement si, la matrice A est hermitienne définie positive.

Étudions l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un produit scalaire hermitien.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de E. Notons P la matrice de passage de la base B à la base B' et A' la matrice de $(\ |\ )$ dans la base B'.

Si X' est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base B' et Y' celui du vecteur y, on a :

$$(x \mid y) = {}^t\overline{X}AY = {}^t\overline{(PX')}A(PY') = {}^t\overline{X}'({}^t\overline{P}AP)Y.$$

On en déduit : $A' = {}^t\overline{P}AP$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et B une base de E.

Soit A la matrice hermitienne définie positive d'un produit scalaire $(\ |\ )$ sur E.

- Pour tout x de E et tout y de E, on a :

$$(x \mid y) = {}^t\overline{X}AY$$

en notant X et Y les vecteurs colonnes respectifs des coordonnées de x et de y dans la base B.

- Si P est la matrice de passage de la base B à la base B', alors la matrice de $(\ |\ )$ dans la base B' est :

$$A' = {}^t\overline{P}AP.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 5.*

3.2. Existence de bases orthonormales

Théorème 19

Dans tout espace hermitien, il existe des bases orthonormales et le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.

Corollaire 19.1

Dans un espace hermitien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

3.3. Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 20

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien $(E, (\ |\ ))$. Alors :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)\, e_i.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire 20.1

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien $(E, (\ |\ ))$ et u un endomorphisme de E. Alors la trace de u est :

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i \mid u(e_i)\right),$$

le déterminant de u est $\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}((e_i \mid u(e_j))_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]}$.

Attention à la place de x dans $(e_i \mid x)$. Une inversion de x et de e_i fait intervenir les conjuguées des composantes.

Corollaire 20.2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien $(E, (\ |\ ))$.

Alors pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ de E :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(e_i \mid x\right)\right|^2}$$

et

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x \mid e_i\right)\left(e_i \mid y\right).$$

Mensa ACADEMY

Théorème 21

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie $n > 0$.

Pour munir E d'une structure hermitienne, il suffit de choisir arbitrairement une base $(e_1, \dots, e_n)$ et de la considérer orthonormale. Il suffit donc de choisir le produit scalaire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

Exemple

Pour $E = \mathbb{C}^n$, le choix du produit scalaire associé à la base canonique munit $\mathbb{C}^n$ d'une structure hermitienne dite canonique. C'est le seul produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ pour lequel la base canonique est orthonormale.

Le produit scalaire ainsi défini est le seul pour lequel la base $(e_1, \dots, e_n)$ soit orthonormale.

Théorème 22

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace hermitien $(E, (\ |\ ))$.

L'application θ définie de $\mathbb{C}^n$ dans E par $\theta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un isomorphisme d'espaces hermitiens de $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne canonique sur $(E, (\ |\ ))$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

L'application θ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

La relation :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\,(e_i \mid y)$$

du *corollaire* 20.2 prouve que l'application θ respecte les produits scalaires.

3.4. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe

Théorème 23

Tout sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe admet un supplémentaire orthogonal.

Les espaces hermitiens de dimension n sont tous isomorphes à l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ muni de la structure hermitienne canonique.
Cependant, il n'y a pas d'isomorphisme canonique, c'est-à-dire indépendant du choix de la base de E et ne dépendant que de la structure hermitienne de E.

Démonstration

D'après le *corollaire* 19.1, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F.

Soit x dans E et :

$$y = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i.$$

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad (e_k \mid y) = (e_k \mid x).$$

On en déduit :

$$x - y \in F^{\perp}.$$

Or tout x de E s'écrit :

$$x = y + (x - y).$$

Donc $E = F + F^{\perp}$.

On sait que $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. Par conséquent : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Corollaire 23.1

Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace de E de dimension finie.

- $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
- $\operatorname{codim} F^{\perp} = \dim F$.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$$

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{p} |(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{(Inégalité de Bessel).}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Application 2

Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale.

Notons F le sous-espace de E engendré par cette famille.

1) *Montrer que, pour tout x de E, la série $\sum |(e_n \mid x)|^2$ converge et que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

2) *Montrer que :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$

et que, dans ce cas $\displaystyle x = \sum_{n=1}^{+\infty} (e_n \mid x) e_n$.

1) Pour tout entier n non nul, notons F_n le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$.

Le *corollaire* 23.1 appliqué à F_n et à $(e_1,\dots,e_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ assure :

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} |(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de termes positifs $\sum |(e_n \mid x)|^2$ est majorée par $\|x\|^2$.

La série $\sum |(e_n \mid x)|^2$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

2) Supposons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 = \|x\|^2$.

Notons $\displaystyle x_n = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) e_i$. Alors $x - x_n \perp x_n$.

$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2$ (*Relation de Pythagore*).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\|x\|^2 - \|x_n\|^2) = 0$ car :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 = \|x\|^2 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} |(e_k \mid x)|^2 = \|x_n\|^2.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

La suite (x_n) est dans F. Par conséquent : $x \in \overline{F}$.

Réciproquement, supposons que x appartient à $\overline{F}$.

Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F qui converge vers x. Or, F est la réunion de la suite croissante (F_n).

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n_p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_p \quad y_p \in F_n.$$

On choisit $\varphi(0) = n_0$ et on définit par récurrence une application φ en posant :

$$\varphi(p) = \max(n_p, \varphi(p-1)+1).$$

Elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in F_{\varphi(n)}$.

Notons, pour tout n, x_n la projection orthogonale de x sur F_n.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x - y_n\|$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_{\varphi(n)}\| = 0$.

Or la suite $(\|x - x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par conséquent, elle converge également vers 0.

On en déduit :

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n \mid x) e_n.$$

On a, pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$x = x_n + (x - x_n) \quad \text{et} \quad x_n \perp x - x_n.$$

D'après le *théorème de Pythagore*, on a :

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Donc :

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2.$$

Or $\displaystyle\|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_k \mid x)|^2$.

On obtient l'**égalité de Parseval** :

$$\forall x \in E \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n \mid x)|^2 = \|x\|^2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3.5. Supplémentaire orthogonal

Théorème 24

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace hermitien et F un sous-espace de E. Alors :

- F admet un supplémentaire orthogonal : $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$;
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = \operatorname{codim} F$;
- $(F^\perp)^\perp = F$.
- On dispose de la projection orthogonale p_F sur F et, pour tout a de E, la distance de a au sous-espace F est $d(a, F) = \|a - p_F(a)\|$.

Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormale de F :

$$p_F(a) = \sum_{i=1}^{k} (e_i \,|a)\, e_i.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 6.*

3.6. Semi-isomorphisme canonique d'un espace hermitien sur son dual

Dans ce paragraphe, nous avons besoin de définir la notion d'espace vectoriel conjugué d'un espace vectoriel $(G, +, .)$ sur $\mathbb{C}$.

Pour cela, on définit sur G une loi de composition externe $\square$ en posant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x \in G \quad \alpha \square x = \overline{\alpha} \cdot x.$$

Mensa ACADEMY

On vérifie facilement que $(G, +, \square)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ appelé espace conjugué de l'espace $(G, +, .)$. On le notera $\overline{G}$.

Si G est de dimension finie, alors $\overline{G}$ a la même dimension.

Toute base de G est une base de $\overline{G}$. Les cordonnées d'un vecteur x de $\overline{G}$ sont les conjuguées des coordonnées de x dans G.

Théorème 25

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace hermitien. Notons E^* son dual.

- Pour tout a de E, l'application $j(a) : x \longmapsto (a \mid x)$ est une forme linéaire sur E.
- L'application $j : a \longmapsto j(a)$ est un semi-isomorphisme (semi-linéaire et bijectif) canonique de E sur son dual E^* :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists\,!\, a \in E \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = (a \mid x).$$

Démonstration

La vérification du premier point est immédiate.

L'application j est semi-linéaire de E dans E^*. En effet :

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha a + \beta b \mid x) = \overline{\alpha}(a \mid x) + \overline{\beta}(b \mid x).$$

On en déduit :

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall x \in E \quad j(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha} j(a) + \overline{\beta} j(b).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'application j est alors linéaire de E dans l'espace $\overline{E^*}$, conjugué de E^*.

Or, $\dim E = \dim E^* = n > 0$. Pour montrer la bijectivité de j, il suffit de montrer que j est injective.

Soit a dans E tel que $j(a)$ soit la forme nulle.

$$\forall x \in E \quad (a \mid x) = 0.$$

Alors $a = 0_E$. L'application j est injective.

La construction de j ne dépend pas du choix d'une base de E. Elle ne dépend que du produit scalaire. Il s'agit d'un semi-isomorphisme canonique.

L'image d'une base orthonormale de $(E, (\ \mid\ ))$ par j en est la base duale. Si on munit E^* de la structure hermitienne associée à la base duale, l'application j est un isomorphisme d'espaces hermitiens.

FICHE MÉTHODE

● Pour montrer qu'**une application φ est un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe E**, on montre que :

- φ est bien définie de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$;
- $\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$;
- Pour tout x de E, l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

● Pour calculer la **distance d'un vecteur a à un sous-espace F dans un espace préhilbertien complexe** $(E, (\ \mid\ ))$, on peut chercher un vecteur x de F tel que $a - x \in F$.

Lorsque x est déterminé, on sait qu'il est unique et que $\|a - x\| = d(a, F)$.

● Pour **orthonormaliser une famille libre** $(e_1, \ldots, e_p)$ d'un espace euclidien, on construit par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec $e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1}) \varepsilon_i$ (*procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*).

Il est parfois plus simple de poser :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \alpha e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i$$

et de déterminer les coefficients pour que la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ soit orthogonale.

Puis on normalise les vecteurs obtenus en les divisant par leur norme.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD

Polynômes de Hermite et interpolation

A. Un espace préhilbertien complexe

1) Montrer que l'application, notée $(\ |\ )$, définie sur $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \quad (P \mid Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P(t)} Q(t) \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$. On notera $\|\ \|$ la norme hermitienne associée à ce produit scalaire.

2) Montrer l'existence et l'unicité d'une famille $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de droites de $\mathbb{C}[X]$ orthogonales deux à deux et telles que, pour tout entier n de $\mathbb{N}, \mathbb{C}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} D_i$.

B. Les polynômes de Hermite

1) Soit $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme H_n de degré n tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t) \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Quelle relation lie les polynômes H_n et H_{n+1} ?

2) Montrer que :

- $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \quad (P \mid H_n) = 0$;
- $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}[X]$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

3) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n' = \alpha_n H_{n-1}$.

Calculer α_n pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

4) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes et que si on note $a_0, \ldots, a_n$ les racines de H_{n+1} et $b_0, \ldots, b_{n-1}$ les racines de H_n rangées dans l'ordre croissant alors :

$$a_0 < b_0 < a_1 < \ldots < b_{n-1} < a_n.$$

C. Un endomorphisme hermitien

On dit qu'un endomorphisme u de $\mathbb{C}[X]$ est dit hermitien si, et seulement si :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \quad (u(P) \mid Q) = (P \mid u(Q)) \qquad \textbf{(1)}$$

1) Soit u une application de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même qui vérifie **(1)**.

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit u un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que :

a) les valeurs propres de u sont réelles ;

b) les sous-espaces propres de u associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux ;

c) Si F est un sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.

3) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ par $u(P) = -P'' + 2XP' + P$.

a) Établir que u est hermitien, que son spectre est inclus dans $[1, +\infty[$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

b) Soit v et w les endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$ définis pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$v(P) = -P' + 2XP \quad \text{et} \quad w(P) = P'.$$

Exprimer $v \circ w$ et $w \circ v$ en fonction de u.

En déduire $w \circ u - u \circ w$ et $v \circ u - u \circ v$ en fonction de v et w.

Montrer que $\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \quad (v(P) \mid Q) = (P \mid w(Q))$.

c) Soit P un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Établir les égalités suivantes :

$$\|v(P)\|^2 = (\lambda + 1)\|P\|^2, \quad u \circ v(P) = (\lambda + 2)v(P),$$

$$\|w(P)\|^2 = (\lambda - 1)\|P\|^2 \quad \text{et} \quad u \circ w(P) = (\lambda - 2)w(P).$$

En déduire que $v(P)$ est un vecteur propre de u et que si $\lambda > 1$, alors $w(P)$ est un vecteur propre de u.

En déduire que le spectre de u est l'ensemble des entiers naturel impairs.

d) Vérifier que la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de vecteurs propres de u et que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

4) Application à une formule d'intégration exacte pour les polynômes.

a) Notons $a_0, \ldots, a_n$ les $n+1$ racines distinctes de H_{n+1}. Pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on définit la forme linéaire φ_i définie par : $\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \quad \varphi_i(P) = P(a_i)$.

Montrer que $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est une base du dual de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{C}[X]$ définie par : $\varphi(P) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$.

Montrer qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \quad \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(a_i).$$

c) Montrer que $(H_0, H_1, \ldots, H_n, H_0H_{n+1}, H_1H_{n+1}, \ldots, H_nH_{n+1})$ est une base de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$.

En déduire que l'égalité $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(a_i)$ est vérifiée pour tout P de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$.

d) Donner une formule d'intégration exacte pour tout polynôme de $\mathbb{C}_5[X]$.

D. Interpolation d'Hermite

1) Notons toujours $(a_0, \ldots, a_n)$ les $n+1$ racines distinctes de H_{n+1}.

Soit u l'application de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}^{2n+2}$ définie, pour tout P de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$, par :

$$u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n), P'(a_0)..., P'(a_n)).$$

Montrer que u est un isomorphisme.

2) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. On suppose que f s'annule en un point a de $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe une unique application continue g telle que, pour tout réel x, $f(x) = (x - a)g(x)$ et que cette application g peut s'écrire :

$$g(x) = \int_0^1 f'(a + (x - a)u)\,\mathrm{d}\,u.$$

b) Vérifier que l'application g est de classe $\mathcal{C}^p$ et que :

$$\forall q \in [\![1, p]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g^{(q)}(x)| \leqslant \frac{1}{q+1} \sup\{|f^{(q)}(t)| \ ; \ t \in [a, x]\}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré $2n+1$ tel que, pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P_f(a_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad P'_f(a_i) = f'(a_i).$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)^2 \sup\{|f^{(2n+2)}(t)| \ ; \ t \in I\}$$

où I désigne le plus petit segment contenant $a_0, \ldots, a_n$ et x.

c) On suppose que la dérivée d'ordre $2n+2$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par un réel M.

Déterminer une formule approchée pour le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et une majoration de l'erreur.

Étudier le cas $n = 2$.

Mensa ACADEMY

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

1 Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et u une application de E dans E involutive telle que :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad (u(x)\mid u(y)) = (y\mid x).$$

Montrer que :

1) $\forall (x,y)\in E^2 \quad (u(x)\mid y) = (u(y)\mid x)$;

2) l'application u est semi-linéaire.

2 Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace hermitien.

Montrer que :

$$\forall (x,y)\in E^2$$
$$2(x\mid y) = \|x+y\|^2 + \mathrm{i}\|\mathrm{i}x+y\|^2 - (1+\mathrm{i})\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

3 Soit E l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que $(f,g)\longmapsto \displaystyle\int_{\mathrm{IR}} \overline{f}g$ est un produit scalaire hermitien sur E.

2) Considérons une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}^{+\mathbb{Z}}$. Pour tout entier relatif n, on définit l'application f_n par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_n(x) = k_n\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale de E et déterminer la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que cette famille soit orthonormale.

4 Déterminer :

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_0^1 \left|x^2-ax-b\right|^2 \mathrm{d}x\ ;\ (a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

5 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, définie positive. On définit l'application φ de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n \quad \forall y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{C}^n$$
$$\varphi(x,y) = -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & \overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_n \\ y_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ y_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.

6 Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace vectoriel hermitien, F un sous-espace de E et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x\in F \quad \|u(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \forall x\in F^\perp \quad u(x) = 0_E.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = F^\perp$.

7 Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe.

Montrer que :

$$\forall n\geqslant 3 \quad \forall (x,y)\in E^2$$
$$(x\mid y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}x+y\right\|^2 \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

8 ** On définit sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ le produit scalaire φ par :

$$\varphi(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u}_n v_n.$$

Montrer que $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}),\varphi)$ est complet.

9 * Soit A une matrice d'ordre n hermitienne définie positive et C une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On notera B la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -C^* \\ C & A \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire de B et de B^*B ?

10 * Soit A une matrice hermitienne.

On suppose qu'il existe un entier p non nul tel que $A^p = 0$.

Montrer que $A = 0$.

11 **1)** Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Montrer que l'application de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$:

$$(P,Q)\longmapsto (P\mid Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$$

est un produit scalaire hermitien sur E.

2) On considère un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ unitaire.

Montrer que la borne supérieure de l'ensemble :

$$\{|R(z)|\ ;|z|=1\}$$

est supérieure ou égale à 1 et qu'elle est égale à 1 si, et seulement s'il existe un entier non nul m tel que :

$$R = X^m.$$

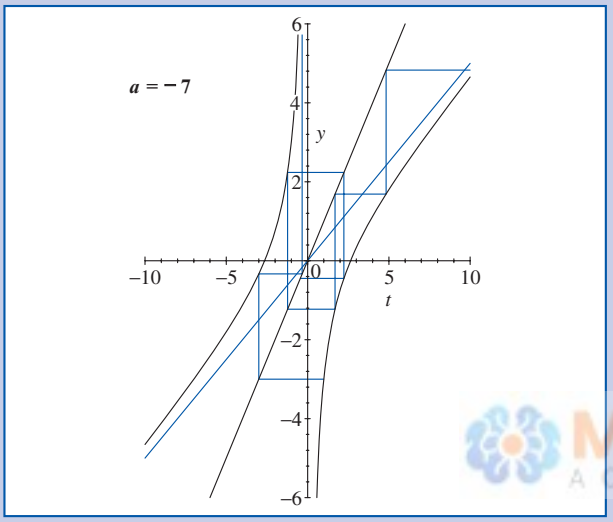
12 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer noyaux, images et rangs des endomorphismes canoniquement associés à A, A^*, AA^* et A^*A.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD Indications et réponses

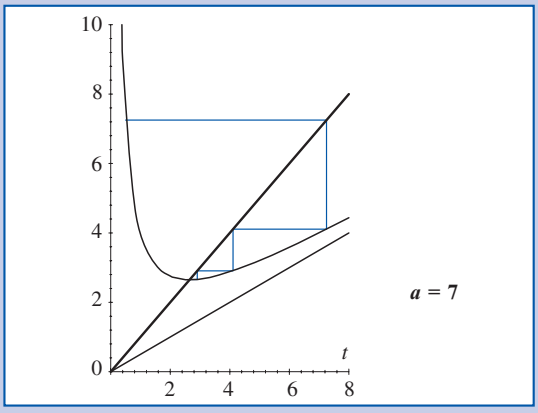
Chapitre 1

1) a) La suite (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction continue $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.
Si la suite converge, la limite l doit vérifier : $l^2 = a$.
Si $a < 0$, la suite n'est pas définie ou diverge. Le document 1 permet de constater cette divergence.



Doc. 1.

Si $a = 0$, la suite est géométrique. Elle converge vers 0.
Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions. La fonction f étant impaire, nous nous limiterons au cas $u_0 > 0$.
On montre alors par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Par conséquent, $u_n \neq 0$ La suite (u_n) est donc bien définie. La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ qui est un intervalle de stabilité de f, la suite (u_n) est monotone. Or, $u_2 - u_1 \geqslant 0$, donc la suite est décroissante. Minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers $\sqrt{a}$.



Doc. 2.

```
> restart:with(plots):
> f:=x->(1/2)*(x+7/x) ;
```

$$f := x \to \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\frac{1}{x}$$

```
> x:='x'g1:=plot({f(t),t,t/2},t=0..8,y=0..10,
  discont=true):
> res:=NULL;x:=0.5:
```

$$res :=$$

```
> to 14 do res:=res,[x,f(x)],[f(x),f(x)] ;x:=f(x) od:
> g10:=plot([res]):
> display({g1,g10});
```

Si $u_0 < 0$, la suite converge vers $-\sqrt{a}$ (*doc.* 2).
b) Si $u_0 > 0$, la suite (v_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{1}{v_n}\right)$$

et $v_0 > 0$. La suite (e_n) converge vers 0 et décroît à partir du rang 1. De plus, pour tout n, on a : $e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{e_n^2}{e_n + 1}$. D'où :

$$\forall n \geqslant 1 \quad e_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}e_n^2.$$

Puis $\forall n \geqslant 1 \quad e_n \leqslant 2\left(\frac{e_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

c) $\forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{7} = \sqrt{7}(v_n - 1)$

$$= \sqrt{7}e_n \leqslant 3e_n \leqslant 6\left(\frac{e_1}{2}\right)^{2^{n-1}}.$$

Ici : $u_1 = 4, e_1 = \frac{4}{\sqrt{7}} - 1 \leqslant \frac{3}{5}$.

Avec Maple :

```
> fsolve((3/(2^(n-1)))*(3/5)^(2^(n-1))=2*10^(-7),n) ;
```

5.698822375

Et $n = 65$.
Nous obtenons :

Avec Maple :

```
> u:=1 : to 6 do u:=(1/2)*(u+7/u) od : u ;
```

$$\frac{1048046964280330565744857 7}{396124518543135534331953 92}$$

```
> evalf(u) ;sqrt(7.) ;
```

2.645751311

2.645751311

2) a) Le terme w_n est défini si, et seulement si, $z_0 \neq -\alpha$.
Si $z_0 = -\alpha$ ou $z_0 = \alpha$, la suite (z_n) est constante.
Supposons z_0 différent de α et $-\alpha$ et on a $w_{n+1} = (w_n)^2$ puis $w_n = (w_0)^{2^n}$.
Si $|w_0| < 1$, la suite (w_n) converge vers 0, donc la suite (z_n) converge vers α. Il suffit pour cela de choisir z_0 tel que :

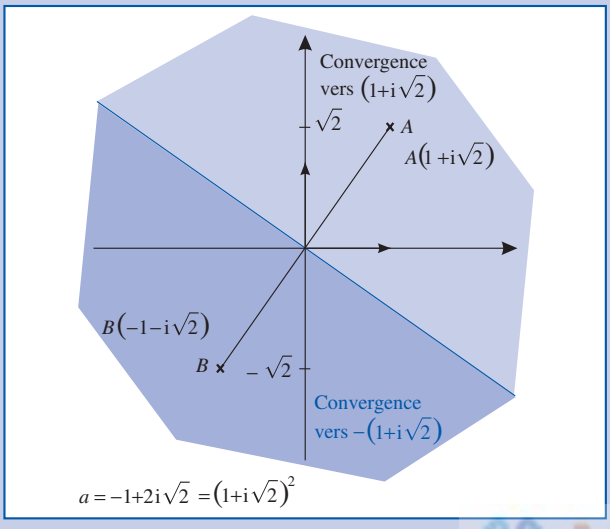
$$|z_0 - \alpha| < |z_0 + \alpha|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si $|w_0| > 1$, la suite $(|w_n|)$ converge vers $+\infty$, donc la suite (z_n) converge vers $-\alpha$. Il suffit pour cela de choisir z_0 tel que :

$$|z_0 + \alpha| < |z_0 - \alpha|.$$

La suite (z_n) converge vers α si et seulement si le point d 'affixe z_0 appartient au demi-plan ouvert limité par la médiatrice de $A(\alpha)$ et $B(-\alpha)$ contenant A. Elle converge vers $-z_0$ si et seulement si le point d 'affixe z_0 appartient à l'autre demi-plan ouvert (*doc.* 3).



Doc. 3.

b) L'équation $z_{n+1} = 0$ nous donne : $z_n = \pm i\alpha$.
Plus généralement, l'équation $z_{n+1} = iy\alpha$ $(y \in \mathbb{R})$ admet deux solutions éléments de $i\alpha\mathbb{R}$.
Les points images des complexes z_0 tels que la suite (z_n) s'annule appartiennent à la médiatrice de $[A, B]$.
Considérons un complexe $z_0 = iy\alpha$ $(y \in \mathbb{R}^*)$. Il existe θ dans $]-\pi, \pi[$ tel que : $\tan\dfrac{\theta}{2} = y$. Alors $w_0 = e^{i(\pi-\theta)}$ et, pour tout n, on a : $w_n = (w_0)^{2^n}$.
z_n est nul si et seulement si $w_n = -1$.
La suite z s'annule donc si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que : $2^p\theta = \pi$ (mod 2π). Dans ce cas, notons p le plus petit entier tel que : $2^p\theta = \pi$ (mod 2π). On a :

$$2^p\theta = \pi + 2n\pi \quad \text{et} \quad z_0 = i\alpha\tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^{p+1}}\right).$$

L'ensemble des points de la médiatrice de $[A, B]$ dont les affixes conduisent à une suite stationnaire nulle est l'ensemble des points de cette droite dont les affixes s'écrivent sous la forme $i\alpha\tan\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2^{p+1}}\right)$ avec p dans $\mathbb{N}^*$ et n dans $\mathbb{Z}$.
c) Si le point d'affixe z_0 est A ou B, la suite est constante.
S'il n'appartient pas à la médiatrice de $[A, B]$, la suite converge.
S'il appartient à la médiatrice de $[A, B]$ et si

$$z_0 = i\alpha\tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^{p+1}}\right),$$

la suite est stationnaire nulle, donc converge.

Sinon, la suite (z_n) ne s'annule pas. De plus, en posant alors $z_0 = ik_0\alpha$, vous montrerez par récurrence que, pour tout n, on a : $z_n = ik_n\alpha$, avec $k_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(k_n - \dfrac{1}{k_n}\right)$. La suite (k_n) est alors bien définie car k_n ne s'annule pas. Mais elle diverge (voir question 1)). La suite (z_n) diverge.

d) La limite de la suite (z_n) est alors le complexe :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

3) a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Les matrices X_n sont diagonales.
Posons :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifient : $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{b_n}\right).$$

D'après la première question, nous savons que, si $a > 0$ et $b > 0$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. La suite (X_n) converge alors vers la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}$. Si a ou b est nul, ce résultat est encore exact.
Mais si a ou b est strictement négatif, la suite (X_n) diverge.

b) La matrice A est supposée semblable à une matrice diagonale D. On montre alors que, si P est une matrice régulière telle que : $A = P^{-1}DP$, pour tout n, on a : $X_n = P^{-1}D_nP.D_n$ désigne la matrice obtenue avec le même algorithme en substituant D à A. La convergence de la suite (X_n) équivaut alors à celle de la suite (D_n).

Chapitre 2

TD 1

1) Par définition de f, on a, pour tous x, y, z de E :

$$\begin{aligned} &f(x+y,z) + f(x-y,z) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y\|^2) = 2f(x,z). \end{aligned}$$

2) Lorsque $x = y$, on obtient :

$$f(2x,z) + f(0_E,z) = 2f(x,z).$$

Or : $f(0_E,z) = 0$, d'où le résultat.
On peut écrire :

$$\begin{aligned} &f(x,z) + f(y,z) \\ &= f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = f\left(2\frac{x+y}{2}, z\right) = f(x+y,z). \end{aligned}$$

3) $\Phi(\alpha) = f(\alpha x, z) = \dfrac{\|\alpha x + z\| - \|\alpha x - z\|}{4}$. Les applications $\alpha \longmapsto \alpha x + z$ et $\alpha \longmapsto \alpha x - z$ sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans E. L'application $\|\|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc Φ est continue sur $\mathbb{R}$. On montre ensuite par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (x,z) \in E^2 \quad f(nx,z) = nf(x,z).$$

Puis, $f(x-x,z) = 0 = f(x,z) + f(-x,z)$. D'où :

$$f(-x,z) = -f(x,z).$$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall (x,z) \in E^2 \quad f(nx,z) = nf(x,z)$.
Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un rationnel, on a :

$$qf\left(\frac{p}{q}x, z\right) = f(px,z) = pf(x,z).$$

Donc : $f(rx,z) = rf(x,z)$.
Fixons x et z dans E. Les applications Φ et $\alpha \longmapsto \alpha f(x,z)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$. Elles sont égales.

4) Immédiat.

5) Fixons x et y deux vecteurs de E.
Il existe un plan vectoriel P contenant x et y et l'hypothèse nous permet d'affirmer l'existence d'un produit scalaire f_P sur le plan P tel que : $\forall z \in P \quad \|z\|^2 = f_P(z,z)$.
Les vecteurs x, y, $x+y$ et $x-y$ sont dans P, donc :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

La norme $\|\ \|$ vérifie donc l'égalité du parallélogramme. D'après ce qui précède, elle est la norme associée au produit scalaire de E défini par : $f(x,y) = \dfrac{\|x+y\| - \|x-y\|}{4}$.

TD 2

1) • Soit k un réel. L'application constante $(x \longmapsto k)$ est solution si et seulement si $2k = ak^2$.
On trouve $k = 0$ et, lorsque $a \neq 0, k = \dfrac{2}{a}$.
• Si $a = 0$, on prend $y = 0$ dans $(*)$. La fonction nulle est la seule solution de $(*)$.
• Si $a \neq 0$, le problème a une solution constante non nulle. Dans la suite, on suppose $a \neq 0$ et on désigne par f une solution non nulle de $(*)$.
• Soient x un réel tel que $f(x) \neq 0$ et $y = 0$. D'après $(*)$, $f(0) = \dfrac{2}{a}$.

2) Il suffit de prendre $x = u+v$ et $y = u-v$ pour obtenir :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(2u) + f(2v) = af(u+v)f(u-v) \quad (**)$$

Dans $(**)$, prenons pour u un point de continuité de f et faisons tendre v vers 0.
$\lim\limits_{v\to 0} f(2v) = af^2(u) - f(2u) = f(0)$. On en déduit la continuité de f en 0.

3) Fixons x dans $\mathbb{R}$. On sait que : $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = f(0) = \dfrac{2}{a}$.
Donc : $\lim\limits_{y\to 0}[f(x+y) + f(x-y)] = 2f(x)$.
En utilisant $(**)$ on trouve :

$$\lim_{y\to 0}[f(x+y)f(x-y)] = \frac{1}{a}(f(2x) + f(0)) = f^2(x).$$

Donc : $\lim\limits_{y\to 0}[(f(x+y) + f(x-y))^2 - 4f(x+y)f(x-y)] = 0$.
Ainsi :

$$\lim_{y\to 0}[f(x+y) + f(x-y)] = 2f(x)$$

et

$$\lim_{y\to 0}[f(x+y) - f(x-y)] = 0.$$

On en déduit : $\lim\limits_{y\to 0} f(x+y) = f(x)$. C'est la continuité de f en x.

4) La continuité de f permet de définir la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application f est continue sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas la fonction nulle, donc sa primitive F non plus.
Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = \displaystyle\int_0^b f(y)\,\mathrm{d}y \neq 0$. Intégrons la relation $(*)$ entre 0 et b.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\int_0^b f(x+y)\,\mathrm{d}y + \int_0^b f(x-y)\,\mathrm{d}y = af(x)\int_0^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

En posant $u = x+y$ dans la première intégrale et $v = x-y$ dans la deuxième, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x+b) - F(x-b) = af(x)F(b) \qquad (***)$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $aF(b) \neq 0$. On déduit de $(***)$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^2$. Par récurrence, on prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5) Considérons l'égalité $(*)$ pour y fixé :

$$f(x+y) + f(x-y) = af(x)f(y).$$

Dérivons deux fois (la variable est x) :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = af''(x)f(y).$$

Procédons de même en fixant x et en dérivant par rapport à la variable y :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = af(x)f''(y).$$

Donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

6) Soit y un réel tel que $f(y) \neq 0$. Notons $k = \dfrac{f''(y)}{f(y)}$. La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$f'' = kf \qquad (****)$$

• Si $k = 0$, alors f est une fonction polynôme de degré $\leqslant 1$ et la relation $(*)$ vous permettra de prouver que f est constante. On est ramené au 1).
• Si $k = \alpha^2 > 0$, alors f est de la forme :

$$f(x) = c_1 \operatorname{ch}(\alpha x) + c_2 \operatorname{sh}(\alpha x).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La valeur en 0 et la relation $(*)$ permettent de prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2}{a}\operatorname{ch}(\alpha x).$$

• Si $k = -\alpha^2 < 0$, alors f est de la forme :

$$f(x) = d_1 \cos(\alpha x) + d_2 \sin(\alpha x).$$

La valeur en 0 et la relation $(*)$ permettent de prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2}{a}\cos(\alpha x).$$

Réciproquement, vous vérifierez que, pour tout réel α, les fonctions $x \longmapsto \frac{2}{a}\operatorname{ch}(\alpha x)$ et $x \longmapsto \frac{2}{a}\cos(\alpha x)$ sont solutions du problème.

Chapitre 3

TD 1

1) Pour f dans E_α, l'ensemble :

$$\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}; (x,y) \in I^2, x \neq y\right\}$$

est non vide, majoré. $K_\alpha(f)$ est sa borne supérieure. Lorsque $\alpha > 1$, toute fonction constante appartient à E_α.
Réciproquement, soient f dans E_α et x, y dans $[a,b], x \neq y$. L'inégalité $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant K_\alpha(f)|x-y|^{\alpha-1}$ entraîne la dérivabilité de f en x et $f'(x) = 0$. La fonction f est donc constante.

2) a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et x, y deux points distincts de I. L'inégalité des accroissements finis entre x et y s'écrit :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{t\in[x,y]} |f'(t)||x-y| \leqslant \|f'\|_\infty |x-y|$$

car f' continue est bornée sur le segment $[a,b]$.
Donc :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leqslant \|f'\|_\infty |x-y|^{1-\alpha}|x-y|^\alpha \\ &\leqslant \|f'\|_\infty (b-a)^{1-\alpha}|x-y|^\alpha \leqslant K|x-y|^\alpha.\end{aligned}$$

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ est dans E_α.
La continuité d'une fonction de E_α est immédiate car $\alpha > 0$.

b) Soit c un point de I et f la fonction définie sur I par : $f(x) = |x-c|$. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, mais, pour tous x et y distincts de $[a,b]$ et α dans $]0,1[$, on a :

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant |x-y|^{1-\alpha} \leqslant (b-a)^{1-\alpha}.$$

3) Soit f une fonction de E_1et x, y deux points distincts de $[a,b]$. On a :

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \leqslant K_1|x-y|^{1-\beta} \leqslant K_1|a-b|^{1-\beta}.$$

Donc f appartient à E_β. D'où : $E_1 \subset E_\beta$.
De même : $E_\beta \subset E_\alpha$.

4) On vérifie facilement que, pour tout f, g de E_α et tout λ de $\mathbb{K}$, on a :

$$\|f\|_\alpha \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow f = 0)$$
$$\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda|\|f\|_\alpha$$
$$\|f+g\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha.$$

5) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(E_\alpha, \|\|_\alpha)$. La suite (f_n) est donc aussi une suite de Cauchy pour la norme $\|\|_\infty$. On a donc, pour tout x de $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall p \geqslant 0$$
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(f_n(x))$ est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, elle converge. Notons $f(x)$ sa limite.
Montrons que la fonction f appartient à E_α.
Puisque la suite (f_n) est de Cauchy, elle est bornée dans $(E_\alpha, \|\|_\alpha)$. Il existe donc un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\|f_n\|_\alpha \leqslant M$. On en déduit, pour tous x et y de $[a,b]$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K_\alpha(f_n)|x-y|^\alpha \leqslant M|x-y|^\alpha.$$

Puis, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha.$$

La fonction f appartient à E_α.
Il reste à montrer que la suite (f_n) converge vers f dans $(E_\alpha, \|\|_\alpha)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} K_\alpha(f_n - f) = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in I$$
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons alors un $n \geqslant N$ et faisons tendre p vers $+\infty$.
La continuité de la fonction $y \longmapsto |y|$ sur $\mathbb{C}$ permet d'écrire :

$$\forall x \in I \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Puis $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. De même, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall (x,y) \in I^2$$
$$|(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(y) - f_n(y))| \leqslant \varepsilon|x-y|^\alpha.$$

Faisons tendre p vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\forall n \geqslant N \forall (x,y) \in I^2$$
$$|(f(x) - f_n(x)) - (f(y) - f_n(y))| \leqslant \varepsilon|x-y|^\alpha.$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} K_\alpha(f_n - f) = 0.$

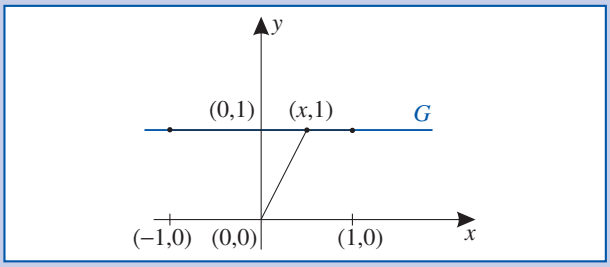
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

TD 2

1) a) L'application $(x, y) \longmapsto y$ est une forme linéaire continue sur E. $G = f^{-1}(\{1\})$ est un fermé de E et une droite affine du plan.

b) $\forall (x, y) \in G \quad y = 1$, donc $d(0_E, G) \geqslant 1$. Pour $X = (0, 1) \in G$, et $\|0_E - X\| = 1$

c) $\forall x \in [-1, 1] \quad (x, 1) \in G$ et $1 = \|(x, 1)\|$.



2) a) L'application Φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f$$

est une forme linéaire sur E.

G est un hyperplan affine de E car $G = \Phi^{-1}(\{1\})$. C'est un convexe de E.

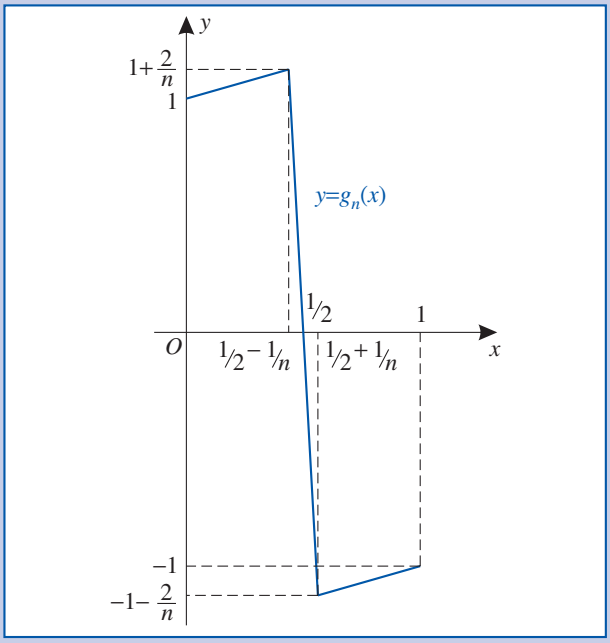
$$\forall f \in E \quad |\Phi(f)| \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \qquad (*)$$

Φ est donc une application linéaire continue de $(E, \|\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \Phi^{-1}(\{1\})$ est un fermé.

b) Des inégalités (*), on déduit :

$$\forall g \in G \quad 1 \leqslant \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad d_\infty(0_E, G) \geqslant 1.$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction g_n continue et affine par morceaux comme sur le schéma.



Un simple calcul d'aires prouve que $g_n \in G$.

De plus $\|g_n\|_\infty = 1 + \dfrac{2}{n}$. Donc $d_\infty(0_E, G) = 1$.

c) Supposons l'existence d'un élément g de G tel que $\|g\|_\infty = 1$. On a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |g| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\int_{\frac{1}{2}}^1 g \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 |g| \leqslant \frac{1}{2}.$$

L'égalité : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} g - \int_{\frac{1}{2}}^1 g = 1$ permet de conclure :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\int_{\frac{1}{2}}^1 g = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - g) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 + g) = 0.$

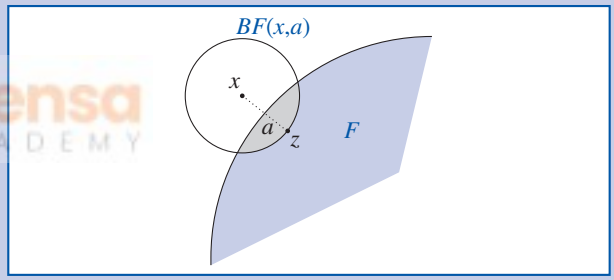
Or les fonctions $(1 - g)$ et $(1 + g)$ sont **continues** et **positives.** On en déduit :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad g(x) = -1.$$

C'est absurde car g est continue.

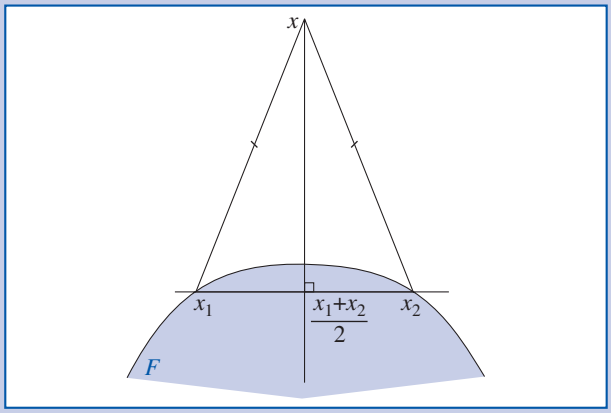
Aucun élément g de G ne vérifie $\|g\|_\infty = 1$ et $\inf\limits_{g \in G} \|g\|_\infty = 1$.

3)



a) Voir l'application 12 du chapitre 3.

b) Supposons F convexe et x un point de E tel qu'il existe x_1 et x_2 vérifiant la condition requise : $\|x - x_1\|_2 = \|x - x_2\|_2$.



Si $x_1 \neq x_2$, alors dans le triangle (x, x_1, x_2) qui est isocèle en x, la hauteur issue de x est strictement plus petite que les côtés (x, x_1) et (x, x_2), donc :

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - x \right\|_2 < \|x_1 - x\|_2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or $\dfrac{x_1+x_2}{2} \in F$ car F est convexe et par définition de x_1,

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}-x\right\|_2 \geqslant \|x_1-x\|_2.$$

Ceci n'est pas possible, donc $x_1 = x_2$.

4) Synthèse

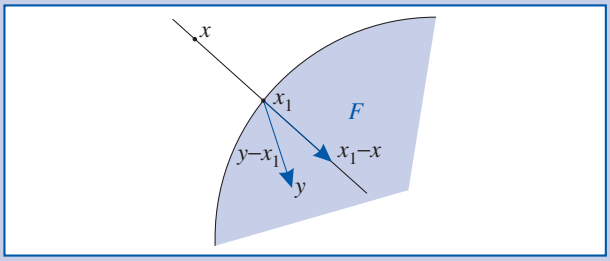
Dans les trois premières parties de ce T.D. nous étudions le même problème : étant donné un convexe fermé non vide A d'un espace vectoriel normé (E, N) et un point X de E, existe-t-il un élément X_1 de A tel que $N(X - X_1) = d(X, A)$ et cet X_1 est il unique ?

Dans la partie 1, un exemple montre qu'il peut y avoir existence sans unicité.

Dans la partie 2, un exemple montre que l'existence n'est pas toujours acquise.

Dans la partie 3 on prouve que, dans un espace préhilbertien de dimension finie, le point X_1 existe toujours et est unique.

5) a)



$\forall t \in [0,1] \ \forall y \in F$

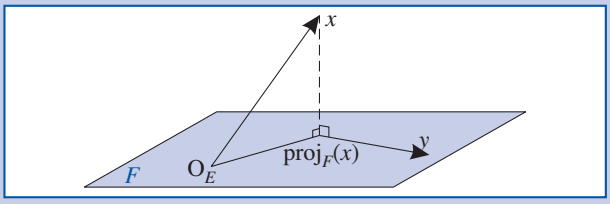
$$\|x_1-x\|_2^2 \leqslant \|((1-t)x_1+ty)-x\|_2^2$$
$$\leqslant \|x_1-x\|_2^2 + t^2\|x_1-y\|_2^2 + 2t\langle x_1-x \mid y-x_1\rangle.$$

Donc :

$$\forall t \in [0,1] \quad 0 \leqslant t^2\|x_1-y\|_2^2 + 2t\langle x_1-x \mid y-x_1\rangle.$$

Ce qui impose : $\langle x_1-x \mid y-x_1\rangle \geqslant 0$.

b) Un sous-espace vectoriel est convexe. De dimension finie, il est fermé.



Utilisons le résultat précédent. Nous avons :

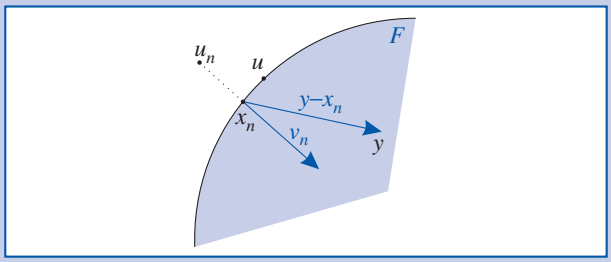
$$\forall y \in F \quad \langle \text{proj}_F(x)-x \mid y\rangle \geqslant \langle \text{proj}_F(x)-x \mid \text{proj}_F(x)\rangle.$$

Mais ceci s'applique aussi avec le vecteur $-y$ de F :
On en déduit :

$$\langle \text{proj}_F(x)-x \mid \text{proj}_F(x)\rangle = 0$$

et pour tout élément y de $F\langle \text{proj}_F(x)-x \mid y\rangle = 0$.
Ceci prouve que proj_F est la projection orthogonale sur F.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $B\left(u, \dfrac{1}{n}\right) \cap \complement_E F \neq \varnothing$. Il suffit donc de considérer u_n dans cette intersection.



La suite de terme général v_n existe car $(\|x_n-u_n\|_2 \neq 0)$.

Alors, d'après la question **3)** : $\forall y \in F \quad \langle y-x_n|v_n\rangle \geqslant 0$.

La suite (v_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}^n$, on peut en extraire une suite convergente,$(v_{\varphi(n)})$, de limite v. La suite (v_n) est une suite de vecteurs unitaires, donc v est unitaire.

Sachant que $x_n = \text{proj}_F(u_n)$ et que $u \in F$, on a :

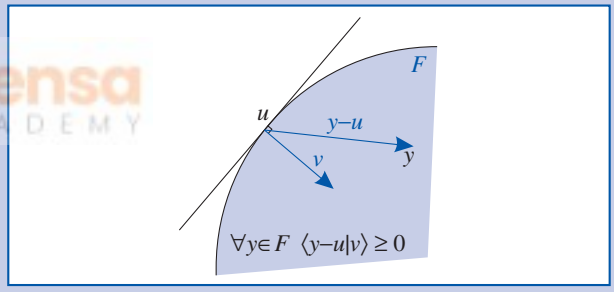
$$\|x_n-u_n\|_2 \leqslant \|u_n-u\|_2 \quad \text{pour tout } n.$$

Donc :

$$\|x_{\varphi(n)}-u\|_2 \leqslant \|x_{\varphi(n)}-u_{\varphi(n)}\|_2 + \|u_{\varphi(n)}-u\|_2 \leqslant 2\|u_{\varphi(n)}-u\|_2.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = u$. La continuité du produit scalaire permet de conclure :

$$\forall y \in F \quad \langle y-u \mid v\rangle \geqslant 0.$$



Chapitre 5

1) Nous avons vu en algèbre que :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq j}} \left(\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right).$$

A) 1) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et s'annule en $n+2$ points distincts de $[a,b]$, x et les $n+1$ points x_j. Appliquons le théorème de Rolle à φ. Sa dérivée φ' s'annule en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Une récurrence simple permet alors d'établir que, pour tout k de $[\![0, n+1]\!]$, la dérivée k-ième de φ, $\varphi^{(k)}$, s'annule en $n+2-k$ points distincts de $[a,b]$. Il existe donc v dans $[a,b]$ tel que $\varphi^{(n+1)}(v) = 0$. Or :

$$\varphi^{(n+1)}(v) = f^{(n+1)}(v) - P_n^{(n+1)}(v) - \frac{f(x)-P_n(x)}{q_n(x)}\, q_n^{(n+1)}(v).$$

De plus, le polynôme $P_n^{(n+1)}$ est nul car P_n est un polynôme de degré n, et $q_n^{(n+1)} = (n+1)!$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous obtenons :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}\, q_n(x).$$

2) D'après la question précédente, nous pouvons écrire, pour tout x de $[a, b]$:

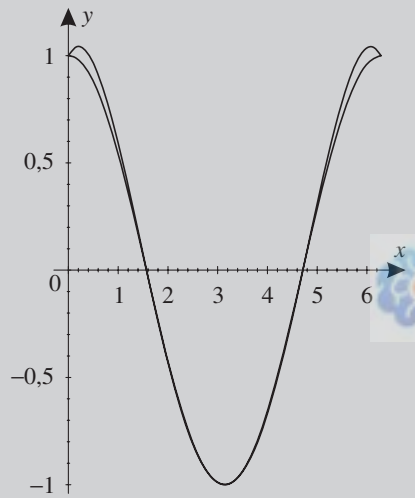
$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\,|q_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}.$$

Nous remarquons que $\dfrac{M}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}$ ne dépend pas de x et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1} = 0.$$

La suite de fonctions (P_n) approche donc uniformément f sur $[a, b]$. La fonction cosinus fournit un exemple. Prenons $[a, b] = [0, 2\pi]$.

Avec MAPLE :




```
>restart:with(plots):
>Lagrange:=proc(f,a,b,N) local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..N)];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot(f,P,x=a..b); end;
```

Lagrange := proc(f, a, b, N)
local *absc*, k, P;
absc := $[seq(a + k * (b - a)/(N + 1), k = 0..(N + 1))]$;
P := interp(*absc*, [seq(subs($x = k$, f), k = *absc*)], x);
plot($\{f, P\}$, $x = a..b$);
end

```
>Lagrange(cos(x),0,2*Pi,3);
```

B) 1) Effectuons une récurrence sur q.

Pour $q = 1$, on a $p = 0$ et la propriété est vérifiée.

Supposons que, pour un certain $q \geqslant 1$ fixé, la relation (1) soit vérifiée pour tout p de $[\![0, q-1]\!]$.

Établissons cette propriété au rang $q+1$ fixé. Dans ce but, nous allons faire une récurrence sur p.

Au rang $q+1$, la relation (1) est vérifiée pour $p = 0$.

Supposons que, pour un certain $p-1$ de $[\![0, q]\!]$, on ait :

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \binom{q+1}{k} \frac{q-2k}{k+1} = 1+(-1)^{p-1}\binom{q}{p-1}\frac{q-2p+1}{p}.$$

Vous en déduirez la relation au rang p.

2) Notons, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, L_j le polynôme défini par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq j}} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}.$$

Alors :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} |x_j|\, L_j(x).$$

De plus, pour tout j de $[\![0, m]\!]$, $|x_j| = 1 - \dfrac{2j}{n+1}$ et, pour tout j de $[\![m+1, n]\!]$: $|x_j| = \dfrac{2j}{n+1} - 1$. Nous en déduisons :

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^{m}\left(1-\frac{2j}{n+1}\right)L_j(1) - \sum_{j=m+1}^{n}\left(1-\frac{2j}{n+1}\right)L_j(1).$$

$$L_j(1) = (-1)^{n-j}\binom{n+1}{j}.$$

Donc :

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\frac{n+1-2j}{n+1-j} - \sum_{j=m+1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\frac{n+1-2j}{n+1-j}.$$

Posons $k = n - j$. En distinguant le cas n pair et le cas n impair, vérifiez que :

$$P_n(1) = A(n) - B(n).$$

3) $A(n) + B(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1} + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{n-2n-1}{n+1}$$

Or, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}$ peut être calculée en utilisant la question **1)**.

$$A(n) + B(n) = 1.$$

Le système $\begin{cases} A(n) - B(n) = P_n(1) \\ A(n) + B(n) = 1 \end{cases}$ donne :

$$P_n(1) = 2A(n) - 1.$$

En utilisant la formule (1), on obtient :

$$P_n(1) = 1 + (-1)^m 2\binom{n-1}{m}\frac{n-2m-2}{m+1}.$$

4) Si n est pair, $n = 2k$, $m = k$ et

$$P_n(1) = 1 + (-1)^k 2\binom{2k-1}{k}\frac{-2}{k+1}$$

$$= 1 + 2(-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5) Si n est impair, $n = 2k+1$, $m = k$ et :

$$P_n(1) = 1 + 2(-1)^k \binom{2k}{k} \frac{-1}{k+1} = 1 + 2(-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{k!\,(k+1)!}.$$

Dans tous les cas :

$$|f(1) - P_n(1)| = 2\,\frac{(2k)!}{k!\,(k+1)!}.$$

Utilisons la formule de Stirling.

$$|f(1) - P_n(1)| = 2\,\frac{(2k)!}{k!\,(k+1)!} \sim \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}.$$

6) Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} = +\infty$, la suite $(P_n(1))$ diverge et la suite (P_n) n'est pas simplement convergente sur $[-1, 1]$.

Avec MAPLE :

```
> restart:with(plots):Lagrange:=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P;
absc:=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N))];
P:=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x);
plot(f,P,x=a..b) ;
end;
>
> Lagrange(abs(x),-1,1,5);
```

Lagrange := **proc**(f, a, b, N)

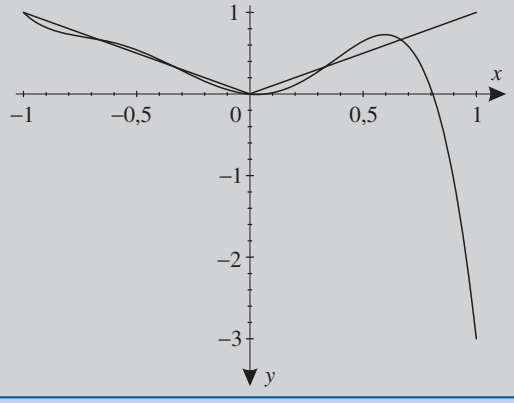
local *absc*, k, P;

absc := [seq($a + k \times (b-a)/(N+1)$, $k = 0..N$)] ;

P := interp(*absc*, [seq(subs($x = k$, f), k = *absc*)], x) ;

plot({f, P}, $x = a..b$)

end



Chapitre 6

I.1) $((.,.))$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
Pour tout f de E, $((f,f)) \geqslant 0$.
Supposons que $((f,f)) = 0$. L'application $x \mapsto f^2(x)\,w(x)$ est continue et positive sur $[-1,1]$ et $w > 0$; donc $f = 0$.
Ceci prouve que $((.,.))$ est un produit scalaire sur E.

I.2) Supposons l'existence de deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant **(a)** et **(b)**.
D'après **(a)** $p_0 = q_0 = 1$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'orthogonal de P_{n-1} dans P_n est une droite, car $\dim(P_n) - \dim(P_{n-1}) = 1$. D'après **(b)**, les polynômes p_n et q_n sont dans cet orthogonal, donc ils sont liés. On déduit alors de **(a)** que $p_n = q_n$. Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique.

I.3) On a déjà montré que $p_0 = 1$.
Si p_1 existe, d'après **(a)**, $p_1(x) = x + b$ et, d'après **(b)**, $0 = ((p_0, p_1))$. Donc :

$$0 = \int_{-1}^{1} (x+b)\,w(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} x\,w(x)\,\mathrm{d}\,x + b\int_{-1}^{1} w(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= ((p_0, x)) + b\,((p_0, p_0))$$

On en déduit $b = -\dfrac{((p_0,x))}{((p_0,p_0))}$.

I.4) Supposons connus, pour $m \leqslant n-1$, les polynômes p_m et posons :

$$p = (x - \alpha_n)\,p_{n-1} - \beta_n\,p_{n-2}$$

Le polynôme p_m est unitaire de degré m, donc p est un polynôme unitaire de degré n.
Il reste à prouver que, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $((p, p_k)) = 0$.
Or $((p,p_k)) = ((xp_{n-1}, p_k)) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_k)) - \beta_n\,((p_{n-2}, p_k))$.
Vous vérifierez que $((xp_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-1}, xp_k))$.
Pour $k \leqslant n-3$, $((x\,p_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-1}, x\,p_k)) = 0$ car $\deg(x\,p_k) < n-1$ et $((p_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-2}, p_k)) = 0$.
Donc $((p, p_k)) = 0$.
Pour $k = n-2$:

$$((p, p_{n-2})) = ((x\,p_{n-1}, p_{n-2})) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_{n-2}))$$
$$- \beta_n\,((p_{n-2}, p_{n-2}))$$
$$= ((p_{n-1}, x\,p_{n-2})) - \frac{((p_{n-1}, p_{n-1}))}{((p_{n-2}, p_{n-2}))}((p_{n-2}, p_{n-2}))$$

Or, $x\,p_{n-2}$ est un polynôme unitaire de degré $n-1$. Donc

$$x\,p_{n-2} = p_{n-1} + q_{n-2}, \quad \text{avec} \quad \deg(q_{n-2}) < n-1$$

Ainsi : $((p_{n-1}, x\,p_{n-2})) = ((p_{n-1}, p_{n-1})) + ((p_{n-1}, q_{n-2}))$
$$= ((p_{n-1}, p_{n-1})).$$
Donc $((p, p_{n-2})) = 0$.
Pour $k = n-1$,

$$((p, p_{n-1})) = ((x\,p_{n-1}, p_{n-1})) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_{n-1}))$$
$$- \beta_n\,((p_{n-2}, p_{n-1}))$$
$$= ((xp_{n-1}, p_{n-1})) - \frac{((x\,p_{n-1}, p_{n-1}))}{((p_{n-1}, p_{n-1}))}((p_{n-1}, p_{n-1}))$$
$$= 0$$

Donc $((p, p_{n-1})) = 0$.
On a prouvé que p vérifie **(a)** et **(b)**. D'où $p = p_n$.
On connaît p_0 et p_1, la formule **(2)** permet de construire la suite (p_n) par récurrence.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

I.5) Quelques calculs d'intégrales vous permettront de dresser le tableau suivant :

$p_0(x) = 1$	$((p_0, p_0)) = 2$		$((x\ p_0, p_0)) = 0$
$p_1(x) = x$	$((p_1, p_1)) = \frac{2}{3}$	$\beta_2 = \frac{1}{3}$	$((x\ p_1, p_1)) = 0$
$p_2(x) = x\ p_1(x) - \frac{1}{3}\ p_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$	$((p_2, p_2)) = \frac{8}{45}$	$\beta_3 = \frac{4}{15}$	$((x\ p_2, p_2)) = 0$
$p_3(x) = x\ p_2(x) - \frac{4}{15} p_1(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$	$((p_3, p_3)) = \frac{8}{175}$	$\beta_4 = \frac{9}{35}$	$((x\ p_3, p_3)) = 0$
$p_4(x) = x\ p_3(x) - \frac{9}{35}\ p_2(x) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35}$			

I.6) Pour tout $n \geqslant 1$, $((p_n, p_0)) = 0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} p_n(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$. La fonction $p_n\, w$ change de signe sur $]-1, 1[$. Or $w > 0$, donc p_n s'annule et change de signe sur $]-1, 1[$.
Vous vérifierez aisément que, si le polynôme p_n s'annule et change de signe en α, c'est que α est un zéro de multiplicité impaire de p_n. D'où le résultat.

I.7) Par construction de π, $m = \deg \pi \leqslant n$.
De plus, le polynôme $p\,\pi$ n'a pas de zéros de multiplicité impaire sur $]-1, 1[$. Il est donc de signe constant sur cet intervalle et :

$$((p_n, \pi)) = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, \pi(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x \neq 0$$

$\deg \pi < n$, entraîne $((p_n, \pi)) = 0$. On a donc $\deg \pi = n$ et p_n admet n zéros distincts dans $]-1, 1[$. Il ne peut pas en avoir d'autres.

II.1) La linéarité de Δ est immédiate à vérifier.
II.2) Supposons la formule **(3)** (formule d'intégration approchée à $k+1$ points) d'ordre m, avec $m \geqslant 2k+2$ et trouvons une contradiction.
Pour tout polynôme p de degré $d \leqslant 2k+2$, l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i) = \int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$$

est vérifiée.
Notons $L = \displaystyle\prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$. On a $\deg L^2 = 2k+2$; donc :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, L^2(x_i) = \int_{-1}^{1} L^2(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$$

Or $L(x_i) = 0$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} L^2(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = 0$, d'où la contradiction.
L'ordre m d'une formule d'intégration approchée à $k+1$ points est nécessairement inférieur ou égal à $2k+1$.

II.3) Par construction, $\deg \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} f(x_i)\, l_i \right) \leqslant k$. De plus :

$$\forall\, j \in \{0, \ldots, k\} \quad l_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\, l_i(x_j) = f(x_j)$$

C'est la définition du polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_k$. Donc :

$$p(f) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\, l_i$$

II.4)
$$\int_{-1}^{1} p(f)(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \int_{-1}^{1} l_i(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i).$$

II.5) On sait que, pour tout polynôme f de P_k, $f = p(f)$. Donc, dans ce cas et d'après la *question* II.4, on a :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i)$$

Ceci prouve que la formule **(3)** est au moins d'ordre k.

II.6) Dans la fin de cette partie, on fixe p dans P_{2k+1}.
Effectuons la division euclidienne de p par l : $p = q\, l + r$.
On sait que $\deg r < \deg l = k+1$, donc $r \in P_k$. De plus $\deg p \leqslant 2k+1$. Ceci entraîne que $q \in P_k$.

II.7)
$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x + \int_{-1}^{1} q(x)\, l(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

Or $\displaystyle\int_{-1}^{1} q(x)\, l(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = ((q, l))$ et, par définition des x_i, l et p_{k+1} sont deux polynômes unitaires de même degré et ayant les mêmes racines. Donc $l = p_{k+1}$ et $((q, p_{k+1})) = 0$, car $q \in P_k$.
On a bien : $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$.

II.8) Puisque r est de degré $\leqslant k$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, r(x_i)$ d'après la *question* II.5.
De plus, pour tout i de $\{0, \ldots, k\}$, $l(x_i) = 0$ et $r(x_i) = p(x_i)$.
Donc :

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i)$$

On a prouvé que, pour tout p de P_{2k+1} :

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i).$$

Pour le choix indiqué des $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ (les racines de p_{k+1}) et des $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ ($\lambda_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} l_i(x)\, w(x)\, \mathrm{d}\, x$), la formule **(3)** est d'ordre $2k+1$.

III.1) Sachant que $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$, on a $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. On en déduit :

$$l_0(x) = \frac{5}{6} \left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\, x \right), \lambda_0 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} \left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\, x \right) \mathrm{d}\, x = \frac{5}{9}$$

$$l_1(x) = -\frac{5}{3} \left(x^2 - \frac{3}{5} \right), \quad \lambda_1 = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3} \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \mathrm{d}\, x = \frac{8}{9}$$

$$l_2(x) = \frac{5}{6} \left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\, x \right), \quad \lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} \left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\, x \right) \mathrm{d}\, x = \frac{5}{9}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La formule théorique **(9)** devient alors :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5\,f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \quad \textbf{(10)}$$

III.2) En remplaçant k par 2 dans **(9)**, on trouve :

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{1}{15750}\|f^{(6)}\|_\infty.$$

III.3) On trouve : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2+x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$. (Poser $u=\sqrt{2+x}$ pour faire le calcul « à la main ».)

III.4) Le calcul de $f^{(6)}$ nous donne : $\|f^{(6)}\|_\infty = \dfrac{945}{64}$. Donc :

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{3}{3\,200} = 9{,}375\,10^{-4}.$$

III.5) Le nombre de chiffres significatifs se trouve grâce à l'erreur relative.

$$\left|\frac{\Delta(f)}{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x}\right| \approx 3{,}5\,10^{-4}.$$

On se contentera de donner le second membre de **(10)** avec 4 chiffres significatifs.

III.6) On trouve :

$$\frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \approx 2{,}797$$

et $\Delta(f) \approx -2{,}8\,10^{-5}$.
L'approximation est meilleure que la majoration théorique **(9)**.

III.7) On a :

$$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] \approx 2{,}976$$

et $\left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}[f(-1)+4\,f(0)+f(1)]\right| \approx 0{,}001$.
La formule de Simpson **(11)** est une formule à trois points d'ordre 3 seulement. En effet :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] \quad \text{pour } f = 1, x, x^2 \text{ et } x^3$$

mais pas pour x^4.
La formule **(10)** est aussi une formule à 3 points, mais elle est d'ordre 5.
On constate, sur l'exemple utilisé, que la formule d'ordre 5 est meilleure que la formule d'ordre 3.
Dans **(10)**, on a optimisé le choix des points d'interpolation et des coefficients. Cette formule est une égalité pour les polynômes de degré $\leqslant 5$. Il est logique de penser que, plus le degré de l'interpolation possible est élevé, meilleure est l'approximation de l'intégrale.

Chapitre 7

TD 1

A. 1) La construction par récurrence de la suite (u_n) est possible car, pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

2) On remarque que, pour tout entier i :

$$\|u_i - u_{i+1}\| = \|f(u_{i-1}) - f(u_i)\| \leqslant k\|u_{i-1} - u_i\|.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \|u_i - u_{i+1}\| \leqslant k^i\|u_0 - u_1\|. \qquad \textbf{(2)}$$

Si n et p sont deux entiers, alors :

$$\begin{aligned}\|u_n - u_{n+p}\| &= \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p}(u_{i-1}-u_i)\right\| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0-u_1\|.\end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

(u_n) est une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|)$.
La suite (u_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge dans $(E, \|\ \|)$. Sa limite est dans F car F est un fermé de $(E, \|\ \|)$.

3) L'application f est continue sur F car lipschitzienne. La suite récurrente (u_n) converge vers l, donc $l = f(l)$. l est un point fixe de f.
Si l et m sont deux points fixes de f, alors :

$$\|l-m\| = \|f(l)-f(m)\| \leqslant k\|l-m\| < \|l-m\|.$$

On en déduit : $l = m$.

4) $\|u_n - u_{n+p}\| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}\|u_0-u_1\|$.
Cette inégalité est valable pour tout n et tout p. Il suffit de fixer n et de faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \|u_n - l\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0-u_1\|. \qquad \textbf{(4)}$$

B. 1) Immédiat, car $f(l) = l$.

2) On a $|f'(l)| = \gamma < 1$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout y de $[l-\alpha, l+\alpha]\cap I$, $|f'(y)| \leqslant \dfrac{\gamma+1}{2}$.
• On peut choisir α pour que $J = [l-\alpha, l+\alpha]\cap I$ soit un fermé de $\mathbb{R}$.
• On note $k = \dfrac{\gamma+1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x de $[l-\alpha, l+\alpha]\cap I$, on a :

$$|f(x)-l| = |f(x)-f(l)| \leqslant k|x-l| \leqslant k\alpha.$$

On en déduit que l'intervalle J est stable par f.
La restriction de f à J est k-lipschitzienne car, sur J, $|f'|$ est bornée par k et $k < 1$.
Donc la restriction de f à J est une application contractante de J et, d'après la partie **A**, l est un point fixe attractif de f.

3) On suppose que $|f'(l)| = \gamma > 1$; on note $r = \dfrac{\gamma+1}{2}$.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, y \in [l-\alpha, l+\alpha]\cap I \quad |f'(y)| \geqslant r.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si la suite récurrente (u_n) converge vers l, alors il existe un entier n_0 tel que :

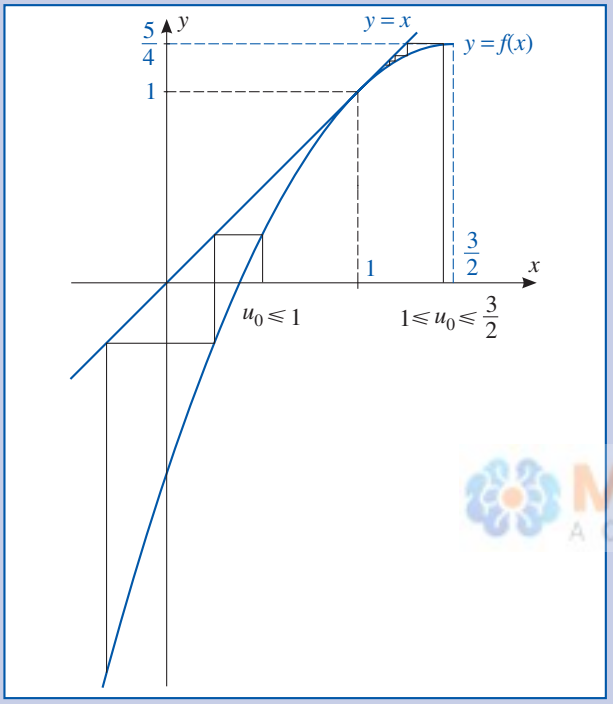
$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \alpha.$$

L'égalité des accroissements finis vous permettra de prouver par récurrence que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad |u_{n_0+p} - l| \geqslant r^p |u_{n_0} - l|.$$

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} |u_{n_0+p} - l| = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} r^p = +\infty$, donc $|u_{n_0} - l| = 0$ et la suite (u_n) est constante à partir de n_0.

4. a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $l = 1$

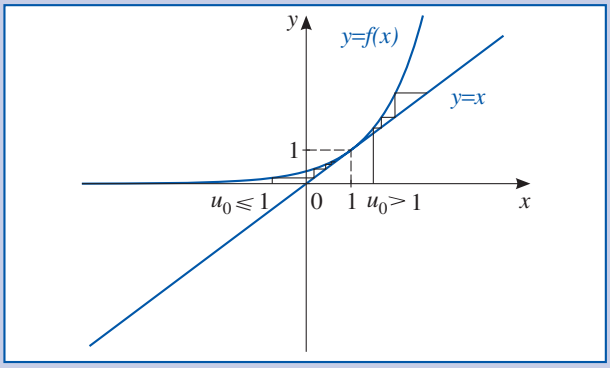


$f\left(\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]\right) \subset \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ et, sur cet intervalle, $f(x) \leqslant x$.

Donc, si $u_0 \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$, la suite récurrente (u_n) est décroissante. Elle converge si $u_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ et diverge si $u_0 \in]-\infty, 1[$.

Le point fixe $l = 1$ n'est ni attractif ni répulsif.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)}$ et $l = 1$



Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x$, donc la suite récurrente (u_n) est toujours croissante. Elle converge si $u_0 \in]-\infty, 1]$ et diverge si $u_0 \in]1, +\infty[$.

Le point fixe $l = 1$ n'est ni attractif ni répulsif.

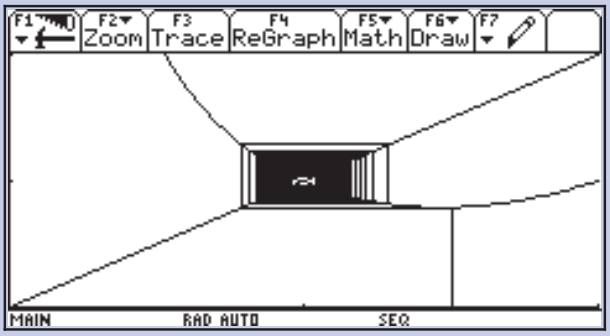
c) $f(x) = \text{Arctan}\,(x)$ et $l = 0$.

Le point fixe $l = 0$ est attractif.

d) $f(x) = x^3 + x$ et $l = 0$.

Le point fixe $l = 0$ est répulsif.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 0{,}5(x-1)^2$ et $l = 1$.



L'étude expérimentale semble indiquer un point fixe attractif.

La fenêtre utilisée est $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$

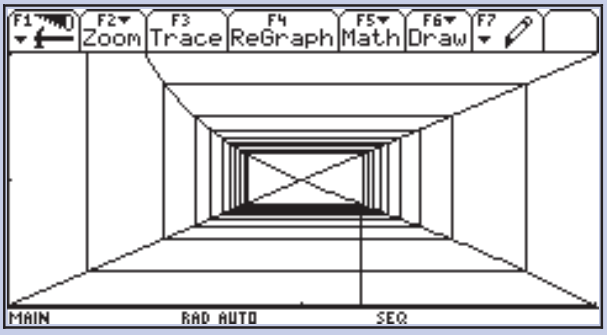
Vous vérifierez que :

$$f(x) =_1 1 - (x-1) + 1{,}5(x-1)^2 - (x-1)^3 + o(x-1)^3$$

$$f \circ f(x) =_1 1 + (x-1) - 2{,}5(x-1)^3 + o(x-1)^3.$$

Vous montrerez que 1 est un point fixe attractif de $f \circ f$, puis de f.

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 0{,}5(x-1)^2$ et $l = 1$.



L'étude expérimentale semble indiquer un point fixe répulsif, ce que vous prouverez.

C.1) • $|f'(l)| = \gamma$ et f' est continue en l, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [l-\delta, l+\delta] \quad \gamma - \varepsilon \leqslant |f'(x)| \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

• La suite récurrente (u_n) converge vers l, donc il existe un entier n tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} \in [l-\delta, l+\delta].$$

• D'après l'égalité des accroissements finis, il existe un élément y de $[l-\delta, l+\delta]$ tel que :

$$|u_{n+p+1} - l| = |f'(y)||u_{n+p} - l|$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Ceci permet de montrer par récurrence :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad (\gamma - \varepsilon)^p |u_n - l| \leqslant |u_{n+p} - l| \leqslant (\gamma + \varepsilon)^p |u_n - l|$$

2.a) Si $M = 0$, alors f est constante sur J et $u_n = l$ pour $l \geqslant 1$.

b) Sachant que $|f'(l)| = 0$, l'inégalité des accroissements finis prouve que, pour tout n :

$$|u_{n+1} - l| \leqslant \frac{M}{2} |u_n - l|^2.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_{n+p} - l| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} |u_n - l|\right)^{2^p}.$$

Or, la suite (u_n) converge vers l. Donc, il existe n tel que :

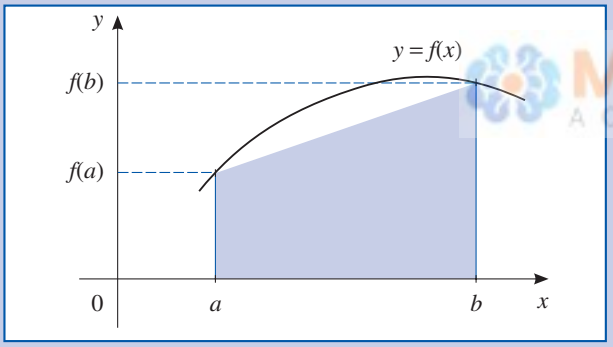
$$\frac{M}{2} |u_n - l| \leqslant \frac{1}{10}.$$

L'inégalité précédente prouve qu'alors :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad |u_{n+p} - l| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{1}{10}\right)^{2^p}.$$

TD 2

A.1.a) $\dfrac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$ est l'aire du trapèze indiqué dans le schéma ci-dessous.



b) $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \left[\frac{(t-a)(t-b)}{2} f'(t) - \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

En développant le crochet, on arrive au résultat souhaité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} = \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$$

c) A vous de majorer. **2)** Soit $n > 0$. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on note $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

On applique ce qui précède à chaque segment $[x_{k-1}, x_k]$.

3) La tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ a pour équation :

$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Donc : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$

$$\leqslant \int_a^b \left| f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right| \mathrm{d}t$$

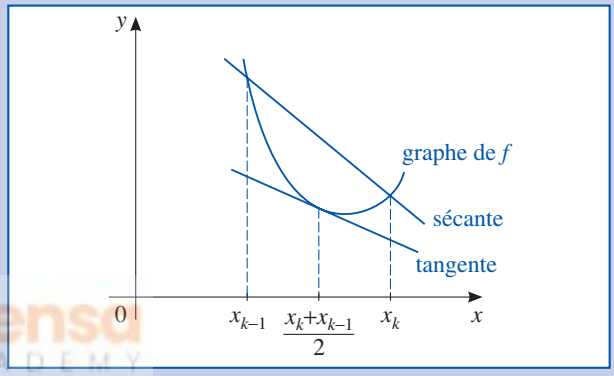
$$\leqslant \frac{M_2}{2} \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{M_2 (b-a)^3}{24}$$

en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

4) On procède comme à la *question* 2.

5) Si f est convexe sur $[a, b]$, alors, entre les points x_{k-1} et x_k, le graphe de f est en dessous de la sécante aux points d'abscisse x_{k-1} et x_k, et au dessus de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$



On en déduit :

$\forall\, k \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{(b-a)}{n} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(x_{k-1})}{2} + \frac{f(x_k)}{2}\right]$$

En sommant ces inégalités, on obtient l'encadrement.

Cet encadrement a une longueur inférieure à $\dfrac{M_2 (b-a)^3}{8n^2}$.

Si f est concave, les inégalités sont inversées.

B.1) On trouve $\Delta(P_k) = 0$ pour k dans $\{0, 1, 2, 3\}$. De plus, Δ est une application linéaire. On en déduit que $\Delta(P) = 0$ pour tout polynôme P de degré $\leqslant 3$.

2.a) La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à f en $\dfrac{a+b}{2}$ nous apprend que :

$$f = P + R_4$$

où P est un polynôme de degré $\leqslant 3$. La *question* **1** permet alors de conclure que :

$$\Delta(f) = \Delta(R_4)$$

b) Si $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, alors :

$$|R_4(x)| \leqslant \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} \frac{(x-t)^3}{3!} M_4\,\mathrm{d}t = \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, alors :

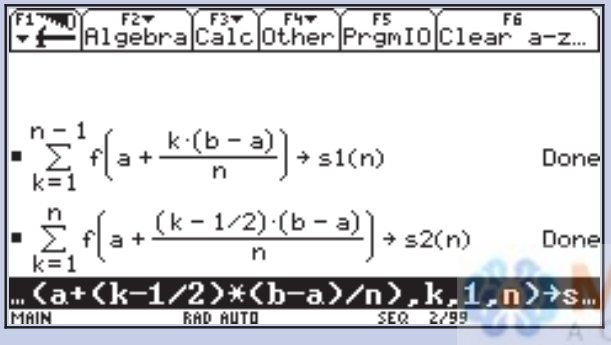
$$|R_4(x)| \leqslant \int_x^{\frac{a+b}{2}} \frac{(t-x)^3}{3!} M_4 \, \mathrm{d}t = \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4$$

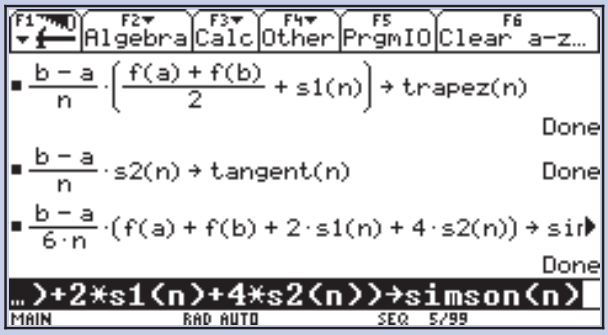
Le calcul de $|\Delta(f)| = |\Delta(R_4)|$ permet de terminer.

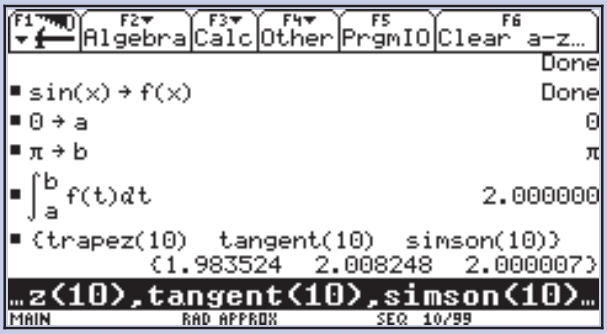
3) On procède comme aux *questions* **2** et **4** de **A**.

Conclusion : Pour chacune des trois méthodes exposées, on peut dire que l'on approche la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ par une moyenne pondérée de valeurs de f $\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(y_i) \text{ avec } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\right)$.

Les trois copies d'écrans ci-dessous vous permettent de comparer les trois méthodes et d'expérimenter l'ensemble avec d'autres fonctions







Remarque : Dans les trois méthodes exposées, le choix des points d'interpolation est simple et imposé. Le TD du *chapitre 6* expose la méthode de Gauss de calcul approché des intégrales. Dans cette méthode, les points d'interpolation sont les zéros de certains polynômes. La précision de la méthode est plus grande, mais elle comporte plus de calculs intermédiaires.

Il faut aussi noter que, plus le nombre de points utilisés pour le calcul approché est grand et plus l'erreur d'arrondi est importante.

5)

Avec MAPLE :

```
> f:=sin(t) ;
```

$$f := \sin(t)$$

```
> J:=student[simpson](f,t=0..Pi,8) ;
```

$$J := \frac{1}{24}\pi\left(4\left(\sum_{i=1}^{4}\sin\left(\frac{1}{8}(2i-1)\pi\right)\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\left(\frac{1}{4}i\,\pi\right)\right)\right)$$

```
> evalf(J) ;
```

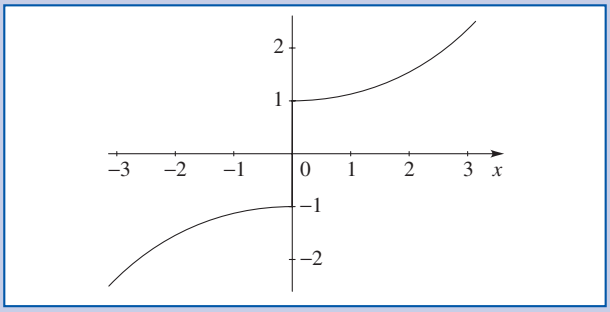
2.000269170

Chapitre 11

Partie I

1. a) Immédiat en utilisant les propriétés de f, 2π-périodique et impaire.

b)



2) La fonction f_t est impaire, les $a_n(f_t)$ sont nuls.

Pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned} b_n(f_t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(tx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{e}^{tx}+\mathrm{e}^{-tx}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(t+\mathrm{i}n)x}+\mathrm{e}^{(-t+\mathrm{i}n)x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2n}{\pi\left(n^2+t^2\right)}\left(1+(-1)^{n+1}\mathrm{ch}(t\pi)\right). \end{aligned}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3. a) La fonction f_t est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de convergence simple de Dirichlet. La série de Fourier de f_t converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction régularisée de f_t, qui est f_t, et :
$\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$f_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\pi\left(n^2+t^2\right)}\left(1+(-1)^{n+1}\operatorname{ch}(t\pi)\right)\sin nx.$$

b) En particulier :

$$\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}(1+\operatorname{ch}(t\pi))\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}.$$

4. a) Nous savons que :

$$1+\operatorname{ch}(t\pi) = 2\operatorname{ch}^2\left(t\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où :

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}.$$

b) Pour $t=0$, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Partie II

1) La fonction f est continue et paire sur $\mathbb{R}$. De plus, sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant 2\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto 2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
De plus, vous montrerez que :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = F(-x) = \overline{F(x)}.$$

On en déduit que :

$$F(x) = \operatorname{Re}(F(x)) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t.$$

2. a)

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{+*}}\cos(xt)\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\infty}\sum_{0}^{\infty}2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Considérons la suite de fonctions $\displaystyle\sum_{0}^{n}2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}$ définies et continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Cette suite de fonctions converge simplement, sur $\mathbb{R}^{+*}$, vers la fonction continue et intégrable :

$$t \mapsto \frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch}t}.$$

• De plus, pour tout réel x fixé et tout $t > 0$:

$$\sum_{p=0}^{n}2\cos(ct)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t} = 2\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\frac{1-(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-2(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$$

$$\left|\sum_{p=0}^{n}2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\right| \leqslant 4\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}} \leqslant 4\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto 2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée s'applique et :

$$\int_0^{\infty}\sum_{0}^{\infty}2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{0}^{\infty}\int_0^{\infty}2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2\operatorname{ch}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Et : $F(x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{ch}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}$.

3) On note F_1 la transformée de Fourier de la fonction :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}.$$

En utilisant, sur un segment $[0, A]$ contenu dans $\mathbb{R}^+$, le changement de variable défini par $u = t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, on obtient :

$$F_1(x) = 2\int_0^{\infty}\cos(xt)\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}F\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Et $F_1 = \sqrt{2\pi}\,f_1$.

Mensa ACADEMY

Chapitre 13

TD 1

1. a)

$$K(t) = \iint_{D(t)}\left(\cos(x^2)\cos(y^2)-\sin(x^2)\sin(y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= C^2(t) - S^2(t)$$

De même : $L(t) = 2C(t)S(t)$.

b) Les fonctions $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$. Les fonctions C et S sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. La continuité des fonctions K et L en découle.

c) Les fonctions K et L tendent respectivement vers $c^2 - s^2$ et $2cs$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2) On fixe $\varepsilon > 0$.
Il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \quad \left|K(t) - (c^2-s^2)\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'où, pour tout $T > A$:

$$K_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\int_0^A K(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^T K(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, le terme $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^A K(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

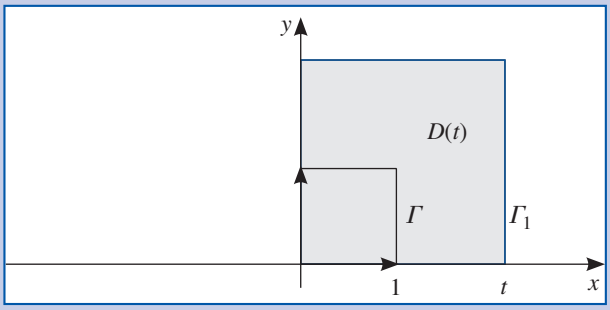
Et :

$$\frac{1}{T}\int_A^T (c^2-s^2-\varepsilon)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{1}{T}\int_A^T K(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{1}{T}\int_A^T (c^2-s^2+\varepsilon)\,\mathrm{d}\,t.$$

On en déduit que $K_1(T)$ tend vers $(c^2 - s^2)$ lorsque T tend vers $+\infty$.

Vous montrerez de même que $L_1(T)$ tend vers $2cs$ lorsque T tend vers $+\infty$.

3. a)



b) $K(t) = \displaystyle\iint_{D(t)} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{tf(\theta)} \cos(r^2) r\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(tf(\theta))^2\,\mathrm{d}\,\theta$$

4. a) $K_1(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T K(t)\,\mathrm{d}\,t$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left(\int_0^{\pi/2} \sin(tf(\theta))^2\,\mathrm{d}\,\theta\right)\mathrm{d}\,t$$

La fonction $(t,\theta) \mapsto \sin(tf(\theta))^2$ est continue sur $[0,T]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc écrire :

$$K_1(T) = \frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T \sin(tf(\theta))^2\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,\theta$$

On pose $u = tf(\theta)$ car $f(\theta)$ ne s'annule pas. On obtient :

$$K_1(T) = \frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{f(\theta)}\left(\int_0^{Tf(\theta)} \sin(u^2)\,\mathrm{d}\,u\right)\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2}\varphi(T)$$

b) La fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) Lorsque θ varie entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $f(\theta)$ varie entre 1 et $\sqrt{2}$.

Pour tout θ fixé entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, le terme $\displaystyle\int_0^{Tf(\theta)} \sin(u^2)\,\mathrm{d}\,u$ admet donc la limite s lorsque T tend vers $+\infty$. On en déduit que $K_1(T)$ tend vers 0 dans ce cas car :

$$|K_1(T)| \leqslant \left|\frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{f(\theta)} S(Tf(\theta))\,\mathrm{d}\,\theta\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\|S\|_\infty\,\mathrm{d}\,\theta$$

d) On utilise la question **2)**. On obtient : $c^2 = s^2$.

5. a) $L_1(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T L(t)\,\mathrm{d}\,t$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left(\iint_{D(t)} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left[\int_0^{\pi/2}(1-\cos(tf(\theta))^2)\,\mathrm{d}\,\theta\right]\mathrm{d}\,t$$

La fonction $(t,\theta) \mapsto 1 - \cos(tf(\theta))^2$ est continue sur $[0,T]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc écrire :

$$L_1(T) = \frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\left(T - \int_0^T \cos(tf(\theta))^2\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,\theta$$

On pose $u = tf(\theta)$ car $f(\theta)$ ne s'annule pas. On obtient :

$$L_1(T) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2T}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{f(\theta)}\left(\int_0^{Tf(\theta)} \cos(u^2)\,\mathrm{d}\,u\right)\mathrm{d}\,\theta$$

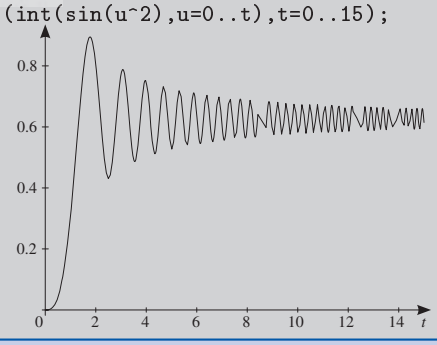
b) La fonction C est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout θ fixé entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, le terme $\displaystyle\int_0^{Tf(\theta)} \cos(u^2)\,\mathrm{d}\,u$ admet la limite c lorsque T tend vers $+\infty$. On en déduit que $L_1(T)$ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ dans ce cas.

D'où : $2cs = \dfrac{\pi}{4}$. Puisque $s > 0$, on obtient : $c = s = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Avec MAPLE :

```
> plot(int(sin(u^2),u=0..t),t=0..15);
```



TD 2 La dernière ligne droite avant la plage !

1) Notons : $P(x,y) = (x\sin x - y\cos x)\dfrac{\varphi(y)}{x^2+y^2}$

et $Q(x,y) = (x\cos x + y\sin x)\dfrac{\varphi(y)}{x^2+y^2}$

La forme différentielle Ω est fermée si, et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Soit : $\forall (x,y) \neq (0,0) \quad [\varphi'(y)+\varphi(y)](x\sin x - y\cos x) = 0$

D'où $\varphi(y) = c\mathrm{e}^{-y}$, c réel quelconque.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec MAPLE :

```
> assume((x,y)<>(0,0)):
  P:=(x,y)->f(y)*(x*sin(x)-y*cos(x))/(x^2+y^2):
  Py:=D[2](P);
  Q:=(x,y)->f(y)*(x*cos(x)+y*sin(x))/(x^2+y^2):
  Qx:=D[1](Q);
  (Py-Qx)(x,y);simplify(");
```

$$Py := (x,\ y) \to \frac{\mathrm{D}(f)(y)\,(x\sin(x) - y\cos(x))}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{f}(y)\cos(x)}{x^2+y^2} - 2\,\frac{\mathrm{f}(y)\,(x\sin(x) - y\cos(x))\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Qx := (x,\ y) \to \frac{\mathrm{f}(y)\,(\cos(x) - x\sin(x) + y\cos(x))}{x^2+y^2} - 2\,\frac{\mathrm{f}(y)\,(x\cos(x) + y\sin(x))\,x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{D}(f)(y)\,(x\ \sin(x) - y\ \cos(x))}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{f}(y)\ \cos(x)}{x^2+y^2} - 2\,\frac{\mathrm{f}(y)\,(x\ \sin(x) - y\ \cos(x))\,y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\mathrm{f}(y)\,(\cos(x) - x\ \sin(x) + y\ \cos(x))}{x^2+y^2} + 2\,\frac{\mathrm{f}(y)\,(x\ \cos(x) + y\ \sin(x))\,x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{x\,\mathrm{D}(f)(y)\sin(x) + x\,\mathrm{f}(y)\sin(x) - \mathrm{D}(f)(y)\,y\cos(x) - \mathrm{f}(y)\,y\cos(x)}{x^2+y^2}$$

2. a) $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\Omega + \int_{\Gamma_3}\Omega = \int_{1/n}^{n}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{-n}^{-1/n}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = 2\int_{1/n}^{n}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$

b) $\displaystyle\int_{\Gamma_2}\Omega = \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta.$

Considérons la suite de fonctions (f_n) continues sur $]0,\pi[$, définies par :

$$f_n(\theta) = \mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)$$

Cette suite de fonctions converge simplement sur $]0,\pi[$ vers la fonction nulle.
Elle est de plus dominée par la fonction intégrable sur $]0,\pi[$:

$$g(\theta) = 1.$$

Le théorème de convergence dominée nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Gamma_2}\Omega = 0$$

c) $\displaystyle\int_{\Gamma_4}\Omega = -\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(1/n)\sin\theta}\cos\left(\frac{\cos\theta}{n}\right)\mathrm{d}\,\theta.$

Considérons la suite de fonctions (g_n) continues sur $]0,\pi[$, définies par :

$$g_n(\theta) = \mathrm{e}^{-(1/n)\sin\theta}\cos\left(\frac{\cos\theta}{n}\right)$$

Cette suite de fonctions converge simplement sur $]0,\pi[$ vers la fonction $\theta \mapsto 1$.
Elle est de plus dominée par la fonction intégrable sur $]0,\pi[$:

$$g(\theta) = 1.$$

Le théorème de convergence dominée nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Gamma_2}\Omega = -\pi$$

d) Le chemin fermé Γ est contenu dans $\{(x,y);\ y > -1$ et $(x,y) \notin \{0\} \times]-1,0]\}$ qui est un ouvert étoilé. Puisque la forme différentielle Ω est fermée, son intégrale sur le chemin Γ est nulle. Nous obtenons, pour tout n :

$$2\int_{1/n}^{n}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-n\sin\theta}\cos(n\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(1/n)\sin\theta}\cos\left(\frac{\cos\theta}{n}\right)\mathrm{d}\,\theta = 0$$

Puis, lorsque n tend vers $+\infty$, $2I = \pi$. Et, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$.

Chapitre 16

Nombres algèbriques

1) Soit a un réel. Si P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i X^i$ nous définissons l'élément $P(a)$ de E en écrivant :

$$P(a) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i.$$

On vérifie que l'application θ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout P de $\mathbb{K}[X]$ par $\theta(P) = P(a)$, est un morphisme d'algèbre :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$$

$$(P+Q)(a) = P(a) + Q(a) \quad \text{et} \quad (PQ)(a) = P(a)Q(a)$$

$$1_{\mathbb{K}[X]}(a) = 1_E$$

$$\forall\ P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{K}(\alpha P)(a) = \alpha P(a).$$

L'image de θ est le $\mathbb{K}-$espace vectoriel engendré par les puissances de a. C'est une sous-algèbre de E, notée $\mathbb{K}[a]$.

Remarque
L'algèbre $(\mathbb{K}[X],+,\times,.)$ *est commutative, donc* $PQ = QP$. *D'où* $(PQ)(a) = P(a)Q(a) = Q(a)P(a)$. $\mathbb{K}[a]$ *est une algèbre commutative.*

Le noyau de θ est l' idéal $\{P \in \mathbb{K}[X];\ P(a) = 0_E\}$ de $\mathbb{K}[X]$, appelé *idéal des polynômes annulateurs* de a. Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal. Si Ker $\theta \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, il existe un unique polynôme unitaire π_a non nul tel que :

$$\mathrm{Ker}\ \theta = (\pi_a).$$

Le polynôme π_a est appelé polynôme minimal de l'élément a.
S'il existe, le polynôme minimal π_a est unique. Il est annulateur de a et tout polynôme annulateur de a est un multiple de π_a.
Soit P un polynôme annulateur de a irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et unitaire.
Alors P est le polynôme minimal de a. En effet, P appartient à Ker θ et P est non nul.
Donc a admet un polynôme minimal π_a.

$$\pi_a \mid P.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or P est irréductible et unitaire.
Donc $\pi_a = P$ ou $\pi_a = 1$.
Si $\pi_a = 1$, alors $a^0 = 0$ et $1_E = 0$, ce qui est impossible.
Réciproquement, montrons que π_a est irréductible.
Supposons π_a non irréductible. Il existe deux polynômes P et Q non constants tels que :

$$\pi_a = PQ.$$

Alors $P(a)Q(a) = \pi_a(a) = 0$.
Or $\mathbb{R}$ est intègre, donc $P(a) = 0$ ou $Q(a) = 0$.
Les polynômes P et Q sont annulateurs de a, ce qui est en contradiction avec la minimalité de π_a.
Montrons que l'élément a possède un polynôme minimal si, et seulement si, $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie.

$$\text{Ker } \theta = \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \Leftrightarrow \theta \quad \text{injective.}$$

Or $\text{Im}\theta = \mathbb{K}[a]$ et θ est un morphisme d'algèbres.
Donc :

$$\text{Ker } \theta = \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \Leftrightarrow \mathbb{K}[a] \quad \text{isomorphe à } \mathbb{K}[X]$$

Si a ne possède pas de polynôme minimal, alors $\mathbb{K}[a]$ est de dimension infinie.
Par contraposition, nous obtenons : si $\dim \mathbb{K}[a]$ est finie, alors l'élément a possède un polynôme minimal.
Réciproquement, supposons que le polynôme minimal de l'élément a soit $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ avec :

$$\alpha_n = 1 \quad \text{où} \quad n > 1.$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0_E \quad \text{et} \quad a^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i.$$

Par conséquent, toute puissance de a est une combinaison linéaire de $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$.
La famille $(a^0, a^1, \ldots, a^{n-1})$ est génératrice de $\mathbb{K}[a]$ et $\dim \mathbb{K}[a] \leqslant n$.
Vérifions que, dans ce cas, la famille $(a^0, a^1, \ldots, a^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.
Montrons qu'elle est libre, en considérant une famille $(\alpha_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i = 0_E.$$

Le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ est donc un polynôme annulateur de A.
Or $\deg P < \deg \pi_a$. Par conséquent le polynôme P est nul.
Donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \alpha_k = 0.$$

La famille $(a^0, a^1, \ldots, a^{n-1})$ est libre et génératrice. C'est une une base.
Si n est la dimension de $\mathbb{K}[a]$, alors $\deg \pi_a = n$ et $(1_E, a, \ldots, a^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.

2) Montrons : **(i)**⇒ **(ii).**
Le réel a appartient à $\mathbb{K}$, donc $X - a$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de a. Le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]}$ n'est pas annulateur de a.
Donc $\pi_a = X - a$ et $\deg(a, \mathbb{K}) = 1$.
Montrons : **(ii)** ⇒ **(iii).**

$$\dim \mathbb{K}[a] = \deg(a, \mathbb{K}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[a].$$

Donc :

$$\mathbb{K}[a] = \mathbb{K}.$$

Montrons : **(iii)** ⇒ **(i).**

$$\mathbb{K}[a] = \mathbb{K} \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{K}[a].$$

Donc $a \in \mathbb{K}$.

3)a) C'est une conséquence de l'étude de **1).**
b) Soit x un réel non nul de $\mathbb{K}[a]$. Soit R l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $x = R(a)$.

$$R \wedge \pi_a = 1.$$

D'après le *théorème de Bézout*, il existe deux polynômes U et V tels que :

$$RU + \pi_a V = 1.$$

Ainsi :

$$R(a)U(a) = 1_E - \pi_a(a)V(a) = 1_E.$$

Donc $R(a)$ est inversible dans $\mathbb{K}[a]$ et son inverse $U(a)$ est dans $\mathbb{K}[a]$.
c) Par conséquent, tout élément non nul de $\mathbb{K}[a]$ est inversible dans $\mathbb{K}[a]$ et l'anneau $(\mathbb{K}[a], +, \times)$ est un corps. Tout anneau qui contient $\mathbb{K}$ et a contient $\mathbb{K}[a]$. Donc $(\mathbb{K}[a], +, \times)$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{K}$ et a.

4) Dans cette question, $n = 2$.$\mathbb{K}[a]$ est de dimension 2 et admet $(1, a)$ comme base.

$$\mathbb{K}[a] = \text{Vect}(1, a).$$

Le polynôme minimal de a est $X^2 - \alpha X - \beta$ où α et β sont dans $\mathbb{K}$.
Le polynôme $X^2 - \alpha X - \beta$ admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$. Donc $\alpha^2 + 4\beta \geqslant 0$. De plus : $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$, car a n'appartient pas à $\mathbb{K}$.
Les racines de $X^2 - \alpha X - \beta$ sont :

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}\right).$$

Le réel a est l'une de ces racines. Donc :

$$\text{Vect}(1, a) = \text{Vect}\left(1, \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}\right).$$

Le réel $\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}$ admet $X^2 - (\alpha^2 + 4\beta)$ comme polynôme minimal car $\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}$ n'appartient pas à $\mathbb{K}$. Par conséquent :

$$\mathbb{K}\left[\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}\right] = \text{Vect}\left(1, \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}\right) = \mathbb{K}[a].$$

Le corps $\mathbb{K}$ est maintenant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$

1)a) $P_2(X) = 4X^2 + 2X - 1.$
$P_3(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1.$
$P_4(X) = 16X^4 + 8X^3 - 12X^2 - 4X + 1.$
b) Par une récurrence immédiate, montrer, pour tout entier naturel n que :

$$\deg P_n = n,$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

le coefficient dominant de P_n est 2^n et que le terme constant est 1 si n est congru à 0 ou à 1 modulo 4 et -1 si n est congru à 2 ou à 3 modulo 4.

c) Vérifier que $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X + 1$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Q_{n+2}(X) = XQ_{n+1}(X) - Q_n(X).$$

Par récurrence, montrer ensuite que les coefficients des Q_n sont toujours des entiers.

d) D'après le **c)** nous pouvons écrire Q_n sous la forme :

$$Q_n(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X^i + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad a_i \in \mathbb{Z}$.

Soit $\dfrac{p}{q}$ une racine de Q_n telle que p soit dans $\mathbb{Z}, q$ dans $\mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

Alors :

$$p^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, p^i q^{n-i} + \varepsilon q^n = 0$$

$$p\left(p^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, p^{i-1} q^{n-i}\right) = -\varepsilon q^n$$

$$\text{et} \quad p^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, p^{i-1} q^{n-i} \in \mathbb{Z}.$$

Donc p divise q^n.

Or $p \wedge q = 1$. Par conséquent $p = \pm 1$.

De plus

$$p^n = q\left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\, p^i q^{n-i-1} - \varepsilon q^{n-1}\right)$$

$$\text{et} \quad \left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\, p^i q^{n-i-1} - \varepsilon q^{n-1}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Or q est non nul.

Donc q divise 1. D'où $q = 1$.

Par conséquent, les seules racines rationnelles possibles de Q_n sont 1 et -1.

$$Q_{n+3}(X) + XQ_n(X) = (X^2 - 1)Q_{n+1}(X).$$

Par conséquent :

$$Q_n(1) = 0 \Leftrightarrow Q_{n+3}(1) = 0.$$

De même avec -1.

e) Q_0 et Q_2 n'ont pas de racine rationnelle.

Donc les polynômes Q_{3m+2} et Q_{3m}, où m est dans $\mathbb{N}$, n'ont pas de racine rationnelle. Q_1 admet -1 comme unique racine rationnelle.

Donc les polynômes Q_{3m+1} admettent -1 comme unique racine rationnelle.

Or, $Q_n(X) = P_n\left(\dfrac{1}{2}X\right)$. Par conséquent, les polynômes P_{3m+1} admettent $-\dfrac{1}{2}$ comme unique racine rationnelle. Les polynômes P_{3m+2} et P_{3m} n'ont pas de racine rationnelle.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n$.

L'équation caractéristique $r^2 - 2r\cos\theta + 1 = 0$ admet deux racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Il existe deux scalaires λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\cos n\theta + \mu \sin n\theta.$$

Les scalaires λ et μ sont déterminés par u_1 et u_0.

