ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINES

Mensa ACADEMY

Annales CAPESA

Recueil des anciens sujets corrigés

Concours ISE Long & AS

Contactez-nous +237 655 333 073

Avant-propos

Ce document rassemble, de manière structurée et pédagogique, l'ensemble des informations utiles pour préparer les concours : ISSEA, ENSEA, ENSAE & ENEAM. Il a pour objectif d'aider les candidats à comprendre les formalités d'inscription, le contenu des programmes, les méthodes et conseils pour réussir les différentes épreuves (mathématiques, contraction de texte et ordre général), ainsi qu'un point synthétique sur les notions de statistique nécessaires. En dernière partie, une collection organisée des sujets et leurs corrigés (anciens et récents) sera ajoutée pour s'entraîner.

Le CAPESA

Le Centre d'Appui aux Ecoles de Statistique Africaines (CAPESA) a pour première responsabilité l'organisation des concours d'entrée aux écoles du Réseau des Ecoles de Statistique Africaine (ISSEA, ENSEA, ENSAE & ENEAM) qui, pour leur part, assurent depuis de nombreuses années la formation d'Ingénieurs Statisticiens Économistes (ISE). L'intervention du CAPESA s'exerce selon les axes suivants :

- L'organisation des concours de recrutement ISE et ISE cycle long /AS ;
- Un appui à l'amélioration des enseignements ;
- Une aide à l'accès à l'information ;
- Une aide à la recherche de ressources financières ;
- Un appui au renforcement des relations entre les écoles et les partenaires pour la formation statistique, dont des doubles diplômes. Les différentes étapes dans l'organisation des concours :

- ✓ Le CAPESA transmet aux centres d'examen les documents relatifs à l'ouverture des concours (avis de concours, calendrier…) vers septembre – octobre ;
- ✓ Les candidats s'inscrivent auprès du centre d'examen de leur choix (leurs coordonnées sont dans l'onglet “centres d'examen et écoles”) généralement avant le 31 janvier. Le CAPESA ne prend aucun dossier d'inscription et il n'y a pas de centre d'examen en France ;
- ✓ Les candidatures sont ensuite vérifiées (voir les conditions d'âge et de diplôme suivant les concours) ;
- ✓ Les centres d'examen envoient aux candidats les convocations avant les concours ;
- ✓ Les concours sont organisés simultanément dans tous les centres d'examen au mois d'avril ;
- ✓ Les copies des candidats sont réceptionnées par le CAPESA et corrigées jusqu'en mai ;
- ✓ Le jury se réunit en juin pour sélectionner les admis qui vont dans l'une des 4 écoles d'admission (ISSEA de Yaoundé, ENSAE de Dakar, ENSEA d'Abidjan ou ENEAM de Cotonou) ;
- ✓ Le CAPESA envoie aux admis leur lettre d'admission par courriel au début du mois de juillet ;
- ✓ Les admis renvoient les documents nécessaires à leur école d'admission pour s'inscrire.

Modalités pour les élèves des E.S.A qui veulent candidater à l'admission sur titre à l'ENSAI ou l'ENSAE : (fichier ci-après)

MODALITES POUR CANDIDATER A L'ENSAI (Rennes) ou l'ENSAE (Paris)

Les candidats admis aux concours du CAPESA qui poursuivent leur scolarité à l'ENSAE, l'ENSEA, l'ISSEA ou l'ENEAM peuvent par la suite candidater à l'ENSAI et/ou l'ENSAE en formation d'ingénieur :

- L'Ensai recrute sur titres des candidats ayant un diplôme de licence 3 (baccalauréat +3) et plus (ou une formation de niveau équivalent) dans les spécialités mathématique ou statistique, économie, informatique. Exemples de L3 : MIASHS (Mathématiques, Informatique Appliquées et Sciences Humaines et Sociales), Statistique, Mathématiques appliquées, Sciences économiques, Miage (Méthodes informatiques appliquées à la gestion d'entreprise). La sélection se fait sur dossier (et entretien éventuel).
- Les demandes de candidature se font uniquement en ligne sur le site l'ensai à partir de mi-novembre et jusqu'à mi-mars. Elles sont à envoyer à l'adresse mail : admission@ensai.fr
- En avril, la liste des admissibles est publiée sur le site de l'ensai puis ces candidats reçoivent un mail en vue d'un futur entretien par visioconférence.
- A l'issue des entretiens, la liste des admis est également publiée sur le site de l'ensai.

Niveau d'études	Année de candidature	Etudes à l'ENSAI et l'ENSAE
ISE CYCLE LONG	Inscription lors de la $4^{ème}$ année d'études	Admission en $2^{ème}$ année
ISE option mathématiques ou option économie	Inscription lors de la $2^{ème}$ année d'études	Admission en $2^{ème}$ année

Pour rappel, les candidats inscrits au concours d'Analyste Statisticien ne peuvent pas candidater.

Pour plus de renseignements, vous pouvez contacter Mme Nadège ORRIERE, responsable des admissions (+ 33
(0) 2 99 05 32 47) et consulter le site de l'ensai :

http://ensai.fr/2-cursus/les-concours/admission-sur-titres/

PARCOURS ACADEMIQUE DES LAUREATS

Bac scientifique (C, D, S, E)

AS

Excellente maitrise des outils mathématiques → Excellente maitrise de la statistique et de l'économie

AS-1 → AS-2 → AS-3

(Rédaction du rapport de stage)

AS-1 :
Cours intensifs en Maths ;
Cours intensifs en économie ;
Langages de programmation ;
Initiation aux logiciels statistiques ;
Collecte de données sur le terrain.

AS-2 :
Cours de Maths ;
Cours approfondis d'économie ;
Programmation avancée ;
Manipulation des logiciels statistiques ;
Projets statistiques et exposés.

AS-3 :
Statistiques Economiques
Data Science
Ingénierie des Projets

Spécialisation → Analyste Statisticien (ne)

(Econométrie)
(Méthodes statistiques)

(Période de stage)

(Rapport de stage et Mémoire de fin d'année à soutenir)

ISE cycle long (ISE CL)

Excellente maitrise des outils mathématiques → Conception des outils statistiques, économiques et économétriques → Excellente maitrise des outils mathématiques

ISE CL-1 → ISE CL-2 → ISE CL-3 → ISE CL-4 → ISE CL-5 → Ingénieur Statisticien (ne) Economiste

(Rédaction du rapport de stage)

(Période de stage)

ISE CL-1 / ISE CL-2 :
Cours intensifs en Maths ;
Cours intensifs en économie ;
Programmation avancée ;
Collecte de données d'enquête.

ISE CL-3 :
Cours intensifs en économie ;
Logiciels statistiques ;
Econométrie ;
Economie approfondie.

ISE CL-4 :
Statistiques Economiques
Data Science
Ingénierie des Projets

Spécialisation en 5ème Année

Analyse et Evaluation d'Impact des Politiques Publiques
Data Science et Marketing
Finance et Actuariat
Génie Statistique

(GT et Mémoire de fin d'année à soutenir)

Indépendant des écoles du CAPESA

Technicien Supérieur de la Statistique (TSS) – uniquement à l'ISSEA.

Excellente maitrise des outils mathématiques → Méthodes de collecte et d'analyse → Prise de décision

TSS-1 → TSS-2

(Opérationnel pour l'analyse de données)

TSS-1 :
Cours très accélérés en Maths ;
Cours très intensifs en économie ;
Collecte de données sur le terrain ;
Langages de programmation ;
Initiation aux logiciels statistiques.

TSS-2 :
Cours intensifs en économie ;
Projets statistiques ;
Econométrie ;
Modèles statistiques.

Période du stage → Technicien(ne) Supérieur(e) De la Statistique

(Mémoire de fin d'année à soutenir)

Inscriptions

- ENSEA, École Nationale supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée d'Abidjan ;
- ISSEA, Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée de Yaoundé ;
- ENSAE, École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique Pierre NDIAYE de Dakar.

Attention : Le concours est ouvert en Côte d'Ivoire uniquement pour le recrutement AS !

Pour se présenter, les candidats doivent avoir 22 ans non-révolus (moins de 22 ans) et être :

- titulaires d'un baccalauréat scientifique (C, D, E ou S) ;
- ou inscrits en terminale scientifique (sous réserve de l'obtention du baccalauréat – et cela diffère selon les pays.).

Grâce à un cycle préparatoire intégré très sélectif, la filière ISE cycle long /AS permettra de recruter les meilleurs bacheliers scientifiques pour les amener à un diplôme d'ingénieur ou d'analyste statisticien, en garantissant ce niveau d'excellence propre au parcours ISE.

Il est tout à fait possible de candidater aux deux (02) concours en même temps. Il faudra alors impérativement indiquer sur le dossier d'inscription l'ordre de préférence entre chaque concours.

La formation ISE cycle long dure 5 ans, et la formation AS 3 ans.

N.B : Des dossiers d'inscription pour les concours ISE cycle long / AS et ISE sont disponibles auprès :

- ✓ des Directions de la Statistique de la plupart des pays africains francophones ;
- ✓ des Ecoles, Instituts de Formation Statistique et des Ministères en charge du recrutement.

Notez-bien :

ISE cycle long AS / niveau bac / permet d'être admis à l'ISSEA, l'ENSAE ou l'ENSEA

DOSSIER D'INSCRIPTION AU CONCOURS : ISE cycle long /AS (Analyste Statisticien)

Cycle Long (vœu 1) et AS (vœu 2) : ☐ **Cycle Long uniquement :** ☐ **AS uniquement :** ☐

Cocher la case correspondant au(x) parcours au(x)quel(s) vous candidatez.

CENTRE D'EXAMEN : ……………………………………………………………………………

Numéro d'ordre du candidat :*(à remplir par le responsable du centre d'examen)* |_|_|_|

⚠ **Date limite de dépôt du dossier d'inscription auprès du centre d'examen : vendredi 31 janvier 2025**

I- IDENTITE

Civilité : *(cocher la case vous concernant)* ☐ **Monsieur** ☐ **Madame**

NOM : ……………………………………………………………………………………

Prénoms : ………………………………………………………………………………

Date de naissance : |_|_| |_|_| |_|_|_|_| **à** ……………………………..

NATIONALITÉ : ……………………………………..

II- COORDONNEES

Adresse : ………

Localité : ………

Pays : …………………………………………………………………

Téléphone : ………………………………………………………….

Ne remplir le cadre ci-dessous que si vos coordonnées seront différentes en juillet 2025 (pour l'envoi éventuel de la lettre d'admission)

Adresse : ………

Localité : ………

Pays : …………………………………………………………………

Téléphone : ………………………………………………………….

E-mail *(nécessaire pour l'envoi éventuel de la lettre d'admission, écrire très lisiblement, en lettres majuscules)* **:**

|_|_|_ |_|_| _|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| _|_| _|_|_|_|_|_|_| _|_|_|_|_| _|_|_|_|_|_|_|_| _|_| _|_|

III- DIPLOMES ET STATUTS

(Cocher la ou les cases vous correspondant et remplir les informations demandées)

☐ **Je n'ai pas encore le baccalauréat (***en cas d'admission, il faudra l'avoir obtenu au 1/09/2025)* **:**

• je suis lycéen/lycéenne en série : ………. et fréquente l'établissement : ……………………………………………………………………

☐ **Je suis titulaire du diplôme du baccalauréat :**

• série : ………. ; Année d'obtention : ……….

• aujourd'hui j'ai entrepris des études de : …………………..………………………… et fréquente l'établissement ……….…………… ………………………… . J'ai obtenu le ou les diplômes suivant(s) : …………………………………………………………………..

À ……………………………………… , le ………/………/……………… Signature du candidat :

Centre d'Appui aux Écoles
de Statistique Africaines

NOTICE

1. **Constitution du dossier d'inscription**[1] :

Le candidat renseignera **de façon précise et lisible** le dossier d'inscription et fournira les pièces ci-après :

- une fiche individuelle d'état civil ou un extrait d'acte de naissance ;
- une copie certifiée conforme des diplômes obtenus ;
- un certificat de scolarité ou une attestation d'inscription pour l'année scolaire en cours ;
- pour les candidats fonctionnaires statisticiens, une attestation d'emploi dans la Fonction publique datant de moins de trois mois.

2. **Pièces à fournir ultérieurement en cas de succès au concours** :

Le lauréat devra, dans un délai d'un mois à compter de la notification qui lui sera faite, transmettre à nouveau **à l'école où il sera affecté** le dossier d'inscription ainsi que les pièces ci-après :

- le questionnaire joint à la notification d'admission ;
- un extrait du casier judiciaire datant de moins de trois mois ;
- un certificat médical déclarant le lauréat apte à suivre normalement des études ;
- une photo d'identité.

3. **Conditions d'âge pour concourir au concours ISE cycle long / AS** :

- être né(e) après le 31/12/2002 (avoir au plus 22 ans en 2025)
- Rappel : l'ENSAE et l'ISSEA recrutent des ISE cycle long et des AS, l'ENSEA recrute uniquement des AS.

AUCUNE AUTRE DÉROGATION D'ÂGE NE SERA ACCORDÉE

4. **Coordonnées du candidat** :

Les candidats veilleront à préciser très clairement l'adresse e-mail où ils recevront au mois de juillet 2025 leur lettre d'admission.

DATE LIMITE DE DÉPÔT DU DOSSIER D'INSCRIPTION AUPRÈS DU CENTRE D'EXAMEN : VENDREDI 31 JANVIER 2025

E.N.S.A.I
C.A.P.E.S.A
Campus de Ker Lann
51 rue Blaise Pascal BP 37203
35172 BRUZ Cedex
☎ : 33 (0)2 99 05 32 17
mailto : capesa@ensai.fr

[1] **Les pièces constituant le dossier d'inscription ne seront pas retournées aux candidats.**

Les centres d'examens et Ecoles

Les coordonnées des centres d'examen sont mises à jour chaque année. Pour rappel, les inscriptions se font auprès des centres d'examen ci-dessous. Le CAPESA ne prend pas d'inscriptions.

BENIN Ecole Nationale d'Economie Appliquée et de Management (ENEAM) 03 BP 1079 Cotonou eneam.uac@eneam.uac.bj (+229) 21 30 41 68	**BURKINA FASO** Institut National de la Statistique et de la Démographie (INSD) Avenue Pascal Zagre 01 B.P 374 Ouagadougou 01 insd@insd.bf / insdbf@yahoo.fr (+226) 25 49 85 02
BURUNDI Institut National de la Statistique du Burundi (INSBU) Zone Rohero, Quartier INSS, Avenue de l'Aviation, N°06, BP 1156 Bujumbura ins.burundi@insbu.bi / ins.burundi2022@gmail.com (+257) 22 22 67 29	**CAMEROUN** Institut Sous-Régional de Statistiques et d'Économie Appliquée (ISSEA) rue Pasteur BP 294 Yaoundé isseacemac@yahoo.fr / contact@issea-cemac.org (+237) 22 22 01 34
COMORES Institut National de la Statistique des Études Économiques et Démographiques (INSEED) Place de France Moroni secrcom@inseed.km (+269) 333 9617 /334 6974	**CONGO** Institut National de la Statistique (INS) 22 bis rue Béhangle En face de l'ex radio Congo Brazzaville contact@ins-congo.org / cnsee@hotmail.fr (+242) 282 38 40
COTE D'IVOIRE Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée (ENSEA) Avenue des grandes écoles – campus de cocody 08 BP 3 Abidjan 08 ensea@ensea.ed.ci (+225) 22 48 32 00 / 22 48 32 32	**DJIBOUTI** Institut National de la Statistique de Djibouti (INSTAD) Bâtiment Saharion Heron B.P 3201 Djibouti insd@insd.gouv.dj (+253) 21 35 16 82 / 21 35 18 25
GABON Ministère de l'économie et de la Relance Direction Générale de la Statistique BP 2119 (sise à l'ancien Ministère de la Planification quartier Oloumi) Libreville infodgstat@gmail.com (+241) 01 72 04 55 / 01 72 13 69 / 01 76 06 71	**GUINEE** Institut National de la Statistique (INS) BP 221 Conakry – Kaloum info@insguinee.org (+224) 620 86 13 27
GUINEE EQUATORIALE Instituto Nacional de Estadistica de Guinea Ecuatorial (INEGE) Malabo II Edificio Abayak 4a Planta	**HAITI** Université Quisqueya 218 Avenue Jean Paul II Haut Turgeau

GUINEA ECUATORIAL info@inege.gq (+240) 222 196 724	Port au Prince uniq.haiti@gmail.com (+509) 2940 4587
MADAGASCAR Institut National de la Statistique (INSTAT) Rue Jules Ranaivo BP 485 Anosy Antananarivo 101 communication@instat.mg (+261) 32 11 878 79	**MALI** DGESRS Hamdallaye ACI 2000 Portes 445/449 Rue 331 BP 71 Bamako contact@dg-enseignementsup.ml (+223) 20 22 10 44
MAURITANIE Ambassade de France à Nouakchott Quartier de Tevragh Zeina Rue Ahmed Ould Mohamed BP 231 Nouackchott (+222) 45 29 96 99	**NIGER** Ecole Nationale de la Statistique (ENSTAT) 182 rue de la Sirba BP 13416 Niamey ins@ins.ne (+227) 20 72 35 60
REPUBLIQUE CENTRAFRICAINE **Institut Centrafricain des Statistiques et des Etudes Economiques et Sociales (ICASEES)** Rue Gamal Abdel Nasser BP 696 Bangui contact@icasees.cf / info@icasees.cf (+236) 72 05 25 93 / 75 72 47 58	**REPUBLIQUE DEMOCRATIQUE DU CONGO** **INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE (INS)** 6ème rue N°12 Limete Industriel Kinshasa contacts@ins.cd / ins@ins.cd (+243) 81 531 9943
SENEGAL **Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique Pierre NDIAYE (ENSAE)** Immeuble ANSD Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant BP 116 Dakar RP scolarite.ensae@ansd.sn (+221) 33 825 15 19	**TCHAD** **Institut National de la Statistique des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)** BP 453 N'Djamena info@inseed-td.net (+235) 22 52 31 54 / 52 66 13
TOGO **Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)** Immeuble CENETI 59 rue de la kozah BP 118 Lomé dgscn_tg@yahoo.fr / inseed@inseed.tg / inseedtogospdg@gmail.com (+228) 22 21 62 24 /22 21 22 87	**AFRISTAT** **Observatoire Économique et Statistique d'Afrique Subsaharienne** Directeur Général M. Paul Henri NGUEMA MEYE Rue 499, porte 23 Quartier Niaréla Bamako BP E 1600 Bamako MALI

	Tel : 00 223 20 21 55 00 / 20 21 60 71 Fax : 00 223 20 21 11 40 www.afristat.org
ENSAE **École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique** Directeur M. Pierre BISCOURP 5 avenue Henry Le Chatelier 91120 Palaiseau FRANCE Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00 www.ensae.fr	**ENSAI** **École Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information** Directeur M. Ronan LE SAOUT Campus de Ker-Lann 51 Rue Blaise Pascal 35172 BRUZ CEDEX FRANCE Tel : 00 33 (0)2 99 05 32 32 Fax : 00 33 (0)2 99 05 32 05 www.ensai.com
GENES **Groupe des Écoles Nationales d'Économie et Statistique** Directrice Générale Mme Catherine GAUDY 5 avenue Henry Le Chatelier 91120 Palaiseau FRANCE Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00 www.groupe-genes.fr	**INSEE** **Institut National de la Statistique et des Études Économiques** Directeur Général M. Jean-Luc TAVERNIER 88 avenue Verdier 92120 Montrouge FRANCE Tel : 00 33 (0)9 72 72 40 00 www.insee.fr
MEAE **Ministère de l'Europe et des affaires étrangères** **Direction Générale de la Mondialisation** 37 quai d'Orsay 75007 PARIS FRANCE Tel : 00 33 (0)1 43 17 53 53 www.diplomatie.gouv.fr	

Remarques et recommandations générales

Mathématiques

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : commencer le premier exercice de l'épreuve sans avoir au préalable parcouru le sujet ; se précipiter dans les calculs, ce qui entraine les erreurs ; utiliser des théorèmes sans leur nom ; utiliser la mauvaise méthode pour une démonstration (une bonne méthode achève rapidement une démonstration) ; utiliser de manière exagérée les quantificateurs ; des résultats non encadrés ou non soulignés et des copies très sales.

Erreurs fréquentes :

- Copies mal présentées (désordre, illisibilité, exercices commencés en bas de page).
- Calculs remplacés par des approximations numériques sans justification.
- Mauvaise maîtrise des bases :
    - polynômes du second degré (racines, signe, extremum, graphe),
    - équations bicarrées.
- Utilisation de théorèmes hors programme (niveau baccalauréat).
- Étude des limites : factorisations inadaptées, confusion sur les termes dominants, erreurs d'interprétation.
- Raisonnements par récurrence mal structurés (initialisation absente, hérédité mal faite).
- Invocation de théorèmes sans hypothèses vérifiées (ex. valeurs intermédiaires, limite monotone).
- Raisonnements circulaires ou faux (« si $f(0) > f(1)$ alors f est décroissante »).
- Suites et fonctions : confusion entre définitions implicites et explicites.
- Non-prise en compte de cas particuliers ;
- Exercices de probabilités souvent négligés, pourtant accessibles.
- Calculs lourds privilégiés au lieu de méthodes simples (ex. matrices : oubli du théorème spectral).
- Résultats arrondis ou incomplets (N=30 au lieu de N≥31).
- Erreurs fréquentes en dérivation et factorisation.

Recommandations

- Soigner la présentation : un exercice par page, copie lisible.
- Maîtriser parfaitement les bases : second degré, factorisations, fonctions usuelles.
- Citer et vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés.
- Structurer les preuves par récurrence correctement (hypothèse, initialisation, hérédité, conclusion).
- Justifier clairement les résultats (ne pas seulement aligner des calculs).
- Traiter aussi les probabilités et exercices concrets (modélisation économique).
- Utiliser les méthodes les plus efficaces, pas les calculs lourds.
- Vérifier systématiquement les cas particuliers et la cohérence des résultats.

■ Ordre général

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : un mauvais choix du sujet (lire tous les sujets et les analyser est un atout) ; les fautes exagérées (orthographes et grammaires) ; les ratures à outrance, un listing d'idées sans justifications, ni exemples pertinents ; et une conclusion bâclée.

Erreurs fréquentes

- Copies trop longues, mal structurées, digressives → hors sujet fréquent.
- Plans annoncés qui ne répondent pas à la question ;

- Plans « à tiroirs » (énumération d'idées sans discussion) ;
- Introduction paraphrasant ou recopiant le sujet ;
- Conclusions négligées (répétitions ou trop brèves) ;
- Citations plaquées, fausses ou mal attribuées ;
- Vocabulaire familier ou expressions grossières (« arnaque », « aller au boulot ») ;
- Fautes d'orthographe, de syntaxe, de ponctuation (phrases trop longues avec point-virgule) ;
- Confusions géographiques ou historiques (ex. Moyen-Orient confondu avec Proche-Orient).

Recommandations

- Construire un plan solide au brouillon, qui répond à la problématique.
- Respecter la structure intro – développement – conclusion.
- Employer un vocabulaire soutenu, précis.
- Aérer la copie, soigner la lisibilité.
- Éviter la paraphrase et les citations gratuites.
- Rester centré sur le sujet (éviter les hors sujets et extrapolations abusives).
- Illustrer avec des exemples précis et pertinents.

Contraction de texte

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : inclure dans votre texte multiples illustrations de l'auteur ; comptage de mots erroné ; un niveau de langue bas et des copies très touffues et sales.

Erreurs fréquentes

- Résumés transformés en analyses partielles (seulement début ou fin du texte) ;
- Omission de données chiffrées, pourtant essentielles ;
- Nombre de mots : oublié, faux ou volontairement manipulé ;
- Résumés trop longs ou trop courts ;
- Énumération d'idées sans enchaînement logique ;
- Développements excessifs sur un exemple secondaire ;
- Orthographe défaillante (y compris sur des mots donnés dans le texte) ;
- Mots écrits phonétiquement (« tôt de natalité », « Plutard »).
- Vocabulaire familier (« les gosses », « en gros »).
- Phrases trop longues, mal ponctuées, avec contresens.

Recommandations

- Respecter strictement la consigne : contraction fidèle de tout le texte ;

- Conserver au moins deux données chiffrées ;
- Toujours indiquer le nombre exact de mots ;
- Rechercher clarté, concision, enchaînements logiques ;
- Employer un vocabulaire correct et un registre soutenu ;
- Relire attentivement pour éviter fautes et maladresses.

Méthodologie d'ordre général

La dissertation est un exercice argumentatif et structuré qui consiste à répondre, de manière organisée et problématisée, à une question de culture générale. Elle ne demande pas seulement de réciter des connaissances, mais d'analyser une problématique en mobilisant : des idées claires, des références culturelles solides (historiques, philosophiques, littéraires, scientifiques…), un raisonnement logique et nuancé.

Elle vise à tester :

- La capacité d'analyse : comprendre les enjeux du sujet ;
- La capacité de réflexion : construire un raisonnement rigoureux ;
- La capacité de culture : illustrer par des exemples pertinents ;
- La qualité d'expression : clarté, style soutenu, orthographe correcte.

Les différentes parties de la dissertation

i. L'introduction

C'est une étape cruciale : elle doit capter l'attention et poser le cadre de réflexion. Elle comprend quatre mouvements obligatoires :

- **Amorce (accroche)** : entrée en matière générale qui suscite l'intérêt. Exemple de sujet « La technique libère-t-elle l'homme ? »

« *L'homme n'a cessé de développer des outils et des techniques afin de mieux s'adapter à son environnement. De la pierre taillée de la préhistoire à la révolution industrielle, puis à l'ère du numérique et de l'intelligence artificielle, la technique a profondément transformé les conditions de vie. Elle semble avoir toujours été au service d'un idéal : se libérer des contraintes naturelles, de l'effort physique, du temps ou de l'espace. Pourtant, dans nos sociétés contemporaines, cette même technique suscite des interrogations nouvelles : dépendance aux machines, risques environnementaux, ou encore perte d'autonomie individuelle. Dès lors, se pose la question de savoir si la technique libère véritablement l'homme ou si elle ne crée pas d'autres formes de servitude.* »

- **Définition des termes** : préciser le sens exact des notions du sujet.

  « Technique » : ensemble des moyens élaborés par l'homme pour agir sur la nature.

  « Libérer » : donner plus d'autonomie, réduire les contraintes.

- **Problématisation** : transformer le sujet en question centrale à résoudre. On peut la reformuler comme suit : « La technique est-elle réellement une libération pour l'homme, ou crée-t-elle de nouvelles formes d'asservissement ? »

- **Annonce du plan** : présentation claire des étapes de la réflexion.

« Nous verrons d'abord en quoi la technique libère l'homme, avant d'examiner les limites de cette libération, puis nous proposerons une synthèse nuancée. »

ii. Le développement

Il est organisé en parties (grandes thèses) et sous-parties (arguments et exemples). On distingue deux grands types de plans selon la nature du sujet.

Chaque partie doit contenir :

Une idée directrice (thèse ou argument majeur).

Des sous-arguments (explications précises).

Des exemples pertinents (historiques, philosophiques, actuels, littéraires).

Une mini-conclusion partielle (bilan de l'argument avant de passer à l'autre partie).

Exemple de sujet : « L'art doit-il être utile ? »

Partie I : L'art est utile car il a une fonction sociale

Idée 1 : Il exprime des valeurs et des idéaux communs (exemple : peinture de Delacroix « La liberté guidant le peuple »).

Idée 2 : Il éduque et transmet (exemple : théâtre de Molière, critique des travers humains).

Partie II : L'art n'a pas besoin nécessairement d'être utile

Idée 1 : L'art est d'abord une création gratuite (exemple : art abstrait de Kandinsky).

Idée 2 : L'art est une fin en soi : « l'art pour l'art » (thèse de Théophile Gautier).

Partie III : Une synthèse nuancée

Idée 1 : L'art peut être à la fois gratuit et porteur de sens.

Idée 2 : Dans nos sociétés modernes, l'art est multiple : il émeut, il instruit, il questionne.

iii. La conclusion

Elle doit être brève et forte. Elle comporte deux étapes :

- **Bilan de la réflexion** : rappeler la réponse à la problématique.

« L'art n'a pas à être utile au sens pratique du terme, mais il possède néanmoins une fonction sociale et humaine essentielle. »

- **Ouverture** : élargir vers une perspective plus large.

  « L'art interroge finalement notre rapport à la beauté et à la vérité, au-delà de toute utilité immédiate. »

Les transitions

Les transitions sont indispensables pour montrer la logique du raisonnement. Elles doivent :

- rappeler ce qui vient d'être dit,
- annoncer ce qui va suivre.

Exemple : « Si la technique semble avoir libéré l'homme de nombreuses contraintes matérielles, elle peut aussi engendrer de nouvelles formes de dépendance. Il convient donc d'examiner maintenant les limites de cette libération. »

Les types de sujets et de plans

- **Sujet analytique (on analyse un problème sans nécessairement opposer des thèses)**

  Exemple : « Qu'est-ce que le bonheur ? ». Une proposition de plan :

  Partie 1 : Les différentes conceptions du bonheur.

  Partie 2 : Les conditions d'accès au bonheur.

  Partie 3 : Les limites d'une définition universelle du bonheur.

- **Sujet dialectique (thèse / antithèse / synthèse)**

  Exemple : « La technique libère-t-elle l'homme ? »

  Partie 1 : Oui, la technique libère (exemples historiques : médecine, transports).

  Partie 2 : Pas toujours, elle aliène aussi l'homme (dépendance aux machines, pollution).

  Partie 3 : Elle libère et aliène : tout dépend de l'usage (dimension éthique et politique).

Conseil : La plupart des sujets de culture générale sont **dialectiques**, car ils appellent une discussion nuancée.

Exemples pratiques - sujet : « L'homme est-il maître de la nature ? »

- « Dès le XVIIe siècle, Descartes affirmait que l'homme devait devenir "maître et possesseur de la nature". Mais les crises écologiques contemporaines semblent remettre en cause cette ambition. » (***Amorce du sujet***).

- « Peut-on encore dire que l'homme maîtrise la nature, ou au contraire doit-il reconnaître ses limites face à elle ? » (***Problématique***).

- « Nous montrerons d'abord que l'homme a longtemps affirmé sa maîtrise de la nature, avant de voir comment cette prétention est aujourd'hui mise en question, pour enfin proposer une réflexion sur la possibilité d'un rapport plus équilibré. » (***Annonce du plan***).

- « Après avoir souligné les bienfaits de la technique pour l'humanité, il convient désormais de considérer ses effets pervers. » (***Une transition***).

- « L'homme ne peut être totalement maître de la nature sans se condamner lui-même. L'enjeu aujourd'hui est moins de dominer la nature que de coopérer avec elle. Cela interroge finalement notre conception du progrès. » (***Conclusion et ouverture***).