On obtient :

$$\lambda = u_0 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{u_1 - u_0\cos\theta}{\sin\theta}.$$

b) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1}\cos\theta - v_n.$$

De plus $v_0 = 1$ et $v_1 = 2\cos\theta + 1$.

D'après **a)** on obtient, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \cos n\theta + \operatorname{cotan}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin n\theta = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta.$$

Cherchons les racines de P_n comprises entre -1 et 1. Il s'agit, alors de déterminer θ dans $]0, \pi[$ tel que $P_n(\cos\theta) = 0$.

$$\sin(n + 1/2)\theta = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!] \quad \theta = \frac{2k\pi}{2n+1}$$

Les racines $x_{k,n} = \cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont distinctes deux à deux.

Comme $\deg P_n = n$, il n'y en a pas d'autre.

c) Le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est racine de P_2 et P_2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Le polynôme minimal de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est le polynôme $\dfrac{1}{2}P_2$. Le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est racine de P_3 et P_3 est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Le polynôme minimal de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est le polynôme $\dfrac{1}{8}P_3$. Le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ est racine de P_4. Cette fois le polynôme P_4 n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$. Le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ est racine de $\dfrac{P_4(X)}{X + \frac{1}{2}}$ qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Le polynôme minimal de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ est donc $X^3 - \dfrac{3}{4}X + \dfrac{1}{8}$.

Les trois réels $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ sont racines d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$. Ils sont algébriques.

Exemples de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$ Les nombres de Liouville

1) Le polynôme S de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ s'écrit :

$$S(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i}{q_i} X^i$$

où les p_i sont dans $\mathbb{Z}$ et les q_i dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel tel que p soit dans $\mathbb{Z}$, et q dans $\mathbb{N}^*$.

Alors :

$$S(r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i}{q_i}\frac{p^i}{q^i}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Calculons :

$$q^n \prod_{i=0}^{n} q_i S(r) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} q_j \right) p_i \, p^i q^{n-i}.$$

Donc $q^n \prod_{i=0}^{n} q_i S(r) \in \mathbb{Z}$.

Comme S n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ alors $q^n \prod_{i=0}^{n} q_i S(r)$ appartient à $\mathbb{Z}^*$ et :

$$\left| q^n \prod_{i=0}^{n} q_i S(r) \right| \geqslant 1.$$

Nous obtenons $C = \prod_{i=0}^{n} q_i$.

2) Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel de $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ où p est dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$. La fonction polynôme associée à S, que nous noterons encore S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. La dérivée S' continue sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ est majorée par un réel M de $\mathbb{R}^{+*}$
L'inégalité des accroissements finis montre que :

$$|S(r) - S(\alpha)| \leqslant M|r - \alpha|.$$

Le réel α est une racine de S et $S(\alpha) = 0$.
Donc $|S(r)| \leqslant M|r - \alpha|$.

$$\forall r \in \mathbb{Q} \cap [\alpha - 1, \alpha + 1] \quad |r - \alpha| \geqslant \frac{|S(r)|}{M} \geqslant \frac{1}{MCq^n}$$

On obtient $K = \dfrac{1}{MC}$.

Soit un réel algébrique α de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Il existe un polynôme S de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $S(\alpha) = 0$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* \backslash \{1\})$.

Pour $\dfrac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q} \cap [\alpha - 1, \alpha + 1]$, nous venons de montrer que :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{K}{q^n}.$$

Pour $\dfrac{p}{q}$ n'appartenant pas à $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, nous avons :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

Prenons $A = \min(1, K)$.
Par conséquent, il existe un réel $A > 0$ et un entier $n \geqslant 2$ tels que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^n}.$$

3) Soit un réel α de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad q \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

Montrons, par l'absurde, que α est transcendant. Si α est algébrique, d'après la question **2),** il existe une constante A de $\mathbb{R}^{+*}$ et un entier naturel n non nul tels que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^n}.$$

Fixons k dans $\mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$ et $2^{n-k} < A$.
Par hypothèse, il existe p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}$ tels que $q \geqslant 2$ et :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

On a donc $\dfrac{A}{q^n} < \dfrac{1}{q^k}$. Ceci contredit $2^{n-k} < A$.

4) Pour tout entier naturel k :

$$10^{-k\,!} \leqslant 10^{-k}.$$

La série géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ converge et par comparaison directe nous obtenons la convergence de la série de terme général $10^{-k\,!}$.
La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite t.
Le développement décimal du réel t n'est pas périodique, donc t n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
Pour tout entier naturel n :

$$\text{soit} \quad q = 10^{n\,!} \quad \text{et} \quad p = t_n q.$$

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| q^n = |t - t_n| 10^{n.n\,!} \leqslant 10^{n.n\,!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{n.n! - k!}$$

Or, pour $k \geqslant n + 1$,

$$k\,! - n.n\,! = n\,! \left(\frac{k!}{n!} - n \right) \geqslant n\,!(k - n) \geqslant k - n.$$

Donc

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| q^n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{n-k} = \frac{1}{9} \leqslant 1.$$

Le réel t est un nombre de Liouville.

Construction à la règle et au compas

Intersection de droites et de cercles appartenant à $\mathcal{D}$ où à $\mathcal{C}$

1) Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ deux points de $\mathcal{K}$.
La droite (AB) a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - a & c - a \\ y - b & d - b \end{vmatrix} = 0.$$

Soit $C(\alpha, \beta)$ un point de $\mathcal{K}$. Le cercle de centre C et de rayon AB admet pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2.$$

Les coefficients de ces équations cartésiennes sont dans $\mathbb{K}$.

2) Les équations des deux droites sécantes de $\mathcal{D}$ sont :

$$ax + by = c \quad \text{et} \quad a'x + b'y = c'$$

et les éléments a, b, c, a', b' et c' sont dans $\mathbb{K}$.
Les solutions du système associé sont données par les formules de Cramer, elles s'obtiennent comme quotients, produits et sommes d'éléments de $\mathbb{K}$. Les coordonnées du point d'intersection sont dans $\mathbb{K}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Les coordonnées d'un point commun à une droite de $\mathcal{D}$ et à un cercle de $\mathcal{C}$ vérifient un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \mu = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, γ, δ et μ sont dans $\mathbb{K}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Par exemple, $b \neq 0$. On exprime y en fonction de x dans la première relation.
En remplaçant dans la deuxième équation x apparaît comme une racine d'un polynôme du second degré à coefficient dans $\mathbb{K}$. L'abscisse x appartient à une extension quadratique de $\mathbb{K}$.
Le réel $y = 1/b(-ax - c)$ appartient à la même extension quadratique de $\mathbb{K}$.

4) Les coordonnées d'un point commun à deux cercles de $\mathcal{C}$ vérifient un système de la forme :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \mu = 0 \end{cases}$$

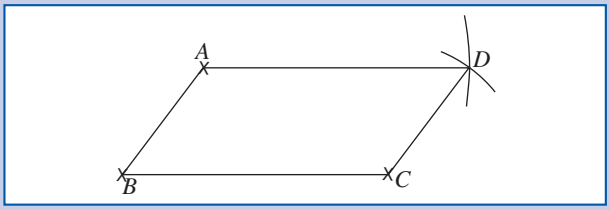
où c, d, e, γ, δ et μ sont dans $\mathbb{K}$.
Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \\ 2(\gamma - c)x + 2(\delta - d)y + \mu - e = 0 \end{cases}.$$

Si les cercles sont sécants, $(\gamma - c, \delta - d) \neq (0, 0)$.
Nous sommes ramenés à la question précédente.

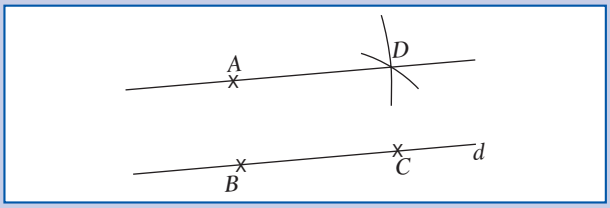
Exemples de points construits et de point et de réels constructibles

1)



Doc. 1.

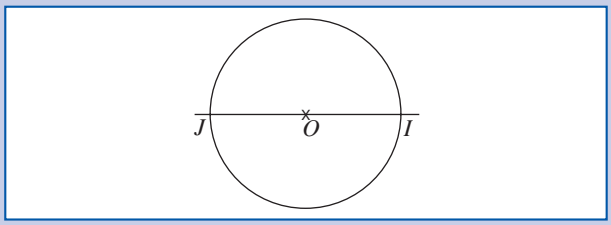
Le point D est l'intersection du cercle de centre A de rayon BC et du cercle de centre C et de rayon AB.



Doc. 2.

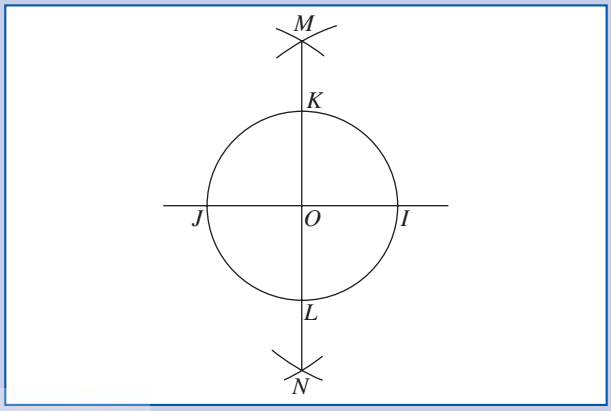
La droite d appartient à $\mathcal{D}$, il existe deux points B et C de d qui appartiennent à $\mathcal{K}$. Ceci nous ramène au cas précédent. On construit le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. La droite cherchée est la droite (AD).

2)



Doc. 3.

Le point J est l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon OI et de la droite (OI).

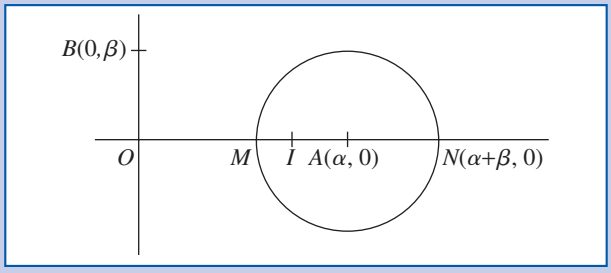


Doc. 4.

On construit d'abord J. Le cercle de centre I de rayon IJ et le cercle de centre J de rayon IJ se coupent en M et N.

La droite (MN) coupe le cercle de centre O de rayon OI en deux points K et L.

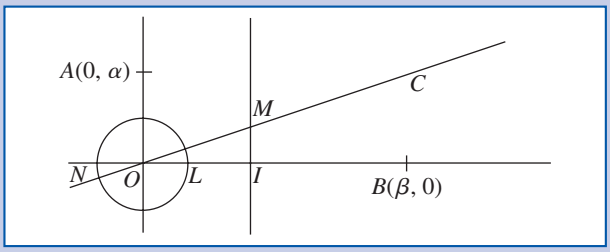
3)



Doc. 5.

Soit $A(\alpha, 0)$ sur (OI) et $B(0, \beta)$ sur (OK). Les points A et B sont constructibles.Le cercle de centre A de rayon OB coupe la droite (OI) en deux points M et N. L'abscisse de M est $\alpha - \beta$, celle de N est $\alpha + \beta$. Le réel $\alpha + \beta$ est constructible.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

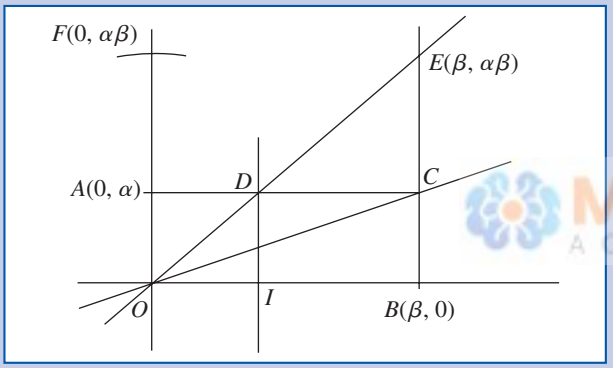


Doc. 6.

Soit $B(\beta, 0)$ sur (OI) et $A(0, \alpha)$ sur (OK). Les points A et B sont constructibles. On construit le point C tel que $AOBC$ soit un parallélogramme.

La droite (OC) a pour équation $y = \dfrac{\alpha}{\beta}x$. Elle coupe la droite passant par I et parallèle à (OA) en un point M de coordonnées $\left(1, \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. Le cercle de centre O de rayon $[I, M]$ coupe (OI) en deux points N et L. L'abscisse de L est $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Le réel $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est constructible.

Continuons la construction précédente.

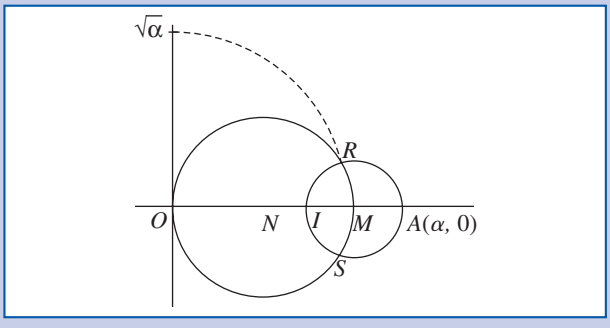


Doc. 7.

Soit D le point d'intersection de (AC) et (MI).

La droite (AD) a pour équation $y = \alpha x$. La droite (AD) coupe la droite (BC) en E.

Les coordonnées de E sont $(\beta, \alpha\beta)$. Le cercle de centre o de rayon BE coupe (Oy) en F d'ordonnée $\alpha\beta$. Le réel $\alpha\beta$ est constructible.



Doc. 8.

Soit $A(\alpha, 0)$ sur (OI). On construit le milieu M de $[A, I]$ et C le cercle de centre M de rayon AM.

On construit le milieu N de $[O, M]$ et C' le cercle de centre N de rayon ON.

Le cercle C coupe le cercle C' en deux points R et S et $(OR) \perp (RM)$.

Donc :

$$OR^2 + RM^2 = OM^2$$

$$\text{et} \quad OR^2 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 = \alpha.$$

$$OR = \sqrt{\alpha}.$$

Le réel $\sqrt{\alpha}$ est constructible.

Recherche de conditions nécessaires et suffisantes de constructibilité

1) Le point M est constructible. Il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_p = M$ telle que :

- M_1 soit construit à partir des deux points O et I.
- Pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, le point M_i est construit à partir de l'ensemble $\{O, I, M_1, \ldots, M_{i-1}\}$

Montrons par récurrence qu'il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R) telle que les points $O, I, M_1, \ldots, M_p$ aient leurs coordonnées dans $\mathbb{K}_n$.

D'après le **IIA.** les coordonnées de M_1 sont soit dans $\mathbb{Q}$ soit dans une extension quadratique $\mathbb{K}_1$ de $\mathbb{Q}$.

La propriété est vérifiée pour $i = 1$.

De même, supposons qu'il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R) telle que les points $O, I, M_1, \ldots, M_{i-1}$ aient leurs coordonnées dans $\mathbb{K}_m$.

D'après le **IIA.** les coordonnées du point M_i sont soit dans $\mathbb{K}_m$ et dans ce cas la suite $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ convient au rang i, soit dans une extension quadratique $\mathbb{K}_{m+1}$ de $\mathbb{K}_m$ et dans ce cas la suite $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,m+1]\!]}$ convient au rang i.

Ce qui termine la récurrence. Nous pouvons affirmer qu'il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R) telle que le point M ait ses coordonnées dans $\mathbb{K}_n$.

2) Soit une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R). Montrons par récurrence que tous les points M du plan dont les coordonnées appartiennent au corps $\mathbb{K}_n$ sont constructibles.

Tous les points dont les coordonnées sont dans $\mathbb{Q}$ sont constructibles d'après **IIB.3).**

Supposons la propriété vérifiée pour tous les points dont les coordonnées sont dans $\mathbb{K}_i$.

D'après la question **IA.3)**, il existe k dans $\mathbb{K}_i$ strictement positif tel que $\mathbb{K}_{i+1} = \mathbb{K}_i[\sqrt{k}]$.

D'après la question **IIB.3)**, k constructible entraîne $\sqrt{k}$ constructible ainsi que toute combinaison linéaire de 1 et de $\sqrt{k}$. Par conséquent tout réel de $\mathbb{K}_{i+1}$ est constructible.

La récurrence est prouvée.

3)a) Soit $(g_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ une base de G espace vectoriel sur F de dimension q et $(h_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ une base de H espace vectoriel sur G de dimension r.

Tout élément x de H s'écrit :

$$x = \sum_{j=1}^{r} x_j h_j \quad \text{où les } x_j \text{ sont dans } G.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Tout élément x_j s'écrit :

$$x_j = \sum_{i=1}^{q} x_{i,j}\, g_i, \quad \text{où les } x_{i,j} \text{ sont dans } F.$$

Alors :

$$x = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} x_{i,j}\, g_i h_j.$$

Donc la famille $(g_i h_j)_{i\in[\![1,q]\!]\text{et}j\in[\![1,r]\!]}$ est une famille génératrice du $F-$ espace vectoriel H.
Vérifions que cette famille est libre. Supposons que :

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} x_{i,j}\, g_i h_j = 0,$$

la famille $(h_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ est libre, alors pour tout j de $[\![1,r]\!]$ le réel $\sum_{i=1}^{q} x_{i,j}\, g_i$ est nul.
De même la famille $(g_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ est libre donc pour tout j de $[\![1,r]\!]$ et pour tout i de $[\![1,q]\!]$ le réel $x_{i,j}$ est nul.
La famille $(g_i h_j)_{i\in[\![1,q]\!]\text{et}j\in[\![1,r]\!]}$ est une base du $F-$ espace vectoriel H. Sa dimension est qr.
Montrer que H est un espace vectoriel sur F de dimension qr.

b) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_1$ est de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, car c'est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. De même l'espace $\mathbb{K}_i$ est de dimension 2 sur $\mathbb{K}_{i-1}$.
Une récurrence simple montre alors, que $\mathbb{K}_n$ est de dimension 2^n sur $\mathbb{Q}$.

c) Soit α un réel constructible. Il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété (R) telle que α appartienne à $\mathbb{K}_n$. Soit :

$$s = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \dim \mathbb{Q}[\alpha].$$

Or, $\mathbb{Q}[\alpha]$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et α.
Le sous-corps $\mathbb{K}_n$ contient α et $\mathbb{Q}$, donc :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{K}_n.$$

D'après **a)** nous avons :

$$2^n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_n = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]} \mathbb{K}_n \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha].$$

Par conséquent, l'entier $\deg(\alpha, \mathbb{Q})$ divise 2^n. Le degré $\deg(\alpha, \mathbb{Q})$ est une puissance de 2.

4) Il suffit de vérifier que le sommet A_2 est constructible. Les autres sommets se construisent ensuite à la règle et au compas à l'aide de A_2.

• Pour $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 6$ le réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est dans $\mathbb{Q}$. Le polygone régulier à trois, quatre ou six côtés est constructible.

• Pour $n = 5$, le réel $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, il appartient à une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Le polynôme régulier à cinq côtés est constructible.

• Pour $n = 7$ ou $n = 9$ le réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est de degré 3 sur $\mathbb{Q}$, 3 n'est pas une puissance de 2. Le polygône régulier à sept côtés ou à neuf côtés n'est pas constructible.

• Pour $n = 8$, le réel $\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)$ appartient à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Le polygone régulier à huit côtés est constructible.

• Pour $n = 10$:

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) - 1 = \cos\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \mathbb{K}_1,$$

donc le réel $\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)$ appartient à une extension quadratique de $\mathbb{K}_1$. Le polygone régulier à dix côtés est constructible.

Chapitre 23

A.1) Développer $(x + y \mid u(x + y))$ permet de prouver que **(i)** $\Rightarrow$ **(ii).**
Par définition de l'adjoint : **(ii)** $\Leftrightarrow$ **(iv).**
Si $M = (m_{ij})$ est la matrice de u relativement à la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de u^* dans cette base est ${}^tM$. D'où l'équivalence **(iii)** $\Leftrightarrow$**(iv).**
Si $u^* = -u$, pour tout x, on a :

$$(x \mid u(x)) = -(u(x) \mid x) = 0.$$

Par conséquent **(iv)** $\Rightarrow$ **(i).**

2) L'application $u \longmapsto u + u^*$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ en est le noyau. Donc $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Soit $n = \dim E$. La dimension de $\mathcal{A}(E)$ est celle du sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\dim \mathcal{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3) Soit u un endomorphisme antisymétrique de spectre non vide, λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.

$$(x \mid u(x)) = 0 = \lambda(x \mid x).$$

Or $\langle x \mid x\rangle > 0$, donc $\lambda = 0$.
Si u est un endomorphisme antisymétrique et diagonalisable, il n'a qu'une seule valeur propre, 0, et $\operatorname{Ker} u = E$.
Donc

$$u = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

4) Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.
a) $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Or $u^* = -u$.
Donc :

$$\operatorname{Im} u^* = \operatorname{Im}(-u) = \operatorname{Im} u.$$

D'où $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.
b) $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace de E stable par u. L'endomorphisme $\widehat{u}$ de $\operatorname{Im} u$ induit par u est aussi antisymétrique. Il est inversible et $\operatorname{Det}\widehat{u} \neq 0$.

$$\operatorname{Det}\widehat{u} = \operatorname{Det}\widehat{u}^* = \operatorname{Det} -\widehat{u} = (-1)^{\operatorname{rg} u}\operatorname{Det}\widehat{u}.$$

On en déduit que le rang de u est pair.
On peut aussi conclure de la manière suivante : $\operatorname{Det}\widehat{u} \neq 0$.
Donc 0 n'est pas valeur propre de $\widehat{u}$. D'après la question **3)**, $\operatorname{Sp}\widehat{u} = \varnothing$ et le polynôme caractéristique de $\widehat{u}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Il est de degré pair et la dimension de $\operatorname{Im} u$ est paire. Le rang de u est pair.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

c) On a :

$$u^2 = (-u^*)^2 = (u^2)^*.$$

L'endomorphisme u^2 est symétrique, donc diagonalisable.
Soit μ une valeur propre de u^2 et x un vecteur propre associé.

$$\big(u(x) \mid u(x)\big) = \big(x \mid u^*(u(x))\big) = -\big(x \mid u^2(x)\big) = -\mu(x \mid x).$$

On en déduit $\mu \leqslant 0$.

B.1) L'endomorphisme u^2 est diagonalisable. Par conséquent :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)} E_\lambda(u^2).$$

Soit λ une valeur propre non nulle de u^2 et α le réel strictement positif tel que $\lambda = -\alpha^2$.
Le sous-espace $E_\lambda(u^2)$ est stable par u. On peut définir u_λ la restriction de u au sous-espace propre $E_\lambda(u^2)$.
Considérons e_1 un vecteur unitaire de $E_\lambda(u^2)$.
On pose $e_2 = \dfrac{1}{\alpha}u(e_1)$. Alors :

$$u(e_2) = -\alpha e_1.$$

On vérifie facilement que la famille (e_1, e_2) est libre.
De plus :

$$\|e_2\|^2 = \left(\frac{1}{\alpha}u(e_1) \mid e_2\right) = \frac{1}{\alpha}\big(u(e_1) \mid e_2\big)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\big(e_1 \mid -u(e_2)\big) = \frac{1}{\alpha}(e_1 \mid \alpha e_1) = \|e_1\|^2.$$

$$(e_1 \mid e_2) = \frac{1}{\alpha}(u(e_1) \mid e_1) = 0.$$

La famille (e_1, e_2) est orthonormale.
Notons $F_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$.
Si $F_1 = E_\lambda(u^2)$, c'est terminé.
Sinon, il existe un vecteur e_3 dans $F_1^\perp$ orthogonale de F_1 dans $E_\lambda(u^2)$.
On pose $e_4 = \dfrac{1}{\alpha}u(e_3)$.
La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est orthonormale.
Procédons par récurrence.
Supposons qu'il existe $(e_1, \ldots, e_{2p})$ orthonormale.
Soit $F_p = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{2p})$.
Si $F_p = E_\lambda(u^2)$, c'est terminé.
Sinon, soit e_{2p+1} dans $F_{p\perp}$. En posant :

$$e_{2p+2} = \frac{1}{\alpha}u(e_{2p+1}),$$

on construit de la même manière une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_{2p+2})$.
Or, la dimension de $E_\lambda(u^2)$ est finie. Par conséquent, il existe un entier p tel que $B_\lambda = (e_1, \ldots, e_{2p})$ ainsi construite soit une base orthonormale de $E_\lambda(u^2)$.
La dimension de $E_\lambda(u^2)$ est paire et dans cette base la matrice de u_λ est diagonale par blocs de la forme :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} J(\alpha) & O & \cdots\cdots & O \\ O & J(\alpha) & & O \\ & & & \\ O & \cdots\cdots & O & J(\alpha) \end{pmatrix}$$

où $\quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

2) On a $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$.
Montrons l'inclusion :

$$\mathrm{Ker}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u.$$

Soit x quelconque dans $\mathrm{Ker}\, u^2$:

$$u^2(x) = 0$$

$$(u^2(x) \mid x) = 0.$$

Or : $\qquad (u^2(x) \mid x) = (u(x) \mid -u(x)).$
On en déduit $\|u(x)\| = 0$, puis $x \in \mathrm{Ker}\, u$.
En conclusion :

$$\mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u.$$

3)

$$E = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(u^2) \oplus \mathrm{Ker}\, u^2 = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(u^2) \oplus \mathrm{Ker}\, u.$$

Cette somme directe est orthogonale car $\mathrm{Im}u = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ et les sous-espaces propres $E_\lambda(u^2)$ sont orthogonaux deux à deux.
Soit B_0 une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\ u$. ($B_0 = \varnothing$ si $\mathrm{Ker}\ u = \{0_E\}$.)
La famille $B = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2) \\ \lambda \neq 0}} B_\lambda \cup B_0$ est une base orthonormale de E.
Dans cette base, la matrice de u est diagonale par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & A(\lambda_2) & & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 \quad A(\lambda_r) & 0 \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & O' \end{pmatrix}$$

où $\{\lambda_i\ ; i \in [\![1, r]\!]\} = \mathrm{Sp}(u)$ et où O' est une matrice carrée nulle d'ordre la dimension de $\mathrm{Ker}\, u$.

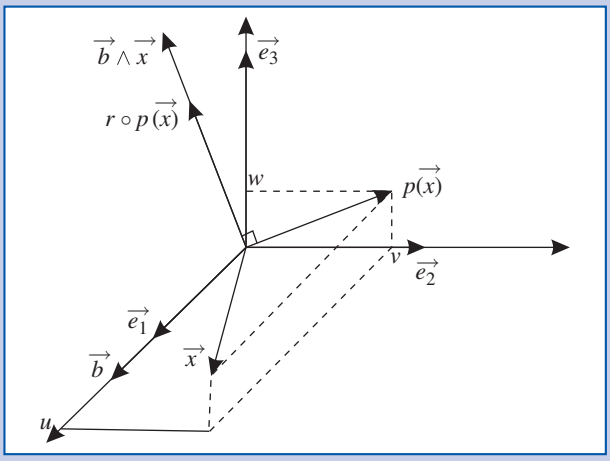
C.1) Soient α, β, γ trois réels. Pour tout $\overrightarrow{x} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta w - \gamma v \\ \gamma u - \alpha w \\ \alpha v - \beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de conclure.

2) Soit $\overrightarrow{b}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



L'endomorphisme $(\overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x})$ est la composée $h \circ r \circ p$ du projecteur orthogonal p sur le plan $\overrightarrow{b}^{\perp}$, du quart de tour direct r d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{b}$ et de l'homothétie h de rapport $\|\overrightarrow{b}\|$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique.

L'endomorphisme canoniquement associé est noté f et $\overrightarrow{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée directe telle que $\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{b}\|\overrightarrow{e_1}$, on a :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}, f(\overrightarrow{e_2}) = \|\overrightarrow{b}\|\overrightarrow{e_3} \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{e_3}) = -\|\overrightarrow{b}\|\overrightarrow{e_2}.$$

La matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left\|\overrightarrow{b}\right\| \\ 0 & \left\|\overrightarrow{b}\right\| & 0 \end{pmatrix}$.

4) La matrice M se décompose en $M = A + B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x^2 & yx & zx \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

Soit u, f, g les endomorphismes canoniquement associés à M, A, B respectivement et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ telle que $\overrightarrow{e_1} = (x, y, z)$.
D'après ce qui précède :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}, f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3} \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_2}.$$

De l'égalité : $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x \quad y \quad z)$ on déduit que g est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}\overrightarrow{e_1}$:

$$g(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1},\ g(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad g(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}.$$

La matrice de u dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice M est la matrice du quart de tour d'axe $\mathbb{R}(x, y, z)$. C'est une matrice orthogonale.

Chapitre 24

A.1) Montrons que l'application $(\ |\ )$ est définie sur :

$$\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X].$$

L'application $t \longmapsto \overline{P(t)}Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégration, elle est sesquilinéaire. On vérifie facilement qu'elle est hermitienne.

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X] \quad (P \mid P) = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

La continuité et la positivité de l'application $t \longmapsto |P(t)|^2\mathrm{e}^{-t^2}$ assurent que :

$$(P \mid P) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

L'application $(\ |\ )$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
2) On considère la base $(e_0, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ obtenue à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on pose $D_i = \mathbb{C}e_i$. Les droites D_i sont orthogonales deux à deux et $\mathbb{C}_n[X] = \overset{n}{\underset{i=0}{\oplus}} D_i$. On définit ainsi la famille $(D_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On remarque, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, que D_i est le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{C}_{i-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_i[X]$ et que D_0 est la droite engendrée par 1. On montre ainsi, par récurrence, que la famille $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est unique.

B.1) L'application $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est $\mathcal{C}^\infty$. On a, pour tout t réel, les expressions :

$$f'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2},\ f''(t) = (4t^2 - 2)\mathrm{e}^{-t^2}$$

et :

$$f'''(t) = (-8t^3 + 12t)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme H_n de degré n tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

On a :

$$H_0 = 1, H_1 = 2X, H_2 = 4X^2 - 2$$

et :

$$H_3 = 8X^3 - 12X.$$

Supposons que $\forall\, t \in \mathbb{R} f^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ où H_n est un polynôme de degré n à coefficients réels. Alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} f^{(n+1)}(t) = (-1)^n H_n'(t)\mathrm{e}^{-t^2} - 2t(-1)^n H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}$$

$$= (-1)^{n+1}(2tH_n(t) - H_n'(t))\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Notons $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$. Alors H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients réels et :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} f^{(n+1)}(t) = (-1)^n H_{n+1}(t)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De plus, si c_n est le coefficient de X^n dans H_n, alors $2c_n$ est celui de X^{n+1} dans H_{n+1}.
Le coefficient dominant de H_n est 2^n. On constate également que H_n a la parité de n.
2) Soit n un entier non nul et P un polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

$$(P \mid H_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P(t)} H_n(t) \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \int_a^b \overline{P(t)} H_n(t) \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= [-\overline{P(t)} H_{n-1}(t) \mathrm{e}^{-t^2}]_a^b + \int_a^b \overline{P'(t)} H_{n-1}(t) \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Or, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $-\overline{P(t)} H_{n-1}(t) \mathrm{e}^{-t^2}$ sont nulles.
On obtient :

$$(P \mid H_n) = (P' \mid H_{n-1}).$$

Puis :

$$(P \mid H_n) = (P^{(n)} \mid H_0) = 0,$$

car $P^{(n)}$ est le polynôme nul.
On en déduit que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{C}[X]$.
Or, pour tout entier n, le degré de H_n est n. La famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}[X]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$\|H_n\|^2 = (H_n \mid H_n) = (H_n^{(n)} \mid H_0) = (2^n n\,! H_0 \mid H_0)$$

$$= 2^n n\,! \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = 2^n n\,! \sqrt{\pi}.$$

On en déduit que $\left(\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base orthonormale de $\mathbb{C}[X]$ obtenue à partir de la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $D_n = \mathbb{C}H_n$.
3) Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme H_n' appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

$$H_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\left(H_n' \mid \frac{H_k}{\|H_k\|} \right)} \frac{H_k}{\|H_k\|}.$$

Or, $(H_n' \mid H_k) = (H_n \mid H_{k+1}) = 0$ pour $k < n-1$.

$$H_n' = (H_n' \mid H_{n-1}) \frac{H_{n-1}}{\|H_{n-1}\|} = (H_n \mid H_n) \frac{H_{n-1}}{\|H_{n-1}\|} = 2n H_{n-1}.$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n' = 2n H_{n-1}.$$

4) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes et que, si on note $a_0, \ldots, a_n$ les racines de H_{n+1} et $b_0, \ldots, b_{n-1}$ les racines de H_n rangées dans l'ordre croissant, alors :

$$a_0 < b_0 < a_1 < \ldots < b_{n-1} < a_n.$$

On vérifie facilement, ce résultat pour n égal à 1, 2 ou 3.
Supposons que H_n admette n racines distinctes $b_0, \ldots, b_{n-1}$ rangées dans l'ordre croissant. Ce sont également les racines de $f^{(n)}$. De plus, les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et $-\infty$ sont nulles. Donc, d'après le *théorème de Rolle*, l'application $f^{(n+1)}$ admet $n+1$ racines distinctes $a_0, \ldots, a_n$ tels que :

$$a_0 < b_0 < a_1 < \ldots < b_{n-1} < a_n.$$

Les racines de l'application $f^{(n+1)}$ sont également celles de H_{n+1}.
C.1) Soit u de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même qui vérifie :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \quad (u(P) \mid Q) = (P \mid u(Q)).$$

Montrons que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Pour tout (P,Q,R) de $\mathbb{C}[X]^3$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, vérifier :

$$(u(\alpha P + \beta Q) \mid R) = (\alpha u(P) + \beta u(Q) \mid R).$$

On en déduit que $u(\alpha P + \beta Q) = \alpha u(P) + \beta u(Q)$. L'application u est linéaire.
2)a) Soit u un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}[X]$ et λ une valeur propre de u dans $\mathbb{C}$.
Il existe un vecteur P non nul tel que $u(P) = \lambda P$.

$$(u(P) \mid P) = (\lambda P \mid P) = \overline{\lambda} \|P\|^2$$

$$= (P \mid u(P)) = (P \mid \lambda P) = \lambda \|P\|^2.$$

Par conséquent :

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \|P\|^2 = 0.$$

Or, P est non nul.
Donc, $\overline{\lambda} - \lambda = 0$ et λ appartient à $\mathbb{R}$.
b) Les valeurs propres de u sont réelles. Soit P et Q des vecteurs propres de u associés à deux valeurs propres λ et μ distinctes.

$$(u(P) \mid Q) = (\lambda P \mid Q) = \lambda (P \mid Q)$$

$$= (P \mid u(Q)) = (P \mid \mu Q) = \mu (P \mid Q).$$

Par conséquent :

$$(\lambda - \mu)(P \mid Q) = 0.$$

Or, $\lambda - \mu \neq 0$.
Donc $(P \mid Q) = 0$. Les vecteurs P et Q sont orthogonaux.
c) Soit F est un sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ stable par u. Montrons que $F^\perp$ est stable par u.
Soit P dans $F^\perp$. Vérifions que $u(P)$ appartient à $F^\perp$. Pour tout Q de F, on a :

$$(u(P) \mid Q) = (P \mid u(Q)).$$

Or $u(Q)$ appartient à F. Car F est stable par u. De plus P appartient à $F^\perp$. Donc $(P \mid u(Q)) = 0$.
Par conséquent, $u(P)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3)a) Montrons que u est hermitien. Pour tout (P,Q) de $\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned}(u(P)\mid Q)&=(-P''+2XP'+P\mid Q)\\&=(-P''+2XP'\mid Q)+(P\mid Q)\\(-P''+2XP'\mid Q)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(-\overline{P''(t)}+2t\overline{P'(t)})\mathrm{e}^{-t^2}Q(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Intégrons par parties.

$$\begin{aligned}&\int_a^b(-\overline{P''(t)}+2t\overline{P'(t)})\mathrm{e}^{-t^2}Q(t)\,\mathrm{d}t\\&\qquad=[-\overline{P'(t)})\mathrm{e}^{-t^2}Q(t)]_a^b+\int_a^b\overline{P'(t)}Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $-\overline{P'(t)})\mathrm{e}^{-t^2}Q(t)$ sont nulles. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-\overline{P''(t)}+2t\overline{P'(t)})\mathrm{e}^{-t^2}Q(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{P'(t)}Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}(u(P)\mid Q)&=(P'\mid Q')+(P\mid Q)=\overline{(Q'\mid P')}+\overline{(Q\mid P)}\\&=\overline{(u(Q)\mid P)}=(P\mid u(Q)).\end{aligned}$$

On a vu que le spectre de u est dans $\mathbb{R}$. Soit λ une valeur propre de u. Il existe un vecteur non nul P tel que :

$$(u(P)\mid P)=(\lambda P\mid P)=\overline{\lambda}\|P\|^2=\lambda\|P\|^2.$$

D'autre part :

$$(u(P)\mid P)=(P'\mid P')+(P\mid P)\geqslant\|P\|^2.$$

On en déduit $\lambda\geqslant 1$. En conclusion $\mathrm{Sp}(u)\subset[1,+\infty[$.
Un vecteur P appartient à $\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})$ si, et seulement si :

$$\|P\|^2=\|P'\|^2+\|P\|^2.$$

Ceci a lieu pour $P'=0$.$\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})$ est $\mathbb{C}H_0$.

b) Soit v et w les endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$ définis pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$v(P)=-P'+2XP\quad\text{et}\quad w(P)=P'.$$

Pour tout P de $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}v\circ w(P)&=-P''+2XP'=u(P)-P,w\circ v(P)\\&=-P''+2XP'+2P=u(P)+P.\end{aligned}$$

Par conséquent : $v\circ w=u-\mathrm{Id}$ et $w\circ v=u+\mathrm{Id}$.
On en déduit :

$$w\circ u-u\circ w=w\circ(v\circ w+\mathrm{Id})-(w\circ v-\mathrm{Id})\circ w=2w.$$

$$v\circ u-u\circ v=-2v.$$

Soit (P,Q) quelconque dans $\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]$. L'application w est surjective. Soit R tel que $P=w(R)$.

$$\begin{aligned}(v(P)\mid Q)&=(v\circ w(R)\mid Q)=(u(R)\mid Q)-(R\mid Q)\\&=(R'\mid Q')+(R\mid Q)-(R\mid Q)=(R'\mid Q')\\&=(w(R)\mid w(Q))=(P\mid w(Q)).\end{aligned}$$

c) Soit P un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

$$\begin{aligned}\|v(P)\|^2&=(v(P)\mid v(P))=(P\mid w\circ v(P))\\&=(P\mid u(P)+P)=(\lambda+1)\|P\|^2,\end{aligned}$$

$$u\circ v(P)=v\circ u(P)+2v(P)=(\lambda+2)v(P).$$

On montre de la même manière que :

$$\|w(P)\|^2=(\lambda-1)\|P\|^2\quad\text{et}\quad u\circ w(P)=(\lambda-2)w(P).$$

Le vecteur $v(P)$ est non nul car $\|v(P)\|^2=(\lambda+1)\|P\|^2$ et $\lambda+1\neq 0$. Par conséquent, $v(P)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $(\lambda+2)$. Or 1 est une valeur propre de u. Donc, par une récurrence immédiate $\{1+2k\,;k\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{Sp}(u)$. De même le vecteur $w(P)$ est non nul si $\lambda>1$ car :

$$\|w(P)\|^2=(\lambda-1)\|P\|^2.$$

Le vecteur $w(P)$ est un vecteur propre de u pour la valeur propre $(\lambda-2)$.
Par une récurrence immédiate, si $\lambda-2k>1$ alors $\lambda-2k-2$ appartient à $\mathrm{Sp}(u)$.
Montrons par l'absurde que λ est un entier impair. Il existe un entier m tel que :

$$2m+1\leqslant\lambda\leqslant 2m+3.$$

Si on avait $2m+1<\lambda$, alors $\lambda-2m-2$ serait dans le spectre de u. Or $\lambda-2m-2<1$ et $\mathrm{Sp}(u)\subset[1,+\infty[$. Par conséquent $2m+1=\lambda$. En conclusion : $\mathrm{Sp}(u)=\{1+2k\,;k\in\mathbb{N}\}$.

d) On constate que $v(H_n)=H_{n+1}$. Or, H_0 est un vecteur propre de u pour la valeur propre 1.
On montre par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme H_n est un vecteur propre de u pour la valeur propre $2n+1$. La famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de vecteurs propres de u et les valeurs propres associées sont distinctes deux à deux. Donc les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

$$\mathrm{Ker}\,(u-(2n+1)\mathrm{Id})=\mathbb{C}H_n.$$

4)a) Notons $a_0,\dots,a_n$ les $n+1$ racines distinctes de H_{n+1}. Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, on définit la forme linéaire φ_i par :

$$\forall\,P\in\mathbb{C}_n[X]\quad\varphi_i(P)=P(a_i).$$

On introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $P_k=\dfrac{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-a_i)}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(a_k-a_i)}$.

On constate que :

$$\forall\,(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\quad\varphi_i(P_j)=P_j(a_i)=\delta_i^j.$$

On en déduit que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est une base du dual de $\mathbb{C}_n[X]$, duale de la base $(P_0,\dots,P_n)$.

b) Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$\varphi(P)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Alors :

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi(P_i)\varphi_i.$$

Par conséquent, il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_n[X] \quad \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(a_i).$$

On a :

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \quad \alpha_i = \varphi(P_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_i(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

c) La famille $(H_0, H_1, \dots, H_n, H_0H_{n+1}, H_1H_{n+1}, \dots, H_nH_{n+1})$ est constituée de $2n+2$ vecteurs de degrés échelonnés. Ils forment une base de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$.
L'application φ est linéaire. Donc, pour montrer que l'égalité :

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(a_i)$$

est vérifiée pour tout P de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$, il suffit de montrer qu'elle l'est pour tout élément de la base ci-dessus.
D'après la question précédente, elle est vérifiée pour les $n+1$ premiers vecteurs.
Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on constate que :

$$\varphi(H_kH_{n+1}) = (H_k \mid H_{n+1}) = 0$$

et que :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_k(a_i)H_{n+1}(a_i) = 0$$

car les a_i sont les racines de H_{n+1}.

d) Les racines de H_3 sont $-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0$ et $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}_5[X]$, nous pouvons écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \alpha_0 P\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \alpha_1 P(0) + \alpha_2 P\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$\varphi(1) = \sqrt{\pi}, \varphi(X) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

On en déduit :

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}.$$

On obtient la relation :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_5[X] \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[P\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4P(0) + P\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

D.1) Notons toujours $a_0, \dots, a_n$ les $n+1$ racines distinctes de H_{n+1}. Soit u l'application de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}^{2n+2}$ définie, pour tout P de $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$, par :

$$u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_0) \dots, \mathrm{P}'(a_n)).$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$, tel que $u(P) = 0$. Alors P admet $2n+2$ racines en les comptant avec leur multiplicité. Or le degré de P est inférieur à $2n+1$. Par conséquent : $P = 0$.

De plus, $\dim \mathbb{C}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{C}^{2n+2}$. Donc, l'application u est un isomorphisme.

2) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$
On suppose que f s'annule en un point a de $\mathbb{R}$.

a) Pour tout x distinct de a, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-a}$.
On prolonge g par continuité, en posant $g(a) = f'(a)$.
On remarque :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}\, f(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t = (x-a)\int_0^1 f'(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}\,u.$$

On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{a\} g(x) = \int_0^1 f'(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Pour $x = a$, on obtient :

$$\int_0^1 f'(a)\,\mathrm{d}\,u. = f'(a) = g(a).$$

Par conséquent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^1 f'(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}\,u.$$

b) Soit h la fonction de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \quad h(x, u) = f'(a+(x-a)u).$$

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et :

$$\forall\, q \in [\![1, p]\!] \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial^q h}{\partial x^q}(x, u) = u^q\, f^{(q+1)}(a+(x-a)u).$$

On en déduit que l'application g est de classe $\mathcal{C}^p$ et que :

$$\forall\, q \in [\![1, p]\!] \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad g^{(q)}(x) = \int_0^1 u^q\, f^{(q+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Pour tout q de $[\![1, p]\!]$ et tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |g^{(q)}(x)| &\leqslant \int_0^1 u^q |\, f^{(q+1)}(a+(x-a)u)|\,\mathrm{d}\,u \\ &\leqslant \sup\{|\, f^{(q+1)}(t)|\,;\, t \in [a, x]\} \int_0^1 u^q\,\mathrm{d}\,u \\ &\leqslant \frac{1}{q+1} \sup\{|\, f^{(q+1)}(t)|\,;\, t \in [a, x]\} \end{aligned}$$

3) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.
a) D'après la question **D.1)**, il existe un unique polynôme P_f de degré $2n+1$ tel que, pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P_f(a_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad P_f'(a_i) = f'(a_i).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

b) Notons F la fonction $f - P_f$. Elle s'annule en a_0. D'après la question précédente, il existe une fonction g_0 de classe $\mathcal{C}^{2p+1}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - P_f(x) = (x - a_0)g_0(x).$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall q \in [\![1, 2p+1]\!]$$

$$|g_0^{(q)}(x)| \leqslant \frac{1}{q+1} \sup\{|F^{(q+1)}(t)| \,;t \in [a, x]\}$$

De même, il existe une fonction G_0 de classe $\mathcal{C}^{2p}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} g_0(x). = (x - a_0)G_0(x).$$

On a également :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall q \in [\![1, 2p]\!]$$

$$|G_0^{(q)}(x)| \leqslant \frac{1}{q+1} \sup\{|g_0^{(q+1)}(t)| \,;t \in [a, x]\}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - P_f(x) = (x - a_0)^2 G_0(x)$$

avec G_0 une application de classe $2p$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall q \in [\![1, 2p]\!]$$

$$|G_0^{(q)}(x)| \leqslant \frac{1}{(q+1)(q+2)} \sup\{|F^{(q+2)}(t)| \,;t \in [a, x]\}.$$

En considérant les racines doubles suivantes, on montre par récurrence qu'il existe une application G continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - P_f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)^2 G(x)$$

où G vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |G(x)| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} \sup\{|F^{(2n+2)}(t)| \,;t \in I\}$$

où I désigne le plus petit segment contenant :

$$a_0, \ldots, a_n \quad \text{et} \quad x.$$

Or, $P_f^{(2n+2)} = 0$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - P_f(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)^2 \sup\{|f^{(2n+2)}(t)| \,;t \in I\}$$

c) On a :

$$\sup\{|f^{(2n+2)}(t)| \,;t \in I\} \leqslant M.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - P_f(x)| \leqslant M \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)^2.$$

On obtient :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t - \int_{-\infty}^{+\infty} P_f(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t \right|$$

$$\leqslant M \frac{1}{(2n+2)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)^2 . \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t.$$

Or :

$$\prod_{i=0}^{n} (X - a_i)^2 = \left(\frac{H_{n+1}}{2^{n+1}} \right)^2.$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)^2 . \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2^{2n+2}} (\mathrm{n}+1)\,!\, 2^{n+1} \sqrt{\pi}.$$

De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_f(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_f(a_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a_i).$$

On obtient :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a_i) \right| \leqslant M \frac{1}{(2n+2)!} \frac{1}{2^{n+1}} (\mathrm{n}+1)\,!\, \sqrt{\pi}.$$

Étudions le cas $n = 2$.

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t - \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right] \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{960} \sqrt{\pi} \| f^{(6)} \| \infty.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Indications et réponses

Chapitre 1

1 L'inégalité découle des propriétés de la norme.

2 On vérifie facilement les points 1, 3 et 4 de la définition d'une norme par linéarité de f. Il reste à étudier l'égalité : $N(x) = 0$. Cela équivaut à $f(x) = 0_E$ et l'on obtient l'équivalence :
$(N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E)$ si et seulement si f est injective. En conclusion, N est une norme si et seulement si f est injective.

3 La forme de l'expression de $N(x)$ suggère de montrer que N est la norme associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. L'égalité de polarisation impose, pour $x = (a, b)$ et $x' = (a', b')$:

$$\varphi(x, x') = aa' + ab' + a'b + 5bb'.$$

On justifie ensuite sans difficulté que φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

4 On suppose que, pour tout x, on ait : $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$. La sesquilinéarité permet d'écrire :

$\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\varphi(x+\alpha y, x+\alpha y) = \varphi(x,x)+|\alpha|^2\varphi(y,y)+\alpha\varphi(x,y)+\overline{\alpha}\varphi(y,x).$$

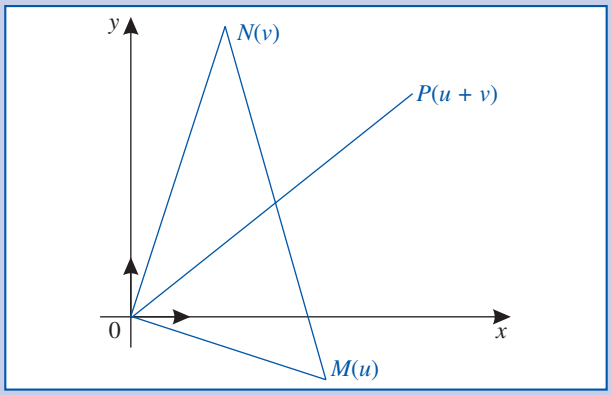
Donc : $\alpha\varphi(x, y) + \overline{\alpha}\varphi(y, x) \in \mathbb{R}$.
On prend $\alpha = 1$, $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 2a \in \mathbb{R}$.
Puis $\alpha = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}\varphi(x, y) - \mathrm{i}\varphi(y, x) = 2b \in \mathbb{R}$.
On en déduit : $\varphi(x, y) = a - \mathrm{i}b$ et $\varphi(y, x) = a + \mathrm{i}b$.
La réciproque est immédiate.

5 On suppose que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ et $y \neq 0_E$.
En élevant au carré on en déduit : $\mathrm{Re}(\varphi(x, y)) = \|x\|\|y\|$.
Or :

$$|\mathrm{Re}(\varphi(x, y))| \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Donc $|\varphi(x, y)| = \|x\|\|y\|$. On sait que ceci entraîne l'existence d'un complexe λ tel que : $x = \lambda y$. En reportant dans $\varphi(x, y)$ on obtient $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Lorsque la norme n'est pas associée à un produit scalaire, cherchez un contre-exemple dans $(\mathbb{R}^2, N_1)$.

6 **1)** Si $uv = 0$, alors : $|u + v| = |u| + |v|$.
On suppose $uv \neq 0_E$. Notons, dans le plan complexe, M, N et P les points images des complexes u, v et $u + v$. La condition $|u + v| = |u| + |v|$ exprime que le triangle ONP est aplati et que le point N appartient au segment $[O, P]$. Donc : $\exists \lambda > 0 \quad v = \lambda u$.
La réciproque est immédiate.



2) Vous démontrerez par récurrence que la condition ci-dessus énoncée se généralise à toute famille de $n (n \geqslant 1)$ complexes.

7 Immédiat en utilisant la définition de la distance.

8 Il s'agit de prouver l'égalité de deux ensembles. On procède par double inclusion.
a) Soit $z \in x + B(y, r)$, il existe $u \in B(y, r)$ tel que $z = x + u$.
Or : $u \in B(y, r)$, donc : $\|u - y\| < r$, puis : $\|z - (x + y)\| < r$.
On en déduit que : $z \in B(x + y, r)$.
b) Réciproquement. Soit z dans $B(x + y, r)$. Alors

$$\|z - (x + y)\| < r, \quad \text{donc} \quad z - x \in B(y, r).$$

9 Immédiat en utilisant la définition d'une boule.

10 P étant une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, il existe un réel M tel que, pour tout (X, Y) de P, on ait $\|(X, Y)\|_\infty \leqslant M$. On pose $F(x, y) = (X, Y)$ et on applique l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0, x]$: $|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{1}{3}|x|$. Nous en déduisons $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \frac{1}{3}|x|$. D'où :

$$|y| = |X - 2f(x)| \leqslant M + 2|f(0)| + \frac{2}{3}|x|$$

et

$$|x| = |Y + f(y)| \leqslant M + |f(0)| + \frac{1}{3}|y|.$$

Puis : $|y| \leqslant M + 2|f(0)| + \frac{2}{3}M + \frac{2}{3}|f(0)| + \frac{2}{9}|y|$.

$F^{-1}(P)$ est donc bornée.

11 On doit montrer que, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de E^2, on a : $|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqslant N((x_1, y_1), (x_2, y_2))$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

ou encore :

$$|\|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\|| \leqslant N((x_1, y_1) - (x_2, y_2)) = N((x_1 - x_2), (y_1 - y_2)).$$

Cette inégalité équivaut à :

$$\|x_1 - y_1\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|x_2 - y_2\|$$

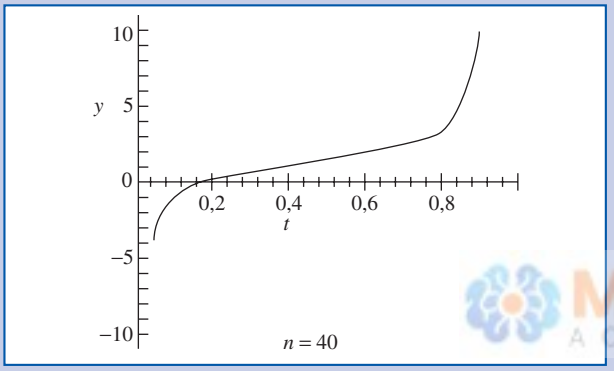
et

$$\|x_2 - y_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|x_1 - y_1\|.$$

12 L'étude sur $]0,1[$ de la fonction :

$$f_n : x \longmapsto \tan\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2nx},$$

qui est dérivable sur cet intervalle, nous montre qu'elle est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Il existe donc un unique x_n dans $]0,1[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.



De plus, soit $a > 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \tan\dfrac{\pi}{2}a > 0$. Nous en déduisons que, à partir d'un certain rang, $0 < x_n < a$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Puis : $\tan\dfrac{\pi}{2}x_n \sim \dfrac{\pi}{2}x_n \sim \dfrac{\pi}{2nx_n}$. D'où : $x_n^2 \sim \dfrac{1}{n}$, et enfin : $x_n \sim \sqrt{\dfrac{1}{n}}$.

13 **1)** La seule propriété définissant une norme qui ne soit pas vérifiée avec toute fonction positive et continue f est :

$$N_f(P) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $N_f(P) = 0$. Alors :

$$\forall t \in [0,1] \quad P(t) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t) = 0.$$

Si f n'est pas nulle sur $[0,1]$, il existe un intervalle $[a,b]$ contenu dans $[0,1]$ sur lequel elle ne s'annule pas car elle est continue. P devra alors s'annuler sur $[a,b]$ et P sera donc le polynôme nul.
La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc : $f \neq 0$.
2) Immédiat.

14 **1)** La négation de la propriété traduisant la limite $+\infty$ de la suite (u_n) exprime exactement qu'il est possible d'extraire de la suite (u_n) une suite majorée.

2) Immédiat avec la question précédente.

3) Si la suite (q_n) ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une suite constante $(q_{\phi(n)})$. Appelons q la valeur commune des $q_{\phi(n)}$ et fixons $\varepsilon > 0$. Nous avons :

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit : $\forall n \geqslant N \quad |p_{\phi(n)} - qx| \leqslant q\varepsilon$.
Le réel qx est irrationnel. Il apparaît ici limite d'une suite d'entiers naturels. C'est impossible.

15 Penser à la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par : $u_{2n} = (n,0)$ et $u_{2n+1} = (0,n)$.

16 La suite $(|u_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$ se traduit par :

$$\exists L \in \mathbb{R} \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geqslant N \quad |u_n| \leqslant L.$$

Il est alors possible d'extraire de la suite (u_n) une suite bornée. On peut alors extraire de cette suite une suite convergente.

17 Considérez la suite (u_n) définie par :

$$u_{2n} = 0, u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

et la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{n^2}.$$

18 Nous remarquons que : $u_0 = 1$. Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : x \longmapsto x^5 + nx - 1$. La fonction f_n est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est donc bien définie. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$.

Donc : $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
L'équation nous donne alors une information plus précise : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$, soit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
Posons : $u_n = \dfrac{1}{n} - v_n$. Alors : $nv_n = u_n^5$, d'où : $v_n \sim \dfrac{1}{n^6}$.
Nous en déduisons : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

19 **1)** L'application φ est bilinéaire et :
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(A,B) = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$

Soit ensuite une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2\right) \geqslant 0.$$

De plus, si $\varphi(A,A) = 0$, alors $A = 0$. L'application φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et sa norme associée est :

$$N(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

2) $N(A)^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(A\,{}^tA) = N({}^tA)^2$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) a) Notons $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = AB = (c_{ij})$ et calculons $N(AB)^2$.

$$N(AB) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})^2}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2.$$

On en déduit $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

b) L'égalité a lieu si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2.$$

Or, il s'agit d'égalité de Cauchy-Schwarz. Si $A = 0$, l'égalité est vérifiée pour toute matrice B. Si $B = 0$, l'égalité est vérifiée pour toute matrice A.

Si A et B sont non nuls, on sait que cette égalité est réalisée si et seulement si les vecteurs $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ et $(b_{1j}, \dots, b_{nj})$ sont colinéaires pour tous i et j. Les matrices A et ${}^tB$ ont donc leurs lignes proportionnelles, elles sont de rang 1. Et,de plus, on doit avoir $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}^tB$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^tB) = 1$ et $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}^tB$, alors l'égalité est vérifiée.

4) Il suffit de poser $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

20 **1)** Vous vérifierez que l'application f définie par : $f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0$ convient.

2) Il suffit de prendre pour matrice A la matrice de l'application f définie par : $f(e_1) = e_2$; $f(e_i) = 0_E$ pour $i > 1$.

En traduisant matriciellement cette question, on sait que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \quad PA^{-1}P = \lambda A.$$

S'il existait sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une norme vérifiant la propriété requise, on aurait, pour tout $\lambda, \|\lambda A\| = \|A\|$,ce qui est impossible.

21 **1)** Calculons :

$$\sum_{i<j}\|x_i - x_j\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2$$

$$= \sum_{i<j}\langle x_i - x_j \mid x_i - x_j\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i<j}\left(\langle x_i \mid x_i\rangle - 2\langle x_i \mid x_j\rangle + \langle x_j \mid x_j\rangle\right) + \sum_{i,j}\langle x_i \mid x_j\rangle$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

2) En posant $y_i = x_i - c$,on obtient :

$$\sum_{i<j}\|y_i - y_j\|^2 = \sum_{i<j}\|x_i - x_j\|^2 \geqslant 2n(n-1).$$

Puis : $\sum_{i<j}\|y_i - y_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i\right\|^2 \geqslant 2n(n-1)$.

Donc : $\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^2 \geqslant 2(n-1)$.

L'un au moins des $\|y_i\|$ est supérieur à $\sqrt{2\dfrac{n-1}{n}}$. D'où :

$$r \geqslant \sqrt{2\frac{n-1}{n}}.$$

22 **1)** Pour tout x de E, l'inégalité $\|g(x)\| < 1$ est immédiate et g définit une application de E dans $BO(0_E,1)$. Pour tout y de $BO(0_E,1)$ on cherche un x de E tel que : $y = \dfrac{x}{1+\|x\|}$.

On trouve $\|x\| = \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|}$ puis $x = y(1+\|x\|) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$.

Donc l'application g est bijective, sa bijection réciproque est g^{-1} de $BO(0_E,1)$ dans E définie par $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$.

2) On fixe deux éléments quelconques x et y de E.

$g(x) - g(y) = \dfrac{x + \|y\|\,x - y - \|x\|\,y}{1 + \|x\| + \|y\| + \|x\|\,\|y\|}$. On note N le numérateur de cette fraction.

$$N = (x-y) + (\|y\| - \|x\|)x - \|x\|(y-x)$$

et

$$\|N\| \leqslant \|x-y\| + |\|y\| - \|x\||\|x\| + \|x\|\|y-x\|.$$

On en déduit : $\|N\| \leqslant \|x-y\|(1+2\|x\|)$.

De même : $\|N\| \leqslant \|x-y\|(1+2\|y\|)$.

En faisant la demi-somme de ces deux inégalités, on trouve :

$$\|N\| \leqslant \|x-y\|(1+\|x\|+\|y\|).$$

La fonction g est 1-lipschitzienne.

23 **1)** Soit f une application k-lipschitzienne de E dans E. Pour tout réel $l \geqslant k$, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\| \leqslant l\|x-y\|.$$

L'application f est aussi l-lipschitzienne et $[k, +\infty[\subset I_f$.

Soit k et l dans I_f tels que $k < l$. Alors $[k,l] \subset I_f$. Donc I_f est un intervalle.

2) On fixe (f,g) dans L^2 et notons k un élément de $I_f + I_g$. On écrit $k = k_1 + k_2$ avec $k_1 \in I_f$ et $k_2 \in I_g$.

$\forall (x,y) \in E^2$

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|$$
$$\leqslant k_1\|x-y\| + k_2\|x-y\|.$$

Donc $f+g$ est k-lipschitzienne et ceci prouve que :

$$I_f + I_g \subset I_{f+g}.$$

3) • Pour tout f de L, I_f est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, donc $N(f) \in \mathbb{R}^+$.

• $N(0_L) = 0$ est évident. Réciproquement, si $N(f) = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout x de E, on a :

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0_E)\| \leqslant k\|x\|.$$

Donc $f = 0_L$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Soit f un élément de L et λ un scalaire. Il est immédiat que, si f est k-lipschitzienne, alors λf est $(|\lambda|k)$-lipschitzienne. Donc $I_{\lambda f} = |\lambda| I_f$ et $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
• Soit f et g deux éléments de E. On sait que $I_f + I_g \subset I_{f+g}$. Donc :

$$N(f+g) = \inf I_{f+g} \leqslant \inf(I_f + I_g) \leqslant \inf I_f + \inf I_g = N(f) + N(g).$$

L'application N est une norme sur L.

24 Considérons l'ensemble $D = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont bornées, donc on peut extraire de (u_n) une suite, $(u_{\varphi(n)})$, convergente vers l_1 et on a : $\left| l_1 - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2}$. De même, on peut extraire de la suite $(v_{\varphi(n)})$ une suite $(v_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge vers l_2 et $\left| l_2 - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2}$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{\varphi\circ\psi(n)} v_{\varphi\circ\psi(n)}) = l_1 l_2 = 1$. Enfin : ($l_1 l_2 = 1, l_1 \in D$ et $l_2 \in D$). Vous en déduirez que : $l_1 = l_2 = 1$.
Chacune des suites a une unique valeur d'adhérence, donc converge vers cette valeur.

25 **1)** Pour un n fixé, si z_n est nul, il en est de même de z_{n+1}.
Sinon, on a :

$$z_n = \rho_n e^{i\theta_n}; z_{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) = \rho_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

Posons $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$, alors $\theta_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Donc, ou bien z_0 est un réel négatif, la suite est alors nulle à partir de z_1. Ou bien, z_0 n'est pas un réel négatif et z_n n'est jamais nul.
Dans ce cas, on a : $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$, avec, pour tout n, $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Par récurrence, on en déduit que, si z_0 n'est pas un réel négatif :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \rho_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \rho_0$$

et $\theta_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\theta_0$.
Puis : $\rho_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \rho_0$.
Donc, en utilisant la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, si $\theta_0 \neq 0$ pour qu'aucun dénominateur ne soit nul :

$$\rho_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right)} \dots \frac{\sin(\theta_0)}{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{\sin(\theta_0)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right)}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_{n+1} = \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{\sin\theta_0}{\theta_0} \quad \text{si} \quad \theta_0 \neq 0.$$

Si $\theta_0 = 0$, la suite est stationnaire.

26 Vous vérifierez que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$.
Définissons, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x}.$$

La fonction f_n admet un unique point fixe l_n tel que :

$$l_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n+1}}\right).$$

La suite (l_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 1 = l$.
Considérons alors une suite (u_n) telle que :

$$u_0 \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_n(u_n).$$

• Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} u_n < l_n$. Soit p dans $\mathbb{N}$. Alors : $u_p < l_p$. Nous en déduisons : $u_{p+1} < l_p$ et $u_{p+1} \geqslant u_p$. La suite (u_n) est alors croissante. Majorée par l_0, elle converge.
• Supposons que : $\exists m \in \mathbb{N} u_m \geqslant l_m$. On montre ensuite par récurrence que, à partir du rang $m+1$, on a : $u_n > l_n$.
Puis : $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est positive, décroissante à partir du rang $m+1$. Elle converge.
La suite (u_n) converge dans les deux cas. Sa limite a vaut 0 ou 1.
Dans le premier cas, la suite est croissante et positive. Sa limite est 1.
Dans le second cas, l'inégalité $u_n > l_n$ impose également $a = 1$.

27 **1)** Fixons $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$.
Alors : $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad 1 < l - \varepsilon \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant l + \varepsilon$.
On en déduit par récurrence : $\forall n \geqslant N \quad a_n \geqslant a_N (l-\varepsilon)^{n-N}$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
2) Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{a(a^2+1)}{x^2+1}$.
f est paire, dérivable et :

$$f'(x) = -\frac{2a(a^2+1)x}{(x^2+1)^2}.$$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$a(a^2+1)$ ↘	0

On peut donc supposer que $u_0 \in]0, a(a^2+1)]$. Cet intervalle est stable par f et f est décroissante sur cet intervalle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Bornées, elles convergent. Leurs limites sont des points fixes de $f\circ f$.
Précisons les points fixes éventuels de f, puis de $f\circ f$.

$$f(x)=x \Leftrightarrow x(x^2+1)=a(a^2+1)$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2+1)=0 \Leftrightarrow x=a.$$

$$f\circ f(x)=x \Leftrightarrow x^5-a(a^2+1)x^4+2x^3$$
$$-2a(a^2+1)x^2+x(1+a^2(a^2+1)^2)-a(a^2+1)=0.$$

Puisque toute racine réelle ou complexe de $f(x)=x$ est solution de $f\circ f(x)=x$, on peut factoriser l'équation obtenue :

$$f\circ f(x)=x \Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2+1)(x^2-a(a^2+1)x+1)=0.$$

L'équation :

$$x^2-a(a^2+1)x+1=0$$

a pour discriminant : $\Delta=(a-1)(a^2+a+2)(a(a^2+1)+2)$.
Deux cas peuvent alors se présenter :
• $a\leqslant 1$, l'équation $f\circ f(x)=x$ admet une seule racine a, donc la suite (u_n) converge vers a.
• $a>1$, l'équation admet trois racines a,b,c et ces racines sont distinctes car a n'est pas racine de :

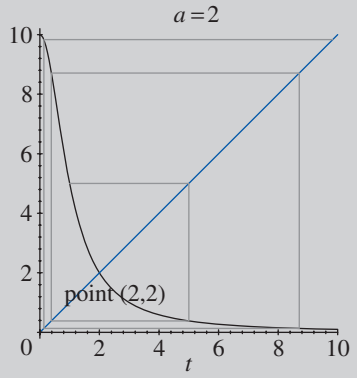
$$x^2-a(a^2+1)x+1=0.$$

Si $u_0=a$, alors la suite (u_n) est stationnaire.

Avec Maple :

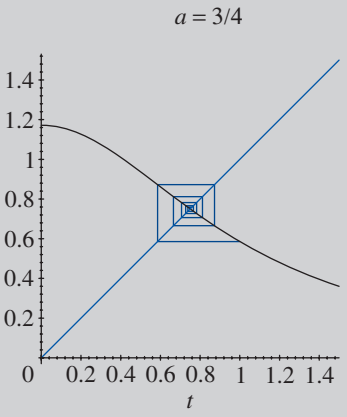
```
> restart:with(plots):
> suiteRec:=proc(f,a,n,L) local x,res,g1,g8:
  x:'x':g1:=plot({f(t),t},t=0..L,
  scaling=constrained,title='a='.a):

  res:=NULL:x:=1.0:
  to n do res:=res,[x,f(x)],[f(x),f(x)] ;x:=f(x) od:
  g8:=plot([res]):
  display({g1,g8}) ;
  end ; # suiteRec fonctionnnera qu'avec des valeurs entières de a
```




```
> restart:with(plots):
> suiteRec:=proc(f,a,A,n,L) local x,res,g1,g8:
  x:'x':g1:=plot({f(t),t},t=0..L,
  scaling=constrained,title='a='.A):

  res:=NULL:x:=1.0:
  to n do res:=res,[x,f(x)],[f(x),f(x)] ;x:=f(x) od:
  g8:=plot([res]):
  display({g1,g8}) ;
  end ;
> f:=x->75/(64*(x^2+1)):
  suiteRec(f,3/4,'3/4',10,1,5) ;
```



Sinon, $f(a)=a$, $f(b)=c$ et $f(c)=b$. De plus, on a :

$$f'(a)=-\frac{2a^2}{a^2+1}.$$

Donc : $|f'(a)|>1$.
Si la suite (u_{2n}) convergeait vers a, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{2n+1}-a|}{|u_{2n}-a|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|f(u_{2n})-a|}{|u_{2n}-a|}=|f'(a)|>1.$$

La question précédente nous montre que ceci est impossible. L'une des deux suites extraites converge donc vers b, l'autre vers c. La suite (u_n) diverge.

28 • Supposons d'abord que $l=l'=0$.
Fixons $\varepsilon>0$. Il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant N$, on ait : $|u_n|\leqslant\varepsilon$ et $|v_n|\leqslant\varepsilon$.
Soit alors $n\geqslant 2N$. Nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{k=0}^{N-1}u_kv_{n-k}+\sum_{k=N}^{n-N}u_kv_{n-k}+\sum_{k=n-N+1}^{n}u_kv_{n-k}.$$

De plus :

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1}u_kv_{n-k}\right|\leqslant\varepsilon N\,\|u\|_\infty,$$
$$\left|\sum_{k=n-N+1}^{n}u_kv_{n-k}\right|\leqslant\varepsilon N\,\|v\|_\infty,$$
$$\left|\sum_{k=N}^{n-N}u_kv_{n-k}\right|\leqslant(n-2N+1)\varepsilon^2.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc : $\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}}{n+1}\right| \leqslant \varepsilon \|u\|_\infty + \varepsilon \|v\|_\infty + \varepsilon^2$.

• Si $(l,l') \neq (0,0)$, on pose $t_n = u_n - l, s_n = v_n - l'$ et on se ramène au cas précédent.

29 **1)** L'expression de N incite à considérer l'application : φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f,g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre que φ est un produit scalaire et que N est la norme associée à ce produit scalaire.

2) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1], nous pouvons écrire :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\forall x \in [0,1](f(x))^2 = f^2(0) + 2f(0)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t + \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$$\leqslant f^2(0) + 2|f(0)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t| + \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

La relation : $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ est vraie pour tous réels a, b.

D'où :

$$|f(0)|\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2(0) + \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right).$$

Puis la relation de Schwarz nous aide à franchir l'étape suivante :

$$\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 1\,\mathrm{d}t.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\forall x \in [0,1] \quad (f(x))^2 = 2(f^2(0) + \sum_{i=1}^{p} f'^2(t)\,\mathrm{d}t) = 2N(f)^2.$$

D'où le résultat souhaité : $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{u_m}N(f)$.

3) Toutefois, si nous considérons la suite (f_n) de $E^{\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $f_n(x) = x^n$, alors nous remarquons que :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}.$$

Les normes $\|\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes car :

$$\lim_{n\to+\infty} N(f_n) = +\infty.$$

30 **1)** La fonction N est la norme classique le plus souvent noté N_1. Pour N', la seule difficulté réside dans :

$$N'(f) = 0 \Rightarrow f = 0_E.$$

Supposons $N'(f) = 0$, alors :

$$|f(0)| = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Or l'application $|f'|$ est continue, positive sur $[0,1]$, $|f'|$ est la fonction nulle, donc f est constante. De plus, $|f(0)| = 0$, donc : $f = 0_E$. Pour N'', en constatant que :

$$N''(f) = |f(0)| + N'(f'),$$

on conclut facilement.

2) Pour tout t de $[0,1]$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,\mathrm{d}x$, donc :

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On intègre alors cette inégalité entre 0 et 1 et on trouve :

$$N(f) \leqslant N'(f).$$

On en déduit que :

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

3) Notons $f_n(x) = x^n$. Il est aisé de constater que, pour $n \geqslant 2$:

$$N(f_n) = \frac{1}{n+1}, N'(f_n) = 1, \quad \text{et} \quad N''(f_n) = n.$$

On en déduit que, 2 à 2, les normes N, N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Chapitre 2

1 Soit (a,b) dans $A \times O$. O étant un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $BO(b,r)$ soit contenue dans O. Alors $BO(a+b,r) = a + BO(b,r)$ est contenue dans $A + O$, qui est donc un ouvert de E.

2 A n'est pas vide. Soit a dans A. En prenant $t = 0$, nous savons que : $0_E \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que :

$$BO(0_E, r) \subset A.$$

Si x est un vecteur de E, distinct de a, alors

$$\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in BO(0_E, r),$$

donc à A. Nous en déduisons que $x \in A$, puis que $A = E$.

2) Si E est de dimension supérieure à 1, alors il suffit de prendre un vecteur non nul a et la demi-droite vectorielle $A = \mathbb{R}^+a$ pour constater que le résultat précédent n'est plus exact.

3 **1)** F étant un sous-espace vectoriel de E, nous savons que F est fermé.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Il suffit d'utiliser l'exercice précédent pour conclure que E est le seul sous-espace vectoriel ouvert de E.

4 Soit a un point intérieur à F et $BO(a,r)(r>0)$ une boule ouverte contenue dans F. Si x est un vecteur de E différent de a, le vecteur $\frac{r}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}$ appartient à $BO(a,r)$, donc à F. F est un sous-espace vectoriel de E, donc $x-a$, puis x appartiennent à F.

5 $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$. $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \overline{U_n}$.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists p \geqslant n\ u_p \in B(a,\varepsilon)$

$\Leftrightarrow a \in \mathrm{Vad}(u)$.

6 Immédiat.

7 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant |x|$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

• Soit $x \neq 0$, il existe une suite (u_n) de rationnels qui converge vers x.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0.$$

Il existe aussi une suite (v_n) d'irrationnels qui converge vers x.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(v_n) = v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = x \neq 0.$$

Donc f a une limite uniquement en $x = 0$.

8 • Si $a > 1$, alors : $a + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant a - 1 > 0$.

Dans ce cas :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

• Si $a < -1$, alors : $a + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant a + 1 < 0$.

Dans ce cas :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

• Si $a \in [-1,1]$, un bon choix de deux suites tendant vers 0 vous permettra de prouver que f n'a de limite ni à droite, ni à gauche en 0.

9 Passons en coordonnées polaires :

$$g(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \rho(\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta)).$$

Donc $|g(x,y)| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

10 Fixons x dans E. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0_E$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right) = L.$$

De plus, pour tout n, $h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h(x)$.

Donc : $\forall x \in E \quad h(x) = L$.

11 Soit (x_n) une suite de E convergeant vers 0_E. Notons (y_n) la suite définie par :

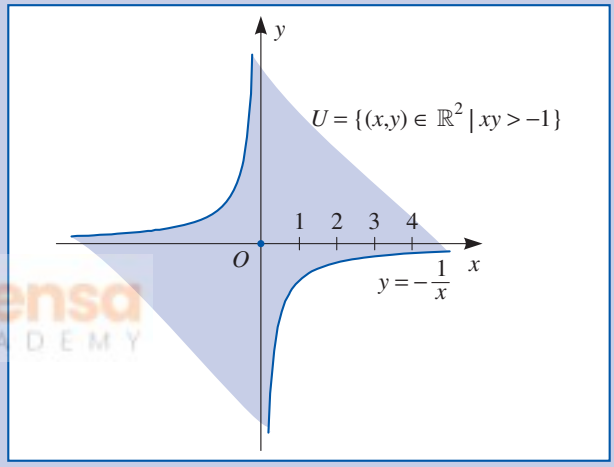
$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n = 0_E \\ \dfrac{x_n}{\|x_n\|} & \text{sinon} \end{cases}.$$

La suite (y_n) est bornée, donc la suite $(f(y_n))$ est bornée.
Or, $f(x_n) = \|x_n\| f(y_n)$. Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers 0_F. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de E tendant vers 0_E, l'application f est continue en 0_E. La linéarité permet d'écrire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x) - f(y) = f(x-y).$$

On en déduit que f est continue sur E.

12 f est définie sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy > -1\}$.



Étudions la continuité de f sur U, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Définissons g sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On peut écrire :

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = yg(xy).$$

De plus, g est continue sur $]-1,+\infty[$, l'application $((x,y) \longmapsto xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme des deux variables (x,y). Donc f est continue sur U.

13 **1)** Dans l'égalité $f(x+y) = f(x) + f(y)$, en prenant $y = 0_E$, on trouve : $f(0_E) = 0_F$.
Puis en prenant : $y = -x$, $f(-x) = -f(x)$.
Enfin, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = nf(x)$.
Soit p et q deux entiers $(q \neq 0)$. On peut écrire, pour tout x de E :

$$pf(x) = f(px) = qf\left(\frac{p}{q}x\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc : $\forall (x,r) \in E \times \mathbb{Q} \quad f(rx) = rf(x)$.
Pour tout vecteur non nul de E, il existe un rationnel $r > 0$ tel que :

$$\frac{1}{2} \leqslant r\|x\|_E \leqslant 1.$$

Donc $\|f(rx)\|_F \leqslant M$ et $\|f(x)\|_F \leqslant \dfrac{M}{r} \leqslant 2M\|x\|_E$.

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|f(x)-f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leqslant 2M\|x-y\|_E$.

L'application f est $2M-$lipschitzienne.
2) On sait que :
– f est continue sur E car lipschitzienne.
– $\forall (x,r) \in E \times \mathbb{Q} \quad f(rx) = rf(x)$.
Fixons x dans E. Les applications $(\alpha \longmapsto f(\alpha x))$ et $(\alpha \longmapsto \alpha f(x))$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$.
Elles sont égales. L'application f est linéaire.

14 D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$\forall (x_1,x_2) \in E^2 \quad |f_a(x_1)-f_a(x_2)| = |\langle x_1-x_2|a\rangle| \leqslant \|a\|\|x_1-x_2\|$.

Donc, l'application f_a est $\|a\|-$lipschitzienne sur E. D'où la continuité.
Pour tout a de E, $f_a^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E et :

$$A^\perp = \bigcap_{a\in A} f_a^{-1}(\{0\}).$$

Une intersection quelconque de fermés est un fermé, donc $A^\perp$ est un fermé de E.

15 La fonction $f-g$ est continue sur $[a,b]$ et à valeurs positives. Donc $(f-g)^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $[a,b]$, c'est-à-dire un fermé de $\mathbb{R}$. Donc $\alpha = \inf(f-g)^{-1}([0,+\infty[)$ appartient à $(f-g)^{-1}([0,+\infty[)$. L'hypothèse entraîne alors : $\alpha > 0$.
Il suffit alors de choisir $\lambda = \dfrac{\alpha}{2}$.

16 A est l'ensemble des familles de n vecteurs de E dont le déterminant est non nul. La continuité du déterminant entraîne que $A = \mathrm{Det}^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert de E.

17 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous savons que $\mathrm{rg}\,(M) \leqslant p$ si et seulement si les déterminants des matrices extraites de M d'ordre $p+1$ sont tous nuls. Soit I et J deux parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$. Considérons la fonction f, qui, à la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, associe le déterminant de la matrice $M_{p+1} = (m_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$. f apparaît comme composée des applications :

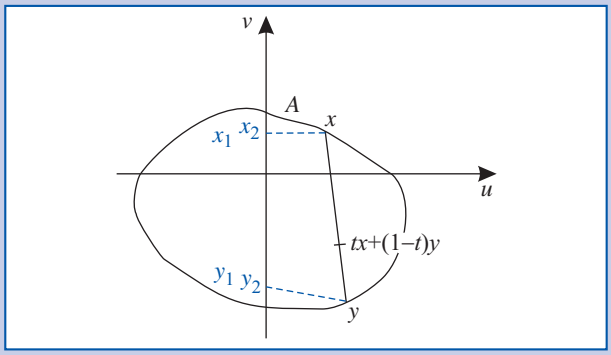
$$\varphi : \begin{cases} (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty) \\ M \longmapsto M_{p+1} = (m_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \end{cases}$$

et

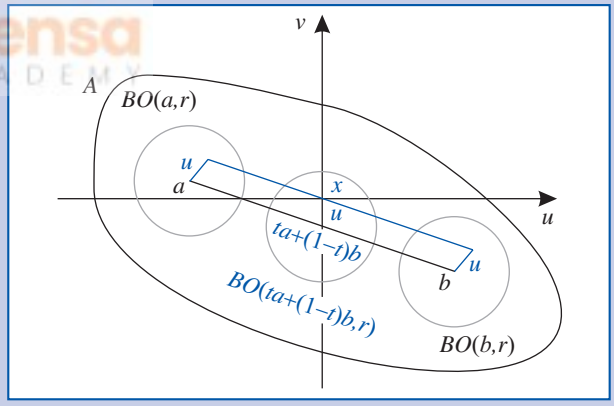
$$g : \begin{cases} (\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ M_{p+1} \longmapsto \mathrm{Det}(M_{p+1}). \end{cases}$$

φ est continue, ainsi que g. Donc f est continue et son noyau est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \mathrm{rg}\,(A) \leqslant p\}$ est donc une intersection de fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18 **1)** • Considérons $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, a, b deux points de cet ensemble et t un réel de $]0,1[$. x et y sont respectivement limites de (x_n) et (y_n), deux suites de points de A. Le point $tx+(1-t)y$ est donc limite de la suite $(tx_n+(1-t)y_n)$, qui est une suite d'éléments de A. L'ensemble des points adhérents à A est donc convexe.



• Considérons $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, a, b deux points de cet ensemble et t un réel de $]0,1[$.



• Il existe $r > 0$ tel que les boules ouvertes $BO(a,r)$ et $BO(b,r)$ soient contenues dans A.
Montrons que la boule ouverte $BO(ta+(1-t)b,r)$ est aussi contenue dans A.

$$\forall x \in BO(ta+(1-t)b,r)$$
$$x = ta+(1-t)b+[t(x-a)+(1-t)(x-b)].$$

Posons : $u = x-[ta+(1-t)b] = t(x-a)+(1-t)(x-b)$.
Alors, on a : $\|u\| < r$.

Donc, $a+u \in BO(a,r)$ et $b+u \in BO(b,r)$, puis :

$$a+u \in A \quad \text{et} \quad b+u \in A.$$

La convexité de A donne : $t(a+u)+(1-t)(b+u) = x \in A$.
L'ensemble des points intérieurs à A est donc convexe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) Soit x et y deux points de E et t dans $]0,1[$. Considérons un réel $\varepsilon > 0$ fixé. Alors on a :

$$\varphi(x) = \inf_{z\in A} d(x,z) \quad \text{et} \quad \varphi(y) = \inf_{z\in A} d(y,z).$$

Donc il existe u_1 et u_2 dans A tels que :

$$\varphi(x) \leqslant d(x,u_1) < \varphi(x) + \varepsilon \text{ et } \varphi(y) \leqslant d(y,u_2) < \varphi(y) + \varepsilon.$$

Posons $u = tu_1 + (1-t)u_2$. La convexité de A entraîne $u \in A$ et, de plus :

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(tx + (1-t)y, tu_1 + (1-t)u_2) \\ &\qquad = \|t(x-u_1) + (1-t)(y-u_2)\| \\ &\qquad \leqslant td(x,u_1) + (1-t)d(y,u_2) \\ &\qquad \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où : $\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit :

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

19 Nous remarquons d'abord que si $p < n$, alors A est vide. Si $p \geqslant n$, montrons que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est adhérente à A. Soit alors M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Si M n'est pas de rang n, la matrice extraite de M, constituée des n premières colonnes de M est singulière, donc son déterminant est nul. Appelons N cette matrice. Le déterminant de la matrice $N + \lambda I_n$ est un polynôme en λ, de degré n, qui admet 0 pour racine. Il admet au plus n racines, donc il existe a dans $\left]0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$ tel que $\mathrm{Det}(N + aI_n) \neq 0$. La matrice M_1 obtenue en substituant dans M à N la matrice $N + aI_n$ appartient à A, et :

$$\|M_1 - M\|_\infty = a < \varepsilon.$$

20 **1)** Immédiat.
2) a) Soit a un point intérieur à C. Il existe $r > 0$ tel que : $B(a,r) \subset C$. C est symétrique par rapport à O, donc :

$$B(-a,r) \subset C.$$

Si y vérifie $\|y\|_\infty < r$, alors : $y = \left(a + \frac{y}{2}\right) + \left(-a + \frac{y}{2}\right)$ est dans C. Ceci montre que : $B(0,r) \subset C$.
b) Écrivons, avec les notations de la question précédente, pour tout x non nul : $x = \frac{2\|x\|}{r}\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)$.
Ceci prouve que : $\frac{2\|x\|}{r} \in A(x)$.
c) Vérifions les propriétés définissant une norme.
• Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $j_C(x) \geqslant 0$.
• Si $j_C(x) = 0$, alors, pour tout $l > 0$, on a : $x \in lC$.
Or C est borné, donc il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout u de C, on ait : $\|u\|_\infty \leqslant M$. D'où :

$$\forall l > 0 \quad \|x\|_\infty \leqslant lM.$$

Puis : $x = 0$.

• Soit ensuite α dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$x \in lC \Leftrightarrow \alpha x \in |\alpha| lC.$$

Donc :

$$j_C(\alpha x) = \inf A(\alpha x) = \inf |\alpha| A(x) = |\alpha| \inf A(x) = |\alpha| j_C(x).$$

• L'inégalité triangulaire est moins évidente, mais fort jolie.
On fixe x, y dans $\mathbb{R}^n$ non nuls (le cas $x = 0$ ou $y = 0$ est trivial).
On pose : $t = \frac{j_C(x)}{j_C(x) + j_C(y)}$.
Nous constatons que $t \in]0,1[$. Pour tout $\lambda > j_C(x)$, $\frac{x}{\lambda} \in C$ et puisque C est fermé, $\frac{x}{j_C(x)} \in C$. De même, $\frac{y}{j_C(y)} \in C$.
La convexité de C permet d'écrire :

$$(1-t)\frac{y}{j_C(y)} + t\frac{x}{j_C(x)} = \frac{x+y}{j_C(x) + j_C(y)} \in C.$$

Puis : $j_C(x) + j_C(y) \in A(x+y)$.
Et enfin :

$$j_C(x) + j_C(y) \geqslant j_C(x+y).$$

d) Si x est tel que $j_C(x) < 1$, il existe $l < 1$ tel que $x \in lC$. Nous en déduisons $\frac{x}{l} \in C$ et, puisque $l \in]0,1[$, on a : $x \in \left[0, \frac{x}{l}\right] \subset C$. Donc, pour la norme j_C, la boule unité $BO(0,1)$ est contenue dans C.
De plus, si $x \in C = 1C$, alors $j_C(x) \leqslant 1$.
Donc la boule $BF(0,1)$ pour la norme j_C contient C.
Réciproquement, C est un voisinage de 0 de $(E, \|\|_\infty)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que tout vecteur a vérifiant $\|a\|_\infty \leqslant \varepsilon$ appartienne à C.
Ainsi : $\forall x \in E\backslash\{0_E\} \quad \frac{x}{\|x\|_\infty}\varepsilon \in C$, puis : $x \in \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_\infty C$.
Donc : $J_C(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_\infty$.
On en déduit : $J_C \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\|_\infty$. D'autre part, C est borné. Pour tout u de C, on a $\|u\|_\infty \leqslant M$. Soit x non nul dans $\mathbb{R}^n$. On a $\frac{x}{j_C(x)} \in C$. Par conséquent : $\|x\|_\infty \leqslant j_C(x)M$.
On en déduit : $\|\|_\infty \leqslant Mj_C$. Les normes $\|\ \|_\infty$ et j_C sont équivalentes. Les fermés pour ces deux normes sont les mêmes.
Or, $BO(0,1) \subset C \subset BF(0,1)$. Donc $BF(0,1) = C$.

21 **1)** Pour montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans $\mathbb{R}^p$, montrons que, si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$,

$$U \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \varnothing.$$

Tout d'abord remarquons que $U \cap U_1$ est un ouvert non vide. Donc il existe une boule ouverte B_1 de rayon $r_1 > 0$ telle que : $\overline{B_1} \subset U \cap U_1$. On montre ensuite par récurrence que, pour tout n, il existe une boule ouverte B_n, de rayon $r_n > 0$, telle que :

$$\overline{B_n} \subset U \cap \left(\bigcap_{k\leqslant n} U_k\right) \quad \text{et} \quad \overline{B_n} \subset \overline{B_{n-1}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les boules B_n sont emboîtées,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \subset U \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right).$$

Donc : $U \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \varnothing$.

2) Il suffit de considérer les ouverts $U_n = \complement_E F_n$ et d'appliquer le résultat précédent.

22 • Si $\alpha = 0$ alors, pour tout x, $f(x, \alpha x) = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ alors, pour tout $x \neq 0$, $f(x, \alpha x) = \dfrac{x^2 + \alpha^2}{\alpha}$. Et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x, \alpha x) = \alpha.$$

• Si l'on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = l$, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \lim_{x\to 0^-} f(x, \alpha x) = l$$

et cela est faux. f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

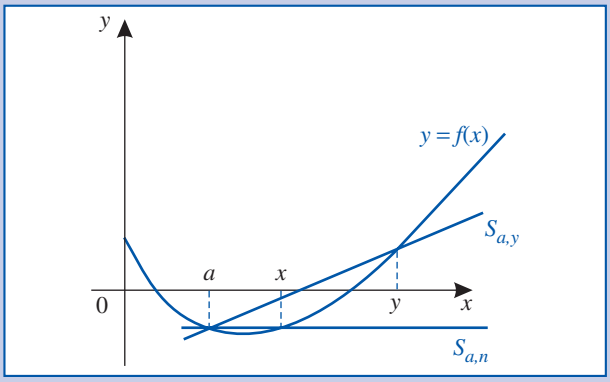
23 **a)** C'est une propriété classique des fonctions convexes.

Soit x et y tels que $a < x < y$. Notons $t = \dfrac{y-x}{y-a}$, par construction $t \in]0, 1[$ et $x = ta + (1-t)y$.

Sachant que f est convexe : $f(x) \leqslant tf(a) + (1-t)f(y)$.

En remplaçant t par $\dfrac{y-x}{y-a}$, on en déduit que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$



b) La fonction $\left(x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right)$ est croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

De plus $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(0)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(0)}{x} = 0$, donc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

c) On montre aisément que, pour tout a de $\mathbb{R}^+$,

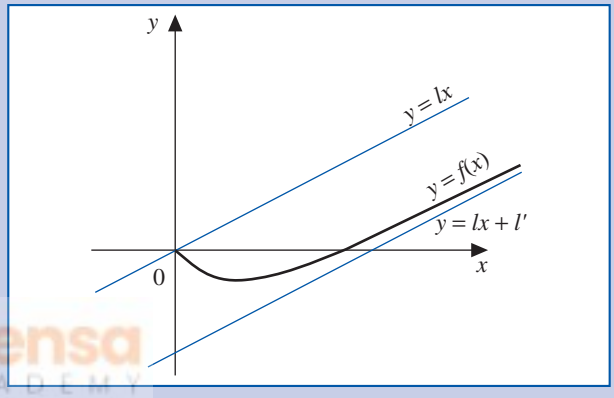
$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On sait que $\left(x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ est croissante sur $]a, +\infty[$.

Donc :

$$(0 \leqslant a < x) \Rightarrow \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant l\right)$$
$$\Rightarrow (f(x) - lx \leqslant f(a) - la).$$

La fonction $(x \longmapsto f(x) - lx)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$.



24 Toute solution du problème est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = h\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h(t) = h\left(\frac{t}{2^n}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\ldots\cos\left(\frac{t}{2^n}\right).$$

Sachant que $\cos\left(\dfrac{t}{2^n}\right)\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{t}{2^{n-1}}\right)$, on en déduit par récurrence que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \forall n \in \mathbb{N}^* h(t) = h\left(\frac{t}{2^n}\right)\frac{t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\frac{\sin t}{t}.$$

Notons l la limite de la fonction h en 0. En fixant t et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la dernière égalité, on obtient :

$$h(t) = l\frac{\sin t}{t}.$$

Réciproquement, si $h(t) = l\dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $h(0) = l$, alors h est solution du problème.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

25 Considérons différents cas.

Si $x_0 \in \mathbb{Q}^*$, $f(x_0) = \dfrac{1}{q}$. Il existe une suite (u_n) de rationnels convergeant vers x_0. Or, $f(u_n) = 0$, donc f n'est pas continue en x_0.

Si $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, soient $\varepsilon > 0$ fixé et (u_n) une suite de rationnels convergeant vers x_0. Posons $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. Il existe N dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ et un nombre fini de rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que :

$$q \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad x_0 - 1 < \frac{p}{q} < x_0 + 1.$$

Par conséquent, pour n assez grand, on aura : $q_n > N$, donc $f(u_n) < \varepsilon$. f est donc continue en x_0. f est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

26 **1)** On procède par contraposée.

• Supposons que : $A \cap B \neq \varnothing$.

Soit $x \in A \cap B$, il est immédiat que : $d(x, A) = d(x, B) = 0$.

Donc : $\exists x \in E \quad d(x, A) + d(x, B) = 0$.

• Réciproquement, supposons que :

$$\exists x \in E \quad d(x, A) + d(x, B) = 0.$$

Sachant que $d(x, A)$ et $d(x, B)$ sont des réels $\geqslant 0$, on peut dire :

$$\exists x \in E \quad d(x, A) = d(x, B) = 0.$$

Or $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est un point adhérent à A.

Donc x est adhérent à A et à B. Or A et B sont fermés, donc $x \in A \cap B$ et $A \cap B \neq \varnothing$.

2) • On pose $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

D'après ce qui précède, f est continue sur E.

Il est immédiat que :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

• $A \subset f^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\right)$ et $B \subset f^{-1}\left(\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[\right)$.

Les ensembles $f^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\right)$ et $f^{-1}\left(\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[\right)$ sont des ouverts disjoints de E.

27 Si la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$, elle possède une unique valeur d'adhérence.

Réciproquement, supposons que la suite (u_n) possède une unique valeur d'adhérence l. La continuité de f nous indique que $f(l)$ est valeur d'adhérence de la suite (u_n). En effet, si la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l, alors la suite $(f(u_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(l)$. Par conséquent, on a : $f(l) = l$.

Il reste à établir que la suite (u_n) converge vers l. Choisissons $\varepsilon > 0$. Vous avez vu en première année que la fonction f, continue sur $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ est bornée sur $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Il existe donc $M > 0$ tel que $f([l-\varepsilon, l+\varepsilon]) \subset [-M, M]$. Si $-M < l-\varepsilon$, l'intervalle $[-M, l-\varepsilon]$ ne contient pas de valeur d'adhérence de la suite (u_n). De même avec l'intervalle $[l+\varepsilon, M]$ si $l+\varepsilon < M$. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \notin [-M, l-\varepsilon] \cup [l+\varepsilon, M].$$

Soit alors $p \geqslant N$ tel que : $u_p \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Alors, pour tout $n \geqslant p$, on a : $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. La suite (u_n) converge donc vers l.

28 **1)** Notons $G = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f.

Soit (x, y) un point adhérent à G et $(x_n, f(x_n))$ une suite d'éléments de G qui converge vers (x, y). On a donc : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. De plus, f est continue en x, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

On en déduit que $y = f(x)$ et $(x, y) \in G$. Donc G est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) Définissons g en posant $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

La fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Cependant son graphe est

$$G = \{(x, y); xy = 1\} \cup \{(0,0)\}.$$

G est la réunion de deux fermés. En effet, $\{(x, y); xy = 1\}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

3) Montrons par contraposée que, si f est bornée et non continue sur $\mathbb{R}$, alors son graphe G n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est bornée et admet au moins un point x de discontinuité.

Comme l'indique le conseil, on introduit $\varepsilon > 0$ et (x_n) une suite convergeant vers x et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

La suite $(f(x_n))$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. On peut en extraire une suite convergente $(f(x_{\phi(n)}))$.

Notons $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)})$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} (x_{\phi(n)}, f(x_{\phi(n)})) = (x, y)$$

donc (x, y) est un point adhérent à G.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_{\phi(n)}) - f(x)| \geqslant \varepsilon$,

donc : $|y - f(x)| \geqslant \varepsilon > 0 \quad$ et $\quad y \neq f(x)$..

D'où : $(x, y) \notin G$

Ceci prouve que G n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

29 • Si l'application f est continue, soit A une partie non vide de E et $x \in \overline{A}$. Nous savons que x est limite d'une suite (x_n) de points de A. La continuité de f entraîne que $f(x)$ est limite de la suite $(f(x_n))$, donc que $f(x) \in \overline{f(A)}$. D'où :

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

• Supposons que l'application f vérifie :

$$\forall A \subset E \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Soit B une partie de F. Posons $A = \complement_E f^{-1}(B)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Alors :

$$\overline{A} = \complement_E \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}} \text{ et } f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

D'où :

$$f(\complement_E \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}) \subset \overline{\complement_E B} = \complement_E \overset{\circ}{B}.$$

Puis :

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}.$$

• Supposons que l'application f vérifie :

$$\forall B \subset F \quad f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}.$$

Soit C une partie de F. Posons $B = \complement_F C$. On a :

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = f^{-1}(\complement_F \overline{C}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}.$$

Prenons les complémentaires :

$$\complement_E \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}} \subset \complement_E(f^{-1}(\complement_F \overline{C})),$$

puis :

$$\overline{\complement_E f^{-1}(B)} \subset \complement_E(f^{-1}(\complement_F \overline{C})) = f^{-1}(\overline{C}).$$

Et donc :

$$\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\overline{C}).$$

• Supposons que f vérifie :

$$\forall C \subset F \quad \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\overline{C}).$$

Montrons que l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E pour établir que f est continue.

Soit B un fermé de F et $x \in \overline{f^{-1}(B)}$.

Alors $x \in f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$. Donc : $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$.

Chapitre 3

1 Soit (u_n) une suite de Cauchy de E. A est une partie dense de E, donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe x_n dans A tel que :

$$\|u_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

La suite (x_n) est de Cauchy car :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$$
$$\|x_p - x_{p+n}\| \leqslant \|x_p - u_p\| + \|u_p - u_{p+n}\| + \|u_{p+n} - x_{p+n}\|.$$

Elle converge. On note x sa limite. La suite (u_n) converge également vers x.

2 Si E est complet, soit (u_n) une suite de E telle que, pour tout n, on ait : $\|u_n - u_{n+1}\| \leqslant 2^{-n}$. Montrons que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. En effet, nous avons :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \|u_p - u_{p+n}\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|u_{p+k-1} - u_{p+k}\| \leqslant 2^{-p+1}.$$

• Réciproquement, si (u_n) est une suite de Cauchy de E, on peut trouver N_1 dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geqslant N_1 \quad \forall q \geqslant 0 \quad \|u_p - u_{p+q}\| \leqslant 1.$$

On choisit $p \geqslant N_1$ et on pose : $\varphi(0) = p$. Puis il existe $N_2 \geqslant N_1$ tel que :

$$\forall p \geqslant N_2 \quad \forall q \geqslant 0 \quad \|u_p - u_{p+q}\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

On choisit alors $m \geqslant N_2$ et on pose : $\varphi(1) = m$.

Par construction : $\|u_{\varphi(0)} - u_{\varphi(1)}\| \leqslant 2^{-0}$.

Puis on itère le procédé et on construit ainsi une suite extraite de la suite (u_n) vérifiant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+1)}\| \leqslant 2^{-n}.$$

Cette suite converge. Or elle est extraite de la suite de Cauchy (u_n), donc la suite (u_n) converge.

3 **1)** Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque φ est lipschitzienne sur $]a,b[$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in]a,b[^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{|b-a|}{N+1} \leqslant \alpha.$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p \geqslant 0$, on a :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |v_{n+p} - v_n| \leqslant \varepsilon.$$

2) Soit $k > 0$ tel que, pour tous x et y de $]a,b[$: $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leqslant k|x-y|$.

En particulier, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $]a,b[$, on a :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x)| = |\varphi_0(u_n) - \varphi_0(x)| \leqslant k|a + \frac{|b-a|}{n+1} - x|.$$

Fixons x et faisons tendre n vers $+\infty$, nous obtenons : $|\varphi_0(a) - \varphi_0(x)| \leqslant k|a-x|$.

On procède de même en b. La fonction φ_0 est lipschitzienne sur $[a,b]$.

4 L'application f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (|x-y| \leqslant r \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1).$$

Pour tout réel x, notons $n = \mathrm{E}\left(\frac{|x|}{r}\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si $x > 0$, $|f(x) - f(0)| \leqslant |f(x) - f(nr)|$
$$+ \sum_{k=1}^{n} |f(kr) - f((k-1)r)| \leqslant n + 1 \leqslant \frac{|x|}{r} + 1.$$
On en déduit $|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{r} + 1 + |f(0)|$.
Pour $x \leqslant 0$, on procède de la même manière.

5 On montre que f vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$$
$$x \geqslant A \quad \text{et} \quad y \geqslant A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité donne :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour cet α, la suite $(f(n\alpha))_n$ converge, donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$$
$$n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N \Rightarrow |f(n\alpha) - f(m\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit n_0 la partie entière de $\frac{x}{\alpha}$ et m_0 celle de $\frac{y}{\alpha}$, l'inégalité suivante permet de conclure :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(n_0\alpha)|$$
$$+ |f(n_0\alpha) - f(m_0\alpha)| + |f(m_0\alpha) - f(y)|.$$

Il suffit de prendre n_0 et m_0 supérieurs à N. Ceci est réalisé pour $A = (N + 1)\alpha$.

6 L'application définie sur $[1, +\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne, donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$. En effet, appliquons l'inégalité des accroissements finis à cette fonction entre x et y :
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2} |x - y|.$$
Mais l'application $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

7 Considérer la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée de la réunion des boules $BO((-3, 0), 1)$, $BO((3, 0), 1)$ et du segment $[-2, 2] \times \{0\}$.

8 Supposons A connexe par arcs. Soit $(a, f(a)), (b, f(b))$ deux points de G. Il existe un arc φ d'origine a et d'extrémité b contenu dans A. L'application de $[0,1]$ dans G, qui à t associe $(\varphi(t), f(\varphi(t)))$, définit un arc d'origine $(a, f(a))$ et d'extrémité $(b, f(b))$ contenu dans G.
Soit G est connexe par arcs. A est l'image de G par la projection continue $(x, f(x)) \longmapsto x$.
Soit F de A dans $G : x \longmapsto (x, f(x))$. F est un homéomorphisme de A dans G.
Vous en déduirez que A est connexe par arcs si et seulement si G l'est.

9 **1)** Soit (a_1, b_1), (a_2, b_2) deux éléments de $A \times B$. Il existe un arc f contenu dans A, d'origine a_1 et d'extrémité a_2 et un arc g contenu dans B d'origine b_1 et d'extrémité b_2. L'application $h : [0, 1] \to E \times E, t \mapsto h(t) = (f(t), g(t))$ définit un arc contenu dans $A \times B$, d'origine (a_1, b_1) et d'extrémité (a_2, b_2).
2) L'application $(x, y) \mapsto x + y$ est continu de $E \times E$ dans E, et l'image de la partie connexe par arcs $A \times B$ est $A + B$.

10 **1)** Si $A = \varnothing$ ou $A = E$, alors χ_A est constante, donc continue sur E.
Dans la suite, on suppose $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$. On note x un élément de A, y un élément de $\complement_E A$ et on désigne par φ l'application de $[0, 1]$ dans E définie par $\varphi(t) = tx + (1 - t)y$.
L'application $\chi_A \circ \varphi$ est une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'image est $\{0, 1\}$. Cette image n'est pas un intervalle et le théorème des valeurs intermédiaires prouve que $\chi_A \circ \varphi$ n'est pas continue. Or φ l'est, donc χ_A ne l'est pas.
La fonction caractéristique χ_A est continue si et seulement si $A = \varnothing$ ou $A = E$.
2) Soit A une partie ouverte et fermée de E. Considérons l'application caractéristique de A, χ_A. L'image réciproque de tout fermé de $[0,1]$ est un fermé de E. Donc l'application χ_A est continue.
Les parties ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé sont donc $\varnothing$ et E.

11 Supposons $\mathfrak{O}_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs. Choisissons A, B dans $\mathfrak{O}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\mathrm{Det}(A) = 1$ et $\mathrm{Det}(B) = -1$, puis une application continue f de $[0,1]$ dans $\mathfrak{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $f(0) = A, f(1) = B$. Composons alors f avec l'application Det qui est continue. L'application $\mathrm{Det} \circ f$ est continue sur $[0,1]$, mais $\mathrm{Det} \circ f([0, 1]) = \{-1,1\}$, ce qui est impossible.

12 On considère, pour tout n, un élément a_n de E_n. La suite (a_n) ainsi construite est une suite d'éléments du compact A. Il en existe une suite extraite qui converge vers un élément a de A. De plus, pour tout entier p, la suite $(a_n)_{n \geqslant p}$ est contenue dans E_p. Or, E_p est fermé.
Donc a appartient à E_p. L'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ contient a.

13 Soit (u_n) une suite de Cauchy. Elle est bornée. Il existe donc $K > 0$ tel que, pour tout n, u_n soit dans $BF(0, K)$.
La suite $\left(\frac{u_n}{K}\right)$ est une suite du compact $BF(0, 1)$. Elle possède une suite extraite convergente. Il en est donc de même de (u_n).

14 • On suppose que l'image réciproque par f de tout compact est un compact. Soit $M > 0$ fixé.
Alors $f^{-1}([-M, M])$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc il existe $A > 0$ tel que : $f^{-1}([-M, M]) \subset [-A, A]$.
On en déduit :

$$(\forall x > A \quad |f(x)| > M) \quad \text{et} \quad (\forall x < -A \quad |f(x)| > M).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Soit A un compact de $\mathbb{R}$. A est borné, donc il existe $M > 0$ tel que : $A \subset [-M, M]$. D'après l'hypothèse, il existe $B > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}(|x| > B \Rightarrow |f(x)| > M)$.
Ceci s'écrit également :

$$f^{-1}(A) \subset [-B, B],$$

donc $f^{-1}(A)$ est borné. De plus, $f^{-1}(A)$ est fermé, en tant qu'image réciproque d'un fermé. C'est donc un compact de $\mathbb{R}$.

15 Que pensez-vous de l'image d'un compact par une application continue ?

16 Soit y dans F, la continuité de f permet d'affirmer que $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ est un fermé de F, donc un fermé de E puisque F est fermé. De plus, l'hypothèse

$$\lim_{\substack{N(x)\to+\infty \\ x\in F}} f(x) = +\infty$$

montre que $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ est une partie bornée de E. C'est donc un compact de E et il suffit maintenant de considérer la restriction de f à ce compact pour conclure.

17 L'application $x \longmapsto \|x\|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ et K est un compact de E. Cette application est donc bornée et atteint sa borne supérieure.

18 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc les normes sur cet espace sont équivalentes.
Cet ensemble contient les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donc il n'est pas borné.

19 Revoyez l'exercice 8 de ce chapitre.

20 K est borné, donc contenu dans une boule ouverte $BO(0, R)$.

21 On munit $E \times E$ de la norme produit.
1) $\overline{A}$ est un compact de E, donc $\overline{A} \times \overline{A}$ est compact dans $E \times E$. De plus, l'application $(x, y) \longmapsto \|x - y\|$ est continue sur $E \times E$. Elle atteint son maximum en au moins un point (a, b) de $\overline{A} \times \overline{A}$.
2) Si $a = b$, alors $\delta(\overline{A}) = 0$ et $\overline{A} = \{a\}$. Puis $\overset{\circ}{A} = \varnothing$.
Si $a \neq b$, supposons a intérieur à A. Il existe $r > 0$ tel que :

$$BO(a, r) \subset A.$$

Le point $a' = a - \dfrac{r}{2\|b-a\|}(b-a)$ est bien défini.
Il appartient à A et vérifie : $d(a', b) > d(a, b)$.
Nous obtenons une contradiction.
3) D'après la question 2), a et b sont dans la frontière de A, c'est-à-dire $\overline{A} \backslash A^{\circ}$. On en déduit que $\delta(\overline{A})$ est le diamètre de la frontière de A.
De plus, $A \subset \overline{A}$, donc : $\delta(A) \leqslant \delta(\overline{A})$. On suppose que : $\delta(A) < \delta(\overline{A})$ et on pose :

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\delta(\overline{A}) - \delta(A))$$

et a, b tels que :

$$\|a - b\| = \delta(\overline{A}).$$

Il existe a_1 et b_1 dans A tels que :

$$\|a - a_1\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|b - b_1\| < \varepsilon.$$

Or :

$$\|a - b\| \leqslant \|a - a_1\| + \|a_1 - b_1\| + \|b_1 - b\|.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \delta(A) &\geqslant \|a_1 - b_1\| \geqslant \|a - b\| - \|a_1 - b_1\| - \|b_1 - b\| \\ &\geqslant \delta(\overline{A}) - 2\varepsilon > \delta(A). \end{aligned}$$

Ce qui est absurde.

22 **1)** La linéarité de D est immédiate. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{\|D(X^n)\|}{\|X^n\|} \geqslant n$$

2) La linéarité de f est immédiate.
De plus, pour tout polynôme :

$$P = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X^i, \ f(P) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad f(D(P)) = \alpha_1.$$

Par conséquent :

$$|f(P)| = |\alpha_0| \leqslant \|P\| \quad \text{et} \quad |f(D(P))| = |\alpha_1| \leqslant \|P\|.$$

Les applications linéaires f et $f \circ D$ sont continues.

23 Si φ est continue, $\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ image réciproque d'un fermé, est un fermé. Réciproquement, si φ n'est pas continue, φ n'est pas bornée sur la sphère unité. Il existe donc une suite (x_n) telle que, pour tout n,

$$\|x_n\| = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} |\varphi(x_n)| = +\infty.$$

Choisissons y dans E tel que : $\varphi(y) = 1$ et considérons la suite définie par : $y_n = y - \dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}$. Il s'agit d'une suite d'éléments de $\operatorname{Ker} \varphi$ convergeant vers y. Or : $y \notin \operatorname{Ker} \varphi$.$\operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas un fermé.

24 Soit (x_n) une suite de E tendant vers 0_E. Notons (y_n) la suite définie par :

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n = 0_E \\ \dfrac{x_n}{\|x_n\|^{1/2}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors la suite (y_n) tend vers 0_E, donc la suite $(f(y_n))$ est bornée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, $f(x_n) = \|x_n\|^{\frac{1}{2}} f(y_n)$. Donc la suite $(f(x_n))$ tend vers 0_F. L'application f continue en 0_E est donc continue.

25 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Notons G un supplémentaire de F et p le projecteur sur G parallèlement à F. L'application p est continue sur E car linéaire et E est de dimension finie. $F = \text{Ker}\ (p) = p^{-1}(\{0_E\})$ est l'image réciproque d'un fermé. Donc F est un fermé de E.

26 Il suffit de montrer que l'application : $x \longmapsto \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i)$ est une norme sur E, puis d'utiliser le fait que toutes les normes sur E sont équivalentes car E est de dimension finie.

27 **1)** et **2)** Les rotations et symétries orthogonales de $\mathbb{R}^2$ sont des isométries. Donc $\|f\|_L = 1$.
3) Si f est l'homothétie de rapport λ, alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \|f(x, y)\| = |\lambda| \|(x, y)\|.$$

On en déduit : $\|f\|_L = |\lambda|$.
4) Soit f le projecteur sur $\mathbb{R}(1, 0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, 1)$. L'égalité $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$ prouve que :

$$f(x, y) = (x - y, 0).$$

Donc :

$$\|f(x, y)\|^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \leqslant 2(x^2 + y^2)$$

et

$$\|f(x, y)\| \leqslant \sqrt{2} \|(x, y)\|.$$

De plus : $\|f(1, -1)\| = 2 = \sqrt{2}\|(1, -1)\|$.
On en déduit : $\|f\|_L = \sqrt{2}$.

28

$$|f(P)| = |\alpha_0| \leqslant \|P\|.$$

Puis : $\|f\| \leqslant 1$. Or $f(1) = 1$. D'où : $\|f\| = 1$.

$$|f(D(P))| = |\alpha_1| \leqslant \|P\|.$$

Puis : $\|f \circ D\| \leqslant 1$. Or : $f \circ D(X) = 1$. D'où : $\|f \circ D\| = 1$.

29 **1)** f est une application de E dans E, il suffit d'en prouver la linéarité. Soit (x, y) deux éléments de E et (α, β) deux scalaires.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to +\infty} (\varphi_n(\alpha x + \beta y)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\alpha \varphi_n(x) + \beta \varphi_n(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

2) Notons $\|\ \|$ une norme sur E, N la norme d'endomorphisme associée.
• Supposons que la suite (φ_n) converge dans $\mathcal{L}(E)$ et notons u l'endomorphisme limite de la suite (φ_n). Par définition,

$$\lim_{n \to +\infty} N(\varphi_n - u) = 0.$$

Fixons un élément x de E. Pour tout n :

$$\|\varphi_n(x) - u(x)\| \leqslant N(\varphi_n - u)\|x\|.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} N(\varphi_n - u) = 0$. Par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n(x) - u(x)\| = 0.$$

Donc, pour tout x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = u(x)$.
• Réciproquement, supposons que, pour tout x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E.
On sait que l'application f définie par : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$ est un endomorphisme de E.
Montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} N(f - \varphi_n) = 0$.
Notons $p = \dim E, (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ tel que : $\|x\| \leqslant 1$.

$$\|(f - \varphi_n)(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \|(f - \varphi_n)(e_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|(f - \varphi_n)(e_i)\|.$$

Donc $N(f - \varphi_n) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|(f - \varphi_n)(e_i)\|$. Or, pour tout i,

$$\lim_{n \to +\infty} \|(f - \varphi_n)(e_i)\| = 0.$$

Par encadrement, on peut conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} N(f - \varphi_n) = 0$.

30 • Pour toute matrice A :

$$|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = N_1(A).$$

De plus $\operatorname{tr}(I_n) = n = N_1(I_n)$, donc $\|\operatorname{tr}\|_1 = 1$.
• L'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour toute famille de n réels positifs $(|a_{1,1}|, \ldots, |a_{n,n}|)$ assure que :

$$|\operatorname{tr}(A)|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2.$$

Donc $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n} N_2(A)$. On a l'égalité :

$$\operatorname{tr}(I_n) = n = \sqrt{n} N_2(I_n).$$

Donc $\|\operatorname{tr}\|_2 = \sqrt{n}$.
• Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \leqslant n N_\infty(A)$$

et l'égalité $\operatorname{tr}(I_n) = n N_\infty(I_n)$ permet de conclure que :

$$\|\operatorname{tr}\|_\infty = n.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

31 L'application Π de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

$$(A, B) \longmapsto AB$$

est bilinéaire, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Donc, il existe une constante k telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$$

32 Soit u_0 dans E, considérons la suite (u_n) définie par u_0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Nous allons établir que cette suite converge vers un point fixe de f.

• La relation, appliquée avec $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$, nous donne :

$$N(u_{n+2} - u_{n+1}) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} N(u_{n+1} - u_n).$$

Or : $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \in]0,1[$. Posons $k = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N(u_{n+2} - u_{n+1}) \leqslant k^{n+1} N(u_1 - u_0).$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad N(u_{n+p} - u_n) \leqslant \sum_{j=1}^{p} N(u_{n+j} - u_{n+j-1})$$

$$\leqslant N(u_1 - u_0) \frac{k^n}{1-k}.$$

La suite (u_n) est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge vers u dans $\mathbb{R}^2$.

• La relation vérifiée par f nous donne :

$$N(u - f(u)) \leqslant N(u - u_{n+1}) + N(u_{n+1} - f(u))$$

$$\leqslant N(u - u_{n+1}) + \alpha N(u_{n+1} - u_n) + \alpha N(f(u) - u)$$

$$0 \leqslant (1-\alpha) N(u - f(u)) \leqslant N(u - u_{n+1}) + \alpha N(u_{n+1} - u_n)$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} N(u - u_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} N(u_{n+1} - u_n) = 0,$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} N(u - f(u)) = 0.$$

Ceci implique : $f(u) = u$.

• Supposons que u et v soient points fixes de f.

$$N(f(u) - f(v)) \leqslant \alpha N(f(u) - u) + \alpha N(f(v) - v) = 0.$$

Donc : $f(u) = f(v) = u = v$.

33 **1)** Soit a et b deux vecteurs distincts de $E \backslash \{0_E\}$.

Si $0_E \notin [a, b]$, alors l'application $t \longrightarrow (1-t)a + tb$ est un chemin d'extrémités a et b.

Si $0_E \in [a, b]$, alors il est possible (dim $E \geqslant 2$) de trouver c dans E tel que $0_E \notin [a, c]$ et $0_E \notin [c, b]$. Dans ce cas, l'application :

$$t \longrightarrow \begin{cases} (1-2t)a + 2tc \text{ si } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ (2-2t)c + (2t-1)b \text{ si } t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

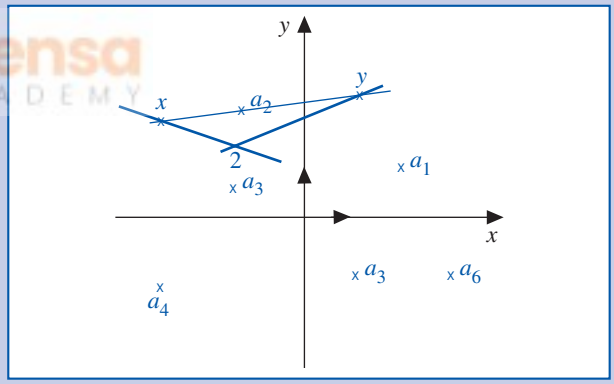
convient.

2) Supposons qu'il existe un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé, $(E, |||)$, de dimension supérieure à 2. L'application restriction de f de $E \backslash \{0_E\}$ sur $f(E \backslash \{0_E\})$ est continue, mais $E \backslash \{0_E\}$ est connexe par arcs et $f(E \backslash \{0_E\}) = \mathbb{R} \backslash f(0_E)$ ne l'est pas.

34 **1)** Notons $A = \mathbb{C} \backslash \{a_1, \ldots, a_p\}$. Prenons x, y dans A.

Si $[x, y]$ ne contient aucun des a_i, l'application f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$: $t \longmapsto ty + (1-t)x$ convient.

Sinon, identifions un complexe et son image dans le plan complexe et remarquons qu'il existe un nombre fini de droites passant par x (respectivement y) et rencontrant l'un des a_i. On peut donc trouver deux droites D et D', passant respectivement par x et y, sécantes en z et ne rencontrant aucun des a_i.



2) Soit A, B deux matrices de $\mathfrak{GL}_n(\mathbb{C})$. Posons :

$$M(z) = (1-z)A + zB \quad \text{et} \quad P(z) = \text{Det}(M(z)).$$

$P(z)$ est un polynôme en z, non nul car $P(1) = \text{Det}(B) \neq 0$. Soit $\{a_1, \ldots, a_p\}$ l'ensemble des zéros de P et $U = \mathbb{C} \backslash \{a_1, \ldots, a_p\}$.0 et 1 sont dans U et U est connexe par arcs. Il existe donc une application continue f de [0,1] dans U, telle que : $f(0) = 0, f(1) = 1$. L'application g de $[0, 1]$ dans $\mathfrak{GL}_n(\mathbb{C})$: $t \longmapsto M(f(t))$, est continue et $g(0) = A, g(1) = B$. $\mathfrak{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Soit A, B deux matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice nulle 0 est diagonalisable. L'application de [0,1] dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $t \longmapsto tA$ définit un arc d'origine 0 et d'extrémité A.

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est étoilé par rapport à O, donc connexe par arcs.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

35 Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, on ait : $|f(x)| \leqslant 1$. f est bornée sur $[0,A]$ et sur $[A,+\infty[$.
Si f est nulle, elle est bornée.
Supposons f non nulle. Il existe x_0 tel que $f(x_0) = c \neq 0$ et $B > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant B, |f(x)| \leqslant \frac{c}{2}$. Il suffit ensuite de considérer la restriction de f au compact $[0, B]$.
Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant C$, on ait : $|f(x)| \leqslant \frac{c}{2}$. f est uniformément continue sur $[0, C+1]$ car $[0, C+1]$ est compact.
Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0, C+1]^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

De plus : $\forall (x,y) \in [C, +\infty[^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
Prenons : $\alpha_1 = \min(\alpha, 1)$. Vous vérifierez que :

$$\forall (x,y) \in [0, +\infty[^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

36 **1)** On suppose la suite (x_n) non bornée. On appelle a sa valeur d'adhérence et on considère le compact $BF(a,1)$. On sait que : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad x_n \in BF(a,1)$. Puisque la suite n'est pas bornée, il existe $p \geqslant n$ tel que $x_p \notin B(a,1)$. La partie A_n de $\mathbb{N}$ définie par : $A_n = \{q > n; x_q \notin B(a,1)\}$ est non vide et minorée par n. Elle possède un plus petit élément $m+1$. Plus précisément :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m \geqslant N \quad (x_m \in BF(a,1) \quad \text{et} \quad x_{m+1} \notin B(a,1)).$$

On peut donc extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que, pour tout n :

$$x_{\varphi(n)} \in BF(a,1) \quad \text{et} \quad x_{\varphi(n)+1} \notin B(a,1).$$

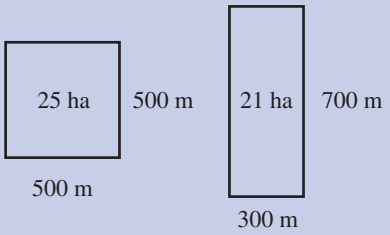
2) Pour tout $n, x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)}) \in f(BF(a,1))$. La suite $(x_{\varphi(n)+1})$ est contenue dans le compact :

$$f(BF(a,1))\backslash B(a,1),$$

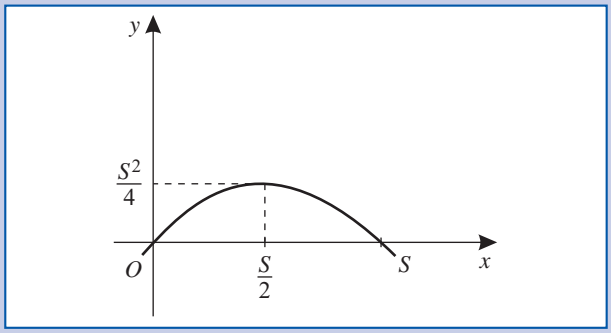
elle possède une valeur d'adhérence distincte de a. Ceci est impossible. Donc la suite (x_n) est bornée. Nous pouvons en conclure qu'elle converge car nous savons qu'une suite bornée n'ayant qu'une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}^n$ converge.

37 **1)** La fonction $h : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \cdots + x_n$ est une fonction polynôme des n variables $(x_1, \ldots, x_n)$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^{+n}$ et $K = h^{-1}(\{S\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^{+n}$, donc de $\mathbb{R}^n$. De plus, les coordonnées d'un élément de K sont comprises entre 0 et S.
L'ensemble K est une partie fermée et bornée $\mathbb{R}^n$, c'est un compact.

2) Notons P la fonction : $(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i$.
C'est une fonction polynôme des n variables $(x_1, \ldots, x_n)$, elle est continue sur $\mathbb{R}^n$. Donc elle est bornée et atteint son maximum sur le compact K.
Le paysan avisé sait qu'entre deux champs de même périmètre, celui qui est carré a une plus grande aire.



L'élève de terminale S sait que la fonction $(x \longmapsto x(S-x))$ atteint son maximum sur $[0, S]$ en $x = \frac{S}{2} = S - x$.



Remarquez que ces deux résultats correspondent au cas $n = 2$ de notre problème.
Pour le cas général, si l'un des x_i est nul, alors $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Donc le maximum de P sur K est atteint en un point dont toutes les composantes sont strictement positives.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un tel point de K dont les composantes ne sont pas toutes égales. On suppose que $x_1 \neq x_2$.
On a :

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right) \in K$$

et

$$x_1 x_2 < \frac{x_1+x_2}{2}\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Donc la fonction P n'est pas maximale en $(x_1, \ldots, x_n)$. Elle atteint son maximum sur K au point dont toutes les composantes sont égales à $\frac{S}{n}$.

$$\textbf{3)}(*)\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n.$$

L'inégalité (*) permet de conclure que la moyenne géométrique de n nombres positifs est inférieure à la moyenne arithmétique.

38 **1)** L'application de K dans $\mathbb{R} : x \longmapsto \|x - f(x)\|$ est continue en tant que composée d'applications continues et K est compact, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe a dans K tel que :

$$\|a - f(a)\| = \inf_{x \in K} \|x - f(x)\|.$$

Montrons que $f(a) = a$.
Si $f(a) \neq a$, alors : $\|f(a) - f(f(a))\| < \|a - f(a)\|$,
ce qui contredit : $\|a - f(a)\| = \inf_{x \in K} \|x - f(x)\|$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrons ensuite l'unicité du point fixe. Supposons l'existence de deux points fixes a et b distincts. Alors :

$$\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\| < \|a - b\|.$$

Ceci est impossible.

2) Soit (x_n) une suite récurrente associée à f. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \|x_n - a\|$.
S'il existe un rang p tel que : $x_p = a$, alors la suite est stationnaire et converge vers a.
Sinon, on a, pour tout n :

$$\|x_{n+1} - a\| = u_{n+1} < \|x_n - a\| = u_n.$$

La suite réelle (u_n) est décroissante positive. Elle converge. Soit l sa limite. Montrons que $l = 0$.
Si $l > 0$, la suite (x_n) étant une suite du compact K, on peut en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, de limite x. On a alors :

$$\|x - a\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)} - a\| = l.$$

Puis :

$$l = \lim_{n\to+\infty} \|f(x_{\varphi(n)}) - a\| = \|f(x) - f(a)\| < \|x - a\| = l$$

car $x \neq a$. Ce qui est absurde.

39 **1)** Soit $x \in A$, et (x_n) la suite définie par : $x_0 = x$ et, pour tout n, $x_{n+1} = f(x_n)$. A est compact donc cette suite admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers c. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| = 0.$$

Or, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geqslant \|x_{\varphi(n+1)-1} - x_{\varphi(n)-1}\|$,
et, par récurrence : $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geqslant \|x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - x\|$.
La suite $(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ est une suite d'éléments de A, qui converge vers x. Donc : $x \in \overline{f(A)}$.

2) Soit x et y dans A, et $(x_n), (y_n)$ les suites récurrentes associées. Il existe une suite extraite de la suite $(x_n), (x_{\varphi(n)})$ qui converge dans A. On considère alors la suite $(y_{\varphi(n)})$ du compact A. Il existe une suite extraite de cette suite, $(y_{\psi\circ\varphi(n)})$, qui converge dans A. Les suites $(x_{\psi\circ\varphi(n)})$ et $(y_{\psi\circ\varphi(n)})$ sont convergentes, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{\psi\circ\varphi(n+1)} - x_{\psi\circ\varphi(n)}\| = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_{\psi\circ\varphi(n+1)} - y_{\psi\circ\varphi(n)}\| = 0.$$

En procédant comme dans la question précédente :

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_{\psi\circ\varphi(n+1)-\psi\circ\varphi(n)}$$

et

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_{\psi\circ\varphi(n+1)-\psi\circ\varphi(n)}.$$

De même,

$$\|x_{\psi\circ\varphi(n+1)-\psi\circ\varphi(n)}, y_{\psi\circ\varphi(n+1)-\psi\circ\varphi(n)}\| \geqslant \|x_1 - y_1\| = \|f(x) - f(y)\|.$$

La continuité de la norme autorise un passage à la limite :

$$\|x - y\| \geqslant \|f(x) - f(y)\|.$$

Puis :

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|.$$

L'application f est une isométrie.

3) L'application f est donc continue, $f(A)$ est compact donc fermé. Puis $f(A) = A$.

Enfin f est injective car f est une isométrie.

40 **1)** On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que K ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε. Fixons x_0 dans K. Il existe alors x_1 dans K tel que : $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon$. En itérant le procédé, on construit, par récurrence une suite (x_p) d'éléments de K, qui n'admet aucune suite extraite convergente. Ceci contredit la compacité de K.

2) Soit une famille de n boules $B(x_i, \varepsilon)$ telles que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

On pose $E_\varepsilon = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $F = E_\varepsilon \cap K$. Alors, pour tout x de K, il existe i dans $[\![1, n]\!]$ tel que : $\|x - x_i\| \leqslant \varepsilon$. D'où : $d_F(x) \leqslant \varepsilon$.

41 **1)** Immédiat.

2) Nous savons que : $\forall x \in \text{Im}p \quad p(x) = x$.
Donc $\|p(x)\| = \|x\|$, puis $N(p) \geqslant 1$.

3) Soit p un projecteur tel que $N(p) = 1$.

Posons $F = \text{Ker } p, G = \text{Im}p$. Soit x un vecteur orthogonal à F, on a :

$$\begin{aligned}\|p(x)\|^2 &= \|x + (p(x) - x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|(p(x) - x)\|^2 \leqslant \|x\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit : $p(x) = x$, puis $x \in G$, et donc : $F^\perp \subset G$.
Or, $\dim F^\perp = \dim G$, donc $F^\perp = G$.
Réciproquement, soit p est un projecteur orthogonal non nul,

on a : $\forall x \in E \quad x = p(x) + (x - p(x))$.

D'où : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, puis : $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

D'où : $N(p) \leqslant 1$, et donc $N(p) = 1$.

42 **1)** Choisissons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une norme d'algèbre. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, donc il existe P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire. Appelons $a_1, \ldots, a_n$ les éléments diagonaux de T et fixons $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $a_1 + \alpha_1, \ldots, a_n + \alpha_n$ soient distincts et on note D la matrice diagonale de diagonale $(a_1 + \alpha_1, \ldots, a_n + \alpha_n)$. On a : $\|D\| \leqslant \varepsilon$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit, en posant : $T' = T + D$:

$$\|PT'P^{-1} - A\| \leqslant \varepsilon \|P\| \|P^{-1}\|.$$

De plus T' est diagonalisable car ses valeurs propres sont toutes distinctes.
2) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue : $A \longmapsto {}^tAA$. C'est donc une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette partie est aussi bornée car, si A est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in[[1,n]]^2} |a_{ij}| \leqslant 1.$$

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,;\, A^2 = I_n\}$$

est une partie de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc est bornée. C'est aussi l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto A^2 - I_n.$$

C'est donc un fermé contenu dans un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est un compact.

43 La condition nécessaire est immédiate.
Pour la réciproque, la caractérisation de la borne inférieure nous permet de construire une suite (f_n) d'éléments de G telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n^{-1}\| = 1.$$

La suite (f_n) est contenue dans un compact. Il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ de la suite (f_n) qui converge vers un élément f de norme 1.
La suite $(f_{\varphi(n)}^{-1})$ est contenue dans un compact. Il existe une suite extraite $(f_{\varphi\circ\psi(n)}^{-1})$ qui converge vers une application g de $\mathcal{L}(F,E)$. Vérifiez que $\|g\| = 1$.
L'application de $\mathcal{GL}(E,F) \times \mathcal{GL}(F,E)$ dans$\mathcal{GL}(E)$ qui, à (u,v) associe $u\circ v$, est bilinéaire, continue. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (f_{\varphi\circ\psi(n)} \circ f_{\varphi\circ\psi(n)}^{-1}) = f\circ g.$$

On en déduit : $g = f^{-1}$. Puis : $f \in I$.

44 **1)** Soit φ une forme linéaire positive. Montrons qu'elle est continue.
On considère une application f réelle de E telle que : $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Alors : $-1 \leqslant f \leqslant 1$, ce qui entraîne :

$$0 \leqslant 1 - f \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 + f.$$

Puisque φ est linéaire et positive :

$$-\varphi(1) \leqslant \varphi(f) \leqslant \varphi(1).$$

Donc : $|\varphi(f)| \leqslant \varphi(1)$.
Prenons ensuite une application f dans E telle que $\|f\|_\infty = 1$ et écrivons : $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{iIm}(f)$.
Nous avons : $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant 1$ et $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant 1$,
donc : $|\varphi(\mathrm{Re}(f))| \leqslant \varphi(1)$ et $|\varphi(\mathrm{Im}(f))| \leqslant \varphi(1)$.
De plus : $|\varphi(f)| = |\varphi(\mathrm{Re}(f)) + \mathrm{i}\varphi(\mathrm{Im}(f))| \leqslant 2\varphi(1)$.
Finalement, pour toute application f de E telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$, nous obtenons : $|\varphi(f)| \leqslant 2\varphi(1)$. La forme linéaire φ est donc continue et : $\|\varphi\| \leqslant 2\varphi(1)$.
2) • Considérons d'abord une fonction f telle que : $0 \leqslant f \leqslant 1$.
Posons $g = 2f - 1$, $\varphi(g) = a + ib$
et, pour t réel quelconque, étudions $g + it$ et $\varphi(g + it)$.

$$\varphi(g + it) = a + ib + it.$$

$$\|g + it\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) + it|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \sqrt{|g(t)|^2 + t^2}$$

$$= \sqrt{\|g\|_\infty^2 + t^2} \leqslant \sqrt{1 + t^2} \quad (|g| \leqslant 1)$$

Nous en déduisons, puisque $|\varphi(g + it)| \leqslant \|g + it\|_\infty$:

$$a^2 + (b + t)^2 \leqslant 1 + t^2.$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad a^2 + (b + t)^2 \leqslant 1 + t^2.$$

Donc : $b = 0$ et $1 - a^2 \geqslant 0$.
Puis : $\varphi(g) = a \in \mathbb{R}$ et $-1 \leqslant \varphi(g) \leqslant 1$.
Soit : $0 \leqslant \varphi(f) \leqslant 1$.
• Considérons ensuite une fonction f non majorée par 1, positive, réelle.
Il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus à la fonction $h = \dfrac{1}{\|f\|_\infty} f$ pour conclure.

Chapitre 4

1 Pour ces deux séries, on montre la convergence en prouvant que les sommes partielles ont une limite. Cette limite est alors la somme de la série étudiée.
1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\,(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\,(k-1)$$
$$= \mathrm{Arctan}\,(n+1) + \mathrm{Arctan}\,n - \mathrm{Arctan}\,1.$$

La somme est $\dfrac{3\pi}{4}$.
2) On utilise la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2\cos\frac{a}{2^n}\sin\frac{a}{2^n} = \sin\frac{a}{2^{n-1}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$, nous obtenons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\ln 1/2 + \ln\left(\sin\frac{a}{2^{k-1}}\right) - \ln\left(\sin\frac{a}{2^k}\right)\right)$$

puis $\quad S_n = -(n+1)\ln 2 + \ln(\sin 2a) - \ln\left(\sin\dfrac{a}{2^n}\right)$.

La limite est obtenue en remarquant que : $\sin\dfrac{a}{2^n} \sim \dfrac{a}{2^n}$.

La somme est : $\ln\left(\dfrac{\sin 2a}{2a}\right)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 La somme partielle d'ordre n est :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k f(x)\right) \mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 \frac{1+(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}\,x + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

Or, $\quad \left|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leqslant \frac{1}{n+2}\|f\|_\infty$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3 La suite de terme général $\sin n$ ne converge pas vers 0, la série diverge grossièrement. Soit $u_n = n\,!\,a^n$ pour tout entier n. Pour $a \neq 0$, $|u_{n+1}| = (n+1)|a||u_n|$, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang et strictement positive. La série diverge grossièrement.
Pour $a = 0$, la série est nulle. La série de terme général $n\,!a^n$ converge si et seulement si $a = 0$.

4 Soit $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{2^n}$ et $b_n = \dfrac{\sin n\theta}{2^n}$ pour tout entier n.
Nous remarquons que $a_n + \mathrm{i}\,b_n = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2}\right)^n$. La série de terme général $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $r = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2}$.
Or $|r| < 1$. La série $\sum(a_n + \mathrm{i}\,b_n)$ converge. Le corollaire 5.1 permet de conclure.

5 Pour tout n entier non nul et différent de 1, nous remarquons :

$$\frac{2n+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} + 2\frac{1}{n-1}.$$

La série de terme général $\dfrac{2n+1}{n(n-1)}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge.

6 Introduisons une transformation d'Abel sur les sommes partielles et notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k u_k &= \sum_{k=1}^{n} k\,(S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k S_k - \sum_{k=1}^{n} k S_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) S_k \\ &= n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k. \end{aligned}$$

Par conséquent : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = S_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$.
Puis, en remarquant que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ et en appliquant la convergence en moyenne de Césaro à S_n, nous obtenons $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k = 0$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k u_k = 0$, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

7 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, nous remarquons :

$$\frac{(-1)^n + n}{n(n-1)} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} + \frac{1}{n-1}.$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente, elle converge.
La série de terme général $\dfrac{(-1)^n + n}{n(n-1)}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge.
De même $\dfrac{(-2)^n + n(n-1)}{n(n-1)2^n} = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} + \dfrac{1}{2^n}$. La série de terme général $\dfrac{(-2)^n + n(n-1)}{n(n-1)2^n}$ est la somme de deux séries convergentes. Elle converge.

8 La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ vérifie le théorème spécial des séries alternées car $n \longmapsto \dfrac{\ln n}{n}$ est décroissante pour $n \geqslant 3$ et de limite nulle. Elle converge.
La série $\displaystyle\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge.

9 Il s'agit d'une série de réels positifs dont les sommes partielles sont majorées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant\sqrt{n}\\ p\in\mathbb{N}}} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Elle converge.

10 La suite de terme général $U_n - nu_n$ est bornée. Il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - nu_n| \leqslant M.$$

La suite u est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant U_n - nu_n \leqslant M.$$

Appliquons cette inégalité à tout entier $n + p$. Nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n+p} u_k - (n+p)u_{n+p} \leqslant M.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La suite u est décroissante, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant n u_{n+p} + M.$$

Nous savons d'autre part, que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
Donc pour n fixé, $\lim\limits_{p\to\infty} n u_{n+p} = 0$.

Nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$.

Les sommes partielles de la série de réels positifs $\sum u_n$ sont majorées. La série converge.

11 **1)** $u_n \sim \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}n}$ et $\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Le signe de u_n est constant. La série $\sum u_n$ converge.

2) Nous allons montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{2\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{2\ln n - \sqrt{n^2-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\left(2\frac{\ln n}{n} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ converge.

3) On vérifie facilement que $u_n \geqslant \frac{1}{3n}$. Or la série harmonique diverge. Par comparaison directe nous obtenons la divergence de la série $\sum u_n$.

4) Cherchons un équivalent de u_n.

```
> taylor((1/n)*ln((n^2+sqrt(n))/(n^2-n)), n=infinity) ;
```

$$\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{5/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{11/2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n}\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. La série $\sum u_n$ converge.

5) La présence d'une puissance $n^{\text{ième}}$ nous conduit à utiliser la règle de Cauchy.

```
> taylor(sqrt(n^2+a*n+2)-sqrt(n^2+b*n+1), n=infinity) ;
```

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}a^2}{n} + \frac{\frac{1}{4}b - \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}a^3}{n^2} \\ &+ \frac{-\frac{3}{8} + \frac{3}{8}a^2 - \frac{5}{128}a^4 - \frac{3}{16}b^2 + \frac{5}{128}b^4}{n^3} \\ &+ \frac{\frac{3}{4}a - \frac{5}{16}a^3 + \frac{7}{256}a^5 - \frac{3}{16}b + \frac{5}{32}b^3 - \frac{7}{256}b^5}{n^4} \\ &+ \frac{\frac{7}{16} + \frac{15}{64}b^2 - \frac{35}{256}b^4 + \frac{21}{1024}b^6 - \frac{15}{16}a^2 + \frac{35}{128}a^4 - \frac{21}{1024}a^6}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\end{aligned}$$

$u_n = \mathrm{e}^{n\ln v_n}$ en posant : $v_n = \sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}$

$$\begin{aligned}v_n &= n\sqrt{1 + a\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2}} - n\sqrt{1 + b\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{a-b}{2} + \frac{4+b^2-a^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Si $a - b \neq 0$, on a : $u_n \sim \mathrm{e}^{n\ln\frac{a-b}{2}}\mathrm{e}^{\frac{4+b^2-a^2}{4(a-b)}}$.
Pour $a - b < 2$ la série converge car $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Pour $a - b > 2$ la série diverge grossièrement.
Pour $a - b = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}}$.
La série diverge grossièrement.
Si $a = b$, on a $v_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. $u_n \sim \mathrm{e}^{n\ln\frac{1}{2n}}$.
La série converge car $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

12 Nous pouvons écrire un développement généralisé de u_n :

$$\begin{aligned}u_n &= \cos\pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{a}{2n} + \frac{b}{2n^2}\right) \\ &= (-1)^n \cos\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2n} + \frac{b}{2n^2}\right) \\ &= (-1)^{n+1}\sin\pi\left(\frac{a}{2n} + \frac{b}{2n^2}\right).\end{aligned}$$

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{a\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $(-1)^{n+1}\frac{a\pi}{2n}$ est une série alternée qui vérifie le théorème spécial des séries alternées. Elle converge.
Une série dont le terme général est $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge également.
La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle converge.

13 **1)** La présence de n ! nous incite à utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(1+1/n)^{\alpha n}}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Pour $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. La série converge.
Pour $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. La série diverge.
Pour $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$. La série converge.

2) $u_n = \frac{n^n}{a^n n!}$ pour a réel positif non nul.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'où $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{a}$.
Pour $a > e$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. La série converge.
Pour $a < e$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La série diverge.
Pour $a = e$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Nous ne pouvons pas conclure a priori. Dans ce cas, en utilisant la formule de Stirling, nous obtenons $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. La série diverge.

14 Soit $u_n = \frac{P(n)}{n!}$. $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.
Alors nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{a_p (n+1)^p}{a_p n^p (n+1)}$.
Puis : $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. La série converge.

Nous savons que les polynômes $Q_p(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - k + 1)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $Q_0(X) = 1$ forment une base de $\mathbb{K}[X]$. Aussi, pour tout polynôme P de degré p, il existe une suite finie $b_0, \ldots, b_p$ telle que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k Q_k(X).$$

Le terme général de la série s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{p} b_k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} + b_0 \frac{1}{n!}.$$

Chacune des séries $\sum \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}$ converge.
Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=1}^{p} b_k \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} \right) + b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_k \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} \right) + b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{p} b_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) \\ &= e \sum_{k=0}^{p} b_k.\end{aligned}$$

Application :

$$u_n = \frac{5n^3 + 2n + 1}{n!} = \frac{5n(n-1)(n-2) + 15n(n-1) + 7n + 1}{n!}.$$

La somme de la série est $e(5 + 15 + 7 + 1) = 28e$.

15 **1)** $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1} z}{n(n+z)}$.
$\frac{(-1)^{n+1} z}{n(n+z)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées.
La série $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente. Elle est semi-convergente pour tout z complexe, différent d'un entier négatif ou nul.

2) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z|^{n.n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z| < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad |z| > 1 \end{cases}$$

Pour $|z| < 1$, la série est absolument convergente.
Pour $|z| > 1$, la série diverge.
Pour $|z| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge.

3) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e\,|z|^{3n^2+3n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z| < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad |z| > 1 \end{cases}$$

Pour $|z| < 1$, la série est absolument convergente.
Pour $|z| > 1$, la série diverge.
Pour $|z| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge.

16 Pour $\alpha > 1$, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante positive sur $[1, +\infty[$.
On peut encadrer $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ par deux intégrales :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{n+1}^{A} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \lim_{A\to+\infty} \int_{n}^{A} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or : $\lim_{A\to+\infty} \int_{n}^{A} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
et $\lim_{A\to+\infty} \int_{n+1}^{A} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
De plus : $n^{\alpha-1} \sim (n+1)^{\alpha-1}$.
Donc : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

17 • L'application $g : x \longmapsto f(e^{-x})$ est la composée d'une application croissante et d'une
application décroissante, elle est décroissante.
D'après le théorème 17, la série de terme général $u_n = f(e^{-n})$ converge si et seulement si la limite $\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(e^{-u})\,du$ existe.

• L'application $h : x \longmapsto \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ est le produit de deux applications décroissantes et positives, elle est décroissante.
De même, la série de terme général $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si et seulement si, la limite $\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) du$ existe.
Si on effectue le changement de variable $t \longmapsto \ln t$ dans l'intégrale $\int_1^x f(e^{-u})\,du$, on obtient :

$$\int_e^{e^x} \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Les séries sont de même nature.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

18 **1)** $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Donc $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

$(u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}) \sim -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente, puisque $\alpha > 0$. Donc la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge. La série $\sum u_n$ est semi-convergente pour $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, divergente pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n\sqrt{n}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{1}{2}\}$

$\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ donc le dénominateur ne s'annule pas.

• Pour $\alpha < \dfrac{1}{2}, u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. La série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et les termes de la série sont de signe constant, donc la série $\sum u_n$ diverge.

• Pour $\alpha > \dfrac{1}{2}, u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. La série $\sum \dfrac{(-1)}{n^\alpha}$ converge mais les termes de la série ne sont pas de signe constant. Nous ne pouvons pas conclure ainsi.

Posons $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, on a $v_n \sim \dfrac{-1}{n^{2\alpha-\frac{1}{2}}}$.

La série $\sum v_n$ converge si et seulement si $2\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$, c'est-à-dire si $\alpha > \dfrac{3}{4}$.

Or la série $\sum u_n$ est la somme de la série $\sum v_n$ et de la série $\sum \dfrac{(-1)}{n^\alpha}$. Pour $\alpha > \dfrac{3}{4}$, la série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle est semi-convergente.

Pour $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant \dfrac{3}{4}$, la série $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{3}{4}$.

19 **1)** On connaît un développement généralisé de $\sqrt{n^4+1}$. Par conséquent, nous allons étudier un équivalent de u_n.

$$\sqrt{n^4+1} = n^2 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$u_n = \left|\sin\left(\pi n^2 + \frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)\right|^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left|(-1)^{n^2}\sin\left(\frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)\right|^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left|\sin\left(\frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^1}\right)\right)\right|^{\frac{2}{3}}.$$

$$u_n = \left|\frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^1}\right)\right|^{\frac{2}{3}}.$$

Donc $u_n \sim \dfrac{\pi^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}n^{\frac{4}{3}}}$.

La série étudiée est une série de réels positifs, et la série de Riemann $\sum \dfrac{\pi^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}n^{\frac{4}{3}}}$ est convergente puisque $\dfrac{4}{3} > 1$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge.

2) $\ln u_n = n^\alpha \ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln n}\right)$

Or : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\ln n}\right) = 1$.

Donc $\ln u_n \sim n^\alpha\left(\cos\dfrac{1}{\ln n} - 1\right)$.

Puis : $\ln u_n \sim n^\alpha \dfrac{-1}{2(\ln n)^2}$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. La série diverge.

Pour $\alpha > 1$, $\dfrac{1}{n}\ln u_n \sim n^{\alpha-1}\dfrac{-1}{2(\ln n)^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln u_n = -\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 0$.

La règle de Cauchy permet alors de conclure. La série converge.
Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, le même calcul nous donne $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$ et la règle de Cauchy ne permet pas de conclure.
Considérons β réel, montrons que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

$$\ln(n^\beta u_n) = \beta\ln n + \ln u_n.$$

La suite $(\beta\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite :

$$(n^\alpha\frac{-1}{2(\ln n)^2})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Or $\ln u_n \sim n^\alpha\dfrac{-1}{2(\ln n)^2}$, donc $\beta\ln n = o(\ln u_n)$.

Par conséquent :

$$\ln(n^\beta u_n) \sim n^\alpha\frac{-1}{2(\ln n)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} n^\beta u_n = -\infty.$$

Il suffit de choisir $\beta > 1$, pour montrer la convergence de la série.

20 Pour $a \in \left]-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right[$ le terme $\left(2\cos\dfrac{a}{2^n} - 1\right)$ est strictement positif et le terme général de la série est bien défini.
On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\left(2\cos\frac{a}{2^n} - 1\right)\left(2\cos\frac{a}{2^n} + 1\right) = \left(2\cos\frac{a}{2^{n-1}} + 1\right).$$

Par conséquent :

$$\ln\left(2\cos\frac{a}{2^n} - 1\right) = \ln\left(2\cos\frac{a}{2^{n-1}} + 1\right) - \ln\left(2\cos\frac{a}{2^n} + 1\right).$$

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(2\cos\frac{a}{2^k} - 1\right) = \ln(2\cos 2a + 1) - \ln\left(2\cos\frac{a}{2^n} + 1\right).$$

Puis : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ln\left(2\cos\dfrac{a}{2^n} - 1\right) = \ln(2\cos 2a + 1) - \ln 3.$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

21 On remarque que $u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -\ln(u_{n+1}).$$

Si le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge.
S'il tend vers 0, $\lim_{n\to\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$. Dans tous les cas, la série diverge.

22 Soit $u_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Nous allons étudier $\ln u_n$.

$$\ln u_n = \ln(n\,!) - \sum_{k=1}^{n} \ln(a+k) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{a}{k}\right).$$

Écrivons le développement à l'ordre 2 :

$$\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k} = -\frac{a^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

La série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge. Par conséquent, la série :

$$\sum \left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k}\right)$$

converge. Soit L sa somme. Le théorème 23 montre que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k}\right) \sim -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^2}{2k^2}.$$

Dans l'application 10, nous avons montré que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n},$$

donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k}\right) = -\frac{a^2}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k}\right) = L - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \frac{a}{k}\right)$$
$$= L + \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après le corollaire 17.2 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{a}{k}\right) = a\ln n + L + a\gamma + \frac{a}{2n} + \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

puis $u_n \sim \mathrm{e}^{L+a\gamma} n^a$. Il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \sim kn^a$.

23 **1)** Les séries :

$$\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

sont absolument convergentes sur $\mathbb{C}$.

$$\sin^2 z = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} (-1)^{p+q} \frac{z^{2p+1} z^{2q+1}}{(2p+1)!(2q+1)!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{p+q=n} \frac{(2n+2)!}{(2p+1)!(2q+1)!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{p+q=n} \binom{2n+2}{2p+1}\right).$$

De même :

$$\cos^2 z = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{p+q=n} \binom{2n}{2p}\right)$$
$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{p+q=n} \binom{2n+2}{2p}\right).$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{r=0}^{2n+2} (-1)^r \binom{2n+2}{r}\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{r=0}^{2n+2} (-1)^r \binom{2n+2}{r} = (1-1)^{2n+2} = 0.$

Donc $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

2) $2\sin z \cos z = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\sum_{p+q=n} \frac{(2n+1)!}{(2p+1)!(2q)!}\right).$$

Or $\displaystyle 2\sum_{p+q=n} \frac{(2n+1)!}{(2p+1)!(2q)!} = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1}$

et $\displaystyle\binom{2n+1}{2p+1} = \binom{2n+1}{2(n-p)} = \binom{2n+1}{2q}.$

Donc $\displaystyle 2\sum_{p+q=n} \frac{(2n+1)!}{(2p+1)!(2q)!} = \sum_{r=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{r} = 2^{2n+1}.$

$$2\sin z \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin 2z.$$

3) la méthode est identique à celle des questions précédentes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

24 Appliquons le théorème 28.

Soit $p > 0$ fixé. Montrons que la série $\sum \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ converge et calculons sa somme.

La somme partielle $\sum_{q=0}^{n} \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ se calcule en mettant $\frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ sous la forme d'une différence de deux termes.

$$\frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{p!}{p+1}\left(\frac{(p+1+q+1)-(q+1)}{(p+q+2)!}\right)q!$$
$$= \frac{p!}{p+1}\left(\frac{q!}{(p+q+1)!} - \frac{(q+1)!}{(p+q+2)!}\right).$$

Ainsi : $\sum_{q=0}^{n} \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{p!}{p+1}\left(\frac{1}{(p+1)!} - \frac{(n+1)!}{(p+n+2)!}\right)$.

Or $\frac{(n+1)!}{(n+p+2)!} \sim \frac{1}{n^{p+1}}$ et p est fixé, donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p+2)!} = 0.$$

La série $\sum \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ converge. Sa somme est $\frac{1}{(p+1)^2}$.

De plus, la série $\sum \frac{1}{(p+1)^2}$ converge. Sa somme est $\frac{\pi^2}{6}$.

25 **a)** Nous allons appliquer le théorème 29 à la suite double de terme général :

$$u_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{ka_k}{n(n+1)} & \text{si} \quad 0 < k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Fixons k dans $\mathbb{N}$, montrons la convergence de la série $\sum |u_{n,k}|$.
Soit N un entier naturel supérieur à k.

$$\sum_{n=0}^{N} |u_{n,k}| = \sum_{n=k}^{N} \frac{k\,|a_k|}{n(n+1)} = k|a_k| \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= k|a_k| \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = k|a_k|\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right).$$

$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{k\,|a_k|}{n(n+1)} = |a_k|$. La série $\sum \frac{k\,|a_k|}{n(n+1)}$ converge, sa somme est $|a_k|$.
Par hypothèse, la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Le théorème 8 prouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{ka_k}{n(n+1)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Or $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ka_k$.

Donc la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ka_k$ converge et sa somme est $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

b) Fixons k, et étudions la convergence de la série :

$$\sum \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} |a_k|.$$

D'après l'application 12, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n \text{ pour } |x| < 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$2^{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^n} = \sum_{p=k}^{+\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{2^{p-k}}$$
$$= 2^{k+1} \sum_{p=k}^{+\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{2^{p+1}} = 2^{k+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{2^{p+1}}$$

D'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} |a_k| = |a_k|$.

La série $\sum |a_k|$ est convergente, par hypothèse.

Les hypothèses du théorème 29 sont vérifiées, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} a_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} a_k\right).$$

Un calcul, analogue à celui de la première partie, montre que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} a_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

La série $\sum b_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} a_k\right).$$

Par conséquent $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

26 Soit x un nombre complexe tel que $|x| < 1$.

Montrons l'existence de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

$$\frac{n\,|x|^n}{|1-x^n|} \leqslant \frac{n\,|x|^n}{|1-|x|^n|} \leqslant \frac{n\,|x|^n}{1-|x|^n} \leqslant \frac{n\,|x|^n}{1-|x|} \text{ car } |x| < 1.$$

Pour montrer la convergence de la série de terme général $\frac{n\,|x|^n}{|1-x^n|}$, il suffit de montrer celle de la série $\sum n\,|x|^n$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Elle est obtenue par la règle de d'Alembert.

Exprimons $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$ sous la forme d'une somme double.

Pour $|x|<1$, $\frac{1}{1-x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{n\,p}$; donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} nx^{n(p+1)} \right).$$

Appliquons le théorème 29 à la suite double de terme général $nx^{n(p+1)}$ afin d'échanger l'ordre de sommation.

Soit n fixé, la série $\sum n\,|x|^{n(p+1)}$ converge, sa somme est $\frac{n\,|x|^n}{1-|x|^n}$. Une étude analogue à la précédente montre également la convergence de la série de terme général $\frac{n\,|x|^n}{1-|x|^n}$.

Donc, nous pouvons intervertir l'ordre des sommations.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} nx^{n(p+1)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(p+1)} \right)$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{\,p+1}}{\left(1-x^{\,p+1}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$

27 • Montrons l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Le terme général $u_n = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ est défini pour $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x+n+1}$. $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = 0$, donc la série converge absolument.

Sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Exprimons cette somme à l'aide d'une somme double.

$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ est une fraction rationnelle.

Sa décomposition en éléments simples donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)} \right).$$

Nous souhaitons intervertir les sommations, pour cela, nous allons appliquer le théorème 29 à la suite double définie par :

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit k un entier naturel fixé, la série :

$$\sum \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$$

définie pour $n \geqslant \mathbb{K}$, est absolument convergente et :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!\,|x+k|} = \frac{\mathrm{e}}{k!\,|x+k|}.$$

Nous devons, maintenant, vérifier la convergence de la série de terme général $\frac{\mathrm{e}}{k!\,|x+k|}$.

Or $\frac{\mathrm{e}}{k!\,|x+k|} \sim \frac{\mathrm{e}}{k!k}$.

Il s'agit d'un équivalent de signe constant.

Soit $v_k = \frac{\mathrm{e}}{k!k}$, alors $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k}{(k+1)^2}$.

Sa limite est 0 quand k tend vers $+\infty$ et la série $\sum v_k$ converge.

Par conséquent, la série $\sum \frac{\mathrm{e}}{k!\,|x+k|}$ converge et les hypothèses du théorème 29 sont vérifiées. Nous pouvons intervertir l'ordre des sommations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}\,(-1)^k}{k!(x+k)} = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}.$$

28 Montrons que la suite des sommes partielles converge.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{k}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} t^{k-1}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} t^{k-1}\Big)\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} t^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} t^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Or $\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} t^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{|\,1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t\,|}\,\mathrm{d}\,t.$

L'application : $t \longmapsto |1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} t|$ est continue sur [0,1] et à valeurs strictement positives car $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Elle est minorée par un réel $a(x)$ strictement positif.

Par conséquent : $\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} t^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)a(x)}$.

Donc : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} t^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t = 0$.

La série $\sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t.$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{-t+\cos x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}\,t + \mathrm{i}\int_0^1 \frac{\sin x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}\,t.$$

$$\int_0^1 \frac{-t+\cos x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{2}\ln(t^2-2t\cos x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)$$
$$= -\ln\left(2\,|\,\sin\frac{x}{2}\,|\right).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $x \in \pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{t^2 - 2t\cos x + 1}\,\mathrm{d}\,t = 0.$

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{t^2 - 2t\cos x + 1}\,\mathrm{d}\,t = \left[\operatorname{Arctan}\frac{t - \cos x}{\sin x}\right]_0^1$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right).$$

Supposons que : $x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$,

$e\dfrac{x}{2} - (k+1)\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$

donc : $\operatorname{Arctan}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2} - (k+1)\pi$

et : $\dfrac{\pi}{2} - x + (2k+1)\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + (2k+1)\pi.$$

On fait de même sur $]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

Ainsi, pour $x \in]2k\pi, (2k+2)\pi[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{n} = -\ln\left(2\,|\,\sin\frac{x}{2}\,|\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k\pi\right).$$

En conclusion :

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{n} = -\ln\left(2\,|\,\sin\frac{x}{2}\,|\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \mathrm{E}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\pi\right).$$

De plus, les séries $\sum \dfrac{\cos n}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin n}{n}$ convergent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n} = -\ln\left(2\,|\,\sin\frac{1}{2}\,|\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

29 On effectue une transformation d'Abel avec les restes de la série $\sum u_n$.

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(R_{k-1} - R_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) R_k - \sum_{k=1}^{n} k R_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} k R_k + \sum_{k=0}^{n-1} R_k - \sum_{k=1}^{n} k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n.$$

On suppose tout d'abord que la série $\sum n u_n$ converge.

Dans ce cas : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k = 0.$

Or nous avons également l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant n R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k,$$

ce qui nous permet d'affirmer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n R_n = 0.$

L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n$ prouve alors que la série $\sum R_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k.$

Réciproquement, on suppose que la série $\sum R_n$ converge, ses sommes partielles sont donc majorées. Or :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} R_k.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum n u_n$ est croissante et majorée donc convergente.

Les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et ont la même somme.

30 **1)** Pour trouver les réels a et b, on intègre par parties.

Nous obtenons : $\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} a + b\dfrac{2\pi\,(-1)^n}{n^2}.$

Nous voulons obtenir $\dfrac{1}{n^2}$ en choisissant des réels indépendants de n. Il faut identifier 1 et $(-1)^n(a + 2\pi b) - a$.

On prendra $a = -1$ et $b = \dfrac{1}{2\pi}$.

2) Si $t \neq 0[2\pi]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{int}} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - 1}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{t}{2}}}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{nt}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{nt}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \cos\frac{nt}{2}\sin\frac{nt}{2}\operatorname{cotan}\frac{t}{2} - \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin nt\operatorname{cotan}\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos nt - \frac{1}{2}.$$

En intégrant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}(at + bt^2)\cos kt\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(at + bt^2)\sin nt\operatorname{cotan}\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(at + bt^2)\cos nt\,\mathrm{d}\,t - \frac{1}{2}\left(a\frac{\pi^2}{2} + b\frac{\pi^3}{3}\right).$$

En intégrant par parties, on vérifie que la première intégrale est majorée par un terme de limite nulle.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

En effet, la fonction $u : t \longmapsto \left(at + bt^2\right) \dfrac{\cos t/2}{\sin t/2}$ est continue sur $]0, \pi]$, se prolonge par continuité en 0. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et :

$$\forall\, t \in]0, \pi] \quad u'(t) = \frac{1/2\,(a+2bt)\sin t - 1/2\left(at+bt^2\right)}{\sin^2 t/2}.$$

La limite de u' en 0 est $2b$. La fonction u est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ ce qui permet d'intégrer par parties. Le calcul de la deuxième intégrale donne aussi une limite nulle.
Par conséquent, on en déduit que la série converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\left(a\frac{\pi^2}{2} + b\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

31 **1)** $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs divergente. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Étudions, suivant les valeurs de α, la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

• Pour $\alpha = 1$, le terme $\dfrac{u_n}{S_n}$ s'écrit $\dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n}$.

Montrons par l'absurde que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.

On suppose qu'elle converge. Le terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 et : $\dfrac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$.

La convergence de la série de terme général positif $\dfrac{u_n}{S_n}$ entraîne celle de la série de terme général $-\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$.

Or $-\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right) = -\ln\dfrac{S_{n-1}}{S_n} = \ln S_n - \ln S_{n-1}$.

Donc $\ln S_n$ possède une limite finie, ce qui contredit la divergence de la série $\sum u_n$.

• Pour $\alpha < 1$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{u_n}{S_n} \leqslant \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ à partir d'un certain rang, car $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

La série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge. Par comparaison directe, nous en déduisons la divergence de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

• Pour $\alpha > 1$, nous pouvons écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} \geqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{S_n^\alpha} = \frac{u_n}{S_n^\alpha}.$$

La somme de ces inégalités donne :

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leqslant \int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} \leqslant \int_{S_1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} = \frac{S_1^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Les sommes partielles de la série de réels positifs $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ sont majorées. La série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

2) On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

On note $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Nous remarquons que r_n est le reste d'ordre $n-1$ de la série convergente $\sum u_n$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

• Pour $\alpha = 1$, on procède par l'absurde de la même manière qu'au **1)**.

Dans ce cas :

$$\frac{u_n}{r_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{r_n}\right) \quad \text{et} \quad -\ln\left(1 - \frac{u_n}{r_n}\right) = \ln r_n - \ln r_{n+1}.$$

• Pour $\alpha > 1$, nous avons : $\dfrac{u_n}{r_n^\alpha} \geqslant \dfrac{u_n}{r_n}$ car $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

On montre ensuite que la série $\sum \dfrac{u_n}{r_n^\alpha}$ diverge.

• Pour $\alpha < 1$, on montre que la série $\sum \dfrac{u_n}{r_n^\alpha}$ converge en remarquant que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha} \geqslant \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{r_n^\alpha} = \frac{u_n}{r_n^\alpha}.$$

On termine ensuite comme au **1)**.

32 L'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est croissante, bijective et dérivable. L'application réciproque sera notée g. Montrons que les séries :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \quad \text{et} \quad \sum \frac{g(n)}{n^2}$$

sont de même nature. Pour cela, nous allons mettre en place trois équivalences et comparer les séries à des intégrales.

1) L'application $\dfrac{1}{f}$ est positive, décroissante et continue puisque l'application f est strictement positive, croissante et dérivable.

La série $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}$ existe.

L'application f est strictement croissante, et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Effectuons le changement de variable $u = f(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}$:

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)} = \int_{f(1)}^{f(a)} g'(u)\frac{\mathrm{d}\,u}{u} = \left[\frac{g(u)}{u}\right]_{f(1)}^{f(a)} + \int_{f(1)}^{f(a)} g(u)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}$$
$$= \frac{a}{f(a)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(a)} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

2) Montrons que la limite $\lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}$ existe si et seulement si la limite $\lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_{f(1)}^{b} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$ existe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Supposons que la limite $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}$ existe. Montrons que $\frac{a}{f(a)}$ possède une limite en $+\infty$. Nous remarquons que :

$$\int_a^{2a}\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}\leqslant\frac{a}{f(a)}\leqslant 2\int_{a/2}^{a}\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}.$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{2a}\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}=\lim_{a\to\infty}\int_{a/2}^{a}\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}=0.$$

Puis :

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{f(a)}=0.$$

Enfin :

$$\lim_{a\to\infty}\int_{f(1)}^{f(a)}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u=\frac{1}{f(1)}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}.$$

L'application f est croissante, positive et bijective donc :

$$\lim_{a\to\infty}f(a)=+\infty.$$

En posant $b=f(a)$, nous obtenons l'existence de :

$$\lim_{b\to\infty}\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

• Réciproquement, supposons l'existence de :

$$\lim_{b\to\infty}\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

La fonction $\frac{1}{f}$ est positive et continue.
Or nous savons que :

$$\int_1^a\frac{\mathrm{d}\,t}{f(t)}=\frac{a}{f(a)}-\frac{1}{f(1)}+\int_{f(1)}^{f(a)}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$
$$=\frac{g(b)}{b}-\frac{1}{f(1)}+\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

Il suffit, maintenant, de montrer que $\frac{g(b)}{b}$ admet une limite finie lorsque a tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque b tend vers $+\infty$.
On procède de la même manière que pour $\frac{a}{f(a)}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$\int_{b/2}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u\leqslant\frac{g(b)}{b}\leqslant 2\int_b^{2b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

De plus $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{b/2}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u=\lim\limits_{b\to\infty}\int_b^{2b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u=0.$

Par conséquent $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{g(b)}{b}=0.$

3) Montrons maintenant que la série $\sum\frac{g(n)}{n^2}$ converge, si et seulement si la limite $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$ existe.

Nous ne savons rien sur ses variations car g est croissante et $u\longmapsto\frac{1}{u^2}$ décroissante. Cependant, nous pouvons écrire :

$$0\leqslant\frac{g(n)}{(n+1)^2}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

• On suppose que la limite $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$ existe.

La convergence de la série de réels positifs $\sum\frac{g(n)}{(n+1)^2}$ se déduit alors de l'inégalité :

$$\forall N\in\mathbb{N}\quad\sum_{n=1}^{N}\frac{g(n)}{(n+1)^2}\leqslant\int_1^{N+1}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

La convergence de la série $\sum\frac{g(n)}{n^2}$ se déduit de :

$$\frac{g(n)}{(n+1)^2}\sim\frac{g(n)}{n^2}.$$

• Réciproquement, supposons que la série $\sum\frac{g(n)}{n^2}$ converge.

$$\frac{g(n+1)}{(n+1)^2}\sim\frac{g(n+1)}{n^2},$$

donc la série $\sum\frac{g(n+1)}{n^2}$ converge.
Or g est croissante donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\int_n^{n+1}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u\leqslant\frac{g(n+1)}{n^2}.$$

Par conséquent, la limite $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{f(1)}^{b}\frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$ existe.

En conclusion, les trois équivalences démontrées permettent de conclure.
La série $\sum\frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si la série $\sum\frac{g(n)}{n^2}$ converge.

33 • Soit $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})\ln k$ et $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\ln k-\sum_{k=2}^{n+1}x_k\ln(k-1)=\sum_{k=2}^{n}x_k\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-x_{n+1}\ln n.$$

$$S_n-T_n=\sum_{k=2}^{n}x_k\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-x_{n+1}\ln n-x_1.$$

La suite $(x_n\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0_E$.

De plus $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\sim\frac{1}{2k^2}$.

Par conséquent $x_k\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)=o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

La série $\sum x_n\left(\ln\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ converge.

Finalement, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n-T_n=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}x_k(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k})-l-x_1$.

Les séries $\sum(x_n-x_{n+1})\ln n$ et $\sum\frac{x_n}{n}$ sont de même nature.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Étudions maintenant le cas $l \neq 0_E$. $\dfrac{x_n}{n} \sim \dfrac{l}{n \ln n}$, mais ceci ne permet pas de conclure directement car il ne s'agit pas d'une série à termes positifs.

Cependant, $\dfrac{x_n}{n} = \dfrac{l}{n \ln n} + \dfrac{\varepsilon(n)}{n \ln n}$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0_E$.

Il existe un entier N tel que $\|\varepsilon(n)\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|l\|$ pour $n \geqslant N$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{x_k}{k}\Big\| &\geqslant \Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{l}{k \ln k} - \sum_{k=N}^{n} \frac{-\varepsilon(k)}{k \ln k}\Big\| \\ &\geqslant \Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{l}{k \ln k}\Big\| - \Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{-\varepsilon(k)}{k \ln k}\Big\| \\ &\geqslant \Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{l}{k \ln k}\Big\| - \frac{1}{2}\|l\| \,\Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k \ln k}\Big\| \\ &\geqslant \|l\|\Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k \ln k}\Big\| - \frac{1}{2}\|l\| \,\Big\|\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k \ln k}\Big\|\end{aligned}$$

Puis : $\Big\|\sum\limits_{k=N}^{n} \dfrac{x_k}{k}\Big\| \geqslant \dfrac{1}{2}\|l\| \,\Big\|\sum\limits_{k=N}^{n} \dfrac{1}{k \ln k}\Big\|$.

Or, la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge, donc la série $\sum \dfrac{x_n}{n}$ diverge.

Dans ce cas, les deux séries $\sum \dfrac{x_n}{n}$ et $\sum (x_n - x_{n+1}) \ln n$ divergent.

34 Soit $w_n = n^{\mathrm{i}}$. On a :

$$w_{n+1} - w_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i} \ln n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\mathrm{i}} - 1\right) = \frac{1}{n}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i} \ln n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $u_n = \mathrm{Re}(w_n - w_{n+1}) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum u_n$ est la somme d'une série absolument convergente et de la série $\sum \mathrm{Re}(w_n - w_{n+1})$.

La série $\sum u_n$ est de même nature que la série :

$$\sum \mathrm{Re}(w_n - w_{n+1}).$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(w_k - w_{k+1}) = \mathrm{Re}(w_0 - w_{n+1}),$$

il suffit d'étudier la suite $(\mathrm{Re}(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons par l'absurde la divergence de cette suite.

$$\mathrm{Re}(w_{2n}) = \mathrm{Re}(2^{\mathrm{i}} w_n) = \cos(\ln 2)\mathrm{Re}(w_n) - \sin(\ln 2)\mathrm{Im}(w_n).$$

Si la suite $(\mathrm{Re}(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(\mathrm{Re}(w_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'égalité précédente prouve que la suite $(\mathrm{Im}(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

Dans ce cas, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit l sa limite, elle vérifie $l = 2^{\mathrm{i}} l$. Par conséquent $l = 0$, ce qui est en contradiction avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| = 1.$$

La série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

35 **1) a)** On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1.$$

Vérifiez que la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante et minorée.

Le produit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

Calculons $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$$

Nous obtenons $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Calculons $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=3}^{n+1} \frac{k}{k-1} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Calculons $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=4}^{n+2} \frac{k}{k-1} = \frac{n+2}{3n}.\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + u_n > 0$. Nous pouvons écrire :

$$\ln \prod_{k=0}^{n}(1 + u_k) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + u_k).$$

La série $\sum u_n$ converge. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

La suite u n'est pas de signe constant, écrivons un développement à l'ordre 2 :

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2).$$

Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la série $\sum \ln(1 + u_n)$ est la somme de trois séries convergentes.

Elle converge. Sa somme est l et $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1 + u_k) = \mathrm{e}^{l}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la série $\sum \ln(1+u_n) - u_n$ diverge et $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\ln(1+u_k) - u_k) = -\infty$.

Nous en déduisons : $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) = 0$.

En conclusion, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne l'existence du produit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$.

Dans ce cas, le produit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ est nul si et seulement si la série $\sum u_n^2$ diverge.

Calculons : $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}| < 1$.

Les séries $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergent.

Par conséquent le produit $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ existe.

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+1}\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2}.$$

Calculons $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}| < 1$.

La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge et la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Par conséquent le produit $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ est nul.

2) Le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

a) Montrons que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t = o\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\right).$$

Soit $a_n = |\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t|$.

$$a_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\varphi(t) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de φ en $\dfrac{\pi}{2}$ assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}\right] \quad |\varphi(t) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

$$a_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left|\varphi(t) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \sin^{2n}t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\varepsilon\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

La fonction φ continue sur un segment est bornée. Il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad |\varphi(t)| \leqslant M.$$

$$a_n \leqslant 2M\sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

Minorons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

Nous savons que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

Par conséquent :

$$a_n \leqslant \left[4M\frac{2n+1}{\pi}\cos^{2n}(\alpha) + \frac{1}{2}\varepsilon\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

Or nous savons que : $0 < \cos\alpha < 1$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} 4M\frac{2n+1}{\pi}\cos^{2n}(\alpha) = 0.$$

Il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t| \leqslant \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

b) On reconnaît les intégrales de Wallis.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t$. Vérifier que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

Un récurrence donne $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

La formule de Stirling permet d'écrire $I_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

c) L'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}\sin^{2n}t$ est continue sur $[0,+\infty]$ et $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_n &= \lim_{p\to\infty} \int_0^{(p+1)\pi} \mathrm{e}^{-2t} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}\, t \\ &= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-2t} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}\, t \\ &= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-2(u+k\pi)} \sin^{2n} u \,\mathrm{d}\, u \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2k\pi}\right) \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-2t} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}\, t \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ch}(2\,t-\pi) \sin^{2n} t \,\mathrm{d}\, t. \end{aligned}$$

D'après la question **a)** nous avons :

$$u_n \sim \frac{2\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \mathrm{ch}\, 0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}\, t$$

et d'après le **b**) nous obtenons :

$$u_n \sim \frac{2\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Puis :

$$u_n \sim \frac{1}{2\mathrm{sh}\,\pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Pour calculer u_n, on intègre deux fois par parties.
On obtient :

$$u_n = \frac{(2n-1)n}{2} u_{n-1} - n^2 u_n,$$

puis :

$$u_n = \frac{2n(2n-1)}{4(1+n^2)} u_{n-1}.$$

Un récurrence donne :

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \prod_{k=1}^{n} (1+k^2)}.$$

En comparant les équivalents de u_n, on montre que :

$$\prod_{k=1}^{n} (1+k^2) \sim \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}.$$

Finalement $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1+k^2) = \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}$.

3) a) $$\prod_{k=1}^{n} \left|1+\frac{\mathrm{i}}{k}\right| = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)}.$$

On obtient $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left|1+\frac{\mathrm{i}}{n}\right| = \sqrt{\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}}$.

b) Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\prod_{k=1}^{n} (1+z_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+|z_k|) - 1.$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons l'inégalité vraie au rang n.

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=1}^{n+1} (1+z_k) - 1\right| &= \left|\prod_{k=1}^{n} (1+z_k)(1+z_{n+1}) - 1\right| \\ &= \left|\prod_{k=1}^{n} (1+z_k) - 1 + z_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1+z_k)\right| \\ &\leqslant \left|\prod_{k=1}^{n} (1+z_k) - 1\right| + |z_{n+1}| \prod_{k=1}^{n} (1+|z_k|) \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+|z_k|) - 1 + |z_{n+1}| \prod_{k=1}^{n} (1+|z_k|) \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n+1} (1+|z_k|) - 1. \end{aligned}$$

La récurrence est vérifiée et l'égalité est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Notons $v_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1+u_k)$. On travaille dans $\mathbb{C}$ qui est complet.
Il suffit de montrer que la suite v est de Cauchy.
Soit n et p dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |v_{n+p} - v_n| &= |v_n| \left|\prod_{k=1}^{p} (1+u_{n+k}) - 1\right| \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|) \left[\prod_{k=1}^{p} (1+|u_{n+k}|) - 1\right] \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n+p} (1+|u_k|) - \prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|). \end{aligned}$$

D'après **1) b)** la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|)$ converge.

Elle est de Cauchy. On en déduit que la suite v est de Cauchy.

Le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe.

d) On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = 1 \quad \text{et} \quad u_n \neq -1.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_n} \quad \text{où} \quad -\pi < \theta_n < \pi.$$

Alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = \cos\left(\sum_{k=0}^{n} \theta_k\right) + \mathrm{i} \sin\left(\sum_{k=0}^{n} \theta_k\right)$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \theta_k$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$.

Réciproquement, supposons que $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Montrons que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe.
Il existe θ dans $]-\pi,\pi]$ tel que $P = e^{i\theta}$. Nous en déduisons que $\lim_{n\to\infty} \cos S_n = \cos\theta$ et que :

$$\lim_{n\to\infty} \sin S_n = \sin\theta.$$

Pour tout entier n, il existe k_n dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$S_n - \theta - 2k_n\pi \in]-\pi,\pi].$$

Notons $S'_n = S_n - \theta - 2k_n\pi$.
Vérifiez que $\lim_{n\to+\infty} \cos S'_n = 1$.
Par conséquent $\lim_{n\to\infty} S_n - \theta - 2k_n\pi = 0$.
Étudions k_n.

$$S_{n+1} - S_n = S'_{n+1} - S'_n + 2(k_{n+1} - k_n)\pi.$$

Or $S_{n+1} - S_n = \theta_{n+1}$.
Par conséquent :

$$-\pi < S'_{n+1} - S'_n + 2(k_{n+1} - k_n)\pi < \pi.$$

Or $\lim_{n\to\infty} S'_{n+1} - S'_n = 0$.
Nous en déduisons que $k_{n+1} - k_n = 0$ à partir d'un certain rang. La suite $(k_n)_{n\in N}$ est constante égale à k à partir d'un certain rang.
D'où $\lim_{n\to\infty} S_n = \theta + 2k\pi$.

e) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\prod_{k=0}^{n} u_k$ en posant :

$$u_k = \frac{1+\frac{i}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}.$$

D'après la question **a)**, le terme $\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ existe si et seulement si le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

Il existe θ_k dans $]-\pi,\pi[$ tel que $u_k = \cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k)$.

$$\cos(\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Nous pouvons en déduire que $(\theta_n)_{n\in N}$ converge vers 0, puis que :

$$\theta_n \sim \frac{1}{n}.$$

La série $\sum \theta_n$ diverge. D'après la question **d)** le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'existe pas.

36 Nous pouvons remarquer que :

$$\ln u_n - \ln u_{n-1} = \ln\frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Or $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Donc $\ln\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim \frac{u_n}{u_{n-1}} - 1$.
D'autre part, la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $\ln\frac{u_n}{u_{n-1}}$ est $\ln u_n - \ln u_0$. Sa limite est $+\infty$ car $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. La série $\sum \ln\frac{u_n}{u_{n-1}}$ diverge.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc les termes de la série $\sum \ln\frac{u_n}{u_{n-1}}$ sont des réels positifs.
Par conséquent, la série $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}}$ diverge.
D'après le théorème 24, nous obtenons l'équivalence :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1}} \sim \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{u_k}{u_{k-1}},$$

puis l'équivalence demandée.

37 **1)** Soit :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \quad \text{et} \quad A'_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|.$$

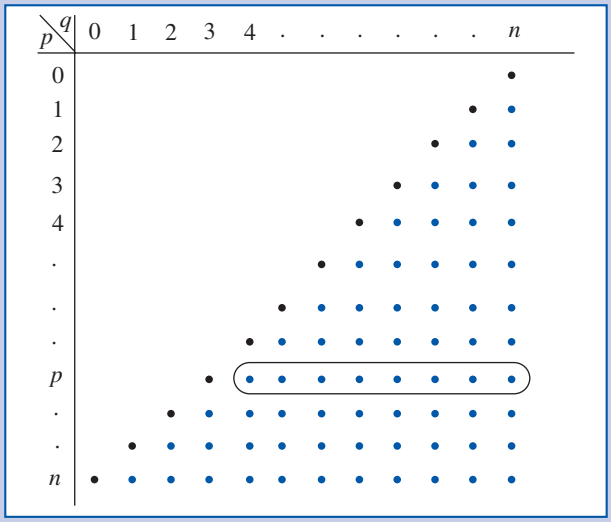
Pour montrer que $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$, on va établir que :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} n \geqslant N \Rightarrow \|AB - C_n\| \leqslant \varepsilon$$

Majorons :

$$\|AB - C_n\| \quad \text{par} \quad \|AB - A_nB_n\| + \|A_nB_n - C_n\|.$$

Or $A_nB_n - C_n = a_1b_n + a_2(b_n + b_{n-1}) + \cdots + a_n(b_1 + \cdots + b_n)$.



Donc :

$$\|AB - C_n\| \leqslant \|AB - A_nB_n\| + \|a_1\|\,\|b_n\| + \|a_2\|\,\|b_n + b_{n-1}\| + \cdots + \|a_n\|\,\|b_1 + \cdots + b_n\|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Par hypothèse $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to\infty} B_n = B$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que, pour $n \geqslant p$ on ait :

$$\|AB - A_n B_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit

$$D_n = \|a_1\| \, \|b_n\| + \|a_2\| \, \|b_n + b_{n-1}\| + \cdots$$

$$+ \|a_n\| \, \|b_1 + \cdots + b_n\| = \sum_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right).$$

• Nous allons utiliser le critère de Cauchy, pour majorer :

$$\left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\|.$$

La série $\sum b_n$ converge.
Elle vérifie donc le critère de Cauchy. Si la suite a est nulle, le résultat est immédiat.
Supposons maintenant a non nulle. Soit A' la somme de la série convergente $\sum \|a_n\|$.
Alors $A' > 0$. Il existe un entier naturel q tel que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant q \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{n+m} b_j \right\| < \frac{\varepsilon}{4A'}.$$

Par conséquent $\left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| < \frac{\varepsilon}{4A'}$ pour $n + 1 - i \geqslant q$.
Pour $n > q - 1$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n+1-q} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right) + \sum_{i=n+2-q}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4A'} \sum_{i=1}^{n+1-q} \|a_i\| + \sum_{i=n+2-q}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right)$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=n+2-q}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right).$$

Majorons maintenant le terme :

$$\sum_{i=n+2-q}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right).$$

La série $\sum b_n$ est convergente, la suite de terme général B_n est convergente, donc bornée.
Il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|B_n\| \leqslant M.$$

Par conséquent :

$$\left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| = \|B_n - B_{n+1-i}\| \leqslant \|B_n\| + \|B_{n+1-i}\| \leqslant 2M.$$

$$\sum_{i=n+2-q}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right) \leqslant 2M \sum_{i=n+2-q}^{n} \|a_i\|.$$

Le critère de Cauchy est également vérifié par la série convergente :

$$\sum \|a_n\|.$$

Il existe un entier naturel r tel que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant r \Rightarrow \left| \sum_{i=n}^{n+m} \|a_i\| \right| < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Par conséquent : $\sum_{i=n+2-q}^{n} \|a_i\| < \frac{\varepsilon}{8M}$ pour $n + 2 - q \geqslant r$.
En conclusion :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| \left\| \sum_{j=n+1-i}^{n} b_j \right\| \right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } n \geqslant q + r - 2.$$

• Finalement, nous avons montré que :

$$\|AB - C_n\| \leqslant \varepsilon \text{ pour } n \geqslant \max\{q + r - 2, p\}.$$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow \|AB - C_n\| \leqslant \varepsilon.$$

La suite de terme général C_n converge. Sa limite est AB.
2) On suppose que les séries :

$$\sum a_n, \sum b_n \quad \text{et} \quad \sum c_n$$

convergent, montrons que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

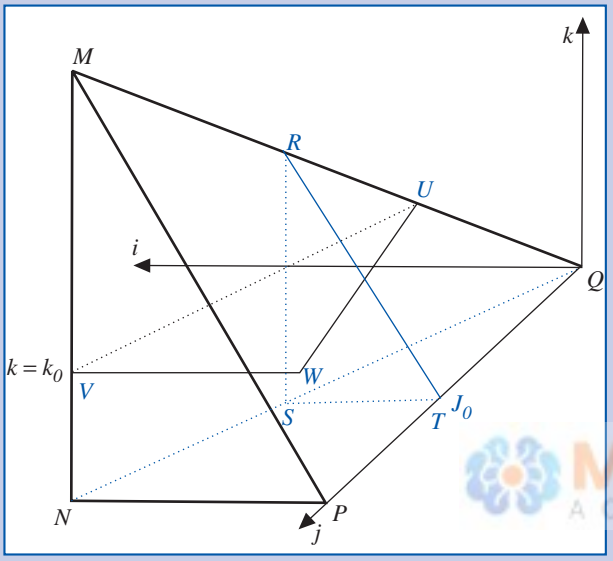
Posons $C_n = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} \right)$
• Vérifions :

$$\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = \frac{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \cdots + A_n B_0}{n+1}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\sum_{j=0}^{n} C_j = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_k b_{i-k}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}(n-i+1)a_k b_{i-k}\right).$$

$$\sum_{r=0}^{n} A_r B_{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k \sum_{s=0}^{n-r} b_s\right).$$



Pour comparer ces deux sommes, nous allons prendre un nouvel indice $i = s + k$ dans la dernière somme.

$$\sum_{r=0}^{n} A_r B_{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i=k}^{n-r+k} a_k b_{i-k}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\left(\sum_{r=k}^{n-i+k} a_k b_{i-k}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}(n-i+1)a_k b_{i-k}\right).$$

• La série $\sum c_n$ converge. Sa somme est C, donc $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$. La convergence en moyenne de Césaro montre que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = C$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. On démontre alors, que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \cdots + A_n B_0}{n+1} = AB = C.$$

3) a) La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ est absolument convergente et la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

D'après **1)**, la série produit converge. Son terme général est :

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^{p+q}}{(p+1)^2(q+1)}$$
$$= (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+1)^2(q+1)}$$
$$= (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p+1)^2(n-p+1)}.$$

Nous pouvons également étudier directement la série produit. Recherchons un équivalent de c_n.

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n+2}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{n-p+1}\right)$$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n+2}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p+1}.$$

Or le reste R_n de la série convergente $\sum \dfrac{1}{p^2}$ est équivalent à :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$c_n = (-1)^n \frac{\pi^2}{6(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{2(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p+1}.$$

De plus $\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{1}{p+1}$ est équivalent à $\ln n$, par conséquent :

$$c_n = (-1)^n \frac{\pi^2}{6(n+2)} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

On retrouve la convergence de la série produit, et on vérifie qu'elle n'est pas absolument convergente. Le théorème de Mertens permet de calculer sa somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^2(n-p+1)}\right].$$

Calculons : $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Nous en déduisons : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$. Par conséquent la somme est $\frac{\pi^2}{12} \ln 2$.

b) D'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge. Le terme général de la série produit de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ avec elle-même, est :

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^{p+q}}{\sqrt{p+1}\sqrt{q+1}} = (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{\sqrt{p+1}\sqrt{q+1}}$$

et $|c_n| \geqslant 1$, donc la série produit diverge.

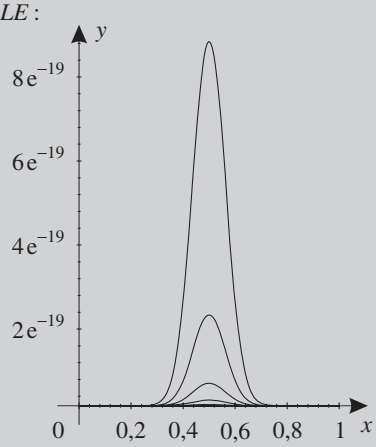
Chapitre 5

1 Soit $x_1 < x_2$ deux points de I et les fonctions (f_n) supposées croissantes.
Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_n(x_1) \leqslant f_n(x_2)$. D'où :

$$f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_1) \leqslant \lim_{n\to+\infty} f_n(x_2) = f(x_2).$$

2 La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle f. De plus, l'étude de f_n montre que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4^n}$. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

Avec MAPLE :




```
> plot({seq(x^n*(1-x)^n,n=30..40)},x=0..1) ;
```

3 L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire :

$$\forall (a, x) \in [0, \pi] \quad |\sin x - \sin a| \leqslant |x - a|.$$

On fixe alors un entier $n > 0$ et on choisit une subdivision $(a_j)_{j\in[\![0,p]\!]}$ de $[0, \pi]$, de pas inférieur ou égal à $\frac{1}{n}$. Ensuite, soit la fonction f_n définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \sin a_j \text{ si } x \in [a_j, a_{j+1}[\\ f_n(a_p) = \sin a_p = \sin \pi = 0. \end{cases}$$

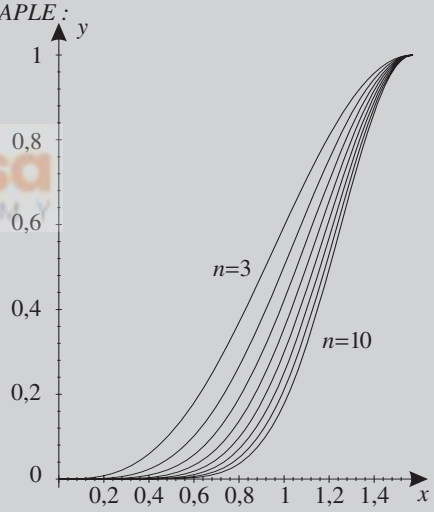
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers la fonction sinus.

4 **1)** La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, mais elle est uniforme sur tout segment $\left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ $\left(\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Avec MAPLE :




```
> plot({seq(sin(x)^n,n=3..10)},
x=0..Pi/2) ;
```

2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle f.

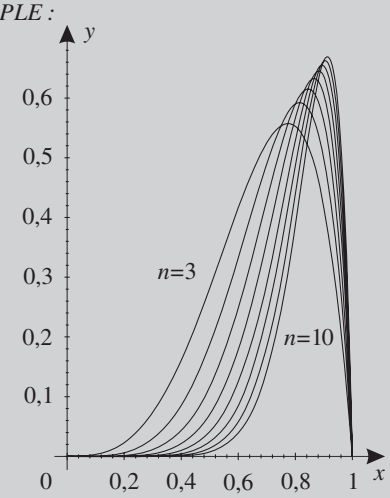
x	0		$x_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$		1
$f_n(x)$	0	↗	$\frac{2n}{n+2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n/2}$	↘	0

Or, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 2e^{-1}$. Donc, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Mais, si $a \in]0,1[$, pour n tel que $x_n > a$, on a $\|f_n|_{[0,a]}\|_\infty = f_n(a)$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est donc uniforme sur $[0,a]$.

Avec MAPLE :



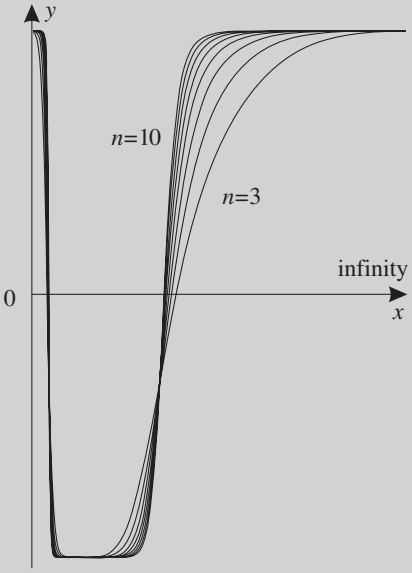

```
> plot({seq(n*x^n*(1-x^2),n=3..10)},x=0..1) ;
```

3) La suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in]e^{-1}, e[\\ -\dfrac{1}{3} & \text{si} \quad x \in \left\{e^{-1}, e\right\} \\ 1 & \text{si} \quad x < e^{-1} \text{ ou } x > e. \end{cases}$$

La convergence est uniforme sur tout segment contenu dans $]0,e^{-1}[$ ou $]e^{-1},e[$ ou $]e,+\infty[$.

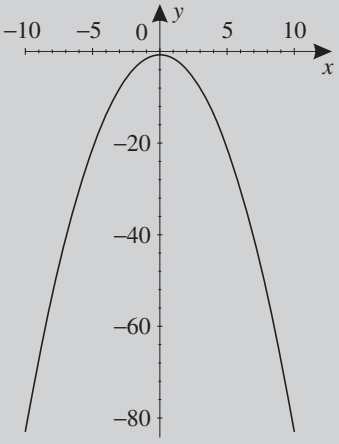
Avec MAPLE :




```
> plot({seq((ln(x)^(2*n)-2)
/(ln(x)^(2*n)+2),n=3..10)},
x=0..infinity) ;
```

5 Soit x un réel. La série numérique $\sum (-1)^n \dfrac{n+x^2}{n^2}$ est alternée. Elle vérifie le critère spécial des séries alternées, donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Avec MAPLE :




```
> plot(sum('(-1)^n*(n+x^2)/(n^2)',
'n'=1..150),x=-10..10) ;
```

On sait que, pour tout x réel :

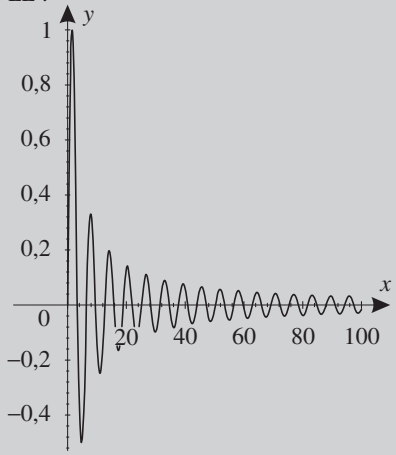
$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{n+x^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{x^2}{n^2}.$$

On en déduit la convergence uniforme sur tout compact de la série de fonctions.

6 La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa somme S est définie par :

$$S(x) = \frac{\sin x}{1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}.$$

Avec MAPLE :




```
> plot(sin(x)/(1+floor(x/Pi)),x=0..100) ;
```

Elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$, car :

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

mais elle converge normalement sur tout segment $[0, a]$, avec $a > 0$ fixé.

De plus, si n est fixé, on a :

$$|S(x) - S_n(x)| = 0 \quad \text{si} \quad x < (n+1)\pi ;$$
$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+2} \quad \text{si} \quad x \geqslant (n+1)\pi.$$

Donc $\|S - S_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

7 La série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et diverge sur $]-\infty, 0[$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}\, n \ln(n)}$	↘	0

Sur $\mathbb{R}^+$: $\|x\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}\|_\infty = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, n \ln n}$

et la divergence de la série numérique $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}\, n \ln n}$ (comparer à une intégrale) implique que la série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$ et tout $n \geqslant \dfrac{1}{a}$:

$$\left|\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}\right| \leqslant a\frac{\mathrm{e}^{-na}}{\ln n}.$$

La série de fonctions converge donc normalement sur $[a, +\infty[$.

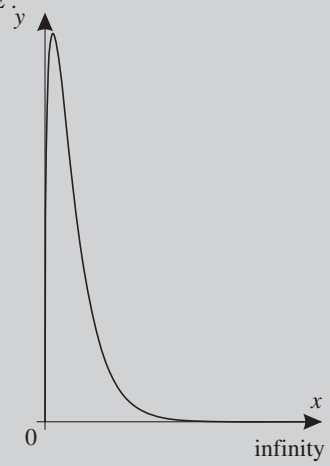
Soit $x > 0$. Alors :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\sum_{n+1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})\ln(n+1)} \leqslant \frac{K}{\ln(n+1)}$$

en posant : $\quad K = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})}$.

La série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Avec MAPLE :




```
> plot(sum('x*exp(-n*x)/ln(n)',
'n'=2..100),x=0..infinity) ;
```

8 Si une telle suite existait, le théorème d'interversion des limites s'appliquerait sur l'intervalle $]0, 1]$. Or, 0 est un point adhérent à $]0, 1]$ donc la fonction f aurait une limite en 0.

9 Il est immédiat que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si a est dans $]0, 1[$, la fonction f n'est pas continue sur $[a, +\infty[$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[a, +\infty[$. La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$.

10 a) La série de fonctions $\sum \dfrac{x^2}{(n+x)^2}$ converge normalement, sur $[0, 2]$, car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0, 2] \quad 0 \leqslant \frac{x^2}{(n+x)^2} \leqslant 2^2 \frac{1}{n^2}.$$

La fonction somme est donc continue sur [0,2] et :

$$\lim_{x \to 1} \sum_{1}^{\infty} \frac{x^2}{(n+x)^2} = S(1) = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

b) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et les fonctions $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème d'interversion des limites s'applique, et :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} \right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

11 La série de fonctions $\sum \frac{\cos(n\,x)}{n^{3/2}}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

12 f est définie sur $]-1,1]$. La série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$ et, en particulier, sur $[0,1]$.

La fonction f est donc continue sur $]-1,1]$ et :

$$f(1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

13 On considère la fonction continue g de $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} g(0) = l \\ g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction polynôme P approchant uniformément g sur $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ à ε près :

$\forall\, x \in [a, +\infty[$

$$\left| f(x) - P\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left| g\left(\frac{1}{x}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \|(g-P)_{|[0,\frac{1}{a}]}\|_\infty.$$

14 Soit $\varepsilon > 0$ fixé et P une fonction polynôme approchant uniformément f sur $[0,1]$ à ε près.

D'après l'hypothèse, on sait que : $\int_0^1 P(t) f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

Or :

$$0 \leqslant \left| \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 P(t)\ f(t)\,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\,f(t)|\ \|\,f - P\|_\infty.$$

Donc : $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |\,f(t)|$.

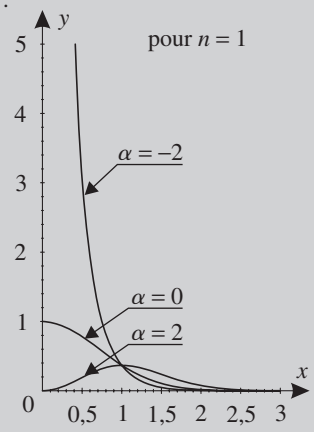
Cette intégrale est nulle. f^2 est continue et positive, donc $f = 0$.

15 • Fixons $x > 0$. $n\,x^\alpha \mathrm{e}^{-n\,x^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

La série de fonctions $\sum n\,x^\alpha \mathrm{e}^{-n\,x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Fixons $n > 0$ et étudions la fonction f_n.

Avec MAPLE :




```
> plot({x^(-2)*exp(-x^2),
x^(2)*exp(-x^2),exp(-x^2)}, x=0..3,y=0..5) ;
```

Si $\alpha \leqslant 0$, la série de fonctions ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Mais elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ car $\| f_{n|[a,+\infty[}\|_\infty = f_n(a)$ et la série $\sum f_n(a)$ converge.

Si $\alpha > 0$, la fonction f_n admet un maximum en $\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$ et la valeur du maximum est :

$$\| f_n\|_\infty = n\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2} \mathrm{e}^{-\alpha/2} = c\,n^{1-\alpha/2}.$$

La série de fonctions converge donc normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si, $\alpha > 4$. Si $\alpha \in\,]0,4]$, elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ $(a > 0)$.

Si $\alpha \leqslant 0$, la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle. Donc la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Regardons ensuite, lorsque α est dans $]0,4]$, si la convergence est uniforme en étudiant le reste :

$$R_n(x) = x^\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k\,x^2}.$$

La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t\,x^2}$ est décroissante pour $t \geqslant \frac{1}{x^2}$.

Elle est aussi continue et la série $\sum \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge.

D'où, pour $n+1 \geqslant \frac{1}{x^2}$:

$$0 \leqslant x^\alpha \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = x^\alpha S \leqslant R_n(x).$$

Prenons $x = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ qui convient. Alors :

$$R_n(x) \geqslant x^\alpha S = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\alpha-4} 2\mathrm{e}^{-1}.$$

La suite $\left(R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$ ne converge pas vers 0 si $\alpha \in\,]0,4]$.

Lorsque $\alpha \in\,]0,4]$, la série de fonctions n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

16 **1)** Une fonction polynôme de degré $\leqslant p$ est parfaitement déterminée par ses valeurs en $p+1$ points distincts.

On considère donc $p+1$ réels distincts $(a_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction polynôme P_n s'écrit, en utilisant les polynômes de Lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{p+1} P_n(a_j) \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}} \left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right)$$

La suite de fonctions (P_n) converge simplement vers f. On fixe un réel x et on fait tendre n vers $+\infty$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p+1} f(a_j) \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}} \left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right).$$

La fonction f est une fonction polynôme de degré $\leqslant p$.

On montre ensuite que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. En fixant $a<b$:

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{p+1} |f(a_j)-P_n(a_j)| \left| \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}} \left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right)\right|.$$

Vous terminerez en utilisant la continuité des $p+1$ polynômes :

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}} \left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right) \text{ sur } [a,b].$$

2) La convergence de la suite (P_n) vers f est uniforme sur $\mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon>0$:

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\ \forall x\in\mathbb{R}\quad |P_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

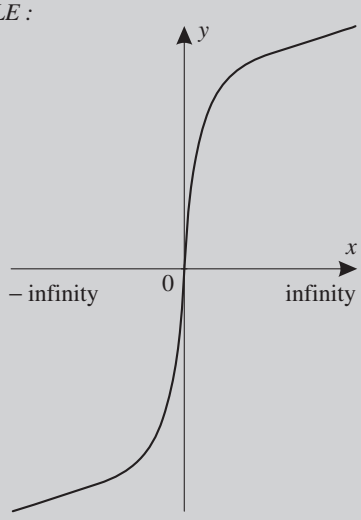
Pour $n\geqslant N$, la fonction polynôme P_n-f est donc bornée sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction constante. On en conclut, qu'à partir d'un certain rang N, on a $P_n=f+a_n$, et la suite $(a_n)_{n\geqslant N}$ est une suite de réels qui converge vers 0.

17 **1)** La série de fonctions impaires, continues :

$$\sum \frac{1}{n^2}\operatorname{Arctan} n\,x$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc f est définie, impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

Avec MAPLE :




```
> plot(sum('arctan(n*x)/n^2',
'n'=1..100),x=-infinity..infinity) ;
```

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\operatorname{Arctan} n\,x = \dfrac{\pi}{2n^2}$. Donc, grâce à la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12} = -\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

3)
$$f(x) - \frac{\pi^3}{12} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\left(\operatorname{Arctan} n\,x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{n\,x}$$

Pour n fixé $\quad \dfrac{1}{n^2}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n\,x} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^3\,x}$.

$$\forall x>0\quad x\left(f(x)-\frac{\pi^3}{12}\right) = \sum_1^\infty \frac{-x}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{(nx)}$$

On pose : $w_n(x) = \dfrac{-x}{n^2}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{(nx)}$. Pour tout $u>0$: $0\leqslant \operatorname{Arctan} u\leqslant u$. Donc, pour tout $x>0$:

$$|w_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^3}.$$

La série de fonctions $\sum w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(f(x)-\frac{\pi^3}{12}\right) = \lim_{x\to+\infty} w_n(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}$$

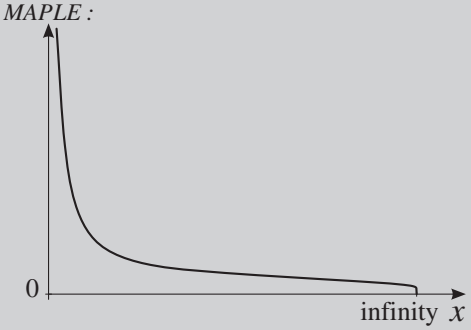
En conclusion :

$$\left(f(x)-\frac{\pi^3}{12}\right) \sim_{+\infty} -\frac{1}{x}\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

18 **1)** On fixe $x > 1$. La série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées.
La série de fonctions converge donc simplement sur $]1, +\infty[$.

Avec MAPLE :




```
> plot(sum('(-1)^n/ln(x+n)',
'n'=0..1000),x=1..infinity) ;
```

2) $f(x+1) = -\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(x+n)} = -f(x) + u(x)$.

3) $f(x) + f(x+1) = u(x)\,; f(x) \geqslant 0 \quad f(x+1) \geqslant 0\,;$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

4) La convergence de la série permet d'écrire, en regroupant les termes deux par deux :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(x+2p)} - \frac{1}{\ln(x+2p+1)}$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x+2p}\right)}{\ln(x+2p)\ln(x+2p+1)}.$$

La fonction f est strictement décroissante.

5) D'après la question **2)**, si D existe, alors $D = \dfrac{1}{2}$.

Existence de D.

• *Première méthode.*
Soit $x > 1$. On pose $v(t) = \dfrac{1}{\ln(x+2t)} - \dfrac{1}{\ln(x+2t+1)}$.

La fonction v est décroissante, positive et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Avec MAPLE :

```
> f :=x->1/ln(x+2*t)-1/ln(x+1+2*t) ;
diff(f(x),x) ;
```

$$f := x \to \frac{1}{\ln(x+2t)} - \frac{1}{\ln(x+1+2t)}$$
$$-\frac{1}{\ln(x+2t)^2(x+2t)} + \frac{1}{\ln(x+1+2t)^2(x+1+2t)}$$

En utilisant l'encadrement par une intégrale :

$$\frac{1}{2\ln(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)}.$$

• *Deuxième méthode.*
On écrit :

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)} = \frac{1}{\ln(x)} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(x+n+1)}$$

En sommant les deux expressions :

$$2\,f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\ln(x+n)} - \frac{1}{\ln(x+n+1)}\right).$$

Pour tout $x > 1$, la série :

$$\sum (-1)^n \left(\frac{1}{\ln(x+n)} - \frac{1}{\ln(x+n+1)}\right)$$

est une série alternée qui vérifie le critère spécial de convergence. Donc :

$$\frac{1}{\ln(x)} \leqslant 2\,f(x) \leqslant \frac{1}{\ln(x)} + \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right).$$

Et : $\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right) = o\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

Donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2\ln(x)}$.