Réussir sa synthèse dans un sujet de type dialectique

La synthèse n'est pas un résumé mécanique des parties, mais une réponse nuancée à la problématique qui dépasse l'opposition thèse/antithèse. Elle permet de formuler une vision plus large, plus équilibrée, parfois plus originale.

- ✓ **La synthèse doit directement répondre à la question posée.**
- ✓ **Exemple sur le sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?***

« La technique libère l'homme de nombreuses contraintes matérielles, mais elle peut l'asservir lorsqu'il en devient dépendant. »

- **Trouver un point de vue plus élevé qui réconcilie ou reformule autrement le problème.**
- **Exemple (Sujet : *L'art doit-il être utile ?*) :**

« L'art peut sembler inutile par nature, mais cette inutilité apparente est précisément ce qui fait sa valeur et son utilité profonde : il nourrit la sensibilité et la pensée. »

Exemple de démarche (Sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?*)

- ✓ **Thèse (I) : Oui, la technique libère → elle réduit les efforts, soigne, transporte, connecte.**

- ✓ **Antithèse (II) : Non, elle aliène → dépendance, pollution, robotisation.**

- ✓ **Synthèse (III) :**

« La technique n'est ni pure libération ni simple asservissement : elle est un outil dont les effets dépendent de l'usage que l'homme en fait et des choix de société qui l'accompagnent. »

Astuces pratiques :

- Utilise souvent des formulations équilibrées :

    - « Elle libère autant qu'elle contraint. »
    - « Elle n'est pas en elle-même… mais selon l'usage qu'on en fait. »

- N'introduis pas d'idées nouvelles non traitées dans le développement.
- La synthèse doit préparer naturellement la conclusion finale.

Méthodologie de la contraction de texte

Définition et méthodes

La contraction de texte consiste à réduire un texte à 25% de sa longueur initiale en conservant son énonciation. Je vous explique ici en détails comment faire une contraction de texte. Vous trouverez aussi un sujet corrigé de contraction de texte en PDF.

Le but de l'exercice est de réduire le texte de 75%. Ainsi, sur un texte de 1000 mots (format habituel pour le bac de français), le but est de le reformuler en 250 mots. Vous avez droit à une marge de 10%, donc +/- 25 mots.

Vous devez restituer le point de vue de l'auteur sans émettre le moindre commentaire personnel. En cela, c'est un exercice radicalement différent du commentaire littéraire.

Contrairement à la synthèse, vous devez conserver l'énonciation du texte. Donc si l'auteur dis "je", vous ne devez pas dire "il". Vous devez vous mettre dans la peau de l'auteur du texte contracté et reformuler ce qu'il dit en réduisant le nombre de mots.

Il faut également respecter l'ordre des idées, la séparation en paragraphes et la stratégie argumentative. Vous ne pouvez pas échanger ou modifier des idées pour réduire le nombre de mots.

Les étapes à suivre

- **Comprendre le texte**

La première étape est de vous assurer que vous comprenez parfaitement ce que veut dire l'auteur du texte, et qu'aucune subtilité ne vous échappe. Pour cela, suivez les étapes suivantes :

- Lire attentivement le texte
- Identifier le genre (lettre, essai, discours) ainsi que la discipline (littérature, politique, sociologie).
- Repérer le thème (de quoi il parle) et la thèse (ce qu'il en dit).
- Dégager la structure (souvent identique aux paragraphes) et donner un titre à chaque partie.

Prenez 10 minutes pour vous constituer un aide-mémoire clair au brouillon reprenant les informations ci-dessus

- **Annoter le texte**

Après avoir lu et compris le texte, vous allez le préparer à être contracté. Pour cela, vous devez en dégager la construction le plus précisément possible. Vous pouvez commencer par les 2 points suivants :

- Souligner ou surligner les idées principales et les mots et expressions clés du texte. (Avec des couleurs différentes pour les idées, arguments et exemples)
- Entourer les connecteurs logiques (lien, cause, conséquence)

Cela devrait vous aider à voir ce que vous pouvez supprimer, ce qu'il faut conserver, et l'ordre de l'enchaînement des idées.

- **Le premier jet**

Il est maintenant temps de vous lancer dans la contraction en elle-même. Pour cela, essayez de retranscrire les idées principales du texte, paragraphe après paragraphe.

Ne vous souciez pas encore du nombre de mot. Vous devez déjà chercher à réduire, mais vous n'atteindrez pas 25% du premier coup. Après ce premier jet, vérifiez les points suivants :

- Ce premier jet reprend les idées sans les déformer
- Les idées sont toutes reformulées et jamais recopiées
- Le système d'énonciation est respecté (je, tu, il …)
- Le registre de langue est identique (familier, soutenu …)

Parfois, il est impossible de reformuler certains termes : ce sont les termes clés du texte. Vous pouvez les reprendre sans les modifier, mais il faut veiller à ce que la plus grande partie du texte soit reformulée.

- **La mise au propre**

Vous avez maintenant de quoi fournir une version aboutie de votre travail. Commencez par compter les mots de votre brouillon pour voir où vous vous situez. Au besoin, reprenez chaque paragraphe et travaillez-le pour en réduire au maximum le nombre de mots.

Vous pouvez utiliser des pronoms, trouver des synonymes pour remplacer les périphrases, et retirer les adjectifs qui n'apportent rien au sens.

Si vous avez de la place, ajoutez des connecteurs logiques pour gagner en fluidité.

Vous devez maintenant effectuer les dernières vérifications :

- La structure en paragraphes met en évidence la structure du texte de départ
- La contraction est parfaitement compréhensible même sans connaître le texte de départ
- Le nombre de mot est respecté à 10% près
- Il n'y a pas de répétition maladroite, faute d'orthographe, phrase trop longue etc.

Une fois que tout est bon, vous n'avez plus qu'à recopier votre texte au propre. Pensez bien à ajouter en rouge en haut de votre copie le nombre final de mots.

Quelques conseils pour finir

La contraction de texte demande beaucoup d'entraînement. Pour pratiquer, n'hésitez pas à reformuler des textes beaucoup plus courts, cela prend moins de temps mais est tout aussi bénéfique.

Quand vous comptez les mots, pensez bien que tous les mots comptent, même les prépositions et autres petits mots : "j'ai mangé d'innombrables pommes" = 6 mots (j' + ai + mangé + d' + innombrables + pommes). C'est-à-dire = 4 mots ; les années comptent pour un mot (exemple : 1980 = 1 mot) ; 50% = 2 mots (50 + %) ; Portefeuille = 1 mot ; arc-en-ciel = 3 mots ; Socioéconomique = 1 mot (car, Socio n'est pas un mot français et ne veut rien dire). De la même manière, sino-africain = 1 mot (car, sino ne veut rien dire.

La contraction de texte est aussi un exercice de vocabulaire, savoir reformuler et trouver des synonymes est essentiel. Pour développer votre vocabulaire pendant l'année de première, n'hésitez pas à vous faire des fiches de mots sur des sujets proches de l'œuvre au programme que vous étudiez en classe.

Pour terminer, pensez surtout qu'il ne vous est pas demandé de commenter le texte. Simplement d'en produire une version raccourcie mais ayant le même sens et la même énonciation (comme si elle était rédigée par la même personne que l'original).

Exercice d'application : texte de 333 mots à contracter

Il ne peut y avoir de « morale sexuelle » de tous qui s'impose à la « morale sexuelle » de chacun. Chacun connaît la nécessité, pour l'individu, de vivre en accord avec ce qui reste le plus profondément inexprimé, par peur, honte, conditionnement social ou répression, je veux dire sa sexualité.

Et qu'il s'agisse d'hétérosexualité ou d'homosexualité, cette relation à l'autre ne peut jouer comme un facteur d'équilibre que débarrassée de la clandestinité ou de l'autocensure auxquelles contraint bien souvent notre environnement et, en premier lieu, nos lois qui, dans notre culture, provoquent au changement des mentalités, avant de changer elles-mêmes.

Certes, comme toute liberté, ce droit de choisir sa sexualité connaît ses limites, classiques au demeurant.

Premièrement, la loi doit intervenir dans tous les cas pour réprimer la violence. Et il y a violence sexuelle dès qu'il y a absence de consentement d'un partenaire auquel, précisément, on dénie le droit de choisir.

Deuxièmement, la loi doit intervenir pour protéger — en dehors même de la violence — la vulnérabilité de certaines victimes presque désignées : les enfants, les mineurs, les handicapés, les hommes et les femmes « sous influence », c'est-à-dire ne pouvant, en raison de l'autorité ou de l'ascendant qu'ils ou qu'elles subissent, librement se déterminer.

Troisièmement, la loi doit intervenir pour sanctionner un préjudice et non traduire un quelconque impératif moral dans noire société civile.

La morale religieuse, pour laquelle l'amour ne se trouve justifié que dans sa fin de procréation, relève, comme la liberté sexuelle, de la liberté de conscience de chacun.

Elle ne peut donc, même masquée, décider du « bon choix » sexuel. La « norme » n'est, en cette matière et dans notre pays, ni affaire de majorité politique ou sociologique, ni affaire de loi civile. La « norme » sexuelle ne se définit pas. Elle se dessine à l'échelle de chaque corps, de chaque enfance, de chaque culture, de chaque plaisir, à condition — je le répète — de ne blesser, de n'agresser ou de ne violenter personne.

Discours de Gisèle Halimi à l'Assemblée nationale pour la dépénalisation de l'homosexualité (20 décembre 1981).

Contraction au quart : 92 mots

Une morale sexuelle collective est inconcevable. Il faut suivre sa propre sexualité. L'amour n'est sain que libre ; les changements culturels entraîneront une modification des lois.

Cependant, la sexualité a des limites :

D'abord, la loi doit protéger des violences.

Ensuite, veiller aux plus fragiles : ceux qui ne peuvent choisir.

Enfin, protéger les gens, pas les mœurs. La religion légitime l'amour uniquement pour procréer, elle doit rester personnelle.

Elle ne doit pas imposer de norme sexuelle qui, en France, n'est pas uniforme, mais individuelle tant qu'aucune atteinte à autrui n'est portée.

ENSEA	ENSAE	ISSEA
–	–	–
ABIDJAN	DAKAR	YAOUNDÉ

BROCHURE D'INFORMATION

SUR LE CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ÉLÈVES INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES / ANALYSTES STATISTICIENS

(ISE cycle long / AS)

(NIVEAU BAC)

CAPESA

CENTRE D'APPUI AUX ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINES
ENSAI – Campus de Ker Lann
51 Rue Blaise Pascal - BP 37203
35172 Bruz Cedex - France
☎ 33 (0)2 99 05 32 17

e-mail : **capesa@ensai.fr**
site web : **capesa.ensai.fr**

Version mise à jour en octobre 2024 (concours 2025)

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES
INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES / ANALYSTES STATISTICIENS

I - ÉCOLES CONCERNÉES PAR CE CONCOURS

Le concours de recrutement d'élèves Ingénieurs Statisticiens Economistes / Analystes Statisticiens ISE cycle long / AS est organisé pour les écoles suivantes :

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ENSEA)
Avenue des grandes écoles, Cocody
08 BP 03 - ABIDJAN 08 (CÔTE-D'IVOIRE)
☎ :(225) 27 22 48 32 00 ou (225) 27 22 48 21 11 – Fax :(225) 27 22 44 39 88
e-mail : ensea@ensea.ed.ci – Site : www.ensea.ed.ci

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ISSEA)
Rue Pasteur
BP 294 YAOUNDÉ (CAMEROUN)
☎ : (237) 222 22 01 34 – Fax : (237) 222 22 95 21
e-mail : contact@issea-cemac.org – Site : www.issea-cemac.org

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE PIERRE NDIAYE (ENSAE)
Immeuble ANSD
Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant
BP 116
DAKAR RP (SÉNÉGAL)
☎ : (221) 33 825 15 19 – Fax : (221) 33 867 91 65
e-mail : scolarite.ensae@ansd.sn – Site : www.ensae.sn

Il - OBJET DE LA FORMATION ISE CYCLE LONG / AS

Les écoles forment des Ingénieurs statisticiens économistes dont le rôle consiste à créer, gérer et utiliser l'information statistique pour la préparation des décisions de nature économique ou sociale concernant la nation, la région ou l'entreprise.

L'Ingénieur statisticien économiste est appelé à organiser et réaliser des enquêtes, à dépouiller et analyser les résultats de ces enquêtes, plus généralement à rassembler les matériaux nécessaires à l'élaboration des comptes nationaux et des programmes de développement, et enfin à organiser, administrer et diriger un service à compétence statistique et économique.

Les écoles préparent au diplôme d'Ingénieur Statisticien Économiste qui sanctionne un cycle d'enseignement d'un haut niveau théorique, qui comporte une double formation, statistique et économique.

Elles préparent également au diplôme d'analyste Statisticien qui sanctionne un cycle de niveau licence orienté vers les techniques appliquées de la statistique et de l'économie.

III - MODE DE RECRUTEMENT

Le recrutement se fait par voie de concours.

Peuvent se présenter au concours les candidats titulaires d'un Baccalauréat Scientifique S, C, D, E, SM ou SE, ou justifiant d'une inscription dans une classe terminale ; l'admission de ces derniers est prononcée sous réserve de l'obtention du Baccalauréat à la fin de l'année scolaire en cours.

Le nombre maximum de candidats par pays ne peut pas dépasser 100.

L'ENSAE et l'ISSEA recrutent des ISE cycle long et des AS, l'ENSEA recrute uniquement des AS.

IV - CONDITIONS D'ÂGE

Les candidats doivent être nés après le 31 décembre 2002.

V - ORGANISATION DU CONCOURS

Des centres d'examen sont ouverts dans la plupart des pays d'Afrique subsaharienne. Les principales informations relatives au concours figurent dans l'Avis de concours diffusé au quatrième trimestre de l'année précédant le concours.

VI - DATES DU CONCOURS

Le concours ISE cycle long / AS ne comporte que des épreuves écrites qui auront lieu les lundi 7 et mardi 8 avril 2025. En voici les durées et coefficients :

ÉPREUVE	COEFFICIENT
1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 4 Heures	30
ORDRE GÉNÉRAL Durée : 3 Heures	25
2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES Durée : 3 Heures	30
CONTRACTION DE TEXTE Durée : 3 Heures	15

Remarque importante : Une épreuve éliminatoire est incluse dans la 1ère Composition de Mathématiques, sous la forme d'un exercice obligatoire comportant 10 questions ; les candidats devront se conformer strictement aux indications figurant sur la première page du sujet correspondant.

Les convocations aux épreuves sont adressées par le responsable du centre d'examen aux candidats relevant de son centre.

VII - DOSSIER D'INSCRIPTION

Les candidats au concours doivent constituer un dossier d'inscription.

Ce dossier est disponible dans les Directions de la Statistique de la plupart des pays d'Afrique subsaharienne, dans les Écoles ou Instituts de formation statistique, auprès des Ministères ouvrant un centre d'examen et au CAPESA. Il devra être déposé au plus tard le 31 janvier, complet et parfaitement renseigné, au centre d'examen où le candidat passera les épreuves.

VIII - PROCLAMATION DES RÉSULTATS

Les copies d'examen sont envoyées dès la fin du concours au CAPESA qui en assure la correction.

Le jury du concours se réunit au plus tard le 30 juin. Les candidats reçus sont informés de leur succès par courriel au cours de la première quinzaine de juillet. Les résultats sont affichés dans les écoles et présentés sur le site web du CAPESA au plus tard une semaine après les délibérations du jury ou le premier jour ouvrable suivant cette réunion. Aucune note n'est communiquée aux candidats.

IX - BOURSES D'ÉTUDES

Les lauréats pourront adresser des demandes de bourse à leurs gouvernements en sollicitant l’appui des Directions nationales de la Statistique ou, par leur intermédiaire, à d’autres organismes de coopération multilatéraux ou bilatéraux.

X - PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS ISE cycle long / AS

A - Les fondements

A.1 Langage ensembliste et langage logique

Calcul des propositions

Axiomes, propositions, implication logique, négation d'une proposition et d'une implication.

Les ensembles

Sous-ensembles, ensemble des parties d'un ensemble, opérations sur les ensembles, quantificateurs, partition d'un ensemble.

Les relations

Définition, relation d'ordre, relation d'équivalence.

A.2 Les nombres entiers

Énoncé des propriétés attribuées à l'ensemble N des entiers naturels. Raisonnement par récurrence.

L'ensemble Z des entiers relatifs.

A.3 Les nombres rationnels

Construction et propriétés algébriques de l'ensemble Q des nombres rationnels.

A.4 Les nombres réels

Inventaire *(sans démonstration)* des propriétés algébriques de l'ensemble R des nombres réels ; toute partie majorée non vide de R admet une borne supérieure ; tout intervalle de R contenant plus d'un point contient au moins un nombre rationnel et un nombre irrationnel.

Valeurs approchées, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

A.5 Les nombres complexes

Notations $a+ib$, nombres complexes conjugués, module d'un nombre complexe. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : $r(\cos x + i\sin x)$ avec $r > 0$ et $x \in R$; argument d'un nombre complexe.

Propriétés des nombres complexes.

Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, linéarisation des polynômes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Résolution des équations du premier degré et du second degré à coefficients complexes. Calcul des parties réelles et imaginaires des racines : cas des coefficients réels.

A.6 Résolution des systèmes d’équations linéaires

B – Analyse

B.1 Fonction numérique d'une variable réelle : limites

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité de la limite.

Cas particulier des limites de suites.

Limite de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions. Limite de la composée de deux fonctions. Formes indéterminées.

Passage à la limite dans les inégalités de fonctions : théorème des « gendarmes ».

B.2 Fonction numérique d'une variable réelle : continuité

Continuité en un point ; continuité sur un intervalle ; somme, produit, quotient de fonctions continues, continuité de la fonction composée de deux fonctions continues *(sans démonstration)*.

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « l’image d’un intervalle par une fonction continue est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque, monotonie et continuité de cette fonction *(on admettra la continuité)*.

Théorème des valeurs intermédiaires.

B.3 Dérivation

Dérivée en un point, dérivée sur un intervalle.

Rappels sur les règles de dérivation et sur le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

Théorème de Rolle *(sans démonstration)*, théorème des accroissements finis.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée. Représentation graphique, exercices simples de recherche d'asymptotes.

B.4 Suites de nombres réels

Raisonnement par récurrence.

Suite monotone, majorée, minorée, bornée.

Toute suite croissante et majorée de nombres réels admet une limite réelle *(sans démonstration)*. Convergence de suites.

Exemples de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. En particulier, étude des suites arithmétiques et géométriques.

B.5 Intégration

Introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,dx$ pour une fonction numérique f positive sur un intervalle réel fermé borné $[a,b]$, comme aire sous la courbe.

Propriétés de linéarité de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Majoration et minoration d’une intégrale. Moyenne d'une telle fonction. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles. Lien avec la dérivation si la fonction est continue.

Primitives. Expression $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, f étant continue sur $[a,b]$ et F est une primitive de *f*. Calcul de primitives.

Calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Intégration par parties. Changements de variable simples.

B.6 Exemples de fonctions d'une variable réelle

Etude des propriétés des fonctions ci-dessous.

Fonction puissance entière, fonctions polynomiales.

Fonctions trigonométriques.

Logarithme népérien (notation *ln*) : $\ln x = \int_1^x dt/t$ (x>0).

Limite quand la variable positive *x* tend vers l'infini de ln *x* et de ln *x* /*x*.

Limite quand *x* tend vers 0 de *x* ln *x*.

Représentation graphique du logarithme décimal (notation log).

Fonction exponentielle.

Propriétés : dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.

Relations entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e. Définition de x^α où $\alpha \in R$; dérivée de la fonction x^α.

C- Géométrie affine et euclidienne

Représentation plane des nombres complexes.

Produit scalaire dans le plan (définition, propriétés) et norme.

Droites et plans dans l'espace.

Barycentre ou centre de gravité d'un ensemble de points.

D - Probabilités

D.1 Analyse combinatoire

Combinaisons, arrangements et permutations.

Formule du binôme de Newton.

D.2 Variables aléatoires et lois de probabilités

Expérience aléatoire, événement, probabilité d'un événement.

Variables aléatoires : loi de probabilité, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle et de la somme de deux variables aléatoires réelles.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

Lois de Bernouilli, loi binomiale (espérance, variance).

XI - CONSEILS POUR LES AUTRES ÉPREUVES

A – Ordre général

Cette épreuve nécessite de procéder avec méthode et rigueur, tant du point de vue du fond que de la forme. Les conseils qui suivent reflètent les lacunes et défauts les plus couramment observés dans les copies des candidats.

- Analyser avec soin le sujet afin d'en comprendre correctement le sens et de saisir l'étendue du domaine concerné.

- Rassembler les idées à développer, s'assurer de leur cohérence et préparer un plan structuré.

- Rédiger en prenant soin d'expliquer et de fournir des arguments, ce qui va bien au-delà d'un simple catalogue d'idées.

- Veiller à la qualité de l'expression : justesse du vocabulaire, syntaxe des phrases correcte, expression précise et concise, orthographe soignée.

- Relire et corriger les fautes éventuelles.

B – Contraction de texte

Cette épreuve impose notamment la contrainte de résumer le texte en un nombre de mots fixé, à 10 % près. Elle demande aussi une bonne compréhension et un travail pour dégager les idées importantes puis en faire une synthèse équilibrée. Voici quelques conseils.

- Lire attentivement le texte pour relever les idées les plus importantes, sans se perdre dans les détails. Cela nécessite une bonne compréhension des thèses présentées et du fil conducteur du texte.

- Construire et rédiger le résumé sans tomber dans l'erreur qui consiste à recopier et juxtaposer des passages du texte.

- Veiller à la qualité de l'expression : syntaxe, vocabulaire adapté, mots de liaison (entre les phrases ou les idées exprimées) bien choisis, orthographe soignée.

- Relire la copie afin de remédier aux erreurs les plus grossières : mots oubliés, phrases incorrectes, fautes d'orthographe.

La statistique

La statistique est la science des données. Elle consiste à :

- collecter des informations chiffrées (données),
- organiser et résumer ces données (tableaux, graphiques, indicateurs),
- analyser ces informations à l'aide de méthodes mathématiques,
- interpréter les résultats pour aider à la décision.

Exemple : Enquêter sur 1 000 ménages pour savoir combien ont accès à l'eau potable, puis calculer les pourcentages, faire des graphiques, et tirer des conclusions utiles pour les décideurs.

Elle sert à comprendre la réalité à partir des données et à réduire l'incertitude. Elle permet de :

- Décrire un phénomène (ex. taux de chômage, nombre moyen d'enfants par femme).
- Comparer des situations (ex. comparer le niveau de vie entre deux régions).
- Prévoir des tendances (ex. évolution du prix du pétrole).
- Prendre des décisions éclairées (ex. définir une politique publique, lancer un produit sur le marché).

Elle est partout, car toutes les disciplines ont besoin de données :

- Économie et finances : analyse du PIB, inflation, taux de chômage, risques financiers.
- Santé : suivi des épidémies, efficacité d'un vaccin (essais cliniques) ;
- Éducation : taux de réussite aux examens, nombre d'élèves par classe ;
- Sociologie et démographie : enquêtes sur la pauvreté, migrations, structure de la population ;
- Environnement : climat, pollution, gestion des ressources naturelles ;
- Industrie et commerce : sondages de marché, contrôle de qualité, optimisation de la production ;
- Politique : sondages électoraux, évaluation des politiques publiques.

Exemple : L'Institut National de la Statistique (INS) du Cameroun publie des données régulières sur la croissance, l'emploi, la pauvreté. Ces chiffres sont utilisés par le gouvernement, les entreprises et les chercheurs.

La statistique est-elle importante :

- Parce que le monde moderne produit une immense quantité de données : sans statistique, impossible de les comprendre.
- Parce qu'elle permet de transformer des chiffres bruts en informations utiles.
- Parce qu'elle aide à anticiper et à planifier (ex. prévoir la population d'un pays en 2050 pour planifier les écoles et hôpitaux).
- Parce qu'elle constitue un outil objectif d'aide à la décision, contrairement aux simples opinions.

La statistique joue un rôle central dans presque tous les domaines que tu as cités, car elle permet d'analyser les données, de prendre des décisions éclairées et de prévoir l'avenir. Voici une explication détaillée domaine par domaine :

Éducation

- Mesure des performances scolaires des élèves (examens, taux de réussite, abandon) ;
- Évaluation de l'efficacité des politiques éducatives ;
- Prévisions des besoins en enseignants, infrastructures, manuels ;
- Classements d'universités et comparaisons internationales (comme PISA).

Santé

- Suivi de l'évolution des maladies (épidémiologie, Covid-19, paludisme, VIH) ;
- Évaluation de l'efficacité des traitements médicaux (essais cliniques) ;
- Statistiques hospitalières : taux de mortalité, durée moyenne d'hospitalisation ;
- Prévision des besoins en infrastructures sanitaires et en médicaments.

Finance

- Analyse des risques de placement et d'investissement ;
- Prévision des tendances boursières ;
- Gestion des portefeuilles financiers et évaluation des performances ;
- Modélisation des taux d'intérêt et des fluctuations monétaires.

Économie

- ✓ Calcul des agrégats (PIB, inflation, chômage, balance commerciale) ;
- ✓ Suivi des politiques économiques et de leur efficacité ;
- ✓ Prévisions macroéconomiques ;
- ✓ Comparaisons internationales du développement.

Démographie

- Mesure de la population (recensements, enquêtes) ;
- Études sur la fécondité, mortalité, migrations ;
- Prévisions démographiques utiles à la planification (santé, écoles, emploi) ;
- Analyse des structures par âge, sexe, zones urbaines/rurales.

Banque et assurances

- ✓ Évaluation des risques de crédit (probabilité de défaut) ;
- ✓ Fixation des primes d'assurance (assurance vie, automobile, santé) ;
- ✓ Détection de fraudes bancaires ;
- ✓ Analyse de la rentabilité et satisfaction client.

Sociologie

- Études d'opinion et de comportements sociaux ;
- Analyse des inégalités sociales ;

- Mesure de l'impact des politiques sociales ;
- Études sur la pauvreté, les conditions de vie, la criminalité.

Psychologie

- Expérimentations pour comprendre les comportements humains ;
- Études statistiques sur la mémoire, la motivation, les émotions ;
- Évaluation des tests psychométriques ;
- Prévision des réactions humaines face à des situations données.

Anthropologie

- Analyse des populations anciennes (restes osseux, ADN) ;
- Études de la diversité culturelle et linguistique ;
- Modélisation des dynamiques de groupes ;
- Mesure de l'évolution des pratiques et coutumes.

Compagnies de téléphonie mobile

- ✓ Analyse du trafic d'appels, SMS et Internet ;
- ✓ Étude du comportement des abonnés (prépayé vs postpayé) ;
- ✓ Détection des fraudes téléphoniques ;
- ✓ Optimisation des réseaux (zones blanches, congestion).

Aviation civile

- Études de sécurité aérienne (accidents, incidents) ;
- Prévisions du trafic passagers et fret ;
- Optimisation des horaires et itinéraires de vol ;
- Mesure de la performance des compagnies aériennes.

Sport

- Analyse de la performance des athlètes (statistiques de match, vitesse, endurance) ;
- Prévisions de résultats (big data et paris sportifs) ;
- Optimisation de la préparation physique ;
- Études d'audience des événements sportifs.

Politique

- Sondages électoraux ;
- Mesure de la popularité des dirigeants ;
- Évaluation des politiques publiques ;
- Analyse des comportements électoraux.

Météorologie

- ✓ Prévisions du temps : les modèles statistiques et probabilistes (régressions, séries chronologiques, modèles ARIMA) permettent de prédire la pluie, la température, la vitesse du vent, etc. ;

- ✓ Études climatiques : suivi des tendances à long terme (réchauffement global, élévation du niveau des mers) ;
- ✓ Alerte précoce : prédictions de phénomènes extrêmes (cyclones, sécheresses, inondations) pour sauver des vies ;
- ✓ Analyse de données massives : traitement d'énormes volumes de données provenant de satellites, radars, stations météo ;
- ✓ Impact socio-économique : les prévisions météo guident l'agriculture, le transport aérien, maritime et terrestre.

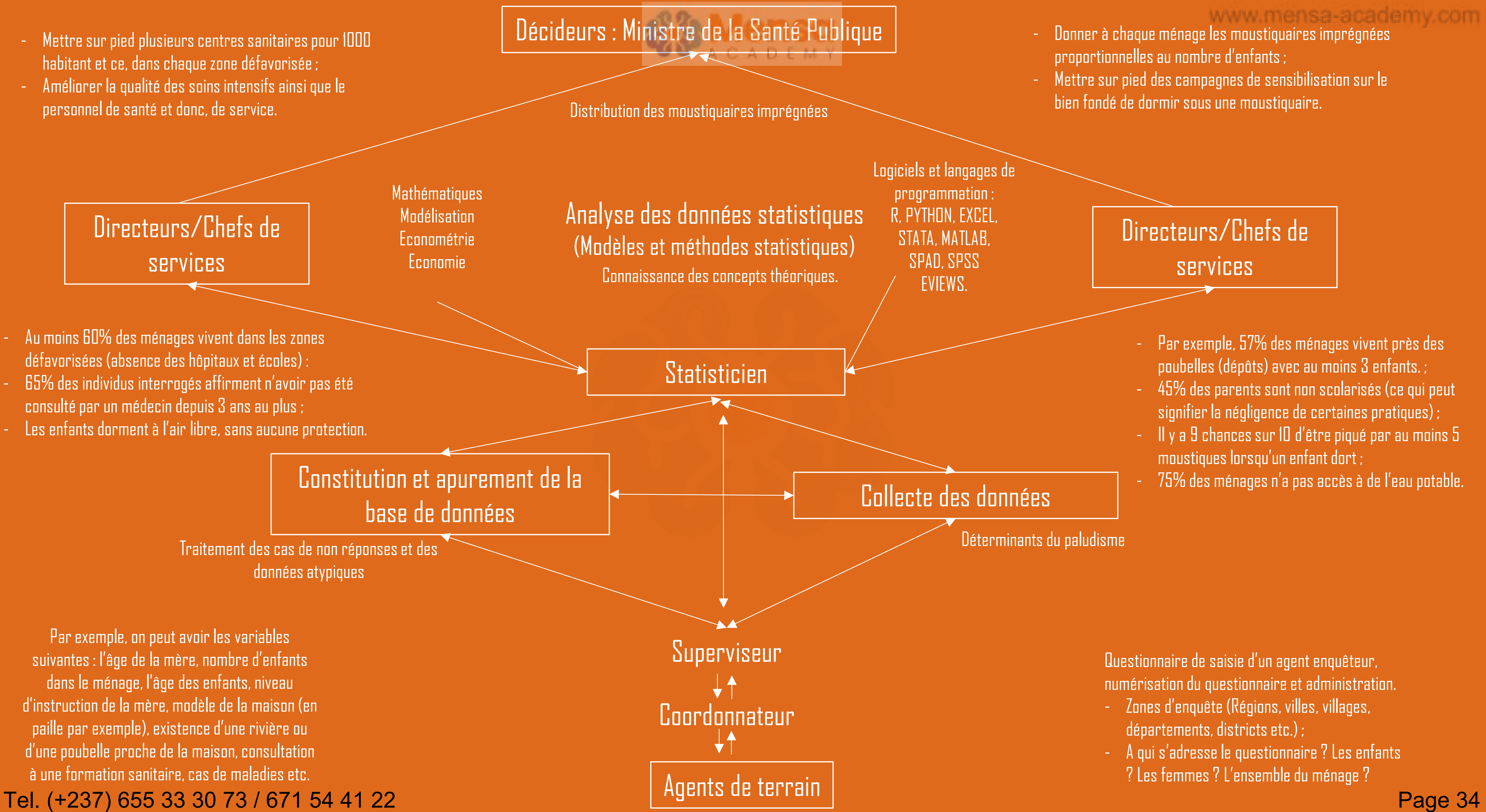
Intelligence artificielle (IA)

- Apprentissage automatique (machine learning) : les algorithmes (régression logistique, arbres de décision, réseaux de neurones) sont tous basés sur la statistique ;
- Reconnaissance d'images et de voix : calcul de probabilités pour classer ou identifier correctement un objet ou une parole ;
- Traitement du langage naturel : utilisation de modèles statistiques pour comprendre, prédire et générer du texte ;
- Big Data et Data Science : analyse statistique de données massives pour trouver des corrélations et faire des prédictions ;
- Évaluation et optimisation des modèles : statistiques utilisées pour mesurer les performances (précision, rappel, F1-score) et éviter le sur-apprentissage (overfitting).

Astronomie & exploration spatiale

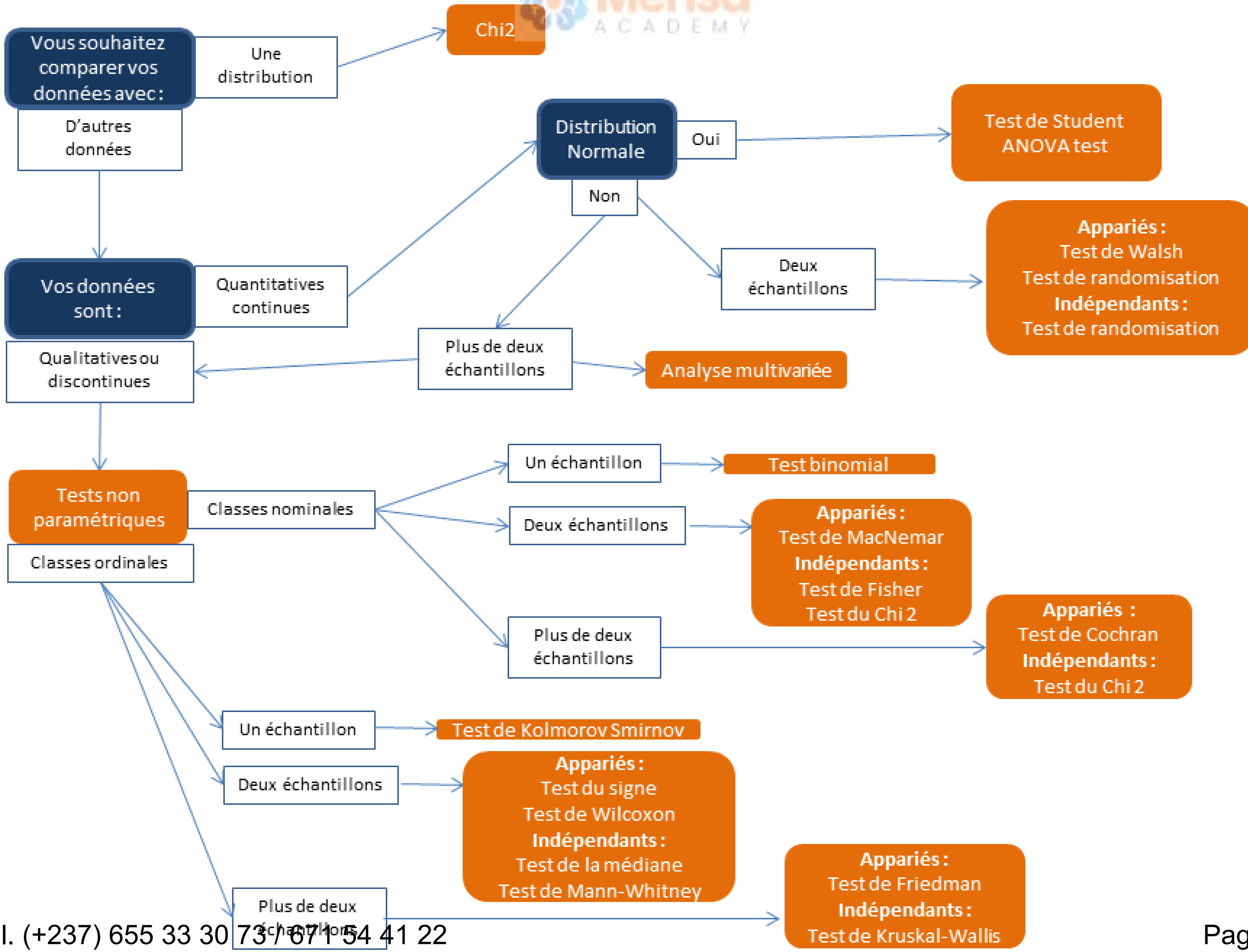
- ➢ Observation astronomique : analyse des données massives issues de télescopes terrestres et spatiaux (Hubble, James Webb) ;
- ➢ Détection d'exoplanètes : utilisation de modèles statistiques pour confirmer la présence d'une planète autour d'une étoile (méthode des transits, vitesses radiales) ;
- ➢ Astrophysique : estimation de la masse des étoiles, des galaxies, de la matière noire.
- ➢ Sécurité spatiale : calculs de probabilité de collision entre satellites, débris spatiaux et engins spatiaux ;
- ➢ Exploration spatiale : planification et modélisation des trajectoires de fusées et sondes interplanétaires (mécanique orbitale appuyée par statistiques et probabilités) ;
- ➢ Analyse d'images spatiales : traitement statistique des signaux pour réduire le bruit et améliorer la précision des observations.

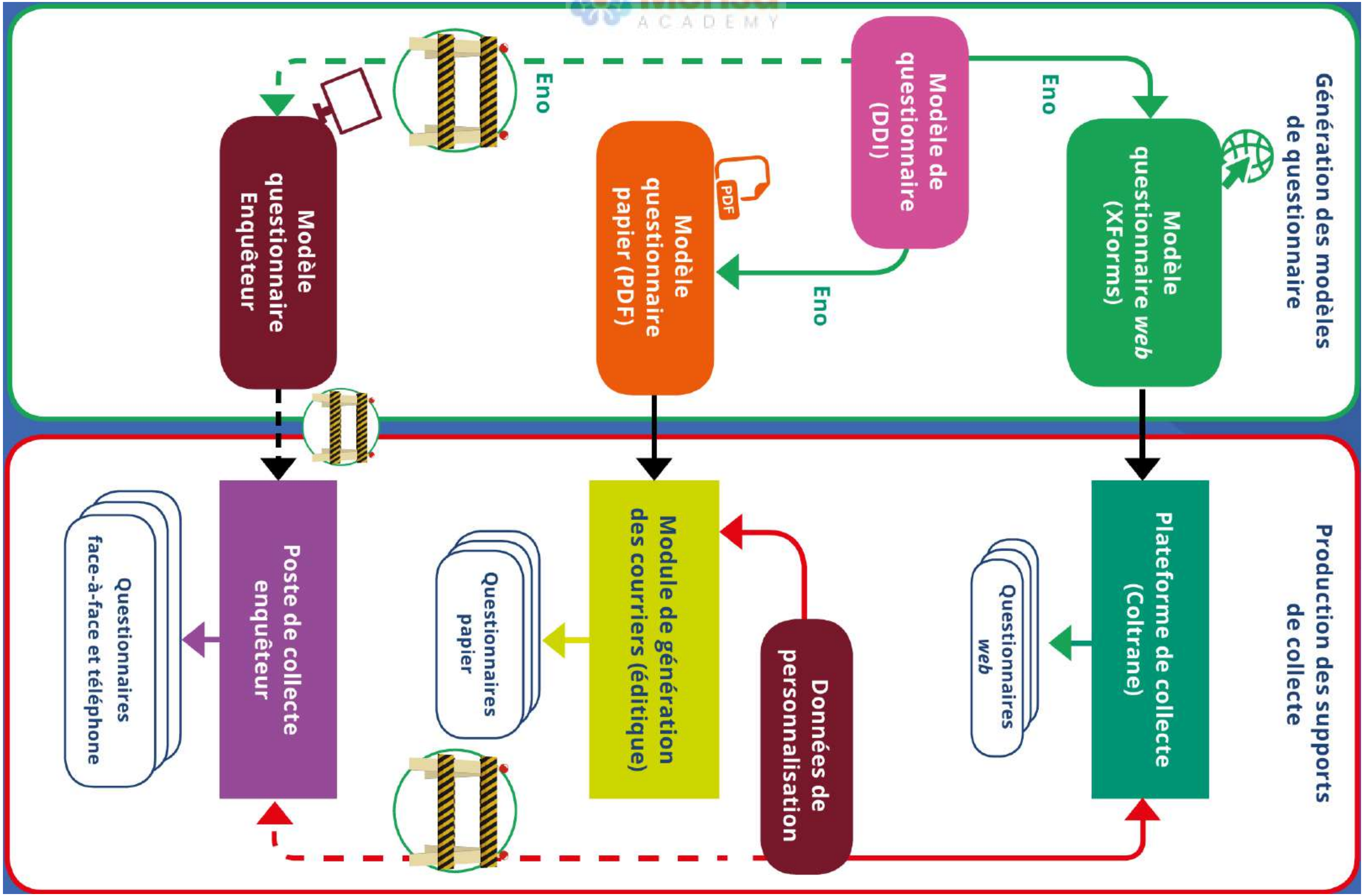
ILLUSTRATION & QUELQUES ELEMENTS A SAVOIR :



Décideurs : Ministre de la Santé Publique
- Mettre sur pied plusieurs centres sanitaires pour 1000 habitant et ce, dans chaque zone défavorisée ;
- Améliorer la qualité des soins intensifs ainsi que le personnel de santé et donc, de service.
- Donner à chaque ménage les moustiquaires imprégnées proportionnelles au nombre d'enfants ;
- Mettre sur pied des campagnes de sensibilisation sur le bien fondé de dormir sous une moustiquaire.
Distribution des moustiquaires imprégnées
Directeurs/Chefs de services
Mathématiques
Modélisation
Econométrie
Economie
Analyse des données statistiques
(Modèles et méthodes statistiques)
Connaissance des concepts théoriques.
Logiciels et langages de programmation :
R, PYTHON, EXCEL, STATA, MATLAB, SPAD, SPSS
EVIEWS.
Directeurs/Chefs de services
- Au moins 60% des ménages vivent dans les zones défavorisées (absence des hôpitaux et écoles) :
- 65% des individus interrogés affirment n'avoir pas été consulté par un médecin depuis 3 ans au plus ;
- Les enfants dorment à l'air libre, sans aucune protection.
Statisticien
- Par exemple, 57% des ménages vivent près des poubelles (dépôts) avec au moins 3 enfants. ;
- 45% des parents sont non scolarisés (ce qui peut signifier la négligence de certaines pratiques) ;
- Il y a 9 chances sur 10 d'être piqué par au moins 5 moustiques lorsqu'un enfant dort ;
- 75% des ménages n'a pas accès à de l'eau potable.
Constitution et apurement de la base de données
Collecte des données
Traitement des cas de non réponses et des données atypiques
Déterminants du paludisme
Superviseur
Coordonnateur
Agents de terrain
Par exemple, on peut avoir les variables suivantes : l'âge de la mère, nombre d'enfants dans le ménage, l'âge des enfants, niveau d'instruction de la mère, modèle de la maison (en paille par exemple), existence d'une rivière ou d'une poubelle proche de la maison, consultation à une formation sanitaire, cas de maladies etc.
Questionnaire de saisie d'un agent enquêteur, numérisation du questionnaire et administration.
- Zones d'enquête (Régions, villes, villages, départements, districts etc.) ;
- A qui s'adresse le questionnaire ? Les enfants ? Les femmes ? L'ensemble du ménage ?

Analyses Univariées




Génération des modèles de questionnaire
Modèle de questionnaire (DDI)
Eno
Modèle questionnaire *web* (XForms)
Eno
Modèle questionnaire papier (PDF)
PDF
Eno
Modèle questionnaire Enquêteur
Production des supports de collecte
Plateforme de collecte (Coltrane)
Questionnaires *web*
Module de génération des courriers (éditique)
Questionnaires papier
Données de personnalisation
Poste de collecte enquêteur
Questionnaires face-à-face et téléphone

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE N° 1

On note (E) l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$.

❶ Montrer que (E) admet 3 solutions réelles x_1, x_2 et x_3.

❷ Montrer que:

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 = 0$$

et que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 3$$

❸ On pose $x = 2\cos\alpha$.

Déterminer les valeurs exactes de x_1 , x_2 et x_3 sous forme trigonométrique

EXERCICE N° 2

Soit $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx,\ n \in \mathbf{N}$

❶ Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique, en cherchant une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

Calculer la raison q de cette suite et le premier terme I_0.

❷ La suite (I_n) est-elle convergente ?

❸ Calculer □ en fonction de n

❹ Soit $S_n = \int_{0}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

Etudier la convergence de la suite (S_n)

❺ Calculer I_{n+1} en intégrant par parties et retrouver le fait que (I_n) est une suite géométrique.

❻ Calculer $|I_0 \times I_1 \times .... \times I_n|$ en fonction de n.

PROBLEME

Soit f(x) = sinx + cosx , x ∈ [-3π/4 , π /4]

❶ Montrer que f est une bijection de l'intervalle I = [-3π/4 , π /4] sur un intervalle J à déterminer

❷ Etudier la continuité et la dérivabilité de la bijection réciproque f^{-1}, de f , sur J

❸ Calculer $f^{-1}(-\sqrt{2})$, $f^{-1}(\sqrt{2})$, $f^{-1}(1)$, et $(f^{-1})'(1)$ où $(f^{-1})'$ est la fonction dérivée de f^{-1}

❹ Calculer $(f^{-1})'(x)$ sur l'intervalle de dérivabilité de f^{-1}

❺ Déduire de ce qui précède , la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes:

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx \quad \text{et} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

❻ Montrer que

$\forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

$\cos(f^{-1}(x)) = \dfrac{x+\sqrt{2-x^2}}{2}$ et $\sin(f^{-1}(x)) = \dfrac{x-\sqrt{2-x^2}}{2}$

❼ Montrer par le calcul que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[-\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

❽ ① Montrer que l'équation *f(x) = 2x* admet une solution unique α dans $]0, \pi/4[$ et que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

② Soit $h(x) = \dfrac{1}{3}\cos x + \dfrac{1}{3}\sin x - \dfrac{2x}{3}, \quad x \in R$

Montrer que $h(\alpha) = 0$ et que : $\forall x \in \,]0{,}7 ; 0{,}8[$, $|h'(x)| \leq 0{,}69$.

En déduire un encadrement de f(x) par deux fonctions affines dépendant de α , lorsque $x \in \,]0{,}7 ; 0{,}8[$

③ Calculer $\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos^3\alpha + \sin^3\alpha$, $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$, $1/\cos\alpha + 1/\sin\alpha$, $|\cos\alpha - \sin\alpha|$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\cos 2\alpha$ en fonction de α

❾ Soit la fonction F définie par :

$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$ si $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ et par $F(-\sqrt{2}) = -\frac{3\pi}{4}$ et $F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ sur $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

① Montrer que F est définie et continue sur $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

② Calculer $F^{'}(x)$ si $x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

③ Montrer que $F = f^{-1}$

❿ ① Etudier la position de la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ du plan, par rapport à sa tangente (T) en un point d'abscisse $x_0 = -\frac{\pi}{4}$

② Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$, calculer en cm^2 l'aire du domaine

$$\Delta = \left\{ M(x,y) \,/\, 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \;\; et \;\; 0 \le y \le f(x) \right\}$$

③ Calculer en cm² l'aire du domaine D limité par l'axe des ordonnées , la courbe représentative de f^{-1}, les droites d'équations y = 0 et y = π/4

➊➊ Soit $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n\, f(x)\,dx, \forall n \in N^*$ et $I_0 = \int_0^{\pi/6} f(x)\,dx$

① Montrer que la suite (I_n) est convergente

② Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

SUJET N° 1

Comparez l'enquête policière et l'expérience scientifique.

SUJET N° 2

Que signifie et quelle valeur faut-il donner à l'expression : «L'histoire jugera» ?

SUJET N° 3

Le philosophe ALAIN affirme que «la plus haute valeur humaine, c'est l'esprit libre». (Les vigiles de l'Esprit).

Vous commenterez cette affirmation et ferez apparaître les difficultés qui peuvent surgir dans cette conquête.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé

❶ Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, c'est-à-dire tels que P (A∩B) = P (A) × P (B), il en est de même de :

$$\overline{A} \; et \; B, \; A \; et \; \overline{B}, \text{ ainsi que de } \overline{A} \; et \; \overline{B}$$

❷ Trois événements A, B et C sont dits indépendants entre eux si :

A et B sont indépendants, A et C sont indépendants , B et C sont indépendants et si P(A ∩B∩C) = P(A) × P(B) × P(C).

Montrer que si A , B et C sont indépendants entre eux, alors :

① $\overline{A}$, B et C sont indépendants entre eux

② $\overline{A}$, $\overline{B}$ et C sont indépendants

③ $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont indépendants

❸ En prenant $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et P la probabilité uniforme, montrer par un exemple que si A et B sont indépendants, A et C indépendants et B et C indépendants, A, B et C ne sont pas obligatoirement indépendants dans leur ensemble.

❹ A , B, et C sont trois événements indépendants dans leur ensemble tels que :

$$P(A) = a , \quad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = b ,$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = c \quad , \quad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = p ,$$

$$P(B) = x \quad \text{et} \quad P(C) = y$$

① Expliciter b, c, et p en fonction de a , x et y

② En déduire une relation entre a, b, c et p indépendante de x et y

③ Calculer x et y en fonction de a, b, c et p

EXERCICE N° 2

❶ Calculer le coefficient du monôme en $x^6 y^5 z^4$ dans le développement de $(2x - 5y + z)^{15}$

❷ En utilisant le développement de $(a + b + c)^n$, montrer que le nombre N des permutations différentiables de n lettres dont : α lettres sont des a, β lettres sont des b et γ lettres sont des c, est

$$N = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \quad \text{avec} \quad = \alpha + \beta + \gamma = n$$

PROBLEME

❶ ① α est un nombre réel .

Résoudre l'équation $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ (E_1) , d ' inconnue z dans C

② Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$(E_n): \ z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0 \quad n \in N^*$$

❷ Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1$

① Montrer que

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

② Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2(\alpha/2)}{4^{n-1}}$$

③ Pour tout α de $]0,\pi[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que :

$$2^{n-1}.H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$$

④ Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0?

⑤ En déduire que , $\forall n \geq 2$,

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \ldots\ldots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

❸ Soit $n \in N^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Soit $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 - (z-\omega)(z-\omega^2)\times\ldots\ldots\times(z-\omega^{n-1})$

① Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n-2

② Montrer que $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ sont n-1 racines distinctes de P.

En déduire que P(z) = 0, pour tout z de C et que $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\times\ldots\times(1-\omega^{n-1})$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

PROBLEME

Indice de Gini

On étudie la répartition des salaires d'une population de N habitants. Pour chaque tranche de 1000 F, on connaît le nombre de personnes dont le salaire est dans cette tranche. Plus précisément, on note x_i la valeur du milieu de l'intervalle i de sorte que x_1=500 F, x_2=1500 F, ... x_{10} = 9500 F. La tranche i correspond donc à l'intervalle [x_i-500; x_i+500[. On note n_i le nombre de personnes dans la tranche i. On observe les valeurs suivantes :

i	x_i	intervalle	n_i
1	500	[0; 1000[	10
2	1500	[1000; 2000[	25
3	2500	[2000; 3000[	106
4	3500	[3000; 4000[	155
5	4500	[4000; 5000[	363
6	5500	[5000; 6000[	224
7	6500	[6000; 7000[	75
8	7500	[7000; 8000[	22
9	8500	[8000; 9000[	18
10	9500	[9000; 10000[	2

❶ Quelle est la taille totale N de la population ?

❷ Quelle est la moyenne empirique des salaires ?

❸ Quelle est la variance des salaires ?

On note N_j la somme cumulée des n_i pour i = 1, ...j, c'est à dire : $N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$.

On note N'_j cette quantité ramenée à une échelle de 0 à 1, c'est à dire : $N'_j = \frac{N_j}{N_{10}}$.

On note $y_i = n_i \times x_i$ et Y_j la somme cumulée des y_i pour i = 1, ...j , c'est à dire : $Y_j = \sum_{i=1}^{j} y_i$. et Y'_j cette quantité ramenée à une échelle de 0 à 1, c'est à dire : $Y'_j = \frac{Y_j}{Y_{10}}$.

On prendra par ailleurs $N_0 = 0$, $N'_0 = 0$, $y_0 = 0$, $Y_0 = 0$ et $Y'_0 = 0$.

Soit C_j les points du plan cartésien de coordonnées (N'_j, Y'_j), avec C_0 de coordonnées (0,0).

❹ Donner dans un tableau les coordonnées des points C_j avec quatre décimales, en arrondissant au plus proche.

On appelle ligne de concentration la ligne obtenue en joignant les points C_j. Soit O le point de coordonnées (0,0), A(1,0) et B(1,1).

❺ Tracer sur une même figure la ligne de concentration, les points O, A, B et la première bissectrice OB. On prendra comme unité $OA = AB$ = 10 cm.

❻ Comment se situe la ligne de concentration par rapport au triangle OAB, quels que soient les effectifs dans chaque tranche ? (On montrera que la ligne de concentration est convexe).

On appelle indice de Gini, noté I, le rapport de l'aire comprise entre le segment *OB* et la ligne de concentration et l'aire du triangle OAB.

$$I = \frac{aire\ entre\ OB\ et\ ligne\ de\ concentration}{aire\ du\ triangle\ OAB}.$$

❼ Calculer l'aire définie par OAB.

Soit D_j les points du plan cartésien de coordonnées (N'_j, N'_j).

❽ Placer les points D_j sur la figure en remarquant que $D_0 = C_0 = O$ et $D_{10} = C_{10} = B$.

❾ Calculer l'aire a_j définie par le quadrilatère $D_{j-1}D_jC_jC_{j-1}$ en fonction de N'_{j-1}, N'_j, Y'_{j-1} et Y'_j.

❿ Calculer l'aire comprise entre la ligne de concentration et la droite OB en fonction des n_j et des Y'_j.

➊➊ Donner la valeur de l'indice de Gini I pour les valeurs du tableau avec trois décimales.

➊➋ Si tous les salaires étaient égaux, combien vaudrait I ?

➊➌ Si tous les salaires étaient nuls sauf un, égal à 9800 F combien vaudrait I ?

Soit α un réel tel que $\alpha \geq 1$. On note f_α la fonction de [0,1] dans [0,1] telle que $f_\alpha(x) = x^\alpha$

➊➍ Tracer la courbe représentative de $f_{2,5}$ sur le graphe précédent.

➊➎ Calculer l'aire entre le segment *OB* et la courbe de f_α ; donner l'indice de Gini correspondant que l'on notera I_α.

➊➏ Pour quelle valeur de α a-t-on égalité entre I_α et l'indice I calculé à la question ➊➊ ? Tracer cette courbe sur le graphique précédent.

EXERCICE

➊ Résoudre dans $\Re$ l'équation d'inconnue x

$$\sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}} = \sqrt[4]{bx}.$$

➋ Calculer x si l'on donne a = 1,875 et b = 15,678.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Le texte ci-joint sous forme d'interview est tiré du livre d'Albert JACQUARD : «Petite philosophie à l'usage des non-philosophes», paru aux éditions Calmann-Lévy en 1997.

Ce texte peut ètre résumé en 250 mots environ (plus ou moins 10%)

✶✶✶

Vous dites que, sans la présence d'autrui, y être objet du discours d'un observateur.

Certes l'homme n'est pas le seul observateur ; les animaux dotés d'une vue voient, tout comme lui, la tache brillante qui, chaque matin, monte dans le ciel ; mais seul l'homme est capable d'aller au-delà de cette constatation et de faire de cette tache un objet, le Soleil. Cette étoile, comme toutes les étoiles, est une création du discours humain. Sans l'homme, l'univers n'est qu'un continuum sans structure.

Ce regard créateur d'objets, chaque humain est capable de le diriger sur lui-même. Il fait alors de sa personne l'objet de son discours. Du coup, non seulement il est, mais *il se sait être*. C'est cela la conscience, c'est une performance qui nous permet de nous savoir être.

Performance que Descartes, disant «Je pense donc je suis[1]», plaçait à l'entrée de la philosophie,. Qu'y a-t-il d'intéressant, selon vous, dans sa démarche ?

Descartes n'est pas à la recherche d'une définition de la conscience ; ce qu'il lui faut, c'est une évidence capable de résister à toute mise en doute, y compris la mise en doute du message de nos sens. Il n'en trouve qu'une : le fait même qu'il est en train de faire cette recherche. Il va donc fonder sa philosophie non sur un objet dont l'existence soit indubitable, il n'en trouve pas, mais sur un processus dont l'existence est assurée : le cheminement de sa propre pensée.

A vrai dire, je ne trouve pas son argument convaincant. Ce qu'il peut tenir pour certain est l'existence de cette pensée, non pas nécessairement l'existence du *je qui pense*.

Je préfère m'en tenir à l'idée que tout objet ne peut être amené à l'existence que par le discours qui l'évoque. Or ce discours s'adresse à quelqu'un. Lorsque l'objet de mon discours est moi, je deviens conscient d'être et, simultanément, je m'affirme existant face à un autre, celui à qui j'adresse mon discours.

Si je devais tirer une leçon de l'oeuvre de Descartes, ce serait essentiellement sa méthode d'analyse de chaque problème en parties aussi élémentaires que possible. Mais à *loin encore, conçoivent la conscience comme une sorte de «revanche» de l'esprit sur la matière.*

Pourquoi imaginer une revanche ? Il y a eu tout simplement, au cours de l'évolution du cosmos, continuité dans l'apparition de pouvoirs toujours plus grands des structures matérielles peu à peu mises en place, pouvoirs liés à leur complexité. Ce processus s'est poursuivi jusqu'à l'apparition du champion de la complexité qu'est le cerveau humain. Parmi les pouvoirs qu'a reçu ce cerveau, le plus décisif a été la création de la communication entre les hommes, ce que nous avons appelé «le discours». Chacun a pu alors se prendre soi-même pour objet de son propre discours, c'est-à-dire développer sa conscience d'être. Mais ce discours ne pouvait prendre place que dans un réseau d'échanges. Ce réseau collectif est donc le point de départ de la conscience individuelle. Ce que j'aime résumer par la formule que j'ai déjà employée : «Je dis *je* parce que d'autres m'ont dit *tu*.». L'esprit n'est que l'aboutissement de l'aventure de la matière. Il n'a pas une origine autre que l'ensemble du cosmos.

---

[1] 1 DESCARTES René, Méditations Métaphysiques, Premières méditations (1641) et Discours de la Méthode, IVé partie (1637).

Ce qui semble vouloir dire que la conscience serait une réalité matérielle...

Je n'en dis pas autant. La conscience a seulement besoin pour se manifester d'un support matériel. Faisons une comparaison avec le langage. Celui-ci ne peut se produire que grâce aux cordes vocales (ou aux gestes pour ceux qui parlent avec les mains), mais le langage est autre chose que les cordes vocales. Vous pouvez tout savoir sur les cordes vocales, et ne même pas imaginer ce qu'est le langage. Voilà un exemple de l'insuffisance de la méthode cartésienne d'analyse.

Autre exemple que cette même insuffisance : à quel moment la conscience apparaît-elle ? demande-t-on parfois. Avant la naissance ? Après ? La réponse est cruciale pour le débat sur l'avortement.

Mais elle ne peut être donnée. L'ovule fécondé n'a pas de conscience, mais tout est présent en lui pour qu'un processus se déroule, qui aboutira à être conscient. On jette à la poubelle, sans état d'âme, un ovule ou un spermatozoïde ; pourquoi pas le foetus qui succède à l'embryon ? Pourquoi pas le bébé qui vient de naître ? Avec ce raisonnement par continuité on justifie tous les crimes !

Mais le même raisonnement en sens inverse conduit à l'absurdité : je respecte évidemment la vie d'un bébé, donc je dois respecter la vie d'un foetus, donc la vie d'un embryon, donc celle d'un oeuf juste fécondé, donc un ovule, donc un spermatozoïde ! Il semble pourtant difficile de se lamenter sur le sort des centaines d'ovules, des centaines de millions de spermatozoïdes auxquels un couple n'accorde pas la vie.

Ce n'est pas en ces termes qu'on peut poser le problème de l'avortement. La biologie ne peut que décrire la réalité, non proposer une règle morale. C'est à chacun de prendre position. La mienne est fondée sur le respect de la jeune femme qui, toute réflexion faite, décide que l'avortement est pour elle la solution la moins mauvaise. Je fais passer ce respect avant celui, pourtant très grand, du futur bébé qu'elle porte.

Cette réflexion, je ne peux la faire seul. A ce propos, comme à propos des questions essentielles, la conscience personnelle ne peut prendre racine que dans une conscience collective ; car ma conscience est le cheminement fait au contact des autres.

Ce qui suppose aussi la temporalité, la capacité d'anticiper le futur.

Le principal apport des hommes, ce qui les distingue initialement des animaux, est certainement leur capacité à imaginer demain. Certes les ours, les écureuils, voyant venir le froid, prennent des précautions, accumulent de la graisse ou des provisions qui leur permettront de supporter l'hiver ; mais ce réflexe est déclenché par la température ; ils font des provisions *parce qu'il fait* froid, non *pour* passer l'hiver. Etre conscient que demain existera et que je peux avoir une influence sur lui est le propre de l'homme.

Vous aussi, vous considérez donc la conscience comme le «sommet des phénomènes», pour reprendre l'expression de Lacan. N'est-ce pas de l'anthropomorphisme ?

Si j'étais un noyau d'hélium, je m'émerveillerais des pouvoirs d'un atome de carbone, si j'était un atome de carbone, je m'émerveillerais de..., et ainsi de suite. En bout de chaîne, on arrive à l'homme qui peut s'émerveiller du seul objet plus complexe que lui, et donc disposant de plus de pouvoirs que lui : la communauté humaine. Par la conscience, qui ne m'est donné que grâce à mon appartenance à elle, je participe à l'élan cosmique vers la complexité ; cet élan qui est le sens apparent de l'évolution de l'univers. Du coup, c'est par la conscience qu'un sens est apporté aux événements quotidiens.