• *Troisième méthode.*
f est décroissante et $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

Donc $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2\ln(x)}$ et $f(x+1) \leqslant \dfrac{1}{2\ln(x)}$.

Puis : $\dfrac{1}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\ln(x-1)}$

19 ϕ est un morphisme d'algèbre, donc $\phi(1_A) = 1$.

Puisque ϕ est linéaire, il suffit de montrer que, si $\|x\| = 1$, alors $\phi(x)$ est borné. On suppose que, pour tout $K > 1$, il existe x tel que : $\|x\| = 1$ et $\phi(x) = M \geqslant K$.

Alors, on a $\|\dfrac{x}{M}\| < 1$, donc $1_A - \dfrac{x}{M}$ est inversible dans A. Soit y son inverse.

$$\phi\left(y\left(1_A - \frac{x}{M}\right)\right) = \phi(1_A) = 1 = \phi(y)\,\phi\left(1_A - \frac{x}{M}\right)$$
$$= \frac{1}{M}\,\phi(y)\,\phi(M\,1_A - x) = 0$$

Ceci est impossible.

20 Soit $\overline{B}(0, R)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R $(R > 0)$ de $\mathbb{C}$. Montrons la convergence uniforme sur cette boule de la suite de fonctions (u_n).

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Dans ce but, étudions la série de fonctions $\sum(u_n(z)-u_{n-1}(z))$.

$$|u_n(z)-u_{n-1}(z)| = |u_{n-1}(z)|\,|q|^n\,|z| \leqslant R|q|^n \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+R|q|^k\right)$$

$$\leqslant R|q|^n \exp\left(\sum_1^{n-1} \ln\left(1+R|q|^k\right)\right)$$

$$\leqslant R|q|^n \exp\left(\sum_1^{n-1} R|q|^k\right)$$

$$\leqslant R|q|^n \exp\left(R\sum_1^{+\infty}|q|^k\right).$$

La série $\sum|q|^n$ converge.

La série de fonctions $\sum(u_n(z)-u_{n-1}(z))$ est normalement, donc uniformément convergente sur $\overline{B}(0,R)$.

La continuité des fonctions u_n entraîne alors la continuité de la fonction u.

21 **1)** Pour tout a de $]0,1[$, la série $\sum\frac{1}{k^{1-a}}$ diverge. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^{1-a}}$ est positive, décroissante sur $[1,+\infty[$. On utilise le théorème de comparaison avec une intégrale.

La série de terme général $\omega_k(a)=\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-a}}-\frac{1}{k^{1-a}}$ converge.

On note Ka la somme $\sum_{k=2}^{+\infty}\omega_k(a)$.

D'où $\sum_{k=2}^{n}\omega_k(a)=Ka+o(1)$

puis $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1-a}}=\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-a}}-Ka+1+o(1)$.

On en déduit la relation attendue pour $C_a=Ka+\frac{1}{a}-1$.

2) $C_a=\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(a)-1+\frac{1}{a}$.

Montrons que $\sum_k\omega_k(a)$ converge normalement sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

$$0\leqslant\omega_k(a)=\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{t^{1-a}}-\frac{1}{k^{1-a}}\right)\mathrm{d}t.$$

On vérifie que $g:a\to\frac{1}{t^{1-a}}-\frac{1}{k^{1-a}}$ est croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

En effet $g':a\to(\ln t)t^{a-1}-(\ln k)k^{a-1}$ est positive lorsque t varie dans $[k-1,k]$ dès que $k>\mathrm{e}^2+1$.

On en déduit : $0\leqslant\omega_k(a)\leqslant\omega_k\left(\frac{1}{2}\right)$. Or $\sum\omega_k\left(\frac{1}{2}\right)$ converge.

$\sum\omega_k(a)$ converge normalement sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ et nous pouvons échanger les limites en 0.

$$\lim_{a\to0^+}\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(a)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

Ainsi : $\lim_{a\to0^+}C_a-\frac{1}{a}-\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_2^n\frac{1}{k}-\ln n\right)-1=-\gamma$.

D'où : $C_a=\frac{1}{a}-\gamma+o(a)$.

3) $\sum_1^{2N+1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-a}}=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^{1-a}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^{1-a}n^{1-a}}$

$$=\sum_1^{2N+1}\frac{1}{n^{1-a}}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^{1-a}n^{1-a}}$$

$$=-\left(1-2^a\right)C_a+o(1)$$

22 **1)** On peut écrire :

$$D_n(z)=\sum_0^{\infty}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_0^{\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)\frac{z^k}{k!}+\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{z^p}{p!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k(n)\frac{z^k}{k!}+\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{z^p}{p!}$$

avec, pour tout n et $k\leqslant n$, $a_0(n)=0$, $a_1(n)=0$, $a_2(n)=\frac{1}{n}$, et, si $n\geqslant2$:

$$a_k(n)=\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)=1-\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

C'est un polynôme en $\frac{1}{n}$ de degré $k-1$.

En particulier, $a_3(n)=\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}$.

2) On montre, pour n fixé $\geqslant2$, par récurrence sur k dans $[\![2,n]\!]$ que $1-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{n}\leqslant\left(1-\frac{i}{n}\right)$ et on utilise $\sum_{i=1}^{k-1}i=\frac{k(k-1)}{2}$.

3) Soit z un complexe fixé. Alors :

$$|D_n(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}a_k(n)\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{|z|^p}{p!}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(n)\frac{|z|^k}{k!}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\frac{|z|^k}{k!}\leqslant\frac{|z|^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|z|^j}{j!}$$

et :

$$\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{|z|^p}{p!}\leqslant\frac{|z|^2}{2n}\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{|z|^{p-2}}{(p-2)!}\leqslant\frac{|z|^2}{2n}\sum_{p=n-1}^{\infty}\frac{|z|^j}{j!}$$

L'égalité demandée en découle.

4) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe un réel $M>0$ tel que $\forall z\in K\quad|z|\leqslant M$.

On en déduit $\forall z\in K\,|D_n(z)|\leqslant\frac{M^2\mathrm{e}^M}{2n}$.

La suite de fonctions (D_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle sur K.

5) On cherche x_m tel que $D_{2m}(x_m)=0$, en écrivant $x_m=\lambda m$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

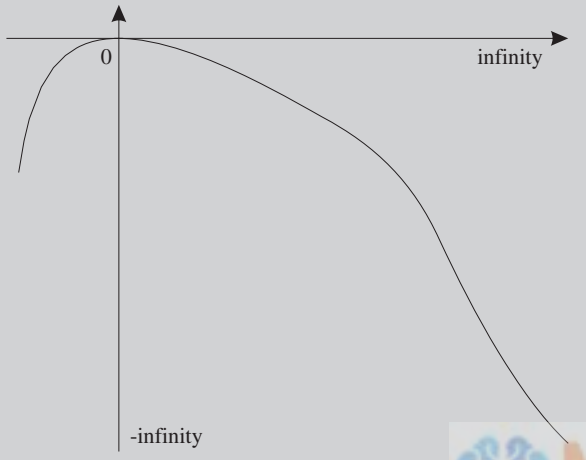
λ dépend, *a priori*, de m. On doit avoir :

$$e^{\lambda m} = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^{2m}$$

Ceci équivaut à $\lambda = 2\ln\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$. Cette équation est indépendante de m et l'étude de la fonction : $u \mapsto 2\ln\left(1 + \frac{u}{2}\right) - u$, prouve qu'elle admet effectivement une unique racine sur $]-2, +\infty[$.

Avec Maple :

```
> plot(2*ln(1+x/2)-x,x=-2..infinity);
```



23 Le domaine de définition de f est $]-1, 1[$.

Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(u) = \dfrac{ut^u}{1-t^u}$, pour t fixé dans $]0, 1[$. φ est dérivable et :

$$\varphi'(u) = \frac{t^u}{(1-t^u)^2}(1 - t^u + u\ln t) \leqslant 0,$$

($e^v \geqslant 1 + v$). φ est donc positive et décroissante. On compare la série et l'intégrale. On sait que la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$\int_1^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_0^\infty \frac{n\,t^n}{1-t^n} \leqslant \int_0^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

On calcule $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}u$. Soit $A > 0$.

$$\int_0^A \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(\ln t)^2}\int_1^{\exp(A\ln t)} \frac{\ln v}{1-v}\,\mathrm{d}v$$

D'où : $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(\ln t)^2}\int_0^1 \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v.$

On calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v.$

$$\int_0^1 \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v = -\sum_0^{n-1}\int_0^1 v^k \ln v\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \frac{v^n \ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v$$

$$= \sum_0^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} - \int_0^1 \frac{v^n \ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v$$

Or $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{v^n \ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v\right| = \int_0^1 v^{n-1}\frac{v\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v$. La fonction $v \mapsto \dfrac{v\ln v}{v-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1. Elle est donc bornée. Puis :

$$\int_0^1 v^{n-1}\frac{v\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v \leqslant M\int_0^1 v^{n-1}\,\mathrm{d}v = \frac{M}{n}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{v^n\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v = 0$$

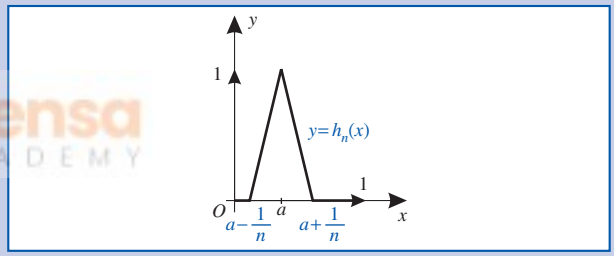
Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v = \sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad f(t) \sim_1 \frac{\pi^2}{6(t-1)^2}$$

24 **1)** Si f n'est pas la fonction nulle sur $[0, 1]$, l'ensemble des points tels que $f(t) \neq 0$ est un ouvert non vide (car f est continue), donc infini. On en déduit qu'un polynôme P tel que $N_f(P) = 0$ est le polynôme nul. Dans ce cas N_f est une norme.

2) On suppose $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = 0$ et $g(a) = c \neq 0$.

On considère la fonction h_n ainsi définie :



Alors, pour tout x de $[0, 1]$:

$$|h_n(x)\ f(x)| \leqslant \sup_{x\in\left[a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right]} |f(x)|$$

La fonction f est continue et $f(a) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\left[a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right]}|f(x)| = 0$ et $\|h_n\ f\|_\infty = \varepsilon_n$ tend vers 0.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, pour tout n, il existe P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|P_n - h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$. Alors :

$$N_f(P_n) = \|P_n f\|_\infty = \|(P_n - h_n)\ f + h_n\ f\|_\infty \leqslant \varepsilon_n(\|f\|_\infty + 1).$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_f(P_n) = 0$.

Mais $\|h_n g\|_\infty \geqslant |h_n(a)\,g(a)| = |c| > 0$.

Donc :

$$N_g(P_n) = \|P_n\,g\|_\infty = \|(P_n - h_n)\,g + h_n\,g\|_\infty$$

$$\geqslant |\|h_n\,g\|_\infty - \|(P_n - h_n)\,g\|_\infty| \geqslant |c| - \varepsilon_n\|g\|_\infty.$$

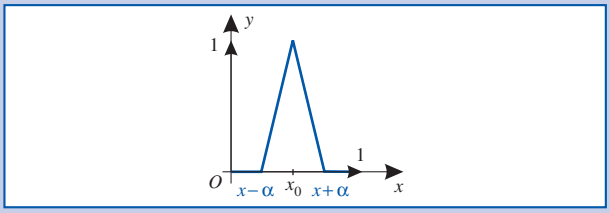
N_f et N_g ne sont donc pas équivalentes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) La norme $\| \ \|_\infty$ n'est autre que la norme N_g, avec $g : x \in [0,1] \mapsto 1$.
Si N_f et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes, f ne s'annule pas sur $[0,1]$. Réciproquement, f est continue. Si elle ne s'annule pas sur $[0,1]$, il existe deux réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a \leqslant f \leqslant b$. N_f et $\| \ \|_\infty$ sont alors équivalentes.
4) On montre par l'absurde que la condition est nécessaire.
Soit $a > 0$, il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que $a\ f(x_0) > g(x_0) \geqslant 0$. La continuité de f et de g entraîne l'existence de $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [0,1] \quad (a\ f - g)(x) > 0.$$

On considère la fonction h définie ainsi que l'indique le schéma.



On a : $\forall\, x \in [0,1] \quad a\ f(x)\,h(x) \geqslant g(x)\,h(x)$.
Soit $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ fixé et un polynôme, P, de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\|P - h\|_\infty \leqslant \varepsilon \qquad \text{(théorème de Stone-Weierstrass).}$$

P n'est pas nul
Alors, pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$|g(x)\,P(x)| \leqslant g(x)\,h(x) + \varepsilon\, g(x) \leqslant a\ f(x)\,h(x) + \varepsilon\, g(x)$$
$$\leqslant a\ f(x)|P(x)| + a\,\varepsilon\ f(x) + \varepsilon\, g(x).$$

On pose $M = \sup_{x\in[0,1]} (a\ f(x) + g(x))$. On en déduit :

$$N_g(P) \leqslant a\, N_f(P) + \varepsilon\, M.$$

Si on choisit $\varepsilon < \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{a\ f(x_0)}{a\ f(x_0) + M}\right)$, alors :

$$\varepsilon\, M < a\ f(x_0) \leqslant 2\, a\, N_f(P)$$

Puis : $\forall\, a \in \mathbb{R}^{+*}\ \exists\, P \in E \quad N_g(P) < 3\, a\, N_f(P)$.
Les normes N_f et N_g ne sont pas équivalentes.
La réciproque est immédiate.

Chapitre 6

1 **1)** L'équation de la tangente est :

$$Y = f'(x_0)(X - x_0) + f(x_0).$$

Si $f'(x_0) = 0$, la normale est la droite d'équation $X = x_0$.
Sinon, l'équation de la normale est :

$$Y = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0) + f(x_0).$$

2) L'équation de la tangente est :

$$y'(t_0)(X - x(t_0)) - x'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0.$$

L'équation de la normale est :

$$x'(t_0)(X - x(t_0)) + y'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0.$$

3) Le rayon vecteur (x_0, y_0) est orthogonal à la tangente au cercle en $M_0(x_0, y_0)$. L'équation demandée est $x_0\, X + y_0\, Y = x_0^2 + y_0^2 = R^2$.

2 **1)** $f(x) \sim_0 \dfrac{x}{6}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et :
$f(x) =_0 \dfrac{x}{6} + o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.
Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{-x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} =_0 \frac{1}{6} + o(1).$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{6}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

3 $g(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-3}$ et :

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n! \left[\frac{2}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-3)^{n+1}}\right]$$

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} \text{ et :}$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n\, n! \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{(x-1)^{n+2}} + \frac{2(n+1)(n+2)}{(x-1)^{n+3}}\right].$$

4 On pose $f(x) = \dfrac{x^{314\,16}}{x^2 - 1}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\frac{x^{314\,16}}{x^2-1} =_0 -x^{314\,16} - x^{314\,16+2} - \cdots - x^{314\,16+2k} + o\left(x^{314\,16+2k}\right)$$

On en déduit, par la formule de Taylor-Young, que $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\,x^n}(0) = 0$ si n est impair ou $< 31\,416$, et si $n = 31\,416 + 2k$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\,x^n}(0) = -n!$.

5 Puisque $(1+x^2)\, f'(x) = 1$, on a $f'(0) = 1$.
Pour $n \geqslant 1$, $\left[(1+x^2)\, f'(x)\right]^{(n)} = 0$.
Soit, d'après la formule de Leibniz :

$$(1+x^2)\, f^{(n+1)}(x) + n(2x) f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} 2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n\,(2n)!$$

Remarque : Le développement limité de f en 0 permet de trouver ces formules par une autre méthode.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

6 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

7 Les applications :

$$P \mapsto \int_0^1 P$$

et $\quad P \mapsto \dfrac{1}{18}\left(5\,P(\alpha) + 8\,P\left(\dfrac{1}{2}\right) + 5\,P(\beta)\right)$

sont linéaires. Il suffit de prouver qu'elles sont égales sur une base de $\mathbb{R}_5[X]$.

Vous effectuerez les calculs avec la base $\left(\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^k\right)_{k\in[\![0,5]\!]}$.

Autre méthode :
Effectuer les calculs dans la base suivante de $\mathbb{R}_5[X]$:

$$\left(1, X, X^2 - X + \frac{1}{10}, X\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right),\right.$$
$$\left. X^2\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right), X^3\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right)\right)$$

8 **1)** $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}$.

2) La fonction $\quad a \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad$ est paire, il suffit de calculer la limite à droite en 0.

Pour tout a de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, utilisez :

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos(a) \leqslant \cos(a\sin(t)) \leqslant 1.$$

La limite cherchée est $\dfrac{\pi}{2}$.

9 On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0,1]$; si elle ne s'annule pas sur $]0,1[$, elle est de signe constant. On suppose $g > 0$ sur $]0,1[$. Alors :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2}.$$

C'est impossible, donc g s'annule sur $]0,1[$.

10 On note $\quad x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \quad$ alors :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f(x_k)\big)\,\mathrm{d}t.$$

1) Si f est à valeurs réelles et croissante, on en déduit :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big)(x_{k+1} - x_k)$$
$$= \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big)$$

2) Si f est c-lipschitzienne par rapport à $\|\ \|$, alors :

$$\|R_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|f(t) - f(x_k)\|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c\,(t - x_k)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} c\,\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$
$$= \frac{c\,(b-a)^2}{2n}$$

11 **1)** $f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{t+n+1}}{x+1}$. D'où :

$$\int_0^1 |f(x) - S_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{t+n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{t+n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f(x) - S_n(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) La série à termes réels $\sum u_n(1)$ diverge grossièrement, donc il n'y a pas convergence simple sur $[0,1]$. Vous pourrez prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et normalement sur tout segment inclus dans $[0,1[$.

12 **1)** Pour tout x de $[0,2]$, la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

2) D'après le schéma, pour tout n, $\displaystyle\int_0^2 f_n = 1$ (aire d'un triangle). Si la suite (f_n) convergeait en moyenne vers une fonction continue par morceaux f, on aurait alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n = 1 = \int_0^2 f \qquad \textbf{(1)}$$

Par ailleurs :

$$\left|\int_{2/n}^2 f\right| = \left|\int_{2/n}^2 (f - f_n)\right| \leqslant \int_{2/n}^2 |f - f_n| \leqslant \int_0^2 |f_n - f|$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{2/n}^2 f = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On obtient une contradiction. La suite (f_n) ne converge pas en moyenne.

3) Si la suite (f_n) convergeait en moyenne quadratique vers une fonction continue par morceaux f, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 |f_n|^2 = \int_0^2 |f|^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Or : $\displaystyle\int_0^2 |f_n|^2 = \frac{2}{3}n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^2 |f_n|^2 = +\infty$ et **(3)** est impossible. La suite (f_n) ne converge pas en moyenne quadratique.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

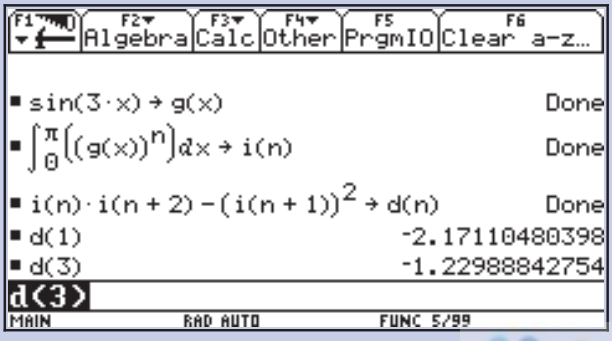
13 Puisque f est à valeurs positives, on peut écrire :

$$I_n I_{n+2} = \int_a^b \left(f^{n/2}(t) \right)^2 \mathrm{d}t \int_a^b \left(f^{(n+2)/2}(t) \right)^2 \mathrm{d}t$$
$$\geqslant \left(\int_a^b f^{n/2}(t) f^{(n+2)/2}(t) \, \mathrm{d}t \right)^2 = (I_{n+1})^2 .$$

Si f n'est pas à valeurs positives, pour tout entier pair n, on a :

$$f^n(t) = \left(|f(t)|^{n/2} \right)^2 .$$

La formule $I_n I_{n+2} \geqslant (I_{n+1})^2$ reste valable si n est pair.
L'exemple suivant prouve qu'il n'en est pas de même pour n impair.



14 **1)** On note :

$$m = f(x_0) = \inf_{t \in [a,b]} f(t) \quad \text{et} \quad M = f(x_1) = \sup_{t \in [a,b]} f(t).$$

Sachant que g est à valeurs positives, on a :

$$m \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t \leqslant M \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Si $\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t = 0$, le problème est réglé. Sinon, on a :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t}{\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t} \leqslant f(x_1).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Application :

$$\int_0^\pi f(x) |\sin nx| \, \mathrm{d}x = \sum_0^{n-1} f(x_k) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \, \mathrm{d}x$$

avec : $\left(x_k \in \left] \frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} \right[\right)$. On fait apparaître une somme de Riemann d'une fonction continue et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin nx| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f$$

2) On note $x_k = a + k \dfrac{b-a}{n}$, on a toujours :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) \, \mathrm{d}t.$$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc intégrer par parties :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) \, \mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Or la fonction $(t \mapsto x_{k+1} - t)$ est continue et positive sur $[x_k, x_{k+1}]$. Donc il existe t_k dans $[x_k, x_{k+1}]$ tel que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f'(t) \, \mathrm{d}t = f'(t_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) \, \mathrm{d}t$$
$$= f'(t_k) \frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Donc :

$$n R_n = \frac{b-a}{2} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(t_k) \right].$$

Sachant que f' est continue sur $[a,b]$, le théorème sur les sommes de Riemann donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(t_k) = \int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n R_n = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2}.$$

3) Si f est à valeurs dans l'espace vectoriel E, on introduit les fonctions composantes de f dans une base de E. On peut appliquer la question 2 à chacune de ces fonctions composantes et le résultat du **2)** reste valable.

4) Le nombre R_n mesure l'erreur commise en approximant $\int_a^b f$ par la somme de Riemann $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n} \right)$ (méthode des rectangles).

Lorsque $f(a) \neq f(b)$, cette erreur est équivalente à $\frac{d}{n}$, avec $d = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2}$. Numériquement, cette approximation n'est donc pas très bonne.

Cependant, si $f(a) = f(b)$, R_n est négligeable devant $\frac{1}{n}$ et l'approximation est bien meilleure.

15 **1)** On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a :

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{et} \quad f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x} \right)$$

On suppose la formule (1) valable pour un entier $n \geqslant 1$. Par définition $f_{n+1}(x) = x \, f_n(x)$.
D'après la formule de Leibniz, on a :

$$f_{n+1}^{(n)}(x) = x \, f_n^{(n)}(x) + n \, f_n^{(n-1)}(x).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'où la formule à l'ordre $n+1$:

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\right] f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Il suffit d'appliquer **1)** à la fonction *exponentielle*.

3) Poser $f(x) = -\ln(x)$, prouver $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ et conclure.

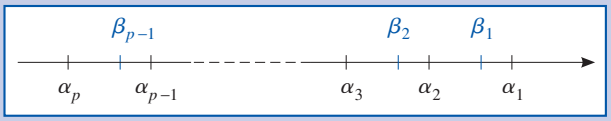
16 **1)** Pour simplifier la rédaction, on peut supposer que :
- P et Q sont des polynômes unitaires ;
- $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

De plus, le cas $\alpha = 0$ est trivial. On suppose donc $\alpha \neq 0$ et, quitte à factoriser ce scalaire, il suffit de traiter le cas :
- $\alpha = 1$.

On note $p = \deg(P)$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ les racines de P, numérotées de telle façon que :

$$\alpha_p < \alpha_{p-1} < \ldots < \alpha_1$$

Dans chacun des $p-1$ intervalles $]\alpha_{i+1}, \alpha_i[$, se trouve une racine de Q, notée β_i.

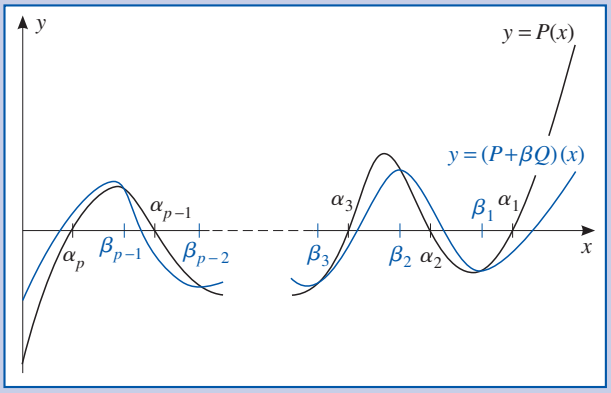


Donc : $p-1 \leqslant \deg(Q) \leqslant p = \deg(P)$.

Cas a) : $\deg(Q) = p-1$.

$$P = \prod_{i=1}^{P}(X-\alpha_i) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{i=1}^{P-1}(X-\beta_i)$$

Vous montrerez que la fonction polynôme $P + \beta Q$ s'annule une fois dans chacun des $p-2$ intervalles $]\beta_{i+1}, \beta_i[$ une fois sur $]\beta_1, +\infty[$ et une fois sur $]-\infty, \beta_{p-1}[$.



Cas b) : $\deg(Q) = p$.

Dans ce cas, le polynôme Q admet une dernière racine qui est soit dans $]-\infty, \alpha_p[$, soit dans $]\alpha_1, +\infty[$. On se contente de traiter le cas où cette racine, notée β_p, est dans $]-\infty, \alpha_p[$.

On a :

$$P = \prod_{i=1}^{P}(X-\alpha_i) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{i=1}^{P}(X-\beta_i)$$

La fonction polynôme $P + \beta Q$ s'annule une fois dans chacun des $p-1$ intervalles $]\beta_{i+1}, \beta_i[$.

Le polynôme $P + \beta Q$ est de degré $\leqslant p$ et a au moins $p-1$ racines distinctes. Il est scindé. Enfin, le coefficient de X^p dans $P + \beta Q$ est $(1+\beta)$.

Lorsque ce coefficient est non nul, vous montrerez que $P + \beta Q$ a une racine dans $]\beta_1, +\infty[$ ou $]-\infty, \beta_p[$.

Dans tous les cas, $P + \beta Q$ est scindé et n'a que des racines simples.

2) D'après le théorème de Rolle, le polynôme dérivé P' s'annule au moins une fois entre deux racines de P. Donc P' admet $p-1$ racines $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ telles que :

$$\alpha_p < \beta_{p-1} < \alpha_{p-1} < \cdots < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_1.$$

On peut appliquer le **1)** aux polynômes P et $Q = P'$ et conclure que $P + \alpha P'$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

3) On effectue une récurrence sur $n = \deg(R)$.

On note (H_n) l'hypothèse suivante :

Pour tout polynôme scindé de degré n de $\mathbb{R}[X]$:

$$R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n,$$

et tout polynôme P, scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples, le polynôme $a_0 P + a_1 P' + \cdots + a_{n-1} P^{(n-1)} + a_n P^{(n)}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

Le cas $n = 1$ est traité par la question **2)**. Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que (H_n) soit vraie.

On considère T un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$.

On sait qu'il existe un réel α et un polynôme scindé de degré n :

$$R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

tels que :

$$\begin{aligned} T &= (X-\alpha)R \\ &= a_0 X^{n+1} + (a_1 - \alpha a_0)X^n + \cdots + (a_n - \alpha a_{n-1})X - \alpha a_n \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} &a_0 P + (a_1 - \alpha a_0)P' + \cdots + (a_n - \alpha a_{n-1})P^{(n)} - \alpha a_n P^{(n+1)} \\ &\quad = a_0(P - \alpha P') + a_1(P - \alpha P')' + \cdots \\ &\qquad + a_{n-1}(P - \alpha P')^{(n-1)} + a_n(P - \alpha P')^{(n)} \end{aligned}$$

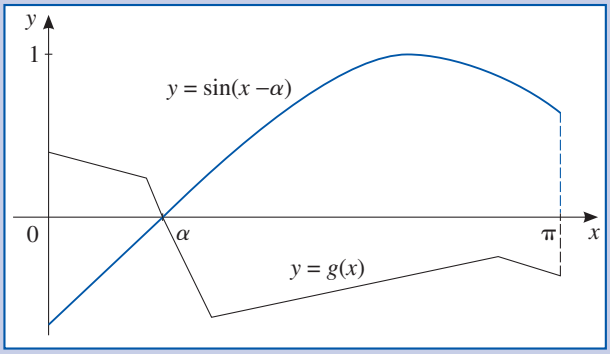
Or $(P - \alpha P')$ est scindé et n'a que des racines simples. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence (H_n) et conclure que (H_{n+1}) est vraie.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

17 **1)** La fonction g est continue.

• Si elle ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, alors elle est de signe constant sur cet intervalle ainsi que $(x \mapsto g(x)\sin(x))$. Il y a une contradiction et la fonction g a au moins un zéro dans $]0,\pi[$.

• Si g n'a qu'un seul zéro, noté α, dans $]0,\pi[$, la fonction $x \mapsto g(x)\sin(x-\alpha)$ est de signe constant sur $]0,\pi[$.



Donc $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}\,x \neq 0$. Or :

$$\int_0^\pi g(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \cos(\alpha)\int_0^\pi g(x)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x - \sin(\alpha)\int_0^\pi g(x)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Il y a une contradiction et g admet au moins deux zéros dans $]0,\pi[$.

2) Vous vérifierez que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, les fonctions $(x \mapsto \cos((2k+1)x))$ et $(x \mapsto \cos((2k+1)x))$ vérifient (**1**).

3) On pose $M(x) = \begin{pmatrix} \cos((2k+1)x) & -\sin((2k+1)x) \\ \sin((2k+1)x) & \cos((2k+1)x) \end{pmatrix}$.

La fonction M est continue et ne s'annule jamais sur $[0,\pi]$, cependant :

$$\int_0^\pi M(x)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\pi M(x)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

18 Le développement limité du cosinus hyperbolique à l'ordre 4 en 0 est :

$$\operatorname{ch} u =_0 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall u \in [-\delta,\delta] \quad 1 + \frac{u^2}{2} \leqslant \operatorname{ch} u \leqslant 1 + \frac{u^2}{2} + u^4.$$

On en déduit que, pour n assez grand :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k} \leqslant T_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

Or :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n};$$

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}\,t}{2t} \leqslant \frac{1}{2k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}\,t}{2t}.$$

Donc :

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}\,t}{2t} \leqslant T_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) \leqslant \int_n^{2n}\frac{\mathrm{d}\,t}{2t} + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{\ln(2)}{2}.$$

19 $$\int_0^\pi \cos^{2k} t\,\mathrm{d}\,t = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n\,4^k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,l\,\pi\,2(p-k)}{n}}\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,l\,\pi\,2(p-k)}{n}}$ est la somme des termes d'une suite géométrique. Cette somme vaut 0 si $p \neq k$ ou n si $p = k$, donc :

$$\frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{4^k}\binom{2k}{p}$$

et $$\int_0^\pi \cos^{2k} t\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{4^k}\binom{2k}{k}$$

20 **1)** Si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$. On suppose f non nulle et on note v le vecteur unitaire $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f}{\left\|\displaystyle\int_a^b f\right\|}$ et Δ la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}^+ v$. Pour montrer que, pour tout t de $[a,b]$, $f(t)$ est dans Δ, on introduit l'hyperplan orthogonal à v. On peut écrire :

$$\forall t \in [a,b] \ \exists\,\alpha(t) \in \mathbb{R} \ \exists\, u(t) \in v^\perp \quad f(t) = \alpha(t)v + u(t)$$

On sait que $\alpha(t) = \langle f(t) \mid v\rangle$, donc α est une fonction continue, et u aussi, par différence.

En revenant aux intégrales :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \left(\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}\,t\right)v + \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}\,t = \left(\int_a^b \|f\|\right)v;$$

on en déduit que :

$$\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \|f\|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

De plus, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|f(t)\|^2 = \alpha^2(t) + \|u(t)\|^2 \geqslant \alpha^2(t).$$

Donc $\|f\| - \alpha$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b \|f\| - \alpha = 0.$$

On peut alors conclure :

$$\forall t \in [a,b] \quad \|f(t)\| - \alpha(t) = 0, \quad u(t) = 0_E \quad \text{et} \quad f(t) \in \mathbb{R}^+$$

2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on note :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_\infty = \max\{|x_i|\}$$

et on pose $f(t) = t\,e_1 + \sum_{i=2}^n e_i$.

Vous vérifierez que :

$$\left\| \int_0^1 f \right\|_\infty = \int_0^1 \|f\|_\infty = 1.$$

Cependant, pour $t \neq t'$, $f(t)$ et $f(t')$ sont linéairement indépendants. Ainsi les valeurs prises par f ne sont pas toutes sur une même demi-droite vectorielle.

21 On pose $u_n = n \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. On remarque que :

$$n \int_0^1 t^n f(1)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} f(1).$$

Donc :

$$\left\| u_n - \frac{n}{n+1} f(1) \right\| = \left\| n \int_0^1 t^n (f(t) - f(1))\,\mathrm{d}t \right\|$$

$$\leqslant n \int_0^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t$$

De plus, si a est entre 0 et 1, on a :

$$n \int_0^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t$$

$$= n \int_0^a t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t + n \int_a^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in]0,1[$$

$$\left\| u_n - \frac{n}{n+1} f(1) \right\| \leqslant 2\|f\|_\infty a^{n+1} + n \int_a^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe a dans $]0,1[$ tel que :

$$\forall t \in [a,1] \quad \|f(t) - f(1)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette valeur de a étant fixée, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow 2\|f\|_\infty a^{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$n \geqslant N \Rightarrow \left\| u_n - \frac{n}{n+1} f(1) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = f(1)$.

22 **1)** On effectue la division euclidienne, dans $\mathbb{R}[X]$, de $(1-X)^{4n}$ par $(1+X^2)$:

$$(1-X)^{4n} = P_n(X)(1+X^2) + a_n X + b_n$$

avec a_n et b_n réels.
En utilisant $X = \mathrm{i}$, on trouve : $a_n = 0$; $\quad b_n = (-1)^n 4^n$.
De plus P_n est la partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{(1-X)^{4n}}{(1+X^2)}$. D'où l'unicité de P_n.

2) $$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t)^{4n}}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-1)^n 4^n}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{1}{2(4n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{4n}}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4n+1}.$$

Donc :

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n-1} 4^{n-1} \pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

23 On note $S = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$ et t_0 un élément de $[a,b]$ tel que $f(t_0) = S$.

• On remarque que :

$$u_p \leqslant (b-a)^{1/p} S.$$

Le cas $S = 0$ est trivial.
On suppose $S > 0$.

• On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $S - \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. On sait que :

$$\exists \alpha > 0 \ \ \forall t \in [a,b] \quad \left(|t - t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (1)$$

On en déduit, pour une valeur de α vérifiant (1), que :

$$\forall t \in [a,b] \quad \left(|t - t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow S - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(t)\right).$$

On pose $[c,d] = [a,b] \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Sachant que f est à valeurs positives, on a :

$$\int_a^b (f(t))^p\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d (f(t))^p\,\mathrm{d}t \geqslant (d-c)\left(S - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Donc, pour tout entier $p > 0$, on peut écrire :

$$(d-c)^{1/p}\left(S - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant u_p \leqslant (b-a)^{1/p} S$$

Or, $\lim\limits_{p \to +\infty} (d-c)^{1/p}\left(S - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(S - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et :

$$\lim_{p \to +\infty} (b-a)^{1/p} S = S$$

Donc, il existe un entier p_0 tel que :

$$p \geqslant p_0 \Rightarrow S - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant S + \varepsilon.$$

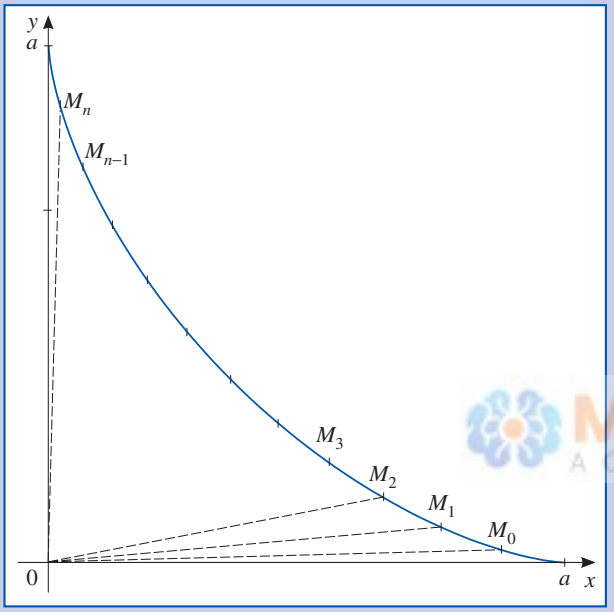
Ceci prouve que $\lim\limits_{p \to +\infty} u_p = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

24 On montrera que, pour tout $n \geqslant 2$, u_n et v_n sont dans $[0, 1]$ et en déduira que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1+v_n^2}{2}$, $v_n = \dfrac{u_n(2-u_n)}{2}$.
Chacune des deux suites est bornée et admet une unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers cette valeur :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2-\sqrt{2},\quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}-1.$$

25 **1)** L'arc est un arc d'astroïde.



2) La fonction $t \to (x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc l'arc est rectifiable.
Pour t dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = 3a\sin(t)\cos(t).$$

On peut donc prendre pour abscisse curviligne :

$$s(t) = \frac{3a}{2}\sin^2(t).$$

Notons t_i le paramètre du point M_i.
On suppose que $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \dfrac{\pi}{2}$.
La longueur totale de l'arc est $L = s\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - s(0) = \dfrac{3a}{2}$, donc :

$$\begin{array}{lll} \forall\, i \in [\![1,n]\!] & s(t_i) - s(t_{i-1}) = \dfrac{3a}{2n} & \\ \text{et} & \sin^2(t_i) - \sin^2(t_{i-1}) = \dfrac{1}{n} & \end{array} \quad (*)$$

On en déduit que le point M_i a pour paramètre $t_i = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{i}{n}}$ et pour coordonnées $\left(a\left(1-\dfrac{i}{n}\right)^{\frac{3}{2}}, a\left(\dfrac{i}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{OM_i}{n+1} = \frac{a}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1-3\frac{i}{n}+3\frac{i^2}{n^2}}$$
$$= \frac{a}{n+1} + \frac{an}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-3\frac{i}{n}+3\frac{i^2}{n^2}}\right).$$

Or, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-3\frac{i}{n}+3\frac{i^2}{n^2}}$ est une somme de Riemann de la fonction continue sur $[0,1]$ $x \mapsto \sqrt{1-3x+3x^2}$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{OM_i}{n+1} = a\int_0^1\sqrt{1-3x+3x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= a\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{12}\ln(2+\sqrt{3})\right].$$

26 $(f(t))^2 = \left(\displaystyle\int_0^t 1\, f'(u)\,\mathrm{d}u\right)^2$

$$\leqslant \left(\int_0^t 1\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^t (f'(u))^2\,\mathrm{d}u\right)$$
$$\leqslant t\int_0^1 (f'(u))^2\,\mathrm{d}u$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$$

27 **1)** On pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$.

La fonction produit $f\,g$ est continue, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f\,g$.
On note c un réel tel que g soit c-lipschitzienne. On a :

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\|_\infty\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\|_\infty\frac{c}{n} = \frac{\|f\|_\infty c}{n}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f\,g$$

2) La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est uniformément continue.
On note $\varepsilon_n = \displaystyle\sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2 \\ |x-y|\leqslant\frac{1}{n}}} |g(x)-g(y)|$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La continuité uniforme de g permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_\infty \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_\infty \varepsilon_n = \|f\|_\infty \varepsilon_n$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f\,g$$

28 $\varphi : t \to \dfrac{1}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n}\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{z - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}.$$

On considère alors la fraction rationnelle $F(X) = \displaystyle\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{X - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}$.

Par construction, cette fraction rationnelle est de degré < 0 et admet les n racines n-ièmes de l'unité comme pôles simples. Donc il existe un polynôme P de degré $\leqslant n-1$ tel que :

$$F(X) = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{X - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}} = \frac{P(X)}{X^n - 1}.$$

Les pôles de cette fraction rationnelles sont les $\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ et la partie polaire relative à ce pôle simple a pour numérateur $\dfrac{P(\omega_k)}{n\omega_k^{n-1}} = 1$.

D'où : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}\ P(\omega_k) = n\omega_k^{n-1}$.

Le polynôme $P(X) - nX^{n-1}$ admet n racines, il est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc $P(X) = nX^{n-1}$.

$\dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{z - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}} = \frac{2\pi}{n}\frac{P(z)}{z^n - 1} = 2\pi\frac{z^{n-1}}{z^n - 1}$. Et enfin :

- si $|z| < 1$, $I(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{z^{n-1}}{z^n - 1} = 0$
- si $|z| > 1$, $I(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{z^{n-1}}{z^n - 1} = \frac{2\pi}{z}$.

Chapitre 7

1 Pour $x = 0$, $F(0) = 0$.

Soit $x \neq 0$ et t entre 0 et x, on a $xt \geqslant 0$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$. En posant $xt = u$ dans l'intégrale, on trouve :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x^2} \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\ln(1+x^2) + x\ln(1+x^2) - x$$

Il découle de cette expression que F est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$F'(x) = \frac{-1}{x^2}\ln(1+x^2) + \ln(1+x^2) + 1$$

Donc $\lim_{x\to 0} F'(x) = 0$, et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2 Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

On pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $L = F(b)$.

La fonction F est continue et : $0 = F(a) < \dfrac{1}{n}L < L = F(b)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire qu'il existe $x_{n,1}$ dans $]a, b[$ tel que $F(x_{n,1}) = \dfrac{1}{n}L$.

En répétant ce procédé, on construira, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, les points $x_{n,i}$ tels que :

- $a < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n-1} < b$.
- $F(x_{n,i}) = \dfrac{i}{n}L$.

On en déduit le résultat demandé en remarquant que :

$$\int_{x_{n,i-1}}^{x_{n,i}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_{n,i}) - F(x_{n,i-1})$$

3 **1)** f est continue sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{5}[\sin(2x) - 2\cos(2x) - \cos(3x) - 3\sin(3x)]\,\mathrm{e}^x + k$$

(k est une constante réelle).

2) La fonction g est continue sur $[-1, 1]$, la fonction Arccosinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

On peut donc intégrer deux fois par parties sur tout segment inclus dans $]-1, 1[$:

Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ est $\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Les primitives de g sur $]-1, 1[$ sont les fonctions G de la forme :

$$G(x) = \frac{x^2-1}{2}\mathrm{Arccos}^2(x) - \frac{\mathrm{Arcsin}(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{Arccos}\,(x) - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{Arcsin}^2(x) + c$$

(c est une constante).

En utilisant la relation $\mathrm{Arccos}\,(x) + \mathrm{Arcsin}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$, vous pourrez simplifier l'expression et obtenir :

$$G(x) = \frac{2x^2-1}{4}\mathrm{Arccos}^2(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{Arccos}\,(x) - \frac{x^2}{4} + d$$

(d est une constante).

4 $$I = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\ln(3)}{2\sqrt{2}}.$$

N.B. Maple ou la TI donnent directement le résultat. Il est cependant nécessaire de savoir calculer « à la main » ce genre d'intégrale.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 Pour t dans $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, on pose $u=(2t+1)^{1/6}$.

Finalement :

$$\int \frac{\mathrm{d}\,t}{(2t+1)^{2/3}-(2t+1)^{1/2}} = \frac{3}{2}\left((2t+1)^{1/6}+1\right)^2+3\ln\left|(2t+1)^{1/6}-1\right|+k$$

(k est une constante).

6 On pose :

$$G(x)=\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et F l'est sur $]0,1]$.
La fonction f est dérivable en 0.
Donc :

$$f(x) =_0 f(0)+f'(0)x+o(x) \qquad \textbf{(1)}$$

De plus :

$$G'(x)=x\,f(x) =_0 f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2) \quad \text{et} \quad G(0)=0$$

D'où :

$$G(x) =_0 \frac{f(0)}{2}x^2+\frac{f'(0)}{3}x^3+o(x^3) \qquad \textbf{(2)}$$

Or $F(x)=\frac{1}{x^2}G(x)$, donc :

$$F(x) =_0 \frac{f(0)}{2}+\frac{f'(0)}{3}x+o(x) \qquad \textbf{(3)}$$

On prolonge F par continuité en posant $F(0)=\frac{f(0)}{2}$. La formule **(3)** prouve que F est dérivable en 0 et que $F'(0)=\frac{f'(0)}{3}$.
Or F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et, de plus, pour $x\neq 0$:

$$F'(x)=\frac{-2}{x^3}G(x)+\frac{1}{x^2}G'(x).$$

On en déduit que :

$$F'(x) =_0 \frac{f'(0)}{3}+o(1).$$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

7 D'après le théorème des accroissements finis, pour tout n, il existe c_n dans $]n,n+1[$ tel que :

$$\ln\frac{f(n+1)}{f(n)}=\ln(f(n+1))-\ln(f(n))=\frac{f'}{f}(c_n).$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{f(n+1)}{f(n)}=a$ et $a\in[0,1[$. La règle de d'Alembert permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge.

8 **1)** La suite (f_n) converge simplement vers 0. Le tableau de variations de f_n montre que la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
Toutefois :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-nx^2}}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

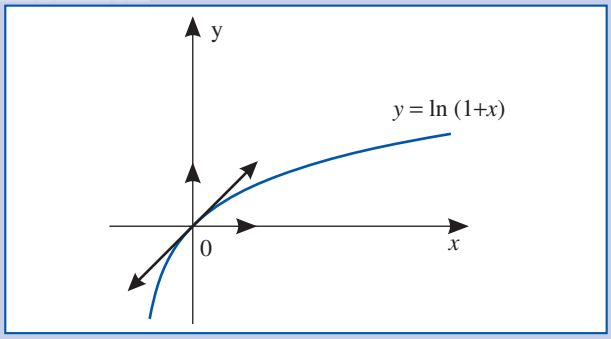
2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$. La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
Toutefois, en calculant :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=\frac{\pi}{2}.$$

3) $f(x)=\mathrm{e}^x$.
Pour tout $u\geqslant -1$, $\ln(1+u)\leqslant u$. Donc, pour tout x de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}0\leqslant \mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \mathrm{e}^x\left[1-\exp\left(-x+n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right]\\ &\leqslant \mathrm{e}^x\left[x-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]\\ &\leqslant \mathrm{e}^x n\left[\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]\\ &\leqslant \mathrm{e}^x n\frac{x^2}{2n^2}\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{(1+t)^2}\right|\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.



La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers f est uniforme sur $[0,1]$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}\,x=\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x=e-1$$

9 La série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et diverge grossièrement sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Si x est un réel positif fixé, la série numérique est une série alternée qui vérifie le critère spécial.
La série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction somme S est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
La série de fonctions $\sum -(-\mathrm{e}^{-x})^n$ converge uniformément

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$:

$$\int_a^x -\sum_1^\infty (-\mathrm{e}^{-t})^n \,\mathrm{d}t = \sum_1^\infty \left[\frac{(-\mathrm{e}^{-t})^n}{n}\right]_a^x$$
$$= \sum_1^\infty \frac{(-\mathrm{e}^{-x})^n}{n} - \sum_1^\infty \frac{(-\mathrm{e}^{-a})^n}{n}$$
$$= \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$. On fait tendre a vers 0.

$$\sum_1^\infty \frac{(-\mathrm{e}^{-x})^n}{n} = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$$
$$= -\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + \ln 2 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}.$$

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de cette série de fonctions permet d'appliquer le théorème d'interversion des limites en $+\infty$. On en déduit :

$$\ln 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \text{puis} : \sum_1^\infty \frac{(-\mathrm{e}^{-x})^n}{n} = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x}).$$

10 La somme $S(x) = \sum_0^\infty u_n(x)$ est définie pour tout x de $]-1,1[$. De plus :

$$S(x) = \sum_0^\infty u_n(x) = x\sum_1^\infty n x^{n-1}.$$

Or la série de fonctions $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et la série de fonctions $\sum n x^{n-1}$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$. Donc :

$$S(x) = x\left(\sum_0^\infty x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

11 f est continue, donc elle admet des primitives.

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0.

Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

La relation donnée s'écrit $F'(x) \leqslant kF(x)$.

On pose $G(x) = \mathrm{e}^{-kx}F(x)$. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(F'(x) - kF(x)) \leqslant 0$$

G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. $G(0) = 0$. Donc $G \leqslant 0$.

On en déduit que F est négative. Or F est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $F(0) = 0$. Donc $F = 0$ et $F' = f = 0$.

12 **1)** D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$g(a) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^a (a-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$g(b) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$$

On effectue la somme de ces deux lignes :

$$g(a) + g(b) = 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^a (a-t)g''(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\left|g(b) + g(a) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant M\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{M(b-a)^2}{4}$$

2) On a $u_n + v_n = f(1) - f(0)$ et :

$$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right]$$

En posant $K = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$, la question **1** permet d'écrire :

$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \leqslant \frac{K}{4n^2}$$

Donc :

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{4n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

Il est alors aisé d'en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

3) On note :

$$a_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)} = \prod_{i=n}^{2n-1}\frac{2i+1}{2i}.$$

En posant $i = n + k$, on trouve :

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+\dfrac{2k+1}{2n}}{1+\dfrac{k}{n}}$$

et

$$\ln(a_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{2k+1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)} = \sqrt{2}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

13 La relation **(1)** peut s'écrire :

$$f(x) + x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Et enfin $f'' + f = 0$. Donc f est de la forme

$$f(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

De **(1)** et **(2)**, on déduit que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc il y a une seule solution possible :

$$f(x) = \cos(x)$$

Une simple intégration par parties permet de vérifier que la fonction cosinus vérifie **(1)**.

14 On note L_a, L_b et L_c les polynômes d'interpolation de Lagrange en a, b et c :

$$L_a(t) = \frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)}, \qquad L_b(t) = \frac{(t-c)(t-a)}{(b-c)(b-a)},$$
$$L_c(t) = \frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1) On note $\widetilde{f_x}$ la restriction de f_x à $\mathbb{R}_2[X]$ et $\widetilde{\Phi}$ celle de Φ.

$$\forall (x,y) \in \{a,b,c\} \quad \widetilde{f_x}(L_y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y \\ 1 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

On en déduit que (L_a, L_b, L_c) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et que $(\widetilde{f_a}, \widetilde{f_b}, \widetilde{f_c})$ en est la base duale.
Par conséquent $\widetilde{\Phi} = \Phi(L_a)\widetilde{f_a} + \Phi(L_b)\widetilde{f_b} + \Phi(L_c)\widetilde{f_c}$.
• Si (Φ, f_a, f_b, f_c) est liée, nécessairement :

$$\Phi = \Phi(L_a)f_a + \Phi(L_b)f_b + \Phi(L_c)f_c.$$

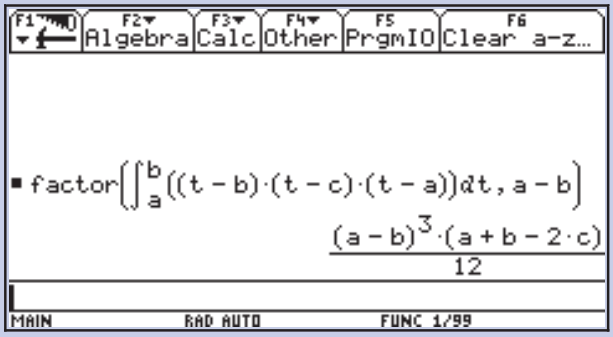
Étudions l'action de Φ sur une base $(L_a, L_b, L_c, (X-a)L_a)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
On vérifie que $\Phi((X-a)L_a) = 0$.
D'où : $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0$.

• Réciproquement, on suppose que :

$$\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $g = \Phi(L_a)\,f_a + \Phi(L_b)\,f_b + \Phi(L_c)\,f_c$.
Les deux formes linéaires g et Φ coïncident sur une base de E, elles sont donc égales.
Ceci prouve que : $\Phi \in \mathrm{Vect}(f_a, f_b, f_c)$.
La famille (f_a, f_b, f_c, Φ) est liée.

$\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t$ est une expression polynomiale en a, b et c qui est nulle si $a = b$.
La TI permet de factoriser cette expression.



Donc $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0$ si et seulement si :

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

3) Dans cette question, $c = \dfrac{a+b}{2}$. D'après 1) :

$$\Phi = \Phi(L_a)\,f_a + \Phi(L_b)\,f_b + \Phi(L_c)\,f_c.$$

On effectue les calculs suivants en demandant à la machine la factorisation de $(a-b)$ comme précédemment.
On remplace c par $\dfrac{a+b}{2}$ et on trouve :

$$\Phi = \frac{b-a}{6}\left[\,f_a + 4\,f_c + \,f_b\right].$$

Cela signifie que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant 3$, on a :

$$\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right].$$

C'est la **formule de Simpson**.

15 **1)** Immédiat.

2) • Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. En dérivant $\Phi(f)$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\,f(x) = 0.$$

Donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Sa continuité entraîne $f(0) = 0$.
$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ et Φ est injective.
• Tous les éléments de $\mathrm{Im}(\Phi)$ s'annulent en 0 et Φ n'est pas surjective.

3) Φ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de Φ.
Soit λ un réel non nul et f un élément de E tel que $\Phi(f) = \lambda f$.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{\lambda}x\,f(x)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sont les fonctions f de la forme $f(x) = ce^{\frac{x^2}{2\lambda}}$ où c est une constante.
Par ailleurs $\Phi(f) = \lambda f(0) = 0$. On en déduit $c = 0$. L'endomorphisme Φ n'a pas de valeur propre.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

16 **1)** Étudiez $h(x) = x^n e^{-x}$.

2) $h(1) = e^{-1} < 1$ et $h(n) > 1$, donc $u_n > 1$.
Fixons $\varepsilon > 0$

$$h(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n e^{-1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon)^n e^{-1-\varepsilon} = +\infty$$

Donc, pour n suffisamment grand, u_n est entre 1 et $1+\varepsilon$.
Ceci prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) On peut écrire :

$$u_n = 1 + h_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} h_n = 0.$$

Donc :

$$1 + h_n = n \ln(1+h_n) \sim n h_n.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} n h_n = 1 \quad \text{et} \quad u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

• Poursuivons le développement en écrivant :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + k_n \text{ avec } k_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

17 **1)** • La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $x > 0$, le segment d'extrémités x et x^2 est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc $f(x)$ est bien défini.
• Si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$ et $f(x) \geqslant 0$. Si $x \leqslant 1$, alors $x \geqslant x^2$ et $f(x) \leqslant 0$.

2) On note G une primitive, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction :

$$t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{t}.$$

On a $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^1$.

3) $f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x\dfrac{e^{-x^4}}{x^2} - \dfrac{e^{-x^2}}{x}$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x}\left(\exp\left[-x^4 + x^2 + \ln(2)\right] - 1\right).$$

On pose $h(x) = -x^4 + x^2 + \ln(2)$. On remarque que $h(1) > 0$ et $h(2) < 0$, donc f' s'annule au moins une fois entre 1 et 2. Vous étudierez h sur $\mathbb{R}^+$ pour en déduire que f' n'a pas d'autre zéro.
La calculette permet de constater que $h(1,21) > 0$ et $h(1,22) < 0$, donc $\alpha \in]1,21; 1,22[$.

4) Si $x > 1$, alors :

$$\forall t \in [x, x^2] \quad e^{-x^2} \geqslant e^{-t^2} \geqslant e^{-x^4}$$

et :

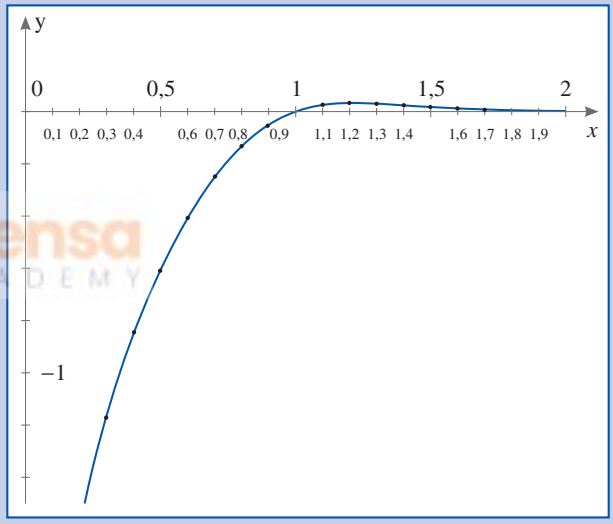
$$e^{-x^2}\ln(x) \geqslant f(x) \geqslant e^{-x^4}\ln(x).$$

On en déduit que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(x) =_{+\infty} o\left(e^{-x}\right)$.
Pour x dans $]0,1[$, on obtient de même :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \sim_{0^+} \ln(x)$$

5) Le tableau des variations de f et le graphe de f se trouvent sur les schémas suivants.

x	0		1		$\alpha \approx 1,21$	
$f'(x)$	‖	+		+	0	−
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗ $f(\alpha) \approx 0,033$		↘ 0



x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	−1,59	−1,164	−0,85	−0,606	−0,409	−0,252	−0,133	−0,051	0	0,025	0,033	0,03	0,024	0,017	0,011	0,007

La calculette vous permettra de constater que $f(1,21)$ et $f(1,22)$ sont très proches de 0,033 et que $f(2) \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

18 • Le domaine de définition de F est :

$$D =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

• Pour $x > 1$, on a $x \leqslant x^2$ et $F(x) \geqslant 0$. Pour x dans $]0,1[$, on a $x^2 \leqslant x$ et l'on obtient aussi $F(x) \geqslant 0$.

• On note G une primitive de la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}\right)$ sur un de ses intervalles de définition.
On a $F(x) = G(x^2) - G(x)$, donc E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. De plus :

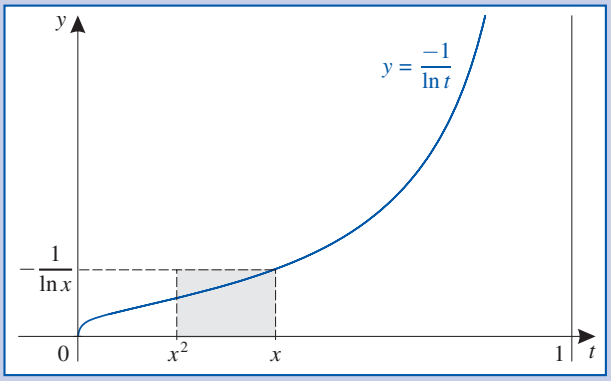
$$F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

On constate que F' est positive sur D, donc F est croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Étude en 0.
Sur]0, 1[, on a :

$$0 \leqslant F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{-1}{\ln x}(x - x^2).$$



donc :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0.$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. On remarque que $\lim_{x\to 0} F'(x) = 0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et le graphe de F admet une tangente horizontale en $x = 0$.

• Étude en 1.

$$\frac{1}{\ln(t)} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + \delta(t)$$

avec $\lim_{t\to 1} \delta(t) = 0$. On pose :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \delta(t) & \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad t \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit H une primitive de h. On peut écrire, pour tout x de D :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\,t}{t-1} + \int_x^{x^2} h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \ln(x+1) + H(x^2) - H(x)$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \ln(2).$$

On prolonge F par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln(2)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad F(x) = \ln(x+1) + H(x^2) - H(x).$$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$F'(x) = \frac{1}{x+1} + 2x\,h(x^2) - h(x)$$

En particulier $F'(1) = \dfrac{1}{2} + h(1) = 1$.

• Étude en $+\infty$.
La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

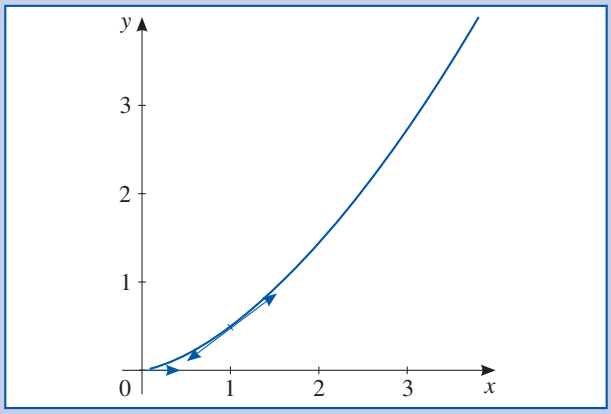
Une étude graphique similaire à celle de l'étude en 0 vous permettra de prouver que :

$$\forall x > 1 \quad F(x) \geqslant \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

• Convexité.

Vous ferez l'étude du signe de F'' et trouverez que F est convexe.

Le graphe de F est tracé sur le schéma suivant :



19 **1)** *Première solution*

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $T^n(f)$ donne la formule demandée.

Deuxième solution

On procède par récurrence et on intègre par parties.

Troisième solution (dans le cas où f est continue)

Le calcul d'intégrales doubles a été abordé en première année. Celui-ci sera revu. On l'utilise pour donner une autre démonstration, également par récurrence. L'hypothèse de récurrence (H_n) est : pour toute f de E, pour tout x réel

$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

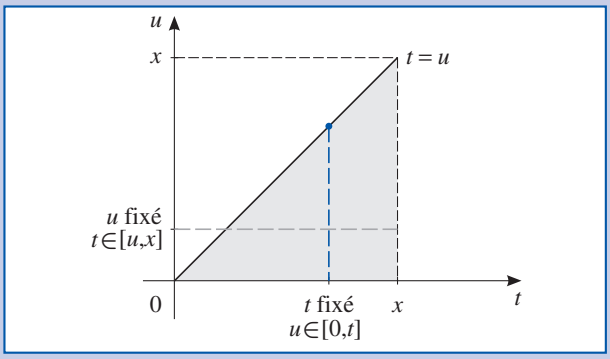
(H_1) est vraie. On suppose (H_n) vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Pour toute application f de E, on a :

$$T^{n+1}(f) = \int_0^x T^n(f)(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,\mathrm{d}\,u \right) \mathrm{d}\,t.$$

L'intégrale double est calculée avec t variant dans $[0, x]$, et à t fixé, u variant dans $[0, t]$.

Le schéma nous indique que u varie dans $[0, x]$, et à u fixé, t varie dans $[u, x]$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit



Donc :

$$T^{n+1}(f) = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x f(u) \left(\int_u^x \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^n}{n!}\,\mathrm{d}u.$$

Ceci prouve que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ et la récurrence est achevée.

2) Pour tout entier $n > 0$ et tout f de E, $T^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $T^n(f)^{(n)} = f$.

• On en déduit que $T^n(f) = 0_E \Rightarrow f = 0_E$.

• Ainsi, T^n est injective et induit un isomorphisme de E dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

• Soit

$$V = \left\{ g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C});\ g(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0 \right\}.$$

Par construction, $\mathrm{Im}(T^n) \subset V$.

Soit g un élément de V. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, $g^{(k)}$ est la primitive de $g^{(k+1)}$ qui s'annule en 0.

Donc :

$$T^n(g^{(n)}) = g.$$

On en déduit : $\mathrm{Im}(T^n) = V$.

3) D'après **2)**, 0 n'est jamais valeur propre de T^n.

Soit λ un scalaire non nul et f un élément de E tel que $T^n(f) = \lambda f$.

On a $f = T^n\left(\frac{1}{\lambda} f\right)$, donc f est dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f^{(n)} = \dfrac{1}{\lambda} f \\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Le cours de première année sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 permet de conclure, dans les cas où n vaut 1 ou 2, que $f = 0_E$. Donc $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(T^2) = \varnothing$.

Le cours sur les systèmes différentiels, développé en algèbre, permet de conclure que, pour tout n, $\mathrm{Sp}(T^n) = \varnothing$.

4) On note $\|f\|_{\infty,x} = \sup\{|f(t)|;\ t \in [\min(0,x), \max(0,x)]\}$.

$$|T^n(f)(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \|f\|_{\infty,x}$$

donc la série à termes complexes $\sum T^n(f)(x)$ est absolument convergente pour tout x de $\mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum T^n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On fixe x dans $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$$

$$\left| \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \right| \leqslant \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \|f\|_{\infty,x}$$

Si $u_n(t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$, la majoration précédente prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[\min(0,x), \max(0,x)]$, donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n(f)(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

20 **1)** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$f(0) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2) $f(x) - \ln 2 = \sum_1^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)}$.

Ainsi posée, la question incite à montrer la convergence uniforme de la série de fonctions obtenue sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ $(A > 0)$ pour utiliser le théorème d'interversion des limites en $+\infty$. La série de fonctions ne converge pas normalement sur un tel intervalle. Toutefois, il s'agit d'une série alternée et elle vérifie, lorsque x est fixé, le critère spécial des séries alternées. Ceci vous permettra de prouver qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln 2) = \sum_1^{\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Puis : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) On pose $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)}$. La convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+\mathrm{i}x} + \frac{1}{n-\mathrm{i}x} \right)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$v_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}k!\left(\frac{(-\mathrm{i})^k}{(n+\mathrm{i}x)^{k+1}} + \frac{\mathrm{i}^k}{(n-\mathrm{i}x)^{k+1}}\right)$$

D'où :

$$|v_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{2}k!\left(\frac{1}{|n+\mathrm{i}x|^{k+1}} + \frac{1}{|n-\mathrm{i}x|^{k+1}}\right)$$
$$\leqslant \frac{k!}{(\sqrt{n^2+x^2})^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

La série de fonctions $\sum v_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

21 Soit t dans $[0, T]$. On pose, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$v_k(u) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\mathrm{e}^{kx(t-u)}g(u)$$

et on considère la série de fonctions, définies sur $[0, T]$, $\sum v_k(u)$.
Si g est non nulle, on pose $M = \sup_{u\in[0,T]} |g(u)|$. Alors, pour tout u de $[0, T]$ et tout $x > 0$:

$$|v_k(u)| \leqslant \frac{M}{k!}\mathrm{e}^{kxt}.$$

Donc la série de fonctions $\sum v_k$ est normalement convergente par rapport à u sur $[0, T]$ et :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)}g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\mathrm{e}^{kx(t-u)}g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^T \left[\exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)}) - 1\right]g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^T \left[1 - \exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)})\right]g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$- \int_0^t \exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)})g(u)\,\mathrm{d}u.$$

On montre ensuite que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_t^T \left[1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right]g(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\left|1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right| \leqslant \mathrm{e}^{x(t-u)}$$

D'où :

$$\left|\int_t^T \left[1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right]g(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_t^T \mathrm{e}^{x(t-u)}M\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{M}{x}.$$

Enfin, on montre que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)g(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\left|\int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)g(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M\left|\int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\mathrm{d}u\right|.$$

Soit $\alpha \leqslant \inf\left(\frac{\varepsilon}{M}, t\right)$. Alors :

$$\left|\int_{t-\alpha}^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)g(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, si $\alpha < t$, on a :

$$\left|\int_0^{t-\alpha} \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)g(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M(t-\alpha)\exp\left(-\mathrm{e}^{\alpha x}\right)$$
$$\leqslant M\,T\,\exp(-\mathrm{e}^{\alpha x}).$$

D'où le résultat.

22 **1)** $E = [-1, 1]$. La série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$, donc la fonction f est continue sur $[-1, 1]$. Elle diverge grossièrement si $|x| > 1$.

2) La série de fonctions $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$. La fonction f est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$f'(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Soit x non nul dans $]-1, 1[$. On écrit :

$$f'(x) = \frac{1}{x}\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}.$$

La convergence normale sur tout segment de $]-1, 1[$ de la série de fonctions $\sum x^{n-1}$ autorise à écrire :

$$x\,f'(x) = \int_0^x \left(\sum_1^\infty t^{n-1}\right)\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Puis :

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0,\ f'(0) = 1.$$

x	-1		0		1
$f'(x)$	‖	$+$	1	$+$	‖
$f(x)$	$-\frac{\pi^2}{12}$	↗		↗	$\frac{\pi^2}{6}$

3) $f(-1) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^2} = -\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

4) $\lim_{x\to-1} f'(x) = \ln 2$ et $\lim_{x\to+1} f'(x) = +\infty$. Le graphe de f admet une tangente de coefficient directeur $\ln 2$ au point d'abscisse -1 et la continuité de f sur $[-1, 1]$ nous permet de dire qu'il existe une tangente verticale au point d'abscisse 1.

5) $D = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x-1)^2}f'\left(-\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\ln(1-x)}{(1-x)}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'où : $\varphi(x) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2 + \varphi(0) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$.

Puis : $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

Soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}$.

Chapitre 8

1 La fonction $t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue, bornée et positive sur l'intervalle borné $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle.

2 f est positive et continue sur $]0,1]$. On cherche une primitive sur $]0,1]$ de f.
La fonction $u \mapsto x = \mathrm{e}^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\infty, 0]$ sur $]0,1]$. Pour tout x de $]0,1]$, on pose $x = \mathrm{e}^{-u}, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. Et :

$$\begin{aligned}\int |\ln x|^n \,\mathrm{d}x &= -\int u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= u^n \mathrm{e}^{-u} + nu^{n-1}\mathrm{e}^{-u} \ldots + n!\mathrm{e}^{-u} + C \\ &= x((-\ln x)^n + n(-\ln x)^{n-1} + \ldots + n!) + C\end{aligned}$$

Cette dernière expression est bornée sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$ et $\int_0^1 |\ln x|^n \,\mathrm{d}x = n!$.

3 la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}$ est continue et positive sur $]0,1[$.
On cherche une primitive F sur $]0,1[$ de f.

$$F(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t\sqrt[3]{\left(\frac{1}{t}-1\right)}}.$$

La fonction $t \mapsto v = \sqrt[3]{\frac{1}{t}-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$.
Soit $v = \sqrt[3]{\frac{1}{t}-1}$; on a $t = \frac{1}{v^3+1}, \mathrm{d}t = -\frac{3v^2}{(v^3+1)^2}\,\mathrm{d}v$ et :

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{1}{2^{1/3}}\int\left(\frac{1}{v+2^{1/3}} - \frac{1}{2}\frac{2v-2^{1/3}}{v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}}\right)\mathrm{d}v \\ &\quad - \frac{3}{2}\int\frac{1}{v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}2^{2/3}\ln\left(v+2^{1/3}\right) - \frac{1}{4}2^{2/3}\ln\left(v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}3^{1/2}2^{2/3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2^{2/3}v-1)\right) + \text{cte}.\end{aligned}$$

On pose :

$$H(v) = \frac{1}{2}2^{2/3}\ln\left(v+2^{1/3}\right) - \frac{1}{4}2^{2/3}\ln\left(v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}\right) - \frac{1}{2}3^{1/2}2^{2/3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2^{2/3}v-1)\right).$$

La fonction $F : t \mapsto H\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t}-1}\right)$ est une primitive de f sur $]0,1[$.
La fonction H est bornée sur $]0,+\infty[$, donc f est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}} = \lim_{v\to 0} H(v) - \lim_{v\to+\infty} H(v) = 2^{2/3}\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4 La fonction f est continue, positive et paire. Il suffit de prouver l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$. On montre la convergence de la série $\sum I_k$ avec $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2|\sin x|^{3/2}}$.

$$\begin{aligned}I_k &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+k\pi)^2(\sin t)^{3/2}} \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^2(\sin t)^{3/2}} \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^2\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{3/2}} \qquad \left(\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}\right) \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+k^2t^{3/2}}.\end{aligned}$$

Soit $u = k^2t^{3/2}$. On trouve :

$$I_k \leqslant \frac{4}{3k^{4/3}}\int_0^{b_k} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}(1+u)}$$

où $\lim_{k\to+\infty} b_k = +\infty$.
La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^{1/3}(1+u)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$0 \leqslant I_k \leqslant \frac{4}{3k^{4/3}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}(1+u)}.$$

Par conséquent, $I_k = O\left(\frac{1}{k^{4/3}}\right)$. La série $\sum I_k$ converge et la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 **1)** La fonction $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$ prolongée par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\cot x\,\mathrm{d}x.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit a et b tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$. Alors :

$$\int_a^b x \operatorname{cotan} x \, \mathrm{d}x = [x \ln(\sin(x))]_a^b + \int_a^b -\ln(\sin(x)) \, \mathrm{d}x$$

On fait tendre a vers 0 et b vers $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} -\ln(\sin(x)) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

2) La fonction $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, elle se prolonge par continuité en 0 et $\dfrac{\text{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $A > 0$ et $u = \text{Arctan}\,(x)$. On obtient :

$$\int_0^A \frac{\text{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\text{Arctan}\,(A)} \frac{u}{\tan u} \, \mathrm{d}u$$

puis :

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

6 La fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue et positive sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1. Or :

$$-\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \sim_0 -\ln(t)$$

et la fonction $-\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$.
On en déduit l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction :

$$t \mapsto -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Soit a dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. On calcule $\displaystyle\int_a^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{d}t$ en intégrant par parties. Puis on fait tendre a vers 0.

$$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{d}t = 4(1 - \ln(2)).$$

7 **1)** La fonction f est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Elle se prolonge par continuité en 0.
De plus $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{4x \ln x}$. Or une primitive sur $[2, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{4x \ln x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{4} \ln(\ln x)$. Cette primitive n'est pas bornée sur $[2, +\infty[$, donc f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
2) • Si $t > 1$ ou $t < 0$, la fonction f est continue et de signe constant sur $]0, 1]$.
$f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{t\sqrt{x}}$ et cette fonction est intégrable sur $]0, 1]$. f l'est donc.

• Si $t = 1$, la fonction f est continue et négative sur $]0, 1[$. $f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) \sim_1 -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
Ces deux fonctions sont intégrables sur $]0, 1[$. f l'est aussi.

• Si $t = 0$, la fonction f est continue, positive sur $]0, 1]$. $f(x) \sim_0 \dfrac{1}{x^{3/2}}$.
f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

• Si $t \in]0, 1[$, la fonction f n'est pas continue par morceaux sur $]0, 1[$.

8 Les fonctions f_n sont continues et positives sur $]0, 1]$. Si $n \geqslant 1$, f_n se prolonge par continuité en 0 avec $f_n(0) = 0$, donc f_n est intégrable sur $]0, 1]$. Et $f_0(t) =_0 o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc f_0 est aussi intégrable sur $]0, 1]$.
On fixe a dans $]0, 1[$.

$$\int_a^1 (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = \Big[t\,(\ln t)^2\Big]_a^1 - \int_a^1 2 \ln t \, \mathrm{d}t.$$

D'où $u_0 = 2$.
Pour $n > 0$, en procédant de même : $u_n = \dfrac{2}{(n+1)^3}$.

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k t^k (\ln t)^2\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 (-1)^{n+1} t^{n+1} \frac{(\ln t)^2}{t+1} \, \mathrm{d}t.$$

Terminer en justifiant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} t^{n+1} \frac{(\ln t)^2}{t+1} \, \mathrm{d}t = 0$ et en déduire :

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1} \, \mathrm{d}t = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^3}.$$

9 f est continue et positive sur $]a, b[$.
Au voisinage de a, $f(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)}}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)}}$ est intégrable sur $\left]a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, donc f l'est aussi.
On montre de même que f est intégrable sur $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right[$.
f est donc intégrable sur $]a, b[$.
L'application : $t \mapsto x = \dfrac{a+b}{2} + t\dfrac{b-a}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]-1, 1[$ sur $]a, b[$.

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

10 La fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$ est continue et positive sur $]0,1[$. De plus :

$$-\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}} =_0 o\left(t^{-3/4}\right)$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et la fonction $t \mapsto t^{-3/4}$ l'est sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.

La fonction $t \mapsto u = \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{(u-1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

Puis en intégrant par parties :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u-1}}.$$

La fonction $u \mapsto x = \sqrt{u-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

11 Pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_B^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\int_B^x |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_B^x \mathrm{d}t}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{x-B}{x}}\sqrt{\int_B^x |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sqrt{\int_B^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $B > 0$ tel que $\sqrt{\displaystyle\int_B^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} < \varepsilon$.

Ensuite, il existe $A > B$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, on ait $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geqslant A$, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

12 La suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Pour tout x de $[0,1]$, on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{e}$.

Le théorème de convergence dominée s'applique.

13 Pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_1^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$.

Posez, pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Alors :

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Appliquez le théorème de convergence dominée.

14 $\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{x}) = \displaystyle\sum_0^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Posez, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$: $f_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{(2n)!}$.

15 F est définie sur $]1,+\infty[$. La fonction $(t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha})$ est continue par rapport à t et la fonction $(\alpha \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha})$ par rapport à α. Soit a et b tels que $1 < a < b$. Pour tout α dans $[a,b]$, on a :

$$\left(t \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^a}\right)$$

et :

$$\left(t < 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^b}\right)$$

La fonction $t \mapsto \sup\left(\dfrac{1}{1+t^a}, \dfrac{1}{1+t^b}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de continuité s'applique.

16 **1)** f vérifie les hypothèses du théorème et admet une dérivée partielle par rapport à α, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$, continue sur $]1,+\infty[\times\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$, et pour tout (α,t) de $[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,t)\right| \leqslant \sup\left(\frac{|\ln t|}{1+t^a}, \frac{|\ln t|}{1+t^b}\right).$$

2) On remarque que :

$$-\int_0^{\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^{\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,\mathrm{d}t$$

Utilisez le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ pour la première intégrale.

$$F'(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Posez, pour tout $n \geqslant 2$ et tout t de $\mathbb{R}^+$, $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$. Puis montrez que le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = 1$.
La fonction F est décroissante. Donc $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.

4) L'application F est décroissante. F admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque α tend vers 1.
Montrons par l'absurde que $l = +\infty$.
Supposons que l appartienne à $\mathbb{R}$.

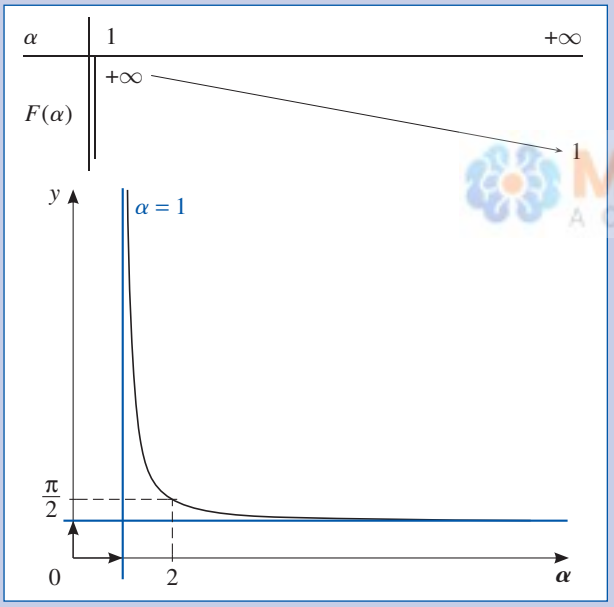
$$\forall A > 0 \quad F(\alpha) \geqslant \int_1^A \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^\alpha}.$$

Les deux termes admettent une limite lorsque α tend vers 1.

$$\forall A > 0 \quad l \geqslant \int_1^A \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t}.$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
D'où la contradiction cherchée.

5) $F(2) = \dfrac{\pi}{2}$.



17 **1)** $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$.

2) Montrez en utilisant le corollaire 20.1 que, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\,\alpha^p}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p(\mathrm{e}^{-\alpha x^2})}{\partial \alpha^p} = \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\,\alpha^p}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

D'où :

$$\int_0^\infty x^{2p}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}1.3\ldots(2p-1)}{2^{p+1}}\frac{1}{\alpha^{p+1/2}}$$

3) $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\alpha}$.

4) On procède de même que dans la *question* **2** :

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\,\alpha^p}\left(\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x\right) = \frac{1}{2}(-1)^p\frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

D'où :

$$\int_0^\infty x^{2p+1}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

18 La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$f(x) \sim_0 x^{a-b}$. Donc f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $a - b > -1$.
On remarque également que, si $b > 1$, alors, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^b}$ et f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Si $b \leqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|^a}{x^b}\,\mathrm{d}\,x$ et on étudie la convergence de la série $\sum I_n$.
Si $b > 0$, on a :

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^b}\int_0^\pi |\sin x|^a\,\mathrm{d}\,x \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^\pi |\sin x|^a\,\mathrm{d}\,x.$$

Si $b < 0$, on a :

$$\frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^\pi |\sin x|^a\,\mathrm{d}\,x \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{((n-1)\pi)^b}\int_0^\pi |\sin x|^a\,\mathrm{d}\,x.$$

Donc :

$$I_n \sim \frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^\pi |\sin x|^a\,\mathrm{d}\,x.$$

La série $\sum I_n$ diverge et la fonction f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si :

$$1 < b < a + 1.$$

19 • $f > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f'}{f} = a < 0$.
Il existe donc $c \geqslant 0$ tel que f' soit négative sur $[c, +\infty[$. La fonction f est positive, décroissante sur $[c, +\infty[$. Elle a donc une limite $l \geqslant 0$ en $+\infty$.
• La fonction f' est de signe constant sur $[c, +\infty[$. Sa primitive f est bornée sur cet intervalle.
Donc f' est intégrable sur $[c, +\infty[$.
• $f' \sim_{+\infty} af$. f' est de signe constant et $a \neq 0$. f est donc intégrable sur $[c, +\infty[$. Or, elle est décroissante et positive sur cet intervalle. La série $\sum f(n)$ converge.

20 On vérifie tout d'abord l'existence de l'intégrale.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$ est continue, positive sur $]0, 1]$ et :

$$\forall t \in]0, 1] \quad \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \leqslant t^{a-1}.$$

L'application $t \to t^{a-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $a > 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_0^n \frac{(-1)^k}{a+kb}$.

$$S_n = \sum_0^n (-1)^k \int_0^1 t^{a+kb-1}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^1 t^{a-1}\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ et $t \mapsto t^{a-1}\frac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}$ sont intégrables sur $]0,1]$. D'où :

$$S_n = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 t^{a-1}\frac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t.$$

La deuxième intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car :

$$\left|\int_0^1 t^{a-1}\frac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_0^1 t^{b(n+1)+a-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a+b(n+1)}$$

On en déduit alors l'égalité :

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t.$$

Pour $a=1$ et $b=3$, on obtient :

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{1+3n} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Avec Maple :

```
> int(1/(1+t^3),t=0..1);
```

$$\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$$

21 **1)** Pour $n \geqslant 2$, la fonction f_n :

$$x \mapsto \frac{1}{(1+x)\dots(n+x)}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{1}{(1+x)\dots(n+x)} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x)^n} = \frac{1}{n-1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Pour calculer I_n, on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x)\dots(n+x)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+x}$$

et :

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!}.$$

Soit $A > 0$.

$$\int_0^A f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^n \left[a_k \ln(A) + a_k \ln\left(1+\frac{k}{A}\right) - a_k \ln(k)\right]$$

Or, $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, donc :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x)\dots(n+x)} = -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k)$$

$$= -\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!}\ln(k)$$

2) $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x}$. D'où, pour tout x de $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

$$-\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} f_n'(x) \leqslant f_n(x) \leqslant -\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}} f_n'(x).$$

En intégrant de 0 à 1, on obtient :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \sim \frac{1}{(n+1)!\ln(n)}.$$

3) $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}\,x.$

On pose $u = x-1$ dans $\int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

On obtient $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = nI_{n+1}$.

Puis $I_n \sim \frac{1}{(n+1)!\ln(n)}$. La série $\sum I_n$ converge.

22 **1)** La fonction g est positive et continue sur $]0,1[$. De plus :

$$g(x) \sim_0 \frac{1}{x^{1-\lambda}} \quad \text{et} \quad 1-\lambda < 1.$$

$$g(x) \sim_1 \frac{1}{(1-x)^\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda < 1.$$

Donc g est intégrable sur $]0,1[$.

2) La fonction $t \mapsto u = \frac{t}{1-t}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[0,1[$ dans $[0,+\infty[$.

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,u}{u^{1-\lambda}(1+u)}.$$

3) $I(\lambda) - J(\lambda) = J(1-\lambda)$ en posant $v = \frac{1}{u}$.

4) $J(\lambda) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,u}{u^{1-\lambda}(1+u)}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u^{1-\lambda}}\left(\sum_0^{n-1}(-1)^k u^k + (-1)^n \frac{u^n}{1+u}\right)\mathrm{d}\,u$$

$$= \sum_0^{n-1}\int_0^1 (-1)^k u^{k+\lambda-1}\,\mathrm{d}\,u + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}\,u$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

car chaque intégrale a un sens. De plus :

$$0 < \int_0^1 \frac{u^{n+\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{n+\lambda-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+\lambda}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc :

$$J(\lambda) = \sum_0^\infty \int_0^1 (-1)^k u^{k+\lambda-1}\,\mathrm{d}u = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k+\lambda}.$$

5) $I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k+\lambda} + \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k+1-\lambda}$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}.$$

23 **1)** $u_n = \int_0^1 \frac{f(n+x)}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x.$

Posons $v_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{n}\,\mathrm{d}x$ et étudions $u_n - v_n$.

$$u_n - v_n = -\int_0^1 \frac{x\,f(x)}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

La série $\sum (u_n - v_n)$ est absolument convergente. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \int_0^1 \frac{f(x)}{n}\,\mathrm{d}x$ converge, donc si et seulement si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2) Si la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{|f(t)|}{t}$ l'est. $|f|$ est aussi continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, et la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la question précédente, nous en déduisons que $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$. Puis $f = 0$.

3) Supposons l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergente, mais non absolument convergente. Alors $f \neq 0$. De plus, la série $\sum u_n$ converge. Donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Réciproquement, supposons $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $f \neq 0$. Alors la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, pour tout $x \in [n, n+1]$, on a :

$$\left|\int_n^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_1^\infty u_n.$$

24 **1)** La fonction f est continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$. De plus $|x^a e^{ix}| = x^a$.

f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a < -1$.

2) Soit a dans $[-1,0[$. Prenons $A > 1$ et calculons $\int_1^A x^a e^{ix}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^A x^a e^{ix}\,\mathrm{d}x = \left[-ie^{ix}x^a\right]_1^A + ia\int_1^A x^{a-1}e^{ix}\,\mathrm{d}x$$

$$= ie^i - ie^{iA}A^a + ia\int_1^A x^{a-1}e^{ix}\,\mathrm{d}x$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, $e^{iA}A^a$ tend vers 0 et $\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{ix}\,\mathrm{d}x$ converge, car $a - 1 < -1$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\,\mathrm{d}x$ est convergente et :

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\,\mathrm{d}x = ie^i + ia\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{ix}\,\mathrm{d}x.$$

3) Nous remarquons que :

$$\int_{2n\pi-\pi/4}^{2n\pi+\pi/4} x^a \cos x\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Notons $x_{2n} = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$ et $x_{2n+1} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$], la suite $\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} x^a \cos x\,\mathrm{d}x$) ne tend pas vers 0, donc l'intégrale diverge. Les intégrales proposées ne sont pas convergentes.

4) Lorsque $a < -1$, les fonctions $x \mapsto x^a \cos x$ et $x \mapsto x^a \sin x$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$.

Lorsque $a \geqslant 0$, on montre de même que dans la *question* **3** que l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^a \sin x\,\mathrm{d}x$ n'est pas convergente.

Lorsque a est dans $[-1,0[$, la *question* **2** permet d'affirmer que les intégrales $\int_1^{+\infty} x^a \cos x\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} x^a \sin x\,\mathrm{d}x$ convergent. De plus, pour tout x, on a :

$$|\sin x|x^a \geqslant (\sin^2 x) \quad x^a = \frac{x^a}{2} - \frac{\cos 2x}{2}x^a \geqslant 0.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2}x^a\,\mathrm{d}x$ converge, mais l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{2}\,\mathrm{d}x$ diverge. La fonction $x \mapsto x^a \sin x$ n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Vous montrerez qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto x^a \cos x$.

5. a) Posons $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^a \sin x\,\mathrm{d}x$. Nous savons que la série $\sum u_n$ converge et que :

$$\int_0^\infty x^a \sin x\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^\pi (n\pi + t)^a \sin t\,\mathrm{d}t.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cette série est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées. Sa somme a le signe de u_0. Donc $\displaystyle\int_0^{\infty} x^a \sin x \,\mathrm{d}\,x > 0$.

b) La fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On remarque que :

$$\int_{\sqrt{-\pi/4+2n\pi}}^{\sqrt{\pi/4+2n\pi}} \left|\cos(x^2)\right| \mathrm{d}\,x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}}.$$

La divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}}$ nous permet de dire que la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto u = x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective sur $[0, +\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}\,u = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) \mathrm{d}\,x.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2) \mathrm{d}\,x$ converge.
La même technique permet d'établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2) \mathrm{d}\,x$ est convergente.
De plus :

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) \mathrm{d}\,x = \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}\,u > 0.$$

25 **1)** Considérez la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]-\infty, a] \\ \dfrac{n^2x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} & \text{si} \quad x \in]-\infty, a] \end{cases}$$

La fonction $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en $u = 1$. On en déduit que, pour tout x :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{e(1+x^2)}.$$

Appliquez le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^2x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = 0.$$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{na} \frac{u^2n^2\mathrm{e}^{-u2}}{n^2+u^2} \mathrm{d}\,u \qquad (u = nx).$

Considérez la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \notin]-\infty, na] \\ \dfrac{u^2n^2\mathrm{e}^{-u^2}}{n^2+u^2} & \text{si} \quad u \in]-\infty, na] \end{cases}$$

Pour tout réel u : $0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^2\mathrm{e}^{-u}$. Si $a > 0$, en appliquant le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} u^2\mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Cf. *exercice* 17.)
Si $a = 0$, de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{n^3x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{0} u^2\mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Si $a < 0$, : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = 0.$

26 **1)** Posez, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si} \quad x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\right| = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n |\ln(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}|\ln(x)|$$

Appliquez le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}\,x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x) \mathrm{d}\,x.$$

2) $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x) \mathrm{d}\,x$

$$= \int_0^1 n(1-u)^n \ln(nu) \mathrm{d}\,u$$

$$= n\ln(n) \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{d}\,u + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) \mathrm{d}\,u$$

car les fonctions $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto (1-u)^n \ln(u)$ sont intégrables sur $]0, 1]$.
Intégrez par parties $\displaystyle\int_0^a (1-u)^n \ln(u) \mathrm{d}\,u$, avec a un réel de $]0, 1[$.

$$\int_0^a (1-u)^n \ln(u) \mathrm{d}\,u = \left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_0^a - \int_0^a \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\frac{\mathrm{d}\,u}{u}$$

Et :

$$-\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\frac{\mathrm{d}\,u}{u} = -\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}\,t$$

$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(t^n + t^{n-1} + \ldots + 1\right) \mathrm{d}\,t$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Puis :

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = n\ln(n)\frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\ln(n)-\ln(n+1)-\gamma+o(1)\right)$$

D'où : $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\gamma$.

27 **1)** La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|\varphi| = O\left(\exp\left(-tx^2\right)\right)$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) Soit $u = \sqrt{t}\,x$ un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $(a<b)$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}\int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u.$$

Donc :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u.$$

Puis :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

3) On suppose $f(0)\neq 0$. Le calcul précédent donne :

$$\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u.$$

On considère une suite (t_n) de réels >0 tendant vers $+\infty$ et, pour tout n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = f\left(\frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)\exp\left(-u^2\right).$$

On a : $\forall\, u\in\mathbb{R}\quad |f_n(u)| \leqslant \|f\|_\infty\exp(-u^2)$. Le théorème de convergence dominée s'applique. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u = f(0)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,f(0).$$

Ceci étant obtenu pour toute suite (t_n) de réels tendant vers $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}\,f(0)}{\sqrt{t}}$$

28 **1)** Posez, pour tout $x>0$, $f_n(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx}$.

On a :

$$|f_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty\exp(-x).$$

Avec le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) Calculez $\displaystyle\int_0^\infty n\,f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variables $u=nx$ sur $\displaystyle\int_0^A nf(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$, avec $A>0$.

$$\int_0^\infty n\,f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Posez, pour $n\geqslant 1$ et $u>0$, $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{e}^{-u}$. La même majoration permet d'utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty f\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0).$$

3) $I_n - L = \displaystyle\int_0^\infty n(f(x)-f(0))\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^\infty\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)n\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Fixez $A>0$ et intégrez par parties. En faisant tendre A vers $+\infty$: $I_n - L = \displaystyle\int_0^\infty f'(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Donc $I_n - L \sim \dfrac{f'(0)}{n}$.

29 Vous vérifierez que, pour tout $x\neq 0$, la fonction $t\mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}$ est intégrable sur $]\min(0,x),\max(0,x)[$.

Soit $x\neq 0$. On pose $t=ux$.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\frac{x}{|x|}\,\mathrm{d}u.$$

En notant : $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$, pour $x\neq 0$, on a :

$$F(x) = \mathrm{sgn}(x)G(x)$$

Pour tout x réel, la fonction $\left(u\mapsto \dfrac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\right)$ est continue et intégrable sur $[0,1[$.

La fonction, φ, des deux variables admet une dérivée partielle par rapport à x, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,u) = \dfrac{uh'(ux)}{\sqrt{1-u^2}}$, continue par rapport à x et continue par rapport à u. Soit A un réel tel que : $0<A$. Alors h' est bornée sur $[-A,A]$ et, pour tout x de $[-A,A]$, on a :

$$\left|\frac{uh'(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\right| \leqslant \sup_{x\in[-A,A]}|h'(x)|\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les fonctions dominantes sont intégrables sur $[0, 1[$, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{x\to 0} G(x) = G(0) = \int_0^1 \frac{h(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\,u$$

$$\lim_{x\to 0} G'(x) = G'(0) = \int_0^1 \frac{uh'(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\,u$$

Vous en déduirez que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $h(0) = h'(0) = 0$.

30 **1)** On fixe $x > 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right| \leqslant |f(t)|$. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour tout $x \geqslant 0$:

$$x\varphi(x) = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_1^\infty x\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\left|\int_1^\infty x\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant x\mathrm{e}^{-x}\int_1^\infty |f|$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^\infty x\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

Étude de $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$:

$$\int_0^1 x_n\mathrm{e}^{-x_n t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{x_n} \mathrm{e}^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right)\mathrm{d}\,u.$$

Notez f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right) \quad \text{si} \quad u \in]0, x_n[\,; \quad f_n(u) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Avec le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x_n\mathrm{e}^{-x_n t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u} f(0)\,\mathrm{d}\,u = f(0).$$

En définitive, nous obtenons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x) = f(0)$.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\left|\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right| \leqslant |f(t)|$$

La fonction $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

31 **1)** Montrez que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $k \geqslant 1$:

$$f^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{(-t)^k k!\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^{k+1}}\,\mathrm{d}\,t.$$

En particulier :

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}\,\mathrm{d}\,t \leqslant 0.$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) $f(0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = 1$ et $f'(0) = -\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = -1$.

Vous montrerez que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$. f est décroissante, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Cette équation différentielle est linéaire du premier ordre. On peut écrire ses solutions sous la forme :

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}\,t + C\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec C dans $\mathbb{R}$.

L'expression $C\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers l'infini, si $C \neq 0$, lorsque x tend vers 0.

On pose :

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{\exp\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-u}}{(1+xu)}\,\mathrm{d}\,u \qquad \left(u = \frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$$

$$= x\,f(x)$$

De plus, on vérifie que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Enfin, $g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}\,t$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est prolongeable par continuité en 0 et non intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Nous en déduisons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}\,t = +\infty$.

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Chapitre 9

1 Équation différentielle linéaire du second ordre sous forme résolue.

L'ensemble de ses solutions a la structure de sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, avec $y(t) = x'(t)$.

L'équation différentielle équivaut au système différentiel :

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & 10 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Les fonctions $x_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{5t}$ et $x_2 : t \mapsto t\mathrm{e}^{5t}$ sont un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène associée à **(1)**.

Les fonctions $Z_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\ 5\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}$ et $Z_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{5t} \\ (5t+1)\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}$ sont donc un système fondamental de solutions du système homogène associé à **(2)**.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La méthode de variation des constantes donne, en cherchant les solutions de **(2)** sous la forme $Z(t) = a(t)Z_1(t) + b(t)Z_2(t)$:

$$x(t) = -\frac{t}{25} - \frac{2}{125} + a\mathrm{e}^{5t} + bt\mathrm{e}^{5t},$$

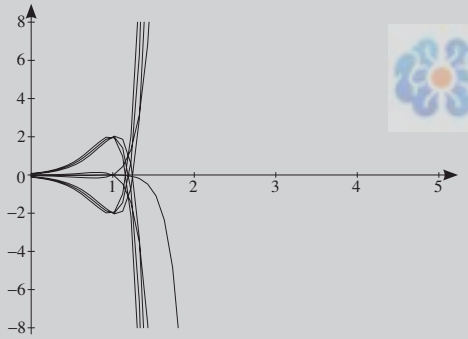
avec a et b réels quelconques.