Finalement ce qui me gêne dans le «donc je suis» de Descartes, c'est l'autonomie du «je pense». Car cette pensée n'a pu apparaître et se développer que dans le rapport à l'autre. Il n'y a pas de conscience sans apport extérieur. Je me fais grâce aux autres. D'une certaine façon, lorsque je pense, je quitte mon moi ; mon moi n'est plus à l'intérieur de ma peau. *Je* est l'ensemble des liens que je tisse avec les autres.

Vous n'aurez donc aucune difficulté à souscrire au propos de Freud qui disant dans les Essais de psychanalyse appliquée *: «Le moi n'est pas maître dans sa propre maison.»*

La formule est excellente, mais Freud aurait pu donner à ce constat une tonalité plus réjouissante. Je n'ai pas à être triste de ne pas «être maître dans ma propre maison». Prétendre l'être serait faire preuve de vanité arrogante d'Auguste, «maître de lui comme de l'univers». Fort heureusement, l'univers n'est pas organisé comme une armée avec sa hiérarchie et sa discipline ; fort heureusement ma «maison» n'est pas une caserne avec ses murs d'enceinte, ses lits au carré et ses adjudants gardiens de l'ordre.

Ma maison est un lieu ouvert, dans le temps comme dans l'espace. Des personnages du passé, restés longtemps oubliés, y resurgissent sans prévenir, des inconnus parfois étranges y pénètrent et y déposent des richesses inattendues ; même la poussière accumulée par le hasard devient nuage, source de rêve, lorsqu'un courant d'air la soulève. Personnages et objets s'y heurtent et mettent en place spontanément ici un coin tranquille, harmonieux, là une zone de cri et de contestation. De temps à autres la tentation de l'ordre se manifeste, mais qui saurait l'imposer, sinon la mort ?

«Je» m'y déplace avec un bonheur d'autant plus vif que chaque pièce me réserve un accueil qui me surprend. La cave et le grenier doivent receler des objets que je préfère ne pas voir, quelques cadavres peut-être. Qu'importe, «je» suis face à la fenêtre ; elle est ouverte.

Du coup, mon moi n’a pas de propre maison, il est dans les échanges que j’entretiens, dans les liens que je tisse.

Il dépend aussi de son héritage ; le moi est d’autant moins maître chez lui qu’il ignore le passé de son espèce.

Depuis notre naissance, et même avant, notre cerveau s’est structuré en créant des circuits supports de nos diverses facultés «intellectuelles», mémoire, imagination, émotion... Tout a laissé des traces dans cette structure riche et quelques cent milliards de neurones, reliés par un million de milliards de connexions. Une combinatoire inépuisable est disponible, que n’arriveront pas à saturer les événements de nos cent années de vie (soit seulement trois milliards de seconde). A chaque instant, une partie infime de ces circuits neuronaux est utilisée pour ressentir et exprimer. Cette partie «consciente» nous apparaît comme la seule réellement vivante ; en fait notre activité cérébrale se poursuit souterrainement, marquée par tous les apports engrangés au cours de notre parcours antérieur.

L’inconscient c’est l’ensemble des activités cérébrales qui, à un instant donné, échappent à ce qui est ressenti et exprimé.

Puisque le moi n’est pas maître chez lui, direz-vous qu’il est l’esclave de son inconscient ?

Non, l’erreur souvent commise, sur laquelle Alain attire l’attention, est de faire de l’inconscient un personnage ayant ses propres caractéristiques, disposant d’une certaine autonomie. Le fait de donner un nom à ce concept nous incite à voir en lui quelqu’un. Une erreur semblable est rencontrée dans le domaine scientifique à propos du mot «hasard». En l’opposant à la nécessité, c’est-à-dire aux jeu des forces déterministes, on faut de lui l’équivalent d’un petit génie venant brouiller les cartes, rendant la prévision moins sûre. Il devient un acteur du processus de passage d’un état à l’état suivant ; ce qui ne correspond nullement au rôle que la science attribue à cette notion.

De même l’inconscient n’est pas en soi un acteur, encore moins un monstre ; il est un facteur supplémentaire de complexité.

Soit l'exemple de la sexualité : quelques doses d'hormones, adrénaline ou hormones sexuelles, en plus ou en moins, et toute notre activité neuronale est transformée. Mais l'hyper-complexité du cerveau lui permet de ne pas laisser une chaîne causale simple entre glandes endocrines sécrétant leurs hormones et neurones émettant leur influs nerveux. Un mâle voit une femelle, ses glandes endocrines réagissent, son cerveau reçoit des signaux et provoquent une succession de gestes, l'enchaînement des causes et effets aboutit à la copulation. Le jeu des organes se mêlent de l'affaire, notamment le cerveau qui apporte sa charge de souvenirs, d'émotions, d'interdits, de projets, d'imagination. La copulation n'est plus centrale, elle n'est qu'un détail, à la limite un prétexte, pour déclencher un torrent que certains appellent «amour».

Autrement dit, contrairement à Alain ou à Sartre, vous ne cherchez pas à atténuer la portée de l'inconscient sous prétexte qu'il mettrait en cause la souveraineté du sujet. Mais vous ne vous en affectez pas.

Pas plus que je ne m'affecte de l'imprévisibilité dont il frappe mes comportements. Le temps qu'il fera demain m'intéresse, mais je suis fort heureux de ne pas être capable de le prévoir. Les réactions que j'ai face à un tel événement m'étonnent parfois ; je cherche l'explication ; mais je sais que, le plus souvent, je n'aurai accès qu'à des arguments partiels ou même mensongers. J'irai voir dans le grenier où se cache mon inconscient, mais je sais être incapable de l'explorer. Et j'en suis satisfait. N'exagérons pas : je suis comme le pilote d'une barque chahutée par des remous imprévisibles, inexplicables ; mais j'en reste le pilote. Le brouillard apporté autour de mes décisions par l'indécidable, ne restreint que bien peu ma responsabilité.

Mon inconscient peut bien manigancer dans son coin, en cachette, des réactions qu'il me proposera, des idées qu'il me suggérera ; il ne me fait pas vraiment peur ; pas plus que tous ces «autres» qui m'agressent, me contredisent, m'aiment, me font, me dérangent, et dont je ne peux me passer.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

❶ Soit $y = x^3 - 3x - 1$, la dérivée est égale à $3x^2 - 3$ et elle est nulle pour $x = \pm 1$. Le tableau de variation montre que y est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $]-1, 1]$ et de nouveau strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part dans chacun de ces intervalles y prend des valeurs négatives et positives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation admet 3 solutions.

❷ On a :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

Puis par identification des polynômes, on obtient :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \text{ et } x_1x_2x_3 = 1.$$

Les relations demandées s'en déduisent.

❸ Soit $x = 2\cos\alpha$. Sachant que $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$, l'équation devient : $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, d'où les valeurs des 3 racines, à savoir $2\cos(\frac{\pi}{9})$, $2\cos(\frac{7\pi}{9})$ et $2\cos(\frac{13\pi}{9})$

EXERCICE n° 2

❶ Dans l'expression de I_{n+1}, on effectue un changement de variable, à savoir $x = t + \pi$, et on obtient $I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$. On a donc une suite géométrique de raison $q = -e^{-\pi}$

❷ et ❸ Avec une double intégration par parties, on obtient : $I_0 = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$ et alors $I_n = (q)^n I_0$. Comme la raison est, en module, strictement comprise entre 0 et 1, la suite est convergente vers 0.

❹ On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k = I_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$. On obtient : $S_n = \frac{1+(-1)^{n+2} e^{-(n+1)\pi}}{2}$ et la suite S_n est convergente vers $\frac{1}{2}$.

❺ $R_n = \prod_{k=0}^{n} I_k = \left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1} \left(-e^{-\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

PROBLEME

1. La dérivée de y est égale à $\cos x - \sin x$.
Tableau de variation :

x	$-3\pi/4$		$-\pi/4$		$\pi/4$
y'	0	+		+	0
y	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$

D'où $J = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

2. f^{-1} est continue et dérivable comme fonction réciproque d'une fonction continue et dérivable.

3. On obtient $f^{-1}(-\sqrt{2}) = -\frac{3\pi}{4}$, $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$, $f^{-1}(1) = 0$ et $(f^{-1}(1))' = 1$

4. f^{-1} n'est pas dérivable aux valeurs $\pm\sqrt{2}$.
On trouve : $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x)}$

Par ailleurs $f(f^{-1}(x)) = \cos f^{-1}(x) + \sin f^{-1}(x) = x$ et en élevant au carré, on obtient : $\cos f^{-1}(x)\sin f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$. Les deux expressions $\cos f^{-1}(x)$ et $\sin f^{-1}(x)$ sont donc solutions de l'équation $t^2 - xt + \dfrac{x^2-1}{2} = 0$' d'où $\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x) = \sqrt{2-x^2}$.
En conclusion :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

5.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx = f^{-1}(\sqrt{2}) - f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx = f^{-1}(1) - f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

6. Soit $y=\cos x+\sin x$ et en élevant au carré, on obtient : $y^2=1+2\cos x\sin x$. La résolution de ces deux équations (second degré en $\sin x$ et en $\cos x$) donne le résultats demandés (cf. question 4), à savoir : $\sin f^{-1}(x)=\dfrac{x-\sqrt{2-x^2}}{2}$ et $\cos f^{-1}(x)=\dfrac{x+\sqrt{2-x^2}}{2}$

7. Comme les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, s'il y a une solution à l'équation $f(x)=f^{-1}(x)$, on a aussi $f(x)=x$. En étudiant la fonction $f(x)-x$, on vérifie que $f(x)>x$ sur tout l'intervalle considéré, donc l'équation n'a pas de solution.

8. Soit la fonction $g(x)=\sin x+\cos x-2x$, elle admet comme dérivée la fonction $\cos x-\sin x-2$ qui est toujours négative. La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle considéré de 1 à $\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{2}$ et cette dernière valeur est négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule solution à l'équation.
On vérifie que $g(0.7)>0$ et que $g(0.8)<0$.

On a : $h(x)=\dfrac{g(x)}{3}$, donc $h(\alpha)=0$. On vérifie que $|h'(x)|\leq 0.69$, par conséquent :
D'après le théorème des accroissements finis sur $]0.7,0.8[$, on a :
$h(x)-h(\alpha)=(x-\alpha)h'(c)$, où $c\in]0.7,0.8[$. Donc $f(x)=3h(x)+2x=3(x-\alpha)h'(c)+2x$
ou encore $|f(x)|\leq 3x(0.69)+2x+3\alpha(0.69)=4.07x+2.07\alpha$

On a $h(\alpha)=0$, donc $\sin\alpha+\cos\alpha=2\alpha$. En élevant au carré, on obtient :
$\cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{4\alpha^2-1}{2}$, puis $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\alpha^2-1$ et $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{4\alpha}{4\alpha^2-1}$.

D'autre part, $(\cos\alpha+\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+\sin^3\alpha+3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha\sin\alpha)$, d'où
$\cos^3\alpha+\sin^3\alpha=8\alpha^3-3\alpha(4\alpha^2-1)$;
$\cos\alpha=\alpha+\sqrt{\dfrac{1-2\alpha^2}{2}}$ et $\sin\alpha=\alpha-\sqrt{\dfrac{1-2\alpha^2}{2}}$.

9. La fonction F est continue d'après la question 5 et $F'(x) = (f^{-1}(x))'$, donc les deux fonctions sont égales à une constante additive près, mais les valeurs aux bornes sont les mêmes, les deux fonction F et f^{-1} sont donc égales.

10. La courbe représentative de la fonction f est en dessous de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et au dessus de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Il suffit de regarder la convexité de la courbe.

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx = \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/4} = 1 \times 4cm^2 = 4cm^2$$

11. $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n I_0 \to 0$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

1) Comme $\Omega = A \cup \overline{A}$, on a :

$$P(B) = P[(A \cup \overline{A}) \cap B]$$
$$= P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B]$$
$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{A} \cap B) .$$

Le dernier terme est nul car $A \cap \overline{A} \cap B = \emptyset$. Par hypothèse $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, donc

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)\,P(\overline{A}) \text{ car } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

D'où $\overline{A}$ et B sont indépendants. Même démonstration pour A et $\overline{B}$, puis pour $\overline{A}$ et B.

2) Si A, B, C et D sont indépendants entre eux, d'après 1) $\overline{A}$, B, C et D sont indépendants 2 à 2 et on a comme ci-dessus :

$$P(B\cap C)=P[(A\cup \overline{A})\cap B\cap C]$$
$$= P[(A\cap B\cap C) \cup(\overline{A} \cap B\cap C]$$
$$= P(A\cap B\cap C) + P(\overline{A} \cap B\cap C)- P(A\cap \overline{A}\cap B\cap C)$$

et le dernier terme est nul car $A\cap \overline{A}\cap B\cap C =\varnothing$. Comme A, B, C et D sont indépendants entre eux, on a :

$$P(B\cap C)= P(B)\, P(C) \text{ et}$$
$$P(A\cap B\cap C)= P(A)\, P(B)\, P(C),$$

d'où

$$P(\overline{A} \cap B\cap C)= P(B\cap C)[1- P(A)]$$

3) Prenons $\Omega=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$, $C=\{b,d\}$ avec

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) =P(\{c\}) = P(\{d\})=1/4$$

On a :

$$P(A\cap B)= P(\{b\}) =1/4 = P(A)\, P(B);$$
$$P(B\cap C)= P(\{b\})=1/4 = P(B)P(C) \text{ et}$$
$$P(A\cap C)= P(\{b\})=1/4=P(A)P(C).$$

Mais $P(A\cap B\cap C)= P(\{b\})=1/4$ est différente de $P(A)\, P(B)\, P(C)=1/8$.

4.1) D'après 2), $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sont indépendants entre eux donc

$$b = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap \overline{C}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(\overline{C}) =(1-a)(1-x)(1-y)$$

De même $\overline{A}$, $\overline{B}$, C sont indépendants entre eux donc

$$p = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap C) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(C) =(1-a)(1-x)y$$

Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}$ est le complémentaire de $A\cap B\cap C$ donc

$$c = P(\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}) =1- P(A\cap B\cap C)= 1-P(A)\, P(B)\, P(C)=1-axy$$

4.2) et 4.3) Pour trouver une relation entre a, b, c et p indépendante de x et y. on calcule d'abord x et y en fonction de a, b, c et p (question suivante 4.3). On a :

$$b/p = (1-y)/y$$

et on en déduit $y = p/(b+p)$. Par ailleurs,

$$x = (1-c)/ay$$

soit, en remplaçant y par $p/(b+p)$:

$$x=(1-c)(b+p)/ap.$$

On obtient ensuite la relation entre a, b, c et p indépendante de x et y en remplaçant x et y ci-dessus dans l'expression de $p = (1- a)(1-x)y = (1-a)(ap-b-p+cb+cp)p/[ap(b+p)]$.

EXERCICE N° 2

1) On développe $(a+b+c)^n$ à l'aide de la formule du binôme

$(a+b+c)^n = \sum C_n^k (a+b)^k c^{n-k}$ la sommation portant sur k variant de 0 à n.

Puis on développe $(a+b)^k$ dans cette somme, ce qui donne :

$(a+b+c)^n = \sum C_n^k c^{n-k} \sum C_k^p a^p b^{k-p}$, la deuxième sommation portant sur p variant de 0 à k.

Comme il s'agit de sommes avec un nombre fini de termes on peut écrire :

$$(a+b+c)^n = \sum \sum C_n^k C_k^p c^{n-k} a^p b^{k-p} = \sum C_n^k C_k^p a^p b^{k-p} c^{n-k},$$

Le coefficient du terme $a^p b^{k-p} c^{n-k}$ est $C_n^k C_k^p = [n! / k!(n-k)!] [k! /p!(k-p)!] = n!/(n-k)! (k-p)! p!$

On en déduit que le coefficient de $x^6y^5z^4$ dans le développement de $(2x-5y+z)^{15}$ est égal à

$$(2^6 x (-5)^5 x 15!) / (6! 5! 4!) = -(2^6 x 5^5 x 15!) / (6! 5! 4!)$$

2) Le nombre de permutations differentiables de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c est égal au nombre de combinaisons de ces trois lettres pour former un mot de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c, qui n'est autre que le coefficient de $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dans le développement de $(a+b+c)^n$ qui n'est autre que $n!/ \alpha! \beta! \gamma!$.

PROBLEME

1.1) Le discriminant associé à l'équation du 2nd degré est $\Delta=\cos^2\alpha-1 = -\sin^2\alpha$. Les racines sont donc :

$$z = \cos\alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

1.2) On pose $Z = z^n$ et on se ramène à la résolution de l'équation du 2ème degré de la question précédente. Les solutions de (E_n) sont donc

$$z^n = e^{\pm i\alpha}, \text{ soit } z_k = e^{\pm i(\alpha+2k\pi)/n}, k=0,\dots,n-1.$$

2.1) Connaissant les racines de $P_\alpha(z)$ données en 1.2) on peut le mettre en produits de facteurs :

$$P_\alpha(z) = \Pi_0^{n-1}(z- z_k)(z- \overline{z_k})$$

$$= \Pi_0^{n-1}[z^2-2z\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$

2.2) On a :

$$P_\alpha(1) = 2(1-\cos\alpha) \text{ et d'après 1.2) :}$$

$$= \Pi_0^{n-1}[1-2\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$

$$= 2^n\Pi_0^{n-1}[1-\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)]$$

et comme $1-\cos x = 2 \sin^2(x/2)$, on a :

$$P_\alpha(1) = 4 \sin^2(\alpha/2) = 4^n\Pi_0^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

d'où le résultat.

2.3) On a :

$$H_n(\alpha) = \Pi_1^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

Et comme le produit $H_n(\alpha)$ ci-dessus commence avec $k=1$, on peut écrire

$$H_n(\alpha) = \Pi_0^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin(\alpha/2n)$$

$$= \{\Pi_1^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin^2(\alpha/2n)\}^{1/2}$$

$$= \sin(\alpha/2)/[2^{n-1} \sin(\alpha/2n)]$$

en utilisant l'égalité dans 2.2). D'où le résultat.

2.4) Lorsque α tend vers 0, $\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha/2n) \approx (\alpha/2)/(\alpha/2n) = n$, donc

$$\lim H_n(\alpha) = n / 2^{n-1}$$

2.5) d'après 2.3) on a par continuité de la fonction en $\alpha=0$:

$$H_n(0) = \Pi_1^{n-1}\sin(k\pi/n)$$

$$= \lim \sin(\alpha/2)/[2^{n-1}\sin(\alpha/2n)]$$

$$= n / 2^{n-1} .$$

3)

3.1) En développant le produit $(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$ dans l'expression de P(z), on voit que le coefficient de z^n est nul, donc le degré du polynôme P(z) est au plus égal à n-2.

3.2) On peut écrire :

$$P(z) = (z^n-1) / (z-1) - (z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$$

Et donc pour k=1,…,n-1 :

$$P(\omega^k) = [(\omega^k)^n-1) / (\omega^k -1)$$

Or $(\omega^k)^n = (e^{i2k\pi)/n})^n = e^{i2k\pi} = 1$ et donc

$P(\omega^k) = 0$ pour k=1,…,n-1 et $\omega, \omega^2,.., \omega^{n-1}$

sont n-1 racines distinctes de P(z). D'après 3.1), P(z), polynôme de degré $\leq$ n-2, a n-1 racines distinctes C'est donc le polynôme nul, i.e. P(z)=0 $\forall z\in C$.

En particulier pour z=1 on a :

$$0 = P(1) = 1+1+\ldots+1- (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1}) = 0.$$

D'où $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE

❶ $N = \sum_{i=1}^{i=10} n_i = 1000.$

❷ La moyenne empirique vaut : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i . x_i = 4540$ F.

❸ La variance vaut : $\mathrm{V}x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i .(x_i - \bar{x})^2 = 2022400.$

❹ Coordonnées des points :

i	N'_i	Y'_i
1	0.01	0.0011
2	0.035	0.0093
3	0.141	0.0677
4	0.296	0.1872
5	0.659	0.5470
6	0.883	0.8184
7	0.958	0.9258
8	0.98	0.9621
9	0.998	0.9958
10	1	1

❺ Figure.

❻ Pour tout j on a : $0 \leq N'_j \leq 1$, $0 \leq Y'_j \leq 1$ donc la ligne de concentration est au dessus du segment OA et à gauche du segment AB. Pour montrer que la ligne est convexe, on compare la pente p_j du segment $C_{j-1}C_j$ et celle de C_jC_{j+1} notée p_{j+1}. On a :

$$p_j = \frac{Y'_j - Y'_{j-1}}{N'_j - N'_{j-1}} = \frac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}}.$$

Or $x_j < x_{j+1}$ donc $\dfrac{n_j x_j}{n_j} < \dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{n_{j+1}}$ d'où $\dfrac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_j}} < \dfrac{\dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_j}}$ c'est à dire $p_j < p_{j+1}$ donc la ligne est convexe. On en déduit qu'elle se trouve sous le segment OB. La ligne de concentration est donc à l'intérieur du triangle OAB.

❼ L'aire de OAB vaut 0,5.

❽ Figure.

❾ Le quadrilatère est un trapèze car $C_{j-1}D_{j-1}$ et C_jD_j sont parallèles, leurs points ayant les mêmes abscisses deux à deux. L'aire a_j vaut donc :

$$a_j = \frac{N'_{j-1}+N'_j-Y'_{j-1}-Y'_j}{2}(N'_j-N'_{j-1}).$$

❿ L'aire demandée est la somme des aires a_j calculées précédemment, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
aire &= \sum_{j=1}^{10} a_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'_{j-1}+N'_j)(N'_j-N'_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)(N'_j-N'_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'^2_j-N'^2_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i} \\
&= \frac{1}{2}(N'^2_{10}-N'^2_0) - \frac{1}{2\sum_{i=1}^{10} n_i}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}\right).
\end{aligned}$$

⓫ Donc $I = 1 - \dfrac{\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}$. Application numérique : I = 0,168.

⓬ Si tous les salaires étaient égaux, alors ils seraient tous dans une classe j fixée. On aurait alors C_0 = ... = C_{j-1} = O et C_j = ...C_{10} = B donc la ligne de concentration serait la droite OB et l'indice serait nul I = 0.

⓭ On aurait alors $C_0 = O$ C_1 = ... = C_9 de coordonnées $(\frac{N-1}{N},0)$ et $C_{10}=B$. On a alors $I = 1-\frac{1}{N}$.

❶❹ Figure

❶❺ $I_\alpha = 1 - 2\int_0^1 f_\alpha(x)dx = 1 - 2.[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$.

❶❻ On a $I_\alpha = 0{,}168$ si $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0{,}168$ c'est à dire α = 1,404.

Figure :

EXERCICE

❶ Les différentes racines n'ont de sens que si : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ 0 < x \leq a^2 \end{cases}$ ou si a = 0 et x = 0.

Dans ces conditions, on a l'équation équivalente en élevant tout au carré : $2a + 2\sqrt{a^2 - x} = \sqrt{bx}$.

En relevant au carré on a encore l'équation équivalente : $4a^2 + 8a\sqrt{a^2 - x} + 4(a^2 - x) = bx$ soit encore : $8a\sqrt{a^2 - x} = (b+4)x - 8a^2$. Cette équation équivaut à :

$$\begin{cases} 64a^2(a^2 - x) = ((b+4)x - 8a^2)^2 \\ (b+4)x - 8a^2 \geq 0 \end{cases}$$ soit,

$$\begin{cases} x = \dfrac{16a^2 b}{(b+4)^2} \\ x \geq \dfrac{8a^2}{b+4} \end{cases}$$

Les conditions deviennent alors :

$$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ \dfrac{8a^2}{b+4} \leq \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2} \leq a^2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $a > 0$ et $b \geq 4$., auquel cas la solution est $x = \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2}$.

❷ Application : $x = 2{,}277$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE N° 1

❶ Etudier sur $[1, +\infty[$, les sens de variation des fonctions τ et φ telles que

$$\tau(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1} \quad et \quad \varphi(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$$

❷ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \left[-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}\right]$.

Montrer que les suites $(I_k)_{k \geq 1}$ et $(J_k)_{k \geq 1}$ sont des suites décroissantes de segments emboîtés pour l'inclusion.

❸ On pose $f_k(x) = \sqrt{x^2 + 2kx + 1}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f_k en fonction de I_K et J_k.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction f telle que

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2 + 2kx + 1} \right) - \sqrt{n^2 x^2 + 1}$$

❹ Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left[f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right]$ et en déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

EXERCICE N° 2

On considère la fonction

$$f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}}$$

❶ Déterminer l'ensemble de définition de f

❷ Calculer $[f(x)]^2$, simplifier f (x) et tracer C_f, courbe représentative de f , dans un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

❸ Déterminer l'ensemble des couples (x , y) d'entiers naturels tels que y = f (x).

❹ Soit g la restriction de f à [3, + ∞ [, Montrer que g est une bijection de [3, + ∞ [sur un intervalle J à déterminer.

Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur J.

Déterminer la fonction g^{-1} et tracer sa courbe représentative sur le même graphique que C_f

PROBLEME

❶ Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\Pi} \leq \sin x \leq x$ *et* $1 - \frac{2x}{\Pi} \leq \cos x \leq \frac{\Pi}{2} - x$

❷ Soit la fonction g définie par g(x) = $2x + 1 - \frac{2}{\Pi} \cot an\,(\Pi x)$

① Déterminer D ensemble de définition de g

Etudier le sens de variation de g sur D.

② Montrer que l'équation g (x) = 0 admet, pour tout entier relatif n , une solution unique α_n appartenant à] n, n + 1 [

③ Montrer que g (x + n) = g (x) + 2 n , n ∈ Z , x ∈ D
④ On pose $\beta_n = \alpha_n - n$ pour n ∈ N

Montrer que la suite (β_n) est décroissante et que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. En déduire que la suite (β_n) est convergente.

⑤ Montrer que, pour tout t de] 0, $\frac{1}{2}$] , on a :

$$g\,(n+t) \geq 2\,(n+1) + 2t - \frac{1}{2t}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n$

⑥ Etudier la suite (μ_n) telle que $\mu_n = \alpha_{-n} + n$

❸ Soit f : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}\left[1 - (2x+1)\cos(\Pi x)\right]$

① Etudier le sens de variation de f sur $[\,n, n+1\,]$, suivant la parité de n.

② Montrer que pour $x > -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x \leq f\,(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Démontrer une relation analogue pour $x \leq -\frac{1}{2}$

③ Tracer la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé du plan, pour x ∈ $[\,-3, 3\,]$

④ On pose h(x) = $\frac{\Pi}{4}.g(x).\sin(\Pi x)$, $x \in \left] n, n+1 \right[$, $n \in N$, et

$v_n = \int_{n+\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{2}} h(x)dx.$

Montrer que $v_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{8}\right)$ et étudier la suite (v_n).

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

SUJET N° 1

Commentez ces phrases de Simone WEIL tirées de «L'enracinement». «Cela n'a pas de sens de dire que les hommes ont, d'une part des droits, d'autre part des devoirs... Un homme qui serait seul dans l'univers n'aurait aucun droit mais il aurait des obligations»

SUJET N° 2

Le droit doit-il se contenter de suivre l'évolution des moeurs ?

SUJET N° 3

Commentez ces phrases d'Ernest RENAN dans «qu'est-ce qu'une nation ?». «Une grande agrégation d'hommes, saine d'esprit et chaude de coeur, crée une conscience morale et s'appelle une nation».

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

Combien y a - t- il de nombres entiers inférieurs à 10^p et dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

EXERCICE N° 2

On considère tous les nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6. Déterminer leur nombre N et leur somme S. Donner la décomposition de S en produit de facteurs premiers.

PROBLEME

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

❶ On considère le vecteur $\vec{W}$ d'affixe z = x + iy et le vecteur $\vec{s}$ d'affixe z' = x'+i y'. On considère le produit scalaire $\vec{W}.\vec{s}$ et le déterminant det $(\vec{W}, \vec{s})$.

① Montrer que $\vec{W}.\vec{s} = \frac{1}{2}\left(z\bar{z}' + \bar{z}.z'\right)$ et $\det\left(\vec{W}, \vec{s}\right) = \frac{1}{2i}\left(\bar{z}.z' - z.\bar{z}'\right)$

② Soit (D) une droite du plan P, dont une équation est ax + by + c = 0 , (a,b) ≠ (0 , 0) , c ∈ R

Si α = a + ib , montrer que l'équation ax + by + c = 0 , de (D) , peut se mettre sous la forme : $\alpha.\bar{z} + \bar{\alpha}.z + 2c = 0$, où $z = x + iy$.

③ Soit (C) le cercle dont une équation est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $a^2 + b^2 - c \geq 0$

Si $\alpha = a + ib$ et $z = x + iy$, montrer que cette équation de (C) peut se mettre sous la forme $|z|^2 - \left(\alpha.\bar{z} + \bar{\alpha}.z\right) + c = 0$

❷ P* étant le plan P privé de l'origine O , soit l'application

$$f : P^* \to P^*$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ avec } z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

① Déterminer l'ensemble des points invariants du plan, par f.

Quelle est l'image de $M'(z')$ par f ?

② Montrer que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens et que $OM \times OM' = 1$

③ Soit A le point d'affixe - 1 et soit Γ le cercle de centre A et de rayon 1. On note par Γ^* le cercle Γ privé de l'origine O.

Dans cette question , on suppose que le point M (z) appartient à Γ*.

a) Montrer que $M'(z')$ appartient à la médiatrice du segment [O A] .
b) En déduire la construction géométrique de M ' connaissant la position de M sur Γ*.
c) La médiatrice de [OA] coupe Γ* en deux points I et J , $y_I > 0$, $y_J < 0$

Déterminer l'image par f du segment [I J] et l'image par f du petit arc $\widehat{IJ}$ de Γ*, privé de O.

④ Dans cette question, M est un point quelconque du plan. (Δ) étant une droite passant par 0, on note Δ* = Δ - { O }

Déterminer l'image par f de Δ*

⑤ Dans cette question, M est un point quelconque du plan, B est le point d'affixe 1, N est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) des abscisses.

Montrer que M ' , B , A et N sont cocycliques, c'est-à-dire appartiennent à un même cercle.

En déduire une construction de M ' connaissant M .

⑥ On considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1 , M est un point hors de (C) , H le point de contact de (C) avec une tangente à (C) menée de M , M ' le projeté orthogonal de H sur (O M).

Montrer que M ' = f (M)

En déduire une construction de M ' connaissant M , hors de (C) puis une construction de M ' connaissant M à l'intérieur de (C) .

⑦ Une droite (D) a pour équation ax + by + c = 0 , c ≠ 0 , (a , b) ≠ (0 , 0).

a) Si H est le projeté orthogonal de O sur (D), montrer que OH = $\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2+b^2}}$

En déduire OH ' si H ' = f (H)

b) Montrer que le cercle (C ') de diamètre [OH'] est l'image de (D) par f

En déduire l'image par f d'un cercle passant par O et privé de O.

⑧ Montrer que l'image par f d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

EXERCICE n° 1

Les différentes parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. L'année passée, l'étude détaillée des fûts coupés a permis de distinguer trois qualités de parcelles selon le bois produit :

- qualité supérieure : 85,38 % des parcelles ;
- qualité moyenne : 12,26 % des parcelles ;
- qualité inférieure : 2,36 % des parcelles.

Afin de proposer à sa clientèle des planches de meilleure qualité, une scierie a décidé de ne plus ramasser que des fûts de qualité supérieure. Un camion de ramassage, ne connaissant pas les résultats des analyses, fait sa tournée. On supposera que les parcelles sont indépendantes et on donnera les résultats arrondis à la quatrième décimale.

La question 3 peut être traitée indépendamment des questions 1 et 2.

❶ quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure:

① en se rendant dans une seule parcelle ?

② en se rendant dans cinq parcelles ?

❷ Si la tournée comprend 30 parcelles, quelle est la probabilité :

① de n'avoir ramassé que du bois de qualité supérieure ?

② d'avoir ramassé une et une seule fois du bois de qualité moyenne ou inférieure ?

③ d'avoir ramassé strictement plus d'une fois du bois de qualité moyenne ou inférieure ?

❸ Certains arbres sont atteints d'un parasite bénin. Les forestiers ont pu établir les faits suivants :

- 20 % des arbres sont atteints par le parasite,
- parmi les arbres coupés, 25 % sont atteints par le parasite.

On note p la proportion d'arbres coupés dans l'exploitation, A l'ensemble des arbres atteints par le parasite et B l'ensemble des arbres coupés.

① Calculer en fonction de p la probabilité π pour qu'un arbre non coupé soit parasité.

② Quelle est la plus petite valeur de p pour laquelle π est inférieure ou égale à 0,1 ?

③ A l'issue de la phase d'abattage du bois, la probabilité pour qu'une parcelle soit totalement débarrassée du parasite est égale à 1/3. L'ensemble de l'exploitation est constitué de 25 parcelles. Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'une parcelle à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins 20 parcelles sur les 25 à l'issue de la phase d'abattage ?

EXERCICE n° 2

On examine un lot de gousses de pois et on note pour chacune sa longueur en millimètres et le nombre de graines situées à l'intérieur. On obtient la série suivante :

Taille x_i (mm)	Nombre de graines y_i
71	4
54	1
82	7
84	11
74	6
91	7
82	7
53	4
75	8
56	2
69	3
70	7
78	7
72	7
80	8
52	5
83	6
74	9
82	6
87	6
47	3
78	7
52	7
70	2
45	4
41	2
49	1
81	8
75	7
65	5
54	2
64	5
85	6
75	6
53	9
68	6
67	6
82	9
88	3
75	7

❶ Dans un tableau, indiquer, pour chaque série, son amplitude, sa moyenne, son mode, sa médiane et son écart-type.

❷ Etablir un graphique utilisant deux axes et où chaque gousse soit représentée par un point de coordonnées (x_i, y_i).

❸ Quelle remarque peut-on faire en observant ce graphique ?

❹ Classer dans un tableau les gousses par taille de 5mm en 5mm et par nombre de graines, de 3 en 3 et donner l'effectif et la fréquence cumulée de chaque classe.

❺ Tracer la fonction de répartition des effectifs pour la série des tailles.

EXERCICE n° 3

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases},$$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard «La légende de demain», paru aux éditions Flammarion en octobre 1997. Il devra être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

✶✶✶

La planète bleue, les satellites nous la montrent, magnifique dans l'espace. Nous sommes en droit de l'admirer avec la satisfaction d'un propriétaire, elle est à nous. C'est notre propriété de famille. Personne ne viendra nous la disputer. Si l'on en croit la Bible, c'est le créateur qui nous l'a offerte. Elle est la Terre promise, promise aux hommes.

Longtemps nous l'avons crue immense, quasi illimitée, inépuisable, apte à nous procurer tout ce que nous exigions d'elle. Soudain, nous venons de comprendre qu'elle est petite. Certes, les scientifiques l'avaient mesurée, pesée, analysée ; ils avaient tout décrit d'elle, mais ils ne nous avaient pas fait comprendre l'essentiel : l'espace où restera confiné le destin de l'homme est limité. *Dans Regards sur le monde actuel*, Paul Valéry, dès 1945, nous a mis face à cette évidence : «Le temps du monte fini commence ». Oui, notre domaine est marqué par des limites infranchissables, nous ne le quitterons pas - du moins pas «demain».

Sans doute, parmi les milliards d'étoiles, nombreuses sont celles qui sont entourées de planètes ; et parmi ces planètes, nombreuses sont celles qui offrent un milieu semblable au nôtre. Pourquoi ne pas aller s'installer sur un de ses astres de rechange lorsque la Terre sera épuisée ? L'obstacle apparemment incontournable est la structure de l'espace-temps. Qui rend impossible tout déplacement plus rapide que la lumière. Or, il faut quatre années à cette lumière pour venir de la plus proche étoile , et cent mille années pour venir des étoiles les plus éloignées de la Voie Lactée. Même si l'éventuelle «Terre bis» n'était située qu'à quelques milliers d'année lumière, les reconnaissances préliminaires puis le transport de l'humanité poseraient des problèmes dont on imagine mal la solution. L'installation de l'humanité ailleurs que sur la Terre fait partie des utopies non réalisables, dans notre exploration des demain possibles, il est raisonnable d'admettre que nous sommes, sinon prisonniers, du moins pour longtemps assignés à résidence. Nos ancêtres, pour qui la planète abondait en *Terra Incognita*, pouvaient rêver d'un ailleurs quand leur environnement leur semblait déplaisant ; les hommes d'aujourd'hui n'ont plus d'ailleurs.

Ce constat n'est pas triste ; il définit les «conditions aux limites», comme disent les physiciens, permettent de rendre les projets d'avenir compatibles avec les contraintes imposées par la nature. Que pouvons-nous demander à la Terre ? Il nous fait connaître la réponse non seulement pour aujourd'hui et le futur proche, mais pour les générations plus lointaines. La solidarité entre les hommes ne doit pas s'arrêter à nos contemporains, elle doit s'étendre à tous nos descendants (...)

Face aux perspectives démographiques - huit milliards d'hommes dans vingt ans, sans doute neuf ou dix milliards avant la fin de XXIe siècle -, la question immédiate est la suivante : la Terre pourra-t-elle fournir aux hommes la nourriture dont ils ont besoin ? Par bonheur, la réponse est positive, mais au prix de grands changements dans nos habitudes.

La superficie consacrée aux productions alimentaires est de l'ordre de 1,5 milliards d'hectares, qui produisent en moyenne deux tonnes qu'équivalents céréales par hectare. Malgré l'avancée de la désertification dans certaines régions comme le Sahel, cette surface pourra être maintenue sans trop de difficultés et le rendement moyen pourra être accru par l'emploi de variétés plus productives, d'engrais et de méthodes de conservation des sols ; le maintien de l'alimentation des hommes au niveau d'aujourd'hui ne posera donc guère de problème, même si la population dépasse dix milliards d'individus. Mais ce niveau moyen n'a guère de signification, car l'accès à la nourriture est très différent suivant les régions, et bien inférieur au souhaitable dans de nombreux pays.

La consommation totale d'énergie végétale, aussi bien pour les semences, l'alimentation du bétail que pour la nourriture des humains, représente l'équivalent de 6 000 calories par jour et par personne en moyenne ; les écarts selon les Etats sont considérables : 3 000 calories pour les plus démunis, 15 000 pour les plus gaspilleurs. L'amélioration nécessaire des ressources alimentaires des premiers porteraient cette moyenne à environ 9 000 calories. Autrement dit, les dix milliards d'humains de demain consommeraient autant que si nous étions quinze milliards aujourd'hui. L'évolution des rendements ne permettra pas - ou difficilement - de faire face à de tels besoins ; des changements des habitudes alimentaires s'imposeront donc.

Manger de la viande, boire du lait, c'est indirectement consommer les céréales absorbées par les animaux d'élevage. Le poids total de ces derniers étant supérieur à celui de l'ensemble des humains, il sont donc leurs véritables concurrents dans l'accès à la nourriture produites par la Terre. Or, un niveau de vie meilleur s'accompagne d'un recours accru aux nourritures les plus coûteuses en équivalent céréale. La véritable solution des problèmes que posera l'alimentation réside donc moins dans une amélioration des rendements agricoles - souvent obtenus au détriment de la conservation des sols ou d'un gaspillage inconsidéré des ressources en eau - que dans une orientation nouvelle des normes de l'alimentation. Les Occidentaux devront s'habituer à consommer moins de viande - leur santé y trouvera son compte.

La satisfaction des besoins en nourriture se heurtera aussi à un double obstacle : l'utilisation croissante des surfaces arables pour des productions non vivrières. Mises devant l'obligation de rembourser leurs dettes envers les pays développés, les nations du tiers monde s'efforcent de produire des biens exportables au détriment parfois des ressources nécessaires à leur survie. Ainsi, au début des années 80, les pays du Sahel ont produit des quantités record de coton destinées à l'exportation alors que la famine sévissait, ce qui les a contraint à importer une quantité accrue de céréales. Le caractère fondamentalement immoral de ce mécanisme est manifeste si l'on songe que les cours mondiaux du coton s'effondraient à mesure que la production en augmentait, tandis que ceux des céréales montaient à mesure que la demande s'accroissait. Bel exemple d'un mécanisme libéral qui préserve en effet fort bien la liberté du renard dans le poulailler.

En fait, la nourriture de l'humanité pose moins un problème technique qu'un problème économique, donc politique. De même est politique la question posée par les ressources en eau. Lors de la campagne aux élections présidentielles de 1974, l'agronome René Dumont s'est rendu célèbre en montrant à la télévision un verre d'eau et en ajoutant : «Cette eau sera dans vingt ans une denrée rare». Bien peu l'ont pris au sérieux ? Mais aujourd'hui, selon lui, plus de deux milliards d'hommes ne disposent pas d'eau potable, et ce chiffre va toujours croissant. La nature, pourtant, n'est guère avare en ce domaine, mais l'eau qu'elle nous fournit à profusion est dilapidée, gaspillée, polluée sans égard pour sa prochaine rareté. Sa répartition sur la planète est modifiée par l'effet de serre, qui provoque sécheresse ici et inondations là ; or, cet effet est la conséquence des activités humaines, notamment l'utilisation inconsidérée des combustibles fossiles, en premier lieu le pétrole.

(...) Le constat que la Terre pourra nourrir les hommes, sans trop de difficultés, même si leur effectif atteint dix milliards, a conduit à mettre en doute la nécessité d'une limitation de la fécondité. En fait, la vraie question n'est pas «Combien la Terre peut-elle nourrir d'hommes ?» mais «Combien peut-elle supporter d'hommes ?». Ce qui implique de répondre d'abord à la question : «Quelle sorte d'hommes ?». Si ce sont des paysans traditionnels qui ne demandent à la Terre que leur nourriture, le maximum, dans les conditions actuelles, est supérieur à dix milliards. Si ce sont des occidentaux moyens aux exigences multiples en richesses non renouvelables, la réponse est fort différente. Sans doute un milliard serait-il déjà beaucoup trop.

Il est raisonnable de consommer le produit d'une récolte ; le prochain été en apportera une autre ; La Terre, régulièrement, renouvelle ce cadeau. Mais il est des cadeaux qu'elle ne renouvellera pas. Ainsi a-t-elle constitué, au cours de centaines de millions d'années, un trésor sous forme de pétrole, résultat d'une lente décomposition des cadavres d'une multitude de bactéries. Il nous est si précieux que nous avons cherché partout les endroits où il peut être enfoui ; nous en avons tant découvert qu'il reste aujourd'hui 150 milliards de tonnes de réserve prouvée. Nous sommes conscients que de nouvelles découvertes permettront d'accroître ce trésor, mais elles exigerons des moyens toujours plus coûteux. Le maximum réellement accessible ne dépasse sans doute pas 450 milliards de tonnes. Or, chaque année nous en brûlons 4,5 milliards de tonnes.

A ce rythme, si optimiste soit-on quant aux découvertes à venir, ce trésor sera presque dilapidé avant la fin du prochain siècle. Et peut-être avant, car les pays dont l'économie est en difficulté - c'est-à-dire presque tous - cherchent l'issue de leurs problèmes dans la «croissance», ce qui entraîne une augmentation de la consommation de pétrole, rapprochant l'échéance finale.

Un problème semblable se pose pour le gaz naturel et le charbon, de façon toutefois moins importante car les réserves sont immenses. Il se pose aussi pour les richesses renouvelables dont le rythme de production est plus lent que le rythme de consommation, par exemple les forêts ou les nappes phréatiques profondes. Dans les déserts des Etats-Unis, d'Arabie ou de Libye, des oasis ont été crées en pompant dans ces nappes ; mais celles-ci seront épuisées dans quelques générations. Nos petits-enfants regarderont avec une certaine rancoeur ces lieux que leurs ancêtres ont rendus provisoirement verdoyants pour leur profit ; ils les contempleront avec la même tristesse que nous quand nous regardons l'emplacement de la mer d'Aral aujourd'hui disparue.

Si nous poursuivons dans l'absurde direction que nous avons baptisé «croissance», dans quelques centaines d'années, c'est-à-dire très bientôt, nous vivrons dans un jardin qui n'aura plus rien d'édénique tant nous l'aurons ravagé. Est-ce digne d'une espèce supposée raisonnable ?

Pour préparer demain, il ne suffit pas de constater le résultat des erreurs commises, il faut essayer d'en préciser les causes. Pour le gaspillage des ressources, c'est le respect abusif de la propriété qui a mené dans une impasse. Tant que la Terre était considérée comme illimitée, il était normal, pour celui qui avait défriché et ensemencé un terrain, de s'approprier ses récoltes, puis le terrain lui-même, enfin les richesses qu'il recelait. Les autres hommes pouvaient trouver un équivalent ailleurs ; ils n'étaient pas spoliés. Aujourd'hui que nous ne disposons plus d'un ailleurs, cette attitude est devenue déraisonnable. Toute appropriation, qu'elle soit individuelle ou collective, d'une richesse limitée offerte aux hommes par la nature est nécessairement un vol. La seule collectivité qui puisse à bon droit s'en déclarer propriétaire est l'ensemble de l'humanité.

A la question «A qui appartient tel gisement de pétrole ?» notre société a répondu, sans réfléchir, comme s'il s'agissait d'un champ labouré ou d'un pâturage figurant au patrimoine d'un paysan. L'émir du Koweït ou celui du Brunei se sont ainsi trouvés à la tête d'une fortune colossale, donc d'un pouvoir exorbitant, sans avoir eu d'autre peine que de naître au-dessus de quelques milliards de barils. La seule réponse sensée est : «Chaque gisement appartient à tous les hommes, non seulement à ceux d'aujourd'hui, mais à ceux de toutes les générations à venir». Autrement dit, le pétrole, comme toutes les richesses non renouvelables ou trop lentement renouvelables offertes par la planète, doit être considéré comme patrimoine commun de l'humanité.

Ce concept a été forgé par l'Unesco à propos des richesses culturelles offertes par les hommes aux hommes. Le temple de Borobudur, la cathédrale d'Amiens, la ville de Venise n'appartiennent plus à des églises ou à des Etats, qui en ont été, avec leur accord, dépossédés. Cette renonciation à l'appropriation a été étendue à tous les objets extérieurs à la planète : ni la lune ni un astéroïde ne peut être accaparé par une nation qui y planterait son drapeau. De même, le danger d'une détérioration du continent antarctique a conduit les vingt-six pays qui s'y étaient implantés à renoncer, en 1957 puis en 1991, à différer leurs revendications territoriales et à n'y exercer que des activités pacifiques. L'Antarctique commence à être considéré comme un patrimoine commun.

Ce ne sont là que les premiers pas dans la seule direction compatible avec les limites de la planète. Ils sont encourageants, mais n'ont été accomplis qu'en raison de leur bien faible impact économique. Les pas suivants seront autrement difficiles, lorsqu'il sera proposé, par exemple, de déclarer le pétrole patrimoine commun de l'humanité. Pourtant, l'urgence est grande.

Pour préparer un demain vivable tout en sauvegardant après-demain, trois objectifs doivent être simultanément poursuivis : ne pas épuiser les ressources énergétiques de la planète ; produire de l'énergie sans détériorer le climat ; réduire les écarts entre les nations dans l'accès à l'énergie.

Il est clair que le «laisser faire» cher aux néolibéraux ne permettra d'atteindre aucun de ces objectifs. Il ne peut aboutir qu'à une concurrence exacerbée et à une fuite en avant accélérée qui précipitera la catastrophe. Le scénario d'un tel «laisser faire» a été étudié par le Conseil mondial de l'énergie. Il a fait l'hypothèse que les pays les plus riches (l'Amérique du Nord et l'Europe) poursuivaient leur croissance à un rythme un peu inférieur à 2% par an et que le rapport des niveaux de vie entre eux et les plus pauvres (l'Inde et l'Afrique), ne seraient plus, en 2060 que de 5 à 1 contre 20 à 1 aujourd'hui. L'égalité serait donc encore loin d'être réalisée. Pour nourrir cette croissance et parvenir à ce début de rattrapage, il aurait fallu épuiser les réserves de pétrole, réduire de trois-quarts celles du gaz et doubler la teneur en CO2 de l'atmosphère, ce qui aurait eu de graves effets sur le climat. Nous serions loin d'une gestion «en bon père de famille» de notre propriété.

Une autre attitude s'impose ; un autre scénario est possible. Il tire les conséquences d'une évidence : la source d'énergie la plus importante réside dans l'économie d'énergie. Une politique volontariste qui s'efforcerait d'exploiter au mieux cette source pourrait aboutir à une humanité de l'an 2060 bien différente de celle du «laisser faire». Le scénario alternatif admet que la consommation d'énergie des Américains, loin de progresser, serait divisée par 3, celle des Européens par 2, tandis que celle des Africains et des Asiatiques serait multipliée par plus de 2 ; les écarts seraient donc véritablement réduits. La conséquence serait une augmentation de seulement 20% de la teneur en CO2, ce qui n'irait pas sans inconvénients, mais resterait acceptable. L'équilibre de notre planète serait durablement préservé.

Une telle évolution n'est nullement utopique. Elle suppose des mesures législatives et fiscales ayant pour effet de restreindre les transports routiers, d'améliorer l'isolation de l'habitat, d'accroître le recours aux énergies renouvelables, d'orienter les procédés de fabrication vers ceux qui sont les moins coûteux en énergie. Ce sont là des réponses technologiques. Leur apport sera précieux, mais il sera, à coup sûr, insuffisant; c'est une nouvelle finalité donnée à nos sociétés qui s'impose.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ ① $p_{1a} = 0{,}8538$.

② $p_{1b} = (0{,}8538)^5 = 0{,}4537$.

❷ ① $p_{2a} = (0{,}8538)^{30} = 8{,}723 \cdot 10^{-3}$.

② $p_{2b} = 30 \times (0{,}8538)^{29} \times (0{,}1226 + 0{,}0236) = 4{,}481 \cdot 10^{-2}$.

③ $p_{2c} = 1 - (p_{2a} + p_{2b}) = 0{,}9465$.

❸ ① $\pi = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0{,}2 - 0{,}25 \times p}{1 - p}$.

② $\pi \leq 0{,}1 \Leftrightarrow p \geq \dfrac{2}{3}$ donc $p = 0{,}6667$.

③ La probabilité cherchée est la somme des probabilités d'avoir décontaminé 20, 21, 22, 23, 24 ou 25 parcelles, soit :

$$p_{3c} = \mathbf{C}_{25}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} + \mathbf{C}_{25}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\left(\frac{2}{3}\right)^{4} + \mathbf{C}_{25}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{22}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \mathbf{C}_{25}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{23}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \mathbf{C}_{25}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{24}\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{25}$$

$$= 2{,}269 . 10^{-6}$$

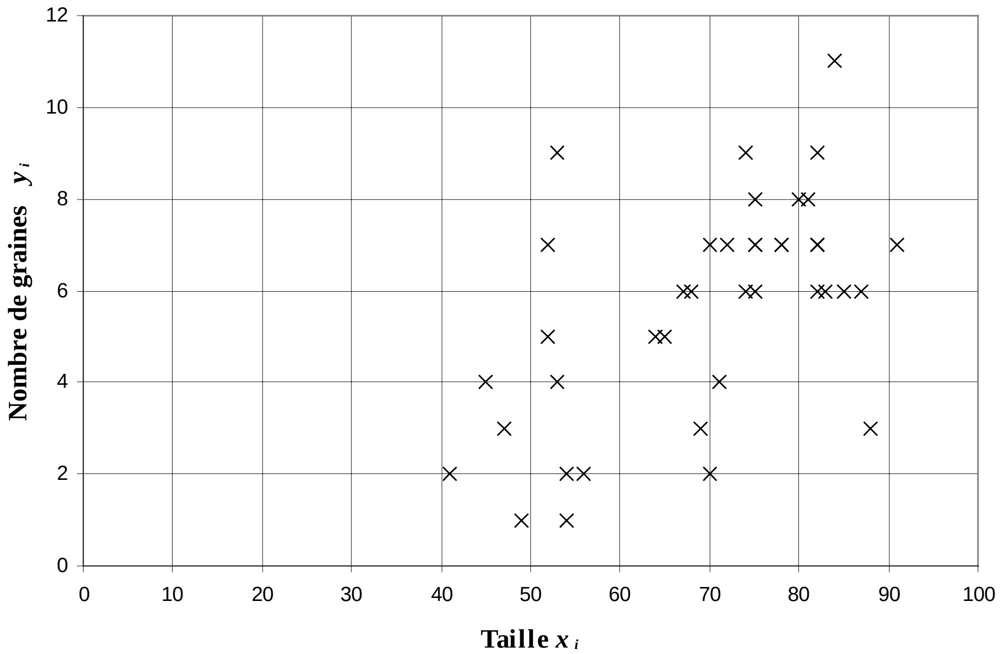
EXERCICE n° 2

❶

	Taille	Nombre de graines
Minimum	41	1
Maximum	91	11
Moyenne	69,58	5,65
Mode	82	7
Médiane	73	6
Ecart type	13,53	2,40

❷

Nombre de graines en fonction de la taille



❸ On remarque que le nombre de graines semble proportionnel à la taille des gousses, mais ce lien n'est pas déterministe, comme en témoigne la dispersion des points du graphique.

❹

Taille des gousses

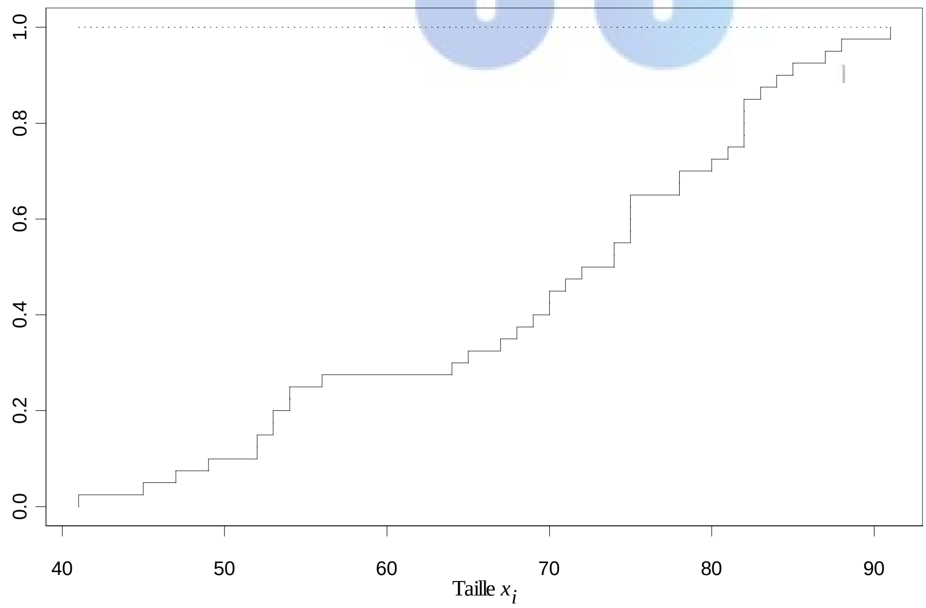
Classes	Fréquence	% cumulé
45	2	5,0%
50	2	10,0%
55	6	25,0%
60	1	27,5%
65	2	32,5%
70	5	45,0%
75	8	65,0%
80	3	72,5%
85	8	92,5%
90	2	97,5%
95	1	100%

Nombre de graines

Classes	Fréquence	% cumulé
3	9	22,5%
6	14	57,5%
9	16	97,5%
12	1	100%

❺

Fonction de répartition empirique



EXERCICE n° 3

Le système est symétrique en x et y : si (x,y) est solution alors (y,x) est solution.

On pose $P = xy$ et $S = x + y$.

On est ramené au système :

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 208 \\ P = 96 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} S = 20 \\ P = 96 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = -20 \\ P = 96 \end{cases}.$$

On doit donc résoudre deux équations du second degré :

$$X^2 - 20X + 96 = 0 \text{ et } X^2 + 20X + 96 = 0 .$$

La première admet comme racines 8 et 12, la seconde -8 et -12.

Le système a donc comme ensemble de solutions :

$$\{(8,12);(12,8);(-8,-12);(-12,-8)\} .$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de τ est $\tau^{'}(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$. La fonction τ est donc décroissante de -1 à $+\infty$. La dérivée de ϕ est $\phi^{'}(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et la fonction ϕ est croissante de -1 à 0.

❷ La fonction ϕ étant croissante, on a $I_{k+1} \subset I_k$ et comme τ est décroissante, $J_{k+1} \subset J_k$.

❸ La résolution de l'inéquation $x^2 + 2kx + 1 > 0$, montre que le domaine de définition de f_k est $I_k \cup J_k$. On en déduit que le domaine de définition de f est $I_n \cup J_n$

❹ $\underset{x \to +\infty}{Lim}(f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}) = k$ et $\underset{x \to +\infty}{Lim} f(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE n° 2

❶ Le domaine de définition de f est l'intervalle $[2, +\infty[$

❷ On trouve $f^2(x) = 2\left((x-1) + |x-3|\right)$ et $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 2 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{x} - 2 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$

❸ Les coulpes d'entiers naturels qui vérifient $y = f(x)$ sont (2,2) et (3,2)

❹ Comme la fonction f est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de g par rapport à la première bissectrice. On obtient $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

PROBLEME

❶ Les tableaux de variation des fonctions $x - \sin x$ et $\sin x - \frac{2x}{\pi}$ permettent de vérifier la première inégalité. Il en est de même pour la deuxième.

❷ Le domaine de définition de g est l'ensemble des nombres réels non entiers. La dérivée de g est $g'(x) = 2(1 + \frac{1}{\sin^2 \pi x})$. La fonction g est strictement monotone sur chaque intervalle de la forme $]n, n+1[$. Il existe donc une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur chacun de ces intervalles.

Soit $\beta_n = \alpha_n - n$, on a : $g(\beta_{n+1}) = -2(n+1) < g(\beta_n)$ et comme g est strictement croissante, $\beta_{n+1} < \beta_n$. On vérifie aisément que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. La suite (β_n) est décroissante minorée, donc elle converge vers une limite l.

Supposons que la limite l. On a $g(n + \beta_n) \geq 2(n+1) + 2\beta_n - \frac{1}{2\beta_n}$ et cette dernière expression est négative (car $g(\alpha_n) < 0$). On en déduit une impossibilité par passage à la limite, donc $l = 0$.

❸ La dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{\pi \sin x}{4} g(x)$. Si n est pair, la fonction f est décroissante sur $[n, \alpha_n]$ et croissante sur $[\alpha_n, n+1]$. Pour n impair, la variation est en sens contraire.

En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$, on vérifie l'inégalité proposée.

Le graphe de la fonction f est compris entre les droites $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$v_n = \int_{n+1/4}^{n+1/2} h(x)\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{n+1/4}^{n+1/2}(2x+1)\sin \pi x\,dx - \frac{1}{2}\int_{n+1/4}^{n+1/2}\cos \pi x\,dx$$

On calcule alors chacune des deux intégrales précédentes

La première se calcule par intégration par parties et on obtient : $\frac{1}{4}(2n+\frac{3}{2})(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}$

La deuxième se calcule de la même façon pour obtenir : $\frac{(-1)^n}{2\pi}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

On obtient alors le résultat demandé.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

Exercice 1

Notons x y et z les trois chiffres qui composent un nombre entier $< 10^p$

Ce nombre s'écrit $N = 10^2x + 10y+z < 10^p$ et x, y et z vérifient $x+y+z=3$. Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il faut que $x\leq3$, $y\leq3$ et $z\leq3$. Discutons suivant la valeur de p l'ensemble des solutions S des entiers N.

a) si p=0, $10^p=1$ et il n'existe d'entier inférieur à 1 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3, donc $S_0=\varnothing$.

b) Si p=1, 3=003 est le seul entier inférieur à 10 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3 :

$S_1=\{3\}$.

c) Si p=2, pour que N<100, il faut que x=0 et donc y+z=3. D'où

$S_2=\{30,21,12,03\}$.

d) Enfin si $p\geq2$, x, y et z vérifient :

$100x+10y+z<10^p$ et $x+y+z=3$.

En faisant varier x, puis y puis z de 0 à 3, on trouve :

$S_p=\{310, 300, 120, 111, 102, 30, 21, 12, 3\}$.

Exercice 2

Le nombre N de nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 est égal au nombre d'arrangements de 4 chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} : il y a 6 façons de choisir le premier. Une fois celui-ci choisi, il y a 5 façons de choisir le second, etc. Donc $N = 6x5x4x3 = A_6^4 = 6! / (6-4)!=360$

Pour calculer leur somme S, notons x, y, z, t les quatre chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} formant le nombre, x désignant le millier, y la centaine, z la dizaine et t l'unité. On peut donc écrire :

$$m = 1000x+100y+10z+t$$

Donc leur somme s'écrit :

$$S = \sum 1000x+100y+10z+t$$

Dans cette sommation, chaque chiffre x, y, z et t varient de 1 à 6 et il faut compter le nombre de fois où chaque chiffre figure dans les nombres en question. Or pour x donné (par exemple 6 pour fixer les idées), il y a $A_5^3 = 5! / (5-3)!=60$ façon d'arranger les trois chiffres y, z et t pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5}. On peut donc écrire S sous la forme :

$$S = 60(1000 \sum_1^6 x + 100 \sum_1^6 y +10 \sum_1^6 z + \sum_1^6 t)$$

$$= 60(1000+100+10+1)(1+2+3+4+5+6)$$

$$= 60*1111*21=1\ 399\ 860$$

La décomposition de S en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$S =60 \text{ x } 21 \text{ x } 1111 = 5 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 = 5 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3^2$$

PROBLEME

1)

1.1) On a :

$z\,\overline{z}' = (x + iy)(x' - iy') = xx' + yy' + i(x'y - x\,y')$

$\overline{z}\,z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$

et on vérifie que $z\,\overline{z}' + \overline{z}\,z' = 2(xx' + yy')$ et $z\,\overline{z}' - \overline{z}\,z' = 2\,i(x'y - x\,y')$. D'où les résultats.