Avec MAPLE :

```
> restart :
  eq :=diff(y(x),x$2)-10*diff(y(x),x)
  +25*y(x) = -x ;
  dsolve(eq, y(x)) ;
  L :=[] :with(plots) :
  for k from -2 to 2 by 2 do
  for j from -2 to 2 by 2 do
  init := y(1) = +k, D(y)(1) = j :
  rep := dsolve({eq, init},
y(x),type=numeric) :
  L :=L,odeplot(rep,[x,y(x)],0..5,
  view=[0..5,-8..8]) od : od :
  display(L) ;
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right) - 10\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right) + 25\mathrm{y}(x) = -x$$

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{2}{125} - \frac{1}{25}x + _C1\mathrm{e}^{(5x)} + _C2\mathrm{e}^{(5x)}x$$



2 **1) • Étude de la matrice du système**

La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(1, 2, 2)$ est une base du sous-espace propre E_0.
Le vecteur $(4, -1 - 3\mathrm{i}, -1 + 3\mathrm{i})$ est dans $E_{-3\mathrm{i}}$.
Le vecteur conjugué $(4, -1 + 3\mathrm{i}, -1 - 3\mathrm{i})$ est dans $E_{3\mathrm{i}}$.

• Détermination des solutions complexes du système

Les fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \mapsto \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} 4 \\ -1-3\mathrm{i} \\ -1+3\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ et } t \mapsto \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} 4 \\ -1+3\mathrm{i} \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de l'ensemble des solutions à valeurs complexes du système homogène.

On en déduit les solutions complexes du système. Soit :

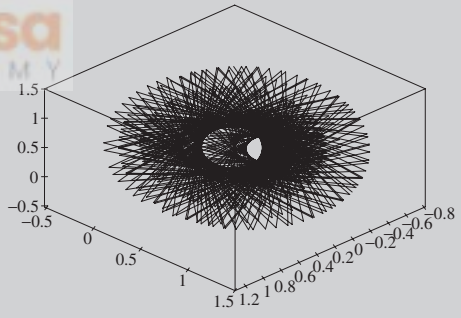
$$\begin{cases} x(t) = C_1 + 4C_2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + 4C_3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} \\ y(t) = 2C_1 + (-1-3\mathrm{i})C_2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + (-1+3\mathrm{i})C_3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} \\ z(t) = 2C_1 + (-1+3\mathrm{i})C_2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + (-1-3\mathrm{i})C_3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} \end{cases}$$

avec $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3$.

• Détermination des solutions réelles du système

Avec MAPLE :

```
> restart :with(plots) :
  sys :=diff(x(t),t)=2*y(t)-2*z(t),
  diff(y(t),t)=-2*x(t)+z(t),
  diff(z(t),t)=2*x(t)-y(t) :
  fcns := {x(t), y(t),z(t)} :
  init :=x(0)=i,y(0)=j,z(0)=k :
  s :=dsolve({sys,init}, fcns) ;
  assign(s) ; > L :=[] :
  x :=unapply(x(t),t) :y :=unapply(y(t),t)
  z :=unapply(z(t),t) :
  for i from 0 to 1 do
  for j from 0 to 1 do
  for k from 0 to 1 do
  L :=L,spacecurve([x(t),y(t),z(t)],
  t=-20..20,axes=BOXED) :od : od :
  od ;
  display(L) ;
```



Les solutions du système sont les fonctions :

$$\begin{cases} x(t) = C + 4D\cos(3t) + 4E\sin(3t) \\ y(t) = 2C + D(-\cos(3t) - 3\sin(3t)) + E(-\sin(3t) + 3\cos(3t)) \\ z(t) = 2C + D(-\cos(3t) + 3\sin(3t)) - E(\sin(3t) + 3\cos(3t)) \end{cases}$$

avec $(C, D, E) \in \mathbb{R}^3$.

2) • Première solution

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une solution réelle du système précédent.

En posant $N = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad X(t) \in N + \mathbb{R}W_1 + \mathbb{R}W_2.$$

Les courbes solutions sont toutes incluses dans des plans affines de direction $\mathbb{R}W_1 + \mathbb{R}W_2$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Seconde solution

Les trois lignes de la matrice A du système sont liées par la relation :

$$L_1 + 2L_2 + 2L_3 = 0.$$

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une solution du système, on aura donc :

$$x' + 2y' + 2z' = 0.$$

La courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$, $t \mapsto X(t)$, est dans un plan affine d'équation :

$$x + 2y + 2z = \delta$$

où δ est une constante.

Vous pourrez établir que ce résultat est dû au fait que 0 est valeur propre de la matrice A.

3 **1)** La matrice A est diagonalisable. Par conséquent :

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) La solution cherchée est :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

4 **1)** On reconnaît un système différentiel linéaire homogène en dimension 3. L'ensemble des solutions a la structure de sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Le système équivaut à l'équation différentielle vectorielle :

$$X'(t) = AX(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P_A(X) = -(X+2)^3$. La matrice A n'est pas diagonalisable.

• Première méthode

D'après le théorème de Cayley-Hamilton $A + 2I_3$ est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Donc : $\exp(tA) = \exp(-2tI_3)\exp(t(A+2I_3))$

$$\exp(tA) = e^{-2t}\left(I_3 + t(A+2I_3) + \frac{t^2}{2}(A+2I_3)^2\right)$$

$$= e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-2t+\frac{3}{2}t^2 & t & t-\frac{3}{2}t^2 \\ t+\frac{3}{2}t^2 & 1+t & -2t-\frac{3}{2}t^2 \\ -2t+\frac{3}{2}t^2 & t & 1+t-\frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système différentiel **(1)** sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = a(1-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} + bte^{-2t} + c(t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ y(t) = a(t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} + b(1+t)e^{-2t} + c(-2t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ z(t) = a(-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} + bte^{-2t} + c(1+t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \end{cases}$$

• Deuxième méthode

Le polynôme caractéristique de A est scindé. La matrice A est trigonalisable.

– Trigonalisation de la matrice A

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est la droite vectorielle engendrée par $V_1 = (1,1,1)$.

On cherche V_2 tel que $AV_2 \in -2V_2 + \text{Vect}(V_1)$.

Le vecteur $V_2 = (0,1,0)$ convient.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ trigonalise A :

– Transformation du système

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Z = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

La fonction X est solution de **(1)** si et seulement si Z est solution de $Z' = TZ$.

Soit :

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + y_1 + z_1 \\ y_1' = -2y_1 - 3z_1 \\ z_1' = -2z_1 \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

On résout. L'égalité $X = PZ$ donne ensuite :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\gamma + (\alpha+\beta)t - \frac{3}{2}\alpha t^2\right)e^{-2t} \\ y(t) = \left(\beta + \gamma + (\beta-2\alpha)t - \frac{3}{2}\alpha t^2\right)e^{-2t} \\ z(t) = \left(\alpha + \gamma + (\alpha+\beta)t - \frac{3}{2}\alpha t^2\right)e^{-2t} \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

2) L'ensemble des solutions du système différentiel avec second membre **(2)** a la structure de sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

On résout le système **(2)** en utilisant la trigonalisation ci-dessus ainsi que la notation $Z = P^{-1}X$.

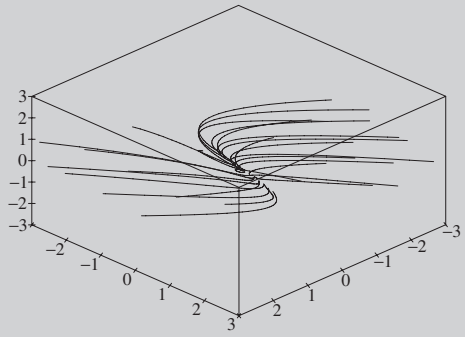
L'égalité $X = PZ$ permet de déterminer les solutions (x, y, z) de **(2)**.

$$\begin{cases} x(t) = (\gamma + (\alpha+\beta)t - \frac{3}{2}\alpha t^2)e^{-2t} - \frac{t^2}{8} + \frac{7t}{8} - \frac{5}{8} \\ y(t) = (\beta + \gamma + (\beta-2\alpha)t - \frac{3}{2}\alpha t^2)e^{-2t} - \frac{7t^2}{8} + \frac{23t}{8} - \frac{7}{4} \\ z(t) = (\alpha + \gamma + (\alpha+\beta)t - \frac{3}{2}\alpha t^2)e^{-2t} + \frac{3t^2}{8} + \frac{3t}{8} - \frac{7}{8} \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec MAPLE :



5 Équation différentielle linéaire, du second ordre, homogène. Elle s'écrit sous forme résolue sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. L'ensemble de ses solutions définies sur l'un de ces intervalles est donc un espace vectoriel de dimension 2.
Posez, pour t dans $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$, $x(t)=c(t)\mathrm{e}^{t}$.
Alors :

$$x(t)=a\mathrm{e}^{-t}(2t+3)+b\mathrm{e}^{t}.$$

On cherche s'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$.
Une telle solution éventuelle aurait pour restriction à l'intervalle $]-\infty,-1[$ la fonction :

$$x_1(t)=a_1\mathrm{e}^{-t}(2t+3)+b_1\mathrm{e}^{t}.$$

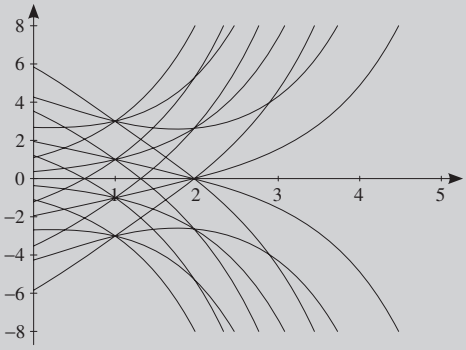
Elle aurait pour restriction à l'intervalle $]-1,+\infty[$ la fonction :

$$x_2(t)=a_2\mathrm{e}^{-t}(2t+3)+b_2\mathrm{e}^{t}.$$

On montre que le raccordement en -1 des deux fonctions, pour obtenir une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, impose $a_1=a_2$ et $b_1=b_2$.
On vérifie également que, sous ces conditions, la fonction obtenue est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est l'espace vectoriel :

$$\left\{t\mapsto a\mathrm{e}^{-t}(2t+3)+b\mathrm{e}^{t}\quad;\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

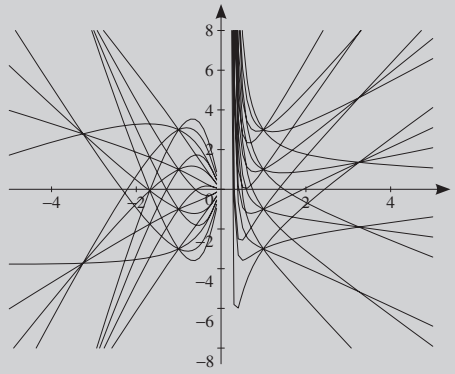
Avec MAPLE :



6 Équation différentielle linéaire, du second ordre qui s'écrit sous forme résolue, sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$. Sur chacun de ces intervalles, l'ensemble de ses solutions aura la structure d'espace affine de dimension 2.
La fonction $x\mapsto x$ est solution de l'équation homogène.
La méthode de variation de la constante conduit à :

$$y(x)=\mathrm{e}^{1/x}(1-ax)+bx.$$

Avec MAPLE :



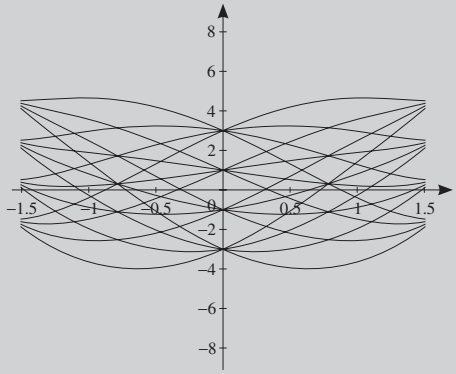
7 Équation différentielle linéaire, du second ordre, est sous forme résolue. L'ensemble de ses solutions a la structure d'espace affine de dimension 2.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{a\cos x+b\sin x\quad;\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

La méthode de variation des constantes conduit à :

$$y(x)=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x+a\cos x+b\sin x.$$

Avec MAPLE :



8 Ce système n'est pas à coefficients constants, mais sa matrice $\frac{1}{t}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$ est une matrice de similitude.
Posez $z=x+\mathrm{i}y$.

$$t\,z'=z(1+\mathrm{i}\,t)$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène. Sur un intervalle ne contenant pas 0, elle s'écrit sous forme résolue :

$$z' = \left(\frac{1}{t} + \mathrm{i}\right) z \qquad \textbf{(H)}$$

• Résolution sur un intervalle I ne contenant pas 0

Les solutions z de **(H)** sur l'intervalle I sont de la forme :

$$z(t) = Cte^{\mathrm{i}t}$$

où C est un nombre complexe.

En posant $\alpha = \mathrm{Re}C$ et $\beta = \mathrm{Im}C$, on obtient les solutions réelles du système (S) sur un intervalle I ne contenant pas 0.

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = t[\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)] \\ y(t) = \mathrm{Im}(z(t) = t[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] \end{cases}$$

avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$, recollement en 0

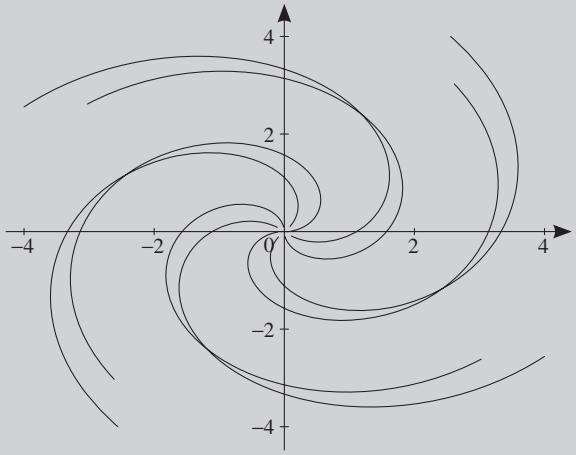
Les fonctions $t \mapsto Cte^{\mathrm{i}t}$, sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) (avec $C \in \mathbb{C}$).

Les fonctions réelles (x, y), solutions sur $\mathbb{R}$ du système **(S)**, sont de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = t[\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)] \\ y(t) = t[\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)] \end{cases}$$

avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$.

Avec MAPLE :



9 Ce système différentiel ne correspond pas à ceux que l'on a étudiés en cours. L'ensemble de ses solutions a la structure d'espace vectoriel réel, mais on ignore la dimension de cet espace.

On effectue un changement de fonctions inconnues en posant :

$$u = x + y \quad \text{et} \quad v = x - y$$

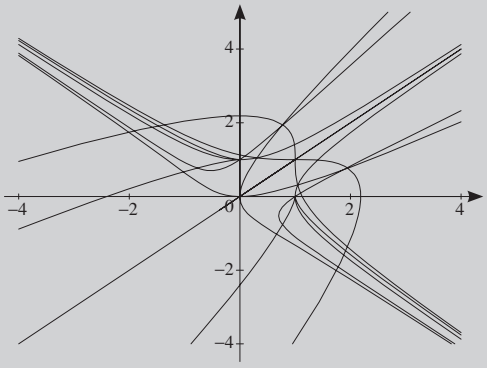
Les fonctions (x, y), solutions du système différentiel (S), sont les fonctions de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}[(a + c + d\,t)e^{t} + be^{-t}] \\ y(t) = \dfrac{1}{2}[(-a + c + d\,t)e^{t} - be^{-t}] \end{cases}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

On obtient un espace vectoriel de solutions de dimension 4.

Avec MAPLE :



Une autre méthode possible de résolution consiste à poser $u = x'$; $v = y'$.

Puis $X = \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}$.

10 **1)** On note g la fonction $f + \alpha f'$:

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x)e^{\alpha x} - f(0) = \int_0^x g(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Puis : $f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\displaystyle\int_0^x g(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t.$

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A \quad |g(t)| \leqslant \varepsilon$.

De plus, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$.

Elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

$$|f(x)| \leqslant |f(0)|e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_0^A \|g\|_\infty e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}\,\mathrm{d}t + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_A^x \varepsilon e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}\,\mathrm{d}t$$

Pour x assez grand $|f(x)| \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$:

$$\leqslant |f(0)|e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\|g\|_\infty e^{\mathrm{Re}(\alpha)A}A + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

Cette inégalité permet de conclure que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2) On note g la fonction $f' + e^{\mathrm{i}\pi/3}f$.

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g' + e^{-\mathrm{i}\pi/3}g = f + f' + f''$.

La question précédente s'applique et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

De nouveau, on applique le résultat précédent et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

11 Ces équations différentielles linéaires, du second ordre, peuvent s'écrire sous forme résolue, sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$. Sur chacun de ces intervalles, l'ensemble de ses solutions aura la structure d'espace vectoriel de dimension 2 pour l'équation homogène et d'espace affine de dimension 2 pour l'équation avec second membre.
On pose $z = xy$. Justifiez que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$y = a\frac{\sin x}{x}.$$

La méthode de variation des deux constantes permet ensuite d'obtenir les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ sous la forme :

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \frac{\cos x}{x}\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + a\frac{\sin x}{x} + b\frac{\cos x}{x}. \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

Vous justifierez que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \frac{\cos x}{x}\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + a\frac{\sin x}{x},$$

où a décrit $\mathbb{R}$.

12 • On calcule ce déterminant.

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = (y+y'+y'')\begin{vmatrix} 1 & y' & y'' \\ 1 & y'' & y \\ 1 & y & y' \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}(y+y'+y'')[(y-y')^2+(y'-y'')^2+(y-y'')^2].$$

L'équation différentielle équivaut à $y + y' + y'' = 0$ ou $y = y' = y''$.
Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène, du second ordre, $y + y' + y'' = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme :

$$y(x) = a\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + b\mathrm{e}^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Les solutions des équations différentielles linéaires $y = y'$ et $y = y''$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda\mathrm{e}^x$.
• Soit y une solution de l'équation différentielle. Deux cas peuvent se présenter :
– Pour tout réel x, on a : $y(x) = y'(x) = y''(x)$.
La fonction est alors de la forme $y(x) = \lambda\mathrm{e}^x$, avec λ réel.
– $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad y(x_0) \neq y'(x_0)$ ou $y'(x_0) \neq y''(x_0)$.
La continuité des fonctions $y - y'$ et $y' - y''$ permet d'en déduire l'existence d'un intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel les fonctions $y - y'$ et $y' - y''$ ne s'annulent pas.
Notons I le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel les fonctions $y - y'$ et $y' - y''$ ne s'annulent pas.
Si $I = \mathbb{R}$, la fonction y est de la forme :

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \beta\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2},$$

avec α et β réels.
Si $I \neq \mathbb{R}$, supposons par exemple I majoré. Notons $a = \sup I$.
Les fonctions $y - y'$ et $y' - y''$ sont continues, donc a n'appartient pas à I.
D'où : $\quad y(a) = y'(a) = y''(a)$.
De plus, la fonction y vérifie sur I l'équation différentielle :

$$y + y' + y'' = 0.$$

Par continuité, on a aussi : $\quad y(a) + y'(a) + y''(a) = 0$.
Puis : $\quad y(a) = y'(a) + y''(a) = 0$.
Nous obtenons une contradiction : $a \in I$.
• En conclusion, les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \beta\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2} \quad \text{ou} \quad y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x.$$

Chapitre 10

1 Pour tout complexe z, la suite $\left(\frac{z}{1+\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0. À partir d'un certain rang :

$$\left|\frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}z^n\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La série $\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}z^n$ converge absolument pour tout z et le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

2 **1)** $\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$ et $1 = \cos^2 n + \sin^2 n$. Il est impossible d'avoir : $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$.
2) La suite $(\cos n)$ ne converge pas vers 0. Donc $R \leqslant 1$.
La suite $(\cos n)$ est bornée. Donc d'après le lemme d'Abel, $R \geqslant 1$.
Finalement $R = 1$.
3) Pour tout x de $]-1,1[$, $\cos nx^n = \mathrm{Re}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n$ et la série géométrique $\sum(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n$ converge.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n)x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n\right) = \frac{1-x\cos 1}{x^2-2x\cos 1+1}.$$

3 Appliquons la règle de d'Alembert. Le rayon de convergence de la série entière est 8.

4 **1)** La règle de d'Alembert des séries entières s'applique à :

$$\sum\frac{z^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

et donne 1 pour rayon de convergence.
En posant $z = x^2$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière de départ vaut 1 aussi.
2) Les séries entières suivantes ont 1 pour rayon de convergence :

$$\sum\frac{x^{2n+2}}{n}, \quad \sum\frac{x^{2n+2}}{n+1}, \quad \sum\frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}-4x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=-\ln(1-x^2);\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x^2)-x^2;$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x.$$

D'où l'expression, valable pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x)=3x^2-(1-x)^2\ln(1-x)-(1+x)^2\ln(1+x).$$

3) Pour tout x de $[-1,1]$ et tout entier $n>0$:

$$\left|\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}\right|\leqslant\frac{1}{2n^3}.$$

La série de fonctions continues $\sum\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ converge normalement sur $[-1,1]$ et la fonction somme est continue sur $[-1,1]$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=3-4\ln(2).$$

La fonction étudiée est paire.

5 Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
On pose $a_n=1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_0=0$ et $b_n=1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=n.$$

$$\forall x\in\,]-1,1[\quad\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

6 Dans les trois cas, le rayon de convergence est $R=1$ et $]-1,1[\subset I\subset[-1,1]$.
• Dans le premier cas, il s'agit d'une série géométrique. Donc $I=]-1,1[$.
• Dans le deuxième cas, $I=[-1,1[$.
• Dans le troisième cas, $I=[-1,1]$.
La fonction somme d'une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence (ici, $]-1,1[$).
• Dans le deuxième cas, pour $x\in[-1,0[$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et majorer le reste. Vous en déduirez la convergence uniforme sur $[-1,0[$, puis la continuité de la fonction somme sur $I=[-1,1[$.
• Dans le troisième cas, la série de fonctions continues est normalement convergente sur $[-1,1]$. Donc, la fonction somme est continue sur $I=[-1,1]$.

7 $R=1$.
Notons S la fonction somme de cette série entière. Pour tout x de $]-1,1[$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+1}.$$

$$S'(x)=\begin{cases}-\ln(1-x^2)+\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2)+1 & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Puisque $S(0)=0$, S est la primitive de S' qui s'annule en 0.

$$S(x)=\begin{cases}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x^2)+2\ln\dfrac{1-x}{1+x}+3x & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

8 • **Première méthode**
Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$e^x\sin x=\operatorname{Im}e^{x(1+i)}=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n\sin(n\frac{\pi}{4})\frac{x^n}{n!}$.

• **Seconde méthode**
Les fonctions exponentielle et sinus sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Donc, leur produit l'est aussi et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{(n-k)!}\right)x^n,$$

avec : $a_k=\begin{cases}0 & \text{si } k=2p\\ \dfrac{(-1^p)}{(2p+1)!} & \text{si } k=2p+1\end{cases}$

Après simplification, on obtient :

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)}(-1)^p\binom{n}{2p+1}\right)\frac{x^n}{n!}$$

L'unicité des coefficients permet de conclure que, pour tout entier $n\geqslant1$:

$$\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)}(-1)^p\binom{n}{2p+1}=(\sqrt{2})^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

9 Pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)-\ln(1+x^2)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

10 L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence **(1)** est : $r^2 - \alpha r - \beta = 0$. Puisque $\beta \neq 0$, ses racines ne sont pas nulles.

1) Deux cas sont possibles.

• $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$.

L'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes λ et μ et il existe $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $a_n = c\lambda^n + d\mu^n$. Les deux séries entières $\sum \lambda^n x^n$ et $\sum \mu^n x^n$ ont des rayons de convergence respectifs de $\frac{1}{|\lambda|}$ et $\frac{1}{|\mu|}$, car ce sont des séries géométriques.

Donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence :

$$R \geqslant \min\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|}\right).$$

• $\alpha^2 + 4\beta = 0$.

L'équation caractéristique a une racine double μ, et il existe $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $a_n = (cn+d)\mu^n$. Les deux séries entières $\sum n\mu^n x^n$ et $\sum \mu^n x^n$ ont $\frac{1}{|\mu|}$ pour rayons de convergence.

Donc, la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence :

$$R \geqslant \frac{1}{|\mu|}.$$

2) Soit λ et μ les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation caractéristique $r^2 - \alpha r - \beta = 0$. On note :

$$\rho = \min\left(\frac{1}{|\mu|}, \frac{1}{|\lambda|}\right).$$

La fonction somme de la série entière, f, est définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ. Pour tout z de ce disque, on a : $1-\alpha z-\beta z^2 \neq 0$ et $(1-\alpha z-\beta z^2)\, f(z) = a_0+(a_1-\alpha a_0)z$.

11 **1)** Le rayon de convergence est 1.

2) Pour tout x de $]-1,1[$, on a :

$$(1-x)\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n \qquad \textbf{(1)}$$

Ainsi que :

$$(1-x)^2 f(x) = x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})} x^n \qquad \textbf{(2)}$$

3) Étude en -1^+

Pour x dans $[-1,0[$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées. Pour tout x de $[-1,0[$ et tout entier n :

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right|$$

On en déduit que la série de fonctions continues $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n$ converge uniformément sur $[-1,0[$. Le théorème d'interversion des limites s'applique.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

4) Étude en 1^-

• La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ est une série divergente à termes positifs. La suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

D'après **(1)**, pour tout x de $]0,1[$:

$$(1-x)\, f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n = S_N(x).$$

Vous en déduirez que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f(x) = +\infty$.

• La série de fonctions :

$$\sum \frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})} x^n$$

converge normalement sur $[0,1]$.

On note :

$$c = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n})}.$$

D'après **(2)** et le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2 f(x) = c.$$

De plus : $c = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{N}+\sqrt{N-1}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^2 f(x) = 0$.

5) Soit un réel x de $]0,1[$ et un entier n, on a :

$$n \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} x^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} x^n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n-1}} x^{n-1}$$

On déduit de **(1)** que, pour tout x de $]0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}.$$

La fonction $g : u \mapsto \frac{e^{u\ln(x)}}{2\sqrt{u}}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} g(u)\,du \leqslant \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} g(u)\,du$$

Donc : $\int_1^{\infty} \frac{e^{u\ln(x)}}{2\sqrt{u}}\,du \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + \int_0^{\infty} \frac{e^{u\ln(x)}}{2\sqrt{u}}\,du.$

Le changement de variable $t = \sqrt{u}\sqrt{|\ln x|}$ donne :

$$\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_{\sqrt{|\ln x|}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

donc :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{|\ln x|}(1-x)\,f(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus, $\sqrt{|\ln x|} \sim_{1^-} (1-x)^{1/2}$. Finalement :

$$f(x) \sim_{1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}}.$$

12 Puisque $R > 1$, la série numérique $\sum a_k$ converge absolument.
On en déduit que la série de fonctions de la variable θ $\sum_k a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} e^{-\mathrm{i}n\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

Or $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)_\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \delta_{n,k}$ (le symbole de Kronecker).
Le résultat en découle.

13 Le rayon de convergence de cette série entière est infini.

• **Première méthode**
Pour tout x de $\mathbb{R}$ $S(x) + S'(x) + S''(x) = \mathrm{e}^x$.
On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
S est de la forme :

$$S(x) = \frac{1}{3}e^x + \alpha \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \mathrm{e}^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

De plus, $S(0) = S'(0) = 0$.

On en déduit $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

• **Seconde méthode**
On remarque que $1 + \mathrm{j}^{n+1} + \mathrm{j}^{2n+2} = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad n = 3k+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Donc :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(1 + \mathrm{j}^{n+1} + \mathrm{j}^{2n+2})\frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit : $S(x) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^x + \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{j}^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x})$.

14 Écrivons f sur $]-\pi, \pi[\backslash 0$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}.$$

Les fonctions :

$$\varphi : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$$

se prolongent par continuité en 0.
De plus, sur $]-\pi, \pi[$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et φ ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

15 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa fonction somme est notée y. Si y est solution de (E) sur $]-R, R[$, on a :

$$xy''(x) - y'(x) + 4x^3 y(x)$$
$$= -a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3})x^n = 0$$

pour tout x de $]-R, R[$.
L'unicité du développement en série entière prouve que $a_1 = a_3 = 0$ et que :

$$\forall n \geqslant 0 \quad a_{n+4}(n+2)(n+4) + 4a_n = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

2) La relation **(1)** permet de démontrer, par récurrence, que $a_{4p+1} = 0$ pour tout entier p (respectivement $a_{4p+3} = 0$), car $a_1 = 0$ (respectivement $a_3 = 0$).

3) D'après **(1)**, pour tout entier $p \geqslant 1$

$$a_{4p} = \frac{-1}{2p(2p-1)} a_{4(p-1)}.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0.$$

De façon similaire, on prouve que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_2.$$

4) Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini.
De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2).$$

5) Puisque la série entière obtenue a un rayon de convergence infini, sa fonction somme est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de **(E)** sur un intervalle I ne contenant pas 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2, engendré par les restrictions à I des fonctions $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$.
Donc, toute solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$$

avec a_0, a_2, b_0, b_2 quatre constantes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

La continuité de y en 0 entraîne $a_0 = b_0$.
De plus, y est deux fois dérivable en 0. On en déduit $a_2 = b_2$.
Donc, l'ensemble S des solutions de **(E)** définies sur $\mathbb{R}$ est le sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$.

16 **1)** Pour tout x de $[-1, 1]$:

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

• Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$ vaut 1.
Finalement le domaine de définition de f est $[-1, 1]$.

2) La convergence normale évoquée plus haut prouve la continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ sur $[-1, 1]$.
La continuité de l'exponentielle entraîne la continuité de f sur son domaine de définition.

3) On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, car c'est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc, f l'est sur $]-1, 1[$.

4) De plus, par définition de f, $f(0) = 1$. Donc, f est solution, sur $]-1, 1[$, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= S'(x)y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

On suppose l'existence d'une solution y de **(1)** développable en série entière sur $]-1, 1[$ et notée :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

• Détermination des coefficients a_n
La fonction y est solution sur $]-1, 1[$ de **(1)**. On en déduit :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(k+1)^{\alpha-1}} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Ceci détermine la suite (a_n) de manière unique par récurrence.
Dans la suite de l'exercice, (a_n) désigne la suite calculée à partir de la relation **(2)**.

• Minoration du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
On montre par récurrence que, pour tout n, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Puisque la suite (a_n) est bornée, $R \geqslant 1$.

• Identification de f et de y sur $]-1, 1[$
Puisque le rayon de convergence R de cette série entière est plus grand que 1, la fonction somme de cette série, y, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

La relation **(2)** permet de prouver que la fonction y est solution, sur $]-1, 1[$, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= S'(x)y \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Or, la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

5) Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence. Donc, pour tout entier naturel p, $\sum a_n x^n$ et $\sum n^p a_n x^n$ aussi.
Puisque la suite $(n^p a_n)$ ne converge pas vers 0, la série $\sum n^p a_n x^n$ ne converge pas pour $x = 1$.
On en déduit $R = 1$.

• Application à la série étudiée
Soit un entier $p \geqslant \alpha$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(k+1)^{\alpha-1}}$$

$$(n+1)^p a_{n+1} = (n+1)^{p-\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha-1}.$$

Donc, pour tout n :

$$(n+1)^p a_{n+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \geqslant a_0 = 1.$$

La suite $(n^p a_n)$ ne converge pas vers 0. D'après ce qui précède, le rayon de convergence cherché est exactement 1.

17 **1)** Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2 + n^2}$ qui converge pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Dans toute la question, x est fixé dans $\mathbb{R}$.

• La fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-nt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|\cos(xt)\mathrm{e}^{-nt}| \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Donc, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Une double intégration par parties vous permettra de prouver la formule demandée.

• Pour tout $t > 0$, $\mathrm{e}^{-t} \in]0, 1[$ et :

$$\frac{\cos(xt)}{\mathrm{e}^t + 1} = \frac{\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos(xt)\mathrm{e}^{-nt}.$$

On note S_n la n^{e} somme partielle de cette série de fonctions de la variable t. Pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos(xt)\mathrm{e}^{-kt} = \cos(xt)\mathrm{e}^{-t} \frac{1 - (-1)^n \mathrm{e}^{-nt}}{1 + \mathrm{e}^{-t}}.$$

$$|S_n(t)| \leqslant 2\mathrm{e}^{-t}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Le théorème de convergence dominée s'applique et permet de conclure :

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{e^t+1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^\infty \cos(xt)e^{-nt}\,dt = f(x).$$

3) La fonction cosinus est développable en série entière et :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \quad \frac{\cos(xt)}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{t^{2n}}{e^t+1}.$$

Soit x dans $\mathbb{R}$. On pose $v_n(t) = (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\dfrac{t^{2n}}{e^t+1}$.
Alors :

$$0 \leqslant a_n = \int_0^\infty \frac{t^{2n}}{e^t+1}\,dt \leqslant \int_0^\infty t^{2n}e^{-t}\,dt = (2n)!$$

Si $x \in]-1,1[$, la série $\sum\int_0^\infty |v_n(t)|\,dt$ est convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et permet d'écrire :

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{e^t+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}a_n.$$

Ceci prouve que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
De plus :

$$a_n \geqslant \int_0^\infty \frac{t^{2n}e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}(2n)!$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}a_n$ diverge grossièrement pour $x=1$ et le rayon de convergence de cette série entière est exactement 1.

18 **Développement en série entière de la fonction tangente**

1) De la formule :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{d\tan}{dx}(x) = 1+\tan^2(x)$$

on déduit par récurrence que, pour tout entier n :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad f^{(n)}(x) = P_n(f(x))$$

où P_n est un polynôme à coefficients réels positifs de degré $n+1$. De fait, on trouve :

$$P_{n+1}(y) = P_n'(y)(1+y^2).$$

Puisque f est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f^{(n)}$ l'est aussi car P_n est à coefficients positifs.

2) Soit $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. D'après la première question, la série $\sum\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est à termes positifs.

La formule de Taylor avec reste intégral nous apprend que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \geqslant 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leqslant f(x).$$

La série entière $\sum\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$ et son rayon de convergence R est tel que : $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3) Puisque $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, la dérivée de g sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est obtenue par dérivation terme à terme :

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n+1)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

Par ailleurs, l'expression de g^2 sur cet intervalle s'obtient en effectuant le produit de Cauchy :

$$g^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(0)f^{(n-k)}(0)\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Pour $n \geqslant 1$, la formule de Leibniz permet d'écrire :

$$f^{(n+1)}(x) = (1+f^2(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x).$$

Or, $f(0)=0$. D'où la formule :

$$g'(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n+1)}(0)\frac{x^n}{n!} = 1+g^2(x) \text{ valable sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

4) On a : $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \dfrac{g'(x)}{1+g^2(x)} = 1.$

Le changement de variable $y = g(x)$ dans $\displaystyle\int\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx$ permet
de conclure qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \operatorname{Arctan}(g(x)) = x+c.$$

Or, $g(0) = f(0) = 0$. Donc $c=0$ et :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad g(x) = \tan x.$$

Ceci prouve que la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, cette fonction n'est pas continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$; donc le rayon de convergence de sa série de Taylor est exactement $\dfrac{\pi}{2}$.

Chapitre 11

1 **1)** Si $a\in i\mathbb{Z}$, $a = im$, $f(x) = e^{imx}$, avec m dans $\mathbb{Z}$.
Dans ce cas :

$$c_m(f) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\neq m \quad c_n(f) = 0.$$

2) Sinon, on a : $c_n(f) = (-1)^n\dfrac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a-in)}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 La fonction f est à valeurs complexes et paire. Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

1) Si $a \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$, $a = \mathrm{i}m$ et :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}}{2} = \cos(mx).$$

Dans ce cas :

$$c_m(f) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_{-m}(f) = \frac{1}{2}$$

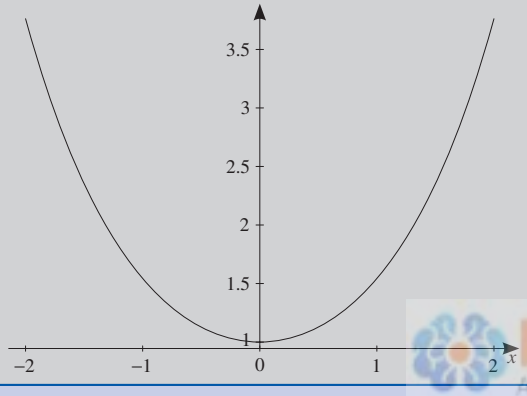
$$\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{m,-m\} \quad c_n(f) = 0.$$

$$a_{|m|}(f) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{|m|\} \quad a_n(f) = 0.$$

2) *Avec MAPLE :*

```
> plot(cosh(x),x=-2..2,scaling=constrained);
```



Pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})\,\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^n 2\frac{a}{\pi}\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{n^2+a^2}.$$

3 Pour la première fonction, si $a \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$,

$$a = \mathrm{i}m,\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx},$$

et pour tout $p \geqslant |m|$, $S_p(f) = f$. En effet, f est un polynôme trigonométrique.

Sinon, la somme partielle $S_p(f)$ de la série de Fourier de f est :

$$S_p(f)(x) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left[(a+\mathrm{i}n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + (a-\mathrm{i}n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right]\right)$$

Pour la seconde fonction, si $a = \mathrm{i}m \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$, $f(x) = \cos(mx)$ f est un polynôme trigonométrique.

Si $|p| < |m|$, $S_p(f) = 0$.

Si $|p| \geqslant |m|$, $S_p(f) = f$.

Sinon, si $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$S_p(f)(x) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\right].$$

4 On sait que :

$$\inf\{||f-Q||_2; Q \in \mathcal{P}_n\} = ||f - S_n(f)||_2.$$

Par conséquent :

Si $a \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$, $a = \mathrm{i}m$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$.

Pour tout $n \geqslant |m|$, $S_n(f) = f$ et :

$$\inf\{||f-Q||_2; Q \in \mathcal{P}_n\} = 0.$$

Pour tout $n < |m|$, $S_n(f) = 0$ et :

$$\inf\{||f-Q||_2; Q \in \mathcal{P}_n\} = ||f||_2 = 1.$$

Si $a \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{i}\mathbb{Z}$, la somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de f est :

$$\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}[(a+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + (a-\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]\right).$$

Dans ce cas,

$$\inf\{||f-Q||_2\,;\, Q \in \mathcal{P}_n\} = ||f - S_n(f)||_2$$

et le théorème de Pythagore permet de calculer :

$$||f - S_n(f)||_2^2 = ||f||_2^2 - ||S_n(f)||_2^2.$$

Avec :

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{e}^{ax}|^2\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{sh}(2\pi\,\mathrm{Re}\,a)}{2\pi\,\mathrm{Re}\,a} & \text{si } \mathrm{Re}\,a \neq 0\\ 1 & \text{si } \mathrm{Re}\,a = 0\end{cases}$$

et :

$$||S_n(f)||_2^2 = \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 = \left|\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\right|^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+k^2}\right|^2 \left[|a+\mathrm{i}k|^2 + |a-\mathrm{i}k|^2\right].$$

5 Si la série trigonométrique $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ était la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, d'après l'inégalité de Bessel, la série $\sum \frac{1}{n}$ serait convergente, ce qui est faux.

6 • En ce qui concerne la fonction f de l'*exercice* 1, elle n'est pas continue, sauf dans le cas $a \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$.

• La fonction f de l'*exercice* 2 est continue, la suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f.

Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$S_p(f)(x) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\right].$$

Finalement :

$$\left(\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\right)^2\left[1 + 2\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{n^2+a^2}\right)^2\right] = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sh}(2a\pi)}{4a\pi}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7 • La fonction f de l'*exercice* 1 appartient à l'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$.
La formule de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{at}|^2\,dt = \frac{|\mathrm{sh}\,(a\pi)|^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{|a|^2}+\sum_1^{\infty}\frac{2}{(|a^2+n^2|)^2}\left[|a|^2+n^2\right]\right)$$

Si $\mathrm{Re}(a)=0$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{at}|^2\,dt = 1.$$

Si $\mathrm{Re}(a)\neq 0$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{at}|^2\,dt = \frac{\mathrm{sh}\,(2\mathrm{Re}(a)\pi)}{2\mathrm{Re}(a)\pi}.$$

8 • La fonction f de l'*exercice* 1 n'est pas continue. Le théorème de convergence normale ne s'applique pas à elle.
• La fonction f de l'*exercice* 2 est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale s'applique. La série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout x de $[-\pi,\pi]$, lorsque $a>0$:

$$\mathrm{ch}\,(ax) = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{a\pi}\left[1+2\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\right].$$

9 • La fonction f de l'*exercice* 1 est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de convergence simple s'applique :
$\forall x\in\mathbb{R}$

$$f_r(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left[(a+\mathrm{i}\,n)e^{\mathrm{i}\,nx}+(a-\mathrm{i}n)e^{-\mathrm{i}nx}\right]\right)$$

Mais, de plus, pour $x=(2k+1)\pi$,

$$f(x)=\mathrm{ch}\,(a\pi)=\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2}=f_r(x).$$

Ainsi :

$$f(2\pi)=f(0)=1=\frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}\right)$$

et :

$$f(\pi)=\mathrm{ch}\,(a\pi)=\frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2}\right).$$

On en déduit les sommes de séries suivantes :

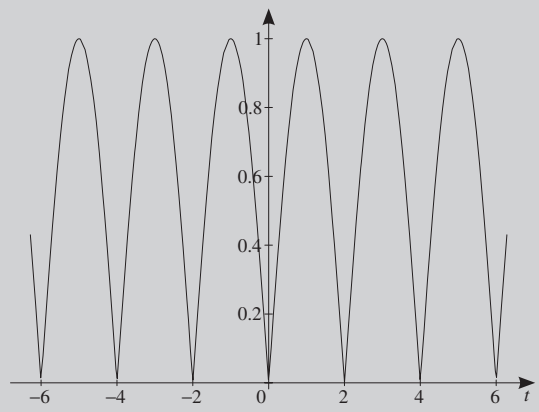
$$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}=\frac{\pi}{2a\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}$$

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}=\frac{\pi\mathrm{ch}\,(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}.$$

10 **1)** La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et paire.

Avec MAPLE :

```
> plot(abs(sin(Pi*t/2)),t=-2*Pi..2*Pi);
```



Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls et :

$$a_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

2) La formule de Parseval nous donne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt=\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2}.$$

D'où : $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}=\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$.

La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de convergence normale s'applique.
En particulier :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad\left|\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right|=\frac{2}{\pi}+\sum_1^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right).$$

11 On montre tout d'abord qu'il existe une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (α_n), telle que la série $\sum\alpha_{\varphi(n)}$ converge.
• Puisque la suite α converge, il existe N tel que, pour tout $n\geqslant N$, on ait $\alpha_n<1$.
On pose $\varphi(0)=N$. Il existe $N_1>N$ tel que, pour tout $n\geqslant N_1$, on ait $\alpha_{\varphi(0)}+\alpha_n<1$.
On pose $\varphi(1)=N_1$. En itérant le procédé, on construit une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (α_n) qui convient.
• On considère alors la série de fonctions $\sum a_n\cos(nt)$ dans laquelle $a_n=\alpha_n$ s'il existe un entier p tel que :

$$n=\varphi(p)\quad\text{et}\quad a_n=0\quad\text{sinon.}$$

La série $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente et il existe une infinité de valeurs de n telles que $a_n=\alpha_n$.
La série de fonctions $\sum a_n\cos(nt)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Sa fonction somme est continue, 2π-périodique. Elle vérifie la condition souhaitée.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

12 **1)** Les fonctions f et g sont 2π-périodiques et paires. Les coefficients $b_n(f)$ et $b_n(g)$ sont nuls.

$$a_0(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{T^4}{40}$$

$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^4\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^n T^4\left(\frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{3}{n^4\pi^4}\right).$$

$$a_0(g) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{T^2}{6}$$

$$a_n(g) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n T^2}{n^2\pi^2}.$$

2) Les fonctions f et g sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Chacune est la somme de sa série de Fourier et la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.
En particulier :
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{T^4}{80} + T^4\sum_1^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{3}{n^4\pi^4}\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$$

et : $$g(x) = \frac{T^2}{12} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n T^2}{n^2\pi^2}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) - \frac{T^2}{2}g(x) = -\frac{7T^4}{240} - \sum_1^\infty \frac{3(-1)^n T^4}{n^4\pi^4}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

3) Avec la formule de Parseval, on obtient :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

13 Les fonctions f et f' sont continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On sait que

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = 2\pi\|f\|_2^2 \quad\text{et}\quad \int_0^{2\pi} |f'|^2 = 2\pi\|f'\|_2^2.$$

De plus, la formule de Parseval permet d'écrire :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \quad\text{et}\quad \|f'\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2.$$

Or, par hypothèse, $c_0(f) = 0$ et, pour tout n,

$$c_n(f') = \mathrm{i}n c_n(f).$$

D'où le résultat.
L'égalité n'est possible que si, pour tout n :

$$n^2|c_n(f)|^2 = |c_n(f)|^2.$$

Cette condition équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\quad |n| > 1 \Rightarrow c_n(f) = 0.$$

Les fonctions vérifiant l'égalité sont nécessairement de la forme :

$$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\ \text{avec}\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Vous vérifierez que toutes conviennent.

14 La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est continue, paire, π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle est donc la somme de sa série de Fourier.

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

Cherchons une solution f paire, somme de sa série de Fourier. On suppose donc qu'il existe une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n\cos(2nx)$ converge. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n\cos(2nx).$$

Supposons de plus cette fonction solution de l'équation différentielle. Elle est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $f''(x) = |\sin x| - f(x)$. Ceci entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On suppose enfin que les dérivées de f s'obtiennent en dérivant terme à terme la série.
Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}\quad f''(x) = -\sum_1^\infty 4n^2 a_n\cos(2nx)$.
La fonction f est donc solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n(1-4n^2)\cos(2nx)$$

On prend : $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{2}{\pi}$ et, pour tout $n > 0$,

$$a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

On vérifie que la série de fonctions $\sum \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2}\cos(2nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi que les séries dérivées terme à terme d'ordre 1 et 2. Les hypothèses émises sur f sont donc justifiées *a posteriori*.
Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto a\cos x + b\sin x + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2}\cos(2nx).$$

avec a et b deux constantes.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

15 **1)** La fonction f est définie, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Le calcul direct des coefficients de Fourier serait fort malaisé, à cause des intégrales. Procédons différemment.
Tout d'abord :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{a})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-a})}$$

On pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=u$ pour réduire en éléments simples.
D'où :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-a}}-\frac{\mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}x}}\right)$$

Avec $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-a}|=\mathrm{e}^{-a}<1$ et $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-a}|=\mathrm{e}^{-a}<1$, on peut utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+v}$, pour $|v|<1$, et on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}&=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\sum_0^\infty(-1)^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-a})^n-\sum_0^\infty(-1)^n(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-a})^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+2\sum_1^\infty(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)\right).\end{aligned}$$

2) Mais, si cette expression « ressemble » à une série de Fourier, rien ne prouve pour l'instant qu'il s'agisse effectivement de la série de Fourier de f, car elle n'a pas été obtenue par le calcul des coefficients de Fourier de f.
Pourtant, si l'on considère la série de fonctions :

$$\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+2\sum(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)\right)$$

on a : $\forall x\in\mathbb{R}\quad|(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)|\leqslant\mathrm{e}^{-na}$
et la série géométrique de terme général $(\mathrm{e}^{-a})^n$ converge, donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle est donc la série de Fourier de sa somme $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}$.
3) On en déduit : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a+\cos x}\,\mathrm{d}x=\pi a_n(f)$.

Si $n=0$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{2\pi}{\operatorname{sh} a}$.

Si $n\neq0$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi(-1)^n\mathrm{e}^{-na}}{\operatorname{sh} a}$.

16 **1)** Avant même la recherche des solutions, on peut remarquer que la fonction sinus convient et que toute combinaison linéaire de solutions est solution. L'ensemble des solutions est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, de dimension supérieure ou égale à un.
2) Soit f une solution. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique, f est la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout x réel :

$$f(x)=c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(2x)=c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}\right).$$

De plus, f' est aussi de classe C^∞ et 2π-périodique, donc f' est aussi la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
On sait que $c_n(f')=(\mathrm{i}n)c_n(f)$.
D'où $c_0(f')=0$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\sum_1^\infty(\mathrm{i}n)\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

Donc :
$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}2\sin x f'(x)&=2\sin x\sum_1^\infty(\mathrm{i}n)\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\\&=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\\&=\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)x}\right.\\&\qquad\left.-c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}\right).\end{aligned}$$

Et finalement :
$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}\right)\\&\quad=\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)x}\right.\\&\qquad\left.-c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}\right).\end{aligned}$$

Ceci traduit l'égalité, pour tout x réel, de $f(2x)$ et $2\sin x\,f'(x)$.
De plus, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $k\geqslant2$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)|=o\left(\left|\frac{1}{n}\right|^k\right),$$

donc les deux séries trigonométriques ci-dessus sont normalement convergentes. Elles sont les séries de Fourier de leurs sommes qui sont des fonctions continues, égales. D'après l'unicité du développement en série de Fourier pour une fonction continue, 2π-périodique, on peut identifier les coefficients et on obtient :

- $c_0(f)=-c_{-1}(f)-c_1(f)$ (coefficient de e^0)
- $0=2nc_{2n}(f)-(2n+2)c_{2n+2}(f)$ (coefficient de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)x}$)
- $0=-(2n+2)c_{-(2n+2)}(f)+2nc_{-2n}(f)$ (coefficient de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)x}$)
- $c_1(f)=c_1(f)-3c_3(f)$ (coefficient de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$)
- $c_n(f)=(2n-1)c_{2n-1}(f)-(2n+1)c_{2n+1}(f)$ (coefficient de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}$)

La deuxième relation nous indique que le terme $2nc_{2n}(f)$ est constant et la troisième qu'il en est de même de $2nc_{-2n}(f)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, si l'on considère que, pour tout $k \geqslant 2$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)| = o\left(\left|\frac{1}{n}\right|^k\right).$$

Ceci entraîne que ce produit est nul et donc que, pour n non nul, $c_{2n}(f) = 0$.
La quatrième relation indique que $c_3(f) = 0$.
Par récurrence, le lecteur montrera alors que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$c_{2n+1}(f) = 0 \quad \text{et} \quad c_{-(2n+1)}(f) = 0.$$

En résumé, seuls $c_0(f), c_{-1}(f)$ et $c_1(f)$ sont éventuellement non nuls, et,

$$c_0(f) = -c_{-1}(f) - c_1(f).$$

On obtient alors :

$$f(x) = c_1(f)(e^{ix} - 1) + c_{-1}(f)(e^{-ix} - 1).$$

On vérifie que les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \alpha(e^{ix} - 1) + \beta(e^{-ix} - 1)$$

sont solutions. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

17 Tout d'abord, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation indiquée, on démontre sans difficulté, par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est donc la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de sa dérivée f'.
Les fonctions : $x \mapsto f(x+1) - f(x-1)$ et : $x \mapsto \lambda f'(x)$, étant continues et égales, le développement en série de Fourier est unique et :
$\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t+1)e^{-2i\pi nt/T}\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t-1)e^{-2i\pi nt/T}\,dt = \lambda\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-2i\pi nt/T}\,dt.$$

Or :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t+1)e^{-2i\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_1^{T+1} f(u)e^{-2i\pi n(u-1)/T}\,du = e^{2i\pi n/T}c_n(f)$$

et, de même :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-1)e^{-2i\pi nt/T}\,dt = e^{-2i\pi n/T}c_n(f).$$

De plus, $c_n(f') = \dfrac{2i\pi n}{T}c_n(f)$. Donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad 2i\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)c_n(f) = \lambda\frac{2i\pi n}{T}c_n(f).$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f)\left(\lambda - \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)}{\dfrac{\pi n}{T}}\right) = 0.$$

On introduit alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

La relation précédente s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f)\left(\lambda - 2g\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right) = 0.$$

Or, la fonction g se prolonge par continuité en 0, tend vers 0 en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Donc, si λ n'est pas réel ou si $|\lambda|$ est strictement supérieur à $2\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|g(t)|$, tous les coefficients $c_n(f)$, pour n dans $\mathbb{Z}^*$, sont nuls et E_λ est l'espace vectoriel des fonctions constantes.
Il est donc de dimension 1.
Or, $\lim_{n\to+\infty} g\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right) = 0$, donc, à partir d'un certain rang N_0 :

$$\lambda - 2g\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \neq 0, \quad \text{soit} \quad c_n(f) = 0.$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de P_{N_0}, donc de dimension finie.

Chapitre 12

1 Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout H de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$F(P+H) - F(P) = \int_0^1 [f(\widetilde{P}(t) + \widetilde{H}(t)) - f(\widetilde{P}(t))]\,dt.$$

L'application $\widetilde{P}$ est continue sur $[0,1]$. Il existe deux réels a et b tels que $\widetilde{P}([0,1]) \subset [a,b]$.
On prend pour norme sur E :

$$P \mapsto \|P\| = \sup\left\{|\widetilde{P}(t)|; t \in [0,1]\right\}.$$

On considère H tel que $\|H\| \leqslant 1$.
Alors :

$$\forall t \in [0,1] \quad \widetilde{(P+H)}(t) \in [a-1, b+1].$$

L'application f'' est continue sur $[a-1, b+1]$.
Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall u \in [0,1] \quad |f''(u)| \leqslant M \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\|f(\widetilde{P}(t) + \widetilde{H}(t)) - f(\widetilde{P}(t)) - \widetilde{H}(t)f'(\widetilde{P}(t))\| \leqslant \frac{1}{2}\|H\|^2 M.$$

Alors :

$$\left\|F(P+H) - F(P) - \int_0^1 \widetilde{H}(t)f'(\widetilde{P}(t))\,dt\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|H\|^2 M.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'application $H \mapsto \displaystyle\int_0^1 \widetilde{H}(t)\, f'(\widetilde{P}(t))\ \mathrm{d}t$ est linéaire sur E.

L'application F est différentiable sur E et :

$$\forall P \in E \quad \mathrm{d}F(P) : H \mapsto \int_0^1 \widetilde{H}(t)\, f'(\widetilde{P}(t))\,\mathrm{d}t.$$

2 L'application $h : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur E.
Pour tout a de E on a $\mathrm{d}h(a) : k \mapsto 2(k \mid a)$.
L'application $u : y \mapsto \dfrac{1}{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
La composée $u \circ h$ est différentiable en tout point a de $E \setminus \{0_E\}$ et :

$$\begin{aligned}\forall k \in E \quad \mathrm{d}(u\circ h)(a)(k) &= \mathrm{d}u\left(\|a\|^2\right) \circ \mathrm{d}h(a)(k)\\ &= \mathrm{d}u\left(\|a\|^2\right)\left(2(k \mid a)\right)\\ &= -\frac{1}{\|a\|^4}2(k \mid a).\end{aligned}$$

L'application $g : x \mapsto x$ est différentiable sur E et pour tout a de E on a $\mathrm{d}g(a) : k \mapsto k$.
L'application f est le produit de g et de $u \circ h$.
Elle est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$.

$$\begin{aligned}\forall k \in E \quad \mathrm{d}f(a)(k) &= \frac{1}{\|a\|^2}k - \frac{1}{\|a\|^4}2(k \mid a)a\\ &= \frac{1}{\|a\|^2}\left(k - 2\frac{(k \mid a)a}{\|a\|^2}\right).\end{aligned}$$

L'application $s : k \mapsto k - 2\left(k \mid \dfrac{a}{\|a\|}\right)\dfrac{a}{\|a\|}$ est la réflexion d'hyperplan $a^\perp$.
La différentielle de f en a est une similitude composée de la réflexion s avec l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\|a\|^2}$.

3 On appelle G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Les fonctions f_1 et f_2 s'écrivent :

$$f_1(x,y) = G(x+y) - G(\pi)\,; \quad f_2(x,y) = G(x) - G(y).$$

En fixant y réel, vous montrerez que :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = g(x+y)\,; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = g(x).$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = g(x+y)\,; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -g(y).$$

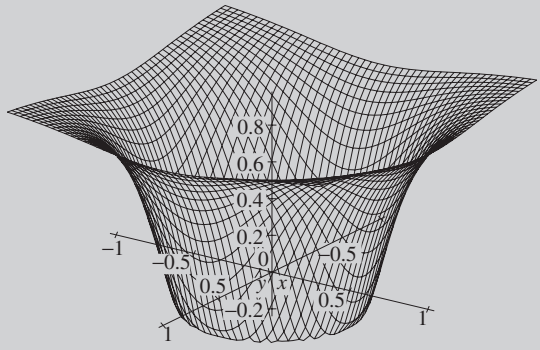
En fixant x réel, vous prouverez que :

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \int_2^x g(t)\,\mathrm{d}t\,; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = (y-x)g(x).$$

4 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car le sinus est borné.

Avec MAPLE :

```
> plot3d((x^2+y^2)*sin(1/(x^2+y^2)),x=-1..1,
  y=-1..1,orientation=[35,59],
  grid=[50,50],axes=normal);
```



Elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ en tant que produit de telles fonctions.
Le problème se pose en $(0,0)$.
Vous montrerez que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

On étudie ensuite la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$.
$\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

En $(0,0)$, le terme $2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ tend vers 0.

Il suffit d'utiliser les coordonnées polaires pour constater que le terme :

$$\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

n'a pas de limite.

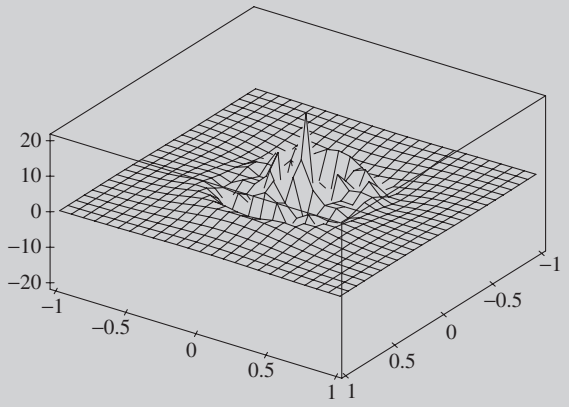
Avec MAPLE :

```
> f:=(x,y)->if x=0 and y=0 then 0
          else (x^2+y^2)*sin(1/(x^2+y^2))
          fi;
>
> fx:=D[1](f);
> plot3d(fx,-1..1,-1..1,axes=boxed,
  orientation=[35,45]);
```

$f := \mathbf{proc}(x, y)$
option *operator*, *arrow*;
if $x = 0$ **and** $y = 0$ **then** 0
else $(x^2 + y^2) \times \sin(1/(x^2 + y^2))$ **fi**
end

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
f x := proc(x, y)
option operator, arrow;
    if x = 0 and y = 0 then 0
    else 2 × x × sin(1/(x^2 + y^2))
    −2 × cos(1/(x^2 + y^2)) × x/(x^2 + y^2)
    fi
end
```



La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5 **1)** On note $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\right\}$.
L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$.
Pour tout a réel, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = a(1-a) = f(a,a).$$

L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) On fixe a réel.

$$f(x,a) = \begin{cases} x(1-a) & \text{si} \quad x \geqslant a \\ a(1-x) & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

D'où :

$$\lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = 1-a\,;$$

$$\lim_{x\to a, x<a} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = -a.$$

La fonction f n'a de dérivée partielle en aucun point de Δ.
L'application f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6 Ces trois applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car leurs applications dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

- $\mathrm{d}\, f_1(x,y)(h_1,h_2) = (h_1+h_2)g(x+y)$.
- $\mathrm{d}\, f_2(x,y)(h_1,h_2) = h_1 g(x) - h_2 g(y)$.
- $\mathrm{d}\, f_3(x,y)(h_1,h_2) = h_1(y-x)g(x) + h_2 \displaystyle\int_2^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

7 Ces trois applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- $\mathrm{J}\, f_1(x,y) = (g(x+y)g(x+y))$.
- $\mathrm{J}\, f_2(x,y) = (g(x) - g(y))$.
- $\mathrm{J}\, f_2(x,y) = \left((y-x)g(x)\displaystyle\int_2^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

8 $U = E\backslash\{0_E\}$ est un ouvert de E et $f \circ f = I_U$.
L'application f est bijective de U sur U.
Elle est différentiable et sa différentielle en a de U est :

$$k \mapsto \frac{1}{\|a\|^2}\left(k - 2(k|a)a\right).$$

Pour tout k fixé dans E, l'application

$$a \mapsto \frac{1}{\|a\|^2}\left(k - 2(k|a)a\right)$$

est un produit de deux applications continues sur U. Elle est continue.
L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
L'application réciproque de f est f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
L'application f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $E\backslash\{0_E\}$ sur lui-même.
Or d $f(a)$ est la composée de la réflexion s d'hyperplan $a^\perp$ et de l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\|a\|^2}$. Elle est inversible et son inverse est la composée de s avec l'homothétie de rapport $\|a\|^2$.

9 **1)** $(xy, x+y) = (u,v)$ si et seulement si x et y sont les racines de $X^2 - vX + u$.
L'application φ est injective sur U et $\varphi(U)$ est l'ouvert

$$V = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; v^2 - 4u > 0\right\}.$$

L'application φ est $\mathcal{C}^1$ sur U et sa matrice jacobienne est :

$$J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le jacobien $\mathrm{Det} J\varphi(x,y) = y - x$ est non nul sur U.
L'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.
2) On note F l'application $f \circ \varphi^{-1}$ définie sur V.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}y + \frac{\partial F}{\partial v}\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}x + \frac{\partial F}{\partial v}.$$

L'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0$$

est équivalente à

$$\frac{\partial F}{\partial u} - 3F = 0.$$

On en déduit $F(u,v) = K(v)\mathrm{e}^{3u}$ où K est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3) L'application f est solution de **(1)** sur U si et seulement si f est de la forme $(x,y) \mapsto K(x+y)\mathrm{e}^{3xy}$ où K est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On procède de même sur

$$U' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\right\}.$$

Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}^2$ on raccorde les solutions $(x, y) \mapsto K_1(x + y)e^{3xy}$ sur U et $(x, y) \mapsto K_2(x + y)e^{3xy}$ sur U' pour $x = y$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad K_1(2x) = K_2(2x).$$

D'où $K_1 = K_2$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^2$ est :

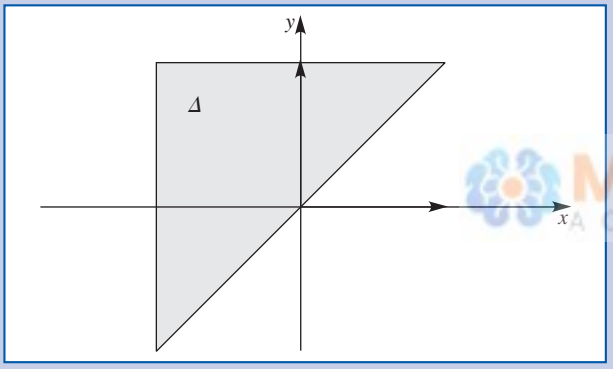
$$\left\{(x, y) \mapsto K(x + y)e^{3xy}; \quad K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})\right\}.$$

10 Vous montrerez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, l'application f^n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \qquad \mathrm{d}\left(f^n\right)\left(\vec{u}\right) = nf^{n-1}\left(\vec{u}\right)\mathrm{d}f\left(\vec{u}\right)$$

et $$\mathrm{grad}\left(f^n\right)\left(\vec{u}\right) = nf^{n-1}\left(\vec{u}\right)\mathrm{grad}\left(f\right)\left(\vec{u}\right).$$

11



L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.

• Le domaine Δ_O est un ouvert. En un point de Δ_O où f admet un extremum, le gradient de f est nul.

Or, $\mathrm{grad}\, f(x, y) = \left(-3(y - x)^2 + 6y, 3(y - x)^2 + 6x\right)$.

On obtient deux points où le gradient est nul : $(0, 0)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

• La fonction f a-t-elle un extremum en $(0, 0)$?

On utilise les coordonnées polaires.

$$f(x, y) = \rho^2\left[3\sin 2\theta + \rho(\cos\theta - \sin\theta)^3\right].$$

On remarque que, lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$, $f(x, y)$ est positif et lorsque $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $f(x, y)$ est négatif.

Le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum.

• La fonction f a-t-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

En posant $(h, k) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on trouve :

$$f\left(-\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k\right) - f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = r^2\left[3 + r(\cos\theta - \sin\theta)^3\right]$$

Cette quantité est positive pour r suffisamment petit.

f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ce minimum est : $-\frac{1}{2}$.

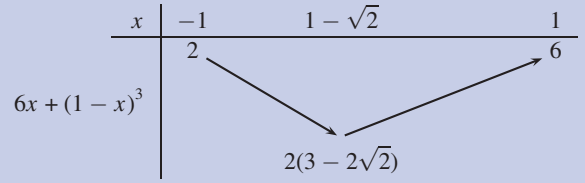
• Le domaine Δ_F une partie compacte du plan. La fonction f est continue, donc bornée sur ce compact. Elle admet au moins un minimum et un maximum sur Δ_F.

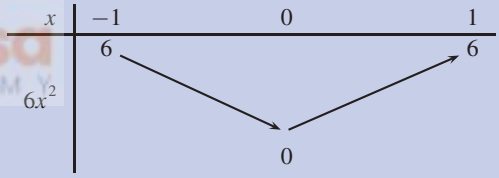
La fonction f admet un minimum local au point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ qui est intérieur à Δ_F. On étudie f sur le triangle qui délimite ce domaine.

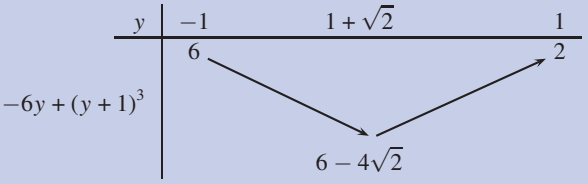
On considère la restriction de f aux trois segments :

$$C_1 = \{(x, 1); -1 \leqslant x \leqslant 1\} \quad ; \quad C_2 = \{(x, x); -1 \leqslant x \leqslant 1\} \quad ;$$

$$C_3 = \{(-1, y); -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$







On en déduit que la fonction f atteint son maximum sur Δ_F aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Ce maximum vaut 6.

Les valeurs minimales de f sur C_1, C_2 et C_3 sont toujours positives ou nulles (car $\sqrt{2} < 1{,}5$). Donc f atteint son minimum sur Δ_F au point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ce minimum vaut $-\frac{1}{2}$.

12 Tout d'abord, g est une fonction polynôme des deux variables (x, y), elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et $[0, 1]^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc g est bornée et atteint ses bornes sur ce compact.

Ensuite :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2 > 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc, grad g ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, g n'a pas d'extremum local sur U. Ainsi, g n'a pas d'extremum local sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$. Comme elle a des extrema sur $[0,1]\times[0,1]$, ces extrema sont situés sur la frontière de $[0,1]\times[0,1]$, c'est-à-dire :

$$[0,1]\times[0,1]-]0,1[\times]0,1[.$$

On utilise de nouveau l'égalité $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1+3x^2$, qui prouve que à y fixé, l'application $x \mapsto g(x,y)$ est strictement croissante. Donc,

$$\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \quad g(0,y) \leqslant g(x,y) \leqslant g(1,y).$$

• Le maximum de g sur $[0,1]^2$ est atteint en un point de la forme $(1,y)$ avec y dans $[0,1]$.
Or, $g(1,y) = 2-y+y^3$ et vous prouverez que le maximum de cette fonction de y sur $[0,1]$ est atteint pour $y=0$ ou $y=1$, et qu'il vaut 2.
• Quant au minimum, il est atteint en un point de la forme $(0,y)$, avec y dans $[0,1]$.
Or, $g(0,y) = -y+y^3$ et on prouve que cette fonction de y est minimum pour $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ce minimum vaut $g\left(0,\sqrt{3}\right) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
En résumé, le maximum de la fonction g sur $[0,1]^2$ est 2, il est atteint en $(1,0)$ et $(1,1)$.
Le minimum de la fonction g sur ce même ensemble est $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, il est atteint en $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

13 Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$.
La fonction

$$(x,y)\mapsto \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car

$$1+x^2+y^2+x^2y^2>0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2.$$

L'application f est la composée de deux applications différentiables, l'une sur $\mathbb{R}^2$, l'autre sur $]-1,1[$.
L'application f est différentiable sur $U=\{(x,y)\,;\,x\neq -y\}$ qui est la réunion de deux ouverts :

$$U_1=\{(x,y)\,;\,x>-y\} \quad \text{et} \quad U_2=\{(x,y)\,;\,x<-y\}.$$

$$\mathrm{d}\,f(x,y) = \varepsilon_i\left(\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y\right)$$

avec $\varepsilon_1=1$ et $\varepsilon_2=-1$.
Soit g l'application $(x,y)\mapsto \operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan} y$.
Sur U_i, on constate que la différentielle de $f-\varepsilon_i g$ est nulle.
On en déduit l'existence de deux réels k_1 et k_2 tels que

$$f-\varepsilon_i g = k_i.$$

Déterminons ces constantes.
Pour $x=1$ et $y=1$, on trouve : $k_1=0$.
Pour $x=-1$ et $y=-1$, on trouve : $k_2=0$.
On en déduit $f-\varepsilon_i g=0$.

14 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
On remarque que les variables x et y jouent le même rôle dans l'expression de $f(x,y)$.
Par conséquent, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,x)\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(y,x).$$

Avec MAPLE :

```
> f:=(x,y)->if x=0 and y=0 then 0
            else (x^3*y^3)/(x^2+y^2)
            fi;
> fx:=D[1](f);fxx:=D[1,1](f);fxy:=D[1,2](f);fxx
   x:=D[1,1,1](f);
```

$f := \mathbf{proc}(x,y)\ \mathbf{option}\ operator, arrow;$
$\quad \mathbf{if}\ x=0\ \mathbf{and}\ y=0\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ x^3\times y^3/(x^2+y^2)\ \mathbf{fi}$
$\quad \mathbf{end}$

$fx := \mathbf{proc}(x,y)\ \mathbf{option}\ operator, arrow;$
$\quad \mathbf{if}\ x=0\ \mathbf{and}\ y=0\ \mathbf{then}\ 0$
$\quad \mathbf{else}\ 3\times x^2\times y^3/(x^2+y^2)^2-2\times x^4\times y^3/(x^2+y^2)^2\ \mathbf{fi}$
$\mathbf{end}$

$fxx := \mathbf{proc}(x,y)\ \mathbf{option}\ operator, arrow;$
$\quad \mathbf{if}\ x=0\ \mathbf{and}\ y=0\ \mathbf{then}\ 0$
$\quad \mathbf{else}\ 6\times x\times y^3/(x^2+y^2)^2-14\times x^3\times y^3/(x^2+y^2)^3$
$\quad +8\times x^5\times y^3/(x^2+y^2)^4$
$\quad \mathbf{fi}$
$\mathbf{end}$

$fxy := \mathbf{proc}(x,y)\ \mathbf{option}\ operator, arrow;$
$\quad \mathbf{if}\ x=0\ \mathbf{and}\ y=0\ \mathbf{then}\ 0$
$\quad \mathbf{else}\ 9\times x^2\times y^2/(x^2+y^2)^2-6\times x^4\times y^2/(x^2+y^2)^3$
$\quad -6\times x^2\times y^4/(x^2+y^2)^3$
$\quad +8\times x^4\times y^4/(x^2+y^2)^4$
$\quad \mathbf{fi}$
$\mathbf{end}$

$fxxx := \mathbf{proc}(x,y)\ \mathbf{option}\ operator, arrow;$
$\quad \mathbf{if}\ x=0\ \mathbf{and}\ y=0\ \mathbf{then}\ 0$
$\quad \mathbf{else}\ 6\times y^3/(x^2+y^2)^2-54\times x^2\times y^3/(x^2+y^2)^3$
$\quad +96\times x^4\times y^3/(x^2+y^2)^4$
$\quad -48\times x^6\times y^3/(x^2+y^2)^5$
$\quad \mathbf{fi}$
$\mathbf{end}$

Le calcul des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 montre, en utilisant les coordonnées polaires, que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Vous vérifierez, que, comme l'indique MAPLE :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

Ceci prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
De même, en utilisant les expressions fournies par MAPLE et des coordonnées polaires, on a :

$$\lim_{(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\lim_{(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lim_{(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

Vous vérifierez aussi, que, comme l'indique MAPLE :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=0$$

Et : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0.$
Ceci prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

15 **1)** Les applications composantes de φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) La matrice jacobienne de φ en (x,y) est :

$$\mathrm{J}\,\varphi(x,y)=\begin{pmatrix} f'(x) & 1\\ 1 & f'(y)\end{pmatrix}.$$

3) Son jacobien est :

$$\mathrm{Det}(\mathrm{J}\,\varphi(x,y))=f'(x)f'(y)-1\neq 0.$$

Il reste à prouver que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
On fixe (u,v) dans $\mathbb{R}^2$ et on cherche (x,y) tel que :

$$u=y+f(x) \quad \text{et} \quad v=x+f(y).$$

Nécessairement, $v=x+f(u-f(x))$.
Étude de la fonction $x\mapsto g(x)=x+f(u-f(x))$.
Vous montrerez que la fonction g est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un unique x réel tel que $g(x)=v$.
On pose $y=u-f(x)$. Le couple (x,y) convient et est unique.
L'application φ est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

16 **1)** La fonction U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f vérifie $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}U(x,t)$. On dérive :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\mathrm{e}^{-t}U(x,t)+\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \quad ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) \quad ;$$

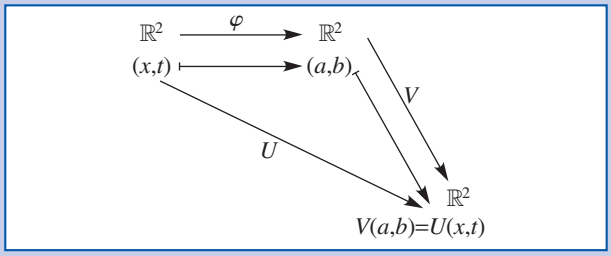
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=\mathrm{e}^{-t}U(x,t)-2\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)+\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t).$$

On en déduit (E_2) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)+U(x,t)-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)=0.$$

2) Pour comprendre la question, rappelons-nous la règle d'or, « le petit dessin ».



L'application U apparaît comme la composée des applications V et φ :

$$U=V\circ\varphi.$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est bijective et l'application réciproque φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
On en déduit que l'application $V=U\circ\varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
On dérive :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}(a,b)+2\frac{\partial^2 V}{\partial b\partial a}(a,b)+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}(a,b).$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}(a,b)-2\frac{\partial^2 V}{\partial b\partial a}(a,b)+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}(a,b).$$

On obtient l'équation différentielle :

$$(E_3) \ : \quad 4\frac{\partial^2 V}{\partial b\partial a}(a,b)+V(a,b)=0.$$

17 **1)** On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x,y)=(X,Y)=(ax+by,cx+dy).$$

La condition $ad-bc\neq 0$ entraîne que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et son jacobien est $ad-bc$.
La fonction φ est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on note g l'application :

$$g=f\circ\varphi^{-1}.$$

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie :

$$g(X,Y)=f(x,y).$$

On a donc $f=g\circ\varphi$. On dérive et on obtient :

$$X\left(\frac{\partial g}{\partial X}(X,Y)a+\frac{\partial g}{\partial Y}(X,Y)c\right)+Y\left(\frac{\partial g}{\partial X}(X,Y)b+\frac{\partial g}{\partial Y}(X,Y)d\right)=0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) En reportant les valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ dans l'équation donnée, on doit chercher une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour qu'il existe α, β, γ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} 2a\alpha + c\beta = 0 \\ 2b\alpha + (a+d)\beta + 2c\gamma = 0 \\ b\beta + 2d\gamma = 0 \end{cases}$$

La condition cherchée est la nullité du déterminant du système, c'est-à-dire : $4(a+d)(ad-bc)=0$. D'où : $a=-d$.
Lorsque $a=b=c=-d=1$, la fonction définie par $f(x,y)=-x^2+2xy+y^2$ convient.
3) On montre que, si f_1 est solution de l'équation et si g est $\mathcal{C}^1$, sur $\mathbb{R}$ alors $g\circ f_1$ est aussi solution.
La fonction $g\circ f_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial(g\circ f_1)}{\partial x}(x,y) = g'(f_1(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \quad ;$$
$$\frac{\partial(g\circ f_1)}{\partial y}(x,y) = g'(f_1(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y).$$

La fonction $g\circ f_1$ est solution de l'équation aux dérivées partielles.

18 On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(\rho,\theta) = (x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

et g l'application $f\circ\varphi$. Les applications φ et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On calcule : $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta)$
L'équation (**E**) devient :

$$\rho\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta) - g(\rho,\theta) = -\rho^2.$$

Puis, à θ fixé, on trouve :

$$g(\rho,\theta) = C(\theta)\rho - \rho^2 \qquad \textbf{(1)}$$

De plus, φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}\times]-\pi,\pi[$, donc C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.
Puis :

$$f(x,y) = C\left(2\,\text{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2).$$

19 **• Première méthode : utilisation de la formule de Taylor-Young**
On vérifie que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$. On calcule les dérivées partielles de f en (x,y).
Au point $(0,1)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0.$$

Le développement à l'ordre 2 est :

$$f(h,1+k) = 1 + hk + o\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

• Seconde méthode : utilisation des développements usuels

$$\begin{aligned}(1+k)^h &= \mathrm{e}^{h\,\ln(1+k)} = \mathrm{e}^{hk+ho(k)} \\ &= 1 + hk + ho(k) + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \\ &= 1 + hk + o\left(\|(h,k)\|^2\right).\end{aligned}$$

Cette méthode permet également d'obtenir un développement à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}(1+k)^h &= \exp\left(hk - \frac{1}{2}hk^2 + ho(k^2)\right) \\ &= hk - \frac{1}{2}hk^2 + o\left(\|(h,k)\|^3\right).\end{aligned}$$

20 Soit g la fonction :

$$g(x,y) = x\ln x + y\ln y + (3a-x-y)\ln(3a-x-y).$$

Soit $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, x>0, y>0 \text{ et } x+y<3a\}$.
Le seul point critique de g sur U est le point (a,a).
En ce point, on a $r=t=\dfrac{2}{a}$ et $s=\dfrac{1}{a}$.

$$rt - s^2 > 0 \quad \text{et} \quad r>0.$$

Il s'agit d'un minimum local strict et $g(a,a) = 3a\ln a$.
On prolonge g par continuité car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.
On pose

$$g(x,0) = x\ln x + (3a-x)\ln(3a-x).$$
$$g(0,x) = g(x,3a-x) = g(x,0)$$
$$\text{et} \quad g(0,0) = g(3a,0) = g(0,3a) = 3a\ln(3a).$$

La fonction prolongée, que l'on notera g, est continue sur le compact $\overline{U}$. Elle est bornée et atteint ses bornes.
Le minimum sur la frontière est atteint au milieu de chaque côté du triangle frontière et

$$g\left(0,\frac{a}{2}\right) = 3a\ln\left(3\frac{a}{2}\right) > 3a\ln a.$$

Le minimum de g est global et atteint en (a,a).
Le maximum sur la frontière est atteint au sommet du triangle frontière et

$$g(0,0) = 3a\ln(3a).$$

La borne supérieure de g sur U est $3a\ln(3a)$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

21 Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car ce sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
On étudie en (0, 0).
1) Vous montrerez que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1.$$

Si f est différentiable en $(0,0)$, on a :

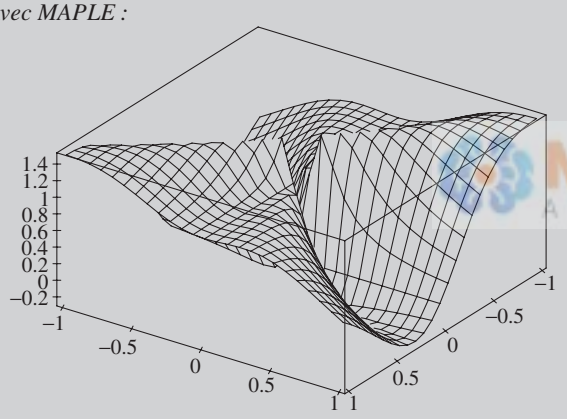
$$\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2 \quad f(h,k)=h+k+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)=0$.
Or, pour $(h,k)\neq(0,0)$ et $\|(h,k)\|=|h|+|k|$:

$$\frac{f(h,k)-(h+k)}{\|(h,k)\|}=-\frac{hk(h+k)}{\left(h^2+k^2\right)\left(|h|+|k|\right)}$$

Si $h=k>0$, ce quotient vaut $-\dfrac{1}{2}$.
La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Avec MAPLE :



2) Vous montrerez que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Si f est différentiable en $(0,0)$:

$$\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2 \quad f(h,k)=\|(h,k)\|\varepsilon(h,k).$$

Or, pour $(h,k)\neq(0,0)$ et $\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}$:

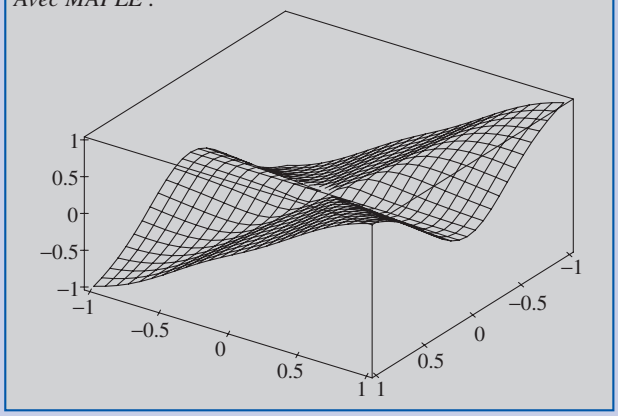
$$\frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|}=\frac{|h^3k|}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

De l'inégalité $|hk|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(h^2+k^2\right)$, on déduit :

$$\frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2}.$$

La fonction f est différentiable en $(0,0)$.

Avec MAPLE :



22 **1)** Pour évaluer la différence $f(x+h)-f(x)$, on introduit la fonction φ définie sur [0,1] par : $\varphi(t)=f(x+th)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] et vérifie le théorème des accroissements finis :

$$\exists\, c\in\,]0,1[\quad \varphi(1)-\varphi(0)=f(x+h)-f(x)=\varphi'(c).$$

On veut comparer $\varphi'(c)$ et $\varphi'(0)=\mathrm{d}\,f(x)(h)$.
Or, pour tout (λ,t_1,t_2) de $[0,1]^3$:

$$\varphi(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)=f(\lambda(x+t_1h)+(1-\lambda)(x+t_2h))$$

$$\leqslant\lambda\, f((x+t_1h))+(1-\lambda)\, f(x+t_2h)$$

$$=\lambda\varphi(t_1)+(1-\lambda)\varphi(t_2).$$

La fonction φ est convexe, sa dérivée est croissante. D'où le résultat.
2) L'application $\mathrm{d}\,f$ est continue de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. A est l'image réciproque du fermé $\{0\}$, il est fermé.
On suppose $A\neq\varnothing$. D'après la question **1)**, tout point de A est un minimum absolu de f.
On note $m=\inf\{f(x);\,x\in U\}$.
Soit x_1 et x_2 deux points distincts de A et λ dans $]0,1[$:

$$m\leqslant f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda\, f(x_1)+(1-\lambda)\, f(x_2)=m.$$

Donc $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in A$. A est convexe.

23 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x,y+2\pi)=f(x+2\pi,y+2\pi)=f(x,y).$$

Le domaine $\Delta=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continue. Elle possède sur ce compact au moins un minimum et un maximum. De plus :

$$\max_{(x,y)\in\Delta} f=\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f \quad \text{et} \quad \min_{(x,y)\in\Delta} f=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f.$$

Les dérivées partielles de f s'annulent en un extremum :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin x+\sin(x+y)\,;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\sin y+\sin(x+y).$$

On résout sur Δ. Le maximum de f sur $\mathbb{R}^2$ est $\dfrac{3}{2}$ et son minimum -3.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

24 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$.

Le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ admet pour unique solution (a,a).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,a)=2a^{-2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,a)=2a^{-2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,a)=a^{-2}.$$

Regardons la matrice $A=\begin{pmatrix} 2a^{-2} & a^{-2} \\ a^{-2} & 2a^{-2} \end{pmatrix}$

Puisque $rt-s^2=3a^{-4}>0$, et $r=2a^{-2}>0$, au point (a,a) la fonction f admet un minimum local égal à 3.

$$\lim_{||(x,y)||\mapsto+\infty} f(x,y)=+\infty,$$

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,\alpha)} f(x,y)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\mapsto(\beta,0)} f(x,y)=+\infty$$

Par conséquent :

$\exists\,\eta>0 \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \quad x<\eta$ ou $y<\eta \Rightarrow f(x,y)\geqslant 4$

$\exists\,R>0 \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt{x^2+y^2}>R \Rightarrow f(x,y)\geqslant 4.$

Soit $r=\min\left(n,\dfrac{1}{R}\right)$. $\Delta=\left[r,\dfrac{1}{r}\right]^2$ est un compact tel que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\Delta \quad f(x,y)\geqslant 4$.

On en déduit que la fonction admet un minimum global, atteint en un point de Δ qui ne peut être que (a,a).

25 **1)** $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta).$$

2) Soit (x_0,y_0) dans U tel que $f(x_0,y_0)\neq 0$.

On suppose que a et b sont degrés d'homogénéité de f.

$$\forall\,\lambda>0 \quad \lambda^a f(x_0,y_0)=\lambda^b f(x_0,y_0).$$

D'où $a=b$.

3) $\forall\,\lambda>0 \quad f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$.

On dérive par rapport à x :

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

D'où le résultat.

4) Les dérivées partielles secondes de f sont $(\alpha-2)$-homogènes.

Il en est de même de son laplacien. Or, $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ est 0-homogène. Donc $\alpha=2$.

On pose :

$$F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2 f(\cos\theta,\sin\theta)=r^2\varphi(\theta).$$

On utilise la *question* 1.

$$(\Delta f)(r\cos\theta,r\sin\theta)=4\varphi(\theta)+\varphi''(\theta)=\cos^2\theta.$$

Puis : $\varphi(\theta)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{\theta}{8}\sin 2\theta+a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$.

26 La forme de l'équation donnée suggère l'emploi de coordonnées polaires.

Soit f une solution de l'équation et $(x,y)\neq(0,0)$.

Au voisinage de (x,y), on pose :

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \quad \text{et} \quad g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Vous vérifierez que l'équation donnée s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\frac{\sin r^2}{r}.$$

On en déduit :

$$g(r,\theta)=\int_0^r\frac{\sin u^2}{u}\,\mathrm{d}\,u+h(\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

pour tout (r,θ) de U.

La fonction h est continue, 2π-périodioque, donc bornée.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^r\frac{\sin u^2}{u}\,\mathrm{d}\,u$ admet une limite finie lorsque r tend vers $+\infty$ car $\displaystyle\int_0^r\frac{\sin u^2}{u}\,\mathrm{d}\,u=\int_0^{r^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

La fonction $r\mapsto\displaystyle\int_1^r\frac{\sin u^2}{u}\,\mathrm{d}\,u$ est donc bornée.

On en déduit que la fonction f est bornée.

27 L'application f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

On calcule le laplacien de f. La condition imposée se traduit par :

$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

$$-\frac{2\cos x}{\mathrm{ch}^3 y}g'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,y}\right)+\frac{\mathrm{ch}^2 y-\cos^2 x}{\mathrm{ch}^4 y}g''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,y}\right)=0.$$

On pose $u=\dfrac{\cos x}{\mathrm{ch}\,y}$. Lorsque (x,y) décrit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, u décrit $]-1,+\infty[$.

La fonction g doit donc vérifier la condition :

$$\forall\,u>1 \quad -2ug'(u)+\left(1-u^2\right)g''(u)=0.$$

Vous montrerez que la résolution de cette équation différentielle conduit à :

$$g(u)=a\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)+b,$$

où a et b sont des réels quelconques.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

28 **1)** Immédiat.

2) • On suppose la condition vérifiée par f. Elle se traduit par :

$$f(z) - f(z_0) = l(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

La fonction F vérifie :

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (x - x_0)l(z_0) + \mathrm{i}(y - y_0)l(z_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right).$$

Donc, la fonction F est différentiable en (x_0, y_0) et :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = l(z_0) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{i}\, l(z_0).$$

f est holomorphe sur U.

• Réciproquement, si f est holomorphe sur U, on a :

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= F(x, y) - F(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(z - z_0) + o(z - z_0). \end{aligned}$$

Le quotient $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite $l(z_0) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ lorsque z tend vers z_0.

De plus, la fonction $z \mapsto l(z)$ est continue sur U.

3) Puisque $f = \mathrm{Re}(f)$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i}\,\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

L'ouvert U est convexe, donc f est constante sur U.

29 L'application φ définie par $(x, y) \mapsto (u, v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U, bijective de U sur U.

Son jacobien est $-2\dfrac{x}{y}$, non nul sur U.

L'application φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur U. Soit $F = f \circ \varphi^{-1}$.

L'équation $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ devient :

$$4uv\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - 2v\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

$\dfrac{\partial F}{\partial v}$ est solution de l'équation différentielle $2ug' - g = 0$ de fonction inconnue g de la variable u.

On obtient $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) = K(v)\sqrt{u}$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Puis $F(u, v) = A(v)\sqrt{u} + B(u)$ où A et B sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Les solutions sont de la forme

$$f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + B(xy)$$

où A et B sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}.(\mathbb{R}^{-*})^2$.

Les solutions sur chaque ouvert $\mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{-*}$ sont de la forme :

$$(x, y) \mapsto A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{|xy|} + B(xy)$$

où A et B sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Chapitre 13

1 Le champ de scalaires f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 2\lambda\, x_i (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1}.$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_1, \ldots, x_n) = 2\lambda\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1}(x_1, \ldots, x_n)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) = 2\lambda\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1} + 4\lambda\,(\lambda - 1)x_i^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 2}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} \Delta(f)(x_1, \ldots, x_n) &= 2n\lambda\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1} \\ &\quad + 4\lambda\,(\lambda - 1)(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1} \\ &= 2\lambda\,(n + 2\lambda - 2)(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

2 Ce champ de vecteurs est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ et :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (4x^3, 2xyz, 1)\ ; \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (2y, x^2 z, 2y)\ ; \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (2z, x^2 y, 2z). \end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{div}\,(f)(x, y, z) = 4x^3 + x^2 z + 2z.$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f)(x, y, z) = (2y - x^2 y, 2z - 1, 2xyz - 2y).$

3 **1)** Le théorème de Schwarz s'applique et, en notant :

$$\vec{f}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)),$$

on a :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)(a) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)(a) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)(a) = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) De même :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ g\right)(a) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)(a) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(a),\right.$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(a) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)(a),$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(a) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(a)\right) = \vec{0}.$$

4 **1)** En notant x, y, z les coordonnées de $\vec{u}$, on peut écrire :

$$\vec{f}(\vec{u}) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

L'application $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ et :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 2\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

D'où $\quad \text{div}\,(\vec{f})(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

et $\quad \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{f})(x,y,z) = (0,0,0)$.

2) On cherche un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ tel que : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\overrightarrow{F}) = \vec{f}$.
Une première condition est que :

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

On intègre par rapport à x. On obtient :

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + g(y,z),$$

avec g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Une deuxième condition est

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}.$$

Elle se traduit par $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$, soit $g(y,z) = h(z)$.
La troisième condition est

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Elle conduit à $h'(z) = 0$. On obtient :

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2).$$

La solution n'est pas unique.

5 On note ω la forme différentielle :

$$\omega = (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z.$$

Par définitition de l'intégrale curviligne :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_0^{2\pi} \big[(y(t)-z(t))x'(t) + (z(t)-x(t))y'(t) + (x(t)-y(t))z'(t)\big]\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-R^2 + hRt(\cos t + \sin t) + hR(\cos t - \sin t)\right]\mathrm{d}t$$
$$= -2\pi R(h+R).$$

6 Vous vérifierez que, en notant :

$$P(x,y,z) = 3x^2y + z^3, \quad Q(x,y,z) = 3y^2z + x^3,$$
$$R(x,y,z) = 3xz^2 + y^3,$$

on a :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)\ ; \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)\ ;$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z).$$

De plus, $\mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé. La forme différentielle ω est donc exacte.
On cherche une fonction f telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z)\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z)\ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

Une première condition est que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2y + z^3.$$

Intégrons par rapport à

$$x : f(x,y,z) = x^3y + xz^3 + g(y,z),$$

où g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Puis f doit vérifier $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2z + x^3$. Soit :

$$x^3 + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3y^2z + x^3.$$

On en déduit :

$$g(y,z) = y^3z + h(z),$$

où h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Puis :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3xz^2 + y^3 = 3xz^2 + y^3 + h'(z).$$

D'où :

$$f(x,y,z) = x^3y + xz^3 + y^3z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7 **1)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,y}{y^2+x^2}\right)\mathrm{d}\,x = \int_{\frac{1}{a}}^{a}\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^1 \mathrm{d}\,x$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(a)$$

car $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\operatorname{Arctan}(u)\,\mathrm{d}\,u}{u}$; donc :

$$2\int_{\frac{1}{a}}^{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\mathrm{d}\,x}{x}.$$

8 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\right)\mathrm{d}\,t = \int_0^{\pi}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x-\cos t}\right)\mathrm{d}\,t$

$$= \int_a^b\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\,t}{x-\cos t}\right)\mathrm{d}\,x$$

(en appliquant le théorème de Fubini)

$$= \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right).$$

9 Pour tout y de $[0,+\infty[$, la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, l'application $(y \mapsto \mathrm{e}^{-y^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc :

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-y^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

$$= \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)^2.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_{\mathbb{R}^+\times[0,\frac{\pi}{2}]}\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta.$$

Un calcul analogue donne :

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times[0,\frac{\pi}{2}]}\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10 La fonction $r : \theta \mapsto \dfrac{\cos(2\theta+\frac{\pi}{4})}{\cos\theta}$ est définie sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\,(\mathrm{mod}\,\pi)$.

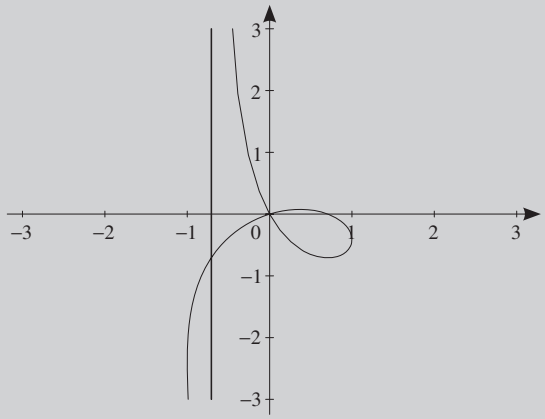
Elle admet 2π comme période et : $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$. La courbe s'obtient en totalité en effectuant l'étude sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.

Lorsque θ tend vers $-\dfrac{\pi}{2}^+$, $r(\theta)\cos\theta$ tend vers $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}^+$. La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Elle se trouve à droite de l'asymptote.

Lorsque θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}^-$, $r(\theta)\cos\theta$ tend vers $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}^-$. La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Elle se trouve à gauche de l'asymptote.

Avec MAPLE :

```
> with(plots):
  polarplot(cos(2*t+Pi/4)/cos(t),
  t=-Pi/2..Pi/2,view=[-3..3,-3..3]);
```



La boucle de la strophoïde est décrite pour θ variant de $-\dfrac{3\pi}{8}$ à $\dfrac{\pi}{8}$.

Son aire est :

$$A = \int_{-3\pi/8}^{\pi/8}\left(\int_0^{\cos(2\theta+\frac{\pi}{4})/\cos\theta} r\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3\pi/8}^{\pi/8}\frac{\cos^2(2\theta+\frac{\pi}{4})}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

Avec MAPLE :

```
> int(cos(2*t+Pi/4)^2/cos(t)^2,
  t=-3*Pi/8..Pi/8);
```

$$\frac{1}{2}\frac{-2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+4\sqrt{2+\sqrt{2}}\ln(2)-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\ln(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{-2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}\ln(2)-2\sqrt{2-\sqrt{2}}\ln(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

```
> simplify(");
```

$$(\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+2$$
$$-\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ln(2+\sqrt{2})$$
$$+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ln(2-\sqrt{2}))/(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}})$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

11 On remarque que, pour tout (x, y) de D :

$$\frac{1}{b} \leqslant xy \leqslant b \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant a.$$

On pose

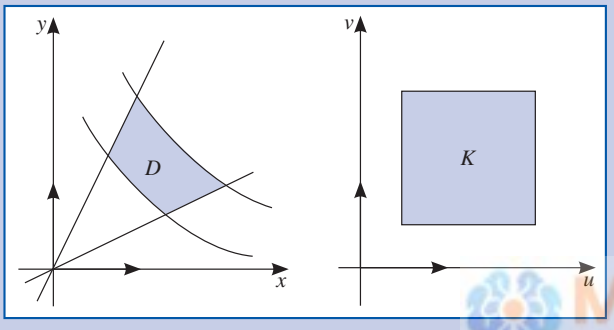
$$U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \quad K = \left[\frac{1}{b}, b\right] \times \left[\frac{1}{a}, a\right],$$

$$u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x}.$$

• L'application :

$$\varphi : \begin{cases} U & \to U \\ (x, y) & \mapsto (u, v) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U.$$

• Par construction, $\varphi(D) = K$.



La technique de calcul d'intégrale double par changement de variables que nous avons présentée permet de déterminer $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à l'aide des variables (u, v) lorsque l'application :

$$(u, v) \mapsto (x, y)$$

est connue. Ici la situation est inversée.
On va prouver que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert U dans lui-même.
• Il est aisé de prouver que :

$$u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Donc φ est une bijection de U dans lui-même.
• On a déjà signalé que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. En tout point (x, y) de U, le jacobien de φ est :

$$\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \neq 0.$$

Ceci prouve que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans lui-même.
• La formule d'inversion des matrices jacobiennes vue au chapitre précédent prouve que le jacobien de φ^{-1} est :

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)} = \frac{1}{2v}.$$

• Puisque $\varphi(D) = K$, l'aire de D est :

$$\begin{aligned} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_K \left|\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{1/b}^{b} \left(\int_{1/a}^{a} \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u \\ &= \left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a). \end{aligned}$$

12 **• Première méthode**
Par raison de symétrie de la fonction et du domaine :

$$\begin{aligned} \iint_K (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_K x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_K y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} y\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

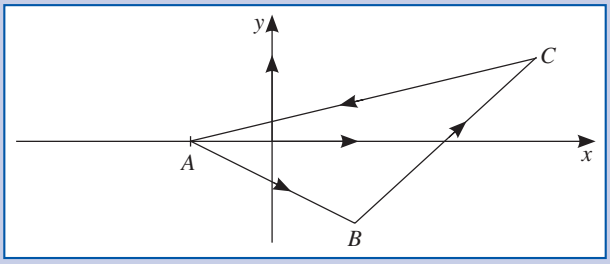
• Deuxième méthode
En utilisant les coordonnées polaires.

$$\iint_K (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\right] \left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{2}{3}.$$

• Troisième méthode
La formule de Green-Riemann permet d'écrire, en notant D le bord orienté dans le sens positif du domaine K :

$$\begin{aligned} \iint_K (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_D \left(\frac{x^2}{2} + xy\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1 - y^2}{2} + \sqrt{1 - y^2}\,y\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[(y - \frac{y^3}{3}) - \frac{2}{3}(1 - y^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

13 Soit K le domaine compact délimité par le triangle et D le bord du triangle orienté dans le sens positif.



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'aire du triangle est :

$$\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{1} x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 x\,\mathrm{d}x + \int_3^{-1} x\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 3 \text{ unités d'aire.}$$

Vous vérifierez que l'aire est aussi : $\left|\frac{1}{2}\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$.

Chapitre 14

1 On reconnaît une équation différentielle autonome.

L'application $y \mapsto \mathrm{sh}\, y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

Pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution maximale φ, définie sur un intervalle ouvert I, telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

En particulier, l'application nulle est solution de l'équation différentielle. C'est la seule solution maximale qui s'annule. On cherche donc les solutions maximales de l'équation différentielle qui ne s'annulent pas.

Une telle solution vérifie $\frac{y'}{\mathrm{sh}\, y} = 1$.

Puis, en intégrant, $\ln\left|\left(\frac{\mathrm{th}\frac{y}{2}}{\mathrm{th}\frac{y_0}{2}}\right)\right| = x - x_0$.

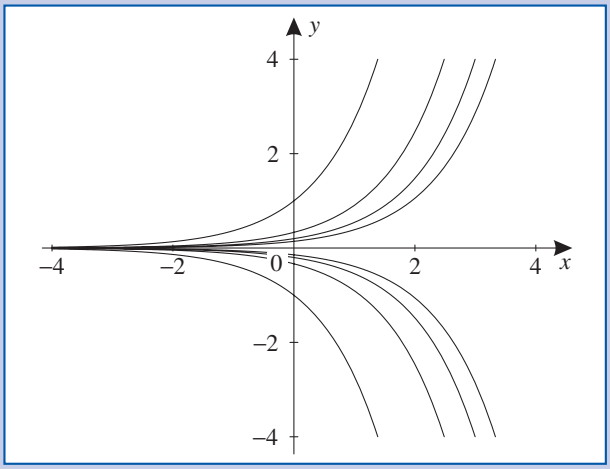
D'où $\mathrm{th}\frac{y}{2} = \mathrm{th}\frac{y_0}{2}\mathrm{e}^{x-x_0}$.

Et $y = 2\mathrm{Argth}\left[\mathrm{th}\frac{y_0}{2}\mathrm{e}^{x-x_0}\right]$.

Le domaine de définition de ces fonctions est :

$$\left]-\infty, x_0 - \ln\left|\mathrm{th}\frac{y_0}{2}\right|\right[.$$

Nous obtenons ainsi toutes les solutions maximales, hors la solution nulle.



2 On reconnaît une équation différentielle qui est une équation autonome, ainsi qu'une équation à variables séparables.

L'application $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction nulle est solution de l'équation différentielle.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Soit φ une solution maximale de l'équation différentielle s'annulant en un point t_0. D'après l'unicité de la solution maximale vérifiant $x(t_0) = 0$, nous savons que $\varphi = 0$.

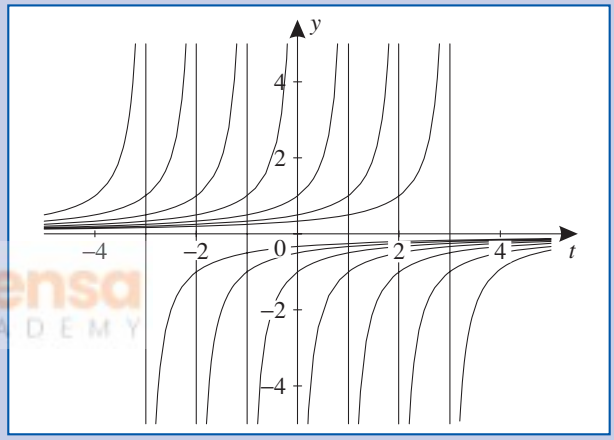
Les autres solutions maximales ne s'annulent donc pas. On note x l'une de ces solutions. On a $\frac{x'}{x^2} = 1$.

Intégrons : $\exists C \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{x} = t + C$.

Puis, $x = -\frac{1}{t+C}$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{t \mapsto -\frac{1}{t+C} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}\right\} \cup \{0\}$$



3 On reconnaît une équation différentielle autonome qui est aussi une équation à variables séparables.

L'application $t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Pour tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale φ telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Les solutions constantes sont les solutions de la forme $\varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si y est une solution non constante de l'équation différentielle, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $y \in]k\pi, (k+1)\pi[$.

$\sin y$ ne s'annule pas et garde un signe constant, ainsi que y'.

Les solutions de l'équation différentielle sont strictement monotones.

On détermine les solutions non constantes de l'équation différentielle :

$$y' = \sin y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \mathrm{d}x.$$

On intègre :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \ln\left(\left|\tan\frac{y}{2}\right|\right) = x - c.$$

Puisque y prend ses valeurs dans $]k\pi, (k+1)\pi[$, $\tan\frac{y}{2}$ garde un signe constant.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $k = 2p$, on écrit :

$$\tan\left(\frac{y}{2} - p\pi\right) = e^{x-c}, \quad \text{avec} \quad \frac{y}{2} - p\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

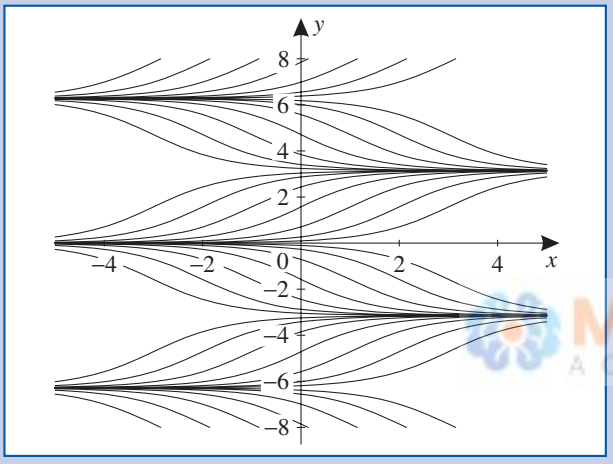
D'où $y = 2p\pi + 2\text{Arctan}\left(e^{x-c}\right) = k\pi + 2\text{Arctan}\left(e^{x-c}\right)$.
Pour $k = 2p+1$, on a :

$$\tan\left(\frac{y}{2} - (p+1)\pi\right) = -e^{x-c}, \text{ avec } \frac{y}{2} - (p+1)\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$$

d'où $y = 2(p+1)\pi - 2\text{Arctan}\left(e^{x-c}\right)$

$$= k\pi + \pi - 2\text{Arctan}\left(e^{x-c}\right).$$

On appelle C_0 la courbe d'équation $y = 2\text{Arctan}\left(e^{x}\right)$. Toutes les autres courbes intégrales des solutions non constantes s'obtiennent soit par translation de vecteur $c\vec{i} + 2p\pi\vec{j}$ ($c \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$) soit en appliquant aux courbes ainsi obtenues la symétrie par rapport à (Ox).



4 On remarque que $x\,dx + y\,dy = r\,dr$.
De plus, $\left(x^2 - y^2\right)dx + 2xy\,dy = r^2(\cos\theta\,dr + \sin\theta r\,d\theta)$.
L'équation différentielle **(1)** équivaut à :

$$r^4(dr)^2 = r^4(\cos\theta\,dr + \sin\theta r\,d\theta)^2$$

puis à :

$$dr = \varepsilon(\cos\theta\,dr + \sin\theta r\,d\theta), \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

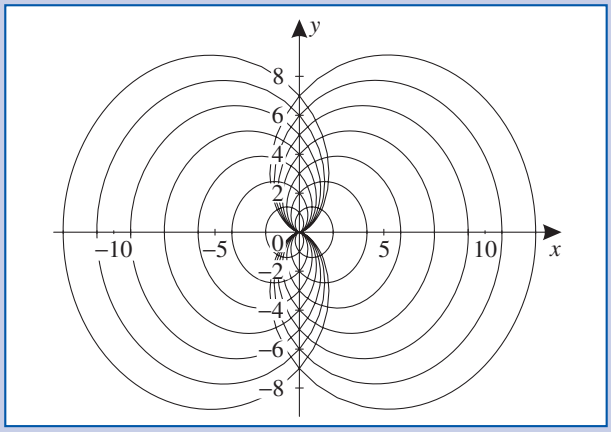
Le changement de θ en $\theta + \pi$ équivaut à celui de ε en $-\varepsilon$.
On résout donc l'équation différentielle :

$$dr = (\cos\theta\,dr + \sin\theta r\,d\theta)$$

puis on effectuera une symétrie par rapport à O.
L'équation différentielle devient $(1 - \cos\theta)\,dr = \sin\theta r\,d\theta$.
Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables.
Les solutions telles que θ est constant sont les solutions :

$$\theta = 2k\pi, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'application $(\theta, r) \mapsto \sin\theta\dfrac{r}{1-\cos\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Pour tout point (θ_0, r_0) tel que $\theta_0 \neq 0 \pmod{2\pi}$, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle telle que $\varphi(\theta_0) = r_0$.
On cherche les solutions pour lesquelles $1 - \cos\theta$ ne s'annule pas.
L'équation s'écrit $\dfrac{dr}{r} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,d\theta$.
En intégrant, $\exists\, c \in \mathbb{R} \quad r = c(1 - \cos\theta)$.
Les graphes des courbes intégrales sont des arcs de cardioïdes.
Les solutions maximales sont les arcs limités par les tangentes verticales.