1.2) De même, comme $\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z = 2(ax + by)$ on a :

$M(x,y) \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z + 2c = 0.$

1.3) $M(x,y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$

qui est l'équation du cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $a^2 + b^2 - c$ (qui est > 0 par hypothèse). Donc :

$M(z) \in C \Leftrightarrow |z-\alpha|^2 = |\alpha|^2 - c \Leftrightarrow |z|^2 - (\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z) + c = 0$ (en développant $|z-\alpha|^2$).

2)

2.1) $M(z)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow 1/\overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ et d'après 1.3) on reconnaît le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Comme $f(z') = f(1/\overline{z}) = z$, l'image de $M'(z')$ est $M(z)$, c'est à dire $f \circ f$ est la fonction identité.

2.2) D'après 1.1),

$\text{dét}(OM, OM') = (z\,\overline{z}' - \overline{z}\,z')/2i = z / z - \overline{z} / \overline{z} = 0,$

donc OM et OM' sont colinéaires et comme leur produit scalaire est égal à

$z\,\overline{z}' + \overline{z}\,z' = z / z + \overline{z} / \overline{z} = 2 > 0,$

ils sont de même sens. De plus,

$OM.OM' = |z|/|\overline{z}| = 1$ car $|z| = |\overline{z}|$.

2.3.a) Γ étant le cercle de centre A(-1), d'après 1.3) :

$$M(z) \in \Gamma^* \Leftrightarrow |z+1|^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \overline{z} = 0.$$

D'après 2.2) :

$$OM' = 1/OM = 1/|\overline{z}| \text{ et } AM'^2 = |1+1/\overline{z}|^2 = |1+\overline{z}|^2/|z|^2 \text{ car } |z| = |\overline{z}|.$$

On en déduit que :

$$AM'^2 - OM'^2 = (|1+\overline{z}|^2 - 1)/|z|^2 = (1 + z + \overline{z} + |z|^2 - 1)/|z|^2 = (z + \overline{z} + |z|^2)/|z|^2 = 0$$

car $M(z) \in \Gamma^*$ donc $|z|^2 + z + \overline{z} = 0$.

2.3.b) D'après la question précédente, l'image M' est par f est le point d'intersection du segment OM et de la médiatrice du segment OA.

2.3.c) Comme f o f = Id, f est bijective. D'après 2.3.b) l'image du cercle Γ^* est la médiatrice du segment [OA]. Donc si $M \in [IJ]$, $\exists M' \in \Gamma^*$ tel que f(M') = M et donc f(M) = f o f(M')=M'. Donc l'image du segment [I J] par f est le grand arc IJ du cercle Γ^*. L'image par f du petit arc IJ est donc le complémentaire du segment [I J].

2.4) Soit Δ une droite passant par O et $M \in \Delta^* = \Delta - \{O\}$ et M' son image par f. D 'après la question 2.2), les vecteurs OM et OM' sont colinéaires et de même sens, donc $M' \in \Delta^*$ et Δ^* est invariant par f, c'est à dire $f(\Delta^*) = \Delta^*$.

2.5) On vérifie par un calcul fastidieux que le point M'image de M par f appartient au cercle qui passe par les points A, B et N. L'origine de ce cercle est sur Oy.

Pour construire l'image M' de M par f, on construit le point N symétrique de M(z) par rapport à Ox qui a pour affixe $\overline{z}$, puis on trace le cercle passant par A(-1) B(1) et N($\overline{z}$), l'image M' de M est le point d'intersection de ce cercle avec le segment OM.

2.6) Par construction, les points O, M et M' sont sur une même droite. Pour montrer que $M'=f(M)$, il suffit de montrer que $OM.OM'= 1$.

- Comme H est le point de tangence au cercle C à partir de M, le triangle OHM est rectangle en H, et d'après Pythagore :

  $OM^2 = OH^2+HM^2$, soit $|z|^2 = 1+ HM^2$, car OH est rayon du cercle C donc $OH=1$

- Comme M' est la projection de H sur OM, les triangles OM'H et HM'M sont rectangles en M', et 'après Pythagore :

  $OH^2=OM'^2+HM'^2$, soit $1= OM'^2+HM'^2$ et

  $HM^2=MM'^2+HM'^2$

En utilisant ces 3 relations, on calcule OM'^2 :

$$OM'^2 = 1- HM'^2 = 1- (HM^2-MM'^2)$$
$$= 1 - (|z|^2 - 1-MM'^2) = 2- |z|^2 - (OM-OM')^2$$
$$= 2- |z|^2 - OM^2- OM'^2+ 2OM.OM'$$

et comme $OM^2 =|z|^2$, on en déduit :

$$2- 2OM.OM' = 0 \text{ soit } OM.OM' = 1$$

donc $f(M)=M'$.

Pour construire $M' = f(M)$ lorsque M est hors de (C), on trace la tangente à (C) passant par M : l'image de M est la projection orthogonale sur OM du point de tangence H au cercle. M' est alors à l'intérieur de (C).

Comme $f \circ f = Id$, f est bijective : si M est à l'intérieur de (C), M est l'image d'un point M' à l'extérieur de C, donc on peut construire M par une démarche inverse : on construit la droite passant par M et orthogonal à OM . Si H est le point d'intersection de cette droite et du cercle C, on trace la tangente à C en H et le point M' image de M est l'intersection de cette tangente et de la droite OM.

2.7.a) Le vecteur orthogonal à la droite (D) a pour composante (a, b). C'est aussi le vecteur directeur de la droite orthogonal à (D) et passant par O qui a pour équation : bx –ay=0. Le point d'intersection H(m,n) de ces 2 droites vérifie donc :

am+bn+c=0 et bm-an=0,

d'où :

$m=-ac/(a^2+b^2)$ et $n=-bc/(a^2+b^2)$.

On en déduit

$OH^2 = [a^2c^2+b^2c^2]/((a^2+b^2)^2$, soit $OH=[c^2/(a^2+b^2)]^{1/2}$.

D'après 2.2), si H'=f(H) alors OH.OH'=1, d'où $OH'=1/OH=[(a^2+b^2)/c^2]^{1/2}$.

2.7.b) Soit $M\in D$ et M'=f(M). Comme C' est de diamètre OH', on a :

$M' \in C' \Leftrightarrow$ les vecteurs OM' et M'H' sont orthogonaux.

Or H'=f(H) a pour affixe $1/(m-in) = (a^2+b^2)(m+in)/c^2 = (-a-ib)/c$ (en remplaçant m et n par leurs valeurs ci-dessus).

Posons $\alpha = a+ib$. H' a pour affixe $-\alpha/c$ et donc le vecteur M'H' a pour affixe $1/\bar{z} + \alpha/c$. Donc le produit scalaire des vecteurs OM' et M'H' est, d'après 1.1), égal à :

$p = (1/\bar{z} + \alpha/c)/(1/z) + (1/z + \bar{\alpha}/c)(1/\bar{z})$

$= 2/|z|^2 + (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha} z)/(c|z|^2)$

Or M et M' appartiennent à D donc $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha} z + 2c = 0$. D'où

$p = 2/|z|^2-2/|z|^2 = 0$

et donc OM' et M'H' sont orthogonaux, c'est à dire $M'\in C'$.

On en déduit que l'image par f d'un cercle passant par O est la droite D orthogonale au diamètre OH' du cercle et qui passe par le point H tel que OH.OH' = 1.

2.8) C est un cercle qui ne passe pas par O $\Leftrightarrow$ C a pour équation $|z|^2 - (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha} z) + c = 0$ avec $c\neq 0$. Soit M'(z') l'image de $M(z)\in C$, on a $z' = 1/\bar{z}$ donc $z = 1/\bar{z}'$. En remplaçant z par $1/\bar{z}'$ dans l'équation du cercle, on obtient :

$1/|z'|^2 - (\alpha/z + \bar{\alpha}/\bar{z}) + c = 0 \Leftrightarrow |z'|^2 - (\alpha\bar{z}' + \bar{\alpha} z') + 1/c = 0$

qui est l'équation d'un cercle qui ne passe pas par O car $1/c \neq 0$

SESSION D'AVRIL 2000

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE n° 1

Soit f la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls (R^*) par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

❶ Montrer qu'il existe une fonction numérique continue φ définie sur R et telle que : $\forall x \in R^*, \quad \varphi(x) = f(x)$.

❷ Etudier le sens des variations de φ .

❸ Représenter graphiquement la fonction φ .

❹ Soit g la fonction définie sur R par :

$$g(x) = \frac{1}{x} Ln(\frac{e^x - 1}{x})$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

- Déterminer l'ensemble de définition de g
- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xg(x)}{\varphi(x)-1}$

EXERCICE n° 2

Soit E l'espace des applications numériques continues définies sur R et de période 2π. On note E_p le sous-ensemble de E des applications paires et E_i celui des applications impaires.

❶ Montrer que E est un espace vectoriel réel.

❷ Montrer que $E_p \cap E_i = \{0\}$

❸ Démontrer que les 3 applications f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(t) = \cos t, \quad f_2(t) = \cos 2t, \quad f_3(t) = \cos 3t$$

sont linéairement indépendantes dans E.

❹ Soient g_1, g_2 et g_3 les applications définies par :

$$g_1(t) = \sin t, \quad g_2(t) = \sin 2t, \quad g_3(t) = \sin 3t$$

Donner une base de l'espace vectoriel F engendré par les 6 fonctions $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$

❺ Soit D l'application qui à toute fonction de F fait correspondre sa dérivée. Montrer que D est une application linéaire de F dans F. Déterminer son noyau et son image.

EXERCICE n° 3

❶ Déterminer tous les triplets de nombres réels (a_{-1}, a_0, a_1) qui vérifient les deux équations suivantes :

$$(i) \quad \sum_{k=-1}^{1} a_k = 1, \qquad (ii) \quad \sum_{k=-1}^{1} k a_k = 0$$

❷ Soit X_t une suite de nombres réels, où t est un entier relatif. On considère M_3 l'application qui à X_t fait correspondre $M_3X_t = \sum_{k=-1}^{1} a_k X_{t+k}$, où le triplet (a_{-1}, a_0, a_1) vérifie la condition (i) de la question précédente. Montrer que M_3 est une application linéaire.

❸ Soit f_t la suite définie par $f_t = at + b$, où t est un entier relatif et (a,b) un couple de nombres réels. Calculer $M_3 f_t$.

- Soit g_t la suite définie par $g_t = \cos \omega t$, où t est un entier relatif et ω un nombre réel. Pour quelles valeurs de ω a-t-on $M_3 g_t = g_t$?
- En déduire $M_3(f_t + g_t)$.

❹ Dans cette question uniquement, on pose $a_{-1} = a_0 = a_1 = \frac{1}{3}$. Pour quelles valeurs de ω a-t-on $M_3 g_t = 0$?

❺ Déterminer le triplet (a_{-1}, a_0, a_1) qui minimise l'expression $\sum_{k=-1}^{1} a_k^2$ et qui vérifie la condition (i) de la première question.

- Déterminer le quadruplet (a_{-1}, a_0, a_1, a_2) qui minimise l'expression $\sum_{k=-1}^{2} a_k^2$ et qui vérifie les 3 conditions suivantes :

$$\sum_{k=-1}^{2} a_k = 1, \quad \sum_{k=-1}^{2} k a_k = 0, \quad \sum_{k=-1}^{2} k^2 a_k = 0$$

- On appelle M_4 l'application associée au quadruplet précédent. Calculer $M_4 h_t$, où $h_t = at^2 + bt + c$, avec t entier relatif.

EXERCICE n° 4

Dans le plan R^2, on considère H l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et G la rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

❶ Pour tout couple $(x, y) \in R^2$, expliciter $H(x, y)$ et $G(x, y)$.

❷ Soit f la composée de H et de G, à savoir $f = HoG$. Déterminer $f(x, y)$.

❸ Montrer que f est bijective.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{xLnx}{(x^2+1)^2}$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Déterminer l'ensemble de définition E de f.

❷ Calculer la dérivée f' de f.

- Montrer que la recherche des réels $x \in E$ tels que $f'(x) = 0$ se ramène à la recherche des points d'intersection de la courbe représentative (Γ_1) de la fonction Ln et de la courbe représentative (Γ_2) d'une fonction rationnelle g, que l'on déterminera.
- Tracer sur le même graphique les courbes (Γ_1) et (Γ_2).
- Démontrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 de E qui annulent la dérivée de f.
- Donner un encadrement à 10^{-1} près de chacun des réels x_1 et x_2.

❸ Déterminer le sens de variation de f.

- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$
- Tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction f. On précisera les ordonnées des points de (Γ) d'abscisse 1, 2, 3 et 4.

❹ Trouver une primitive de la fonction f.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

«Par quels critères peut-on distinguer une oeuvre d'art d'un objet quelconque ?».

SUJET N° 2

«Est-il facile de penser librement ?».

SUJET N° 3

«La certitude d'avoir raison est-elle un indice suffisant de vérité ?» (baccalauréat 1994).

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$$

où z désigne une variable complexe.

❶ Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée *a* et une solution imaginaire pure notée *b* que l'on déterminera.

❷ Déterminer le complexe *c* tel que $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$.

❸ On désigne par A, B et C les points du plan complexe dont les affixes sont respectivement *a, b* et *c*. Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ et en déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE N° 2

Un candidat à un examen doit répondre à un questionnaire comprenant dix questions **indépendantes**. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Le candidat doit cocher la réponse qu'il juge bonne.

Dans tout l'exercice, on suppose qu'un **candidat répond au hasard à toutes les questions**.

❶ Calculer la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question.

❷ Quelle est la probabilité pour qu'il donne les réponses exactes aux 10 questions?

❸ Pour tout entier *k* compris entre 0 et 10, donner, en fonction de *k* la probabilité P_k pour qu'il donne les réponses justes à *k* questions exactement.

❹ Donner les valeurs numériques des probabilités P_k pour les entiers k de 0 à 4 à 10^{-4} près.

❺Soit *k* le nombre de réponses exactes données par le candidat. Si $k \leq 4$, le candidat se voit attribuer la note 0. Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la note 0.

Problème

<u>Partie I</u>

Soit ***E*** l'ensemble des matrices carrées de la forme:

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels. On pose $I = M(0,1)$ et $J = M(1,0)$.

❶ Montrer que ***E*** est un sous-espace vectoriel de base (*I, J*) de l'espace vectoriel réel des matrices 2 x 2.

❷ Calculer J^2. En déduire que si *M*∈ ***E***, *M'*∈ ***E*** alors *M* x *M'*∈ ***E***. Montrer que (***E,*** +, x) est un anneau commutatif unitaire.

❸ Quelles sont les matrices *M(a, b)* inversibles dans ***E*** ? Exprimer alors $(M(a,b))^{-1}$ dans la base (*I, J*).

Partie II

Dans ce qui suit on suppose b = 0.

Soit ***V*** un plan vectoriel euclidien de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}$).

Soit ***P*** un plan affine d'espace vectoriel associé ***V,*** rapporté au repère orthonormé (*O*, $\vec{i}, \vec{j}$).

Soit f_a l'application de ***P*** dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans ($\vec{i}, \vec{j}$)

$$M(a,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

et qui au point *O* fait correspondre le point *O'* (0, *a*+3).

❶ Déterminer les coordonnées *(x', y')* de l'image par f_a d'un point de coordonnées *(x, y)*.

❷ Pour quelles valeurs de *a*, f_a est-elle une bijection? Déterminer analytiquement, quand elle existe, f_a^{-1}.

❸ Déterminer suivant les valeurs de *a* l'ensemble *D* des points invariants par f_a.

❹ Pour quelle valeur de *a* l'application $f_a \circ f_a$ est égale à l'application identité de ***P***.

Partie III

Soit (*C*) la courbe représentative dans le repère (*O*, $\vec{i}, \vec{j}$) de la fonction numérique *g* définie pour tout réel strictement positif par:

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

❶ On considère la fonction *h* de R_+^* dans R définie par :

$$h(x) = x^2 - 2\ln x + 2$$

3

Etudier les variations de *h* et préciser le signe de *h(x)*. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de *h*). R désigne l'ensemble des nombres réels.

❷ Etudier les variations de la fonction *g*. Montrer que la courbe (*C*) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que (*C*) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe (*C*).

❸ Soit (C_1) la transformée de (*C*) par l'application f_1 définie dans la partie II pour *a* = 1.

a) Ecrire une équation de (C_1). On appelle g_1 la fonction ainsi définie.

b) Montrer que (*C*) et (C_1) ont les mêmes droites asymptotes.

Tracer (C_1) dans le repère (*O*, $\vec{i}, \vec{j}$) que (*C*) sans étudier g_1.

❹ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation x = 1, la droite d'équation

x = m (m > 1) et les courbes (*C*) et (C_1).

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère un dé tétraédrique régulier dont les quatre faces sont numérotées de 0 à 3. Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros des 3 faces visibles du dé.

❶

a. Faire le tableau **T1** croisant les valeurs de la variable X et les probabilités de X correspondantes.
b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X, et la variance V(X) de X.
c. Tracer la fonction de répartition de X.

❷ On jette le dé cinq fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement "X=0"?

❸ Soit n un entier strictement positif. Déterminer n_0 le nombre minimal de lancers du dé, tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement "X=0" dépasse 0.99999.

EXERCICE n° 2

On cherche à approcher numériquement l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}dx, \quad n \in IN.$

❶ Premier encadrement.

a. Calculer I_0 .
b. Montrer que $(I_n)_{n \in IN}$ est une suite décroissante.
c. Montrer que pour tout n ∈ IN,

$$\frac{1}{11\,(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10\,(n+1)}.$$

❷ Deuxième encadrement.

a. Montrer que

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b. Etablir pour tout n > 0 une relation de récurrence exprimant I_n en fonction de I_{n-1}.
c. Déduire des questions 2.a et 2.b que pour tout n ∈ IN,

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$

❸ On fait l'approximation

$$I_n \approx \frac{1}{11\,(n+1)}.$$

Soit Δ_n l'erreur absolue définie par

$$\Delta_n = \beta(n) - \frac{1}{11\,(n+1)},$$

où β(n) est la borne supérieure dans l'encadrement de I_n. Soit ξ_n, l'erreur relative définie par

$$\xi_n = \frac{\Delta_n}{I_n}.$$

a. Calculer pour l'encadrement de chacune des questions 1 et 2 l'erreur absolue.

b. On pose n=36 . Donner la valeur approchée de I_{36} ; pour chacun des encadrements, calculer l'erreur relative lorsqu'on fait une approximation de I_{36}.

EXERCICE n° 3

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) pour tout n $\in$IN, sont **adjacentes** si et seulement si :

- a_n est inférieur ou égal à b_n pour tout n $\in$IN
- (a_n) est une suite croissante
- (b_n) est une suite décroissante
- et la suite $(b_n - a_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies comme suit sont adjacentes :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\ b_n}, \quad a_0 = a; \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_0 = b, \qquad avec \quad 0 < a < b.$$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre intitulé «Le Sentiment même de soi , ***corps, émotions, conscience»*** **d'Antonio R.Damasio, paru aux éditions Odile Jacob en octobre 1999. Il peut être résumé en 250 mots, plus ou moins 10 %.**

✶✶✶

Les émotions et les sentiments d'émotions sont respectivement le début et le terme d'une progression, mais le caractère relativement public des émotions et l'aspect complètement privé des sentiments qui en découlent montrent bien que les mécanismes situés tout au long de ce continu sont extrêmement différents. Il est utile de respecter une distinction entre émotion et sentiment, si nous voulons enquêter à fond sur ces mécanismes. J'ai proposé de réserver le terme de *sentiment* à l'expérience mentale et privée d'une émotion, et d'utiliser au contraire le terme d'émotion pour désigner l'ensemble de réponses qui, pour bon nombre d'entre elles, sont publiquement observables. En termes pratiques, cela veut dire que l'on ne peut observer un sentiment chez quelqu'un d'autre, même si l'on peut observer un sentiment chez soi lorsque, en tant qu'être conscient, on perçoit ses propres états émotionnels. Pareillement, personne ne peut observer ses propres sentiments, mais certains aspects des émotions qui donnent lieu à vos propres sentiments, d'autres que vous pourront manifestement les observer. En outre, à titre d'exemple, les mécanismes fondamentaux qui sous-tendent l'émotion ne nécessitent pas la conscience, même s'ils finissent par y avoir recours : on peut être à l'origine des processus en cascade qui conduisent à une manifestation émotionnelle, sans être conscient de ce qui a pu servir d'induction à l'émotion et encore moins des étapes intermédiaires qui y ont conduit. En effet, on peut même concevoir qu'un sentiment se produise dans la fenêtre temporelle limitée du ici et maintenant sans que l'organisme sache effectivement que tel est le cas. Assurément, à ce stade de l'évolution et à ce moment de notre vie adulte, les émotions se produisent dans un contexte où la conscience est présente. Nous pouvons constamment ressentir nos émotions et nous savons que nous les ressentons. L'étoffe dont sont faits nos esprits et nos comportements se tisse autour de cycles émotionnels continus, auxquels succèdent des sentiments dont on prend connaissance, et qui engendrent à leur tour de nouvelles émotions, en une polyphonie continuelle qui met en évidence et ponctue notre esprit de pensées spécifiques, et d'actions notre comportement. Mais même si l'émotion et le sentiment font désormais partie d'un continuum fonctionnel, il est utile de distinguer les étapes qui jalonnent ce continu, si l'on veut étudier les sous-bassements biologiques avec quelques chances de succès. Par ailleurs, comme on l'a suggéré plus haut, il est possible que les sentiments se tiennent au seuil même qui sépare l'être du connaître, bénéficiant ainsi d'un lien privilégié avec la conscience.

Pourquoi suis-je aussi prêt à affirmer que les rouages biologiques sous-tendant l'émotion ne sont pas dépendant de la conscience ? Après tout, dans notre expérience quotidienne, nous connaissons souvent, semble-t-il, les circonstances qui sont à l'origine d'une émotion. Mais connaître souvent n'est pas connaître toujours. De nombreux éléments plaident en faveur de la nature cachée de l'induction émotionnelle, et je vais illustrer ce point en m'appuyant sur certains résultats expérimentaux obtenus dans mon laboratoire.

David souffre de l'un des déficits les plus graves de l'apprentissage et de la mémoire qui aient jamais été rapportés ; il est absolument incapable d'apprendre quelque fait nouveau que ce soit. Par exemple, il ne peut apprendre aucune apparence, aucun son, aucun lieu ou mot physique nouveau. En conséquence, il ne peut apprendre à reconnaître une personne nouvelle, à partir de son visage, de sa voix ou de son nom, pas plus qu'il ne peut se souvenir de quoi que ce soit se rapportant à l'endroit où il a rencontré une certaine personne ou les événements qui se sont déroulés entre lui et cette personne. Le problème de David a pour cause une lésion importante des deux lobes temporaux, qui comprend des lésions dans une région qu'on appelle l'hippocampe (dont l'intégrité est nécessaire pour créer des souvenirs de faits nouveaux) et la région qu'on appelle l'amygdale (un groupement sous-cortical de noyaux concernés par l'émotion et que je mentionnerai quelques pages plus loin).

Il y a de nombreuses années de cela, j'ai entendu dire que David semblait manifester, dans sa vie de tous les jours, des préférences et des aversions constantes envers certaines personnes. Par exemple, dans le lieu où il a vécu pendant près des vingt dernières années, il y avait des gens bien précis auprès desquels il choisissait fréquemment de se rendre s'il voulait une cigarette ou une tasse de café, et il y avait des gens vers lesquels il n'allait jamais. La constance de ces comportements était des plus curieuses, si l'on garde à l'esprit 1/ que David était absolument incapable de reconnaître l'un quelconque de ces individus ; 2/ qu'il n'avait pas la moindre idée de ce qu'il avait vu ou non l'un quelconque d'entre eux ; et 3/ qu'il était incapable de produire le nom d'aucun d'entre eux ou même de désigner aucun d'entre eux une fois qu'on lui en avait donné le nom. Se pouvait-il que cette histoire fascinante soit plus qu'une curieuse anecdote ? Je décidai de le vérifier et me mis à procéder à des tests empiriques. À cette fin en collaboration avec mon collègue Daniel Tranel, je mis au point une expérience qu'on appelle depuis, dans notre laboratoire, l'expérience du " bon garçon " et du " mauvais garçon ".

Sur une période d'une semaine, nous pûmes entraîner David, en des circonstances entièrement contrôlées, dans trois types distincts d'interaction humaine. Dans l'une d'elles, il s'agissait d'entrer en interaction avec quelqu'un qui était extrêmement agréable et qui récompensait toujours David, qu'il ait ou non demandé quelque chose (c'était le " bon garçon "). Une autre interaction faisait intervenir quelqu'un qui était émotionnellement neutre et qui entraînait David dans des activités qui n'étaient ni plaisantes, ni déplaisantes (c'était le " garçon neutre "). Un troisième type d'interaction impliquait un individu dont les manières étaient brusques, qui répondait toujours non à quelque requête que ce fût, et qui entraînait David dans une tâche psychologique très fastidieuse qui serait venue à bout de la patience d'un saint (le " mauvais garçon "). (...)

La mise en scène de ces différentes situations fut programmée sur une durée de cinq jours consécutifs, mais toujours pendant un laps de temps bien spécifié pour qu'on puisse bien mesurer et comparer l'exposition globale au bon, au mauvais et à l'indifférent. La mise en scène élaborée de ce ballet nécessitait des pièces variées et plusieurs assistants, qui, incidemment, n'étaient pas les mêmes, et qui incarnaient respectivement le bon garçon, le mauvais garçon, et le garçon neutre.

Une fois que toutes ces rencontres purent faire leur effet, nous demandâmes à David de participer à deux tâches distinctes. Au cours de l'une d'entre elles, on demandait à David de regarder deux séries de quatre photographies qui comportaient le visage de l'un des trois individus de l'expérience, puis on lui demandait : " Auprès de qui te rendrais-tu si tu avais besoin d'aide ? ", et pour que les choses soient plus claires : " Qui, selon toi, est ton ami dans ce groupe ? ".

David se comporta de la manière la plus spectaculaire qui soit. Lorsque l'individu qui avait été positif à son égard faisait partie du groupe des quatre, David choisissait le bon garçon dans 80% des cas, ce qui indiquait que son choix ne se faisait manifestement pas de manière aléatoire - seul le hasard aurait fait choisir à David chacun des quatre dans 25% des cas. L'individu neutre était choisi avec une probabilité qui n'était pas supérieure au hasard. Quand au mauvais garçon, il n'était jamais choisi, ce qui, ici encore, s'opposait à un comportement aléatoire.

Dans une seconde tâche, on demandait à David de regarder les visages des trois individus, et de dire ce qu'il savait à leur sujet. Comme à l'ordinaire, pour lui, rien ne lui venait à l'esprit. David était incapable de se souvenir les avoir jamais rencontrés et n'avait aucune mémoire du moindre cas où il ait interagi avec eux. Inutile de dire qu'il était incapable de nommer l'un quelconque de ces individus, incapable d'indiquer l'un quelconque d'entre eux, une fois qu'on lui en avait donné le nom, et il n'avait pas non plus la moindre idée de ce dont nous parlions lorsque nous l'interrogions sur les événements de la semaine précédente. Mais lorsqu'on lui demandait lequel, parmi les trois, , était son ami, il choisissait constamment le bon garçon.

Les résultats montrent que l'anecdote méritait d'être étudiée. De toute évidence, il n'y avait rien dans l'esprit conscient de David qui lui donnât une raison explicite de choisir le bon garçon de façon correcte et de rejeter le mauvais garçon de façon correcte. Il ignorait pourquoi il choisissait l'un et il rejetait l'autre ; il le faisait, tout simplement. La préférence non consciente qu'il manifestait, cependant est probablement liée aux émotions qui avaient été induites en lui durant l'expérience, ainsi qu'à la ré-induction non consciente d'une certaine partie de ces émotions au moment où il se trouvait soumis au test. David n'avait pas appris une connaissance nouvelle du type de celle qui peut se manifester dans l'esprit de quelqu'un sous la forme d'une image. Mais quelque chose était demeuré dans son cerveau, et ce quelque chose pouvait produire des résultats sous une forme non imagée : sous la forme d'actions et de comportement. Le cerveau de David pouvait produire des actions proportionnées à la valeur émotionnelle des rencontres originelles, qu'elles aient été causées par la récompense ou l'absence de récompenses. Pour que cette idée soit bien claire, je vais décrire une observation que j'ai pu faire lors d'une des séances d'exposition, au cours de l'expérience du bon et du mauvais garçon.

On était en train de conduire David à une rencontre avec le mauvais garçon quand voici qu'au moment d'entrer dans le corridor menant à la pièce où l'attendait le mauvais garçon, quelques mètres plus loin, il flanche, s'arrête un instant, et seulement alors se laisse conduire gentiment jusqu'à la salle d'examen. Je sautai sur l'occasion et lui demandai immédiatement si quelque chose n'allait pas, s'il y avait quelque chose que je pouvais faire pour lui. Mais, comme c'était à prévoir, il me dit que non, que tout allait bien - après tout, rien ne lui venait à l'esprit, si ce n'est, peut-être, un sens émotionnel isolé mais sans qu'une cause sous-tende cette émotion. Il ne fait pour moi aucun doute que la vue du mauvais garçon avait induit une réponse émotionnelle brève et un sentiment bref, ici et maintenant. Toutefois, en l'absence d'un ensemble convenablement lié d'images, qui auraient pu lui expliquer la cause de la réaction, l'effet resta isolé, déconnecté, et par là même, immotivé. (...)

La situation qui vient d'être décrite nous permet de faire quelques autres remarques. Premièrement, la conscience centrale de David est intacte, point sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant. En second lieu, alors que dans le contexte de l'expérience du bon et du mauvais garçon, les émotions de David ont été induites de façon non consciente, dans d'autres contextes, il se met à avoir des émotions en connaissance de cause. Lorsqu'il n'a pas à invoquer en mémoire quelque chose de nouveau, il sent qu'il est heureux parce qu'il goûte à un plat favori ou qu'il assiste à une scène agréable. En troisième lieu, compte tenu de la destruction remarquable qu'ont subie plusieurs régions corticales et sous-corticales de son cerveau qui sont liées à l'émotion, (...), il est manifeste que ces territoires ne sont indispensables ni à l'émotion, ni à la conscience. (...)

Je terminerai ces commentaires en disant que celle qui jouait le rôle du mauvais garçon, dans notre expérience, était une jeune neurologue fort belle et agréable. Nous avons conçu l'expérience de la sorte, en la faisant jouer à contre-emploi. (...) . Comme vous pouvez le voir, notre petite stratégie légèrement perverse fut payante. Toute la beauté du monde aurait été incapable de compenser l'émotion négative induite par les manières du mauvais garçon et par la maigre distraction procurée par la tâche.

Nous n'avons pas à être conscients de l'inducteur d'une émotion, et bien souvent, nous ne le sommes pas, et nous ne pouvons pas contrôler les émotions à volonté. On peut se trouver dans un état triste ou heureux, tout en étant absolument incapable de dire on se trouve en ce moment même dans cet état. Une recherche minutieuse peut mettre au jour des causes possibles, et telle cause peut être plus probable que telle autre, mais bien souvent, il est impossible d'être certain. La cause réelle peut avoir été l'image d'un événement, une image qui avait la potentialité d'être consciente, mais qui ne l'a tout bonnement pas été, parce que vous n'y avez pas fait attention alors que vous faisiez attention à une autre. Ou bien il se peut qu'il n'y ait pas eu d'image du tout, mais qu'il s'est plutôt produit un changement transitoire dans le profil chimique de votre milieu interne, lequel a été provoqué par des facteurs aussi divers que votre état de santé, le régime, le temps, le cycle hormonal, le nombre, grand ou petit, d'exercices que vous avez pratiqués ce jour là, ou même la quantité de soucis que vous

vous étiez faits sur un certain sujet. Le changement serait assez substantiel pour produire certaines réponses et modifier votre état corporel, mais il ne serait pas possible à mettre en image, au sens où peuvent l'être une personne ou une relation ; en d'autres termes ; il ne produirait pas une configuration sensorielle dont vous pourriez jamais avoir une connaissance immédiate dans l'esprit. En d'autres termes, les représentations qui induisent les émotions et donnent lieu, par la suite, à des sentiments, n'ont pas besoin d'être l'objet de l'attention, qu'elles signifient quelque chose d'extérieur à l'organisme ou quelque chose qu'on se rappelle en son for intérieur. Qu'elles soient de l'extérieur ou de l'intérieur, les représentations peuvent se produire à un niveau infra-conscient et induire néanmoins des réponses émotionnelles. Les émotions peuvent être induites d'une manière non consciente et apparaître ainsi au Soi conscient comme étant apparemment immotivées.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La fonction f n'est pas, à priori, définie en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}-1)}{x} = 1$$

La fonction φ est donc continue en posant $\varphi(0)=1$

❷ La dérivée de φ est, $\phi'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

On étudie alors le signe de $y = e^x(x-1)+1$. sa dérivée est : $y' = e^x(x-1)+e^x = xe^x$

La fonction y est donc croissante sur R^+, décroissante sur R^- et nulle en 0. On en déduit que φ' est toujours positive et donc que φ est strictement croisante de R sur R^+.

❸ Représentation graphique de la fonction φ . On remarque que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ et elle a donc une branche parabolique dans la direction oy. D'autre part, l'axe des abscisses est une asymptote.

❹ g est définie sur R pour $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et $x \neq 0$ et d'après ce qui précède elle est définie sur R^*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{\varphi(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie aisément que E est un espace vectoriel réel.

❷ Soit $f \in E_p \cap E_i$ alors pour tout réel x, on a :
$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-x)] = 0$, donc $E_p \cap E_i = \{0\}$

❸ Soit une combinaison linéaire nulle des 3 applications f_1, f_2, f_3, à savoir :

$$a\cos t + b\cos 2t + c\cos 3t = 0$$

Pour $t = 0$, on obtient $a + b + c = 0$.

On calcule alors la dérivée seconde et la dérivée quatrième, puis on remplace t par 0, on trouve : $a + 4b + 9c = 0$ et $a + 16b + 81c = 0$.

La résolution du système de ces 3 équations donne $a = b = c = 0$

❹ L'espace G engendré par les fonctions $\{f_1, f_2, f_3\}$ est de dimension 3, de même l'espace H engendré par g_1, g_2 et g_3. L'espace F est donc au maximum de dimension 6.

On a : $G \subset E_p$ et $H \subset E_i$, d'où $\{0\} \subset G \cap H \subset E_p \cap E_i = \{0\}$, donc F est de dimension 6 et $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$ en constitue une base.

❺ D est linéaire car la dérivation est linéaire et toute image par D d'une application de F est encore une combinaison linéaire des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$. D est donc un endomorphisme de F.

Si $f \in Ker\, D$, sa dérivée est nulle et est une combinaison linéaire des vecteurs linéairement indépendants $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$, donc $Ker\, D = \{0\}$ et D est un isomorphisme de F. Comme $Dim \operatorname{Im} D + Dim\, Ker\, D = 6$, on a : $\operatorname{Im} D = F$.

EXERCICE n° 3

❶ La résolution du système $\sum_{k=-1}^{1} a_k = 1,\ \sum_{k=-1}^{1} k a_k = 0$ donne $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1 - 2a_1$.

❷ On vérifie aisément que M_3 est une application linéaire.

❸

$$M_3 f_t = M_3(at+b) = \sum_{k=-1}^{1} a_k (a(t+k)+b) = (at+b)(\sum_{k=-1}^{1} a_k) + a(\sum_{k=-1}^{1} k a_k) = at+b = f_t$$

Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on obtient : $M_3 g_t = \cos\omega t\,(1-2a_1+2a_1\cos\omega)$ et cette expression est égale à $\cos\omega t$ si et seulement si $2a_1(\cos\omega - 1) = 0$, soit $\omega = 2k\pi$ et $g_t = 1$

et $M_3(f_t + g_t) = f_t + g_t$

❹ Dans l'expression précédente de $M_3 g_t$, en remplaçant les coefficients par $\frac{1}{3}$, on obtient : $1 + 2\cos\omega = 0$, d'où $\omega = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
Une moyenne arithmétique d'ordre 3 élimine les fonctions périodiques de période 3.

❺ Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on a : $f(a_1) = \sum_{k=-1}^{1} a_k^2 = 6a_1^2 - 4a_1 + 1$
Il s'agit de l'expression d'une parabole strictement convexe et le minimum est donc atteint pour la valeur de a_1 qui annule la dérivée, à savoir :

$$f'(a_1) = 12a_1 - 4 = 0$$

d'où $a_1 = \frac{1}{3}$ et les 2 autres coefficients sont également égaux à $\frac{1}{3}$.

La résolution de ces 3 conditions : $\sum_{k=-1}^{2} a_k = 1,\ \sum_{k=-1}^{2} k a_k = 0,\ \sum_{k=-1}^{2} k^2 a_k = 0$ donne

$a_{-1} = \frac{1}{3}(1-a_0),\ a_1 = 1 - a_0,\ a_2 = \frac{1}{3}(1-a_0)$. Il reste à minimiser la somme des carrés et le raisonnement est le même que dans le cas précédent. La dérivée de cette somme est égale à : $\frac{1}{9}(20a_0 - 11)$. On obtient pour les coefficients :

$$a_0 = \frac{11}{20},\ a_{-1} = \frac{3}{20},\ a_1 = \frac{9}{20},\ a_2 = -\frac{3}{20},$$

On vérifie que appelle $M_4 h_t = h_t$

EXERCICE n° 4

❶ Pour tout couple $(x,y)\in R^2$, $H(x,y)=\sqrt{2}(x,y)$ et $G(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y,x+y)$.

❷ Soit f la composée de H et de G, on a :

$$f(x,y)=HoG(x,y)=(x-y,x+y).$$

❸ On a : $Ker\ f=\{(0,0)\}$ et f est bijective.

PROBLEME

❶ Comme Ln est défini sur R^{+*}, il est de même pour f.

❷ $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}\left[1+x^2+(1-3x^2)Ln\,x\right]$

On vérifie aisément que pour $x^2=\frac{1}{3}$, la dérivée ne s'annule pas. On en déduit que la dérivée est nulle sur R^{+*} si et seulement si $x\in R^{+*}-\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ou $Ln\,x=\frac{1+x^2}{3x^2-1}$

La fonction g cherchée est donc définie par :

$$\forall\, x\in R^{+}-\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ g(x)=\frac{1+x^2}{3x^2-1}$$

Le tracé de la courbe (Γ_1) est classique. Pour tracer (Γ_2), courbe représentative de g, étudions rapidement cette fonction.

$g'(x)=\frac{-8x}{(3x^2-1)^2}$ et $g'(x)<0$ sur son domaine de définition. La fonction est donc décroissante.

On a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}^{+}} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}^{-}} g(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ est une asymptote verticale.

Soit h la fonction définie sur $R^{+*} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ par $h(x) = Ln\, x + \frac{1+x^2}{1-3x^2}$

On a, $h^{'}(x) = \frac{8x^2 + (1-3x^2)^2}{x(1-3x^2)^2}$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante (et continue), donc bijective de $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ sur R et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_1 \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ pour lequel $f^{'}(x_1) = 0$. De même, h est bijective sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et il existe un unique $x_2 \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ pour lequel $f^{'}(x_2) = 0$.

De plus on remarque que

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < x_2 < 2$$

Puis on calcule $Ln\, x - g(x)$ pour les valeurs suivantes
0.1; 0.2; 0.3; 0.4 et 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9. On obtient

x	0.2	0.3	1.6	1.7
$Ln\, x - g(x)$	-0.427	0.289	-0.063	0.024

On en déduit : $0.2 < x_1 < 0.3$ et $1.6 < x_2 < 1.7$

❸ On vérifie aisément que x_1 et x_2 sont des racines simples de $f^{'}$

D'autre part, on a $f^{'}(1) = \frac{1}{4}$; On a donc
$0 < x < x_1 \Rightarrow f^{'}(x) < 0$
$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f^{'}(x) > 0$
$x_2 < x \Rightarrow f^{'}(x) < 0$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{xLn\, x}{(x^2+1)^2} \approx \frac{Ln\, x}{x^3}$. Il en résulte $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Pour $x > 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} Ln\, x \times \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Tableau de variation :

x	0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	‖		$f(x_1)$		0		$f(x_2)$		0

On a $f(1)=0, f(2)=0.055, f(3)=0.033, f(4)=0.019$

❹

$$\int \frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

et

$$\int\frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}$$

On obtient

$$\int\frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}Ln\,x-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2Ln\,x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1) L'équation P(z) = 0 admet une solution réelle signifie que:

Soit :

$$a^3 - 2a^2 - (4+4i)a - 16 + 16i = 0$$

Il s'ensuit:

Ce système admet une solution unique a= 4 (en vérifiant que a=4 satisfait la première équation.

$$a^3 - 2a^2 - 4a - 16 + i(-4a + 16) = 0$$

$$\begin{cases} a^3 - 2a^2 - 4a - 16 = 0 \\ -4a + 16 = 0 \end{cases}$$

L'équation P (z) = 0 admet donc l'unique solution réelle: ***a*=4.**

L'équation P (z) = 0 admet une solution imaginaire pure b = ix (où x désigne un nombre réel) si et seulement si :

ce qui signifie que :

$$(ix)^3 - 2(ix)^2 - (4+4i)(ix) - 16 + 16i = 0$$

ou encore :

$$-ix^3 - 2x^2 - 4ix + 4x - 16 + 16i = 0$$

Par conséquent, x doit vérifier le système d'équations suivant:

$$2x^2 + 4x - 16 + i(-x^3 - 4x + 16) = 0$$

La première équation admet deux solutions: x = *-4 et* $x = 2$.

Pour x = -4, on a : $-4^3 - 4x4 + 16 = 96$.

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x - 16 = 0 \\ -x^3 - 4x + 16 = 0 \end{cases}$$

Pour x = 2, on a : $-2^3 - 4x2 + 16 = 0$. Seul x=2 vérifie la deuxième équation.

L'équation P (z) = 0 admet donc ***2i*** pour solution imaginaire pur**.**

4 et 2 i étant racines du polynôme P, on peut donc écrire que, pour tout complexe z :

P $(z) = (z-4)(z-2i)(z-c)$, où c est un nombre complexe.

Or P $(z) = (z-4)(z-2i)(z-c)$ équivaut à :

$$P(z) = z^3 + (-c-2i-4)z^2 - (4c+2ic+8i)z - 8ic$$

pour tout complexe z. Par conséquent, c doit vérifier le système de trois équations :

$$\begin{cases} -c-2i-4=-2 \\ 2ic+4c+8i=-4-4i \\ -8ic=-16+16i \end{cases}$$

dont l'unique solution est $c = -2-2i$.

L'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0 est donc : {4; 2i; -2-2i}

3) A, B, C sont les points d'affixes respectives 4, 2i et -2-2i.

On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-2-4i}{4-2i} = \frac{-i(4-2i)}{4-2i} = -i$$

Une mesure de l'angle **(BA; BC)** est donc -π/2.

De plus, on peut écrire que le module de $\frac{c-b}{a-b}$ est égal à 1, c'est à dire que $|c-b| = |a-b|$

Donc BC=AB**.** Le triangle est donc isocèle rectangle en B.

EXERCICE n° 2

1) Il y a 3 réponses par question et une seule est bonne, donc la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question est 1/3.
2) Il y a 3 réponse par question et le candidat doit répondre à 10 questions, donc la probabilité que le candidat donne les réponses exactes aux 10 questions est égale à $\frac{1}{3^{10}}$
3) Nous sommes dans le cadre d'application de la loi binomiale B(n, p) avec n=10 et p=1/3 puisque l'on répète 10 fois la même épreuve et que les 10 questions sont indépendantes.

Si l'on note k le nombre de réponses exactes donnédes par le candidat, nous avons alors

4) Les valeur de P_k sont *:*

$$P_0 = 0.0173; P_1 = 0.0867; P_2 = 0.1951; P_3 = 0.2601; P_4 = 0.2276;$$

5) Le candidat a 0 point si le nombre de réponses exactes est inférieur ou égal à 4, c'est à dire 0, 1, 2, 3 ou réponses exactes. La probabilité d'avoir 0 est donc la somme de P_0 *à* P_4, soit 0.7868.

PROBLEME

Partie I

1) La relation *M(a, b) = aJ + bI* montre que *E* est le sous-espace vectoriel des matrices carrées **M**(R) engendré par (*I, J*). Les éléments *I* et *J*, étant linéairement indépendants, constituent une base de ce sous-espace vectoriel.

2) Il est clair que $J^2 = I$. La stabilité pour la multiplication découle aussitôt de la bilinéarité de cette loi.

L 'ensemble *E*, étant un sous-espace vectoriel de **M**(R), est en particulier un groupe commutatif pour l'addition. Cet ensemble, contenant *I* et étant stable pour la multiplication matricielle, est un sous-anneau (unitaire) de l'anneau (unitaire) **M**(R). Les éléments *I* et *J* étant permutables, ce sous-anneau est commutatif.

3) Cherchons l'inverse de *M(a, b)* sous la forme *M(a', b')*. Puisque (*I*, *J*) est une base, nous sommes ramené à résoudre le système:

$$aa' + bb' = 1 \qquad ba' + ab' = 0.$$

Le déterminant est a^2-b^2 . Si a^2-b^2 est non nul, le système est cramérien, et

$M(a', b') = (aJ-bI)/(a^2-b^2)$. Sinon le système n'a pas de solution.

Partie II

1) Il vient aussitôt: $x' = ax \qquad y' = ax - ay + a + 3.$

2) Pour que f_a soit une bijection, il faut et il suffit que $M(a, 0)$ soit inversible, c'est à dire que a soit non nul.

Dans ces conditions, $x = \frac{1}{a}x'$ *et* $y = \frac{1}{a}(x' - y' + 3) + 1.$

3) L'ensemble D est déterminé par le système:

$$(1-a)\,x = 0 \text{ et } ax - (1+a)y + a + 3 = 0$$

Si a est différent de 1 et de -1, il y a un point fixe et un seul de coordonnées $x = 0$ *et* $y = (a+3)/(a+1)$.

Si $a = 1$, l'ensemble D est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si $a = -1$, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble D est vide.

4) L'application $f_a o$

Si $a = 1$, l'ensemble D est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si $a = -1$, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble D est vide.

2) L'application $f_a o f_a$ soit égale à l'identité, on doit supposer que a est non nul. Cette relation implique que $(M(a, b))^2 = I$, et donc que $a^2 = 1$, c'est à dire a=1 ou a=-1. L'application f_1 a un point fixe alors que f_{-1} n'en a pas.

Partie III

1) La dérivée de h est donnée par la relation :

$$h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$$

Lorsque x tend vers 0, ln x tend vers -∞. D'où $\lim_{0+} h(x) = +\infty$.

La relation $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ implique $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

X	0		1		$+\infty$
h'(x)		-		+	
h(x)	$+\infty$	->	3	->	$+\infty$

Le minimum étant 3, *h (x)* est toujours positif.

2) La dérivée de *g* est :

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{Lnx}{2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

D'après la question 1), g' est à valeurs strictement positives.

Il est immédiatement que $\lim_{0+} g(x) = -\infty$. La relation:

$$g(x) - \frac{x}{2} - 2 = \frac{Lnx}{x}$$

implique $\underset{+\infty}{Lim}\left[g(x) - \frac{x}{2} - 2\right] = 0$

En particulier, $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$.

La courbe *C* admet pour asymptote l'axe *Oy* et la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 2$.

En résumé, g(x) croit de $-\infty$ à $+\infty$ quand x croit de *0 à* $+\infty$.

3) a) Le point (x, y) appartenant à *C* a pour image le point de coordonnées *x'=x* ,

$$y' = x - (\frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}) + 4 = \frac{x}{2} + 2 - \frac{\ln x}{x}$$

b) Les raisonnement de la question 2) s'appliquent de la même manière.

4) Comme $\ln x$ est positif sur l'ensemble considéré, (C) est au-dessus de (C_1). L'aire est, en unité d'aire :

$$A(m) = \int_1^m [g(x) - g_1(x)]dx = 2\int_1^m \frac{\ln x}{x}dx = [\ln(m)]^2$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE n° 1

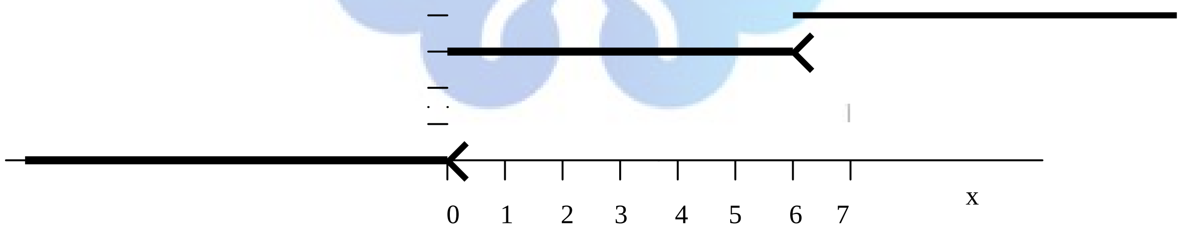
1.

a. Le tableau **T1** donne la loi de probabilité de X puisqu'il croise les valeurs possibles prises par X et les probabilités correspondantes.

Valeurs de X notées k	0	6
P(X=k)	¾	1/4

b. $E(X) = 0 * (3/4) + 6 * (1/4) = 3/2.$
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 36/4 - 9/4 = 25/4.$

c. Soit F, la fonction de répartition de X :
pour tout $x < 0$, $F(x) = 0$
$F(0)= 3/4$; pour tout x tel que $0 < x < 6$, $F(x) = 3/4$;
$F(6) = 1$ et pour tout $x > 6$ $F(x) = 1$.



2. On jette maintenant 5 fois de suite le dé.

$$P(\text{"}au\ moins\ 1\ fois\ X = 0\text{"}) = 1 - P(\text{"}aucune\ fois\ X = 0\text{"})$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1023}{1024}$$

3. On suppose à présent que le nombre de lancers du dé est un entier n strictement positif. On cherche à déterminer n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on a

On en déduit que le nombre minimal cherché est égal à 9.

EXERCICE n° 2

1. **Premier encadrement.**

a.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{10+x}\,dx = \ln(10+x)]_0^1 = \ln\left(\frac{11}{10}\right)$$

b. La suite x^n étant décroissante pour x dans [0,1], on obtient l'inégalité suivante

$$x^n \geq x^{n+1}$$

On en déduit que

$$I_n \geq I_{n+1}, \quad \forall\, n \in IN,$$

c'est à dire que la suite $(I_n)_{n \in IN}$ est décroissante.

c. Lorsque x ϵ [0,1], $10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$

$$\frac{x^n}{11} \leq \frac{x^n}{10+x} \leq \frac{x^n}{10}.$$

En intégrant sur [0,1] les 3 quantités ci-dessus, on obtient le résultat demandé.

2. **Deuxième encadrement.**

a. Etant donnée la décroissance de la suite I_n, on a directement une minoration de I_n-I_{n+1} par 0. Pour tout x ϵ [0,1], on a

$$10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$$

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{10+x} \leq \frac{1}{10}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10}\int_0^1 x^n\,(1-x)\,dx = \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)},$$

la dernière égalité s'obtient en faisant une intégration par parties en posant

$u' = x^n$ et $v = (1- x)$.

L'encadrement de I_n-I_{n+1} est

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b. La relation de récurrence s'obtient de la façon suivante

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \frac{10+x-10}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 (1-\frac{10}{10+x})\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 x^{n-1}\, dx - 10 \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{10+x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n} - 10\, I_{n-1}.$$

c. Les questions 2.a et 2.b conduisent à

$$0 \le I_n - I_{n+1} \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)} \Leftrightarrow 0 \le I_n - \frac{1}{n+1} + 10\, I_n \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{11\,(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{11\,(n+1)} + \frac{1}{110\,(n+1)\,(n+2)}.$$

3.

a. Pour l'encadrement de la question 1., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,1}$ égale à

$\Delta_{n,1}$=1/ (110 * (n+1)), l'erreur relative $\xi_{n,1}$ est égale à $\xi_{n,1}$ = 1/10.

Pour l'encadrement de la question 2., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,2}$ égale à

$\Delta_{n,2}$=1/ (110 * (n+1) * (n+2)), l'erreur relative $\xi_{n,2}$ est égale à
$\xi_{n,2}$=1/(10*(n+2)).

b. On pose n=36. La valeur approchée de I_{36} est 1/(11*37).
L'erreur relative est :

- pour le premier encadrement : 0.1
- pour le deuxième encadrement : 1/(380) = 0.003.

EXERCICE n° 3

Remarquons que $a_n > 0$ et que $b_n > 0$ pour tout n ϵ IN.

Montrons que pour tout n positif ou nul, a_n est inférieur ou égal à b_n :
C est vrai à l'étape n=0 par hypothèse ; montrons le à l'étape n+1.

$$(a_n - b_n)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a_n + b_n)^2 \ge 4\, a_n\, b_n \Leftrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n\, b_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \le b_{n+1}.$$

La suite (a_n) est une suite croissante et la suite (b_n) est décroissante :

$$a_n = \sqrt{a_n^{\ 2}} \leq \sqrt{a_n\ b_n} = a_{n+1}.$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0.$$

Montrons que lim $(a_n - b_n) = 0$ quand n tend vers l'infini :

$$0 \leq b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} < \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \to 0, \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Les suites a_n et b_n sont donc adjacentes.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Comparez la Passion et la Volonté.

SUJET N° 2

Peut-on qualifier d'inhumaines certaines actions de l'homme et pourquoi ?

SUJET N° 3

L'inégalité des hommes rend-elle impossible l'égalité des citoyens ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $(R^{+*} \times R^{+*})$ par $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et α, β appartiennent à R^{+*}.

❶ Pour y fixé dans R^{+*}, on pose $g(x) = f(x,y)$. Etudier les variations de g selon les valeurs de α et donner l'allure de son graphe.

❷ On suppose que pour tout couple (x,y) de $(R^{+*} \times R^{+*})$, on a : $ax + by \leq R$, où a, b, R sont des réels strictement positifs.
Déterminer $\underset{x}{\mathrm{Max}}\, f(x,y)$ ($\underset{x}{\mathrm{Max}}$ désigne le maximum de f en x).

❸ Etudier les variations de la fonction h définie par :
$h(t) = \left(\dfrac{R - bt}{a}\right)^{\alpha} t^{\beta}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$

EXERCICE n° 2

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x)=\frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

❷ Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

EXERCICE n° 3

Au jeu de la roulette américaine, il y a 38 numéros ; de 1 à 36, plus le zéro et le double zéro. Chaque joueur a la possibilité de miser sur un numéro, deux numéros ensemble, trois, quatre, six, douze ou dix huit. Les 38 numéros sont équiprobables et rapportent le même gain pour la même mise. A chaque jeu, un seul numéro est gagnant.

Il revient au même de miser un jeton sur un seul numéro x et un autre jeton sur un autre numéro y que de miser deux jetons sur l'ensemble des deux numéros x et y. Il en est de même pour les autres combinaisons. Les stratégies de jeu sont donc équivalentes au niveau des gains.

Le gain pour un seul numéro joué est de 35 fois la mise et on récupère sa mise (par exemple, pour une mise de 100 sur un seul numéro gagnant, on obtient 3600, soit un gain net de 3500).

❶ Quel est le gain obtenu lorsque l'on mise sur 2 numéros, sur 3 numéros, sur 6 numéros ?

❷ Quelle est la probabilité que le numéro x sorte deux fois de suite ? Quelle est la probabilité pour que le couple (x,y) soit gagnant sur deux jeux consécutifs.

❸ A votre avis existe-il une stratégie gagnante ? Expliquer.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x)$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

❶ Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$.

❷ Donner l'allure du graphe de $f_{\frac{1}{2}}$ $(a = \frac{1}{2})$.

❸ Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{\frac{1}{2}}$, l'axe des abscisses, les droites x=1 et x=2.

❹ Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, et tout $x, t > 0$, on a :
$f(\alpha x + (1-\alpha)t) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(t)$

❺ Etudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

Etudier la suite (v_n) définie par : $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - Ln(v_n)$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice n° 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, où $n \geq 3$. On suppose que le tirage de chacune des boules est équiprobable.

On tire une boule, on note son numéro et on le remet dans l'urne. Puis on tire une seconde boule, on en note le numéro.

On appelle X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

1) si les deux numéros sont égaux, X prend leur valeur commune
2) si les deux numéros sont différents, X prend la valeur du plus grand des deux

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_2 : X = 2

E_3 : X = 3

E_p : X = p, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

2) Calculer l'espérance de X. On utilisera les expressions de :

$$\sum_{p=1}^{n} p \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} p^2$$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n ≥1, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

1) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + I_n$$

4) Montrer qu'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$$

On pourra déterminer *A* en majorant sur l'intervalle [0, 1] la fonction :

$t \to (1 - t)^n e^{t/2}$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}$$

PROBLEME

On considère le plan affine euclidien **P** muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; **C** est l'ensemble des nombres complexes et *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. On définit pour tout *z* de **C** les deux applications *f* et *g* de **C** dans **C** par :

$$f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$$

$$g(z) = z^3 + 2 - 2i$$

I)

1) Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres complexes *z* qui vérifient $g(z)=0$. Représenter dans le plan les points ayant pour affixes les nombres trouvés. Quelle est la nature du triangle formé par ces points.

2) Montrer qu'il existe un réel unique *r*, que l'on déterminera, qui vérifie $f(r)=0$. Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbf{C}$$

3) Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = 0$. Démontrer que les points dont les affixes sont solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan **P**.

4) Soient *A, B, C* les points de **P** dont les affixes respectives sont : –1+3i, 1+i et –4. Déterminer l'affixe du barycentre *G* des points *A, B, C* affectés respectivement des coefficients 4, 3 et 5.

5) On désigne par *h* l'application du plan **P** vers l'ensemble des réels **R** qui à tout point *M* de **P** associe le réel :

$$h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}.$$

où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs.

Calculer *h(A) et h(C).* Exprimer *h(M)* en fonction de $\|\overrightarrow{MG}\|^2$ et *h(G).* Déterminer et dessiner l'ensemble des points *M* de **P** qui vérifient $h(M) = 18$. Justifier le choix du nombre 18.

II) A tout point *M* de **P** d'affixe *z* on associe le point *M'* d'affixe *f(z) - g(z)*

1) Déterminer les coordonnées (x', y') de *M'* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en fonction des coordonnées (x, y) de *M* dans le même repère.

2) *A, B, C* étant les points définis en I-4), donner une équation de l'ensemble H_1 des points *M* de **P** tels que *O, B et M'* soient alignés (où *O* est l'origine du repère).

   Montrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3) Donner une équation de l'ensemble H_2 des points *M* de **P** tels que *O, I, M'* soient alignés, *I* étant le centre de gravité de *A, B, C.*

   Montrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes. Donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$.

4) Démontrer qu'un point *M* est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, *M'* est confondu avec l'origine *O* du plan.

5) Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = g(z)$. En déduire les points communs à H_1 et H_2.

   Construire les courbes H_1 et H_2 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre intitulé "Université de tous les savoirs", tome 1 "Qu'est-ce que la vie ?", (auteurs collectifs), l'auteur en est Michel Jouvet et le titre : "L'évolutions des états du sommeil". Ce livre est paru aux éditions Odile Jacob en Juillet 2000. Il peut être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

✶✶✶

(...) Pourquoi l'homme dort-il la nuit ?

On pourrait penser que la raison en est que cela revient moins cher, car on a pas à s'éclairer ni à se chauffer la nuit, si l'on dort. Pendant très longtemps, cette explication a été acceptée mais elle est fausse. Le fait que l'homme dorme la nuit n'est pas dû au cycle soleil/obscurité.

Comment savoir si l'homme s'endort la nuit en fonction de l'alternance lumière/obscurité ? des expériences ont été réalisées pour le savoir. On place quelqu'un dans un bunker complètement fermé, sans aucun contact avec le soleil, sans montre, en lui permettant d'allumer et d'éteindre la lumière électrique quand il veut, ou bien, tout simplement dans une grotte (expérience de Michel Siffre, le spéléonaute). On observe les moments où il est endormi et les moments où il est éveillé. Dans ces conditions de *free-running,* ou de totale désynchronisation, ou encore hors du temps, le soleil ne peut plus jouer son rôle de " donneur du temps " ou de *Zeitgeber* (*Zeitgeber* signifiant en Allemand " qui donne le temps "). Donc, en dehors de tout *Zeitgeber,* le sujet se couche chaque jour un peu plus tard, si bien qu'après une dizaine de jours, il a manqué un jour. Pour les gens qui sont en dehors de la grotte, il est resté 20 jours dans celle-ci ; pour lui, il n'y est demeuré que 19 jours. Comment expliquer cela ?

Première explication le cycle soleil/obscurité ne joue aucun rôle dans l'entretien de ce rythme. Deuxième élément d'explication : le rythme n'est pas tout à fait de 24 heures, il est d'un peu plus de 24 heures. Il varie selon les sujets, mais on admet actuellement que la période endogène d'un sujet que l'on met dans une grotte ou dans un bunker est de 24,3 heures, ce qui n'est pas exactement un jour. En latin, on dit " à peu près un jour " : *circa diem.* Le qualificatif de " circadien " est en fait apparu dans la littérature récemment, dans les années 1960, sous la plume de Halberg. Comment expliquer ce rythme " circadien " ?