5 **1)** On appelle I le domaine de définition de f et g la fonction définie sur $-I$ par $g(x) = -f(-x)$.
Vous vérifierez que g est solution de l'équation différentielle.
Or $g(0) = 0$. Donc $g = f$.
On en déduit que $I = -I$ et que f est impaire.
2) On suppose que I est borné et on pose $I =]-a, a[$, puisqu'on sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, que I est ouvert.
La fonction f est croissante sur I. Donc :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) \geqslant 0.$$

Puis, $\forall x \geqslant 0 \quad f'(x) \in]0, 1[$.
On intègre $\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant x$.
La fonction f est alors croissante et majorée sur I. Elle admet une limite réelle l lorsque x tend vers a. La fonction f' tend vers e^{-al} dans ces conditions et f peut être prolongée en a en une solution de l'équation différentielle. Ceci est absurde, car f est une solution maximale de l'équation différentielle.
On en déduit que $I = \mathbb{R}$.
3) Puisque la fonction f est strictement croissante, on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 1 \quad 0 < f'(x) \leqslant e^{-xf(1)}$$

Or $f(1) > 0$. La fonction f' est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que f admet une limite réelle l en $+\infty$.
Plus précisément, $\forall x \geqslant 0 \quad f(x) < l$.
D'où, $\forall x \geqslant 0 \quad f'(x) \geqslant e^{-xl}$.
On intègre :

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx = l \geqslant \int_0^\infty e^{-xl}\,dx = \frac{1}{l}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit $l > 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel u tel que $f(u) = 1$. De plus :

$$\forall x > u \quad f'(x) < \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc, en intégrant :

$$\int_u^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = l - 1 < \int_u^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}^u} < \frac{1}{e}\cdot$$

car $1 = f(u) \leqslant u$.

Soit $l < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot$

6 **1)** L'application $(t, x) \mapsto \sin(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Pour tout couple (t_0, x_0) de réels, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle telle que :

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

De plus, cette application φ est définie sur un intervalle ouvert I et vérifie :

$$\forall t \in I \quad |\varphi'(t)| \leqslant 1.$$

On suppose l'intervalle I borné supérieurement et on note $a = \sup I$. a n'appartient pas à I. Mais la fonction φ' est intégrable sur $[t_0, a[$. La fonction $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ admet une limite lorsque t tend vers a. La fonction φ admet donc une limite réelle en a. Prolongée par continuité en a, elle est aussi dérivable à gauche en a et $\varphi'(a) = \sin(a\varphi(a))$. Elle est solution de l'équation différentielle, ce qui contredit notre hypothèse.

On montre de même que I n'est pas borné inférieurement. Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) On pose :

$$y_b(t) = x_b(-t).$$

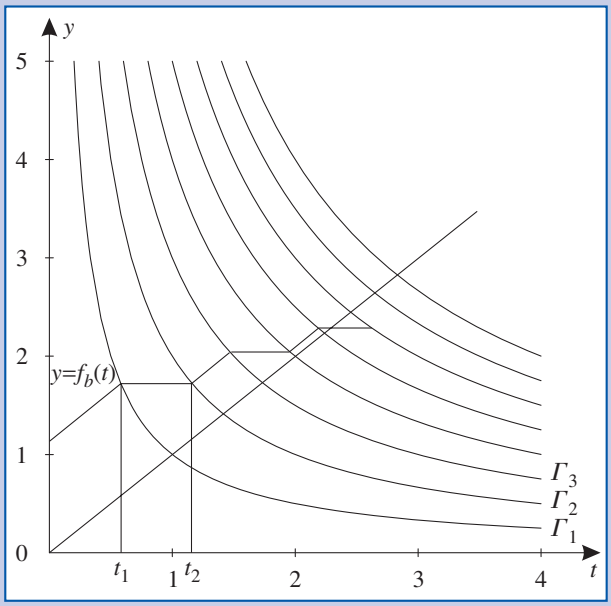
La fonction y_b est définie sur $-I$, elle vérifie l'équation différentielle et $y_b(0) = b$. Donc $I = -I$, $y_b = x_b$. La fonction x_b est paire.

De plus, la fonction $-x_b$ est solution de l'équation différentielle. D'où :

$$x_{-b} = -x_b.$$

3) On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que $x_b(t_0) = 0$. La fonction nulle est solution de l'équation différentielle. D'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que x_b est l'application nulle. Ceci est faux, donc x_b est à valeurs strictement positives.

4)



On note

$$I = \{t \geqslant 0\,;\, \forall u \in [0, t] \quad x_b(u) \leqslant f_b(u)\}\,.$$

On sait que $x_b(0) = f_b(0) = 1$ et que $x_b'(0) = 0$ et $f_b'(0) = 1$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] \subset I$. On suppose I majoré et on note $\theta = \sup I$. La continuité des fonctions x_b et f_b entraîne que θ est dans I et $x_b(\theta) = f_b(\theta)$.

Or l'application f_b est dérivable à droite en tout point et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f_b'(t^+) \geqslant \sin(t f_b(t)).$$

Plus précisément :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad f_b'(t^+) > \sin(t f_b(t)).$$

Il existe donc un voisinage à droite de θ sur lequel :

$$x_b{}'(t) < f_b{}'(t).$$

Ce voisinage est contenu dans I et $I = \mathbb{R}^+$.

5) On appelle, pour k dans $\mathbb{N}$, (t_k, y_k) les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction f_b, avec Γ_k, et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(t) = f_b(t) - t.$$

Alors :

$$t_1 y_1 = \pi,\, y_2 = y_1,\, t_2 y_2 = 2\pi.$$

Donc $t_2 = 2t_1$.

On montre de même que, pour tout entier k impair :

$$t_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) t_k.$$

et

$$\varphi(t_{k+1}) = y_{k+1} - t_{k+1} = y_k - t_k - \frac{1}{k} t_k. = \varphi(t_k) - \frac{1}{k} t_k.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Que se passe-t-il si k est pair ?

$\varphi(t_{k+1}) = y_{k+1} - t_{k+1} = [y_k + (t_{k+1} - t_k)] - t_{k+1} = y_k - t_k = \varphi(t_k)$.

En définitive, pour tout entier naturel j :

$$\begin{cases} \varphi(t_{2j+2}) - \varphi(t_{2j+1}) = -\dfrac{1}{2j+1} t_{2j+1} \\ \varphi(t_{2j+1}) - \varphi(t_{2j}) = 0 \end{cases}$$

On additionne ces expressions :

$$\varphi(t_{2j+2}) - \varphi(t_{2j}) = -\frac{1}{2j+1} t_{2j+1} < -\frac{1}{2j+1} t_1.$$

D'où :

$$\varphi(t_{2n+2}) < -\left(\sum_0^n \frac{1}{2j+1}\right) t_1 + b.$$

Or, la série $\sum \dfrac{1}{2j+1}$ diverge et $\varphi(0) > 0$.
Il existe donc $u > 0$, tel que $f_b(u) = 0$.
D'après la question **4)**, on en déduit qu'il existe $t_0 > 0$, tel que :

$$x_b(t_0) = t_0.$$

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\psi(t) = x_b(t) - t.$$

Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En effet, les points tels que $x_b'(t) = 1$ sont des points isolés.

Chapitre 15

1 On a : $x'(t) = (2 + t^2)\sin(t)$ et $y'(t) = (6t + t^3)\sin(t)$.
Les points stationnaires sont obtenus pour $t = k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.
En posant $t = k\pi + u$, on prouvera que :

$$x(k\pi + u) = (-1)^k \left[-k^2\pi^2 + \left(1 + \frac{k^2\pi^2}{2}\right) u^2 + \frac{2k\pi}{3} u^3 + o\left(u^3\right)\right],$$

$$y(k\pi + u) = (-1)^k \left[-k^3\pi^3 + \left(3k\pi + \frac{k^3\pi^3}{2}\right) u^2 + \left(2 + k^2\pi^2\right) u^3 + o(u^3)\right].$$

On a uniquement des rebroussements de première espèce.

2 Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ et ρ est $2\pi-$ périodique.

On effectue l'étude sur $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Étude du signe de ρ

θ	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
ρ	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	0	$+$	0

Étude des branches infinies

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = -\infty ; \quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = +\infty.$$

On a une direction asymptotique verticale.

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = 2\sin\theta(1 + \sin\theta)(1 + 2\cos\theta)$$
$$= 4 - 8\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$:

- la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à la courbe ;
- la courbe est à gauche de l'asymptote lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures ;
- la courbe est à droite de l'asymptote lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

Déterminons les points multiples. Ils s'obtiennent en résolvant :

$$\theta_1 \in [0, \pi] ; \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi ; \quad \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2).$$

D'où :

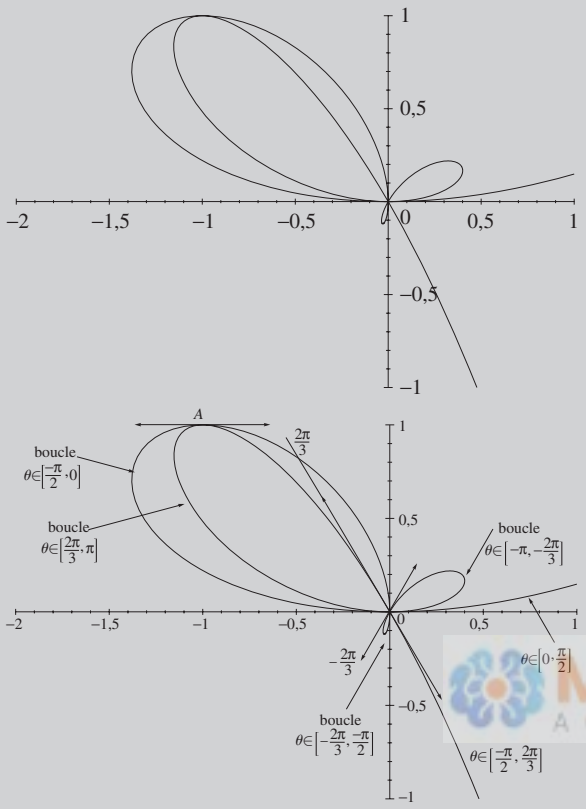
$$\frac{\sin 2\theta_1(1 + 2\cos\theta_1)}{1 - \sin\theta_1} = -\frac{\sin 2\theta_1(1 - 2\cos\theta_1)}{1 + \sin\theta_1}$$

Si $\sin 2\theta_1 = 0$, $\theta_1 \in \{0, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$. C'est le point O.

Si $\sin 2\theta_1 \neq 0$, on obtient $\theta = -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ et $A(-1, 1)$.

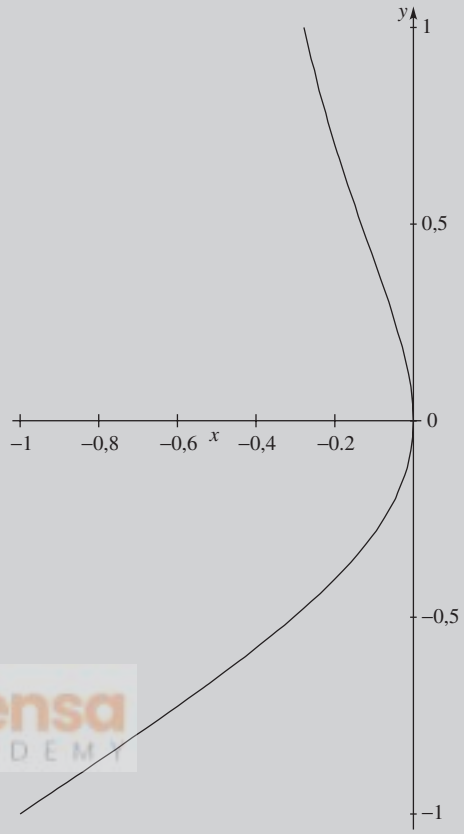
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

```
> with(plots) :
polarplot([sin(2*t)*(1+2*cos(t))
/(1-sin(t)),t,t=-Pi..Pi],
view=[-2..1,-1..1],numpoints=3000,
scaling=constrained) ;
```



Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :implicitplot
(x*exp(y)+y^2*exp(x),x=-1..1,
y=-1..1,scaling=constrained) ;
```



3 En un point $M(x, e^x)$ du graphe, le rayon de courbure est :

$$R(x) = \frac{(1 + e^{2x})^{3/2}}{e^x}.$$

R atteint son minimum en $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ et ce minimum est :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4 La fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = xe^y + y^2e^x$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus :

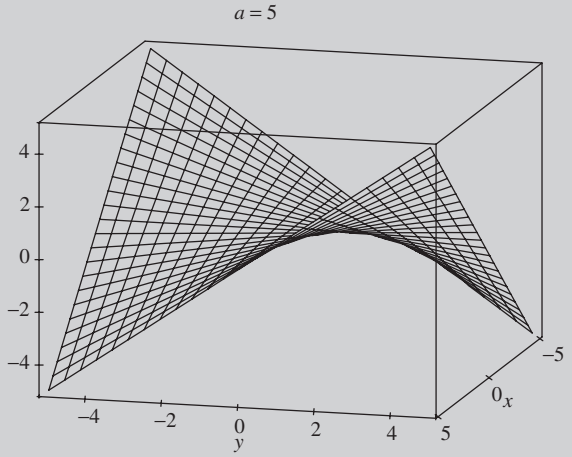
$$F(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, F(0, 0) = (1, 0).$$

La normale en $(0, 0)$ est dirigée par $(1, 0)$. Donc la tangente est verticale.
De plus $F(x, y) = 0 \Rightarrow x \leqslant 0$. La courbe est à gauche de la tangente.

5 **1)**

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d(x*y/5,x=-5..5,y=-5..5,
title='a =5',orientation=[15,73],
axes=BOXED) ;
```



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

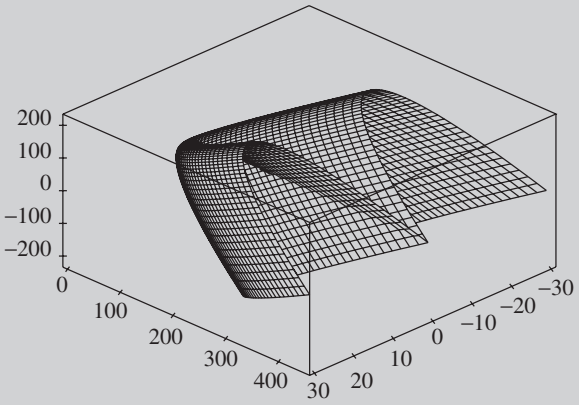
2) La surface (S) est définie par une équation cartésienne explicite. Tout point de (S) est régulier. Le plan T_0 tangent à S au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$xy_0 + yx_0 - az - x_0y_0 = 0.$$

6 **1)**

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d([u-v,u^2+v^2,u^2-v^2],u=-15..15,
v=-15..15,numpoints=4000,axes=BOXED) ;
```



2) Soit (u, v) et (u', v') deux couples distincts de réels tels que :

$$\varphi(u, v) = \varphi(u', v').$$

On trouve $u' = -u$ et $v' = -v$. L'ensemble des points multiples est la demi-droite $\{(0, y, 0); y > 0\}$.

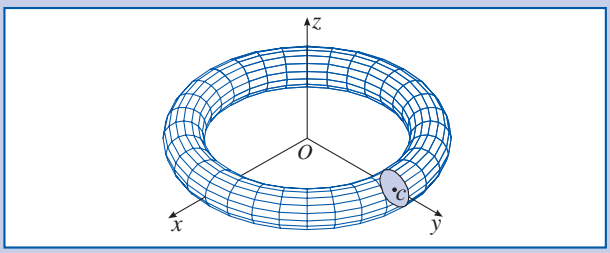
3) Les vecteurs :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, 2u) \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial \varphi}}{\partial v}(u, v) = (-1, 2v, -2v)$$

forment une famille liée si, et seulement si, $u = v = 0$. Tous les points de S, hors O, sont réguliers. En un tel point, $\varphi(u, v)$, le plan tangent à S a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - (u - v) & 1 & -1 \\ y - (u^2 + v^2) & 2u & 2v \\ z - (u^2 - v^2) & 2u & -2v \end{vmatrix} = 0.$$

7



On utilise les coordonnées cylindriques.

Dans le plan $O + \mathbb{R}\overrightarrow{u}(\theta) + \mathbb{R}\overrightarrow{k} = rOz$, la variable r joue le même rôle que y dans (yOz).

Donc une équation du tore, en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{(r - c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Et son équation en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 2c\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

8 Le domaine de définition et d'étude est $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Les dérivées sont $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{-2t}{(t+1)^2(t-1)^2} \end{cases}$.

Il y a un seul point stationnaire, pour $t = 0$.

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{2(t+1)}{t(t-3)}$. Ce point admet une tangente verticale.

C'est un point de rebroussement de première espèce.

t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$	$+$			$-$			$-$	0	$+$		
$x(t)$	-1	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$\frac{27}{32}$		1
$y'(t)$	$+$			$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$y(t)$	1	$+\infty$		$-\infty$	0		$-\infty$	$+\infty$	$\frac{9}{8}$		1

Étude aux bornes du domaine

• $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = 1$. Ainsi $(1, 1)$ est un point asymptote.

Lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La courbe tend vers 1e point (1, 1) avec une tangente horizontale.

• $\lim\limits_{t\to 1} |x(t)| = \lim\limits_{t\to 1} |y(t)| = +\infty$. Puis :

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1}(y(t) - 2x(t)) = -\frac{1}{4}.$$

La droite d'équation $y = 2x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote quand t tend vers 1.

• $\lim\limits_{t\to -1} |x(t)| = \lim\limits_{t\to -1} |y(t)| = +\infty$ et $\lim \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$.

La courbe a une branche parabolique de direction *(Ox)*.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On recherche une parabole asymptote d'axe parallèle à (Ox). Une telle parabole admet une équation de la forme :

$$x = ay^2 + by + c.$$

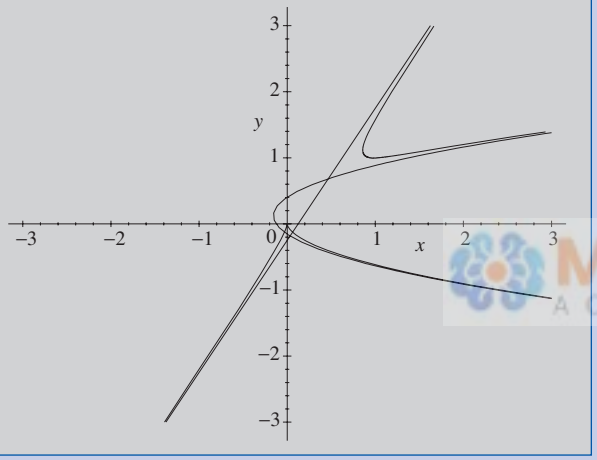
On trouve :

$$x(t) - 2y^2(t) + \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{8} =_{-1} o(1).$$

La parabole d'équation $x = 2y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}$ est asymptote à la courbe.

Avec Maple :

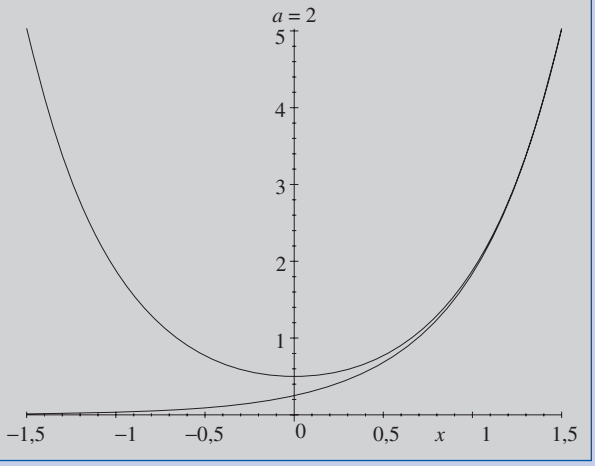
```
> with (plots) :
G1 :=plot([t^3/((t+1)^2*(t-1)),t^2
/(t^2-1),t=-25..25],view=[-3..3,-3..3],
numpoints=3000) :
G2 :=implicitplot(x-2*y^2+y/2+1/8=0,
x=-3..3,y=-3..3,numpoints=3000) :
display({G1,G2}) ;
```



9 **1)** On peut supposer $a > 0$. La fonction est paire.

Avec Maple :

```
> restart :plot({exp(2*x)/4,cosh(2*x)/2},
x=-1.5..1.5,title='a=2') ;
```



2) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \mathrm{ch}(ax)$, la longueur entre les points d'abscisse x_1 et x_2 est :

$$L = \left| \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{ch}\,(ax)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \frac{\mathrm{sh}\,(ax_2) - \mathrm{sh}\,(ax_1)}{a} \right|.$$

3) Repère de Frénet et rayon de courbure en M sont donnés par :

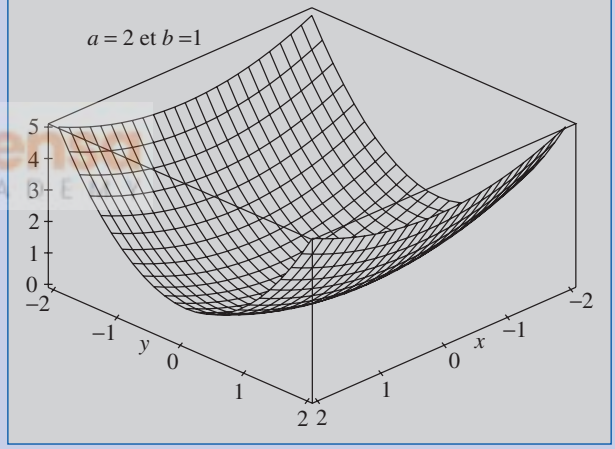
$$\overrightarrow{T} = \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(ax)}, \mathrm{th}(ax) \right) ; \quad \overrightarrow{N} = \left(-\mathrm{th}(ax), \frac{1}{\mathrm{ch}(ax)} \right) ;$$

$$R(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(ax)}{a}.$$

10 **1)**

Avec Maple :

```
> with(plots) :
plot3d(x^2/4+y^2,x=-2..2,y=-2..2,
title='a=2 et b=1',axes=BOXED) ;
```



2) • L'intersection de S avec le plan (xOy) est $\{O\}$.

• L'intersection de S avec yOz est la parabole d'équation $z = \frac{y^2}{mb^2}$ de ce plan.

• L'intersection de S avec (xOz) est la parabole d'équation $z = \frac{x^2}{ma^2}$ de ce plan.

• L'intersection de S avec le plan d'équation $z = z_0$ est l'ellipse d'équation $mz_0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ de ce plan. Lorsque $mz_0 < 0$, c'est $\varnothing$; lorsque $z_0 = 0$, elle est réduite à $\{O\}$.

3) • La projection de S sur le plan (yOz) est l'ensemble :

$$\left\{ (0, y, z)\ ;\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ mz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points $(0, y, z)$ tels que $z \geqslant \frac{y^2}{mb^2}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

C'est la partie convexe du plan (yOz) délimitée par la parabole d'équation $z = \dfrac{y^2}{mb^2}$.

• La projection de S sur le plan (xOy) est le plan (xOy).

• La projection de S sur le plan (xOz) est la partie convexe du plan (xOz) délimitée par la parabole d'équation $z = \dfrac{mx^2}{a^2}$.

4) Le paraboloïde elliptique est défini par une équation cartésienne explicite. Tout point est régulier. Le plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

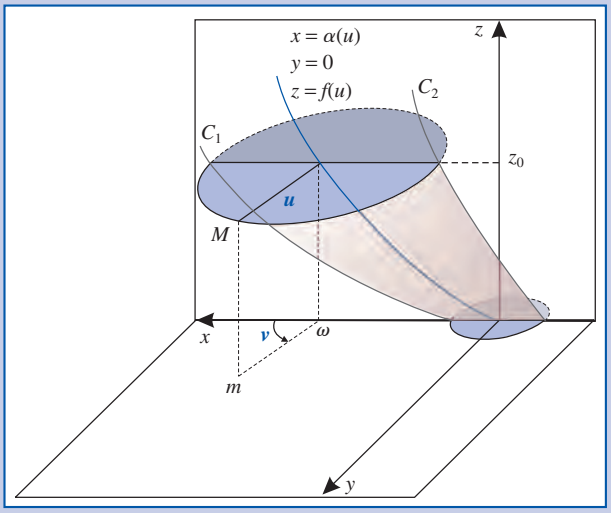
$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - m(z - z_0) = 0.$$

11 **1)** Le calcul des coordonnées de $\overrightarrow{OM}(u, 2\pi - v)$ et $\overrightarrow{OM}(u, v)$, montre que le plan d'équation $y = 0$ est plan de symétrie.

2) La fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet une limite a, finie ou non, lorsque u tend vers $+\infty$. Vous vérifierez que cette limite n'est pas atteinte.
Si $z_0 < 0$ ou $z_0 \geqslant a$, alors $S_{\alpha,f} \cap P_0 = \varnothing$.
Si $z_0 \in [0, a[$, il existe $u_0 \geqslant 1$ tel que :

$$f(u_0) = z_0.$$

$S_{\alpha,f} \cap P_0$ est le cercle du plan P_0 de centre $(\alpha(u_0), 0, f(u_0))$ et de rayon u_0.
Soit $M(u, v)$ un point de $S_{\alpha,f}$. Appelons z_0 l'ordonnée de M.
Le paramètre u est le rayon du cercle C_0 intersection de $S_{\alpha,f}$ avec le plan d'équation $z = z_0$. On a aussi $u = f^{-1}(z_0)$.
Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) et ω le projeté orthogonal, sur le même plan, du centre du cercle C_0 . Le paramètre v est la mesure dans $[0, 2\pi]$ de l'angle des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{\omega m}$.
3) $(y(u, v) = 0) \Leftrightarrow (v = 0$ ou $v = \pi.)$
C_1 est définie par $\overrightarrow{OM}_1(u) = (\alpha(u) + u)\,\vec{i} + f(u)\,\vec{k}$.
C_2 est définie par $\overrightarrow{OM}_2(u) = (\alpha(u) - u)\,\vec{i} + f(u)\,\vec{k}$.



4) a) Pour $u > 1$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v) = \alpha'(u)\,\vec{i} + \overrightarrow{e_v} + f'(u)\,\vec{k} \; ; \quad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v) = u\overrightarrow{e_{v+\pi/2}}.$$

b) Par conséquent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}(u, v) &= \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v) \\ &= -uf'(u)\overrightarrow{e_v} + u(1 + \alpha'(u)\cos v)\,\vec{k}.\end{aligned}$$

c) On a :

$$\overrightarrow{N}(u, 0) = -uf'(u)\,\vec{i} + u(1 + \alpha'(u))\,\vec{k}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}_1}{\mathrm{d}\,u}(u) = (\alpha'(u) + 1)\,\vec{i} + f'(u)\,\vec{k}.$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux. La tangente en un point de la courbe C_1 , tracée sur $S_{\alpha,f}$, est orthogonale à la normale à la surface $S_{\alpha,f}$ en ce point.

Il en est de même pour $\overrightarrow{N}(u, \pi)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}_2}{\mathrm{d}\,u}(u)$.

12 Faire le schéma associé à ce problème.
1) Par sa définition, le cône cherché est un cône de révolution d'axe Oz. Son équation est :

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{a^2 - R^2}z^2.$$

2) Le *théorème de Thalès* permet de prouver que le rayon cherché est $d = R\dfrac{a - R}{a + R}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 16

1 $3 \equiv (-2)^3[11]$. Donc $3^{2n} \equiv (-2)^{6n}[11]$.

$$3^{2n} + 2^{6n-5} \equiv 2^{6n} + 2^{6n-5}[11].$$

Or $2^{6n} + 2^{6n-5} = 33 \times 2^{6n-5}$.
D'où $3^{2n} + 2^{6n-5} \equiv 0[11]$.

2 On vérifie que l'ensemble

$$E = \{x_1x_2....x_{2n+1};\ n \in \mathbb{N}\ x_i \in A \quad \text{pour } i \text{ impair}$$
$$\text{et } x_i \in B \ \text{ pour } i \text{ pair}\}$$

est un sous-groupe.

$$E \neq \varnothing \quad \text{et} \quad E \subset G.$$

Soit $x_1x_2....x_{2p+1}$ et $y_1y_2....y_{2q+1}$ deux éléments de E.
Montrons que $z = x_1x_2....x_{2p+1}(y_1y_2....y_{2q+1})^{-1}$ est dans E.

$$z = x_1x_2....x_{2p+1}y_{2q+1}^{-1}...y_2^{-1}y_1^{-1}$$
$$= x_1x_2....(x_{2p+1}y_{2q+1}^{-1})...y_2^{-1}y_1^{-1}.$$

Posons :

$$z_i = x_i \qquad \text{pour } i \text{ dans } [\![1, 2p]\!]$$
$$z_{2p+1} = x_{2p+1}y_{2q+1}^{-1}$$
$$z_i = y_{2p+2q+2-i}^{-1} \ \text{ pour } \ i \text{ dans } [\![2p+2, 2p+2q+1]\!].$$

Alors

$$z = z_1z_2....z_{2p+2q+1} \qquad \begin{matrix}\text{avec } z_i \in A \text{ pour } i \text{ impair} \\ \text{et } \quad z_i \in B \text{ pour } i \text{ pair.}\end{matrix}$$

Donc z appartient à E.

Montrons que E est le plus petit sous-groupe contenant $A \cup B$.

- Pour $n = 0$, x_1 décrit A. On vérifie que $A \subset E$.
- Pour $n = 1$, $x_1 = e$ et $x_3 = e, x_1x_2x_3$ décrit B. Donc $B \subset E$.

Par conséquent, E est un sous-groupe qui contient $A \cup B$. Tous les éléments de E sont des produits d'éléments de A ou de B. Donc tout sous-groupe qui contient $A \cup B$ contient également E.E est le plus petit sous-groupe contenant $A \cup B$.

3 **1)** Supposons que AB est un sous-groupe.
Montrons $BA \subset AB$.
Soit ba un élément quelconque de BA, où a appartient à A et b à B.

$$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1}.$$

L'élément $a^{-1}b^{-1}$ appartient à AB. Or AB est un sous-groupe, donc $(a^{-1}b^{-1})^{-1}$ est dans AB.
Nous en déduisons que ba appartient à AB.
Donc $BA \subset AB$.
Montrons que $AB \subset BA$.
Soit ab un élément quelconque de AB, où a appartient à A et b à B.
Or AB est un sous-groupe, donc $(ab)^{-1}$ est dans AB. Il existe a' dans A et b' dans B tel que $(ab)^{-1} = a'b'$.

$$ab = b'^{-1}a'^{-1}.$$

Donc ab appartient à BA.
En conclusion :

$$AB = BA.$$

Supposons que $AB = BA$. Montrons que AB est un sous-groupe.
L'élément neutre e appartient à AB car $e = ee$.

$$AB \neq \varnothing.$$

$$AB \subset G.$$

Soit ab et $a'b'$ deux éléments quelconques de AB, où a et a' appartiennent à A, b et b' à B. Montrons que $a'b'(ab)^{-1}$ est dans AB.

$$a'b'(ab)^{-1} = a'b'b^{-1}a^{-1} = a'(b'b^{-1}a^{-1}).$$

L'élément $b'b^{-1}a^{-1}$ appartient à BA. Or $BA = AB$. Il existe a'' dans A et b'' dans B tels que $b'b^{-1}a^{-1} = a''b''$.

$$a'b'(ab)^{-1} = (a'a'')b''.$$

Donc $a'b'(ab)^{-1}$ appartient à AB.

AB est un sous-groupe de G.

Montrons que dans ce cas AB est le sous-groupe engendré par $A \cup B$.

L'élément neutre appartient à B donc $A \subset AB$. De même $B \subset AB$.

Le sous-groupe AB contient $A \cup B$.

Tout groupe contenant $A \cup B$ contient tous les éléments de la forme ab où $a \in A$ et $b \in B$.

Par conséquent, AB est le plus petit sous-groupe contenant $A \cup B$.

2) AB est un sous-groupe. L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe. Donc $C \cap AB$ est un sous-groupe.
Montrons que :

$$A(B \cap C) \subset C \cap AB.$$

Soit a dans A et d dans $B \cap C$.
Montrons que ad appartient à $C \cap AB$.
L'élément d est dans B, donc ad appartient à AB.
Or $A \subset C$. L'élément d est dans C, donc ad est dans C.
Par conséquent, ad est dans $C \cap AB$.
Montrons que :

$$C \cap AB \subset A(B \cap C).$$

Soit a dans A et b dans B tels que ab appartienne à C. Montrons que ab est dans $A(B \cap C)$.
Il suffit de montrer que b appartient à C.

$$b = a^{-1}(ab).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or, $A \subset C$. Donc a^{-1} est dans C, l'élément ab également.
D'où $b \in C$.

$A(B \cap C) = C \cap AB$ et $C \cap AB$ est un sous-groupe.

D'après la question **1)** :

$$A(B \cap C) = (B \cap C)A.$$

4 Si n divise m, alors il existe un entier naturel t tel que $m = nt$.

$$a^m = a^{nt} = (a^n)^t = e^t = e.$$

Réciproquement, supposons que $a^m = e$.
$m \geqslant n$ sinon a ne serait pas un générateur de G.
Effectuons la division euclidienne de m par n.
Il existe deux entiers t et r tels que :

$$m = nt + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < n.$$

Nous en déduisons $a^r = e$. Or $r < n$, ceci n'est possible que pour $r = 0$.
Par conséquent, $m = nt$.

5 Soit p dans $[\![1, n]\!]$. Notons $H =< a^p >$.
Si d est le plus grand commun diviseur de n et p.
D'après le *théorème de Bézout,* il existe deux entiers r et s tels que $rn + ps = d$.

$$a^d = a^{rn+ps} = (a^n)^r (a^p)^s = (a^p)^s.$$

Donc a^d appartient à H et $< a^d > \subset H$.
De plus, p est un multiple de d. Par conséquent $H \subset < a^d >$.
En conclusion :

$$H =< a^d > .$$

6 Déterminons tous les morphismes f de groupe de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
Soit x, différent de $\overline{0}$, dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Son ordre est 7.
On a :

$$f(x)^7 = f(x^7) = f(\overline{0}) = \widetilde{0}$$

où $\widetilde{0}$ est le zéro de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
Alors l'ordre m de $f(x)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$ divise 7.
Donc :

$$m = 1 \quad \text{ou} \quad m = 7.$$

Il n'y a pas d'élément d'ordre 7 dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
Le seul morphisme de groupes, est donc l'application constante $f : x \longmapsto \widetilde{0}$.
Déterminons tous les morphismes f de groupe de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
Soit x non nul dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, son ordre est 3.Alors l'ordre m de $f(x)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ divise 3.
Donc :

$$m = 1 \quad \text{ou} \quad m = 3.$$

Les éléments d'ordre 3 dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ sont $\widetilde{4}$ et $\widetilde{8}$. Le seul élément d'ordre 1 est $\widetilde{0}$.

$$f(\overline{0}) = \widetilde{0} \quad \text{et} \quad f(\overline{1}) + f(\overline{2}) = f(\overline{1} + \overline{2}) = f(\overline{0}) = \widetilde{0}$$

par conséquent, il n'y a que trois cas possibles :

$$\begin{cases} f(\overline{0}) = \widetilde{0} \\ f(\overline{1}) = \widetilde{0} \\ f(\overline{2}) = \widetilde{0} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(\overline{0}) = \widetilde{0} \\ f(\overline{1}) = \widetilde{4} \\ f(\overline{2}) = \widetilde{8} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(\overline{0}) = \widetilde{0} \\ f(\overline{1}) = \widetilde{8} \\ f(\overline{2}) = \widetilde{4} \end{cases}.$$

7 **1)** Soit e l'élément neutre de $(G, .)$ et f celui de $(H, \circ)$.
L'élément g de G est d'ordre p. L'élément h de H est d'ordre q.
Alors :

$$g^p = e \quad \text{et} \quad h^q = f.$$

Pour tout entier n, $g^n = e$ si, et seulement si, p divise n.
De même, $h^n = f$ si, et seulement si, q divise n.
L'égalité $(g, h)^n = (e, f)$ a lieu si, et seulement si, $g^n = e$ et $h^n = f$. C'est-à-dire si, et seulement si, n est un multiple commun de p et q.
L'ordre de (g, h) est le plus petit commun multiple de p et q.
2) Dans ce cas $G =< g >$ et $\text{card}(G) = p$.
De même, $H =< h >$ et $\text{card}(H) = q$.
Alors le cardinal de $G \times H$ est pq.
D'après la question **1),** (g, h) est un élément de $G \times H$ d'ordre pq, égal au cardinal de $G \times H$.
Donc $G \times H$ est cyclique et (g, h) est un générateur de $G \times H$.

8 **1)** $5x \equiv 12[7]$.
Notons $\overline{x}$ la classe de x modulo 7.
L'équation équivaut à l'équation $\overline{5}\overline{x} = \overline{12}$.
Soit $\overline{5}\overline{x} = \overline{5}$.
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps. L'élément $\overline{5}$ est inversible. Or :

$$\overline{5}\,\overline{3} = \overline{1} \quad \text{donc l'inverse de } \overline{5} \text{ est } \overline{3}.$$

x est solution si, et seulement si, $\overline{x} = \overline{1}$ et l'ensemble des solutions est $\{1 + 7n / n \in \mathbb{Z}\}$.
2) $4x \equiv 9[8]$. On considère ici les classes modulo 8.

$$4x \equiv 9[8] \Leftrightarrow \overline{4}\overline{x} = \overline{9} \Leftrightarrow \overline{4}\overline{x} = \overline{1}.$$

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. Or :

$$\overline{4}\overline{x} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{4} \quad \text{inversible dans } \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

Mais $\overline{4}$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est vide.
3) $4x \equiv 12[8]$.

$$\begin{aligned} 4x \equiv 12[8] &\Leftrightarrow \overline{4}\overline{x} = \overline{4} \\ &\Leftrightarrow \overline{4}(\overline{x} - \overline{1}) = \overline{0}. \\ &\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z} \quad 4(x - 1) = 8m. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{1 + 2m / m \in \mathbb{Z}\}$.

9 Notons $\overline{x}$ la classe d'un élément x modulo m et $\overline{\overline{x}}$ la classe modulo n.
Soit f un morphisme de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Les éléments unités se correspondent donc $f(\overline{1}) = \overline{\overline{1}}$.
Par conséquent, pour tout k dans $\mathbb{Z}$:

$$f(k\overline{1}) = k\overline{\overline{1}}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$\overline{1}$ est d'ordre m. Donc :

$$m\overline{\overline{1}} = f(m\overline{1}) = f(\overline{0}) = \overline{\overline{0}}.$$

On en déduit que l'ordre n de $\overline{\overline{1}}$ divise m.
Réciproquement, si n divise m, le morphisme qui associe $\overline{\overline{p}}$ à $\overline{p}$ convient.
On vérifie que sa définition ne dépend pas du choix du représentant p de la classe $\overline{p}$.
Il existe un morphisme de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, n divise m.

10 Soit f un morphisme de l'anneau produit $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}$.
Notons x_k l'élément de $\mathbb{Z}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $k^{\text{ième}}$ qui vaut 1.
L'unité de $\mathbb{Z}^n$ est $(1,1,\ldots,1)$.

$$f((1,1,\ldots,1)) = 1.$$

Or : $(1,1,\ldots,1) = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Donc : $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 1$.
On remarque que $x_k = x_k x_k$.
On en déduit :

$$f(x_k) = f(x_k)f(x_k).$$

Par conséquent, $f(x_k) = 0$ ou $f(x_k) = 1$.
Il existe un seul entier p de $[\![1,n]\!]$ tel que $f(x_p) = 1$ et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\backslash\{p\} \quad f(x_k) = 0.$$

D'autre part, pour $a = (a_1,\ldots,a_n)$ nous avons :

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Donc :

$$f(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) = a_p.$$

Par conséquent, si f est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}$, alors f est l'une des projections : $a \longmapsto a_p$.
Réciproquement, les projections précédentes sont des morphismes d'anneaux.

11 Notons $I(M)$ l'annulateur de M, ensemble des x de A tels que $xy = 0$ pour tout y de M.
Montrons que $I(M)$ est un idéal de $(A,+,.)$. $0 \in I(M)$.
Soit a et b deux éléments de $I(M)$, et y un élément quelconque de M.

$$(a+b)y = ay + by = 0,$$

donc $a+b$ appartient à $I(M)$.
Soit a un élément de A et b un élément de $I(M)$, montrons que ab appartient à $I(M)$.
Pour tout y de M, nous avons :

$$(ab)y = a(by) = a0 = 0.$$

12 Soit I un idéal de l'anneau produit $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
Notons φ_1 la première projection de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, définie par

$$\varphi_1(x,y) = x.$$

L'application φ_1 est un morphisme d'anneaux.
D'après le *théorème* 24, $\varphi_1(I)$ est un idéal de $\varphi_1(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.
Or φ_1 est surjective donc $\varphi_1(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $m\mathbb{Z}$ où $m \in \mathbb{N}$.
Par conséquent, il existe un entier naturel m tel que :

$$\varphi_1(I) = m\mathbb{Z}.$$

L'application φ_1 est surjective. Il existe a dans $\mathbb{Z}$ tel que (m,a) appartienne à I.
Or I est un idéal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $(1,0)$ appartient à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc $(1,0)(m,a)$ appartient à I.
L'élément $(m,0)$ est dans I.
On procède de même avec la deuxième projection φ_2.
Il existe un entier naturel n tel que $\varphi_2(I) = n\mathbb{Z}$ et $(0,n)$ appartient à I.
Quels que soient p et q dans $\mathbb{Z}$, nous avons :

$$(p,0)(m,0) + (0,q)(0,n) = (pm,qn).$$

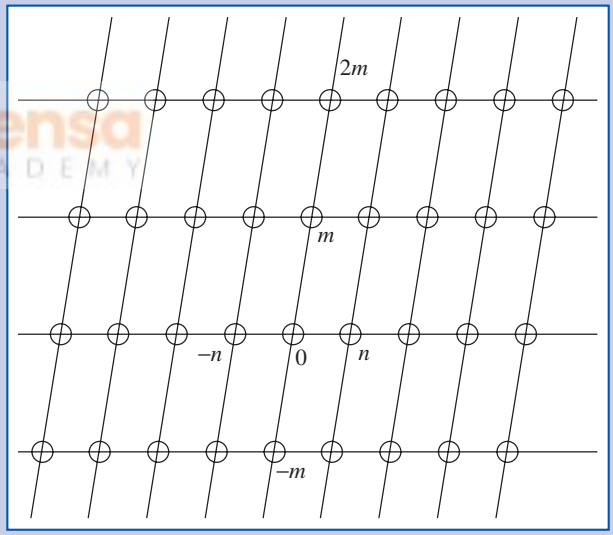
Ceci prouve que $m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z} \subset I$.
Or on a :

$$I \subset \varphi_1(I)\times\varphi_2(I) = m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z}.$$

Par conséquent :

$$I = m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z}.$$

Réciproquement, on vérifie que $m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.



13 • Supposons p premier.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. L'égalité $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ assure que p divise $k\binom{p}{k}$. Or p est premier avec k. D'après le *théorème de Gauss*, p divise $\binom{p}{k}$.
• Supposons que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$ le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ soit divisible par p.
Soit q un diviseur premier de p. Nous allons montrer que $q = p$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si $q \neq p$ alors $1 < q \leqslant p-1$. Le coefficient $\binom{p}{q}$ est divisible par p.
Il existe un entier naturel x tel que $p = xq$ et un entier naturel y tel que $\binom{p}{q} = yp$.

En écrivant $yp = \binom{xq}{q}$, nous obtenons l'égalité :

$$yq! = (xq-1)(xq-2)...(xq-q+1).$$

Donc q divise $(xq-1)(xq-2)...(xq-q+1)$.
Il n'y a pas de multiple de q parmi les facteurs de $(xq-1)(xq-2)...(xq-q+1)$, d'où la contradiction attendue.
Par conséquent, $p = q$ et p est premier.

14 **1)** Montrons tout d'abord que l'anneau est intègre.
L'idéal (0) engendré par 0 est premier, donc si $xy = 0$ alors :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

2) Montrons maintenant que tout élément non nul x est inversible.
Comparons les idéaux (x) et (x^2).
On a de manière évidente $(x^2) \subset (x)$.
D'autre part $xx \in (x^2)$ et l'idéal (x^2) est premier.
Donc $x \in (x^2)$.
Par conséquent, il existe un élément y de A tel que $x = yx^2$.

$$x(1_A - yx) = 0 \quad \text{et} \quad x \text{ non nul.}$$

Donc :

$$yx = 1_A \quad \text{et} \quad x \text{ est inversible.}$$

15 Montrons que l'application $f : x \longmapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux.
On vérifie aisément que $f(1) = 1$ et que pour tout couple (x, y) de A^2 on a $f(xy) = f(x)f(y)$ puisque l'anneau est commutatif.
Soit x et y dans A, montrons que :

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

L'anneau est commutatif, donc :

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} = x^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} + y^p.$$

L'entier p est premier, donc p divise $\binom{p}{k}$ pour k dans $[\![1, p-1]\!]$. (*exercice* 13)
$\binom{p}{k} x^k y^{p-k} = 0$ car p est la caractéristique de l'anneau.

Donc : $$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} = 0.$$

16 Revoir l'*algorithme d'Euclide* étudié en Première année. On trouve $X^2 + 3X + 2$.

Avec Maple :

```
> gcd(x^4+3*x^3+3*x^2+3*x+2,x^3+4*x^2+5*x+2) ;
```

$$x^2 + 3x + 2$$

17 Soit $n = a \wedge b$. Soit α une racine commune de $(X^a - 1)$ et de $(X^b - 1)$.
Alors α est une racine $a^{\text{ième}}$ de 1 et une racine $b^{\text{ième}}$ de 1.
Il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = n$.

$$\alpha^n = \alpha^{au+bv} = (\alpha^a)^u (\alpha^b)^v = 1$$

Par conséquent, α est une racine de $X^{a\wedge b} - 1$.
Réciproquement, soit β une racine de $X^{a\wedge b} - 1$.
Il existe un entier s tel que $ns = a$.

$$\beta^a = (\beta^n)^s = 1.$$

Donc, β est une racine de $X^a - 1$.
De même, β est une racine de $X^b - 1$.
Or ici, toutes les racines sont simples. Donc, l'ensemble des diviseurs communs de $(X^a - 1)$ et de $(X^b - 1)$ est égal à l'ensemble des diviseurs de $X^{a\wedge b} - 1$.
Donc :

$$X^{a\wedge b} - 1 = (X^a - 1) \wedge (X^b - 1).$$

18 $X^4 + 1 = X(X^3 + 1) + (-X + 1).$

$$X^3 + 1 = (-X + 1)(-X^2 - X - 1) + 2.$$

Donc :

$$2 = P(X) + (X^2 + X + 1)(Q(X) - XP(X)).$$

Puis :

$$1 = P(X)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X^3\right) + Q(X)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2\right)$$

Les polynômes :

$$U(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X^3$$

et :

$$V(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$$

conviennent.

Avec Maple :

```
> gcd(x^4+1,x^3+1) ;
                                  1
> gcdex(x^4+1,x^3+1,x,'s','t'),s,t;
```

$$1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

19 Démontrons le par l'absurde.
Supposons qu'il existe un diviseur irréductible P commun à ABC et à $AB + BC + CA$.
Le polynôme P divise ABC donc, d'après le *corollaire* 38.6, $P \mid A$ ou $P \mid B$ ou $P \mid C$.
Par exemple, $P \mid A$. Alors $P \mid AB+AC$. Or $P \mid AB+BC+CA$ donc $P \mid BC$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, $P \mid B$ ou $P \mid C$.
Si $P \mid B, P$ divise A et B. D'où la contradiction avec $A \wedge B = 1$. De même avec C.
Les cas $P \mid B$ et $P \mid C$ se traitent de la même manière.

20 **1)** Montrons que $C(A)$ est un sous-groupe de G.

$$e \in C(A). \qquad C(A) \subset G.$$

Soit c et d deux éléments quelconques de $C(A)$.
Pour tout a de A, on a $ac = ca$ et $ad = da$.

$$d^{-1}(ad)d^{-1} = d^{-1}(da)d^{-1}.$$

Donc : $d^{-1}a = ad^{-1}$.
Puis :

$$a(cd^{-1}) = (ac)d^{-1} = (ca)d^{-1} = c(ad^{-1})$$
$$= c(d^{-1}a) = (cd^{-1})a.$$

Donc : cd^{-1} appartient à $C(A)$.
$C(A)$ est un sous-groupe de G.
Montrons que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

$$e \in N(A). \qquad N(A) \subset G.$$

Soit c un élément quelconque de $N(A)$. On a $Ac = cA$
Prouver que $Ac^{-1} = c^{-1}A$.
On en déduit que c^{-1} appartient à $N(A)$.
Soit c et d deux éléments quelconques de $C(A)$.
On a $Ac = cA$ et $Ad = dA$.
Montrons que $Acd = cdA$.
Soit a quelconque dans A.

$$ac \in Ac.$$

Or $Ac = cA$. Donc, il existe a' dans A, tel que $ac = ca'$.

$$acd = ca'd.$$

De même, il existe a'' dans A tel que $a'd = da''$.
Par conséquent, $acd = cda''$. Puis $Acd \subset cdA$.
De la même manière, on montre que $cdA \subset Acd$.

2) Montrons que $C(A)$ est distingué dans $N(A)$.
Soit c un élément quelconque de $C(A)$ et n un élément quelconque de $N(A)$.
Montrons que ncn^{-1} appartient à $C(A)$.
Pour tout a de A :

$$a(ncn^{-1}) = (an)cn^{-1}.$$

Il existe a' dans A tel que $an = na'$.
Donc $a(ncn^{-1}) = (na')cn^{-1}$.

$$a(ncn^{-1}) = n(a'c)n^{-1} = n(ca')n^{-1} = nc(a'n^{-1}).$$

$an = na'$. D'où $a'n^{-1} = n^{-1}a$.
Par conséquent :

$$a(ncn^{-1}) = nc(n^{-1}a) = (ncn^{-1})a.$$

3) Dans cette question, A est un sous-groupe.
• Montrons que A est distingué dans $N(A)$.

$$\forall a \in A \forall b \in A \quad ab = (aba^{-1})a.$$

Donc :

$$\forall a \in A \quad aA \subset Aa.$$

De même :

$$\forall a \in A \quad Aa \subset aA.$$

On en déduit :

$$A \subset N(A).$$

Soit a quelconque dans A et n dans $N(A)$.
Montrons que nan^{-1} appartient à A.
Il existe a' dans A tel que $na = a'n$.
Donc :

$$nan^{-1} = a'nn^{-1} = a'.$$

• Supposons $N(A) = G$.
A est distingué dans $N(A)$, donc dans G.
• Supposons A distingué dans G. Alors, pour tout g de G :

$$gA = Ag.$$

Donc :

$$G = N(A).$$

Dans cette question, A est un sous-groupe commutatif.
D'où $A \subset C(A)$.
Montrons que A est distingué dans $C(A)$.
Soit a un élément quelconque de A et c dans $C(A)$.
Vérifions que cac^{-1} est dans A :

$$cac^{-1} = (ca)c^{-1} = (ac)c^{-1} = a.$$

21 Soit m un entier naturel non nul et :

$$S = \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Pour a et b dans S, on définit :

$$a \circ b = a + b \qquad \text{si} \quad a + b < m.$$
$$a \circ b = a + b - m \quad \text{si} \quad a + b \geqslant m.$$

1) On peut introduire le morphisme f de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ dans $(S, \circ)$ défini par :

$$f(\overline{k}) = k \quad \text{pour} \quad k \text{ dans } S.$$

La définition de la loi $\circ$ traduit exactement :

$$\forall (a, b) \in S^2 \quad f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) \circ f(\overline{b}).$$

D'autre part, f est surjective et $\text{card } S = \text{card } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Donc f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ dans $(S, \circ)$.
On en déduit que $(S, \circ)$ est un groupe d'ordre m.
2) Écrivons la table de multiplication pour $m = 3$.

o	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Écrivons la table de multiplication pour $m = 4$.

o	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

3) Considérons le cas $m = 6$, vérifiez que $\{0,3\}$ et $\{0,2,4\}$ sont deux sous-groupes et que leur réunion $\{0,2,3,4\}$ n'est pas un sous-groupe.

4) Le groupe symétrique S_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc à S pour $m = 2$.

5) $(S, \circ)$ est cyclique d'ordre m car isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ qui est lui-même cyclique d'ordre m.

22

1) On introduit l'entier $m = 2^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)!$.

$$m = 2^{(p-1)/2}(2k+1)\,!$$

D'autre part :

$$m = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (p-1)$$
$$= 2 \times 4 \times \cdots \times (2k) \times (2k+2) \times \cdots \times (4k+2).$$

Or nous avons également :

$$2k+2 \equiv -(2k+1)[p]$$
$$2k+4 \equiv -(2k-1)[p]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$4k+2 \equiv -1[p]$$

Par conséquent :

$$m \equiv 2 \times 4 \times \cdots \times (2k) \times (-1)^{k+1}(2k+1) \times (2k-1) \times \cdots \times 3 \times 1[p]$$

$$m \equiv (-1)^{k+1}(2k+1)\,![p].$$

D'où :

$$2^{(p-1)/2}(2k+1)\,! \equiv (-1)^{k+1}(2k+1)\,![p].$$

Vérifier que $(2k+1)\,!$ et p sont premiers entre eux.

D'après l'*application* 1, on en déduit :

$$2^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{k+1}[p].$$

2) Appliquons le résultat précédent à $4(2k+1)+3$:

$$4(2k+1)+3 = 2p+1.$$

Donc $4(2k+1)+3$ est premier :

$$2^{4k+3} \equiv (-1)^{2k+2}[2p+1].$$

D'où $2^p \equiv 1[2p+1]$.

$$2^p - 1 \equiv 0[2p+1].$$

Donc $2p+1$ divise $2^p - 1$.

23

1) On montre que R est un sous-groupe de G.

$$e \in G \quad \text{et} \quad R \subset G.$$

Soit x et y deux éléments de R, alors :

$$x^r = y^r = e.$$

La loi est commutative, donc :

$$(xy)^r = x^r y^r = e.$$

L'élément xy est dans R.

Soit x un élément de R.

$$x^r = e$$
$$x^r x^{-r} = x^{-r}.$$

D'où $e = x^{-r}$. L'élément x^{-1} est dans R..

L'ensemble R est un sous-groupe de $(G, .)$.

On démontre de la même manière que S est un sous-groupe de $(G, .)$.

2) On définit l'application f de $R \times S$ dans G par $f(x,y) = xy$.

Montrons que f est un morphisme.

Pour tous (x,y) et (x',y') de $R \times S$, $(x,y) \circ (x',y') = (xx', yy')$.

$$f((x,y) \circ (x',y')) = f(xx', yy') = xx'yy' = (xy)(x'y')$$
$$= f(x,y)f(x',y').$$

Montrons que f est injective.

Considérons (x,y) dans Ker f.

$$xy = e.$$

$x = y^{-1}$. Donc x appartient à $R \cap S$.

$$x^r = x^s = e.$$

Soit d l'ordre de x. Alors d divise r et s. Or $r \wedge s = 1$.

Donc $d = 1$, puis $x = y = e$.

Par conséquent, Ker $f = (e,e)$.

Montrons que f est surjective.

$$r \wedge s = 1.$$

Le *théorème de Bézout* assure l'existence de deux entiers u et v tels que :

$$ru + sv = 1.$$

Soit z quelconque dans G.

$$z = z^{ru+sv} = (z^r)^u (z^s)^v.$$

Vérifier que z^r appartient à S et que z^s appartient à R.

Prenons $x = (z^s)^v$ et $y = (z^r)^u$.

Par conséquent, pour tout z de G, il existe x dans R et y dans S tels que $z = f(x,y)$.

L'application f est surjective.

3) Notons E l'ensemble $\{x \in G / \exists\, y \in G x = y^s\}$.

On vérifie que $E \subset R$ et que E est un sous-groupe de R.

Il suffit alors de montrer que E et R ont le même cardinal.

On a card $(G) =$ card$(\mathbb{R})$ card(S), car G est isomorphe à $R \times$ S.

Montrons que $E \times S$ est isomorphe à G.

Soit g défini de $E \times S$ dans G par $g(x,y) = xy$.

$E \times S \subset R \times S$ et g est la restriction de f à $E \times S$.

Donc g est un morphisme injectif.

Reprenons la démonstration de la surjectivité de f.

Pour z dans G, l'élément x trouvé est $x = (z^s)^v$ avec z^s dans E, puis x dans E.

Par conséquent, pour tout z de G, il existe x dans E et y dans S tels que :

$$z = g(x,y).$$

L'application g est surjective.

L'ensemble $E \times S$ est isomorphe à G.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc :

$$\text{card}(G) = \text{card}(E)\,\text{card}(S).$$

De la double égalité :

$$\text{card}(G) = \text{card}(E)\,\text{card}(S) = \text{card}(R)\,\text{card}(S)$$

on en déduit :

$$\text{card}(R) = \text{card}(E).$$

Puis l'égalité $E = R$. On procède de la même manière avec S.

4) Montrons que :

$$\text{card}(R) = r \quad \text{et} \quad \text{card}(S) = s.$$

Nous avons :

$$\text{card}(G) = \text{card}(R)\,\text{card}(S).$$

$\text{card}(R)$ est un diviseur de $\text{card}(G)$.
Donc :

$$\text{card}(R) \in \{1, r, s, n\}.$$

• Si $\text{card}(R) = 1$.
Alors $\text{card}(S) = n$, donc $S = G$ et $s = n$.
Puis $r = 1$, donc $\text{card}(R) = r$.
• Si $\text{card}(R) = r$.
Alors card $(S) = s$.
• Si $\text{card}(R) = s$.
Alors card $(S) = r$.
• Si $\text{card}(R) = n$, alors $\text{card}(S) = 1$.
On est ramené au premier point.
D'après le *corollaire* 11.4, pour tout x de R, $x^s = e$.
Donc x appartient à $R \cap S$.
Nous avons vu, dans la démonstration de l'injectivité de f, que cela entraînait $x = e$. D'où $R = \{e\}$.
Ceci est en contradiction avec $\text{card}(R) = s$, sauf si $s = 1$.
Dans tous les cas, nous avons $\text{card}(R) = r$ et $\text{card}(S) = s$.

24 **1)** $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2\,[8] \\ 5x + 4y \equiv 16\,[8] \end{cases}$

équivaut au système :

$$\begin{cases} \overline{7}\,\overline{x} + \overline{5}\,\overline{y} = \overline{2} \\ \overline{5}\,\overline{x} + \overline{4}\,\overline{y} = \overline{0} \end{cases} \quad \text{de } \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Les classes $\overline{7}$ et $\overline{5}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on obtient $\overline{y}$ en multipliant la première ligne par $\overline{5}$ et la deuxième par $\overline{7}$ et en les soustrayant.
Le système est équivalent à

$$\begin{cases} \overline{y} = \overline{2} \\ \overline{5}\,\overline{x} + \overline{4}\,\overline{y} = \overline{0} \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \overline{y} = \overline{2} \\ \overline{x} = \overline{0} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions est $\{(8n, 2 + 8m)/n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{Z}\}$.

2) $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2\,[9] \\ 5x + 4y \equiv 16\,[9] \end{cases}$ puis $\begin{cases} \overline{3}\,\overline{y} = \overline{3} \\ \overline{3}\,\overline{x} = \overline{0} \end{cases}.$

On obtient ensuite plusieurs solutions car $\overline{3}$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} \overline{y} = \overline{1} \\ \overline{x} = \overline{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \overline{y} = \overline{4} \\ \overline{x} = \overline{0} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \overline{y} = \overline{7} \\ \overline{x} = \overline{3} \end{cases}.$$

25 Soit B le sous-ensemble de l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des suites stationnaires d'entiers relatifs.
La somme et le produit de deux suites stationnaires sont stationnaires.
L'opposé d'une suite stationnaire est stationnaire.
L'élément neutre de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. Cette suite est également dans B.
Par conséquent, B est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +, .)$
Soit f un morphisme d'anneaux de B dans $\mathbb{Z}$.
Soit x_k la suite de B dont le seul terme non nul est celui de rang k qui vaut 1.
Nous remarquons que $x_k x_k = x_k$. Donc $f(x_k) = 0$ ou $f(x_k) = 1$, en notant 0 la suite nulle et 1 la suite constante égale à 1.
S'il existe deux entiers k et k' distincts tels que $f(x_k) = 1$ et $f(x_{k'}) = 1$, alors :

$$1 = f(x_k)f(x_{k'}) = f(x_k x_{k'}) = f(0).$$

Or $f(0) = 0$, donc un seul des $f(x_k)$ est non nul.
Par exemple, soit q l'entier naturel tel que $f(x_q) = 1$ et $\forall\, x_k \in \mathbb{N}\backslash\{q\}\, f(x_k) = 0$.
Alors, si $x = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où les n_k sont dans $\mathbb{Z}$, est une suite stationnaire à partir du rang p, nous avons :

$$x = \sum_{k=0}^{p} (n_k - n_p)x_k + n_p 1_B.$$

Si $q \leqslant p$, nous avons :

$$f(x) = (n_q - n_p)1 + n_p 1 = n_q.$$

Si $q > p$, nous avons :

$$f(x) = n_p 1 = n_q 1 = n_q.$$

Par conséquent, f est une application de B dans $\mathbb{Z}$ de la forme $f_q : (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto n_q$.

26 **1)** $I \subset \sqrt{I}$ se vérifie trivialement.
Vérifions les propriétés **(i)** et **(ii)**.
(i) Montrons que $(\sqrt{I}, +)$ est un sous-groupe.
Il est non vide.
Soit x et y deux éléments de $\sqrt{I}$. Il existe deux entiers m et n tels que x^m et y^n soient dans I.
Montrons que $(x - y)^{m+n}$ est dans I.

$$(x-y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} (-1)^{n+m-k} x^k y^{n+m-k} + \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} (-1)^{n+m-k} x^k y^{n+m-k}.$$

Si $k \leqslant m$, $x^k y^{n+m-k} = (x^k y^{m-k})y^n$.
L'élément $(x^k y^{m-k})y^n$ est le produit d'un élément de A et d'un élément de l'idéal I. Il est dans I.
De même, si $k > m$, $x^k y^{n+m-k} = (x^{k-m} y^{n+m-k})x^m$. L'élément $x^k y^{n+m-k}$ est dans I.
Par conséquent, l'élément $(x - y)^{m+n}$ est la somme d'éléments de I, il est dans I.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

(ii) Soit a un élément de A et x un élément de $\sqrt{I}$. Il existe un entier m tel que x^m est dans I.
Or $(ax)^m = a^m x^m$, donc $(ax)^m$ est le produit d'un élément de A et d'un élément de l'idéal I.
Il est dans I.
L'ensemble $\sqrt{I}$ est un idéal.
2) Soit I et J deux idéaux tels que $I \subset J$. Alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ se vérifie immédiatement..
Or $I \subset \sqrt{I}$, donc $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$.
Vérifions la deuxième inclusion : $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$.
Soit x dans $\sqrt{\sqrt{I}}$, il existe un entier m tel que $x^m \in \sqrt{I}$. Donc il existe un entier n tel que $(x^m)^n \in I$.
Par conséquent, x^{mn} appartient à I et x à $\sqrt{I}$.
3) Soit I et J deux idéaux.
Nous avons $I \cap J \subset I$ donc $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I}$.
De même $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{J}$.
Par conséquent :

$$\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

Montrons que $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J}$.
Soit x dans $\sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, il existe deux entiers naturels m et n tels que x^m soit dans I et x^n soit dans J.
Dans ce cas, $x^{m+n} = x^m x^n$. Donc, x^{m+n} est dans I puisque x^m est dans I et x^{m+n} est dans J puisque x^n est dans J.
4) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$.
Tout idéal I de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, où n est un entier naturel unique.
Pour $n = 0, I = \{0\}$ et $\sqrt{I} = \{0\}$.
Pour $n = 1, I = \mathbb{Z}$ et $\sqrt{I} = \mathbb{Z}$.
Pour $n = p^\alpha$ où p est premier et $\alpha \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{array}{lll} \forall\, x \in \mathbb{Z} \quad x \in \sqrt{p^\alpha \mathbb{Z}} & \Leftrightarrow & \exists\, n \in \mathbb{N} \quad x^r \in p^\alpha \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow & p \mid x \quad \text{car } p \text{ est premier} \end{array}$$

Réciproquement, si $p \mid x$ alors $x^\alpha \in p^\alpha \mathbb{Z}$ donc $x \in \sqrt{p^\alpha \mathbb{Z}}$.
D'où : $\sqrt{p^\alpha \mathbb{Z}} = p\mathbb{Z}$.
Soit $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premier de n.
On a $n = ppcm\left(p_i^{\alpha_i}, i \in [\![1, r]\!]\right)$ car $p_i \wedge p_j$ pour $i \neq j$.
$n\mathbb{Z} = \bigcap_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ en généralisant le théorème 29.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sqrt{n\mathbb{Z}} &= \bigcap_{i=1}^{r} \sqrt{p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}} \quad \text{d'après 3)} \\ &= \bigcap_{i=1}^{r} (p_i\mathbb{Z}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right)\mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'idéal racine de $n\mathbb{Z}$ est l'idéal $k\mathbb{Z}$ où k est le produit de tous les entiers premiers qui interviennent dans la décomposition de n en facteurs premiers.

27 **1)** On vérifie facilement que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$ il est donc commutatif et intègre.
2) Soit $a = x + \sqrt{2}y$ et $b = x' + \sqrt{2}y'$ quelconques dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Nous remarquons tout d'abord que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
• Vérifions **(i)**.
a divise b si, et seulement s'il existe c dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $b = ac$.

$$\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(c).$$

Si $c = 0$, alors $b = 0$ et $\varphi(b) \leqslant \varphi(a)$.
Si $c \neq 0, \varphi(c) \geqslant 1$ donc $\varphi(b) \leqslant \varphi(a)$.
• Vérifions **(ii)**.
Soit a dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et b non nul dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Il existe a', b', a'', b'' dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = b(a'/b' + \sqrt{2}a''/b'')$, car a/b appartient à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Il existe x dans $\mathbb{Z}$ tel que $|a'/b' - x| \leqslant \frac{1}{2}$ et y dans $\mathbb{Z}$ tel que $|a''/b'' - y| \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} &|(a'/b' - x)^2 - 2(a''/b'' - y)^2| \\ &\qquad \leqslant \max((a'/b' - x)^2, 2(a''/b'' - y)^2) \\ &\qquad \leqslant \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Posons $q = x + \sqrt{2}y$. Alors :

$$\varphi(a - bq) = |(a'/b' - x)^2 - 2(a''/b'' - y)^2|\varphi(b)$$

Remarque : On peut également prolonger φ à :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$$

et considérer l'élément a/b de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Or $|(a'/b' - x)^2 - 2(a''/b'' - y)^2| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\varphi(b) > 0$ donc :

$$|(a'/b' - x)^2 - 2(a''/b'' - y)^2|\varphi(b) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(b) < \varphi(b).$$

Soit $r = a - bq$. Alors $\varphi(r) < \varphi(b)$ et $a = bq + r$.
Nous remarquons que, si b divise a, alors a'/b' et a''/b'' sont des entiers et $r = 0$ convient.
Application numérique
$a/b = 10 + 6{,}5\sqrt{2}$ est un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
On choisit x et y entiers tels que $|10 - x| < \frac{1}{2}$ et $|6{,}5 - y| < \frac{1}{2}$.
Nous obtenons $x = 10$ et $y \in \{7, 6\}$.
Un calcul rapide donne $r = -1 + \sqrt{2}$ pour $q = 10 + 6\sqrt{2}$ et $r = 1 - \sqrt{2}$pour $q = 10 + 7\sqrt{2}$.
Dans les deux cas, $\varphi(r) = 1$. Or $\varphi(b) = 2$ donc $\varphi(r) < \varphi(b)$.

28 Soit $D = A \wedge B$. Il existe A_1 et B_1 premiers entre eux, tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$.
Il est équivalent de montrer que $(A_1^2 + B_1^2) \wedge (A_1 B_1) = 1$.
Soit P un diviseur commun et irréductible non constant.
$P | A_1 B_1$ donc $P | A_1$ ou $P \mid B_1$.
Supposons par exemple que $P \mid A_1$. $P \mid A_1$ et $P \mid (A_1^2 + B_1^2)$ donc $P \mid B_1^2$. Puis $P \mid B_1$. Ceci est en contradiction avec $A_1 \wedge B_1 = 1$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

29 **1)** $X^6+1=\prod_{k=0}^{2}\left(X-\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\mathrm{i}\pi}{6}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\frac{(2k+1)\mathrm{i}\pi}{6}}\right)$

$$=\prod_{k=0}^{2}\left(X^2-2\cos\frac{(2k+1)\mathrm{i}\pi}{6}X+1\right)$$

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2+1-\sqrt{3}X))(X^2+1+\sqrt{3}X)$$

ou bien :

$$X^6+1=(X^2+1)(X^4-X^2+1)=(X^2+1)[(X^2+1)^2-3X^2]$$

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}X).$$

```
> factor (x^6+1) ;
                (x^2+1)(x^4-x^2+1)
> factor (x^6+1,sqrt(3)) ;
        (x^2+1)(x^2+sqrt(3)x+1)(x^2-sqrt(3)x+1)
```

2) $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4$

$$=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$$

$$=[(X^2+1)^2-X^2][(X^2+1)^2-3X^2].$$

$$X^8+X^4+1=(X^2+1+X)(X^2+1-X)$$

$$(X^2+1+\sqrt{3}X)(X^2+1-\sqrt{3}X).$$

3) $X^{2n}-2\cos\alpha X^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\frac{k\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\alpha}{n}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\frac{k\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\alpha}{n}}\right).$

Pour $\alpha\in]0,\pi[$,

$$X^{2n}-2\cos\alpha X^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}X+1\right).$$

Pour $\alpha=0$,

$$X^{2n}-2\cos\alpha X^n+1=(X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\frac{k\pi}{n}X+1\right).$$

Pour $\alpha=\pi$,

$$X^{2n}-2\cos\alpha X^n+1=(X+1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\frac{k\pi}{n}X+1\right).$$

30 **1)** Les dérivées successives de P sont nulles à partir d'un certain rang. Le terme $S(P)$ existe car la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}}P^{(k)}$ est finie. Notons f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(t)=\mathrm{e}^{-xt}S(P)(xt).$$

La fonction f est dérivable sur $[0,1]$.
Pour tout t de $[0,1]$ nous avons :

$$f'(t)=x\mathrm{e}^{-xt}[S(P)'(xt)-S(P)(xt)]=-x\mathrm{e}^{-xt}P(xt).$$

Par conséquent :

$$f(1)-f(0)=-x\int_0^1\mathrm{e}^{-xt}P(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Nous obtenons ensuite :

$$\mathrm{e}^xS(P)(0)=S(P)(x)+x\int_0^1\mathrm{e}^{x(1-t)}P(xt)\,\mathrm{d}t.$$

2) Le polynôme Q s'écrit $Q(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, où les a_k désignent des entiers et où a_n est un entier non nul.

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}X^{k+p-1}.$$

$P^{(r)}(0)=0$ pour $r\leqslant p-2$ ou $r>n+p-1$.

$P^{(r)}(0)=\dfrac{r!a_{r+1-p}}{(p-1)!}$ pour $p-1\leqslant r\leqslant n+p-1$.

$$S(P)(0)=\sum_{r=p-1}^{n+p-1}\frac{r!a_{r+1-p}}{(p-1)!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(j+p-1)!a_j}{(p-1)!}$$

$$=a_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+p-1)!a_j}{(p-1)!}.$$

Or pour $j\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{(j+p-1)!a_j}{(p-1)!}=a_j(j+p-1)\ldots p$ et $\dfrac{(j+p-1)!a_j}{(p-1)!}$ est un entier multiple de p. Par conséquent, $S(P)(0)$ est un entier et $S(P)(0)\equiv a_0[p]$.

3)a) Soit k dans $[\![1,n]\!]$. On définit le polynôme P en posant :

$$P(X)=P_m(X+k)=\frac{(X+k)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\prod_{i=1}^{n}(X+k-i)\right]^m$$

$$=\frac{X^{m-1}}{(m-1)!}\left[\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X+k-i)\right]^mX(X+k)^{m-1}.$$

Le polynôme $\left[\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X+k-i)\right]^mX(X+k)^{m-1}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.

D'après la question **2)**, nous avons $S(P)(0)\equiv 0[m]$.
Or $S(P)(0)=S(P_m)(k)$, donc m divise $S(P_m)(k)$.

b) Vérifier $\left|\int_0^1\mathrm{e}^{k(1-t)}P_m(kt)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\mathrm{e}^k\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}(n^n)^m$.

Puis $\left|\int_0^1\mathrm{e}^{k(1-t)}P_m(kt)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\mathrm{e}^{kn^n}\frac{(kn)^{m-1}}{(m-1)!}$.

Or $\lim_{m\to+\infty}\dfrac{(kn)^{m-1}}{(m-1)!}=0$, donc $\lim_{m\to+\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{k(1-t)}P_m(kt)\,\mathrm{d}t=0$.

c) Appliquons la question **1)** à $x=k$ et à P_m.

$$\mathrm{e}^kS(P_m)(0)=k\int_0^1\mathrm{e}^{k(1-t)}P_m(kt)\,\mathrm{d}t+S(P_m)(k).$$

Le polynôme $Q(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ de $\mathbb{Z}[X]$ vérifie $Q(\mathrm{e})=0$ et $Q(0)\neq 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k = 0$ et $a_0 \neq 0$. Puis :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k\right) S(P_m)(0) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k S(P_m)(k) = -\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k S(P_m)(k).$$

D'après la question **3)a)** : $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^k S(P_m)(k) \equiv 0[m]$.

D'où $\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t \equiv -a_0 S(P_m)(0)[m]$.

En conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t \equiv a_0(-1)^{nm+1}(n\,!)^m[m].$$

d) Si on choisit m premier tel que $m \geqslant \max(|a_0|, n)$, alors m ne divise pas $a_0(-1)^{nm+1}(n\,!)^m$.

Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t$ est un entier non congru à 0 modulo m. Cet entier ne peut pas être nul.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{Z}^*$$

et

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant 1.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, le terme $\sum_{k=0}^{n} a_k k \int_0^1 \mathrm{e}^{k(1-t)} P_m(kt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0, ce qui contredit l'inégalité précédente.

En conclusion, il n'existe pas de polynôme Q de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $Q(\mathrm{e}) = 0$.

Le nombre e est transcendant.

Chapitre 17

1 Le sous-espace E engendré par la famille (X, Y) est l'ensemble des combinaisons linéaires de X et de Y.

$$(x, y, z) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = 2\alpha + 5\beta \end{cases}.$$

Éliminons α et β.

$$(x, y, z) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ x + 7y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 7y - 3z = 0.$$

Si la famille (X, Y) engendre le même sous-espace que la famille (Z, T) alors Z et T sont dans E On obtient : $a = \dfrac{10}{3}$ et $b = 3$.

Vérifier ensuite que (Z, T) est libre.

La dimension de E est 2. La famille (Z, T) est une base de E.

2 Pour tout entier naturel n on note f_n l'application définie pour x réel par $f_n(x) = \cos nx$.

Montrons que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de scalaires à support fini telle que $\sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p f_p = 0$.

Pour tout entier naturel q :

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p f_p\right) f_q = \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p \left(\int_0^{2\pi} f_p f_q\right).$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_p f_q = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q, \\ \pi \text{ si } p = q \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } p = q = 0 \end{cases}$ donc $\alpha_q = 0$.

3 Soit x dans E non nul. La famille $(x, u(x))$ est liée et la famille (x) est libre. Il existe un scalaire α_x tel que $u(x) = \alpha_x\, x$.

Montrons que le scalaire α_x est indépendant de x.

Soit y non nul dans E. Il existe un scalaire α_y tel que $u(y) = \alpha_y\, y$.

• Si la famille (x, y) est libre, considérons le vecteur non nul $x + y$.

Il existe un scalaire α_{x+y} tel que $u(x + y) = \alpha_{x+y}\,(x + y)$.

La linéarité de u entraîne $\alpha_{x+y}\,(x + y) = \alpha_x\, x + \alpha_y\, y$.

$$(\alpha_{x+y} - \alpha_x)x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y)y = 0_E.$$

La famille (x, y) est libre, par conséquent :

$$\alpha_{x+y} - \alpha_x = \alpha_{x+y} - \alpha_y = 0.$$

Puis $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$.

• Si la famille (x, y) est liée, il existe β tel que $y = \beta\, x$.

La linéarité de u entraîne $\alpha_y\, y = \beta\, \alpha_x\, x$. Puis $\alpha_x = \alpha_y$ car $\beta \neq 0$ et $x \neq 0_E$.

Par conséquent, il existe α dans $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall\, x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \alpha\, x.$$

Cette égalité est encore vérifiée pour $x = 0_E$.

L'application u est une homothétie.

Réciproquement, toute homothétie possède cette propriété.

4 • Chaque E_p est un espace vectoriel et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout p dans $\mathbb{N}$. La réunion E est dans ce cas un espace vectoriel. Considérer deux vecteurs de E. Ils sont dans l'un des E_p et toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs également.

• Montrons que la famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est génératrice de E_p.

Soit f une fonction de E_p définie par $f(x) = f_k$ pour x dans $[\dfrac{k}{2^p}, \dfrac{k+1}{2^p}[$ et $f(x) = 0$ sinon. L'application f est une combinaison linéaire de la famille : $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$: $f = \sum_{k=0}^{2^p-1} f_k \varphi_{p,k}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• Montrons que la famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est libre.

Vérifier que $\forall (f,g) \in E_p^2 \quad \langle f \ ; \ g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f\ g$ définit un produit scalaire sur E_p puis que la famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est orthogonale.

• La famille $(\varphi_{p,k})_{p\in\mathbb{N}\ k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est une base de E_p.

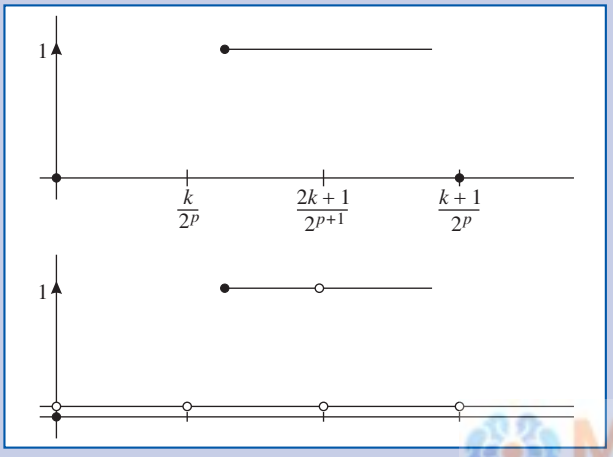
• Recherchons une base de E.

$E_p \subset E_{p+1}$.

La famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est libre dans E_{p+1} et la famille $(\varphi_{p+1,k})_{k\in[\![0,2^{p+1}-1]\!]}$ est génératrice de E_{p+1}.

On a vu en Première année qu'il est possible de compléter la famille libre $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ de E_{P+1} en une base de E_{p+1}.

Vérifier que $\varphi_{p,k} = \varphi_{p+1,2k} + \varphi_{p+1,2k+1}$.



La famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]} \cup (\varphi_{p+1,k})_{k\in[\![0,2^{p+1}-1]\!]\cap 2\mathbb{N}}$ est génératrice de cardinal la dimension de E_{p+1}.

La famille $(\varphi_{p,k})_{k\in[\![0,2^p-1]\!]} \cup (\varphi_{p+1,k})_{k\in[\![0,2^{p+1}-1]\!]\cap 2\mathbb{N}}$ est une base de E_{p+1}.

Vérifier, par récurrence, que la famille $\displaystyle\bigcup_{p=0}^{n} \left(\varphi_{p,2k}\right)_{2k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est une base de E_n puis que la famille $\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left(\varphi_{p,2k}\right)_{2k\in[\![0,2^p-1]\!]}$ est une base de E.

5 • On a : $u \circ u = 0$. Par conséquent, $\text{Im}u \subset \text{Ker}\ u$.

Or $\text{rg}\ u = \dim \text{Im}u = 3 - \dim \text{Ker}\ u$ et $\dim \text{Im}u \leqslant \dim \text{Ker}\ u$.

On obtient $\text{rg}\ u \leqslant \dfrac{3}{2}$, puis $\text{rg}\ u$ dans $\{0,1\}$.

L'indice de nilpotence est 2, donc $u \neq 0$ et $\text{rg}\ u \neq 0$.

Finalement, l'endomorphisme u est de rang 1.

• L'image de u est de dimension 1, soit e_1 tel que $\text{Im}u = \mathbb{K}\ e_1$.

Le vecteur e_1 est un vecteur non nul de Ker u, sous-espace de dimension 2.

On complète la famille libre (e_1) en une base (e_1, e_2) de Ker u.

De plus e_1 appartient à $\text{Im}u$, donc il existe e_3 tel que $u(e_3) = e_1$.

Ce vecteur e_3 n'appartient pas à Ker u, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6 • L'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, par $\varphi(P) = P(X+1) - 2\ P(X) + P(X-1)$, est linéaire.

De plus le degré de $\varphi(P)$ est strictement inférieur à celui de P.

L'application φ est un endomorphisme.

• Pour $k \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$, $\varphi(X^k) = \displaystyle\sum_{p=1}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} 2 \binom{k}{2p} X^{k-2p}$, en particulier $\deg \varphi(X^k) = k-2$.

Pour $k = 1$ ou $k = 0$, $\varphi(X^k) = 0$.

Par conséquent $\text{Ker}\ \varphi = \mathbb{R}_1\ [X]$ et $\text{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ pour $n \geqslant 2$.

Pour $n \leqslant 1$, l'application φ est l'application nulle.

7 • S'il existe un endomorphisme u de E tel que $\text{Ker}\ u = A$ et $\text{Im}u = B$, alors $\dim A + \dim B = \dim E$.

• Réciproquement, supposons que $\dim A + \dim B = \dim E$.

Soit p la dimension de A et $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de A.

D'après le *théorème de la base incomplète*, il existe h dans E tel que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

La dimension de B est $n-p$.

Soit $(f_1, \ldots, f_{n-p})$ une base de B.

Il existe un unique endomorphisme u de E qui transforme la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ en la famille $(0_E, \ldots, 0_E, f_1, \ldots, f_{n-p})$.

Vérifier que $\text{Im}u = B$ et $\text{Ker}\ u = A$.

8 Soit x dans $F \cap (G + F \cap H)$. Le vecteur x appartient à F et il existe y dans G et z dans $F \cap H$ tels que $x = y + z$.

Le vecteur y est dans F, car $y = x - z$ avec x et z dans F.

$y \in G \cap F$ et $z \in F \cap H \quad \Rightarrow \ x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.

Montrons l'inclusion $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + F \cap H)$.

Soit x dans $(F \cap G) + (F \cap H)$. Il existe y dans $F \cap G$ et z dans $F \cap H$ tels que $x = y + z$.

Les vecteurs y et z sont dans F donc $y + z$ appartient à F. Par conséquent :

$$y \in G \quad \text{et} \quad z \in F \cap H \ \Rightarrow \ y + z \in G + F \cap H.$$

9 Vérifier que $F = \{f \in E \ ; \quad f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \ ; \quad \exists\ a \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax\}$ sont des sous-espaces de E.

Soit f dans E. Remarquer que :

• $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x) - f(1)x + f(1)x$

• $F \cap G = \{0_E\}$.

10 Montrons qu'il existe un sous-espace vectoriel C supplémentaire commun à A et à B.

Soit A' un supplémentaire de $A \cap B$ dans A et B' un supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrons que : $A \cap B \oplus A' \oplus B' = A + B$.

• Vérifier que $A \cap B + A' + B' = A + B$.

D'autre part, soit x dans $A \cap B$, y dans A' et z dans B' tels que :

$$x + y + z = 0_E.$$

$x + y$ appartient à A, donc z qui vaut $-x - y$ appartient à $A \cap B'$.

$A \cap B' = A \cap B \cap B' = \{0_E\}$. Donc $z = 0_E$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Puis $x + y = 0_E$. Or la somme $A \cap B \oplus A'$ est directe, donc $x = y = 0_E$.

• Il existe une base adaptée à $A \cap B \oplus A' \oplus B'$:

$$(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q, b_1, ..., b_q)$$

avec $(e_1, ..., e_r)$ une base de $A \cap B$, $(a_1, ..., a_q)$ une base de A' et $(b_1, ..., b_q)$ une base de B'.

Soit C' l'espace Vect $(a_1 + b_1, ..., a_q + b_q)$.

Vérifions que $A \oplus C' = A + B$.

A = Vect $(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q)$ car $(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q)$ est adaptée à $A \cap B \oplus A'$.

Vérifier que :

$$\text{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q, a_1 + b_1, ..., a_q + b_q)$$
$$= \text{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q, b_1, ..., b_q) = A + B.$$

La famille $(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_q, a_1 + b_1, ..., a_q + b_q)$ est une base de $A + B$.

Elle est adaptée à la décomposition $A \oplus C'$. Donc :

$$A \oplus C' = A + B.$$

De même : $B \oplus C' = A + B$.

• Soit C'' un supplémentaire de $A + B$ dans E. Alors $C = C' \oplus C''$ est un supplémentaire commun de A et de B.

11 Soit $p = \dim \text{Im} u$ et $q = \dim \text{Im} v$.

$E = \text{Im} u + \text{Im} v$. Donc $n \leqslant p + q$.

$E = \text{Ker}\, u + \text{Ker}\, v$. Donc $n \leqslant (n - p) + (n - q)$.

Par conséquent, $n = p + q$ et $n = (n - p) + (n - q)$.

D'après le *théorème* 20, les sommes $\text{Im} u + \text{Im} v$ et $\text{Ker}\, u + \text{Ker}\, v$ sont directes.

En dimension infinie, les sommes ne sont pas nécessairement directes.

Considérer : $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \to P'$ et $v : P \to P(0)X^0$.

12 Soit H un supplémentaire de F dans G, H' un supplémentaire de G dans E :

$$F \oplus H \oplus H' = E.$$

Or $\dim(H \oplus H') = \dim H'$. Donc $H = \{0\}$ et $F = G$.

Les sous-espaces F et G ont la même codimension. Par conséquent, $\dim H' = \dim H$.

$H' \subset H$ et $\dim H = \dim H' \Rightarrow H = H'$.

Ainsi $G \oplus H = F \oplus H = E$.

Montrons que $G \subset F$.

Soit x quelconque dans G. Alors x appartient à $F \oplus H$.

Il existe f dans F et h dans H tels que $x = f + h$.

Les vecteurs x et f sont dans G. Donc h appartient à $G \cap H = \{0_E\}$.

Donc $x = f$ et, par conséquent, x appartient à F.

13 Montrons que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{R}}$ une famille de scalaires à support fini $J = \{i \in \mathbb{R} ;\ \beta_i \neq 0\}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i \in J} \beta_i |x - i|^\alpha = 0.$$

Montrons, par l'absurde, que J est vide.

Si J est non vide, pour tout j de J on a :

$$\beta_j f_j = -\sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} \beta_i f_i.$$

Soit p le plus grand entier strictement inférieur à α.

La fonction $-\sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} \beta_i f_i$ est indéfiniment dérivable en j mais la fonction $\beta_j f_j$ n'est dérivable que p fois au point j. Par conséquent, J est vide.

14 **1)** Montrons que la famille $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est libre.

Soit $(\alpha_z)_{z \in \mathbb{C}}$ une famille de complexes à support fini D telle que $\forall x \in I \quad \sum_{z \in D} \alpha_z x^z = 0$.

En dérivant cette somme finie, on obtient :

$$\forall x \in I \quad \sum_{z \in D} z \alpha_z x^{z-1} = 0.$$

En multipliant par x, puis en dérivant, on obtient :

$$\forall x \in I \quad \sum_{z \in D} z^2 \alpha_z x^{z-1} = 0.$$

Vérifier par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad \sum_{z \in D} z^n \alpha_z x^z = 0$$

et que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \forall x \in I \quad \sum_{z \in D} \alpha_z P(z) x^z = 0.$$

Si l'ensemble D est non vide, soit i fixé dans D.

Considérer le polynôme P qui prend la valeur 1 en i et 0 en tout point de $D\{i\}$.

On obtient $\alpha_i = 0$. Ceci est contradictoire avec i dans le support D.

2) • Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé F et f une application continue, non constante sur A, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs de $\mathbb{R}^{+*}$.

L'application f n'est pas constante, donc l'image de A par f est un intervalle I de $\mathbb{R}^{+*}$ non réduit à un point.

Soit $(\alpha_z)_{z \in \mathbb{C}}$ une famille de complexes à support fini telle que $\sum_{z \in C} \alpha_z f^z = 0$.

Alors : $\forall x \in A \quad \sum_{z \in C} \alpha_z f(x)^z = 0$.

Donc : $\forall y \in I \quad \sum_{z \in C} \alpha_z y^z = 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

D'après la question **1)**, on en déduit que : $\forall\, z \in \mathbb{C}\ \ \alpha_z = 0$.
La famille $(f^z)_{z\in\mathbb{C}}$ est libre.
• Montrons que ce résultat ne s'étend pas au cas d'une fonction f définie sur un ensemble A quelconque et prenant une infinité de valeurs.
Prendre $A = \mathbb{N}$ et la fonction exponentielle f.
La famille $(f^{2i\,k\,\pi})_{k\in\mathbb{Z}}$ n'est pas libre.

15 Si $\dim E \leqslant 2$, alors tous les endomorphismes de E conviennent.
Si $\dim E > 2$, il existe un vecteur b de E tel que (a, b) soit libre et $\text{Vect}(a, b) \neq E$.
Soit u un endomorphisme de E tel que $(a, x, u(x))$ soit liée pour tout x dans E.
Pour tout x de $E \setminus \mathbb{K}a$, il existe $\alpha\ (x)$ et $\beta(x)$ dans $\mathbb{K}$ tels que $u(x) = \alpha(x)a + \beta(x)x$.
• Si x appartient à $E \setminus \text{Vect}(a, b)$, en calculant $u(x + b)$, on obtient $\alpha(x + b) = \alpha(x) + \alpha\ (b)$ et $\beta\ (x + b) = \beta\ (x) = \beta\ (b)$.
• Si x appartient à $\text{Vect}(a, b) \setminus \mathbb{K}a$, alors :

$$\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(a, x).$$

Il existe c dans $E \setminus \text{Vect}(a, x)$. Les calculs de $u(x + c)$ et de $u(b + c)$ conduisent à $\alpha(x + c) = \alpha(x) + \alpha\ (c)$ et à $\beta\ (x + c) = \beta\ (x) = \beta\ (c)$ puis à $\alpha(b + c) = \alpha(b) + \alpha\ (c)$ et à $\beta\ (b + c) = \beta\ (b) = \beta\ (c)$.
On obtient encore $\beta\ (x) = \beta\ (b)$.
Par conséquent, il existe un scalaire β tel que :

$$\forall\, x \in E \setminus \mathbb{K}a \quad u(x) = \alpha(x)a + \beta\, x.$$

$u(a) = u(a + b) - u(b) = (\alpha(a + b) - \alpha(b))a + \beta\, a$.
Posons $\alpha(a) = \alpha(a + b) - \alpha(b)$.
Si x appartient à $\mathbb{K}a$, il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$.
Dans ce cas, $u(x) = \lambda\ \alpha(a)\ a+\beta\, x$. Prenons $\alpha(\lambda\ a) = \lambda\ \alpha\ (a)$.
En conclusion, il existe un scalaire β tel que :

$$\forall\, x \in E\ \ \exists\ \alpha(x) \in \mathbb{K}\ \ u(x) = \alpha(x)a + \beta\, x.$$

Vérifier ensuite que α est une forme linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
Réciproquement, pour tout scalaire β et pour toute forme linéaire α, l'application $u\ :\ x \to \alpha(x)a + \beta\, x$ convient.

16 **1)** L'endomorphisme u vérifie $u^2 = -\text{Id}_E$. Par conséquent, $-u$ est l'application réciproque de u.
L'application u est un automorphisme de E.
La famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_{p-1}))$ est libre.
Montrons que la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_p))$ est libre.
Sinon $u(a_p)$ est une combinaison linéaire de la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_{p-1}))$.
Il existe $(\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,p-1]\!]}$ tels que :

$$u(a_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j u(a_j).$$

En composant avec u, on obtiendra :

$$-a_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(a_i) - \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j a_j.$$

Puis :

$$\alpha_p\ \ u(a_p) - a_p = \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i \alpha_p - \beta_i) a_i + \alpha_p\ u\ (a_p) + \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_p \beta_j + \alpha_j) u(a_j).$$

Le vecteur a_p est combinaison linéaire de la famille :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_{p-1})).$$

Ceci contredit l'indépendance linéaire de la famille :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_{p-1})).$$

2) $(\text{Det}\, u)^2 = (-1)^{\dim E} \text{Det}\, \text{I}_n$, donc la dimension de E est paire.
La dimension de l'espace E est supérieure ou égal à 1. Il existe un vecteur a_1 non nul.
La famille (a_1) est libre.
D'après la question **1)**, la famille $(a_1, u(a_1))$ est libre.
Si $\dim E = 2, (a_{1,u(a_1))}$ est une base.
Sinon, il existe un vecteur a_2 tel que $(a_1, a_2,\ u(a_1))$ soit libre.
Alors $(a_1, a_2,\ u(a_1), u(a_2))$ est libre.
Soit p tel que $2p = \dim E$.
On construit ainsi une famille libre de la forme :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p, u\ (a_1), u(a_2), \ldots, u(a_p\ )).$$

Écrire la matrice de u dans cette base.

3) Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2p$ non nulle.
Soit $(e_i)_{i\in[\![1,2p]\!]}$ une base de E.
Il existe un unique endomorphisme u de E tel que :
$u(e_i) = e_{i+p}$ si $i \in [\![1, p]\!]$ et $u(e_i) = -e_{i-p}$ si $i \in [\![p+1, 2\ p]\!]$.
Il vérifie $u^2 = -\text{Id}_E$.

17 **1)** Montrons que **1)** $\Rightarrow$ **2)**. Nous avons déjà : $\text{Ker}\, u \subset \text{Ker}\, u^2$.
Soit x dans $\text{Ker}\, u^2$. $E = \text{Ker}\, u \oplus \text{Im}u$.
$u^2(x) = 0_E$ donc $u(x) \in \text{Ker}\, u \cap \text{Im}u = \{0_E\}$.
Par conséquent, $\text{Ker}\, u^2 = \text{Ker}\, u$.
2) Montrons que **2)** $\Leftrightarrow$ **3)**.
Nous avons déjà $\text{Im}u^2 \subset \text{Im}u$.
$\dim \text{Im}u^2 = \dim E - \dim \text{Ker}\, u^2$
$= \dim E - \dim \text{Ker}\, u = \dim \text{Im}u$.
$\text{Im}u^2 \subset \text{Im}u$ et $\dim \text{Im}u = \dim \text{Im}u^2 \ \Rightarrow\ \text{Im}u = \text{Im}u^2$.
L'implication **3)** $\Rightarrow$ **2)** se démontre de la même manière.
3) Montrons que **2)** $\Rightarrow$ **1)**.
$\dim E = \dim \text{Im}u + \dim \text{Ker}\, u$.
Pour montrer que $E = \text{Ker}\, u \oplus \text{Im}u$, il suffit de montrer que $\text{Ker}\, u \cap \text{Im}u = \{0_E\}$.
Soit x dans $\text{Ker}\, u \cap \text{Im}u$.
Il existe y dans E tel que $u(y) = x$
$u(x) = 0_E$. Donc $u^2(y) = 0_E$.
On en déduit que y appartient à $\text{Ker}\, u^2$.
Or $\text{Ker}\, u = \text{Ker}\, u^2$. Par conséquent, y appartient à $\text{Ker}\, u$ et $x = 0_E$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Ce résultat n'est plus vrai si E est de dimension infinie.
Considérer l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ défini par u : $P(X) \to XP(X)$.

18 • Montrons par l'absurde que si, pour toute décomposition $E = F \oplus G$, on a $u(E) = u(F) \oplus u(G)$, alors u est injective.
Si u n'est pas injective, nous allons construire deux sous-espaces F et G tels que $E = F \oplus G$ et $u(E) \neq u(F) \oplus u(G)$.
Il existe x dans E tel que $u(x) = 0_{E'}$ et $x \neq 0_E$.
L'application u n'est pas nulle. Donc, il existe y dans E tel que $u(y) \neq 0_{E'}$.
Soit $z = y + x$.
Alors $y \neq z$ et $u(y) = u(z)$ avec $u(y) \neq 0_{E'}$.
Vérifions que (y, z) est libre. S'il existait λ dans $\mathbb{K}$ tel que $z = \lambda y$, on aurait $u(z) = \lambda u(y)$.
Dans ce cas $\lambda = 1$, puisque $u(y) = u(z)$. Ainsi, on obtiendrait $y = z$, ce qui n'est pas.
Soit H un supplémentaire de Vect (y, z).
$E = \mathbb{K}y \oplus \mathbb{K}z \oplus H$.
Soit $F = \mathbb{K}y$ et $G = \mathbb{K}z \oplus H$.
On a bien $E = F \oplus G$.
Cependant le vecteur non nul $u(y)$ appartient à $u(F) \cap u(G)$.
La somme $u(F) + u(G)$ n'est pas directe.
• Réciproquement, soient u injective et $E = F \oplus G$. Montrons que $u(E) = u(F) \oplus u(G)$.
Vérifier que $u(E) = u(F) + u(G)$.
Montrons que $u(F) \cap u(G) = \{0_{E'}\}$.
Soit x dans $u(F) \cap u(G)$. Il existe y dans F et z dans G tels que $x = u(y) = u(z)$.
Or u est injective. Donc $y = z$.
Par conséquent, y appartient à $F \cap G$, donc $y = 0_E$ et $x = 0_E$.

19 • Montrons qu'il existe un entier naturel p tel que :
$p \leqslant \dim E$;
$\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad \text{Ker } u^k \neq \text{Ker } u^{k+1}$ et $\text{Im} u^k \neq \text{Im} u^{k+1}$;
$\forall\ k \geqslant p$ $\quad \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$ et $\text{Im} u^k = \text{Im} u^{k+1}$.
Remarquer tout d'abord que : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$ et $\text{Im} u^{k+1} \subset \text{Im} u^k$. En comparant les dimensions, vérifier que :

$$\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1} \Leftrightarrow \text{Im} u^k = \text{Im} u^{k+1}.$$

Il suffit donc, de travailler uniquement avec les noyaux, c'est-à-dire de montrer l'existence de p tel que :
$\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad \text{Ker } u^k \neq \text{Ker } u^{k+1}$;
$\forall k \geqslant p$ $\quad \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$.
Ce qui revient à écrire :
$\forall\ k \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad \dim \text{Ker } u^k \neq \dim \text{Ker } u^{k+1}$;
$\forall k \geqslant p$ $\quad \dim \text{Ker } u^k = \dim \text{Ker } u^{k+1}$.
Vérifions que s'il existe k tel que $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$ alors :

$$\text{Ker } u^{k+1} = \text{Ker } u^{k+2}.$$

On a $\text{Ker } u^{k+1} \subset \text{Ker } u^{k+2}$.
Montrons $\text{Ker } u^{k+2} \subset \text{Ker } u^{k+1}$.
Soit x quelconque dans $\text{Ker } u^{k+2}$. Alors $u(x)$ appartient à $\text{Ker } u^{k+1}$.
Or $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$.
Par conséquent, $u(x)$ appartient à $\text{Ker } u^k$ et x appartient à $\text{Ker } u^{k+1}$.
Considérons la suite des entiers $N_k = \dim \text{Ker } u^k$.
La suite des entiers N_k est croissante majorée par $\dim E$. Elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
Soit p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$.
Puisque $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1} \Rightarrow \text{Ker } u^{k+1} = \text{Ker } u^{k+2}$.
On en déduit que la suite N_k est strictement croissante pour $k < p$ et stationnaire à partir du rang p.
Par conséquent, $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $\text{Ker } u^k \neq \text{Ker } u^{k+1}$;
$\forall k \geqslant p$ $\quad \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$.
Montrons que $p \leqslant n$.
$N_0 = 0$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $N_k < N_{k+1}$.
Par conséquent, $N_p \geqslant p$.
Or $N_p \leqslant \dim E$, d'où $p \leqslant n$.
• Montrons que $E = \text{Im} u^p \oplus \text{Ker } u^p$.
On sait que $\dim \text{Im} u^p + \dim \text{Ker } u^p = \dim E$. Il suffit de montrer que $\text{Im} u^p \cap \text{Ker } u^p = \{0_E\}$.
Soit x dans $\text{Im} u^p \cap \text{Ker } u^p$.
$u^p(x) = 0_E$ et : il existe y dans E tel que $x = u^p(y)$.
Vérifier que y appartient à $\text{Ker } u^{2p}$, puis que $x = 0_E$.
• Montrons que la restriction de u à $\text{Im} u^p$ est un automorphisme de $\text{Im} u^p$.

$$u(\text{Im} u^p) = \text{Im} u^{p+1} = \text{Im} u^p.$$

Par conséquent, la restriction de u à $\text{Im} u^p$ est un endomorphisme surjectif. La dimension de $\text{Im} u^p$ est finie.
Par conséquent, la restriction de u à $\text{Im} u^p$ est un automorphisme de $\text{Im} u^p$.

20 Montrons que q est un projecteur sur F.
• Vérifions que $q \circ q = q$.

$$q \circ q = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}.$$

$\forall x \in E$ $\quad p(x) \in F$ et $u(F) \subset F$.
Par conséquent :

$$\forall x \in E \quad u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}(x) \in F.$$

Or la restriction de p à F est l'identité. Donc :

$$\forall x \in E \quad p \circ u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{-j}(x) = u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}(x).$$

Ainsi :

$$\forall x \in E \quad q \circ q(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u^k \circ u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}(x)$$

Or $u^n = I$. Donc :

$$u^k \circ u^{n-k} \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}(x) = u^n \circ u^j \circ p \circ u^{n-j}(x) = u^j \circ p \circ u^{n-j}(x).$$

$$\forall x \in E \quad q \circ q(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u^j \circ p \circ u^{n-j}(x) = q(x).$$

Par conséquent, q est un projecteur.
• Montrons que le projecteur q a pour image F.

$$\forall x \in F \quad p \circ u^{n-k}(x) = u^{n-k}(x) \text{ car } u^{n-k}(x) \text{ appartient à } F.$$

$$\forall x \in F \quad q(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k \circ u^{n-k}(x) = x.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Par conséquent, $F \subset \text{Im}q$.
De plus, $\forall x \in E \quad p \circ u^{n-k}(x) \in F$
Le sous-espace F est stable par l'application u, donc $\text{Im}q \subset F$.
Attention : q est un projecteur sur F, mais son noyau n'est pas en général le noyau de p.
Nous aurons $\text{Ker}\, q = \text{Ker}\, p$ si, et seulement si, $p = q$.
Montrons que :
$p = q \Leftrightarrow p \circ u = u \circ p \Leftrightarrow u(G) \subset G$.
• Montrons que : $p \circ u = u \circ p \Rightarrow p = q$.
Si $p \circ u = u \circ p$, alors $u^k \circ p \circ u^{n-k} = p$. La vérification est immédiate.
• Montrons que $p = q \Rightarrow u(G) \subset G$.
Soit x dans G. Montrons que $u(x)$ appartient à G.

$$\begin{aligned} p(u(x)) = q(u(x)) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k+1}(x) \\ &= u\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u^{k-1} \circ p \circ u^{n-k+1}\right)(x) + \frac{1}{n+1} p \circ u^{n+1}(x). \\ &= u\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k} \circ p \circ u^{n-k}\right)(x) + \frac{1}{n+1} p \circ u^{n+1}(x) \\ &= u(q(x)) - \frac{1}{n+1} u^{n+1} \circ p(x)) + \frac{1}{n+1} p \circ u^{n+1}(x). \end{aligned}$$

Or $p(x) = q(x) = 0_E$ et $u^n = I$.
Donc $p(u(x)) = \dfrac{1}{n+1} p \circ u(x)$. On en déduit $p(u(x)) = 0_E$.
Par conséquent, $u(x)$ appartient au noyau de p, c'est-à-dire à G.
• Montrons $u(G) \subset G \Rightarrow p = q$.
Soit x dans G :

$$q(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}(x).$$

Or $u(G) \subset G$, donc $u^{n-k}(x)$ appartient à G.
$G = \text{Ker}\, p$ donc $p \circ u^{n-k}(x) = 0_E$. Puis $q(x) = 0_E$.
Nous en déduisons que $G \subset \text{Ker}\, q$.
$\text{Ker}\, q$ est un supplémentaire de F car $\text{Im}q = F$.
$G \subset \text{Ker}\, q$ et $\dim \text{Ker}\, q = \dim G$.
Par conséquent, $\text{Ker}\, q = G$.
Les projecteurs p et q ont même noyau et même image. Ils sont égaux.

21 Soit H un supplémentaire de F dans E et H' un supplémentaire de F' dans E'. $\dim H = \dim H'$.
Il existe un isomorphisme u de H dans H'. Soit p la projection de E sur H parallèlement à F.
Vérifions que l'application f de $E \times F'$ dans $F \times E'$ définie pour (x, y') dans $E \times F'$ par :

$$f(x, y') = \big(x - p(x)\ ,\ y' + u\ (p(x))\big)$$

est un isomorphisme. La linéarité résulte de la linéarité de u et de p.
• $\text{Ker}\, f = \big\{(x, y')\ ;\ \ p(x) = x \quad \text{et} \quad y' = -u\big(p(x)\big)\big\}$.
Soit $(x,\ y')$ dans $\text{Ker}\, f$.
$p(x) = x \Leftrightarrow x \in H$.
Si x appartient à H, alors $-u(p(x))$ appartient à H' et y' appartient à $H' \cap F' = \{0_{E'}\}$. Puis $y' = 0_{E'}$ donc : $u(x) = 0_{E'}$.
L'application u est un isomorphisme de H dans H'. Donc $x = 0_E$.
Par conséquent f est injective.
• Montrons que f est surjective.
Soit (y, x') dans $F \times E'$.
Il existe y' dans F' et h' dans H' tels que $x' = y' + h'$.
Alors (y, x') est l'image par f de $(y + u^{-1}(h'),\ y')$.

Chapitre 18

1 Considérons l'application f définie de $E^* \times F^*$ dans $(E \times F)^*$ par : $\forall (u, v) \in E^* \times F^* \quad \forall (x, y) \in E \times F$
$f(u, v)(x, y) = u(x) + v(y)$.
Soit g l'application de $(E \times F)^*$ dans $E^* \times F^*$ telle que :$\forall\, w \in (E \times F)^*\ g(w) = (u, v)$, où u, v sont définis par :

$$\forall x \in E \quad u(x) = w(x, 0_F)$$
$$\forall y \in F \quad v(y) = w(0_E, y).$$

Vérifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont respectivement les identités de $(E \times F)^*$ et de $E^* \times F^*$.

2 Par l'absurde, supposons $u \neq 0^*$ et $v \neq 0^*$.
Il existe x dans E tel que $u(x) \neq 0$. Dans ce cas, $v(x) = 0$.
De même, il existe y dans E tel que $v(y) \neq 0$ et $u(y) = 0$.
Par conséquent :

$$u(x + y)v(x + y) \neq 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse.

3 Soit X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ solution de $X + \text{Tr}(X)A = B$.
$X = B - \text{Tr}(X)A$.
Il existe k dans $\mathbb{R}$ tel que $X = B + kA$.
Réciproquement, si $X = B + kA$, la matrice X est-elle solution de l'équation $\text{Tr}(B + kA) = \text{Tr}(B) + k\,\text{Tr}(A)$?
La matrice $B + kA$ est solution de $X + \text{Tr}(X)A = B$ si, et seulement si :

$$(\text{Tr}(B) + k\,\text{Tr}(A) + k)A = 0.$$

• Si $\text{Tr}(A) \neq -1$, l'ensemble solution est :

$$\left\{B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)} A\right\}.$$

• Si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(B) = 0$, l'ensemble solution est

$$\{B - kA\ ;\ k \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(B) \neq 0$, l'ensemble solution est $\varnothing$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

4 Soit n la dimension de E. Soit B une base de E.
Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$, notons A la matrice de u dans cette base, M celle de p.
La matrice de $\varphi(u)$ est $AM + MA$.
Soit $(E_{p,q})_{p\in[\![1,n]\!]q\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \sum_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2} \langle E^*_{p,q}, \varphi(E_{p,q})\rangle$$

avec $\varphi(E_{p,q}) = ME_{p,q} + E_{p,q}M$.

$$ME_{p,q} = \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} p_{i,j}E_{i,j}E_{p,q} = \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} p_{i,j}\delta^p_j E_{i,q}$$
$$= \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} p_{i,p}E_{i,q}.$$

De même :

$$E_{p,q}M = \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} p_{q,j}E_{p,j}.$$

Ainsi :

$$\langle E^*_{p,q}, \varphi(E_{p,q})\rangle = p_{p,p} + p_{q,q}.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \sum_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2} p_{p,p} + \sum_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2} p_{q,q} = 2n\mathrm{rg}\,(p).$$

5 Il existe une famille $(H_1, \dots, H_n)$ de n hyperplans de E tels que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad F_i \subset H_i. \quad \bigcup_{i=1}^n F_i \subset \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Nous allons montrer que $\bigcup_{i=1}^n H_i \neq E$.
Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, il existe une forme linéaire u_i non nulle telle que $\mathrm{Ker}\, u_i = H_i$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Considérons la fonction f définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ par :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad f(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^n u_i\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right).$$

Le polynôme à p indéterminées :

$$f(X_1, \dots, X_p) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p u_i(e_k)X_k\right)$$

est non identiquement nul car chaque polynôme $\sum_{k=1}^p u_i(e_k)X_k$ est non nul.
Le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
Le vecteur $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ n'appartient pas à $\bigcup_{i=1}^n H_i$.

6 **1)** Soit n dans $[\![0,n]\!]$, considérons le polynôme X^n.
Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $u_k(X^n) = 0$ si $k \neq n$ et $u_k(X^n) = n!$ si $k = n$.
Ce qui s'écrit :

$$\left\langle u_k, \frac{X^n}{n!}\right\rangle = \delta^n_k.$$

D'après le *théorème* 10, la famille $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de E^* et la famille $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_{n\in[\![0,n]\!]}$ est une base de E, préduale de la base $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
2) L'application v définie sur E, pour tout P de E, par $v(P) = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}\,t$ est une forme linéaire sur E.
Elle s'écrit dans la base $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$:

$$v = \sum_{k=0}^n \left\langle v, \frac{X^k}{k!}\right\rangle u_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!}u_k.$$

7 La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r. Elle est équivalente à $J = \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Il existe P et Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P\,J\,Q$.
Soit $Q\;B\;P = \begin{pmatrix} X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$ où X est dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, Y dans $\mathcal{M}_{r,\,n-r}(\mathbb{K})$, Z dans $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et T dans $\mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{K})$.

$$A\;B\;A = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

$$A\;B\;A = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X & Y\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

$$A\;B\;A = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

$$A\;B\;A = 0 \Leftrightarrow B = Q\begin{pmatrix} 0 & Y\\ Z & T\end{pmatrix}P.$$

Il y a $n^2 - r^2$ termes dans les matrices Y, Z et T.
Par conséquent, la dimension de $\{\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \quad ABA = 0\,\}$ est $n^2 - r^2$.

8 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.
Il existe P et Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$.
Pour tout i de $[\![1\ ,\ r]\!]$, soit $A_i = P\;D_i\;Q$ où D_i est la matrice dont le seul terme non nul est celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne.

$$A = \sum_{i=1}^r A_i.$$

Le rang de A_i est celui de D_i, il est égal à 1.
La matrice A est donc la somme de r matrices de rang 1.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

9 Nous allons travailler sur les colonnes de A et de I_3 car il faut déterminer l'image de u.
$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.
$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $a \neq b$:
$C_3 \leftarrow C_3 - \dfrac{a-c}{a-b} C_2$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & 0 \\ bc & c(a-b) & (b-c)(a-c) \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{b-c}{a-b} \\ 0 & 1 & -\dfrac{a-c}{a-b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est $(a-b)(b-c)(a-c)$.
• Si $c \neq b$ et $c \neq a$, le rang est 3, l'image est $\mathbb{R}^3$ et le noyau est $\{(0,\ 0,\ 0)\}$.
• Si $c = b$ ou $c = a$, le rang est 2, le déterminant est nul. L'image est $\text{Vect}\{(1,\ b+c, bc), (0,\ 1,\ c)\}$ et le noyau est la droite $\text{Vect}\{(b-c,\ c-a,\ a-b)\}$.
• Si $a = b$ et si $a \neq c$, échangez le rôle de b et c.
• Si $a = b = c$, alors le rang est 1, le déterminant est nul.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image est $\text{Vect}\{(1,\ 2b,\ b^2)\}$.
Le noyau est $\text{Vect}\{(-1,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1)\ \}$.

10 Il est parfois intéressant de procéder par équivalence. Soit S le système :

$$\begin{cases} ax+ & y+ & z+ & t = & 1 \\ x+ & ay+ & z+ & t = & b \\ x+ & y+ & az+ & t = & b^2 \\ x+ & y+ & z+ & at = & b^3 \end{cases}$$

Nous remarquons que la somme des équations donne :
$(a+3)(x+y+z+t) = 1+b+b^2+b^3$.
• Si $a \neq -3$:

$S \Rightarrow x+y+z+t = \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)}$. Donc :

$S \Leftrightarrow (S \text{ et } x+y+z+t = \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)})$.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ & y+ & z+ & t = & 1 \\ x+ & ay+ & z+ & t = & b \\ x+ & y+ & az+ & t = & b^2 \\ x+ & y+ & z+ & at = & b^3 \\ x+ & y+ & z+ & t = & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \end{cases}$$

Nous pouvons retrancher la dernière ligne à chacune des quatre premières lignes.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) & x & = & 1- & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \\ (a-1) & y & = & b- & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \\ (a-1) & z & = & b^2- & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \\ (a-1) & t & = & b^3- & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \\ x+ & y+ & z+ & t = & \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)} \end{cases}$$

• Si $a \neq -3$ et $a \neq 1$, le système a une solution unique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a-1}\left(1 - \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)}\right) \\ y = \dfrac{1}{a-1}\left(b - \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)}\right) \\ z = \dfrac{1}{a-1}\left(b^2 - \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)}\right) \\ t = \dfrac{1}{a-1}\left(b^3 - \dfrac{1+b+b^2+b^3}{(a+3)}\right) \end{cases}$$

• Si $a = 1$, on revient au système initial.
Si $b \neq 1$, il est incompatible.
Si $b = 1$, il est équivalent à l'unique équation $x+y+z+t = 1$.
• Si $a = -3$, le système est compatible si, et seulement si, $b \in \{\text{i}, -\text{i}, -1\}$.
Dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\left(\frac{b^3-1}{4}, \frac{b^3-b}{4}, \frac{b^3-b^2}{4}, 0\right) + \mathbb{C}(1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

11 • Recherchons un polynôme P_1 de degré au plus 3, tel que :

$$\widetilde{P}_1(0) = 1, \quad \widetilde{P}_1'(0) = 0, \quad \widetilde{P}_1(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \widetilde{P}_1(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$\widetilde{P}_1(1) = 0$. Donc, il existe trois scalaires a, b, c tels que $P = (X-1)(aX^2+bX+c)$.
On obtient $P_1 = 8X^3 - 9X^2 + 1$.
• Recherchons un polynôme P_2 de degré au plus 3, tel que :

$$\widetilde{P}_2(0) = 0, \quad \widetilde{P}_2'(0) = 1, \quad \widetilde{P}_2(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \widetilde{P}_2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Vérifier que $P_2 = 2X^3 - 3X^2 + X$.
• Recherchons un polynôme P_3 de degré au plus 3, tel que :

$$\widetilde{P}_3(0) = 0, \quad \widetilde{P}_3'(0) = 0, \quad \widetilde{P}_3(1) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \widetilde{P}_3(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Obtenir $P_3 = 4X^3 - 3X^2$.
• Recherchons un polynôme P_4 de degré au plus 3, tel que :

$$\widetilde{P}_4(0) = 0, \quad \widetilde{P}_4'(0) = 0, \quad \widetilde{P}_4(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \widetilde{P}_4(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Le polynôme P_4 est $-12X^3 + 12X^2$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

• La dimension de E est 4. De plus :

$$\forall\, i \in [\![1,4]\!] \ \forall\, j \in [\![1,4]\!] \quad \langle u_i, P_j\rangle = \delta_i^j.$$

D'après le *théorème* 10, la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de E^*et la famille (P_1,P_2,P_3,P_4) est une base de E, préduale de la base (u_1,u_2,u_3,u_4).

12 **1)** $A^\perp$ est non vide, elle contient 0^*. $A^\perp$ est contenu dans E^*. Vérifions la stabilité par combinaison linéaire.
Soit u et v dans $A^\perp$ et deux scalaires α et β.
$\forall\, x \in A \quad u(x) = 0$ et $v(x) = 0$.
Par conséquent :

$$\forall\, x \in A \quad (\alpha u + \beta v)(x) = 0.$$

2) Soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$.
Donc $F \subset \operatorname{Ker} u$ et $G \subset \operatorname{Ker} u$.
$F \oplus G = E$. Par conséquent :

$$E \subset \operatorname{Ker} u \quad \text{et} \quad u = 0^*.$$

Soit p la projection d'image F et de noyau G et q la projection d'image G et de noyau F. $p+q = \mathrm{Id}_E$.
Soit u dans E^*.
Vérifier que $u = u\circ p + u\circ q$, puis que u appartient à $F^\perp + G^\perp$.

13 **1)** $L_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i$. C'est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
• Vérifier que les n formes linéaires $l_1,\dots,l_n$ sont indépendantes. On en déduit :

$$\dim L_0 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) - n = n^2 - n.$$

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \forall\, j \in [\![1,n-1]\!] \quad E_{i,j} - E_{i,n} \in L_0.$$

La famille $(E_{i,j} - E_{i,n})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,n-1]\!]}$ est génératrice de cardinal n^2-n. C'est une base de L_0.
2) $M \in L_K \Leftrightarrow M - K\mathrm{I}_n \in L_0$ est immédiate. $\mathrm{I}_n \notin L_0$.
$M \in L \Leftrightarrow \exists\, K \in \mathbb{R} \quad M - K\mathrm{I}_n \in L_0$.
On en déduit $L = L_0 \oplus \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.
$((E_{i,j} - E_{i,n})_{i\in[\![1,n]\!] \text{ et } j\in[\![1,n-1]\!]}, \mathrm{I}_n)$ est une base de L et :
$\dim L = n^2 - n + 1$.
3) D'après la question **1)**, toute matrice M de L_0 s'écrit :

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n}).$$

$$M \in C_0 \Leftrightarrow \left(\forall\, j \in [\![1,n-1]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0\right)$$

et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} = 0.$

Or, la condition $\left(\forall\, j \in [\![1,n-1]\!] \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0\right)$ implique :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) = 0.$$

Par conséquent :

$$M \in C_0 \Leftrightarrow \left(\forall\, j \in [\![1,n-1]\!] \quad a_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j}\right).$$

Vérifier que :

$$\forall\, M \in L_0 \quad M \in C_0 \Leftrightarrow M = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}).$$

La famille $((E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{i\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } j\in[\![1,n-1]\!]}$ est génératrice de $L_0 \cap C_0$. Vérifier que cette famille est libre.
Son cardinal $(n-1)^2$est la dimension de $L_0 \cap C_0$.
La famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{i\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } j\in[\![1,n-1]\!]}$ est une base de $L_0 \cap C_0$.
4) Soit une matrice quelconque M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
$M \in L \cap C \Leftrightarrow \exists\, K_1 \in \mathbb{R} \quad \exists\, K_2 \in \mathbb{R} \quad M \in L_{K_1} \cap C_{K_2}$.
En écrivant que la somme de toutes les lignes est égale à la somme de toutes les colonnes, on obtient $K_1 = K_2$.
$M \in L \cap C \Leftrightarrow \exists\, K \in \mathbb{R} \quad M \in L_K \cap C_K$.
$M \in L_K \cap C_K \Leftrightarrow M - K\mathrm{I}_n \in L_0 \cap C_0$.
Or I_n n'appartient pas à $L_0 \cap C_0$.
Donc $L \cap C = (L_0 \cap C_0) \oplus \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.
Par conséquent, $L \cap C$ est un espace vectoriel et $\dim L \cap C = (n-1)^2 + 1$.
La famille $((E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{i\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } j\in[\![1,n-1]\!]}, \mathrm{I}_n)$ est une base.
5) Soit M dans $L \cap C$, alors M s'écrit :

$$M = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}) + K\mathrm{I}_n.$$

En écrivant que la trace est égale à K, on obtient :

$$M \in \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} + (n-1)K = 0$$

Or, $\mathrm{I}_n \notin \Omega$. Donc l'application φ associe à :

$$((a_{i,j})_{i\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } j\in[\![1,n-1]\!]}, K) \text{ de } \mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$$

le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} + (n-1)K$. C'est une forme linéaire non nulle.
Par conséquent, Ω est un hyperplan de $L \cap C$.
On en déduit sa dimension $\dim \Omega = (n-1)^2$. Toute matrice de Ω s'écrit :

$$M = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}) - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\right)\mathrm{I}_n.$$

Étudions $\mathfrak{M}$. Pour cela on introduit la forme linéaire ψ qui associe à toute matrice M de Ω, le réel :

$$D(M) = \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n+1-i} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1,j} - \frac{1}{2(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\right)(1-(-1)^n).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si $n = 2$, on vérifie qu'elle est identiquement nulle sur $\mathfrak{Q}$. Donc $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}$ et $\dim \mathfrak{M} = 1$.
Si n est pair et distinct de 2, la matrice :
$\frac{1}{2}(E_{11} + E_{n1} + E_{1n} + E_{nn}) + \sum_{i=2}^{n-1} E_{i,n+1-i}$ de $\mathfrak{Q}$ n'appartient pas à $\mathfrak{M}$. La forme ψ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{Q}$.
Si n est impair, la matrice $\sum_{i=1}^{n} E_{i,n+1-i}$ de $\mathfrak{Q}$ n'appartient pas à $\mathfrak{M}$.
Pour $n \neq 2$, $\mathfrak{M}$ est un hyperplan de $\mathfrak{Q}$ et :

$$\dim \mathfrak{M} = (n-1)^2 - 1 = n(n-2).$$

14 Soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée.
Nous avons $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det\ A)I$.
Notons v l'application linéaire canoniquement associée à $\widetilde{A}$.
$\det\ \widetilde{A}\ \det\ A = (\det\ A)^n$.
• Si $\det\ A \neq 0$, alors $\det\ \widetilde{A} \neq 0$. Le rang de $\widetilde{A}$ est n.
• Si $\det\ A = 0$, alors $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 0$.
Dans ce cas, le rang de A est strictement inférieur à n.
• Si $\operatorname{rg}\ A < n-1$, alors $\widetilde{A} = 0$. Puisque le plus grand déterminant extrait non nul est un déterminant d'ordre r strictement inférieur à n, le rang de $\widetilde{A}$ est 0.
• Si $\operatorname{rg}\ A = n-1$, il existe au moins un élément de $\widetilde{A}$ qui est non nul. Le rang de $\widetilde{A}$ est supérieur ou égal à 1. On va montrer que $\operatorname{rg}\ \widetilde{A} = 1$.
$A\ \widetilde{A} = 0$.
Par conséquent, $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}\ u$. $\operatorname{rg}\ \widetilde{A} \leqslant n - \operatorname{rg}\ A = 1$.
Le rang de $\widetilde{A}$ est 1.

15 Soit P une matrice de $\mathfrak{GL}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = P\ M\ P^{-1}.$$

Considérons la base canonique $(E_{i,j})_{i\in[\![1,\,n]\!],\ j\in[\![1,\,n]\!]}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
Notons $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ les termes généraux de P et de P^{-1}.
Vérifier $f(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{k,i}q_{j,l}E_{k,l}$.
La matrice M de f dans la base :

$$(E_{1,1}, \ldots,\ E_{n,1},\ E_{1,2}, \ldots, E_{n,2}, \ldots,\ E_{1,n},\ E_{n,n})$$

est décomposée en blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} q_{1,1}P & q_{2,1}P & \cdots & q_{n,1}P \\ q_{1,2}P & q_{2,2}P & \cdots & q_{n,2}P \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n,1}P & q_{n,2}P & \cdots & q_{n,n}P \end{pmatrix}.$$

• Nous trouvons alors directement, la trace de f.

$$\operatorname{Tr}\ f = \sum_{i=1}^{n}(q_{i,i}\ \operatorname{Tr}\ P) = \operatorname{Tr}\ P^{-1}\ \operatorname{Tr}\ P.$$

• Recherchons le déterminant.
Effectuons des opérations élémentaires sur la matrice P^{-1}. On note m le nombre d'échanges de deux lignes distinctes.
On obtient une matrice triangulaire T de diagonale $(a_1, \ldots,\ a_n)$.
Le déterminant de P^{-1} est $(-1)^m \prod_{i=1}^{n} a_i$.
Si on effectue les mêmes opérations sur les blocs de la matrice M, on obtient une matrice triangulaire par blocs de diagonale $(a_1P, \ldots,\ a_nP)$.
Il y a dans ce cas mn échanges de lignes.

$$\det\ M = (-1)^{mn}\ (\det\ P)^n \prod_{i=1}^{n} a_i^n = (\det\ P\ \det\ P^{-1})^n = 1.$$

16 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B & -D \end{pmatrix}$
La matrice $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix}$ est inversible.
Par conséquent, le rang de M est celui de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1} & B-D \end{pmatrix}$.
Or, $\operatorname{rg}\ A = \operatorname{rg}\ M = n$.
Les n premiers vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.
Donc les p dernières colonnes sont des combinaisons linéaires des n premières.

$$C\quad A^{-1}\ B - D = 0.$$

Chapitre 19

1 **1)** Soit F un sous-espace de dimension $k-1$; $k \neq n$ donc $k - 1 \leqslant n - 2$ alors il existe deux vecteurs x et y de E tels que $F \oplus \mathbb{K}\ x \oplus \mathbb{K}\ y$ soit directe. $F \oplus \mathbb{K}x$ et $F \oplus \mathbb{K}y$ sont des sous-espaces de dimension k; il s'agit donc de sous-espaces stables par u.
On se propose de démontrer que :

$$\forall z \in F \quad u(z) \in F.$$

Soit z quelconque dans F. Alors $z \in F \oplus \mathbb{K}x$. $u(z) \in F \oplus \mathbb{K}x$.
De même $u(z) \in F \oplus \mathbb{K}y$:

$$u(z) \in (F \oplus \mathbb{K}x\ ) \cap (F \oplus \mathbb{K}y).$$

Le vecteur $u(z)$ s'écrit $u(z) = f + \alpha\ x = f' + \alpha' y$ avec f et f'' dans F et α et α' dans $\mathbb{K}$.
La somme $F \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y$ est directe et $(f - f') + \alpha\ x - \alpha' y = 0_E$.
Par conséquent, $f = f'$, $\alpha = 0$ et $\alpha' = 0$.
Ceci nous permet de prouver que $u(z) \in F$, puis que F est stable par u.
2) On montre par récurrence, à l'aide de la question **1)** que toutes les droites sont stables par u.
Vérifier que u est une homothétie (*cf. chapitre* 17, *exercice* 3).

2 Il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in\ \mathbb{K}^n$ tel que :
$\sum_{k=0}^{n} a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n\ \neq 0$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u^k = -a_0 \mathrm{Id}_E.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On obtient, après division par $-a_0$ et factorisation :

$$u \circ \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{a_0} u^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{a_0} u^{k-1} \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Ainsi u est inversible et $u^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{a_0} u^{k-1}$.

3 Soit P le P.P.C.M. des polynômes Π_{Mi}
$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \Pi_{Mi}(M_i) = 0.$
Alors $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad P(M_i) = 0.$
Donc $P(M) = 0$ et P est un polynôme annulateur de M.
P est unitaire, montrons qu'il s'agit du polynôme minimal de M.
Soit Q un polynôme annulateur de M ; on a :

$$Q(M) = \begin{bmatrix} Q(M_1) & O & O \\ O & Q(M_2) & O \\ O & O & Q(M_p) \end{bmatrix} = 0.$$

Donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad Q(M_i) = 0.$$

On en déduit que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad \Pi_{Mi} \mid Q,$$

puis que P divise Q.
P divise donc tout polynôme annulateur de M, il s'agit bien du polynôme minimal de M.

4 $Q(u)R(u) = P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Le *théorème de décomposition des noyaux* donne :

$$\mathrm{Ker}\, Q(u) \oplus \mathrm{Ker}\, R(u) = \mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, 0_{\mathcal{L}(E)} = E.$$

On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, Q(u) + \dim \mathrm{Ker}\, R(u) = \dim E$.
Puis, on a :

$$\dim \mathrm{Im} R(u) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, R(u) = \dim \mathrm{Ker}\, Q(u).$$

De plus $Q(u)R(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\mathrm{Im} R(u) \subset \mathrm{Ker}\, Q(u)$. Finalement :

$$\mathrm{Im} R(u) = \mathrm{Ker}\, Q(u).$$

Ensuite, on procède de même en inversant les rôles de Q et R.

5 Il faut tout d'abord vérifier que :

$$\forall f \in E \quad T(f) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

On peut introduire $F : \left(x \longmapsto \int_0^x f\right)$, primitive de f dont l'existence est assurée par la continuité de f.

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x}.$$

La linéarité de l'intégration assure la linéarité de T.

λ est une valeur propre de T si, et seulement si, il existe une application f continue sur $[0, 1]$ non nulle telle que :

$$T(f)(0) = \lambda f(0)$$

et

$$\forall x \in]0, 1] \quad T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f = \lambda f(x).$$

On obtient deux conditions :

$$(1 - \lambda) f(0) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad \int_0^x f = \lambda x f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

On suppose qu'il existe une application f vérifiant **(1)** et **(2)**.
Prouver, à l'aide de la relation **(2)**, la dérivabilité de f sur $]0, 1]$ lorsque $\lambda \neq 0$. En déduire ensuite que l'application f est solution de l'équation différentielle : $\lambda x y' - (1 - \lambda) y = 0$.
• Pour $\lambda = 0$, la seule solution est la fonction nulle, ce n'est pas un vecteur propre.
• Pour $\lambda \neq 0$, les solutions de cette équation s'écrivent $f : (x \longmapsto C x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$ sur $]0, 1]$.
• Pour $\lambda = 1$, on vérifie que les fonctions constantes conviennent.
• Pour $\lambda \notin \{0, 1\}$, la solution $f : x \longmapsto C x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ sur $]0, 1]$ doit être continue et prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$. Cela n'est possible que pour $\lambda \in]0, 1[$.
En conclusion, $\mathrm{Sp}(T) =]0, 1]$. Le sous-espace propre associé à λ est la droite de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ engendrée par la fonction $f : (x \longmapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

6 Notons D la dérivation sur $\mathbb{R}$, endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad D^2(f_n) = -n^2 f_n$ et $D^2(g_n) = -n^2 g_n$.
Pour tout n entier, les fonctions f_n et g_n sont dans le sous-espace propre de D^2 associé à la valeur propre $-n^2$.
Pour $n = 0$, la fonction g_n est nulle. Ce n'est pas un vecteur propre.
D'après le *théorème* 10, il suffit de vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la famille (f_n, g_n) est libre.
Soit α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha f_n + \beta g_n = 0$.
On vérifie facilement que : $\alpha = \beta = 0$.

7 On peut supposer par exemple : $n \geqslant p$.
Introduire les produits de matrices suivants :

$$\left[\begin{array}{c|c} XI_n - BA & B \\ \hline O_{p,n} & XI_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,p} \\ \hline A & I_p \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} XI_n & B \\ \hline XA & XI_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,p} \\ \hline A & I_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} XI_n & B \\ \hline O_{p,n} & XI_p - AB \end{array}\right]$$

Calculer les déterminants de ces matrices, puis en déduire :

$$(-1)^n P_{BA}(X) X^p = (-1)^p P_{AB}(X) X^n.$$

En conclusion, $P_{BA}(X) = (-1)^{p-n} P_{AB}(X) X^{n-p}$.
Il y a égalité si, et seulement si, $n = p$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

8 $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u(e_i) = e_{i+n}$ et $u(e_{i+n}) = -e_i$.

Vérifier que X^2+1 est un polynôme annulateur de u.
Le polynôme minimal divise X^2+1; il est différent de $X+\mathrm{i}$ et de $X-\mathrm{i}$ car $u \neq \pm \mathrm{i}\,\mathrm{Id}_E$ aussi il est égal à X^2+1.
Le polynôme caractéristique a les mêmes racines que le polynôme minimal donc :

$$P_u(x) = (-1)^{2n}(X+\mathrm{i})^p(X-\mathrm{i})^q \quad \text{avec} \quad p+q=2n.$$

De plus, les coefficients de $P_u(x)$ sont réels donc $p=q$.
Nous avons donc $P_u(x) = \left(X^2+1\right)^{2n}$.
Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ sont i et $-\mathrm{i}$.
On obtient le sous-espace propre associé à i en étudiant le système :

$$\begin{cases} x_1 - \mathrm{i}x_{n+1} = 0 \\ x_2 - \mathrm{i}x_{n+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n - \mathrm{i}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à i est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_i de coordonnées $(x_1,\ldots,x_{2n})$ nulles sauf $x_i=1$ et $x_{i+n}=-\mathrm{i}$.
Pour la valeur propre i, on retrouve le résultat à partir du précédent en passant au conjugué.

9 $\mathrm{Det}A \wedge \mathrm{Det}B = 1$.

D'après la *propriété de Bézout*, il existe deux entiers u et v tels que :

$$u\mathrm{Det}A + v\mathrm{Det}B = 1.$$

Il existe deux polynômes Q_A et Q_B à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $n-1$ tels que :

$$P_A(x) = XQ_A(x) + \mathrm{Det}A \quad \text{et} \quad P_B(x) = XQ_B(x) + \mathrm{Det}B.$$

Le *thèorème de Cayley-Hamilton* affirme que :

$$AQ_A(A) + (\mathrm{Det}A)\,I_n = 0_n \quad \text{et} \quad BQ_B(B) + (\mathrm{Det}B)\,I_n = 0_n.$$

Les matrices $U = -uQ_A(A)$ et $V = -vQ_B(B)$ appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et vérifient :

$$AU + BV = UA + VB = \mathrm{I}_n.$$

10 $X(X^2+\alpha)$ est un polynôme annulateur de u. Or X et $(X^2+\alpha)$ sont premiers entre eux car $\alpha \neq 0$.
On peut utiliser le *théorème de décomposition des noyaux* :

$$\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E) = E.$$

D'autre part :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E) \quad x = -\frac{1}{\alpha}u^2(x).$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E)$ est inclus dans $\mathrm{Im}u$.
De plus $(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E)\circ u = 0$. Donc $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E)$.
La double inclusion assure l'égalité :

$$\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E).$$

Montrons maintenant que le rang de u est pair.
Soit v la restriction de u à $\mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E)$. $\mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E)$ est stable par u, donc v est un endomorphisme de :

$$\mathrm{Ker}\,(u^2+\alpha\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}u.$$

Dans ces conditions $v^2 = -\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,u}$ et $\mathrm{Det}\,v^2 = (-\alpha)^{\mathrm{rg}\ u}$; or $\mathrm{Det}\,v^2 = (\mathrm{Det}\,v)^2 \geqslant 0$ donc rg u est pair puisque $\alpha > 0$.

11 Il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X)$ avec X et $Q(X)$ premiers entre eux puisque P admet 0 pour racine simple.
Le *théorème de décomposition des noyaux* donne :

$$\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,Q(u) = E.$$

$Q(u)\,u$ est l'application nulle donc $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}\,Q(u)$.
D'autre part $Q(0) \neq 0$. Q s'écrit $Q(X) = XR(X)+k$ avec $k \neq 0$.
$\forall x \in \mathrm{Ker}\,Q(u) \quad x = -\frac{1}{k}u\,R(u)(x)$ donc $\mathrm{Ker}\,Q(u) \subset \mathrm{Im}u$.
Ainsi $\mathrm{Ker}\,Q(u) = \mathrm{Im}u$, ce qui assure le résultat.

12 Soit $A_1,\ldots,A_n$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux et $u_1,\ldots,u_n$ les endomorphismes canoniquement associés.
Nous allons montrer par récurrence la propriété suivante :
P_n : Pour toute famille $u_1,\ldots,u_n$ de n endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel E de dimension inférieure ou égale à n qui commutent deux à deux, l'application $u_1\circ\cdots\circ u_n$ est l'application nulle.
Pour $n=1$, c'est immédiat. On suppose P_n vérifiée, montrons P_{n+1}.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $u_1,\ldots,u_{n+1}, n+1$ endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux.
Notons $F = \mathrm{Im}u_{n+1}$; les u_i commutent deux à deux donc F est stable par tout u_i.
Soit v_i la restriction de chaque u_i à F.
Les v_i sont des endomorphismes de F, ils sont également nilpotents et commutent deux à deux sur un espace F dont la dimension est inférieure ou égale à n.
En effet, dim $F = n+1$ entraîne la bijectivité de u_{n+1}, ce qui est impossible puisque u_{n+1} est nilpotent.
Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence aux v_i et nous obtenons $v_1\circ\cdots\circ v_n$ nulle sur F.
Enfin :

$$u_1\circ\cdots\circ u_{n+1} = (u_1\circ\cdots\circ u_n)\circ u_{n+1} = (v_1\circ\cdots\circ v_n)\circ u_{n+1}$$

car $F = \mathrm{Im}u_{n+1}$ d'où la nullité de $u_1\circ\cdots\circ u_{n+1}$.
Ceci termine la récurrence. La propriété est démontrée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

13 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4-1$ et $B = X^4-X$. On définit l'application φ qui, à un polynôme P, associe le polynôme R, reste de la division euclidienne de AP par B.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$\forall P \in E \quad \exists ! (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$$
$$AP = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Vérifier que $\varphi(P) \in E$.
L'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne permettent de prouver la linéarité de φ.
Montrer que P appartient au noyau de φ si, et seulement si, B divise AP c'est-à-dire si, et seulement si, $X\left(X^2+X+1\right)$ divise P.
Une première méthode utilise principalement la notion de divisibilité des polynômes.
Ainsi $\text{Ker}\,\varphi = \{aX\left(X^2+X+1\right) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.
Remarquer ensuite que $\text{Im}\varphi$ est un hyperplan, que $\text{Im}\varphi \subset \{(X-1)S \ ; \ S \in \mathbb{R}_2[X]\}$ et en déduire l'égalité.
Rechercher ensuite les valeurs propres λ. Elles sont caractérisées par :

$$\exists \ Q \in \mathbb{R}[X] \quad AP = BQ + \lambda P.$$

Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$ si, et seulement si :

$$X(X-1)\left(X^2+X+1\right) \text{ divise } \left(X^4 - 1 - \lambda\right) P.$$

Vérifier qu'il y a exactement deux valeurs propres.
• Si $\lambda = 0$, le sous-espace propre associé est le noyau de φ.
• Si $\lambda \neq 0$, le polynôme P appartient à $\text{Im}p$. Il existe S tel que :
$P = (X-1)S$ et $X\left(X^2+X+1\right)$ divise $\left(X^4 - \lambda - 1\right) S$.
Ceci n'est possible que pour $\lambda = -1$ et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par le polynôme $X^3 - 1$.

14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Supposons tout d'abord que A est inversible, d'inverse A^{-1}.
Notons $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.
Rappelons la relation $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\text{Det}A)\text{I}_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

$$\begin{aligned}
\text{Det}\left(\widetilde{A} - X\text{I}_n\right) &= \text{Det}\left((\text{Det}A)\,A^{-1} - X\text{I}_n\right) \\
&= \frac{1}{\text{Det}A}\text{Det}\left(\left(A\,(\text{Det}A)\,A^{-1} - XA\right)\right) \\
&= \frac{1}{\text{Det}A}\text{Det}\left((\text{Det}A)\,\text{I}_n - XA\right) \\
&= \frac{1}{\text{Det}A}X^n\,(-1)^n\,\text{Det}\left(A - \frac{\text{Det}A}{X}\text{I}_n\right) \\
&= \frac{1}{\text{Det}A}X^n\,(-1)^n\,P_A\left(\frac{\text{Det}A}{X}\right).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant A non inversible.
Si le rang de A est strictement inférieur à $n-1$, alors $\widetilde{A} = 0$ et son polynôme caractéristique est $(-1)^n\,X^n$.
Si le rang de A est $n-1$, alors le rang de $\widetilde{A}$ est 1.
En effet, $A\widetilde{A} = 0$ donc $\text{Im}\widetilde{A} \subset \text{Ker}\,A$. Or : $\dim(\text{Ker}\,A) = 1$.
Donc $\text{Im}\widetilde{A} = \text{Ker}\,A$ ou $\text{Im}\widetilde{A} = \{0_E\}$
Or $\widetilde{A}$ n'est pas nulle. Donc $\text{Im}\widetilde{A} = \text{Ker}\,A$ et $\text{Ker}\,\widetilde{A}$ est de dimension $n-1$.
Le réel 0 est une valeur propre de multiplicité $n-1$. La deuxième valeur propre est donc simple si elle est non nulle, il s'agit de la trace de $\widetilde{A}$.
Le polynôme caractéristique est alors $(-1)^n\,X^{n-1}\left(X - \text{Tr}\,\widetilde{A}\right)$.

15 Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ nilpotente d'indice 3. Cela signifie que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.
• Le seul sous-espace stable de dimension 0 est $\{0_E\}$.
• Les seules droites stables sont les droites qui admettent pour vecteur directeur un vecteur propre de u. L'endomorphisme u est nilpotent donc X^3 est annulateur de u et 0 est la seule valeur propre.
Remarquer que $\text{Im}u \subset \text{Ker}\,u^2$, $\text{Ker}\,u^3 = E$, $\text{Ker}\,u^2 \neq \text{Ker}\,u^3$, $\text{Ker}\,u^2 \subset \text{Ker}\,u^3$; en déduire que $\text{Ker}\,u$ est une droite et que $\text{Im}u = \text{Ker}\,u^2$.
La seule droite stable est donc $\text{Ker}\,u$.
• Soit F un plan stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u.
Le polynôme minimal de u est X^3 car $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Il est aussi annulateur de v. Le polynôme minimal de v est de la forme X^n avec $n \leqslant 3$.
Par conséquent, le polynôme caractéristique P_v de v est X^2 car la dimension de F est 2. Le *théorème de Cayley-Hamilton* affirme $P_v(v) = 0$ c'est-à-dire : $\forall\, x \in F \quad P_v(v)(x) = 0_E$.
On obtient $\forall\, x \in F \quad u^2(x) = v^2(x) = 0_E$. Puis $F \subset \text{Ker}\,u^2$.
Or F et $\text{Ker}\,u^2$ sont de même dimension donc $F = \text{Ker}\,u^2$.
• E est stable par u de manière évidente.
En conclusion les seuls sous-espaces stables par u sont :

$$\{0_E\}, \quad \text{Ker}\,u, \quad \text{Ker}\,u^2 \quad \text{et} \quad E.$$

16 $\begin{cases} ABA = I_2 \\ BAB = I_2 \end{cases}$ donc A est inversible d'inverse B A.
Le système est équivalent à $\begin{cases} A = B \\ A^3 = I_2 \end{cases}$.
Le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A, les racines sont 1, j, j^2. Puis $\text{Sp}\,A \subset \{1, \text{j}, \text{j}^2\}$.
$A = \text{I}_2$ est une solution, cherchons les autres solutions.
La matrice est réelle donc les seuls polynômes caractéristiques possibles de A sont $(X-1)^2$ et $(X-\text{j})\left(X-\text{j}^2\right)$ qui est égal à X^2+X+1.
Le *théorème de Cayley-Hamilton* assure respectivement dans chacun des cas $(A-\text{I}_2)^2 = 0$ et $A^2 + A + \text{I}_2 = 0$.
Étudions le cas $(A-\text{I}_2)^2 = 0$. Notons N la matrice $A - \text{I}_2$. Elle est nilpotente et commute avec I_2.
La *formule du binôme de Newton* donne :

$$A^3 = (\text{I}_2 + N)^3 = \text{I}_2 + 3N.$$

Or $A^3 = \text{I}_2$ donc $N = 0$ et $A = \text{I}_2$.
En remplaçant dans le système, on trouve $A = B = \text{I}_2$.
Dans le cas $A^2+A+\text{I}_2 = 0$, on trouve que toute matrice vérifiant $A^2 + A + \text{I}_2 = 0$ convient.
Cherchons les matrices qui vérifient cette relation.
Le polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$ donc :

$$\text{Det}A = 1 \quad \text{et} \quad \text{Tr}\,A = -1,$$

les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a-1 \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc + a + 1 = 0$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

17 Pour $a = 0$ et $b = 0$, c'est l'*exercice* 8.
Montrer d'abord ce résultat pour $b = 0$ et $a \neq 0$.
Constater en calculant la trace de $v - u^{-1}vu$, que si u est inversible, alors $a = 0$. En déduire que u n'est pas inversible.
Det $u = 0$.
Le sous-espace Ker $u = E_0(u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
Montrer qu'il est stable par v et considérer l'endomorphisme w induit par v sur $E_0(u)$.
Le corps de base est $\mathbb{C}$. Donc w admet au moins une valeur propre μ. Il existe un vecteur x de $E_0(u)$ tel que $w(x) = \mu x$ et $x \neq 0_E$. Le vecteur x convient car $v(x) = \mu x$ et $u(x) = 0x$ car $x \in E_0(u)$.
Pour étudier le cas général, se ramener au cas précédent en considérant les applications : $h = uv - vu$ et v.

Chapitre 20

1 La permutation s se décompose en p cycles $c_1, \ldots, c_p$ de supports disjoints.
Étudions ce qui se passe pour un cycle c_k.
Notons $(i_1, \ldots, i_r)$ le cycle c_k et $w_k = e^{\frac{2i\pi}{r}}$. Le sous-espace F_k de E engendré par la famille $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ est stable par u car, pour tout j dans $[\![1, r-1]\!]$:

$$u(e_{i_j}) = e_{i_{j+1}} \quad \text{et} \quad u(e_{i_r}) = e_{i_1}.$$

Pour tout j dans $[\![1, r-1]\!]$, le complexe w_k^j est une valeur propre de u. Un vecteur propre associé à w_k^j est :

$$x_{j,k} = \sum_{m=1}^{r} w_k^{j(r-m)} e_{m,k}.$$

Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il existe une base de vecteurs propres de F_k.
Les supports des cycles sont disjoints, les sous-espaces F_k sont en somme directe.
Les vecteurs e_i d'indices i invariants par s sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. Ils complètent les vecteurs $x_{j\,k}$ en une base de vecteurs propres.
L'endomorphisme u est diagonalisable.

2 Un réel λ est une valeur propre de u si, et seulement s'il existe un polynôme non nul tel que :

$$n\,X\,P - (X^2 - 4)\,P' = \lambda\,P.$$

On doit étudier l'équation différentielle $(n\,x - \lambda)y - (x^2 - 4)\,y' = 0$
Les solutions de cette équation définies sur $]-\infty, -2\,[$, $]-2,\,2[$ et $]2, +\infty[$ sont de la forme :

$$y = C\,(x-2)^{\frac{2n-\lambda}{4}}(x+2)^{\frac{2n+\lambda}{4}}.$$

Il existe des solutions polynômiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à n si, et seulement si, $\frac{2n-\lambda}{4}$ et $\frac{2n+\lambda}{4}$ appartiennent à $[\![0,\,n]\!]$.
On obtient $n+1$ valeurs propres distinctes : $\lambda_p = 2\,n - 4p$ pour p dans $[\![0,\,n]\!]$.
D'après le *théorème* 7, l'endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Le sous-espace propre de u associé à λ_p est la droite de $\mathbb{R}_n(X)$ engendrée par le vecteur :

$$Q_p(X) = (X-2)^p\,(X+2)^{n-p}.$$

3 **1)** La matrice de l'application linéaire u associée à l'application affine f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique est $-X(X-1)^2$.
Le spectre de u est $\{0,\,1\}$.
Ker u = Vect $(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.
Ker $(u - \mathrm{Id})$ = Vect $(\vec{i} + \vec{k},\, \vec{j} + 2\vec{k})$.
$E = \text{Ker}\,u \bigoplus \text{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$.
L'endomorphisme u est diagonalisable, de spectre $\{0, 1\}$. C'est la projection sur Ker $(u - \mathrm{Id})$ de direction Ker u.
L'application f admet le plan affine P, d'équation : $x + 2y - z + 1 = 0$, de direction Vect $(\vec{i} + \vec{k},\, \vec{j} + 2\vec{k})$ (comme ensemble de points invariants).
L'application f est la projection sur P de direction Vect $(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.

2) La matrice de l'application linéaire u associée à l'application affine f est $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique est $-(X-1)^2(X+1)$.
Le spectre de A est : $\{-1, 1\}$.
Ker $(u - \mathrm{Id})$ = Vect $(\vec{i} + \vec{k},\, \vec{j} + \vec{k})$.
Ker $(u + \mathrm{Id})$ = Vect $(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.
L'endomorphisme u est diagonalisable.
L'endomorphisme u est la symétrie de base Vect $(\vec{i} + \vec{k},\, \vec{j} + \vec{k})$ et de direction Vect $(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.
L'application f vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ si, et seulement si, $a = -6$.
Pour $a = -6$, l'ensemble des points invariants est le plan P d'équation $2x + 2y - 2z + 3 = 0$.
L'application affine f est la symétrie de base P de direction Vect $(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.
Pour $a \neq -6$, l'application f est la composée $t \circ s$ de la symétrie s de base P de direction Vect $(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$, et de la translation t de vecteur $(a+6)\vec{k}$.

3) La matrice de l'application linéaire u associée à l'application affine f définie par le système :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(3x + y + z - 1) \\ y' = x + 2y + z - 1 \\ z' = \frac{1}{2}(-x - y + z + 1) \end{cases} \quad \text{est } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $-(X-1)^2(X-2)$.
Le spectre de A est : $\{1,\, 2\}$.
Ker $(u - \mathrm{Id})$ = Vect $(\vec{i} - \vec{k},\, \vec{j} - \vec{k})$.
Ker $(u - 2\mathrm{Id})$ = Vect $(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$.
L'endomorphisme u est diagonalisable.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'endomorphisme u est l'affinité de base Vect $(\vec{i}-\vec{k}, \vec{j}-\vec{k})$, de direction Vect $(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$ et de rapport 2.
L'ensemble des points invariants est le plan P d'équation :

$$x+y+z-1=0.$$

L'application affine f est l'affinité de base P, de direction Vect $(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$ et de rapport 2.

4 **1)** Le polynôme $X^2-(n-2)X-n+1$ est annulateur de u. Ce polynôme est scindé et admet deux racines simples $n-1$ et 1. Donc u est diagonalisable.
La valeur propre $n-1$ est simple et I_n est un vecteur propre associé.
La valeur propre -1 est de multiplicité n^2-1.
Le sous-espace propre $E_{-1}(u)$ est $\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,;\ \mathrm{Tr}(N)=0\}$.
Il s'agit d'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car l'application Tr est une forme linéaire non nulle.
2) Le déterminant de u est $(-1)^{n^2-1}(n-1)$. Il est non nul si, et seulement si, $n \neq 1$.

5 L'endomorphisme u est diagonalisable. Son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.
Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres.
$(X+1)(X-n+1)$ est le polynôme minimal de u.
Par conséquent : $u^2-(n-2)u-(n-1)e=0$, en notant e l'application identique.

$$u[u-(n-2)e]=(n-1)e.$$

$$u\left[\frac{1}{n-1}u-\frac{n-2}{n-1}e\right]=e.$$

$$u^{-1}=\frac{1}{n-1}u-\frac{n-2}{n-1}e.$$

6 • On vérifie que $u^2=nu$.
Le polynôme $X^2-nX=0$ est annulateur de u. Il est scindé et n'a que des racines simples.
Par conséquent, l'endomorphisme u est diagonalisable.
Le polynôme X^2-nX est le polynôme minimal de u car les polynômes X et $X-n$ ne sont pas annulateurs.
• Le spectre de u est l'ensemble des racines du polynôme minimal. Donc $\mathrm{Sp}(u)=\{0,n\}$.
• Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_u(X)=(-1)^n X^p(X-n)^q.$$

Il s'agit de déterminer p et q.
On sait que $p+q=\deg P_u=n$ et que $qn=\mathrm{Tr}\,u=n$.
Par conséquent, $q=1$ et $p=n-1$.

• La multiplicité de n est 1. Le vecteur $f_1=\sum_{k=1}^{n} e_k$ est un vecteur propre pour la valeur propre n.
La multiplicité de 0 est $n-1$. Les $n-1$ vecteurs $f_j=e_1-e_j$ pour j dans $[\![2,n]\!]$ forment une famille libre de vecteurs propres pour la valeur propre 0.
La famille $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de vecteurs propres.

7 $\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1-X & 0 & 0\\ 4 & -3-X & 4\\ 2 & -2 & 3-X\end{pmatrix}=-(X-1)^2(X+1).$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $x-y+z=0$.
Les vecteurs $u_1=(1,\ 1,\ 0)$ et $u_2=(0,\ 1,\ 1)$ forment une base ce plan.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite d'équations $x=0$ et $y=2z$.
Le vecteur $u_3=(0,\ 2,\ 1)$ dirige cette droite.
La famille (u_1,u_2,u_3) est une base de vecteurs propres. La matrice A est diagonalisable.
La matrice de passage P est :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 4\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

8 Le polynôme caractéristique est $-(X-1)^2(X+2)$.
Pour la valeur propre -2, le sous-espace propre est une droite dirigée par le vecteur $u_1=(-15,2,-6)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est une droite dirigée par le vecteur $u_2=(0,1,0)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable.
Prenons $u_3=(3,0,0)$.
Son image est $(-12,0,-6)=u_1-2u_2+u_3$.
On obtient la matrice triangulaire $T=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Soit $P=\begin{pmatrix}-15 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -6 & 0 & 0\end{pmatrix}$ la matrice de passage : $A=PTP^{-1}$.

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

9 Le polynôme caractéristique est $(2-X)^3(4-X)$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est une droite engendrée par le vecteur $u_1=(0,1,-1,1)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est une droite engendrée par le vecteur $u_2=(1,1,1,1)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable.
Les puissances successives de la matrice $A-2\mathrm{I}_4$ sont :

$$(A-2\mathrm{I}_4)^2=\begin{pmatrix}8 & 0 & -4 & -4\\ 4 & 0 & -4 & 0\\ 12 & 0 & -4 & -8\\ 4 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$(A-2\mathrm{I}_4)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-8&0&0&8\\8&0&0&-8\\-8&0&0&8\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $u_4=(1,0,0,1)$ appartient au noyau de $(A-2\mathrm{I}_4)^3$ mais n'appartient pas au noyau de $(A-2\mathrm{I}_4)^2$.

$$(A-2\mathrm{I}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $u_3=(0,-4,0,0)$ appartient au noyau de $(A-2\mathrm{I}_4)^2$.

La matrice triangulaire est $T=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&2&4&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&-4&0\\-1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\-1&0&1&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\2&0&-1&-1\end{pmatrix}.\ A=PTP^{-1}.$$

10 • Utilisons la décomposition à l'aide des sous-espaces caractéristiques :

$$T^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0&0\\0&\begin{pmatrix}2&4&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}^n\\0&\\0&\end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix}2&4&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ s'écrit :

$$2\mathrm{I}_3+N\quad\text{avec}\quad N=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$(2\mathrm{I}_3+N)^n=2^n\,\mathrm{I}_3+n\,2^{n-1}N+n(n-1)\,2^{n-3}N^2.$$

$$T^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0&0\\0&2^n&4n2^{n-1}&2n(n-1)2^{n-2}\\0&0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&0&2^n\end{pmatrix}.$$

$$A^n=\begin{pmatrix}(n^2-2n+1)2^n&-n2^{n-1}&(-n^2+2n)2^{n-1}&(-n^2+3n)2^{n-1}\\-4^n+(n^2-6n+1)2^n&(2-n)2^{n-1}&(-n^2+6n)2^{n-1}&4^n+(-n^2+7n-2)2^{n-1}\\4^n+(n^2-2n-1)2^n&-n2^{n-1}&(-n^2+2n+2)2^{n-1}&-4^n+(-n^2+3n+2)2^{n-1}\\-4^n+(n^2-2n+1)2^n&-n2^{n-1}&(-n^2+2n)2^{n-1}&4^n+(-n^2+3n)2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible car $0\notin\mathrm{Sp}(A)$.

L'inverse de T est $\begin{pmatrix}4^{-1}&0&0&0\\0&2^{-1}&-1&2^{-1}\\0&0&2^{-1}&-2^{-1}\\0&0&0&2^{-1}\end{pmatrix}$.

L'expression de A^n obtenue pour n dans $\mathbb{N}$ reste vraie pour n dans $\mathbb{Z}$.

• Utilisons un polynôme annulateur de A.

Le polynôme caractéristique de A est $P(X)=(2-X)^3(4-X)$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\exists(a_n,b_n,c_n,d_n)\in\mathbb{R}^4\quad\exists\ Q_n\in\mathbb{R}[X]$$
$$X^n=P(X)Q_n(X)+a_nX^3+b_nX^2+c_nX+d_n.$$

La racine 2 est triple. Nous dérivons deux fois.

On obtient le système :

$$\begin{cases}4^3a_n+4^2b_n+4c_n+d_n=4^n\\2^3a_n+2^2b_n+2c_n+d_n=2^n\\3.2^2a_n+2.2b_n+c_n=n2^{n-1}\\6.2a_n+2b_n=n(n-1)2^{n-2}\end{cases}$$

$$A^n=\left(\frac{1}{2}4^{n-1}-(n^2+n+2)2^{n-4}\right)A^3+\left(-3\times4^{n-1}+(2n^2+n+3)2^{n-2}\right)A^2+\left(6\times4^{n-1}-(5n^2-n+6)2^{n-2}\right)A+\left(-4^n+(n^2-n+2)2^n\right)\mathrm{I}_4.$$

On termine de la même manière.

11 Les suites de réels vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+5}=u_{n+4}+5u_{n+3}-u_{n+2}-8u_{n+1}-4u_n$$

sont associées à la suite géométrique de $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=\begin{pmatrix}u_{n+4}\\u_{n+3}\\u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X_{n+1}=AX_n$$

en posant $A=\begin{pmatrix}1&5&-1&-8&-4\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=A^nX_0$.

Le polynôme caractéristique de A est : $-(X+1)^3(X-2)^2$.

Il est scindé.

Il existe une matrice inversible P telles que : $A=PTP^{-1}$ où :

$$T=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A^n=P\begin{pmatrix}2^n&n2^{n-1}&0&0&0\\0&2^n&0&0&0\\0&0&(-1)^n&n(-1)^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\\0&0&0&(-1)^n&n(-1)^{n-1}\\0&0&0&0&(-1)^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

L'ensemble des solutions est l'ensemble des suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha + n\beta)2^n + (\gamma + \lambda n + \mu n^2)(-1)^n$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$.

12 Le spectre de A est $\{1,\ 2\ \}$.
Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.
La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $(X-1)(X-2)$ est annulateur de A.
$A^2 - 3\ A + 2\ \mathrm{I}_3 = 0$ si, et seulement si, $a = 0$.

13 Soit $A = (a_1, \ldots, a_n)$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$.
La matrice M est $M = {}^{\mathrm{t}}AB$.
On constate que $B\,{}^{\mathrm{t}}A$ est un réel $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
Par conséquent, $M^2 = \lambda M$.
Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = \lambda^{n-1} M.$$

M n'est pas nulle car il existe au moins un i de $[\![1, n]\!]$ et au moins un j de $[\![1, n]\!]$ tels que $a_i\ b_j \neq 0$.
Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Ker u est l'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ car les a_i ne sont pas tous nuls.
Imu est la droite D engendrée par le vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$.
• Le polynôme $(X-\lambda)X$ est annulateur de M.
$M \neq 0$, donc X n'est pas annulateur de M.
$M \neq \lambda \mathrm{I}_n$ car u n'est pas bijective pour $n > 1$.
Le polynôme minimal de u est $(X-\lambda)X$.
• Pour $\lambda \neq 0$, il est scindé et n'a que des racines simples.
La matrice M est diagonalisable. Son spectre est $\{0, \lambda\}$.
Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan H.
Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ est la droite D.
• Pour $\lambda = 0$, le polynôme minimal admet 0 pour racine double.
La matrice M n'est pas diagonalisable.
Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan H.

14 • Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
La matrice A^2 est diagonalisable. Son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.
Il s'écrit $P(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$, où les α_i sont distincts deux à deux.
Le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X^2 - \alpha_i)$ est un polynôme annulateur de A.

$$\forall i \in [\![1\ ,\ p]\!] \quad \exists\ \beta_i \in \mathbb{C} \quad \beta_i^2 = \alpha_i.$$

Les β_i et les $-\beta_i$ sont distincts deux à deux car les α_i sont distincts deux à deux et non nuls.
Le polynôme Q est scindé et n'a que des racines simples. Il est annulateur de A. La matrice A est diagonalisable.
• Si A n'est pas inversible. Le réel 0 est une valeur propre.
Le polynôme minimal de A^2 s'écrit $X\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$, où les α_i sont distincts deux à deux et non nuls.
Le polynôme $Q(X) = X^2\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \alpha_i)$ est un polynôme annulateur de A.

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \exists\, \beta_i \in \mathbb{C} \quad \beta_i^2 = \alpha_i.$$

Il est scindé, mais 0 est racine double.
L'endomorphisme u^2 est diagonalisable. Nous savons que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(u^2 - \alpha_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,u^2.$$

Le *théorème de décomposition des noyaux* montre que :
$\forall i \in [\![1, p]\!]$

$$\mathrm{Ker}\,(u^2 - \alpha_i \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \beta_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(u + \beta_i \mathrm{I}_E).$$

Par conséquent :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p}(\mathrm{Ker}\,(u - \beta_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(u + \beta_i \mathrm{I}_E)) \bigoplus \mathrm{Ker}\,u^2.$$

La matrice A sera diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $R(X) = X\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \alpha_i)$ est annulateur de A.
C'est-à-dire si, et seulement si :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p}(\mathrm{Ker}\,(u - \beta_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(u + \beta_i \mathrm{I}_E)) \bigoplus \mathrm{Ker}\,u.$$

Or Ker $u \subset$ Ker u^2. Donc les espaces :

$$\bigoplus_{i=1}^{p}(\mathrm{Ker}\,(u - \beta_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(u + \beta_i \mathrm{I}_E)) \bigoplus \mathrm{Ker}\,u$$

et

$$\bigoplus_{i=1}^{p}(\mathrm{Ker}\,(u - \beta_i \mathrm{I}_E) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(u + \beta_i \mathrm{I}_E)) \bigoplus \mathrm{Ker}\,u^2$$

sont égaux si, et seulement si, Ker $u =$ Ker u^2.
En conclusion, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, Ker $u =$ Ker u^2.

15 Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E.
C'est immédiat, si dim $E = 1$.
Supposons le résultat acquis pour tout espace de dimension n et pour tous les endomorphismes u, v et w de cet espace vérifiant :

$$uw - wu = vw - wv = 0 \text{ et } uv - vu = w.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et trois endomorphismes u, v et w de cet espace vérifiant :

$$uw - wu = vw - wv = 0 \text{ et } uv - vu = w.$$

Nous avons montré dans le *deuxième exercice résolu* du *chapitre* 19, qu'il existe un vecteur propre e commun à u, v et w.
Soit F un supplémentaire de e et p la projection sur F de direction $\mathbb{C}e$.
Notons $\overline{u}$ l'endomorphisme $p \circ u_{|F}$, $\overline{v}$ l'endomorphisme $p \circ v_{|F}$ et $\overline{w}$ l'endomorphisme $p \circ w_{|F}$. Considérons une base $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de F, la famille $(e, e_1, \dots, e_n)$ est une base B_0' de E.
Notons $M(u)$, $M(v)$ et $M(w)$ les matrices respectives de u, v et w dans la base B_0' de E et $M(\overline{u})$, $M(\overline{v})$ et $M(\overline{w})$ les matrices $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{w}$ dans la base B_0 de F.
Il existe une matrice ligne $L(u)$ et un complexe λ tels que :

$$M(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L(u) \\ 0_{n,1} & M(\overline{u}) \end{pmatrix}.$$

En écrivant $M(v)$ et $M(w)$ de la même manière, on obtient :
$M(\overline{u})M(\overline{w}) = M(\overline{w})M(\overline{u})$; $M(\overline{v})M(\overline{w}) = M(\overline{w})M(\overline{v})$
et $M(\overline{w}) = M(\overline{u})M(\overline{v}) - M(\overline{v})M(\overline{u})$.
On en déduit que $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{w}$ vérifient les hypothèses de récurrence, puis qu'il existe une base $(e_1', \dots, e_n')$ de F dans laquelle les matrices de $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{w}$ sont triangulaires supérieures.
Dans la base $(e, e_1', \dots, e_n')$, les matrices de u, v et w sont également triangulaires supérieures.
Ceci termine la récurrence.

16 **1)** Les endomorphismes u et n commutent. Sur $\mathbb{C}$, il existe une base B de E dans laquelle les matrices de u et n sont triangulaires supérieures.
L'endomorphisme n est nilpotent. La diagonale de la matrice de n dans la base B est nulle.
Par conséquent, le spectre de $u+n$ est celui de u.
Or, un endomorphisme est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une valeur propre.
On en déduit que u est inversible si, et seulement si, $u+n$ l'est.
2) Si u n'est pas inversible, $\text{Det}(u) = \text{Det}(u+n) = 0$.
Si u est inversible, $\text{Det}(u+n) = \text{Det}(u)\text{Det}(\text{Id}_E + u^{-1}n)$.
On vérifie que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1}n$ est nilpotente. Il existe une base B' de E dans laquelle la matrice T de $u^{-1}n$ est triangulaire supérieure de diagonale nulle.
$\text{Det}(\text{Id}_E + u^{-1}n) = \text{Det}(\text{I}_n + \text{T}) = 1$.
On obtient, $\text{Det}(u+n) = \text{Det}(u)$.

17 Le polynôme caractéristique de A est $(2-X)^3$.
$\{(0,0,0)\}$ est l'unique sous-espace stable de dimension 0.
$\mathbb{K}^3$ est l'unique sous-espace stable de dimension 3.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite D engendrée par le vecteur $(0,1,1)$.
L'unique droite stable est la droite D.
Cherchons maintenant les plans stables.
L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable :

$$\{(0,0,0)\} \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id})^3 = \mathbb{K}^3.$$

Ker $(u-2\text{Id})^2$ est le plan d'équation $x+y-z=0$. Il est stable par u.
Réciproquement, soit P un plan stable par u. Montrons que $P = \text{Ker}(u-2\text{Id})^2$.
Soit v la restriction de u à P.
Le polynôme caractéristique de v divise celui de u et il est de degré 2. Par conséquent, il s'agit de $(2-X)^2$.
Le *théorème de Cayley-Hamilton* assure que l'endomorphisme $(v-2\text{Id})^2$ est nul.
Par conséquent :

$$\forall x \in P \quad (v-2\text{Id})^2(x) = (u-2\text{Id})^2(x) = 0.$$

On en déduit que $P \subset \text{Ker}(u-2\text{Id})^2$. Puis en comparant les dimensions, on obtient $P = \text{Ker}(u-2\text{Id})^2$.

18 **1)** Montrons qu'ils admettent un vecteur propre commun.
On procède par récurrence sur $n = \dim E$.
Pour $n=1$, c'est immédiat.
On suppose le résultat acquis pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n et pour tout famille d'endomorphismes de cet espace trigonalisables et commutant deux à deux.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables et commutant deux à deux.
• Si tous les u_i sont des homothéties, c'est immédiat.
• On suppose qu'il existe un j de I tel que u_j ne soit pas une homothétie. Alors u_j admet au moins une valeur propre λ car il est trigonalisable.
Le sous-espace propre E' associé à λ est de dimension strictement inférieur à n, car u_j n'est pas une homothétie.
Les u_i commutent avec u_j. Le sous-espace E' est stable par chaque u_i.
Pour tout i de I, considérons v_i la restriction de u_i à E'.
Les endomorphismes u_i sont trigonalisables. Leurs polynômes caractéristiques sont scindés.
Pour tout i de I, le polynôme caractéristique de v_i divise celui de u_i. Il est également scindé et v_i est trigonalisable.
Les v_i commutent deux à deux.
La famille $(v_i)_{i\in I}$ vérifie les hypothèses de récurrence. Il existe un vecteur de E', vecteur propre commun à tous les v_i, donc à tous les u_i.
2) Montrons par récurrence sur la dimension de E, qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les u_i sont triangulaires supérieures.
Pour $\dim E = 1$, c'est immédiat.
On suppose le résultat acquis pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et pour tout famille d'endomorphismes de cet espace trigonalisables et commutant deux à deux.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables et commutant deux à deux.
Soit e un vecteur propre commun à tous les u_i, F un supplémentaire de $\mathbb{K}e$ et p la projection sur F de direction $\mathbb{K}e$.
Pour tout i de I, notons $\overline{u_i}$ l'endomorphisme $p \circ u_{i|F}$, Considérons une base $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de F, la famille $(e, e_1, \dots, e_n)$ est une base B_0' de E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Notons $M(u_i)$ et $M(\overline{u_i})$, les matrices respectives de u_i et $\overline{u_i}$ dans les bases B_0 de E et B_0' de F.
Il existe une matrice ligne $L(u_i)$ et un complexe λ_i tels que :

$$M(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & L(u_i) \\ 0_{n,1} & M(\overline{u_i}) \end{pmatrix}.$$

En écrivant, pour tout i et tout j de I,

$$M(u_i)M(u_j) = M(u_j)M(u_i),$$

on obtient : $M(\overline{u_i})M(\overline{u_j}) = M(\overline{u_j})M(\overline{u_i})$.
On en déduit que la famille $(\overline{u_i})_{i\in I}$ vérifie les hypothèses de récurrence, puis qu'il existe une base $(e_1', \dots, e_n')$ de F dans laquelle les matrices des $\overline{u_i}$ sont triangulaires supérieures.
Dans la base $(e, e_1', \dots, e_n')$ les matrices de u_i sont également triangulaires supérieures.

19 On vérifie que $X^2 - 4$ est annulateur de A.
Le polynôme est scindé et ses racines sont simples. La matrice A est diagonalisable :

$$A^2 = 4\mathrm{I}_4.$$

Par récurrence, on montre que, pour tout entier n, on a $A^{2n} = 4^n \mathrm{I}_4$ et $A^{2n+1} = 4^n A$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}\mathrm{I}_4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!} A \\ &= (\mathrm{ch}\, 2)\mathrm{I}_4 + \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, 2)A. \end{aligned}$$

20 Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, on notera :

$$\rho(u) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\},$$

appelé rayon spectral de u.
1) On vérifie que u est nilpotent d'indice q si, et seulement si, son polynôme minimal est X^q.
On en déduit : u nilpotent $\Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(u) = \{0\}$

$$\Leftrightarrow \quad \rho(u) = 0.$$

2) Sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme u est trigonalisable. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Dans cette base, la matrice de αu est également triangulaire supérieure de diagonale $(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_p)$.
$\mathrm{Sp}(\alpha u) = \{\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_p\}$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
On en déduit : $\rho(\alpha u) = |\alpha|\rho(u)$.
3) Les endomorphismes u et v commutent et sont trigonalisables. Il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures de diagonales respectives : $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $(\lambda_1', \dots, \lambda_p')$.
Dans cette base la matrice de $u + v$ est triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1 + \lambda_1', \dots, \lambda_p + \lambda_p')$.
On en déduit :$\rho(u + v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$.
Dans cette base la matrice de $u \circ v$ est triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1\lambda_1', \dots, \lambda_p\lambda_p')$.
On en déduit $\rho(u \circ v) \leqslant \rho(u)\rho(v)$.

4) On procède de même. Puis on compare les diagonales des matrices triangulaires de u et de u^n.
On obtient $\rho(u^n) = \rho(u)^n$.
5) Montrons que $\rho(u \circ v) \leqslant \rho(v \circ u)$.
Soit λ dans $\mathrm{Sp}(u \circ v)$ tel que $|\lambda| = \rho(u \circ v)$.
Si $\lambda = 0$, l'endomorphisme $u \circ v$ est nilpotent d'indice q.

$$(v \circ u)^{q+1} = v \circ (u \circ v)^q \circ u.$$

On en déduit que $v \circ u$ est nilpotent et $\rho(v \circ u) = 0$.
Si $\lambda \neq 0$, il existe x dans E non nul tel que $u \circ v(x) = \lambda x$.
On vérifie alors, que $v(x)$ est non nul et qu'il est vecteur propre de $v \circ u$.
On en déduit que $|\lambda| \leqslant \rho(v \circ u)$.
Dans les deux cas on a $\rho(u \circ v) \leqslant \rho(v \circ u)$.
On démontre de la même manière que : $\rho(v \circ u) \leqslant \rho(u \circ v)$.
6) On a $u \circ u^{-1} = \mathrm{I}_E$. D'après la question **3)**, on a $1 \leqslant \rho(u)\rho(u^{-1})$.
D'où : $\rho(u^{-1}) \geqslant \rho(u)^{-1}$.
7) Pour toute norme N sur E et tout endomorphisme u, on a :

$$\forall x \in E \quad N(u(x)) \leqslant \overline{N}(u)N(x).$$

Soit λ tel que $\rho(u) = |\lambda|$ et x un vecteur propre associé à λ et u.

$$N(\lambda x) \leqslant \overline{N}(u)N(x).$$

Or, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. Donc : $\rho(u) \leqslant \overline{N}(u)$.
8) a) $N\left(u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right)\right) = \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\}$.

$$\left|\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|\,N(x)$$

$$\leqslant \max\left\{\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\} N(x).$$

$$\overline{N}(u) \leqslant \max\left\{\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\}.$$

Montrons que $\overline{N}(u)$ est atteint, pour en déduire l'égalité.
Soit k tel que $\max\left\{\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\} = \sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}|$.
Si $a_{k,j} \neq 0$, on note θ_j un argument de $a_{k,j}$.
Soit $x_0 = \sum_{\substack{j=1 \\ a_{k,j}\neq 0}}^{p} \mathrm{e}^{-i\theta_j} \mathrm{e}_j$. On vérifie que $\dfrac{N(u(x_0))}{N(x_0)} = \sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}|$.
Par conséquent :

$$\overline{N}(u) = \max\left\{\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\}.$$

b) On obtient, pour tout i et tout j de $[\![1, p]\!]$, $b_{i,j} = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} a_{i,j}$.
c) Choisissons une base $(e_1, \dots, e_p)$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots\cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,p} \\ & & & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & & t_{p,p} \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout $\rho > 0$, on applique la question **b)** avec $\alpha_i = \rho^{i-1}$.
On obtient la matrice :

$$T' = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \rho t_{1,2} & \cdots\cdots & \rho^{p-1} t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & \rho t_{2,3} & \rho^{p-2} t_{2,p} \\ & & & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & t_{p,p} \end{pmatrix}.$$

On applique la question **a)** à la base $(e_1, \rho e_2 ..., \rho^{p-1} e_p)$ et à la norme infinie associée à cette base.

Pour $x = \sum_{i=1}^{p} x_i \rho^{i-1} e_i$, on a : $N(x) = \max\{|x_i| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\}$.

$\overline{N}(u) = \max\left\{\sum_{j=i}^{p} \rho^{j-i} |t_{i,j}| \ ; \quad i \in [\![1, p]\!]\right\}$.

On peut choisir ρ dans $]0, 1[$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!] \quad \rho \sum_{j=i+1}^{p} |t_{i,j}| < \varepsilon.$$

Alors : $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \sum_{j=i}^{p} \rho^{j-i} |t_{i,j}| < |t_{i,\,i}| + \varepsilon \leqslant \rho(u) + \varepsilon$.

On en déduit $\overline{N}(u) < \rho(u) + \varepsilon$.

9) • Montrons : **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**.
On suppose **(i)**.
Soit x dans E.
Pour toute norme N sur E, nous avons :

$$N(u^k(x)) \leqslant \overline{N}(u^k) N(x).$$

La suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'application nulle. Donc, $(\overline{N}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Puis, $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.
• Montrons **(ii)** $\Rightarrow$ **(iii)**.
On suppose **(ii)**.
Si $\rho(u) \geqslant 1$, il existe une valeur propre λ de u telle que $|\lambda| \geqslant 1$.
Soit x un vecteur propre associé à λ. Alors, pour tout entier k de $\mathbb{N}$ on a : $u^k(x) = \lambda^k x$.
La suite $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E. Ceci contredit **(ii)**.
Donc, $\rho(u) < 1$.
• Montrons **(iii)** $\Rightarrow$ **(iv)**.
On applique le résultat de la question **8)** à $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(u)}{2}$.
• Montrons **(iv)** $\Rightarrow$ **(i)**.
La norme $\overline{N}$ est une norme subordonnée.
Donc : $\overline{N}(u^k) \leqslant \overline{N}(u)^k$.
On en déduit que la suite $(\overline{N}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Chapitre 21

1 Soit α et β deux réels et x, y et z trois vecteurs de E.

$\varphi_a(x, \alpha y + \beta z) = \varphi(a, a)\varphi(x, \alpha y + \beta z) - \varphi(a, x)\varphi(a, \alpha y + \beta z)$.

L'application φ est bilinéaire. Vérifier que :

$$\varphi_a(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \varphi_a(x, y) + \beta \varphi_a(x, z).$$

L'application φ_a est linéaire à droite. On montrerait de même la linéarité à gauche.
L'application φ_a est symétrique si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(a, a)\varphi(x, y) = \varphi(a, a)\varphi(y, x).$$

Ceci est réalisé si, et seulement si, $\varphi(a, a) = 0$ ou bien si φ est symétrique.

2 L'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ est bilinéaire symétrique.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad q(M) = \varphi(M, M).$$

Par conséquent, q est une forme quadratique et φ est sa forme polaire.

3 L'expression de $q(x) = {}^tXX + a(UX)^2$ en fonction des coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est un polynôme homogène de degré 2. On en déduit que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
Le terme UX est un réel. Donc :

$${}^t(UX) = UX.$$

Par conséquent :

$$(UX)^2 = {}^tX\,{}^tUUX.$$
$$q(x) = {}^tXX + a\,{}^tX\,{}^tUUX.$$
$$q(x) = {}^tX(\mathrm{I}_n + a\,{}^tUU)X.$$

La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$\mathrm{I}_n + a\,{}^tUU.$$

4 Soit q la forme quadratique associée à φ.
x appartient au noyau de q_a si, et seulement si :

$$\forall y \in E \quad \varphi(a, a)\varphi(x, y) - \varphi(a, x)\varphi(a, y) = 0.$$

On vérifie que $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, q_a$.
Si φ est dégénérée, q_a est également dégénérée.
On vérifie également que $\mathbb{R}a \subset \mathrm{Ker}\, q_a$.
La forme quadratique q_a est dégénérée.

5 **1)** Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t\right) x_i x_j$$
$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_i(t) f_j(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Par conséquent :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX \geqslant 0.$$

La matrice A est symétrique positive.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2) ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\right)^2 \mathrm{d}t = 0.$

Or l'application $t \longmapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\right)^2$ est continue et positive sur $[a, b]$. Donc :

$$\begin{aligned} {}^tXAX = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in [a,b] \quad \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) = 0. \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\left({}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \; x_i = 0\right). \\ &\Leftrightarrow (f_1, \ldots, f_n) \text{ libre.} \end{aligned}$$

La matrice A est définie positive si, et seulement si, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

6 L'expression de q_a est :

$$q_a(x) = q(a)q(x) - (\varphi(a,x))^2.$$

La forme φ est positive. L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* est vérifiée.

$$(\varphi(a,x))^2 \leqslant q(a)q(x).$$

La forme quadratique q_a est positive.
D'après l'*exercice* 4, elle est dégénérée. Elle ne peut pas être définie positive.
Puisque la forme quadratique est positive, son noyau est l'ensemble des x de E tels que $q_a(x) = 0$.
Lorsque φ est définie positive :

$$q(a)q(x) - (\varphi(a,x))^2 = 0$$

si, et seulement si, (x, a) est une famille liée.
Par conséquent, $\mathrm{Ker}\, q_a = \mathbb{R}a$.

7 • Les applications f et g de E sont continues sur $[0, 1]$. Elles sont bornées. Il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(a_n)| \leqslant M \quad \text{et} \quad |g(a_n)| \leqslant M.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^n}|f(a_n)|\,|g(a_n)| \leqslant \frac{1}{2^n}M.$$

La série $\sum \dfrac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n)$ converge.

L'expression $\varphi_a(f,g) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n)$ a un sens.
On vérifie facilement que φ_a est bilinéaire symétrique.
Elle est positive, car :

$$\forall\, f \in E \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2 \geqslant 0.$$

Soit f dans E telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2 = 0.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = 0$.
Soit $A = \{a_n\,;n \in \mathbb{N}\}$.
Si A est dense dans $[0, 1]$, la continuité de f permet d'affirmer que l'application f est nulle.
Si A n'est pas dense dans $[0, 1]$, il existe un intervalle I de $[0, 1]$ d'intérieur non vide tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \notin I.$$

Soit f une fonction continue nulle sur $[0,1]\backslash I$ et non nulle sur I. Elle vérifie :

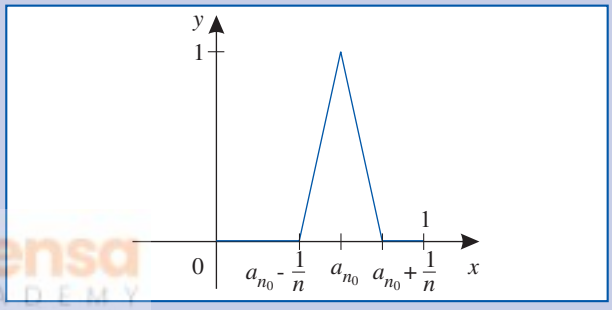
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2 = 0$$

sans être identiquement nulle. Dans ce cas, φ_a n'est pas un produit scalaire.

En conclusion, φ_a est un produit scalaire si, et seulement si, l'ensemble $\{a_n\,;n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$. On suppose pour la suite, que $\{a_n\,;n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

• On choisit l'un des a_n où $n \in \mathbb{N}$: a_{n_0}.

Soit f_n la fonction définie par le schéma :



Pour k fixe dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{a_n\,;n \leqslant k\}$ est fini donc il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\left]a_{n_0} - \frac{1}{N},\; a_{n_0} + \frac{1}{N}\right[\cap \{a_n\,;\; n \leqslant k\} \subset \{a_{n_0}\}.$$

Pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi_a\left(f_p - f_q, f_p - f_q\right) &= \sum_{n \geqslant k} \frac{1}{2^n}\left(f_p(a_n) - f_q(a_n)\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{n \geqslant k} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{k-1}} \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^2 \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^{\not\leq} \quad p \geqslant \mathrm{N} \text{ et } q \geqslant \mathrm{N} \\ \Rightarrow \; \varphi_a\left(f_p - f_q, f_p - f_q\right) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

La suite (f_n) est de Cauchy de (E, φ_a).
Montrons qu'elle ne converge pas dans (E, φ_a) par l'absurde.
On suppose que (f_n) converge vers f dans E.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(f_n(a_k) - f(a_k)\right)^2 = 0$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f_n(a_k) = f(a_k)\right)^2$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or la suite (f_n) converge simplement vers la fonction :

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a_{n_0} \\ 1 & \text{si } x = a_{n_0} \end{cases}.$$

Donc $\forall k \neq n_0 \quad f(a_k) = 0$ et $f(a_{n_0}) = 1$.
La famille $\{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.
Donc f est : $x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x = a_{n_0} \\ 0 & \text{si } x \neq a_{n_0} \end{cases}$ et n'est pas continue en a_{n_0} ce qui contredit l'appartenance de f à E.

8 $\| \|x\|^2 y - (x \mid y)x\|^2$

$$= \|x\|^4\|y\|^2 + (x \mid y)^2\|x\|^2 - 2\|x\|^2(x \mid y)^2$$
$$= \|x\|^2\left[\|x\|^2\|y\|^2 - (x \mid y)^2\right]$$

On en déduit l'*inégalité de Cauchy-Schwarz.*

9 Montrons que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

$$F \subset F+G.$$

Donc : $(F+G)^\perp \subset F^\perp$.
De même, nous avons : $(F+G)^\perp \subset G^\perp$.
Montrons que : $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
Soit x dans $F^\perp \cap G^\perp$.

$$\forall (y,z) \in F \times G (x \mid y+z) = (x \mid y) + (x \mid z) = 0.$$

En conclusion : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
• Montrons que

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

$F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

De même $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Il n'y a pas nécessairement égalité en dimension infinie.
Considérons, par exemple, l'espace préhilbertien de l'application 7 et F le sous-espace des fonctions polynomiales, on a $F^\perp = \{0_E\}$ et G une droite engendrée par une fonction non polynomiale, par exemple l'exponentielle. L'orthogonal $G^\perp$ de G est un hyperplan noyau de la forme :

$$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \quad \text{non identiquement nulle.}$$

Alors $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas :

$$(F \cap G)^\perp = E \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp = G^\perp \neq E.$$

En dimension finie, l'égalité des dimensions de $F^\perp + G^\perp$ et de $(F \cap G)^\perp$ permet de prouver l'égalité.

10 $\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 = \|x\|^2.$

Pour $x = e_k$ on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} (e_k \mid e_i)^2 = (e_k \mid e_k)^2.$$

On en déduit :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad i \neq k \Rightarrow (e_k \mid e_i) = 0.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale. Elle est libre.

Soit $y = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)e_i$. Alors :

$$\|y - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y - x \mid e_i)^2.$$

Or, pour tout k de $\mathbb{N}$, $(y \mid e_k) = (x \mid e_k)$. Donc $\|y - x\| = 0$.

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)e_i.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.
Par conséquent, la dimension de E est n et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

11 **a)** Ker $p = p^{-1}\left(\{0_E\}\right)$ est l'image réciproque du fermé $\{0_E\}$ par p qui est continue. Ker p est un fermé.
L'application $\mathrm{I}_E - p$ est continue également et $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}_E - p)$.Im$p$ est également un fermé.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une *suite de Cauchy* de E.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = p(x_n) + (\mathrm{I}_E - p)(x_n)$$

Les applications p et $\mathrm{I}_E - p$ sont linéaires continues. Elles sont uniformément continues.
Par conséquent, les suites $(p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((\mathrm{I}_E - p)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy respectivement dans Imp et dans Ker p qui sont complets. Elles convergent.
Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Si p est non nul, il existe x dans Imp tel que $p(x) = x \neq 0_E$.

$$\|p(x)\| = \|x\|.$$

Donc $N(p) \geqslant 1$.

d) Soit p un projecteur orthogonal non nul. Montrons que $N(p) = 1$.
Le *théorème de Pythagore* assure que :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|(I_E - p)(x)\|^2.$$

Donc : $\forall x \in E \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Par conséquent, p est continu et $N(p) \leqslant 1$.
D'après **c)** on a alors $N(p) = 1$.
Réciproquement, soit p un projecteur continu tel que $N(p) = 1$. Nous allons montrer que p est orthogonal.
Soit x dans Imp et y dans Ker p. Montrons que $x \perp y$.
Pour tout réel k, nous avons :

$$\|p(kx + y)\| = \|kx\|.$$

Or $N(p) = 1$. Donc :

$$\|p(kx + y)\| \leqslant \|kx + y\|.$$

On en déduit :

$$k^2\|x\|^2 \leqslant \|kx + y\|^2 = k^2\|x\|^2 + 2k(x \mid y) + \|y\|^2.$$
$$\forall k \in \mathbb{R} \quad 2k(x \mid y) + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Ceci n'est possible que pour $(x \mid y) = 0$.
Nous venons de montrer que Im$p \perp$ Ker p.
Or Im$p \oplus$ Ker $p = E$ puisque p est un projecteur.
L'application p est un projecteur orthogonal.

e) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de projecteurs orthogonaux qui converge simplement vers une application p.
On vérifie facilement que p est linéaire.
Pour montrer que p est un projecteur, nous allons montrer que

$$p \circ p = p.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Soit x dans E.

$$p_n(p_n(x))-p(p(x))=p_n(p_n(x))-p_n(p(x))+(p_n(p(x))-p(p(x)).$$

$$\|p_n(p_n(x)) - p(p(x))\|$$
$$\leqslant \|p_n(p_n(x)) - p_n(p(x))\| + \|p_n(p(x)) - p(p(x))\|$$
$$\|p_n(x) - p(p(x))\|$$
$$\leqslant N(p_n)\|p_n(x)) - p(x))\| + \|p_n(p(x)) - p(p(x))\|$$
$$\leqslant \|p_n(x)) - p(x))\| + \|p_n(p(x)) - p(p(x))\|.$$

La suite converge simplement, en particulier au point x et au point $p(x)$.
Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n(p(x)) - p(p(x))\| = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n(x) - p(x))\| = 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n(x) - p(p(x))\| = 0.$$

Puis $p(x) = p \circ p(x)$.
Pour montrer que p est un projecteur orthogonal, il suffit de montrer que $N(p) \leqslant 1$. Or :

$$\forall x \in E \quad \|p_n(x)\| \leqslant \|x\|.$$

L'application $\|\ \|$ est continue. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Donc p est continue et $N(p) \leqslant 1$.
Soit $E = \mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace préhilbertien des applications continues $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi} \quad (f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg.$$

Soit F_n le sous-espace des polynômes trigonométriques d'ordre au plus n et p_n la projection orthogonale sur F_n.
Vous avez vu dans le *chapitre* sur les séries de Fourier que, pour toute application f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f.
Ceci prouve que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers I_E.
Par conséquent, la suite de projecteurs orthogonaux non nuls $(\mathrm{I}_E - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'application nulle.

12 **1) a)** Soit u l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $X \longmapsto AX$.
Imu est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(|)$.

$$\mathrm{Inf}\{\|AX - B\|\ ;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \mathrm{d}(B, \mathrm{Im}u).$$

D'après le *théorème* 14, il existe une seule matrice M_0 de Imu telle que :

$$\|M_0 - B\| = \mathrm{Inf}\{\|AX - B\|\ ;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

M_0 est le projeté orthogonal de B sur Imu. Il existe car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
M_0 appartient à Imu. Donc il existe X_0 dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_0 = M_0$.
Le rang de A est p donc u est injective.
On en déduit l'unicité de X_0.

b) $M_0 = p_{\mathrm{Im}u}(B) \Leftrightarrow \forall Z \in \mathrm{Im}u \quad M_0 - B \perp Z.$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad (M_0 - B \mid AX) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t(AX)(AX_0 - B) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAB) = 0$$
$$\Leftrightarrow {}^tAAX_0 - {}^tAB = 0.$$

On en déduit que X_0 est l'unique solution de

$${}^tAAX = {}^tAB.$$

2) $(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2 = \|AX - B\|^2$
en prenant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad p = 2 \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que le rang de A est 2.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$${}^tAB = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On détermine x_0 et y_0 tels que :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vous trouverez $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$. Puis :

$$\mathrm{Inf}\{(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2\ ;(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= (x_0 + y_0 - 1)^2 + (x_0 - y_0)^2 + (2x_0 + y_0 + 2)^2 = \frac{7}{2}.$$

13 L'application q est une forme quadratique si, et seulement si, l'application φ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big)$$

est bilinéaire et si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big([x, u, v \wedge y] + [y, u, v \wedge x]\big).$$

Le produit mixte est trilinéaire. L'application φ est bien bilinéaire symétrique et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x, x) = [x, u, v \wedge x].$$

On en déduit que q est une forme quadratique.
Recherchons le noyau de q. C'est l'ensemble des x de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3 \quad \frac{1}{2}\big([x, u, v \wedge y] + [y, u, v \wedge x]\big) = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Or :

$$[x,u,v\wedge y]=[v\wedge y,x,u]=\big((v\wedge y)\wedge x\big).u$$
$$=\big((x.v)y-(x.y)v\big).u$$
$$=(x.v)(y.u)-(x.y)(v.u)$$

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(x.v)(y.u)+\frac{1}{2}(y.v)(x.u)-(x.y)(v.u).$$

• Lorsque (u,v) est libre, $(u,v,u\wedge v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
L'application linéaire $y\longmapsto\varphi(x,y)$ est nulle si, et seulement si, elle s'annule pour $y=u$, $y=v$ et $y=u\wedge v$.
On obtient les trois conditions :

$$(x.v)(u.u)-(u.v)(x.u)=0$$
$$(x.v)(v.u)-(v.v)(x.u)=0$$
$$\big(x.(u\wedge v)\big)(v.u)=0.$$

Le système des deux premières conditions est un système linéaire à deux inconnues $(x.u)$ et $(x.v)$. Son déterminant est $(u.u)(v.v)-(u.v)^2$. D'après le cas d'*égalité de Cauchy-Schwarz*, il est non nul lorsque (u,v) est libre.
On obtient :

$$(x.u)=(x.v)=0.$$

C'est-à-dire :

$$x\in\mathbb{R}(u\wedge v).$$

Pour étudier la troisième condition, nous distinguerons deux cas.
Premier cas : $u.v\neq 0$.
Alors $x.(u\wedge v)=0$.
D'où :

$$\text{Ker } q=\text{Vect}(u,v)\cap\mathbb{R}(u\wedge v).$$
$$\text{Ker } q=\{0\}.$$

Deuxième cas : $u.v=0$.
On obtient :

$$\text{Ker } q=\mathbb{R}(u\wedge v).$$

• Si $u=0$ ou $v=0$, la forme quadratique q est nulle.

$$\text{Ker } q=\mathbb{R}^3.$$

• Si (u,v) est liée, $u\neq 0$ et $v\neq 0$, il existe un réel k tel que $v=ku$.

$$\varphi(x,y)=k\big((x.u)(y.u)-(x.y)(u.u)\big).$$

Pour $y=x$, on obtient :

$$(x.u)^2-(x.x)(u.u)=0.$$

Cette égalité n'est possible que si $x\in\mathbb{R}u$.
Réciproquement, si $x\in\mathbb{R}u$ on a $\varphi(x,y)=0$ pour tout y.

$$\text{Ker } q=\mathbb{R}u.$$

14 On va montrer que :

$$E=\text{Ker }\varphi\quad\text{ou}\quad E=\text{Ker }\psi.$$

• Montrons tout d'abord que :

$$E=\text{Ker }\varphi\cup\text{Ker }\psi.$$

Soit x dans $E\backslash\text{Ker }\varphi$, montrons que $x\in\text{Ker }\psi$.
Par définition de Ker φ, il existe y dans E tel que $\varphi(x,y)\neq 0$.
On en déduit $\psi(x,y)=0$.
Notons :

$$F=\{z\in E\,;\ \varphi(x,z)=0\}\quad\text{et}\qquad G=\{z\in E\,;\ \psi(x,z)=0\}.$$

Pour tout z de E, on a $\varphi(x,z)\psi(x,z)=0$.
On en déduit $E=F\cup G$.
Nous allons montrer par l'absurde que $F\subset G$.
Sinon, il existe t tel que $\psi(x,t)\neq 0$ et $\varphi(x,t)=0$.
On vérifie que :

$$\varphi(x,y+t)\psi(x,y+t)=\varphi(x,y)\psi(x,t).$$

Or :

$$\varphi(x,y+t)\psi(x,y+t)=0\quad\text{et}\quad\varphi(x,y)\psi(x,t)\neq 0.$$

En conclusion : $F\subset G$.
Par conséquent : $E=G$.
On en déduit que x appartient à Ker ψ.
• On a :

$$E=\text{Ker }\varphi\cup\text{Ker }\psi.$$

Montrons par l'absurde que :

$$\text{Ker }\varphi\subset\text{Ker }\psi\quad\text{ou bien}\quad\text{Ker }\psi\subset\text{Ker }\varphi.$$

Sinon, il existe u dans Ker φ tel que u ne soit pas dans Ker ψ et il existe v dans Ker ψ tel que v ne soit pas dans Ker φ.
Or $u+v$ est dans E. Il appartient à Ker $\varphi\cup$ Ker ψ.
Si $u+v\in$ Ker φ, alors v qui est égal à $(u+v)-u$ est dans Ker φ. Ceci est impossible.
On procède de même dans le cas où $u+v$ est dans Ker ψ.
En conclusion :

$$E=\text{Ker }\varphi\quad\text{ou}\quad E=\text{Ker }\psi.$$

15 • Soit P un plan de E et (a,b) une base orthonormale de P.

$$(a\mid b)=0\Rightarrow(f(a)\mid f(b))=0.$$
$$(a-b\mid a+b)=\|a\|^2-\|b\|^2=0.$$

Par conséquent :

$$(f(a)-f(b)\mid f(a)+f(b))=0.$$

On en déduit :

$$\|f(a)\|^2=\|f(b)\|^2.$$

L'application f est dans $\mathcal{GL}(E)$. Par conséquent les vecteurs $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls.
Soit $\alpha_P=\|f(a)\|$, α_P appartient à $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit x dans P alors, il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $x=\lambda a+\mu b$.

$$\|x\|^2=\lambda^2+\mu^2$$
$$\|f(x)\|^2=\|\lambda f(a)+\mu f(b)\|=\alpha_P^2(\lambda^2+\mu^2).$$

Ainsi :

$$\forall\,x\in P\quad\|f(x)\|=\alpha_P\|x\|.$$

Montrons que α_P ne dépend pas du plan considéré.
Soit z dans E.
S'il est dans P, on a :

$$\|f(z)\|=\alpha_P\|z\|.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Si z n'appartient pas à P, la famille (a, z) est libre. Elle engendre un plan Q.
Il existe α_Q tel que :

$$\|f(z)\| = \alpha_Q\|z\| \quad \text{et} \quad \|f(a)\| = \alpha_Q\|a\|.$$

Or :

$$\|f(a)\| = \alpha_P\|a\| = \alpha_Q\|a\| \quad \text{et} \quad \|a\| \neq 0,$$

par conséquent, $\alpha_Q = \alpha_P$.
• $\forall (x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned}\big(f(x) \mid f(y)\big) &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha^2\|x+y\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right)\\ &= \alpha^2(x \mid y).\end{aligned}$$

16 **1)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. L'application :

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\widetilde{P}(x)\widetilde{Q}(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur E.
Le réel :

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)^2\mathrm{d}x\,;(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\}$$

est la distance du polynôme 1 au sous-espace :

$$F = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n).$$

La dimension de F est finie. Cette distance est atteinte en un unique point de F, le projeté orthogonal du polynôme 1 sur F. Il existe un unique $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$p_F(1) = -\alpha_1X - \ldots - \alpha_nX^n.$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Inf}\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)^2\mathrm{d}x;(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\}\\ &\qquad = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2) On montre par récurrence que $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^k\,\mathrm{d}x = k!$, pour tout k de $\mathbb{N}$.
3) Le projeté orthogonal $p_F(1)$ est caractérisé par :

$$p_F(1) \in F \quad \text{et} \quad 1 - p_F(1) \perp F.$$

La dernière condition est traduite par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n\right)^2\mathrm{d}x = 0.$$

C'est-à-dire par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad I_i + \alpha_1I_{i+1} + \cdots + \alpha_nI_{i+n} = 0.$$

4) D'après la question **3)**, le polynôme :

$$P = 1+\alpha_1(X+1)+\alpha_2(X+1)(X+2)+\cdots+\alpha_n(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$$

admet les entiers de $[\![1, n]\!]$ comme racines. Il est donc divisible par $(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$.
Il est de degré n, donc il existe un scalaire k_n tel que :

$$P = k_n(X-1)(X-2)\ldots(X-n).$$

Or $P(-1) = 1$. Par conséquent, $k_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

5)

$$\begin{aligned}\|1 - p_F(1)\|^2 &= \big(1 - p_F(1) \mid 1 - p_F(1)\big)\\ &= \big(1 \mid 1 - p_F(1)\big) - \big(p_F(1) \mid 1 - p_F(1)\big).\end{aligned}$$

$$p_F(1) \in F \quad \text{et} \quad 1 - p_F(1) \perp F.$$

Donc $(p_F(1) \mid 1 - p_F(1)) = 0$.
On en déduit que :

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)^2\mathrm{d}x\,;(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\}$$

est le réel :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}(1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{égal à } P(0).$$

D'où :

$$\mathrm{Inf}\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)^2\mathrm{d}x\,;(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\} = \frac{1}{n+1}.$$

Melissa ACADEMY

Chapitre 22

1 Construisons une base orthonormale (P_0, P_1, P_2, P_3) à l'aide du *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* à partir de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

$$(1 \mid 1) = 2 \quad \text{et} \quad (P_0 \mid 1) > 0.$$

On en déduit $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
On cherche $P_1 = aX + bP_0$ tel que $(P_1 \mid 1) = 0$. On obtient $b = 0$.
On détermine a en normalisant P_1.

$$(X \mid X) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad (P_1 \mid X) > 0.$$

Par conséquent : $P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.
On cherche $P_2 = aX^2 + bP_1 + cP_0$ tel que :

$$(P_2 \mid 1) = 0 \quad \text{et} \quad (P_2 \mid X) = 0.$$

On obtient les conditions :

$$a\frac{2}{3} + c\frac{1}{\sqrt{2}}2 = 0 \quad \text{et} \quad b\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Donc $b = 0$ et $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.
On normalise P_2 et on choisit a pour que $(P_2 \mid X^2) > 0$.
On obtient :

$$P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3X^2 - 1\right).$$

En procédant de la même manière pour P_3, on obtient :

$$P_3 = \sqrt{\frac{7}{8}}\left(5X^3 - 3X\right).$$

2 **1)** Soit $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ dans $\mathbb{R}^4$.
Notons p la projection orthogonale sur F. Une base de F est $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$.

$$X' = p(X) \Leftrightarrow X' \in F$$

$$\text{et} \quad X - X' \perp F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' + y' + z' + t' = 0 \\ x' - y' + z' - t' = 0 \\ (x - x') - (z - z') = 0 \\ (y - y') - (t - t') = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x - z) \\ y' = \dfrac{1}{2}(y - t) \\ z' = \dfrac{1}{2}(z - x) \\ t' = \dfrac{1}{2}(t - y) \end{cases}.$$

La matrice de cette projection est :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) La matrice colonne des coordonnées de $p(a)$ est :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad p(a) = (0, -1, 0, 1) ; \quad a - p(a) = (1, 2, 1, 2)$$

$$\mathrm{d}(a, F) = \|a - p(a)\| = \sqrt{10}.$$

3 Chaque vecteur colonne de S est unitaire, donc :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}^2\right) = n.$$

• Soit X le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. On a :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} s_{ij} = {}^tXSX = (X \mid SX).$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* permet d'écrire :

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\right| = |(X \mid SX)| \leqslant \|X\| \, \|SX\|.$$

Or S est une matrice orthogonale. Donc :

$$\|X\| \, \|SX\| = \|X\|^2 = n.$$

4 **a)** Soit un entier $n \geqslant 2$ et un réel $\theta \neq 0 \bmod \pi$.
On définit les matrices diagonales par blocs A et B :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0_{3,n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0_{n-3,3} & & I_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0_{2,n-2} & \\ & & & \\ 0_{n-2,2} & & I_{n-2} & \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont dans $\mathcal{O}_n$ et $AB \neq BA$.

b) L'application déterminant est un morphisme de groupes de $(\mathcal{O}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $\mathcal{SO}_n$ en est le noyau. Donc $\mathcal{SO}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n$.
Soit un entier $n \geqslant 3$ et un réel $\theta \neq 0 \bmod \pi$.
On définit les matrices diagonales par blocs C et D :

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0_{3,n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 0_{n-3,3} & & I_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 0_{3,n-3} & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0_{n-3,3} & & & I_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont dans $\mathcal{SO}_n$ et $CD \neq DC$.

c) Toute matrice de $\mathcal{SO}_2$ est de la forme :

$$R(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Vérifier que, pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$:

$$R(a)R(b) = R(b)R(a).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

5 L'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E. D'après le *théorème* 13, on a :

$$(\text{Ker}\,(u-\text{I}_E))^\perp = \text{Im}(u-\text{I}_E).$$

Soit x quelconque dans Ker $(u-\text{I}_E)$.

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad u^k(x)=x.$$

Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n(x)=x.\qquad \lim_{n\to+\infty} u_n(x)=x.$$

Soit y quelconque dans $(\text{Ker}\,(u-\text{I}_E))^\perp$. Il existe z dans E tel que $y=u(z)-z$.

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad u^k(y)=u^{k+1}(z)-u^k(z).$$

On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^{k+1}(z)-u^k(z)\right)=\frac{1}{n}\left(u^n(z)-z\right).$$

$$\left\|\frac{1}{n}\left(u^n(z)-z\right)\right\|\leqslant\frac{1}{n}\left(\|u^n(z)\|+\|z\|\right)\leqslant\frac{2}{n}\|z\|.$$

car l'endomorphisme u conserve la norme.
On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(y)=0_E$. Or :

$$\text{Ker}\,(u-\text{I}_E)\oplus(\text{Ker}\,(u-\text{I}_E))^\perp=E.$$

Pour tout t de E, il existe x dans Ker $(u-\text{I}_E)$ et y dans $(\text{Ker}\,(u-\text{I}_E))^\perp$ tels que $t=x+y$.
Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)=x$
La suite $(u_n)_n$ converge simplement vers la projection orthogonale sur Ker $(u-\text{I}_E)$.

6 L'hyperplan d'équation $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ est l'hyperplan orthogonal à $v=(1,-1,1,-1)$.
Soit r la réflexion étudiée. Le *théorème* 16 appliqué à $e=\dfrac{v}{\|v\|}$ permet de calculer les images des vecteurs de la base canonique :

$$r(1,0,0,0)=(1,0,0,0)-2\frac{1}{4}(1,-1,1,-1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$r(0,1,0,0)=(0,1,0,0)+\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

$$r(0,0,1,0)=(0,0,1,0)-\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$r(0,0,0,1)=(0,0,0,1)+\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

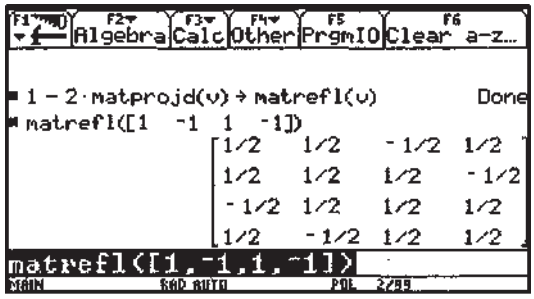
et de déterminer « à la main » la matrice R de r dans la base canonique :

$$R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\-1&1&1&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Une fonction TI, intitulée « `matprojd` » calcule, pour un vecteur v non nul, la matrice de la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}v$. Donc, l'expression :

$$1-2^*\,\texttt{matprojd}(v)$$

donne la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan $v^\perp$. La matrice cherchée est indiquée sur l'écran suivant.



7 Les matrices A et B sont symétriques et orthogonales. Elles représentent donc des symétries orthogonales.

- tr $A=0$, donc A représente une symétrie orthogonale par rapport à un plan de $\mathbb{R}^4$ (le plan engendré par $(2,1,1,0)$ et $(-1,1,1,-3)$).
- tr $B=2$, donc B représente une réflexion (la réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $x-y-z-t=0$).

8 **1)** Notons $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ la base de E^* duale de la base $(e_1,\dots,e_n)$.
Or E et E^* sont isomorphes. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, il existe un vecteur f_i de E tel que e_i^*, soit l'application $t\longmapsto(t\mid f_i)$. L'image d'une base par un isomorphisme est une base. Donc $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de E.

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad (e_i\mid f_j)=e_j^*(e_i)=\delta_i^j.$$

Par conséquent :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad i\neq j\quad\Rightarrow\quad(e_i\mid f_j)=0$$

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\qquad\qquad(e_i\mid f_i)=1.$$

2) $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad f_i=\displaystyle\sum_{j=1}^n e_j^*(f_i)e_j=\sum_{j=1}^n(f_i\mid f_j)\,e_j.$

3) Soit N la matrice de $(\mid)$ dans la base $(f_1,\dots,f_n)$. Calculons NM.
Soit $a_{i,j}$ le terme d'ordre (i,j) de NM.

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^n(f_i\mid f_k)\,(e_k\mid e_j)=\left(e_j\mid\sum_{k=1}^n(f_i\mid f_k)\,e_k\right)$$

$$=(e_j\mid f_i)=\delta_i^j.$$

On en déduit $N=M^{-1}$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

9 Notons φ cette application. Elle est linéaire et $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$. Il s'agit de la symétrie par rapport au sous-espace des polynômes pairs parallèlement à celui des polynômes impairs.
De plus, ces deux sous-espaces sont orthogonaux.
Donc φ est une symétrie orthogonale.

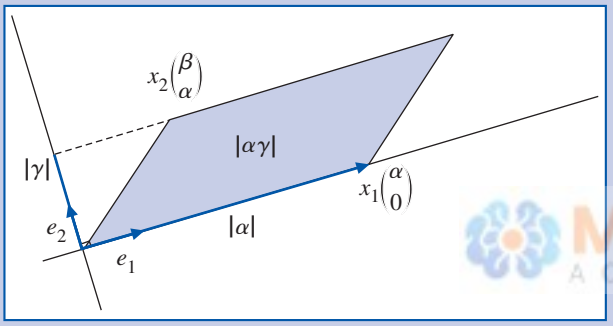
10 A est la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}(1, 4, 1)$.

11 Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe du plan telle que :

$$\begin{cases} v_1 = \alpha e_1 \\ v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2 \end{cases}.$$

L'aire du parallélogramme déterminé par (x_1, x_2) est :

$$|\alpha\gamma| = |[x_1, x_2]|.$$

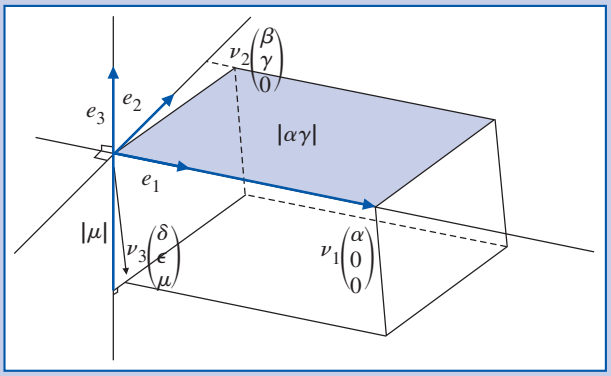


Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de l'espace telle que :

$$\begin{cases} v_1 = \alpha e_1 \\ v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2 \\ v_3 = \delta e_1 + \varepsilon e_2 + \mu e_3 \end{cases}.$$

Le parallélépipède déterminé par (v_1, v_2, v_3) a une base d'aire $|\alpha\gamma|$ et une hauteur de $|\mu|$.
Son volume est :

$$|\alpha\gamma\mu| = |[v_1, v_{2,v3}]|.$$



12 Vérifier que :

$${}^tAA = \mathrm{I}_3 \; ; \quad \mathrm{Det}A = 1 \; ; \quad \mathrm{tr}\,A = 0 \; ;$$

$$\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{6}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

En déduire que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe $\mathbb{R}(0, 1, 1)$. Les applications $u : X \longmapsto AX + B$ et $v : X \longmapsto AX + C$ sont des applications affines de partie linéaire f.

a) L'ensemble des points fixes de u a pour équation $X = AX + B$, soit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y - z = \dfrac{\sqrt{6}}{12} \end{cases}.$$

L'application u est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe la droite affine :

$$D = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{6}}{12}, 0\right) + \mathbb{R}(0, 1, 1).$$

b) L'équation $X = AX + C$ n'a pas de solution. L'application v n'a pas de point fixe.
On note :

$$O = (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad V = (0, 1, 1).$$

Alors :

$$v(O) = C = V + u(O).$$

Pour tout M de $\mathbb{R}^3$:

$$v(M) = v(O) + f(\overrightarrow{OM}) = V + u(M).$$

Donc v est la composée de la rotation u et de la translation de vecteur V (il s'agit donc d'un *vissage*).

13 • Le cas où $\mathrm{Det}M = 0$ est trivial.
• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Det}M \neq 0$. Les vecteurs colonnes de M, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Si C désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Det}M = \mathrm{Det}_C(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.
Soit $B = (E_1, \ldots, E_n)$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ construite à partir de $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ par le *procédé de Gram-Schmidt* :

$$W_1 = C_1; \quad E_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

et

$$W_k = C_k - \sum_{i=1}^{k-1}(E_i \mid C_k)E_i; \quad E_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

Donc :

$$C_k = \|W_k\|E_k + \sum_{i=1}^{k-1}(E_i \mid C_k)E_i.$$

La matrice des composantes des vecteurs de la famille

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$(C_1, C_2, \dots, C_n)$ dans la base B est triangulaire supérieure de la forme : $\begin{pmatrix} \|w_1\| & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \|w_2\| & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \|w_n\| \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\mathrm{Det}_B(C_1, C_2, \dots, C_n) = \prod_{i=1}^{n} \|W_i\|.$$

Or : $\mathrm{Det}_C(C_1, C_2, \dots, C_n) = \mathrm{Det}_B(C_1, C_2, \dots, C_n)\mathrm{Det}_C(B)$.
De plus, $\mathrm{Det}_C(B)$ est le déterminant d'une matrice de changement de base orthonormée. Ainsi :

$$|\mathrm{Det}_C(B)| = 1$$

et

$$|\mathrm{Det}M| = |\mathrm{Det}_B(C_1, C_2, \dots, C_n)| = \prod_{k=1}^{n} \|W_k\|. \qquad \textbf{(1)}$$

Or $\|C_k\|^2 = \|W_k\|^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (E_i \mid C_k)^2 \geqslant \|W_k\|^2$,

donc : $$|\mathrm{Det}M| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|. \qquad \textbf{(2)}$$

Étudions le cas d'égalité.

• Soit M une matrice telle que $\mathrm{Det}M = 0$.

Il est évident que $|\mathrm{Det}M| = \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|$ si, et seulement si, un des vecteurs colonnes de M est nul.

• Soit M une matrice telle que $\mathrm{Det}M \neq 0$.

On montrera que $|\mathrm{Det}M| = \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes de $M, (C_1, \dots, C_n)$, sont orthogonaux entre eux deux à deux.

14 **1)** Si M est une matrice de rotation, ses vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Donc :

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

De ces deux relations, on déduit :

$$(a+b+c)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (a+b+c)^3 = (a+b+c) = \pm 1.$$

Par ailleurs, on obtient aussi :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \mathrm{Det}M = 1.$$

Finalement, si M est une matrice de rotation :

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a + b + c = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

• Si a, b et c vérifient **(1)**, ce sont les trois racines du polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + k$ avec $k = -abc$. Ce polynôme a pour tableau de variation :

	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
P		$\nearrow$	k	$\searrow$	$k - \frac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il a trois racines réelles (éventuellement multiples), donc $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

• Réciproquement, si $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles a, b et c telles que $ab + bc + ca = 0$ et $a + b + c = 1$. Il est aisé de vérifier qu'alors, la matrice M associée est une matrice de rotation.

2) On suppose que M est une matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc d'une rotation d'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$. On trouvera que son angle est $\theta = \mathrm{sgn}(c-b)\ \mathrm{Arccos}\ \frac{3a-1}{2}$.

15 Notons $M = (m_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ dans une base orthonormale directe $(e_1, \dots, e_n)$ de E. $\mathrm{Det}M = [v_1, \dots, v_n]$.

Soit $G(v_1, \dots, v_n)$ la matrice de Gram de $(v_1, \dots, v_n)$.

$(v_i \mid v_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i} e_k \mid \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j}$ est le terme d'ordre (i,j) de ${}^tMM$.

Par conséquent :

$$G(v_1, \dots, v_n) = {}^tMM.g(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Det}\,{}^tMM$$
$$= (\mathrm{Det}M)^2 = [v_1, \dots, v_n]^2.$$

16 **1)** F est un hyperplan. Fixons w_0 un vecteur unitaire de la droite $F^\perp$.

L'application θ_0 de F^{n-1} dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\theta_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid w_0)$$

est $(n-1)$ linéaire alternée sur F qui est de dimension $n-1$.

L'ensemble des formes $(n-1)$ linéaires alternées sur un espace de dimension $n-1$ est de dimension 1.

L'application θ_0 est donc colinéaire à l'application $(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto [x_1, \dots, x_{n-1}]$ où $[x_1, \dots, x_{n-1}]$ désigne le produit mixte de $(x_1, \dots, x_{n-1})$ dans l'espace euclidien orienté F.

Il existe un réel λ tel que :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in F^{n-1} \quad \theta_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = \lambda [x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Soit $(a_1, \dots, a_{n-1})$ une base orthonormale directe de F.

$$\theta_0(a_1, \dots, a_{n-1}) = \lambda [a_1, \dots, a_{n-1}] = \lambda.$$

Or $(a_1, \dots, a_{n-1}, w_0)$ est une base orthonormale. Donc $\theta_0(a_1, \dots, a_{n-1})$ appartient à $\{1, -1\}$ et le réel λ également.

Choisissons $w = \lambda w_0$. Appliquons ce qui précède à l'application θ de F^{n-1} dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\theta(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid w).$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Pour toute base orthonormale directe $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de F, $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \mid w) = 1$ et la base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n-1}, w)$ est directe dans E.
Le vecteur w est de manière évidente le seul vecteur unitaire de $F^\perp$ ayant cette propriété.

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in F^{n-1} \quad \theta(x_1, \dots, x_{n-1}) = [x_1, \dots, x_{n-1}].$$

D'où :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in F^{n-1} \quad (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \mid w) = [x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Or $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ appartient à $\mathbb{R}w$. Donc :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in F^{n-1} \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = [x_1, \dots, x_{n-1}]w.$$

En particulier :

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = [v_1, \dots, v_{n-1}]w.$$

2) Soit $(v_1, \dots, v_{n-1})$ dans E^{n-1}.
• Si $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est liée, alors $g(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$ et $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0_E$.
Dans ce cas :

$$g(v_1, \dots, v_{n-1}) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2.$$

• Si $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est libre, on applique la question **1)**. On obtient : $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = [v_1, \dots, v_{n-1}]w$. D'après l'*exercice* 15, on a :

$$g(v_1, \dots, v_{n-1}) = [v_1, \dots, v_{n-1}]^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2 &= [v_1, \dots, v_{n-1}]^2 \|w\|^2 \\ &= [v_1, \dots, v_{n-1}]^2 = g(v_1, \dots, v_{n-1}).\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall (v_1, \dots, v_{n-1}) \in E^{n-1} \quad g(v_1, \dots, v_{n-1}) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2.$$

Pour $n = 3$, on obtient l'*identité de Lagrange* :

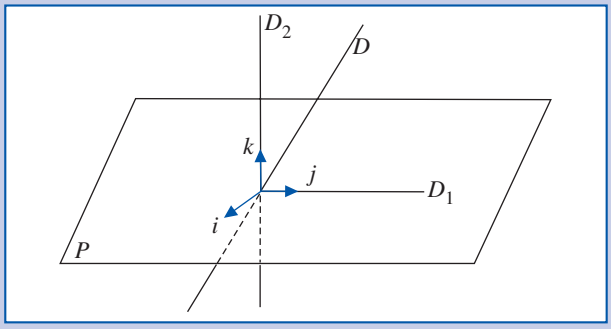
$$\|u \wedge v\|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}.$$

17 • Si $D \subset P$, on vérifie facilement que $s_P \circ s_D = s_D \circ s_P$.
• Si D n'est pas contenue dans P, soit $F = P \oplus D$.
Alors $E = F \oplus F^\perp$.
$F^\perp \subset D^\perp$ et $F^\perp \subset P^\perp$ donc les restrictions de s_P et s_D à $F^\perp$ sont égales à $-\mathrm{I}_{F^\perp}$. En particulier $F^\perp$ est stable par les automorphismes orthogonaux s_P et s_D.
On en déduit que :

$$\forall x \in F^\perp \quad s_P \circ s_D(x) = s_D \circ s_P(x) = x$$

puis, que F est stable par les automorphismes orthogonaux s_P et s_D.
Il suffit ensuite d'étudier les restrictions de s_P et s_D à F ce qui nous ramène au cas de la dimension 3.

Soit D_1 la droite projetée orthogonale de D sur P. Notons D_2 l'orthogonal de P dans F.



On choisit une base orthonormée (i, j, k) de F telle que j appartienne à D_1 et k à D_2.
Soit θ l'angle (j, u) où u est un vecteur directeur de D tel que θ appartienne à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\theta \neq 0\,[\pi]$ car D n'est pas contenue dans P.

$s_P(i) = i$, $s_P(j) = j$ et $s_P(k) = -k$. $s_D(j) = \cos 2\theta j + \sin 2\theta k$.

On en déduit :

$$s_P \circ s_D(j) = \cos 2\theta j - \sin 2\theta k$$

et

$$s_D \circ s_P(j) = \cos 2\theta j + \sin 2\theta k.$$

Si θ est différent de $\frac{\pi}{2}\,[\pi]$, $s_P \circ s_D(j) \neq s_D \circ s_P(j)$. Alors s_P et s_D ne commutent pas.
Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, ceci correspond au cas $D = D_2$, on vérifie que :

$$s_D(i) = -i \quad s_D(j) = -j \quad \text{et} \quad s_D(k) = k.$$

On en deduit la commutativité de s_P et s_D. En conclusion : s_P et s_D commutent si, et seulement si :

$$D \subset P \quad \text{ou} \quad D \subset P^\perp.$$

Chapitre 23

1 Soit f dans E. La fonction $(x, t) \longmapsto \sin(\pi|x - t|)f(t)$ est continue sur $[0, 1]^2$. Par conséquent, l'application g est dans E. La linéarité de F résulte de la linéarité de l'intégration.
Par conséquent, F est un endomorphisme de E. Montrons qu'il est auto-adjoint. Pour tout f et tout h de E, on a :

$$(F(f) \mid h) = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi|x - t|) f(t)\,\mathrm{d}t \right) \right) h(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'application $(x, t) \longmapsto \sin(\pi|x - t|)f(t)h(x)$ est continue sur $[0, 1]^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(F(f) \mid h) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi|x - t|) f(t)h(x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi|t - x|) h(x)\,\mathrm{d}x \right) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (f \mid F(h)).\end{aligned}$$

L'endomorphisme F est auto-adjoint.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{(u^*)^k}{k!}$.

L'application $v \longmapsto v^*$ est linéaire et la dimension de E est finie. Elle est donc continue.
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right)^* = \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right)^* = (\mathrm{e}^u)^*.$$

On en déduit $\mathrm{e}^{u^*} = (\mathrm{e}^u)^*$. Lorsque u est auto-adjoint, on a $u^* = u$. Donc e^u est également auto-adjoint.

3 **1)** Montrons que $\forall x \in E \quad \|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.

$$\|u^*(x)\|^2 = (u^*(x) \mid u^*(x)) = (x \mid uu^*(x))$$
$$\leqslant \|x\|\|u(u^*(x))\| \leqslant \|x\|\|u^*(x)\|.$$

Si $\|u^*(x)\|$ est non nul, en simplifiant par $\|u^*(x)\|$, on obtient $\|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.
Si $\|u^*(x)\| = 0$, on a également $\|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.
2) $\|u^*(x) - x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2(x \mid u(x)) + \|x\|^2$.
Supposons que x appartiennent à Ker $(u - \mathrm{I}_E)$, alors on a $u(x) = x$.
Donc $\|u^*(x) - x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leqslant 0$.
On en déduit $\|u^*(x) - x\|^2 = 0$, puis $x \in \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E)$.
Par conséquent :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E).$$

L'endomorphisme u^* vérifie les mêmes hypothèses que u.
Donc :

$$\mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E).$$

En conclusion :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E).$$

3) $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{I}_E) = (\mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E))^\perp$.
Or $\mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E) \oplus (\mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E))^\perp = E$. On en déduit :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E) = E.$$

4 **1)** Il suffit de montrer que -1 n'est pas valeur propre de u.
Si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.

$$(u(x) \mid x) = \lambda\|x\|^2.$$

Or u est antisymétrique. Donc :

$$(u(x) \mid x) = (x \mid -u(x)) = -\lambda\|x\|^2.$$

Par conséquent, $\lambda = 0$ et -1 n'est pas valeur propre de u. L'endomorphisme $\mathrm{I}_E + u$ est inversible.
2) Pour montrer que $v = (\mathrm{I}_E - u) \circ (\mathrm{I}_E + u)^{-1}$ est un automorphisme orthogonal, montrons que $v^* = v^{-1}$.

$$v^* = \left((\mathrm{I}_E + u)^{-1}\right)^* \circ (\mathrm{I}_E - u)^* = \left((\mathrm{I}_E + u)^*\right)^{-1}) \circ (\mathrm{I}_E - u)^*$$
$$= (\mathrm{I}_E - u)^{-1} \circ (\mathrm{I}_E + u).$$

Or, $(\mathrm{I}_E - u)^{-1}$ et $(\mathrm{I}_E + u)$ commutent car $(\mathrm{I}_E + u)$ et $(\mathrm{I}_E - u)$ commutent.

Donc :

$$v^* = (\mathrm{I}_E + u) \circ (\mathrm{I}_E - u)^{-1} = v^{-1}.$$

L'endomorphisme v est orthogonal.

$$\mathrm{Det}\, v = \frac{\mathrm{Det}\,(\mathrm{I}_E - u)}{\mathrm{Det}\,(\mathrm{I}_E + u)} = \frac{\mathrm{Det}\,(\mathrm{I}_E + u)^*}{\mathrm{Det}\,(\mathrm{I}_E + u)} = 1.$$

On en déduit que v est un déplacement.
3) $v = (\mathrm{I}_E - u) \circ (\mathrm{I}_E + u)^{-1} \Leftrightarrow v \circ (\mathrm{I}_E + u) = (\mathrm{I}_E - u)$
$\Leftrightarrow (v + \mathrm{I}_E) \circ u = \mathrm{I}_E - v$.
Or -1 n'est pas une valeur propre de v. Donc $(v + \mathrm{I}_E)$ est inversible.

$$v = (\mathrm{I}_E - u) \circ (\mathrm{I}_E + u)^{-1} \Leftrightarrow u = (v + \mathrm{I}_E)^{-1} \circ (\mathrm{I}_E - v).$$

Montrons que u ainsi déterminé est antisymétrique.

$$u^* = (\mathrm{I}_E - v)^* \circ [(v + \mathrm{I}_E)^*]^{-1} = (\mathrm{I}_E - v^{-1}) \circ (v^{-1} + \mathrm{I}_E)^{-1}$$
$$= v^{-1} \circ (v - \mathrm{I}_E) \circ v \circ (\mathrm{I}_E + v)^{-1}.$$

L'endomorphisme v commute avec $v - \mathrm{I}_E$. Donc :

$$u^* = (v - \mathrm{I}_E) \circ (\mathrm{I}_E + v)^{-1} = -u.$$

5 **1)** $(\varphi(P) \mid Q) = \int_{-1}^{1} [(1 - t^2)P''(t) - 2tP'(t)]Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Or :

$$[(1 - t^2)P''(t) - 2tP'(t)] = \int_{-1}^{1} [(1 - t^2)P'(t)].$$

Une intégration par parties permet de prouver que :

$$(\varphi(P) \mid Q) = -\int_{-1}^{1} (1 - t^2)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t = (P \mid \varphi(Q)).$$

Donc φ est un endomorphisme auto-adjoint de $(E, (\ \mid\ ))$.
2) • Des égalités :

$$\varphi(1) = 0,\ \varphi(X) = -2X \text{ et } \varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k,$$

on déduit que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et que :

$$\mathrm{Sp}\,\varphi = \{-k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!]\}.$$

• La matrice de φ dans la base canonique n'est pas symétrique bien que φ soit auto-adjoint. Donc la base canonique n'est pas orthonormée pour le produit scalaire utilisé.
Les $(n+1)$ valeurs propres sont distinctes deux à deux. L'endomorphisme φ est diagonalisable.
Le *théorème* 14 nous assure également que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

6 Les sous-espaces propres de v sont stables par u car $u \circ v = v \circ u$.
Soit λ une valeur propre de v, $E_\lambda(v)$ le sous-espace propre associé et u_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(v)$ induit par u.
L'endomorphisme u_λ est auto-adjoint. Donc il existe une base orthonormale B_λ de E_λ formée de vecteurs propres de u.
Les E_λ sont orthogonaux deux à deux, donc la famille $B = (B_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{S}_v}$ est une base orthonormale de E.
Par construction, les éléments de B sont simultanément vecteurs propres de u et de v.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7 **1)** Pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0.$$

2) Immédiat en utilisant la même formule qu'au **1)**.

8 Cherchons un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ soit le carré de $\dfrac{\|u((x,y))\|}{\|(x,y)\|}$ où $\|\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

$x^2+xy+y^2 = (x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$.

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u((x,y)) = \left(x+\frac{1}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ convient. Alors :

$$\sup\left\{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\right\} = \|u\|^2.$$

Cherchons le rayon spectral de u^*u. La matrice de u dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} . {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Son spectre est $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Le rayon spectral de u^*u est $\frac{3}{2}$.

$\sup\left\{\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\right\} = \frac{3}{2}$.

9 Soit Q la forme quadratique $Q_1 + Q_2$.

$\forall x \in E\backslash\{0_E\} \quad Q_1(x) + Q_2(x) > 0$.

La forme quadratique Q est définie positive. Il existe une base orthonormale pour Q et orthogonale pour Q_1. On vérifie facilement qu'elle est orthogonale pour Q_2.

10 **1)** Les vecteurs (2,1) et (1, –2) sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 3 et –7.
On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2).$$

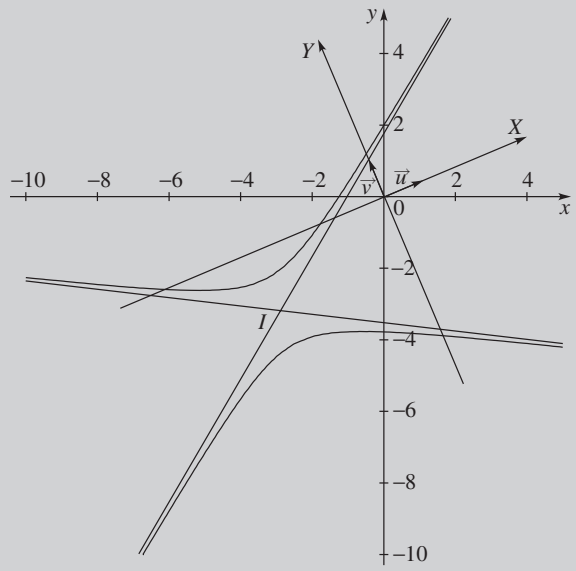
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$3(X+4)^2 - 7\left(Y + \frac{11}{7}\right)^2 + 7 = 0.$$

C'est une hyperbole.

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
implicitplot(x^2+8*x*y-5*y^2+14*sqrt(5)*x
-4*sqrt(5)*y+264/7=0,x=-8..4,
y=-12..5,numpoints=4000,
scaling=constrained) ;
```



2) Les vecteurs (1, 1) et (1, −1) sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 0 et 2.
On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$(Y+2)^2 - 3X - 3 = 0.$$

Il s'agit d'une parabole de sommet $S(-1,-2)$, d'axe la droite d'équation $Y = -2$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) Les vecteurs (1, 3) et (– 3, 1) sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 2{,}1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 2 et 3.
On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

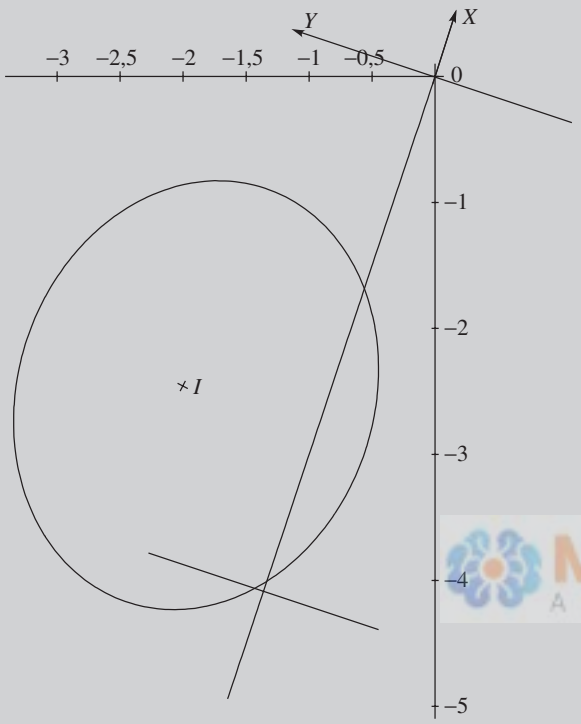
$$2(X+3)^2 + 3(Y-1)^2 - 6 = 0.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cette conique est l'ellipse de centre $I(-3, 1)$, de demi-grand axe $a = \sqrt{3}$ et de demi-petit axe $b = \sqrt{2}$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Avec Maple :

```
> implicitplot({2.9*x^2-0.6*x*y+2.1*y^2
  +3*sqrt(10)*x+3*sqrt(10)*y+15=0,y-3*x},
  x=-5..0,y=-5..0,
  numpoints=4000,scaling=constrained) ;
```



4) Les vecteurs $(4, -3)$ et $(3, 4)$ sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont 25 et 0.
On pose :

$$\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$(X + 2)^2 + 28Y - 28 = 0.$$

C'est une parabole de sommet $S(-2, 1)$, d'axe la droite d'équation $X = -2$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

5) Les vecteurs $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

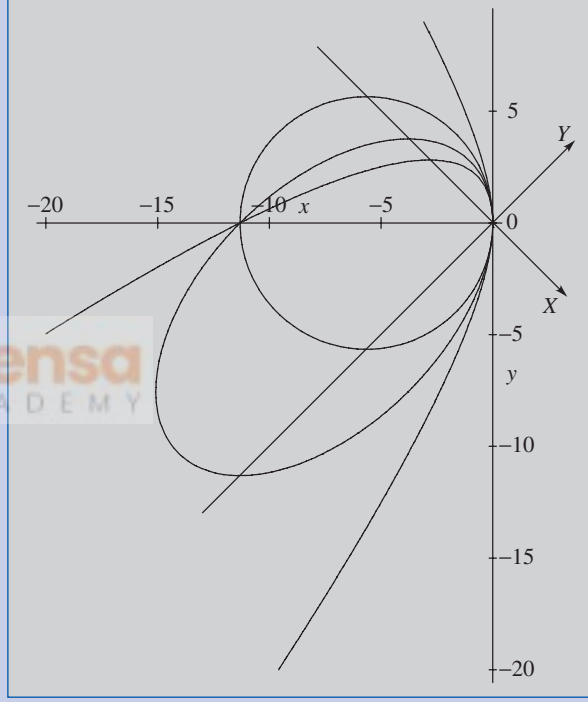
Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}X^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}Y^2 + 4X + 4Y = 0.$$

- Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, on obtient une parabole.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, on obtient un cercle passant par O.
- Si $\alpha \neq 0 \left(\text{mod}\frac{\pi}{2}\right)$, on obtient l'équation d'une ellipse.

Avec Maple :

```
> implicitplot({x^2-2*x*y+y^2+8*sqrt(2)*x,
  x^2-x*y+y^2+8*sqrt(2)*x,x^2+y^2+8*sqrt(2)*x,}
  x=-20..0,y=-20..9,numpoints=4000,
  scaling=constrained) ;
```



11 On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique est :

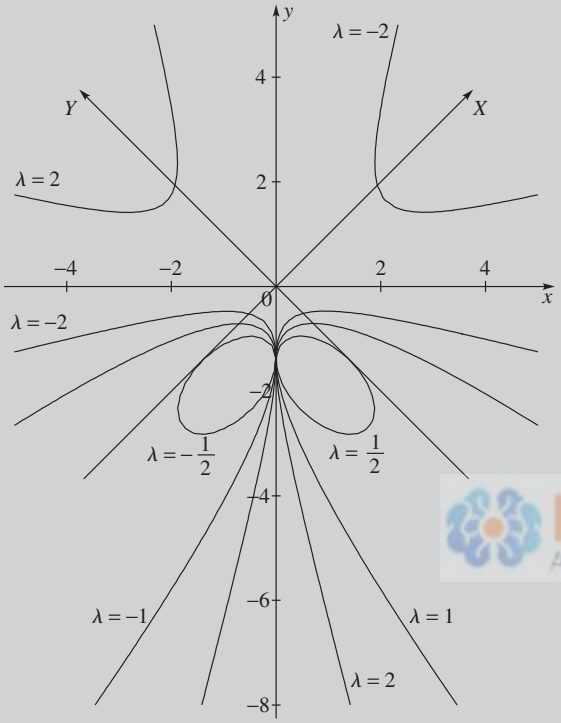
$$(1 + \lambda)X^2 + (1 - \lambda)Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0.$$

- Si $\lambda = 0$, on trouve un point.
- Si $\lambda = 1$ ou -1, on obtient une parabole.
- Si $\lambda \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, c'est une ellipse.
- Si $\lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, il s'agit d'une hyperbole.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Avec Maple :

```
> L :=NULL :with(plots) :i :=0 :
  for a in {-2,-1/2,-1,0,1/2,1,2} do
>     couleur :={red,green,blue,pink,violet,
      yellow,maroon} : i :=i+1 :
> L :=L,implicitplot(x^2+2*a*x*y+y^2
  +2*sqrt(2)*y+2,x=-5..5,y=-8..5,
  color=couleur[i],numpoints=3000,
  scaling=constrained) :
> od :
> display({L}) ;
```



12 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. De l'équation dans ce repère, on déduit la matrice associée à la quadrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Maple nous donne les éléments propres de A.

```
> restart: with (linalg):
> A:=linalg [matrix]
        (3,3, [2,-2,0,-2,1,-2,0,-2,01]) ;
> eigenvects (A) ;
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[1, 1, \{[2, 1, -2]\}], [-2, 1, \{[1, 2, 2]\}], [4, 1, \{[2, -2, 1]\}]$$

Les vecteurs propres fournis par *Maple* sont tous de norme 3. On pose :

$$\vec{u} = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad \vec{v} = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad \vec{w} = \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

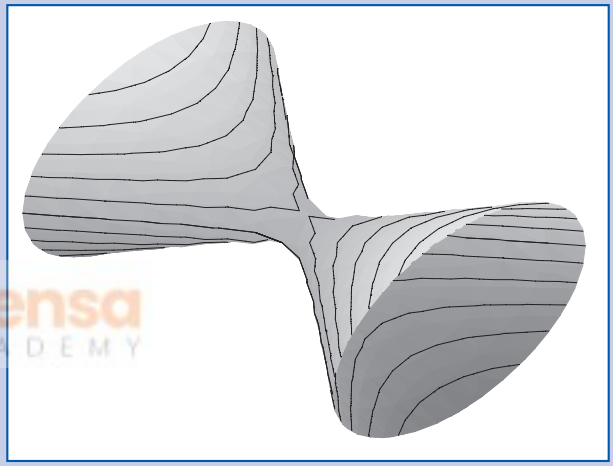
L'équation de la quadrique dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est :

$$x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2 + \frac{1}{3}(14x' - 2y' - 4z') + 2 = 0.$$

Par factorisation canonique, ce qui correspond à un changement d'origine, on arrive à une équation du type :

$$x''^2 - 2y''^2 + 4z''^2 = c^2, \quad \text{avec } c \neq 0.$$

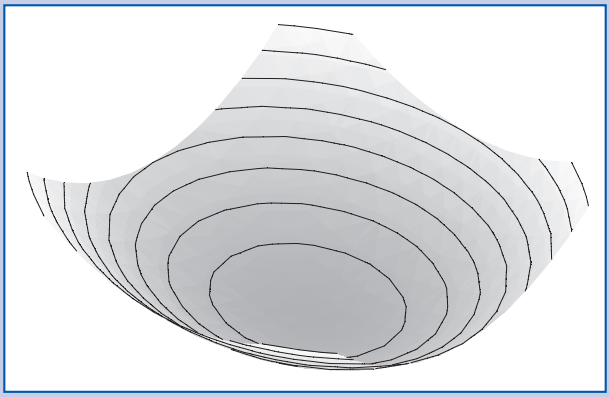
Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.



13 Par la même méthode que dans l'exercice précédent, on arrive à une équation du type :

$$3x''^2 + 2y''^2 = cz'', \quad \text{avec} \quad c \neq 0$$

dans un nouveau repère orthonormé. Il s'agit d'un paraboloïde elliptique.



© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

14 L'inclusion $\text{Ker } u \cap \text{Ker } u^* \subset \text{Ker } (u+u^*)$ est immédiate.
Montrons : $\text{Ker } (u+u^*) \subset \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*$. Soit x quelconque dans $\text{Ker } (u+u^*)$.

$$u(x) + u^*(x) = 0_E. \qquad \textbf{(1)}$$

On applique u : $u^2(x) + uu^*(x) = 0_E$.
Or $u^2 = 0$. Donc $uu^*(x) = 0_E$.
$\|u^*(x)\|^2 = (u^*(x) \mid u^*(x)) = (x \mid uu^*(x)) = 0$.
Donc $u^*(x) = 0_E$. En remplaçant dans **(1)**, on obtient $u(x) = 0_E$. Par conséquent :

$$\text{Ker } (u+u^*) \subset \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*.$$

En conclusion, on a :

$$\text{Ker } (u+u^*) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*.$$

15 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$.

$$A^2 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n). = 0_n.$$

La matrice A est nilpotente. Elle n'est pas nulle, donc elle n'est pas diagonalisable.

16 La matrice A est symétrique. Ses valeurs propres sont 0, 9, -18. La matrice orthogonale $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ diagonalise M.

17 La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et le complexe $-\mathrm{i}$ n'est pas valeur propre de A. Donc Z est inversible.

18 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(X_1, \ldots, X_n)$.
Pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $a_{ii} = {}^{\mathrm{t}}X_i A X_i > 0$.
Pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$${}^{\mathrm{t}}(X_i + X_j)A(X_i + X_j) = a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij} > 0$$
$${}^{\mathrm{t}}(X_i - X_j)A(X_i - X_j) = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} > 0.$$

Donc :

$$|a_{ij}| < \frac{a_{ii} + a_{jj}}{2} \leqslant \max\{a_{kk} \mid k \in [\![1,n]\!]\}.$$

19 **1)** Immédiat.
2) $(M \mid \Psi(N)) = \text{tr}({}^{\mathrm{t}}MA{}^{\mathrm{t}}NA) = \text{tr}({}^{\mathrm{t}}NA{}^{\mathrm{t}}MA) = (N \mid \Psi(M))$.
L'endomorphisme Ψ est auto-adjoint.

20 **1)** $\forall (x,y) \in E^2$

$$(f(x) \mid y) = \sum_{i=1}^{k} (v_i \mid x)(v_i \mid y) = (x \mid f(y)).$$

2) $(\text{Vect}\{v_i, i \in [\![1,k]\!]\})^{\perp} \subset \text{Ker } f$ est immédiat.
Soit $x \in \text{Ker } f$. La famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre.
Donc, pour tout i, $(v_i \mid x) = 0$ et $x \in (\text{Vect}\{v_i, i \in [\![1,k]\!]\})^{\perp}$.
Ainsi $(\text{Vect}\{v_i, i \in [\![1,k]\!]\})^{\perp} = \text{Ker } f$. Or f est auto-adjoint.
Donc :

$$\text{Im} f = \text{Ker } f^{\perp} = \text{Vect}(v_i, i \in [\![1,k]\!]\}.$$

21 **1)** La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont 1, $\frac{1}{4}$ et $\frac{-1}{12}$.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est telle que :

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{12} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La convergence de la suite de matrices (M^n) en découle.
2) $N = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
N est la matrice, relativement à la base canonique, du projecteur orthogonal sur la droite $D = \text{Ker } (M - \mathrm{I}_3) = \mathbb{R}$.
3) $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = NX_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \end{pmatrix}$.

22 **1)a)** B et A sont des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel réel. Ils sont diagonalisables. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de B et μ_j la valeur propre associée à e_j. Puisque $B^2 = A$, les vecteurs e_j sont vecteurs propres pour A relativement à la valeur propre μ_j^2.

$$\text{Ker } (B - \mu_i \text{Id}_E) \subset \text{Ker } (A - \mu_i^2 \text{Id}_E) \qquad \textbf{(1)}$$

Les valeurs propres de B étant positives, deux valeurs propres distinctes pour B ont des carrés distincts. Vous en déduirez que l'inclusion **(1)** est une égalité et que les sous-espaces propres de B sont exactement les mêmes que ceux de A.
b) Soit A un endomorphisme symétrique positif et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A. On appelle λ_j la valeur propre positive associée au vecteur propre e_j et μ_j la racine carrée de λ_j.
Soit B l'endomorphisme de E défini par $B\,e_j = \mu_j\,e_j$ pour tout j de $[\![1,n]\!]$. Sa matrice dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ est diagonale, donc symétrique. Donc B est un endomorphisme symétrique de E.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Les valeurs propres de B sont positives et la question **1) a)** permet d'affirmer que B est positif.
La question **1) a)** permet de prouver l'unicité de B.
2) L'endomorphisme A, dont la matrice relativement à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ vérifie, pour tout $x = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$(A\,x \mid x) = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)^2 + 3\beta^2. \quad \textbf{(2)}$$

D'après **(2)**, A est un endomorphisme positif. Il n'est pas symétrique car sa matrice dans la base canonique ne l'est pas.
3)a) L'endomorphisme A^*A est symétrique positif.
En outre, il est immédiat que $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^*A$ et $\text{Im}A^*A \subset \text{Im}A^*$.
L'égalité $(A^*Ax \mid x) = (Ax \mid Ax)$ permet d'écrire :

$$A^*Ax = 0_E \Rightarrow Ax = 0_E.$$

Puis :

$$\text{Ker } A^*A = \text{Ker } A.$$

Enfin, grâce au *théorème du rang* : $\text{Im}A^*A = \text{Im}A^*$.
b) Notons B la matrice $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Alors :

$$(|k|B)(|k|B) = k^2A^*A = (kA)^*(kA).$$

Donc :

$$|kA| = |k||A|.$$

Exemple

La matrice A^*A est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} |\beta| & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est celle de l'endomorphisme $|A|$ dans la base canonique.

23 Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Recherchons une condition nécessaire sur S.
S'il existe un unique couple (Ω, S) de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}$ tel que :
$A = \Omega S$ et S définie positive alors : ${}^tAA = {}^tS\,{}^t\Omega\Omega S$.
La matrice Ω est orthogonale. Donc ${}^t\Omega\Omega = \text{I}_n$ et ${}^tAA = {}^tSS$.
La matrice S est symétrique. Donc ${}^tAA = S^2$.
On a montré dans l'*exercice* 22, qu'il existe une unique matrice S positive telle que ${}^tAA = S^2$.
De plus A est dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tAA$ est symétrique définie positive.
Par conséquent, la matrice S ainsi déterminée est inversible, donc définie positive.
En conclusion, il existe une unique matrice S symétrique définie positive telle que ${}^tAA = S^2$.
Soit S ainsi construite. La matrice Ω est entièrement déterminée par $\Omega = AS^{-1}$.
Si elle convient, elle est unique. Vérifions que la matrice Ω est orthogonale.
${}^t\Omega\Omega = ({}^tS^{-1}\,{}^tA)(AS^{-1}) = {}^tS^{-1}({}^tAA)S^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = \text{I}_n$, car S est symétrique et ${}^tAA = S^2$.
La matrice Ω convient.

24 Soit (x, y) quelconque dans E^2. Pour tout z dans E, on a :

$$\begin{aligned} f(z).(f(x) \wedge f(y)) &= [f(x), f(y), f(z)] = \text{Det } f \quad [x, y, z] \\ &= \text{Det } f\, z.(x \wedge y) = z.(\text{Det } f)x \wedge y. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$f(z).(f(x) \wedge f(y)) = z.f^*(f(x) \wedge f(y)).$$

Donc :

$$\forall z \in E \quad z.f^*(f(x) \wedge f(y)) = z.(\text{Det } f)x \wedge y.$$

Par conséquent :

$$f^*(f(x) \wedge f(y)) = (\text{Det } f)x \wedge y.$$

Or f est inversible, donc f^* également.

$$f(x) \wedge f(y) = (\text{Det } f)(f^{-1})^*(x \wedge y).$$

Dans le cas où f est une rotation, on a $\text{Det } f = 1$ et $(f^{-1})^* = f$. On obtient :

$$f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y).$$

25 • Si (x, y, z) est liée, un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.
On suppose, par exemple que : $z = \alpha x + \beta y$. Dans ce cas, la troisième colonne du déterminant $\begin{vmatrix} q(x) & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) \\ \varphi(y,x) & q(y) & \varphi(y,z) \\ \varphi(z,x) & \varphi(z,y) & q(z) \end{vmatrix}$ est combinaison linéaire des deux premières. Le déterminant est nul.
• Si (x, y, z) est libre, (x, y, z) est une base de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(x, y, z)$.
La restriction de q à F est une forme quadratique positive et sa matrice dans la base (x, y, z) est :

$$\begin{pmatrix} q(x) & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) \\ \varphi(x,y) & q(y) & \varphi(y,z) \\ \varphi(x,z) & \varphi(y,z) & q(z) \end{pmatrix}.$$

Son discriminant est positif. Donc :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \begin{vmatrix} q(x) & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) \\ \varphi(y,x) & q(y) & \varphi(y,z) \\ \varphi(z,x) & \varphi(z,y) & q(z) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

26 **1)** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrons qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$. D'après le *corollaire* 21.6, il existe une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $A = {}^tPDP$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique positive. Donc :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i \geqslant 0.$$

Soit S la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

La matrice $M = SP$ convient.

Réciproquement, pour toute matrice X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0.$$

2) Lorsque A est définie positive, on a : $\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i > 0$.
Par conséquent, S est inversible.
La matrice SP est également inversible. La matrice SP convient.
Réciproquement, si M est dans $\mathfrak{GL}_n(\mathbb{R})$, on montre que :

$${}^tX\,{}^tMMX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

En effet : ${}^tX\,{}^tMMX = 0 \Leftrightarrow \|MX\| = 0 \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow X = 0$, car M est inversible.
La matrice ${}^tMM$ est définie positive.

27 Soit q la forme quadratique de matrice A dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et φ sa forme polaire. Pour tout p de $[\![1,n]\!]$, nous noterons q_p la restriction de q à Vect $(e_1, \ldots, e_p)$. La matrice de q_p dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ est la matrice A_p.

1) Si q est positive (resp. définie positive) alors, pour tout p de $[\![1,n]\!]$ la forme q_p est positive (resp.définie positive). Par conséquent :

A positive $\Rightarrow \forall\, p \in [\![1,n]\!] \quad \det A_p \geqslant 0$.

A définie positive $\Rightarrow \forall\, p \in [\![1,n]\!] \quad \det A_p > 0$.

2) Montrons la réciproque de cette deuxième implication.
On suppose que $\forall\, p \in [\![1,n]\!] \quad \det A_p > 0$.
Montrons par une récurrence finie, que q_p est définie positive pour tout p de $[\![1,n]\!]$.
Pour $p = 1$, c'est immédiat.
On suppose que q_p est définie positive. Il existe une base $(e'_1, \ldots, e'_p)$ orthonormale pour q_p.
Dans cette base la matrice de q_p est I_p.

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \text{Vect}(e'_1, \ldots, e'_p).$$

La forme quadratique q_{p+1} est une forme quadratique sur l'espace Vect$(e_1, \ldots, e_{p+1})$.

Or :

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1}) = \text{Vect}(e'_1, \ldots, e'_p, e_{p+1}).$$

On peut orthogonaliser la base $(e'_1, \ldots, e'_p, e_{p+1})$ en remplaçant le vecteur e_{p+1} par le vecteur :

$$e'_{p+1} = e_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e'_k$$

tel que :

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!] \quad \alpha_k = -\frac{\varphi(e_{p+1}, e'_k)}{q(e'_k)}.$$

La matrice de q_{p+1} dans la base $(e'_1, \ldots, e'_p, e'_{p+1})$ est :

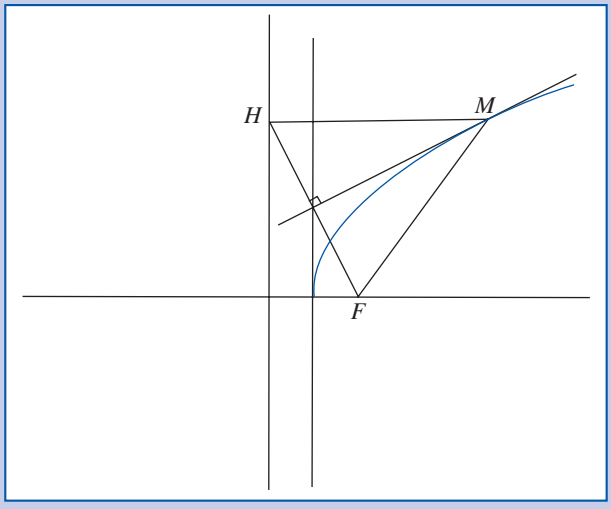
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda = q(e'_{p+1}).$$

Soit P la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_{p+1})$ à la base $(e'_1, \ldots, e'_p, e'_{p+1})$. $D = {}^tPA_{p+1}P$.

$$\lambda = \det(D) = (\det P)^2 \det(A_{p+1}) > 0.$$

Par conséquent la signature de q_{p+1} est $(p+1, 0)$. La forme quadratique q_{p+1} est définie positive.
Ceci termine la récurrence. Au rang n, on retrouve la forme q qui est donc, définie positive.

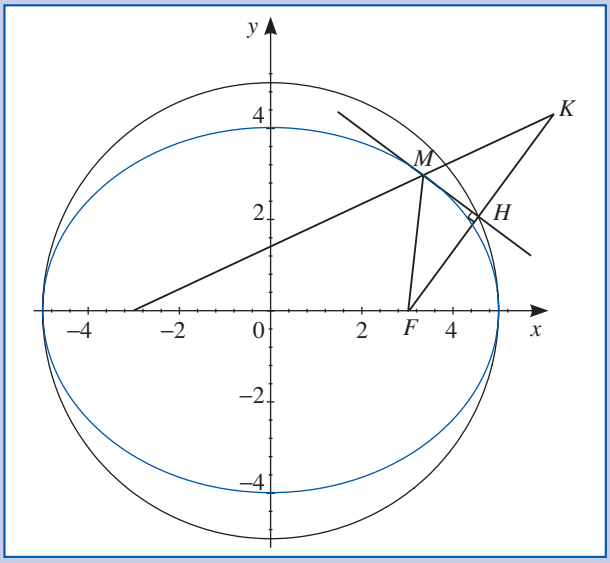
28 **1)**



On appelle F le foyer, H le projeté d'un point M de la parabole sur la directrice. Montrer que la tangente à la parabole en M est perpendiculaire à la droite (HF) et en déduire que le lieu cherché est la parallèle à la directrice passant par le sommet.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2)

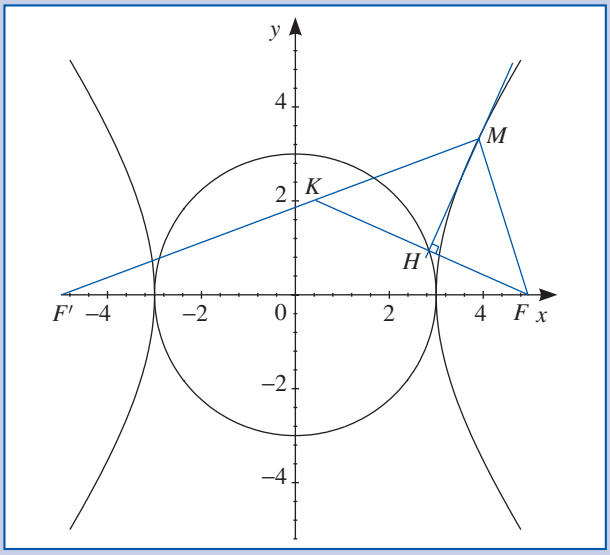


On rappelle que, si M est un point de l'ellipse, la tangente en M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ et que :

$$MF + MF' = 2a.$$

Soit K le symétrique de F par rapport à la tangente en M et H le projeté orthogonal de F sur la tangente en M. Alors K décrit le cercle de centre F' et de rayon $2a$ et H décrit le cercle image de ce cercle par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Ce cercle est le cercle de centre O et de rayon a, c'est le cercle principal de l'ellipse.

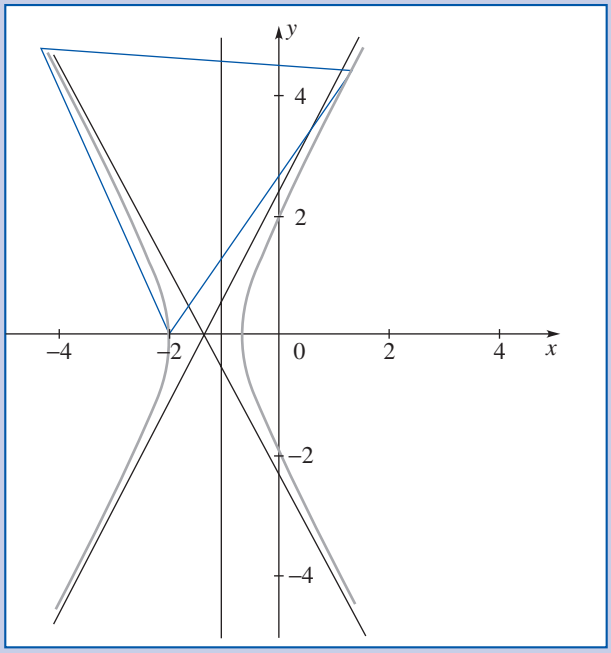
3)



Montrer de manière analogue, que le lieu des projections orthogonales du foyer $F(c, 0)$ sur les tangentes à l'hyperbole est le cercle de centre O et de rayon a privé des deux points :

$$\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{e}, -\frac{b}{e}\right).$$

29



On utilise une représentation polaire dans un repère d'origine le foyer et dont l'axe $(x'x)$ est perpendiculaire à la directrice.

L'hyperbole admet une équation de la forme $\rho = \dfrac{3a}{1 - 2\cos\theta}$.

La directrice a pour équation cartésienne $x = -\frac{3}{2}a$ et le cercle de centre $I\left(-\frac{3}{2}a, b\right)$ a pour équation polaire :

$$\rho = -2a\cos\theta + 2b\sin\theta.$$

L'angle polaire des points de l'intersection étudiée vérifie :

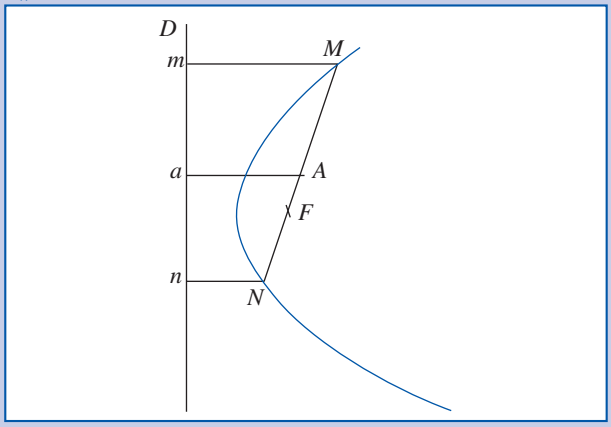
$$2a\cos\theta - 2b\sin\theta = 2a\cos 2\theta - 2b\sin 2\theta.$$

En écrivant $(2a, -2b) = r(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, on obtient :

$$\theta = 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2\theta_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où le résultat.

30



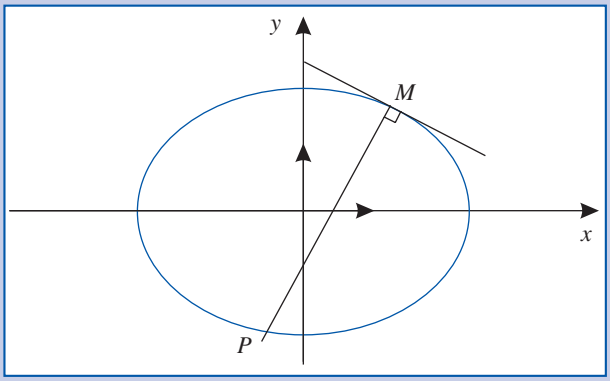
© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

On note F le foyer de la parabole.
Soit A le milieu de $[MN]$. Les points M, N et A se projettent respectivement en m, n et a sur la directrice (D). Alors on a :

$$Aa = \frac{1}{2}(Mm + Nn) = \frac{1}{2}(MA + AN).$$

D'où le résultat.

31



Le point M a pour coordonnées :

$$x = a\cos t, y = b\sin t, \quad \text{avec} \quad a > b.$$

La normale à l'ellipse est dirigée par le vecteur :

$$\vec{u} = (b\cos t, a\sin t).$$

Le point P est tel que $\overrightarrow{MP} = s\vec{u}$. On calcule s en écrivant que P appartient à l'ellipse. Puis on pose :

$$\sin^2 t = z \quad \text{et} \quad f(z) = MP^2.$$

Il reste alors à déterminer z pour que $f(z)$ soit minimal.

Avec Maple :

```
> restart :eq :=(a+s*b)^2*cos(t)^2/a^2
+(b+s*a)^2*sin(t)^2/b^2=1 ;
```

$$\text{équation} := \frac{(a+sb)^2\cos(t)^2}{a^2} + \frac{(b+sa)^2\sin(t)^2}{b^2} = 1$$

```
> sol :=[solve(eq,s)] ;
```

$$\text{Solution} := \left[0, -2\frac{ba(-b^2+b^2\sin(t)^2-\sin(t)^2a^2)}{-b^4+b^4\sin(t)^2-\sin(t)^2a^4}\right]$$

```
> MP2 :=op(2,sol)^2*(b^2*cos(t)^2 +a^2*sin(t)^2) ;
```

$$\text{MP2} := 4\frac{b^2a^2(-b^2+b^2\sin(t)^2-\sin(t)^2a^2)^2(b^2\cos(t)^2+\sin(t)^2a^2)}{(-b^4+b^4\sin(t)^2-\sin(t)^2a^4)^2}$$

```
> f :=unapply(subs({sin(t)^2=z,
cos(t)^2=1-z},MP2),z) ;
```

$$f := z \to 4\frac{b^2a^2(-b^2+b^2z-za^2)^2(b^2(1-z)+za^2)}{(-b^4+b^4z-za^4)^2}$$

```
> diff(f(z),z) ;
```

$$8\frac{b^2a^2(-b^2+b^2z-za^2)(b^2(1-z)+za^2)(b^2-a^2)}{(-b^4+b^4z-za^4)^2}$$
$$-8\frac{b^2a^2(-b^2+b^2z-za^2)^2(b^2(1-z)+za^2)(b^4-a^4)}{(-b^4+b^4z-za^4)^3}$$
$$+4\frac{b^2a^2(-b^2+b^2z-za^2)^2(-b^2+a^2)}{(-b^4+b^4z-za^4)^2}$$

```
> solve(diff(f(z),z),z) ;
```

$$\frac{b^2}{b^2-a^2}, \frac{b^2}{b^2-a^2}, \frac{(b^2-2a^2)b^2}{b^4-a^4}$$

f' s'annule pour $z_1 = \dfrac{b^2}{b^2-a^2}$ et $z_2 = \dfrac{b^2(b^2-2a^2)}{b^4-a^4}$.
Finalement, si $b^2 \leqslant 2a^2$, la longueur minimale de MP est :

$$a^2b^2\left(\frac{3}{a^2+b^2}\right)^{3/2}.$$

Sinon, la longueur minimale de MP est $2b$.

32

1) Pour un point M, de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$d^2(M, D_1) = x^2 + y^2.$$

Pour la distance de M à D_2, on introduit le point $B = O + b\vec{j}$ de D_2 et $\vec{v} = a\vec{i} + c\vec{k}$ son vecteur directeur.

$$d^2(M, D_2) = ||\overrightarrow{BM}||^2 - \frac{(\overrightarrow{BM} \mid \vec{v})^2}{(\vec{v} \mid \vec{v})}.$$

L'équation du lieu des points équidistants de D_1 et D_2 s'obtient en simplifiant l'expression :

$$d^2(M, D_1) = d^2(M, D_2).$$

On arrive à :

$$a^2x^2 - a^2y^2 + 2acxz + (a^2+c^2)b(2y-b) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

La méthode de réduction proposée permettra de prouver que ce lieu est un paraboloïde hyperbolique.
2) Le plan de cote z coupe la droite $D_2 = B + \mathbb{R}\vec{v}$ en un point N de coordonnées $(0, b, 0)+\lambda(a, 0, c)$ de telle façon que $z = \lambda c$.
Donc :

$$\lambda = \frac{z}{c} \quad \text{et} \quad N = \left(\frac{az}{c}, b, z\right).$$

Par rotation autour de la droite D_1 (alias l'axe Oz), le point N décrit un cercle du plan de cote z d'équation :

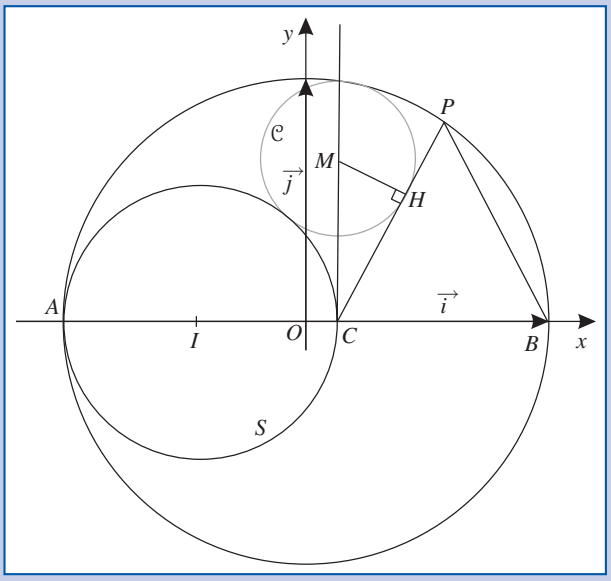
$$x^2 + y^2 = \frac{az}{c}^2 + b^2. \qquad \textbf{(2)}$$

(Faire le dessin correspondant à ce descriptif !)
Le raisonnement précédent est valable pour toute valeur de z et l'équation **(2)** est l'équation de la surface étudiée. Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

33 On remarque que $IM = R + r$ et $OM = 1 - r$. Puis :

$$IM + OM = R + 1.$$



Le point M appartient à l'ellipse de foyers I et O et de grand axe $(R + 1)$.

• Le centre de cette ellipse est le milieu de $[I, O]$. Il a pour abscisse $\dfrac{-1+R}{2}$. Les paramètres de l'ellipse sont :

$$a = \frac{R+1}{2}; \quad c = \frac{1-R}{2}; \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{R}.$$

L'équation de l'ellipse est :

$$\frac{4\left(x - \dfrac{R-1}{2}\right)^2}{(R+1)^2} + \frac{y^2}{R} = 1.$$

• On en déduit :

$$y^2 = \frac{4R}{(R+1)^2}(x+1)(R-x).$$

Puis :

$$OM^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{(R+1)^2}[(R-1)x + 2R]^2.$$

Et :

$$r = 1 - OM = \frac{(1-R)(1+x)}{1+R}.$$

Il reste à chercher x pour que $r = MH$.

• Les coordonnées de C et de P sont $(2R - 1, 0)$ et $(R, \sqrt{1-R^2})$. L'équation de la droite (PC) est :

$$\sqrt{1+R}(x - 2R + 1) - \sqrt{1-R}\,y = 0.$$

Donc :

$$MH = \frac{|\sqrt{1+R}(x-2R+1) - \sqrt{1-R}\,y|}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{1+R}(x-2R+1) + \sqrt{1-R}\,y}{\sqrt{2}}.$$

Il ne reste qu'à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{(1-R)(1+x)}{1+R} = \dfrac{-\sqrt{1+R}(x-2R+1) + \sqrt{1-R}\,y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{2\sqrt{R}}{R+1}\sqrt{(x+1)(R-x)} \end{cases}$$

Avec Maple :

```
> équation :=(1-R)*(1+x)/(1+R)
  =1/sqrt(2)*(-sqrt(1+R)*(x-2*R+1)
  +sqrt(1-R)*y) ;
```

$$\text{équation} := \frac{(1-R)(1+x)}{1+R} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-\sqrt{1+R}(x-2R+1) + \sqrt{1-R}\,y)$$

```
> y :=2*sqrt(R)/(R+1)*sqrt((x+1)*(R-x)) ;
```

$$y := 2\,\frac{\sqrt{R}\,\sqrt{(1+x)(R-x)}}{1+R}$$

```
> solution :=solve(équation,x) ;
```

$$\text{Solution} := 2R - 1,\ \frac{2R^3 + 3R^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{1+R}R + 2R - 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{1+R}}{R^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1+R}R + 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{1+R}}$$

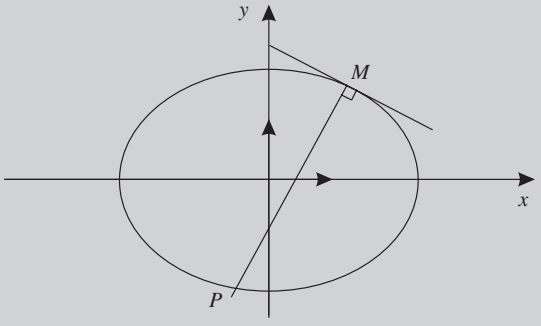
Maple aide et fournit deux solutions en x. L'une des solutions est $2R - 1$. Les calculs précédents permettent d'affirmer que $x = 2R - 1$ convient. Le point $M(2R - 1, \dfrac{2R\sqrt{2(1-R)}}{R+1})$ est centre d'un cercle tangent au cercle trigonométrique, à $\mathcal{S}$ et au triangle isocèle BPC. Or ce point est unique.

Pour terminer, on remarque que M et C ont même abscisse.

34 **1)**

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
> implicitplot3d(x^2+y^2-2*x+4*y,
x=-4..4,y=-5..1,z=-10..10) ;
```



Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace et m sa projection orthogonale sur le plan (xOy). Une équation du cylindre

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

est une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées x, y, z du point M traduisant l'appartenance de M au cylindre.

$$M \in (C) \Leftrightarrow m \in (\gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x - 4y.$$

Une équation du cylindre (C) est donc $x^2 + y^2 = 2x - 4y$.

2)a) Vous vérifierez que la courbe (γ) est contenue dans le cylindre (C).

b) La courbe (γ) est plane si, et seulement s'il existe (u, v, w, h) tels que $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ et que, pour tout réel t, on ait :

$$u\frac{2-4t}{1+t^2} + vt\frac{2-4t}{1+t^2} + w\frac{1-t^2}{1+t^2} + h = 0.$$

L'équation devient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2(-4v - w + h) + t(-4u + 2v) + (2u + w + h) = 0.$$

D'où le système $\begin{cases} -4v - w + h = 0 \\ -4u + 2v = 0 \\ 2u + w + h = 0 \end{cases}$. Puis $\begin{cases} v = 2u \\ h = 3u \\ w = -5u \end{cases}$.

La courbe (γ) est donc contenue dans le plan d'équation :

$$x + 2y - 5z + 3 = 0.$$

c) Le plan d'équation $x + 2y - 5z + 3 = 0$ n'est ni horizontal, ni vertical. Il coupe donc le cylindre suivant une ellipse et la courbe (γ) est une partie de cette ellipse.

Les fonctions $t \longmapsto \frac{2-4t}{1+t^2}, t \longmapsto t\frac{2-4t}{1+t^2}, t \longmapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. x, y, z décrivent donc un intervalle réel. Donc la courbe (γ) est un arc de l'ellipse. On précise cet arc.

On étudie les fonctions :

$$t \longmapsto x(t) = \frac{2-4t}{1+t^2},$$
$$t \longmapsto y(t) = t\frac{2-4t}{1+t^2},$$
$$t \longmapsto z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$x'(t) = \frac{4(t^2 - t - 1)}{(1+t^2)^2}$$

t	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x(t)$	0	↗	$1+\sqrt{5}$	↘	$1-\sqrt{5}$	↗	0

$$y'(t) = -\frac{2(t^2 + 4t - 1)}{(1+t^2)^2}$$

t	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$y(t)$	-4	↘	$-2-\sqrt{5}$	↗	$-2+\sqrt{5}$	↘	-4

$$z'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$z(t)$	-1	↗	1	↘	-1

L'étude des fonctions montre que la courbe est l'ellipse privée du point $(0, -4, -1)$.

35 Notons $P_{\lambda,\mu}, P_{\alpha,\beta}$ les plans d'équations respectives : $\lambda(x + 2y + 1) + \mu(z - 1) = 0$ et $\alpha(2x + y + 1) + \beta(z - 1) = 0$ avec (λ, μ) et (α, β) non nuls.

Les plans $P_{\lambda,\mu}$ et $P_{\alpha,\beta}$ sont perpendiculaires si, et seulement si :

$$4\lambda\alpha + \mu\beta = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Si $\lambda = \beta = 0$, on trouve les plans d'équations $z - 1 = 0$ et $2x + y + 1 = 0$.

Si $\mu = \alpha = 0$, on trouve les plans d'équations $x + 2y + 1 = 0$ et $z - 1 = 0$

Si on écarte le plan d'équation $z - 1 = 0$, la condition **(1)** est équivalente à

$$\frac{x + 2y + 1}{z - 1} \times \frac{2x + y + 1}{z - 1} = -4 \quad \text{ou} \quad z = 1 \quad \text{et} \quad x = y = \frac{1}{3}.$$

La surface (S) admet pour équation :

$$(x + 2y + 1)(2x + y + 1) + 4(z - 1)^2 = 0.$$

Soit $(3x + 3y + 2)^2 - (-x + y)^2 + 16(z - 1)^2 = 0$.

Les formules de changement de repère :

$\begin{cases} X = 3x + 3y + 2 \\ Y = -x + y \\ Z = z - 1 \end{cases}$ définissent un nouveau repère, non orthogonal $(O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. On reconnaît un cône de sommet O' et d'axe $(O'Y)$.

Chapitre 24

1 **1)** Appliquer l'hypothèse au couple $(x, u(y))$.

2) Soit x et y quelconques dans E et k dans $\mathbb{C}$. Vérifier :

$$\forall z \in E \quad (u(x + y) - u(x) - u(y) \mid z) = 0$$
$$\text{et} \qquad \big(u(kx) - \overline{k}u(x) \mid z\big) = 0.$$

Par conséquent :

$$u(x + y) - u(x) - u(y) = 0_E$$
$$\text{et} \qquad u(kx) - \overline{k}u(x) = 0_E.$$

L'application u est semi-linéaire.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

2 Soit (x, y) quelconque dans E^2.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\mathrm{i}\|\mathrm{i}x+y\|^2 &= (x+y \mid x+y)+\mathrm{i}(\mathrm{i}x+y \mid \mathrm{i}x+y)\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+(x \mid y)+(y \mid x)\\ &\quad +\mathrm{i}\|x\|^2+\mathrm{i}\|y\|^2+(x \mid y)-(y \mid x)\\ &= (1+\mathrm{i})(\|x\|^2+\|y\|^2)+2(x \mid y).\end{aligned}$$

3 **1)** Vérifions que $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{f}g$ existe.

$$|\overline{f}g| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2+|g|^2\right)$$

Les applications f et g sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\overline{f}g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
L'application $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{f}g$ est sesquilinéaire hermitienne et positive.
Le seul point délicat à démontrer est :

$$\forall f \in E \quad \int_{\mathbb{R}} |f|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0_E.$$

L'application $|f|^2$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est nulle sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.
L'application $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{f}g$ est un produit scalaire hermitien sur E.
2) Soit m et n deux entiers relatifs distincts :

$$(f_n \mid f_n) = k_n^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \pi k_n^2.$$

$$\begin{aligned}(f_n \mid f_m) &= k_n k_n \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)^{m-n} \frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\\ &= k_n k_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(m-n)}\,\mathrm{d}\theta = 0.\end{aligned}$$

Elle est orthonormale si, et seulement si, $k_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ pour tout entier n .

4 On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$ du produit scalaire :

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 \overline{P}(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On cherche ainsi le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{C}_1[X]$ pour la distance hermitienne associée. Elle est égale à $\|X^2-\alpha X-\beta\|^2$ où $\alpha X+\beta$ désigne le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{C}_1[X]$.
Ce projeté est caractérisé par :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \left(x^2-\alpha x-\beta\right)\mathrm{d}x = 0\\ \displaystyle\int_0^1 x\left(x^2-\alpha x-\beta\right)\mathrm{d}x = 0\end{cases}.$$

On en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = -\dfrac{1}{6}$. Puis :

$$\begin{aligned}\mathrm{Inf}\left\{\int_0^1 \left|x^2-ax-b\right|^2 \mathrm{d}x\,;(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\} &= \left\|X^2-X+\frac{1}{6}\right\|^2\\ &= \int_0^1 \left|x^2-x+\frac{1}{6}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

5 L'application Det est $(n+1)$- linéaire alternée. On en déduit que φ est linéaire à droite.
Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de la matrice transposée. L'application φ est hermitienne. Montrons que φ est définie positive.
Notons X le vecteur colonne des coordonnées de x quelconque dans $\mathbb{C}^n$. A est inversible car elle est définie positive.
On remarque :

$$\begin{pmatrix}0 & {}^t\overline{X}\\ X & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ X & \mathrm{I}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^t\overline{X}A^{-1}X & {}^t\overline{X}A^{-1}\\ 0 & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}.$$

Or

$$\varphi(x,x) = -\mathrm{Det}\begin{pmatrix}0 & {}^t\overline{X}\\ X & A\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\varphi(x,x) = \mathrm{Det}\,A({}^t\overline{X}A^{-1}X)$$

Or A est hermitienne. On en déduit ${}^t\overline{A^{-1}} = A^{-1}$.

$$\varphi(x,x) = \mathrm{Det}\,A\left({}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A^{-1}}\right)A(A^{-1}X).$$

La matrice A est définie positive. Par conséquent :

$$\left({}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A^{-1}}\right)A\left(A^{-1}X\right) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left({}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A^{-1}}\right)A\left(A^{-1}X\right)$$

est nul si, et seulement si, $(A^{-1}X)$ est le vecteur nul. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathrm{Det}\,A$ appartient à $\mathbb{R}^{+*}$.
Or ${}^t\overline{A} = A$. D'où, $\mathrm{Det}\,A = \mathrm{Det}\,\overline{A}$. $\mathrm{Det}\,A$ est un réel.
On vérifie que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs. On en déduit $\mathrm{Det}\,A > 0$.

6 L'inclusion $F^\perp \subset \mathrm{Ker}\,u$ découle de la propriété :

$$\forall x \in F^\perp \quad u(x) = 0_E.$$

Comparons les dimensions de $\mathrm{Ker}\,u$ et $F^\perp$.

$$\dim E \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u+F) = \dim \mathrm{Ker}\,u+\dim F-\dim(\mathrm{Ker}\,u\cap F).$$

$$\forall x \in F \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc :

$$\mathrm{Ker}\,u \cap F = \{0_E\}.$$

On en déduit $\dim F^\perp \geqslant \dim \mathrm{Ker}\,u$, puis l'égalité $F^\perp = \mathrm{Ker}\,u$.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

7 Soit $n \geqslant 3$ et (x, y) dans E^2.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\| e^{\frac{2ik\pi}{n}}x + y\right\|^2 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\| x \|^2 + e^{-\frac{2ik\pi}{n}}(x \mid y) + e^{\frac{2ik\pi}{n}}(y \mid x) + \| y \|^2\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Or la somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle. Donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\| e^{\frac{2ik\pi}{n}}x + y\right\|^2 e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((x \mid y) + e^{\frac{4ik\pi}{n}}(y \mid x)\right)$$

$$= (x \mid y) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4ik\pi}{n}}(y \mid x).$$

Cette dernière somme est géométrique de raison $e^{\frac{4i\pi}{n}}$ différente de 1 car $n \geqslant 3$. Par conséquent :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4ik\pi}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1 - e^{4i\pi}}{1 - e^{\frac{4i\pi}{n}}} = 0.$$

On obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\| e^{\frac{2ik\pi}{n}}x + y\right\|^2 e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (x \mid y).$$

8 Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une *suite de Cauchy* dans $(\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \varphi)$.
Pour tout m de $\mathbb{N}$, notons $(u_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite u_m.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2$$

$$m \geqslant N \quad \text{et} \quad p \geqslant N \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m} - u_{n,p}|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

On en déduit, que pour tout n fixé :

$$m \geqslant N \quad \text{et} \quad p \geqslant N \quad \Rightarrow |u_{n,m} - u_{n,p}| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(u_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge. Soit l_n sa limite.
• On vérifie que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour cela montrons que la série $\sum |l_n|^2$ converge.
La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour N_2. Elle est bornée :

$$\exists M > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad N_2(u_m) \leqslant M.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} |u_{k,m}|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k,m}|^2 \leqslant M^2.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} |l_k|^2 \leqslant M^2.$$

La série de réels positifs $\sum |l_n|^2$ converge.
• Fixons $\varepsilon > 0$ et $m \geqslant N$. On a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant N \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m} - u_{n,p}|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Or :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{q} |u_{n,m} - u_{n,p}|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m} - u_{n,p}|^2.$$

On fait tendre p vers $+\infty$. On obtient :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{q} |u_{n,m} - l_n|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Puis :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m} - l_n|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Par conséquent la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ tend vers $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \varphi)$.
On en déduit que toute suite de Cauchy de $(\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \varphi)$ converge.
L'espace $(\boldsymbol{l}^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \varphi)$ est un *espace de Hilbert.*

9 • Montrons que B est inversible. Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
La matrice X s'écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix}$ où Y appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$BX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - C^*Y = 0 \\ Cx + AY = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C^*Y \\ (CC^* + A)Y = 0 \end{cases}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $CC^* + A$ est inversible.
Soit Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. tel que :

$${}^t\overline{Y}(C^*C + A)Y = 0.$$

Alors

$${}^t\overline{Y}C^*CY + {}^t\overline{Y}AY = 0. \quad \|CY\|^2 + {}^t\overline{Y}AY = 0.$$

Or A est hermitienne, définie positive, donc :

$${}^t\overline{Y}AY \geqslant 0 \quad \text{et} \quad {}^t\overline{Y}AY = 0 \quad \text{et} \quad \|CY\| = 0.$$

On en déduit $Y = 0$. Puis $x = 0$. Par conséquent :

$$BX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

La matrice B est inversible.
• Montrons que B^*B est hermitienne définie positive. On vérifie facilement que B^*B est hermitienne. Soit X quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$${}^t\overline{X}B^*BX = \|BX\|^2 \geqslant 0$$

$${}^t\overline{X}B^*BX = 0 \Leftrightarrow \|BX\| = 0.$$

Or B est inversible. Donc :

$${}^t\overline{X}B^*BX = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

La matrice B^*B est hermitienne définie positive.

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

10 On procède par récurrence sur p. Pour $p = 1$, c'est immédiat. On suppose que, si $A^p = 0$ alors $A = 0$. Montrons-le pour $p+1$. On suppose que $A^{p+1} = 0$.
On en déduit $A^{2p} = 0$.
Or :

$$\|A^p\|^2 = \mathrm{Tr}(\overline{A^p}A^p) = \mathrm{Tr}(A^{2p}) = 0.$$

On en déduit $A^p = 0$, puis $A = 0$.

11 **1)** Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.
On vérifie facilement que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$:

$$(P, Q) \longmapsto (P \mid Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

est linéaire à droite et hermitienne positive. Montrons qu'elle est définie positive.
Soit P dans E tel que $(P \mid P) = 0$.

$$\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} |P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

L'application $\theta \longmapsto |P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2$ est continue positive sur $[0, 2\pi]$.
On en déduit que $P(z) = 0$ pour tout z de module 1. Le polynôme P a donc une infinité de racines. C'est le polynôme nul.
L'application $(\ |\ )$ est un produit scalaire hermitien sur E.

2) Lorsque R est constant le résultat est immédiat. Sinon, notons n le degré de R.
On vérifie facilement que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale de E.
Écrivons :

$$R(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n+1}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 1 + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n+1}|^2 \geqslant 1.$$

Soit $S = \sup\{|R(z)|\ ;\ |z| = 1\}$. On a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta \leqslant S^2.$$

On en déduit $S \geqslant 1$ et $S = 1$ si, et seulement si :

$$|a_1|^2 + \cdots + |a_{n+1}|^2 = 0.$$

$$S = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad R(X) = X^n.$$

12 On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique. Soit x un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et A^*.

- On a $\mathrm{Ker}\ u \subset \mathrm{Ker}\ (v \circ u)$.

Montrons $\mathrm{Ker}\ (v \circ u) \subset \mathrm{Ker}\ u$.
Soit x dans $\mathrm{Ker}\ (v \circ u)$. Alors $A^*AX = 0$.
D'où $\overline{X}A^*AX = 0$. Or $\overline{X}A^*AX = \|AX\|^2$.
On en déduit $AX = 0$, puis x dans $\mathrm{Ker}\ u$.
En conclusion $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ (v \circ u)$.
On démontre de même que :

$$\mathrm{Ker}\ (u \circ v) = \mathrm{Ker}\ v.$$

- On a également $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}v$.

De plus :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Im}(v \circ u) &= n - \dim \mathrm{Ker}\ (v \circ u)\\ &= n - \dim \mathrm{Ker}\ u\\ &= \dim \mathrm{Im}u.\end{aligned}$$

Or $\mathrm{rg}\ (A) = \mathrm{rg}\ (A^*)$. Donc :

$$\dim \mathrm{Im}u = \dim \mathrm{Im}v.$$

On en déduit $\dim(v \circ u) = \dim \mathrm{Im}v$.
En conclusion $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}v$.
On démontre de même que $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}u$.

- Pour les rangs, on a donc :

$$\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ A^* = \mathrm{rg}\ A^*A = \mathrm{rg}\ AA^*.$$

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Index

A

Abscisse curviligne, 523
Adaptée à la décomposition en somme directe, 618
Adjoint d'un endomorphisme, 796
Algèbre normée unitaire, 107
Algorithme
  accélération de convergence, 171
  d'Euclide, 592
  décomposition LU, 655
  exponentiation d'un nombre ou d'une matrice, 722
  matrices magiques, 657
  matrices tridiagonales et fonction spline cubique, 251
  méthode de Jacobi, 827
  méthode de Newton, 287
  résolution approchée d'une équation différentielle, 366
Anneau
  de Boole, 567
  euclidien, 601
  principal, 583
  produit, 567
Annulateur d'un ensemble, 599
Antidéplacement, 777
Application
  bicontinue, 106
  de classe $\mathcal{C}^k$, 220
  linéaire associée à une forme bilinéaire, 729
  linéaire canoniquement associée, 642
  localement constante, 86
  semi-linéaire, 835
  uniformément continue, 81
Application(s)
  continûment différentiable, 425
  coordonnées, 418
  différentiable, 415
  linéaire tangente, 415
  partielles, 421
Arc, 83
  paramétré, 518
  régulier, 518
Associés, 571
Automorphisme
  d'anneaux, 565
  d'espace vectoriel, 613
  intérieur, 565
  orthogonal, 750
  unitaire, 839

B

Base
  adaptée à un sous-espace, 665
  adaptée à une décomposition en somme directe, 618
  anté-duale, 638
  canonique de l'algèbre des polynômes, 607
  d'un espace vectoriel, 607
  duale, 638
  orthonormale, 764
  préduale, 638
bilinéaire, 729

C

$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, 434
$\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, 450

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Cône isotrope, 738
Caractérisation
des affinités, 694
des projecteurs, 694
des symétries, 694
Caractéristique
d'un anneau, 578
Caractéristique, 579
Centralisateur, 600
Champ
de scalaires, 468
de vecteurs, 468
Changement
de paramétrage, 518
de variables, 309, 490
Changement de variables dans une intégrale, 262
Chemin, 83
Chiffrement RSA, 576
Circulation d'un champ de vecteurs, 481
Classe d'équivalence, 550
$\mathcal{CM}_{2\pi}$, 403
Codimension d'un sous-espace vectoriel, 624
Coefficients, 608
de Fourier, 392
trigonométriques, 394
Combinaison linéaire, 603
Comparaison à une série numérique, 302
Comparaison logarithmique, 136
Compatibilité d'un système d'équations linéaires, 651
Composantes, 607
d'un vecteur, 638
d'un vecteur dans une base, 607
Conchoïde, 522
Connexe par arcs, 84
Constante d'Euler, 145
Continuité, 63
par morceaux, 198
sur une partie, 64
Convergence
absolue, 126
d'une série, 120
en moyenne quadratique, 400
en moyenne quadratique d'une série de Fourier, 400
normale, 405
normale d'une série de fonctions, 187
normale d'une série de Fourier, 405
normale sur tout compact, 188
simple, 406
simple d'une série de fonctions, 179
simple d'une suite de fonctions, 178
Convergence uniforme
d'une série de fonctions, 186
d'une suite de fonctions, 180
et dérivation d'une série de fonctions, 276
et dérivation d'une suite de fonctions, 275
et intégration, 274, 276
sur tout compact, 182
sur tout compact d'une série de fonctions, 186
sur tout compact d'une suite de fonctions, 182
Coordonnées d'un vecteur dans une base, 607
Coordonnées
polaires, 491
Corps premier, 580
Courbe
paramétrée, 518
tracée sur une surface, 531, 533
Courbe intégrale
d'un champ de vecteurs, 502
d'une équation différentielle, 500
Critère de divisibilité, 552
critère
de Cauchy d'existence d'une limite pour une application à valeurs dans un espace de Banach, 81
spécial des séries alternées, 130
Crochet
de dualité, 632
de Lie, 669, 670, 688
Croissance de l'intégrale, 302

D

$\mathcal{D}_{2\pi}$, 402
Décomposition
de Choleski d'une matrice symétrique définie positive, 769
en somme directe d'un espace vectoriel, 615
Demi-tour, 777
Déplacement, 777
dérivabilité en un point, 212
dérivation d'une série de fonctions, 276
Dérivée
partielle, 420
selon un vecteur, 420
Déterminant de Gram, 758
développement décimal, 140
développement décimal d'un réel, 140
développement décimal impropre, 141
développement dyadique d'un réel, 142

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

développement limité, 270, 281
d'une primitive, 270
de la dérivée, 270
développement triadique d'un réel, 142
Diagonaliser
un endomorphisme, 694
une matrice, 699
Diagramme commutatif, 557
Différentielle, 415
difféomorphisme, 223
Dimension
d'un espace vectoriel, 609
finie, 609
infinie, 609
Discriminant d'une forme quadratique dans une base, 739
Disque de convergence, 372
Disques de Gerschgörin, 689
Distance, 15
Distance d'un élément à un sous-espace, 755, 842
Divergence
d'une série, 120
grossière, 123
Diviseur, 571
d'un polynôme, 582
Division vectorielle, 791

E

Échelonnée
en degrés, 607
en valuations, 607
Endomorphisme
antisymétrique, 796
auto-adjoint, 796
auto-adjoint associé à une forme bilinéaire symétrique, 809
auto-adjoint associé à φ, 809
auto-adjoint défini positif, 805
auto-adjoint positif, 805
de trace nulle, 635
diagonalisable, 693
induit par un endomorphisme sur un sous-espace stable, 664
nilpotent, 610
symétrique, 796
trigonalisable, 701
Équation
de la conduction, 366
de Laplace, 366
de Poisson, 366
Équation différentielle
scalaire, 335
Équation différentielle autonome, 501
d'ordre 1, 501
Équation différentielle linéaire, 335
Équation linéaire scalaire
d'ordre 2, 352
Équation(s)
caractéristique, 716
caractéristique d'une suite à récurrence linéaire, 717
d'hyperplan, 637
d'un hyperplan, 635
principales d'un système d'équations linéaires, 652
secondaires d'un système d'équations linéaires, 652
Équivalence de deux matrices, 642
Équivalente, 642
Espace
de Banach, 77
de Hilbert., 77
de phase, 501
métrique, 15
préhilbertien, 77
préhilbertien ($\mathcal{C}_{2\pi}, (\,|\,)$), 400
vectoriel $\mathcal{D}_{2\pi}$, 403
vectoriel normé complet, 77
Espace(s)
de Hilbert, 836
dual, 632
euclidien, 746
préhilbertien complexe, 835
préhilbertien réel, 746
vectoriel conjugué, 851
vectoriel de dimension finie, 609
vectoriels isomorphes, 613
Exponentielle, 150, 186, 191
complexe, 150, 186
d'endomorphisme, 151
dans une algèbre normée, 150
de matrice, 151
Exponentielle de matrices, 713
Extension quadratique, 589
Extrémité de l'arc, 83
Extremum local, 440

F

Factorisation
d'un morphisme d'anneaux, 578
d'une application linéaire à travers une autre., 621

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Famille
à support fini, 603
de polynômes échelonnée en degrés, 607
de polynômes échelonnée en valuations., 607
génératrice, 603
liée, 606
libre, 604
orthogonale, 754, 844
orthonormale, 754, 844
Familles de polynômes orthogonaux, 314
Fermé, 44
Fonction polynomiale de n variables, 608
Fonction(s)
affine par morceaux, 199
caractéristique, 239
carré intégrable, 311
continue par morceaux, 198
de classe $\mathcal{C}^k$, 445
de Dirac, 63
développable en série de Fourier, 398
développable en série entière, 381
dominée, 57
Dzéta, 320
ζ, 195
en escalier, 198
équivalentes, 58
exponentielle, 191, 197, 202, 278
exponentielle complexe, 186
gamma, 308, 320, 322, 325
intégrable, 294, 484, 485
monôme, 66, 67
négligeable, 57
polynôme, 66
régularisée, 402
sommable, 294, 484, 485
somme, 179
T-périodiques, 409
Forme différentielle, 474
exacte, 475
fermée, 478
Forme résolue d'une équation différentielle, 352
Forme(s)
bilinéaire canonique, 632
bilinéaire symétrique, 729
bilinéaire symétrique définie négative., 742
bilinéaire symétrique définie positive, 742
bilinéaire symétrique dégénérée, 739
bilinéaire symétrique négative, 742
bilinéaire symétrique non dégénérée, 739
bilinéaire symétrique positive, 742
linéaire, 632
linéaires coordonnées, 638
polaire d'une forme quadratique, 730
quadratique, 729
quadratique définie négative, 741
quadratique définie positive, 741
quadratique dégénérée, 739
quadratique négative, 741
quadratique non dégénérée, 739
quadratique positive, 741
sesquilinéaire hermitienne, 835
Formule
de Fubini, 483
de Green-Riemann, 494
de Parseval, 401
du binôme généralisée, 385
Formule(s)
de Stirling, 146, 152
de Taylor, 267
de Taylor avec reste intégral, 267
de Taylor-Young, 271
Frontière, 51

G

Générateur, 556
Gradient, 438
Groupe
cyclique, 556
de Klein, 560
monogène, 556
orthogonal d'ordre n, 776
orthogonal d'un espace euclidien, 775
produit, 560
spécial orthogonal, 777
spécial orthogonal d'ordre n, 778

H

Homéomorphisme, 64
Hyperplan, 624, 634

I

I-solution maximale, 500
Idéal, 568
premier, 599
principal engendré par un élément, 569
Idempotent, 594

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Identité
de polarisation, 730, 746, 836
du parallélogramme, 836
du parallèlogramme, 731, 746
Inégalité
de Taylor-Lagrange, 268
Inconnues
principales, 651
secondaires, 651
indépendants, 604
Indicateur d'Euler, 575
Indicatrice d'Euler, 575
Indice de nilpotence, 610
Inégalité
d'Hadamard, 794
de Bessel, 757, 849
de Cauchy-Schwarz, 743, 744, 746, 836
de la moyenne, 309
de Minkowski, 744, 747, 836
Inégalitéde Bessel, 399
Intégrale(s)
convergente, 293
curviligne, 476
de Bertrand, 305
de Riemann, 296
divergente, 293
double, 488
intégrale(s)
d'une application continue par morceaux sur un segment, 229
intégration
approchée, 248
par parties, 262
Intérieur, 45
Intervalle de convergence, 372
Interversion des sommations, 159
Irréductible, 572
Isomorphes, 613
Isomorphisme, 613
d'algèbres, 586
d'anneaux, 565
d'espace vectoriel, 613
d'espaces préhilbertiens complexes, 839
d'espaces préhilbertiens réels, 750
entre deux sous-espaces supplémentaires, 623

J

Jacobien, 431

K

$\mathbb{K}$-algèbre, 585

L

Lemme de recollement, 82
Ligne de champ d'un champ de vecteurs, 502
Limite d'une application, 52, 53

M

Matrice jacobienne, 430
Matrice(s)
équivalentes, 642
congruentes, 738
conjuguée, 846
d'une forme bilinéaire, 732
d'une forme quadratique, 735
définie négative, 742
de Gram, 758
de Hilbert, 743
diagonalisable, 699
hermitienne, 846
hermitienne définie positive, 846
hermitienne positive, 846
magiques, 662
orthogonale, 775
semblable, 643
symétrique définie positive, 742
symétrique négative, 742
symétrique positive, 742
transconjuguée, 846
trigonalisable, 701
Maximal local
strict, 440
Maximum local, 440
Méthode des différences finies, 366
Méthode du pivot de Gauss, 647
Méthode pratique de diagonalisation, 699
Minimum local, 440
strict, 440
Morphisme
d'algèbres, 586
d'anneaux, 564
de corps, 577
Moyenne de Césaro, 155
Multiple
d'un élément, 556
d'un polynôme, 582

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

N

Nature d'une série, 120
Nilpotent, 610
Nombre
    algébrique, 589
    algébrique sur un corps, 589
    de Liouville, 590
    de Mersenne, 600
    transcendant sur un corps, 589
Normale à une surface
    en un point, 532
    paramétrée, 534
Normalisateur, 600
Norme
    de la convergence en moyenne quadratique, 749
    euclidienne, 746
    subordonnée d'un adjoint d'endomorphisme, 800
    subordonnée d'un endomorphisme, 808
    subordonnée d'un endomorphisme symétrique, 808
norme d'algèbre, 107
Norme de la convergence
    en moyenne, 240, 311
    en moyenne quadratique, 244, 312
    uniforme, 181
Norme subordonnée, 102
Notation
    de Monge, 455
    différentielle, 433
Noyau
    d'une forme bilinéaire symétrique, 738
    d'une forme quadratique, 738
Noyau de Dirichlet, 398
Noyaux itérés, 630

O

Opération élémentaire
    sur les colonnes d'une matrice, 647
    sur les lignes d'une matrice, 646
    sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice, 645
Orbite, 502, 506
Ordre
    d'un élément, 557
    d'un groupe, 550
Origine de l'arc, 83
Orthogonal d'une partie, 752, 840
Orthogonalité pour une forme quadratique, 741
Ortonormalisation de Gram-Schmidt, 764
Oscillateur
    harmonique, 359
    linéaire, 359
    linéaire amorti, 359
    linéaire amorti et excité, 362
Ouvert, 44
    étoilé, 84

P

Paramétrage(s), 518
    de la surface, 533
    de mêmes sens, 519
    de sens contraires, 519
    normal, 523
Partie
    compacte, 88
    complète, 78
    dense, 49
    régulière, 267
Partie élémentaire, 487
Partie génératrice d'un groupe, 554
Partie simple, 489
Parties orthogonales, 753, 840
Partition, 550
Petit théorème de Fermat, 575
Pivot, 647
Plan tangent à une surface
    en un point, 532
    paramétrée, 534
Plus grand commun diviseur, 572
    d'une famille de polynômes, 584
    de deux polynômes, 583
Plus petit commun multiple, 585
Point
    adhérent, 46
    birégulier, 518
    col, 457
    critique, 441
    frontière, 51
    intérieur, 45
    régulier, 518
    régulier sur une surface, 533
    stationnaire, 518
Point constructible, 591
Polynôme trigonométrique, 202
Polynômes
    de Hermite, 314
    de Laguerre, 314
    de Legendre, 314
    de Tchebychev, 314
    trigonométriques, 392
Polynme(s)
    de Bernstein, 200

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Polynôme(s)
à n indéterminées, 608
à n indéterminés, 608
annulateur d'un endomorphisme, 668
associés, 582
caractéristique, 678
caractéristique d'un endomorphisme, 678
caractéristique d'une matrice, 681
d'interpolation de Lagrange, 621, 640
de Hermite, 853
irréductible, 582
minimal, 589
minimal d'un élément dans une algèbre, 872
minimal d'un endomorphisme, 668
Portrait de phase, 506, 507
Potentiel scalaire
champ dérivant d'un, 473
Premier théorème de Weierstrass, 200
Primitive d'une application continue, 259
par morceaux, 259
Problème de Cauchy, 336
Produit
mixte, 790
scalaire, 745
scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, 747
scalaire complexe, 835
scalaire induit, 838
vectoriel, 790
Produit de Cauchy
de deux séries entières, 375
Produit de Cauchy de deux séries, 156
Produit scalaire, 244
sur l'espace des fonctions continues de carré intégrable, 312
Projecteur orthogonal, 755, 841
associé à une décomposition en somme directe orthogonale, 759, 844
Prolongement par continuité, 64
Propriété duale, 632
Propriété géométrique, 518
Puissance
d'un élément, 556
d'une matrice, 710

Q

Quadrique, 816
Quotient exact, 571

R

Règle de d'Alembert, 137
Règle de Raabe et Duhamel, 148
Règle du dédoublement des termes, 735
Racines primitives de l'unité, 559
Radical d'un idéal, 600
Rang
d'un système d'équations linéaires, 651
d'une application linéaire, 624, 643
d'une forme bilinéaire symétrique, 739
d'une forme quadratique, 739
d'une matrice, 643
Rayon de convergence, 371
Rayon spectral d'un endomorphisme, 807
Réduction
à l'aide des sous-espaces caractéristiques, 707
d'un endomorphisme symétrique, 803
simultanée, 704
simultanée de deux formes quadratiques dont une est définie positive, 810
Réduire un endomorphisme, une matrice, 701
Réflexion, 777
échangeant deux vecteurs unitaires, 782
Réflexionéchangeant deux droites, 783
Relation(s)
d'équivalence, 550
d'orthogonalité de Kronecker, 638
de congruence modulo un entier, 551
de Pythagore pour une famille orthogonale, 754, 841
Reste
d'une série convergente, 120
intégral, 267
Restriction d'une forme bilinéaire à un sous-espace, 729
Restriction d'une forme quadratique à un sous-espace, 729
Retournement, 777
Rotation, 777
Rotationel d'un champ de vecteurs, 471

S

Sans diviseur de zéro, 571
Second membre d'un système d'équations linéaires, 651
Semi-convergence, 127
Semi-isomorphisme d'un espace hermitien sur son dual, 851
Série, 120
alternée, 130
de Bertrand, 147
de fonctions

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

normalement convergente sur tout compact, 188
uniformément convergente, 186
de Fourier, 396
de Riemann, 145
de Riemann alternée, 132
de Taylor, 381
entière, 370
géométrique, 121
harmonique, 121
harmonique alternée, 127
série de fonctions
normalement convergente, 187
Signature, 810
Somme
d'une famille de sous-espaces, 614
de la famille, 614
directe d'une famille de sous-espaces, 615
directe orthogonale, 758, 843
Somme d'une série convergente, 120
Somme partielle d'une série, 120
Sous-algèbre, 586
engendrée, 586
sous-algèbre, 586
Sous-anneau, 564
Sous-corps premier, 580
Sous-espace(s)
caractéristique, 705
engendré par la famille, 603
irréductible, 780
orthogonaux, 753, 840
perpendiculaire, 774
propre, 673
propre d'une matrice, 681
propre relatif à, 673
stable par un endomorphisme, 664
Sous-groupe engendré, 554
Spectre, 673, 681
d'un endomorphisme, 673
d'une matrice, 681
Structure euclidienne associée à une base, 771
Structure hermitienne associée à une base, 848
Subdivision
adaptée, 198
d'un compact, 197
Suite
de Cauchy, 76
de fonctions
uniformément convergente, 180
uniformément convergente sur tout compact, 182
double sommable, 158
Suites à récurrence linéaire, 715
Suites à récurrence linéaire d'ordre 2, 717
Supplémentaire orthogonal, 755, 771, 841
d'un sous-espace de dimension finie, 757
Support, 518
d'une surface, 533
Support d'une famille de scalaires, 603
Support fini, 603
Surface paramétrée, 533
Surfaces tangentes en un point, 535
Symétrie hyperplane, 777
Symbole de Kronecker, 638
Système
d'équations linéaires, 651
d'équations linéaires compatible, 651
de Cramer, 652
homogène d'équations linéaires, 651
Système
différentiel autonome d'ordre 2, 501
fondamental de solutions, 340, 353

T

Tangente à la courbe, 519, 520
Théorème
chinois, 562, 568
d'Euler, 575
d'interversion des limites pour une série de fonctions, 194
d'interversion des limites pour une suite de fonctions, 192
de Bézout, 573, 584
de Bolzano-Weierstrass, 90
de Cayley-Hamilton, 682
de continuité d'une fonction dépendant d'un paramètre, 320
de convergence dominée de Lebesgue, 317
de décomposition des noyaux, 671
de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale, 322
de Dirichlet, 406
de Gauss, 573
de Gauss pour les polynômes, 584
de Lagrange, 550
de Mertens, 176
de Poincaré, 478
de Pythagore, 752, 840
de Rouché-Fontené., 652
de Schwarz, 447
de Stone-Weierstrass, 200
de Weierstrass, 202
des valeurs intermédiaires, 86

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, 319
du graphe fermé, 74
fondamental du calcul différentiel et intégral, 259
théorème
de relèvement, 272
Topologie, 44
induite, 51
Trace
d'un endomorphisme, 634
d'un projecteur, 634
d'une matrice, 633
Trajectoire, 518
Transformation d'Abel, 125
Transformée de Fourier, 411
Trigonaliser, 701

U

Un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$, 626
Une famille de polynômes est une base de $\mathbb{K}[X]$, 625
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E est génératrice, 625
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est liée, 625
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est libre, 625
Uniformément
convergente, 185

V

Valeur moyenne, 239
Valeur(s) propre(s)
d'un endomorphisme, 673
d'une affinité, 676
d'une matrice, 681
d'une projection, 675
d'une symétrie, 676
et automorphisme intérieur, 677, 681
Vecteur(s)
indépendants, 604
isotrope, 738
linéairement dépendants, 606
linéairement indépendants, 604
orthogonaux, 752, 839
propre d'un endomorphisme, 673
unitaire, 752, 839
Voisinage, 43

W

Wronskien, 341, 353

© Hachette Livre – H Prépa / Math – La photocopie non autorisée est un délit

Mensa
ACADEMY

La collection de référence des classes préparatoires scientifiques

Maths 2e année MP-MP*

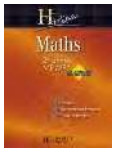
1. Normes et distances, suites d'un espace vectoriel normé
2. Topologie, étude locale des applications
3. Compléments de topologie
4. Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé
5. Suites et séries de fonctions
6. Dérivation, intégration des fonctions vectorielles
7. Le lien entre dérivation et intégration
8. Fonctions intégrables
9. Équations différentielles linéaires
10. Séries entières
11. Séries de Fourier
12. Fonctions de plusieurs variables
13. Compléments de calcul différentiel et intégral
14. Équations différentielles non linéaires
15. Courbes et surfaces
16. Structures algébriques usuelles
17. Famille de vecteurs. Somme de sous-espaces
18. Dualité. Systèmes d'équations linaires
19. Sous-espaces stables, éléments propres
20. Réduction des endomorphismes en dimension finie
21. Espaces préhilbertiens réels
22. Espaces vectoriels euclidiens
23. Adjoint d'un endomorphisme
24. Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

le savoir-faire Hachette *au service des prépas*

MATHÉMATIQUES
Maths MP-MP*
Algèbre-Géométrie PC-PC* PSI-PSI*
Analyse PC-PC* PSI-PSI*

PHYSIQUE
Optique ondulatoire MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Ondes MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Électromagnétisme MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Thermodynamique MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Mécanique du solide et des systèmes MP-MP* PC-PC*
Mécanique des fluides PC-PC* PSI-PSI*
Électronique PSI- PSI*

CHIMIE
Chimie PC-PC*
Chimie MP-MP* PT-PT*
Chimie PSI-PSI*



EXERCICES & PROBLÈMES

Des rappels de cours et de nombreux exercices corrigés pour s'entraîner toute l'année et pour préparer les concours

TOUT LE PROGRAMME EN UN SEUL VOLUME

www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-181904-8

HACHETTE *Supérieur*

! VAMBACAS !