La raison en est la suivante : nous avons une horloge dans la tête. Cette idée d'avoir une horloge dans la tête est née au XVIIIe siècle, dans l'esprit de l'astronome François Ortous de Mairan. Cet amoureux des plantes possédait chez lui un *Mimosa pudica.* Les feuilles de mimosa ont ceci de particulier qu'elles se redressent le jour et se replient la nuit, d'une façon tout à fait remarquable. L'astronome eut un jour l'idée d'enfermer son mimosa dans un placard obscur : lorsqu'il l'ouvrit à midi, il constata que le mimosa *savait* qu'il y avait du soleil à cette heure-là, puisque ses feuilles étaient ouvertes ; il l'ouvrit à nouveau à minuit, et remarqua que les feuilles étaient fermées. Il décrivit cette expérience dans une note d'une page parue dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* , en 1729, dans laquelle il concluait : " il y a une horloge à l'intérieur du mimosa ". Personne ne l'a cru. Il a fallu attendre 100 ans, en 1820, pour que l'un des meilleurs botanistes, de Candolle, enregistre les mouvements des feuilles de mimosa la nuit et le jour, puis dans l'obscurité totale, et constate les mêmes mouvements des feuilles. La seule explication, conclut-il également, c'est qu'il se trouve une sorte d'horloge dans la plante. Cette horloge, qui nous permet d'aller nous coucher le soir, même sans connaître l'heure, jour un rôle fondamental.

Où se trouve cette horloge dans notre cerveau ? Et pourquoi a t-on une horloge ? Cette horloge est présente en effet dans tous les êtres vivants, de l'unicellulaire à l'homme ; c'est sans doute une des plus grandes inventions de l'évolution, car elle est responsable de ce qu'on appelle " l'homéostasie prédictive ". Où se trouve l'horloge ? On s'est aperçu, en travaillant sur les plantes ou les animaux, que lorsqu'ils avaient un rythme de 23 ou 24,3 heures, il suffisait de leur projeter un bref éclair de lumière pour que leur horloge vienne se remettre à 24 heures. Autrement dit, le rôle du *Zeitgeber* solaire, de la lumière, est très important pour que pour que l'horloge que nous avons dans la tête vienne se remettre à un rythme de 24 heures. L'horloge est donc en rapport avec la lumière, et surtout avec la lumière bleue chez l'homme. L'horloge se trouve dans les yeux de la mouche. Chez les oiseaux, l'horloge est situé dans la " glande pinéale " ou l'*épiphyse,* qui est juste sous l'os du crâne, lequel laisse passer suffisamment de photons pour que le soleil vienne agir sur l'horloge. Le chat, pour sa part, a une horloge qui fonctionne très mal, il n'a pas de rythme *circadien*, et il dort autant le jour que la nuit.

L'horloge, chez l'homme, n'a été découverte que dans les années 1970. En regardant certaines projections de la rétine, on s'est aperçu qu'il y avait deux systèmes dans le cerveau : un *système visuel*, qui passe par la rétine, qui va dans le cerveau, et se termine au niveau du cortex occipital : c'est le système dit *visuel*, qui fait que je vois que vous êtes là. Mais depuis on a découvert le *système photique :* certaines cellules ganglionnaires de la rétine se projettent au niveau du noyau supra-chiasmatique (qui est l'horloge chez l'homme et les mammifères). A partir de ce noyau, tout un système va prévenir le cerveau qu'il fait jour. Ce n'est pas parce que nous sommes conscients qu'il fait jour, grâce à notre système visuel, que notre cerveau, lui le sait. Il y a même un rat complètement aveugle, mais à qui il reste quelques petites cellules sous la peau, qui forment un système suffisant pour venir activer son noyau suprachiasmatique. On peut donc être totalement aveugle, et avoir notre cerveau capable de savoir qu'il fait jour. Certains se demandent même si certaines maladies psychiatriques ne pourraient pas être dues à l'inverse : on peut très bien voir, mais avoir notre système photique défectueux, de telle sorte que l'horloge se recale mal le matin. Ainsi, à certains moments, tandis qu'il sera 3 heures de l'après-midi, elle peut dire à l'organisme qu'il est trois heures du matin. C'est pourquoi, pour traiter certaines maladies dépressives, on fait regarder aux patients, le matin, des tubes fluorescents pour exciter leur système photique. En dehors du système photique, la glande pinéale, (ou épiphyse), est reliée aux noyaux supra-chiasmatiques. A l'obscurité, elle secrète une hormone, la mélatonine, qui favorise l'endormissement. En conclusion, il faut retenir que l'horloge circadienne organise notre sommeil dans le temps, mais elle n'est pas responsable du sommeil.

La preuve en est donnée par l'expérience suivante. Un rat est placé dans l'obscurité continue, son noyau *supra-chiasmatique* lui " dit " d'être éveillé ou de dormir toutes les 24 heures. Ensuite, si on détruit l'horloge des noyaux supra-chiasmatiques (par coagulation avec des électrodes), le rythme circadien est détruit, puisqu'on a plus d'horloge ; et le rat va dormir selon un rythme *plus rapide* que le rythme circadien, c'est à dire selon un rythme ultradien (à peu près toutes les trois heures). L'explication de ce rythme ultradien dans la physiologie du sommeil, n'a pas encore été apportée. Le sommeil est un mystère dans lequel il reste encore beaucoup à découvrir.

Maintenant que l'on sait où est l'horloge et que l'on sait que ce n'est pas le centre du sommeil, et qu'elle sert à installer des périodes de sommeil, posons-nous la question suivante : pourquoi a-t-on une horloge ? A quoi cela peut-il servir ? Permettez-moi la métaphore suivante : au commencement du monde, dans l'océan primitif, il n'y avait que des algues bleues. Elles se groupent dans le fond de l'océan et montent à la surface de la mer pour absorber des photons, c'est à dire à la lumière du soleil, déclenchant une chaîne de réactions chimiques produisant des sucres. Supposons que certaines d'entre elles, " pas très intelligentes ", mettent en jeu les synthèses protéiques lorsque le soleil est au zénith, pendant 5 ou 6 heures pour fabriquer des sucres à partir du soleil : lorsque tout sera prêt pour qu'elles fabriquent des sucres, le soleil sera malheureusement couché. Ce sera donc un échec lamentable. C'est après bien des essais et des erreurs de cette sorte, que les algues se sont enfin mises à fabriquer tous les mécanismes de synthèses *avant 6 heures du matin* (prenant ainsi en compte l'aspect très prédictif de la courbe de la Terre autour du soleil), afin que, le soleil étant à son zénith, toutes les choses soient prêtes, et que tout marche. Cette invention, on lui a donné le nom d'*homéostasie prédictive.* Sans ce système, la vie serait impossible. Tout système vivant entre en réaction avec les milieux extérieurs, et il se produit des réactions chimiques plus ou moins rapides, et si elles ne sont pas préparées par la synthèse des protéines qui doit avoir lieu avant, le système ne peut pas fonctionner, en particulier le système qui dépend du jour et de la nuit.

L'*homéostasie prédictive* a également lieu chez l'homme : le matin, il faut que notre système corticosurrénalien, nos muscles, soient en parfait état. Or, cela ne peut pas se faire instantanément le matin : ça doit être mis en jeu la nuit. Sous l'influence de notre horloge circadienne, vers 2 h du matin, l'hypothalamus, se met à libérer certains facteurs (CRF), qui vont agir sur l'ACTH, lequel va agir sur la corticosurrénale, laquelle va augmenter le tau de cortisone trop faible le matin. Ainsi, c'est au cours du sommeil le plus profond, vers 2-3 heures du matin, que se met en route le véritable mécanisme dont on a besoin lorsqu'on se réveille.

Quittons maintenant les algues bleues pour remonter l'arbre de l'Evolution jusqu'aux *Ectothermes*, c'est à dire les lézards, les batraciens, certains reptiles. Qu'est-ce que le sommeil pour ces animaux là ? A vrai dire, les physiologistes n'osent pas parler de " sommeil ", chez une grenouille, chez un lézard; ils parlent plutôt de " repos ", de " cycle activité/repos ". La température ambiante est le principal facteur qui va entretenir le repos et l'activité. La température, lorsqu'elle monte, rend l'animal actif, lorsqu'elle redescend, le rend inactif. On peut très bien aller chercher une vipère dans le bois de Saint-Cloud à minuit : elle ne mordra pas, parce qu'il fait froid.

Tout ceci résulte de l'application d'un principe : le principe du Q10. Admettons que la fréquence cardiaque de l'animal à 37° C soit de 100; à 27° C, elle sera de 50 ; et le Q10 sera le quotient de 37/27 : ce sera 2. Chez tous les animaux, tous les phénomènes biologiques quels qu'ils soient ont un Q10 compris entre 2 et 3. Une baisse de température de l'ordre de 5° est suffisante pour que ces animaux qui dépendent de la température extérieure, ne puissent pas être éveillés et restent dans leur abri. L'homéostasie prédictive joue toujours un jeu : l'horloge circadienne vers 5 heures de l'après-midi, " dit " au lézard : " mets-toi vite à l'ombre, autrement, plus tard, tu ne pourras pas rentrer car il fera trop froid ". Avec les oiseaux et les autres mammifères, nous sommes des animaux *homéothermes*. Nous possédons suffisamment de mitochondries pour que notre chaleur animale nous permette de nous promener lorsqu'il fait froid. Les variations de la température extérieure ne sont donc pas suffisantes pour expliquer le rythme éveil-sommeil.

Il faut maintenant essayer d'expliquer pourquoi on est inconscient pendant le sommeil.

Pourquoi le ronfleur ne sait-il pas qu'il ronfle ? Que se passe-t-il dans le sommeil des oiseaux et des mammifères que nous sommes, pour que nous perdions conscience au cours du sommeil ?

C'est facile à comprendre pour une grenouille : si elle est à basse température, son système nerveux ne marche pas très bien. Mais, chez les mammifères, chez l'homme, la température reste la même, donc il faut chercher une autre explication. Qu'est-ce que, chez les mammifères et les oiseaux ont acquis de plus par rapport aux reptiles et aux batraciens ? Ils ont acquis le manteau cortical - le cortex cérébral avec lequel on pense -, et un système qui est le thalamus, il y a une espèce de " machine automatique " qui nous rend inconscients lorsque nous dormons.

Que se passe-t-il quand nous sommes éveillés ? Ce cortex cérébral est excité par un réseau de neurones (comme le Web). Cette excitation provoque une activité électrique rapide qui est nécessaire à la conscience.. Comment s'endort-on ? Normalement : lorsque l'horloge - le noyau supra-chiasmatique - va envoyer le signal " il est 10 heures du soir ", on va bailler, avoir sommeil. Des mécanismes compliqués vont commencer à baisser notre température centrale. Elle descend avant que l'on dorme. Ordre est alors donné à un nouveau système situé dans l'hypothalamus - le système du sommeil - d'entrer en jeu. Ce système va venir bloquer les systèmes de l'éveil, avec un neurotransmetteur qui est le " GABA ". Etant donné que les systèmes de l'éveil bloquent cette machine automatique qui est situé au coeur du thalamus, le thalamus envoie alors cette activité vers le cortex où elle vient " brouiller " les processus de la conscience. On a donné à cette activité électrique le nom de " fuseaux ", ou, comme elle a été découverte par les Américains, de *spindle.*

Voilà les grandes acquisitions des homéothermes : ce n'est pas la baisse de la température centrale, qui est minime, qui fait qu'ils ne peuvent pas réagir au bruit, et qu'ils ne savent pas qu'ils ronflent. C'est le système de sommeil qui bloque les informations de l'éveil, libère le système thalamo-cortical responsable des " fuseaux ". L'apparition de ces " fuseaux " au niveau du cortex est l'indice du sommeil et de la perte de conscience. Les fuseaux sont ensuite suivis par l'apparition d'ondes lentes qui sont l'indice d'un sommeil très profond. (...)

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
CONCOURS 2001
ITS A – 2H

Exercice 1. : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages sans remise. Soient X, Y et Z les variables aléatoires représentant respectivement le plus grand, le plus petit et la somme des deux numéros obtenus.

1. Faire les tableaux **T1**, **T2** et **T3** croisant les valeurs des variables X, Y et Z et leurs probabilités correspondantes.

2. Calculer les espérances mathématiques et les variances de X, Y et Z.

3. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 2. :

1. Démontrer les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Indication : on pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

2. On rappelle que pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, établir une relation reliant la quantité C_{n+1}^{p+1} aux quantités C_n^p et C_n^{p+1}.

Exercice 3. : Etant donnée une suite x_k, $k = 1, \ldots, n$, de réels, on note μ_n sa moyenne et σ_n^2 sa variance définies par

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_n)^2.$$

1. Première expression de la variance.

On pose

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

.

Exprimer σ_n^2 en fonction de q_n et de μ_n.

2. Deuxième expression de la variance.

2.1.

a. Etablir les égalités :

$$(n+1)\,\sigma_{n+1}^2 = n\,\sigma_n^2 + n\,(\mu_{n+1}-\mu_n)^2 + (x_{n+1}-\mu_{n+1})^2,$$

$$(n+1)\,\mu_{n+1} = n\mu_n + x_{n+1}.$$

b. En déduire

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2.$$

2.2. On considère une suite de réels $x_k = 1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1}$, $k = 1, \ldots, n$ $(n > 1)$ et $\varepsilon \in I\!R$. A partir des relations obtenues à la question **2.1.** et des formules établies à l'**Exercice 2.**, déterminer sa moyenne et sa variance.

Exercice 4. : En faisant une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante

$$\int_1^2 \ln(t)dt.$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de g est $g^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} = k\, x^{\alpha-1}$ $\quad (k > 0)$
On rappelle que $x^{\alpha} = e^{\alpha Ln(x)} > 0$, donc $g^{'}(x) > 0$ et g est strictement croissante.

Si $\alpha > 1$, $\underset{+\infty}{Lim}\, g = +\infty$ et $\underset{+\infty}{Lim} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On a donc une branche parabolique dans la direction verticale. D'autre part, $\underset{0}{Lim}\, g = 0$ et on peut prolonger g par continuité en zéro. Le graphe s'en déduit.

Si $0 < \alpha < 1$, $\underset{+\infty}{Lim} \frac{g(x)}{x} = 0$. La branche parabolique est dans la direction horizontale. les autres éléments ne changent pas.
Pour $\alpha = 1$, $g(x) = x\, y^{\beta}$. On a une application linéaire.

❷ Comme $ax + by \le R$, on a $x \le \frac{R - by}{a}$. La fonction g étant croissante, le maximum est atteint pour la plus grande valeur de x, à savoir $x = \frac{R - by}{a}$, d'où
$h(y) = \underset{x}{Max}\, f(x, y) = \left(\frac{R - by}{a}\right)^{\alpha} y^{\beta}$ à condition que $\frac{R - by}{a} > 0$, ce qui est vérifié.

❸ On obtient $a^{\alpha} h^{'}(t) = (R - bt)^{\alpha-1} t^{\beta-1} (R\beta - bt)$.
La fonction h est croissante si $t < \frac{R\beta}{b}$ et décroissante dans le cas contraire.

EXERCICE n° 2

❶ Il faut $x > -1$ et $x \neq 0$. On peut prolonger f par continuité en zéro, en posant $f(0) = 0$. On obtient $f'(x) = \dfrac{x-(x+1)Ln(x+1)}{(x+1)x^2}$.
La dérivée est du signe du numérateur, on étudie donc ce numérateur.
On obtient alors que f est strictement décroissante de $]-1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

❷ L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $Ln(x+1) = x^2$. On étudie la fonction g définie sur R^{+*} par $g(x) = x^2 - Ln(x+1)$. Cette fonction admet un minimum négatif en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et elle est strictement croissante de $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$ sur $[\lambda,+\infty[$ avec $\lambda < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point fixe sur cet intervalle.

EXERCICE n° 3

❶ Pour deux numéros, on a : $2x+2=36$, soit $x=17$
Pour trois numéros, on a : $3x+3=36$, soit $x=11$
Pour six numéros, on a : $6x+6=36$, soit $x=5$

❷ Pour tout couple (x, y), la probabilité est $\dfrac{1}{38}\times\dfrac{1}{38}$. Les deux événements sont indépendants, pour toutes valeurs de x et de y.

❸ Il n'existe pas de stratégies gagnantes, car les évènements sont indépendants.

PROBLEME

❶ La dérivée de f est nulle pour $x=\frac{1}{a}$. La fonction f est croissante sur $\left]0,\frac{1}{a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{a},+\infty\right[$. On trouve $f(\frac{1}{a})=-1-Ln(a)$

Si $a>\frac{1}{e}$, l'équation n'admet pas de solution;

Si $a=\frac{1}{e}$, on a une seule solution.

Si $0<a<\frac{1}{e}$, il y a deux solutions.

❷ La fonction admet une branche parabolique dans la direction $y=-ax$

❸ L'aire est égale à $I=\int_1^2(\frac{1}{2}x-Ln(x))dx$, d'où $I=\left[\frac{x^2}{4}-(xLnx-x)\right]_1^2$

On obtient $I=\frac{7}{4}-2Ln2$

❹ Il s'agit de montrer que f est convexe, on vérifie alors que sa dérivée seconde est positive

❺ Pour la suite géométrique (u_n), on a les résultats suivants:

Si $0<a<1$, la suite converge vers zéro.
Si $a=1$, la suite est stationnaire.
Si $a>1$, la suite est divergente.

Pour la suite (v_n), on a $v_{n+1}=-f(v_n)$ et comme f est négative, on vérifie par récurrence que la suite (v_n) est toujours positive.

D'autre part, si $(v_n)\to l$, alors l est solution de l'équation $l=-f(l)$. Soit $y=\frac{1}{2}l+Ln(l)$.

L'étude de cette fonction montre qu'il existe une solution unique l comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

On considère la suite extraite des termes de rang pair et la suite extraite des termes de rang impair. Les deux suites sont adjacentes et convergent vers cette valeur l.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) L'événement X = p est réalisé par le couple (p, p) et par les couples (p, k) et (k, p) pour k entier variant de 1 à p-1. Comme l'urne contient n boules et que le tirage se fait avec remise, la probabilité de tirer un couple quelconque est $1/n^2$. Il s'ensuit:

$$P(E_p) = \frac{2p-1}{n^2}$$

En particulier $P(E_2) = 3/n^2$, $P(E_3) = 5/n^2$.

2) L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{p=1}^{n} p\frac{2p-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$$

En utilisant les égalités rappelées dans l'énoncé, on trouve:

$$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Exercice n° 2

1) Posons $u = 1- t$ et $dv = e^{t/2}dt$. Alors $du = -dt$ et $v=2\,e^{t/2}$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{4}[2(1-t)e^{t/2}]_0^1 + [e^{t/2}]_0^1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$$

2) On pose de même $u = (1- t)^{n+1}$ et $dv = e^{t/2}dt$. On obtient cette fois :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}[2(1-t)^{n+1}e^{t/2}]_0^1 + \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt$$

On en déduit aussitôt la relation demandée.

3) D'après la question 2),

$$\sum_{k=2}^{n}(I_k - I_{k-1}) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k k!}$$

Le premier membre se réduit à I_n - I_1. On remplace ensuite I_1 par son expression calculée dans la question 1)

4) Pour tout $t\in[0, 1]$ et pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq (1 - t)^n \leq 1$.

L'intégrale étant une forme linéaire croissante, on a

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt \leq \int_0^1 e^{t/2}dt = 2(\sqrt{e}-1)$$

Par conséquent :

$$0 \leq I_n \leq \frac{\sqrt{e}-1}{2^n n!}$$

Le nombre $A = \sqrt{e} - 1$ convient donc.

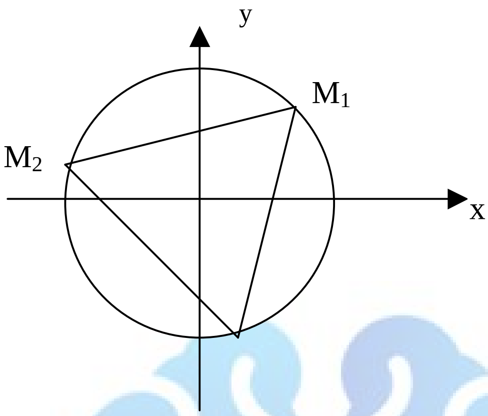
Lorsque n tend vers $+\infty$, $2^n n!$ tend vers $+\infty$, et son inverse tend vers 0. On en conclut que la suite (I_n) tend vers 0 et que la suite de terme général (u_n) converge vers $\sqrt{e}$

PROBLEME

I.1) Les solutions de l'équation $g(z) = 0$ sont les racines cubiques de $2(-1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$. La solution $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$ est évidente. Les autres solutions sont :

$$z_2 = j\, z_1 = \sqrt{2}\, e^{11i\pi/12} \text{ et } z_3 = j^2 z_1 = \sqrt{2}\, e^{-5i\pi/12}.$$

Les points M_1, M_2, M_3 images de ces racines dans le plan **P** appartiennent au cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$ et forment un triangle équilatéral.



2) Soit x une solution réelle de $f(z)=0$. En annulant les parties réelle et imaginaire, on a :

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0 \text{ et } -4x^2 - 14x + 8 = 0.$$

La 2nde équation admet pour racines -4 et 1/2. En reportant dans la 1ère équation, on voit que -4 est racine de f mais pas 1/2. D'où r = 4.

Pour tout complexe z, on a:

$$f(z) = (z + 4)(z^2 - 4) - 2i(z + 4)(2z - 1)$$
$$= (z + 4)(z^2 - 4iz - 4 + 2i).$$

D'où $a = -4i$ et $b = -4 + 2i$.

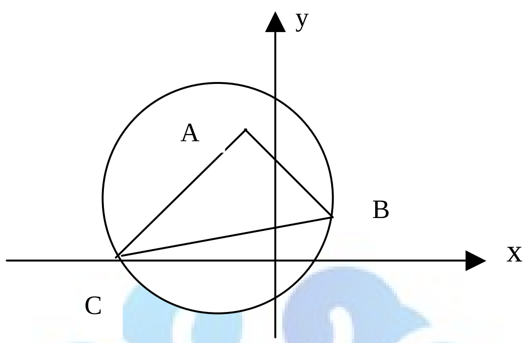
3) Puisque **C** est un corps, on se ramène à l'équation du 2ème degré :

$$z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$$

On reconnaît dans les 3 premiers termes le carré de z - 2i. Comme $-2i = (1-i)^2$, les trois solutions sont :

$z' = -4$ $z'' = 1+i$ et $z''' = -1+3i$

On a $z''' - z' = 3(1+i)$ et $z''' - z'' = -2(1-i)$ et $z''' - z'' = 2i(z''' - z')/3$ et avec les notations de la question 4), le triangle ABC est rectangle en A.



4) L'affixe de G est:

$$z_G = (-4 + 12i + 3 + 3i - 20)/12 = (-7+5i)/4.$$

5) D'après 3), $h(A) = \vec{A}B.A\vec{C} = 0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

De même $h(C) = C\vec{A}.\vec{C}B$. Comme CA et CB on pour composantes respectives (3, 3) et (5, 1) on obtient *h(C)*=18.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$h(M) = 6\left\|\vec{M}G\right\|^2 + \vec{M}G \cdot (4G\vec{A} + 3G\vec{B} + 5G\vec{C}) + h(G)$$

Par définition de G, le terme entre parenthèses est nul, donc :

$$h(M) = 6\left\|\vec{M}G\right\|^2 + h(G)$$

D'après 4), les composantes des vecteurs GA, GB et GC sont respectivement (3/4, 7/4),

(11/4, -1/4) et (-9/4, -5/4). On en déduit :

h(G) = -348/16 = -87/4

L'équation h(M) = 18 équivaut à $\left\|\vec{M}G\right\|^2 = 53/8$. L'ensemble des points cherché est le cercle de centre G et de rayon √53/8. On a vu que *h(C)*=18, le nombre 18 a été choisi pour que ce cercle passe par le point C.

II 1) En séparant les parties réelle et imaginaire, on a:

$x' = 4(x^2 - y^2) + 8xy - 4x + 14y - 18$

$y' = -4(x^2 - y^2) + 8xy - 14x - 4y + 10.$

2) Les composantes du vecteur OB étant (1, 1), les points O, B et M' sont alignés si et seulement si x' = y', c'est à dire après simplifications :

$4x^2 - 4y^2 - 5x + 9y - 14 = 0$

qu'on peut écrire sous la forme :

$4(x + 5/8)^2 - 4(y - 9/8)^2 - 21/2 = 0$

soit, sous forme canonique :

$(x + 5/8)^2 - (y - 9/8)^2 = 21/8$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère, de centre (-5/8, 9/8), dont les asymptotes ont pour équations y = x + 7/4 et y = -x + 1/2.

3) Le point I centre gravité de A, B, C a pour affixe (-1 + 3i + 1 + i - 4)/3 = 4(-1 + i)/3. Les points O, I et M' sont alignés si et seulement si x' + y' = 0, puisque le vecteur OI est colinéaire au vecteur de composante (-1, 1). D'où, après simplification :

$$8xy - 9x + 5y - 4 = 0$$

soit, pour $x \neq -5/8$, $y = \frac{9x+4}{8x+5}$. L'ensemble H_2 est une hyperbole équilatère, ayant le même centre que H_1 le point de coordonnées (-5/8, 9/8). Les asymptotes admettent pour équations x=-5/8 et y=9/8.

4) Par définition H_1 est l'ensemble des points dont les images par *h* sont sur la droite OB et H_2 celui des points dont les images sont sur la droite OI. Or les droites OB et OI ont un point commun et un seul, à savoir O.

L'équation *f(z) = g(z)* se réduit à :

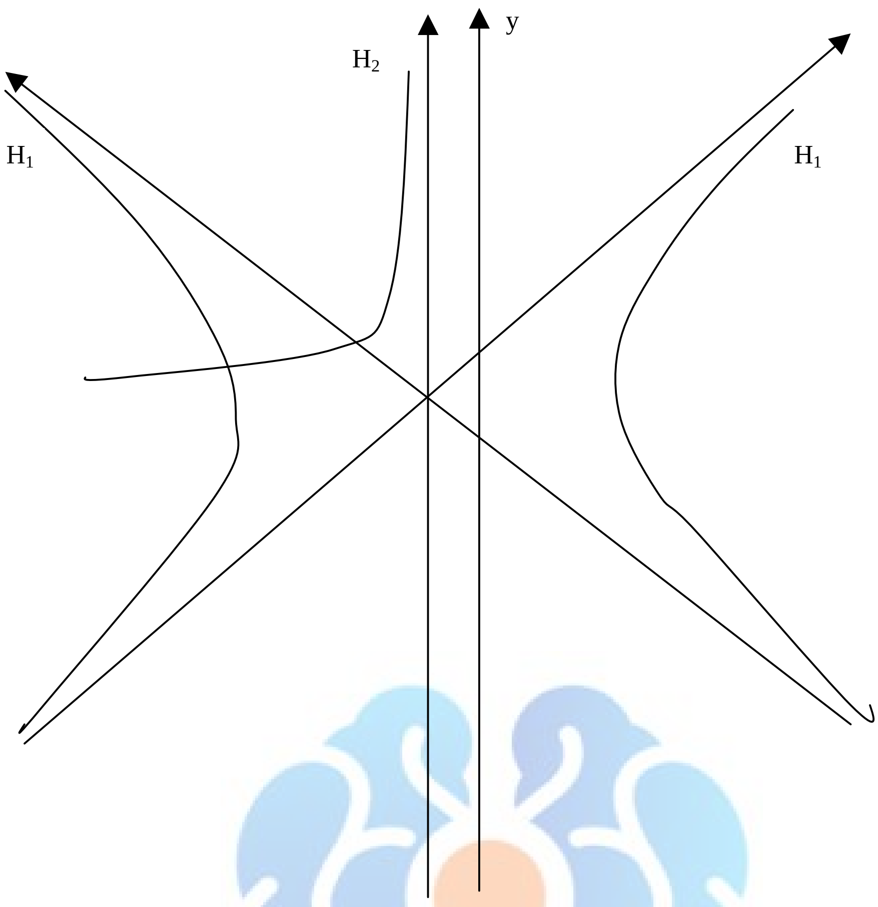
$$2(1 - i)z^2 - (2 + 7i)z - 9 + 5i = 0.$$

D'après les questions I. 1) et I. 2), nous savons que 1+i est solution. L'autre solution est :

$$\frac{-9+5i}{2(1-i)(1+i)} = \frac{-9+5i}{4}.$$

Pour résoudre l'équation, on peut aussi calculer le discriminant qui est $\Delta=-13-84i = (6-7i)^2$.

L'un des points communs est donc B(1, 1), l'autre de coordonnées (-9/4, 5/4) est le symétrique de B par rapport au centre commun aux deux hyperboles.


y
H_2
H_1
H_1

CORRECTION
EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
ITS A

Exercice 1:

1.
T1

$X = x_i$	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

T2

$Y = y_i$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$

T3

$Z = z_i$	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/6$

2.

$\mathbb{E}(X) = 10/3,\ \mathbb{E}(Y) = 5/3,\ \mathbb{E}(Z) = 5$ $\qquad$ $\text{Var}(X) = 5/9,\ \text{Var}(Y) = 5/9,\ \text{Var}(Z) = 5/3.$

3. On note F la fonction de répartition de Z. Cette fonction est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 3 \\ 1/6 \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 1/3 \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ 2/3 \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ 5/6 \text{ si } 6 \leq x < 7 \\ 1 \text{ si } 7 \leq x \end{cases}$$

Exercice 2.

1.

PREMIERE FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et en la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

DEUXIEME FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

2.

$$\begin{aligned}C_n^{p+1} + C_n^p &= \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!(n-p)}{(n+1-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} \\ &= \frac{n![(n-p) + (p+1)]}{(n-p)!(p+1)!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!} \\
&= C_{n+1}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration.

Exercice 3.

1.

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\mu_n^2-2\mu_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \\
&= \frac{q_n}{n}+\mu_n^2-2\mu_n^2 \\
&= \frac{q_n}{n}-\mu_n^2
\end{aligned}
$$

2.1.a. On établit la première égalité comme suit :

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sigma_{n+1}^2-n\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n+1}(x_k-\mu_{n+1})^2-\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_{n+1}-\mu_n+\mu_n)^2-\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2 \\
&= -2(\mu_n-\mu_{n+1})\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)+n(\mu_n-\mu_{n+1})^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2 \\
&= n(\mu_n-\mu_{n+1})^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2,
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité a lieu car $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k-n\mu_n=n\mu_n-n\mu_n$.
La deuxième égalité s'obtient facilement en écrivant :

$$
(n+1)\mu_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}=n\mu_n+x_{n+1}.
$$

2.1.b. De **2.1.a.**, on en déduit que

$$
\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2+\frac{n}{n+1}(\mu_{n+1}-\mu_n)^2+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(\mu_{n+1} - \frac{n+1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(-\frac{1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{(n+1)n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2.
\end{aligned}$$

2.2. Le calcul de la moyenne se fait directement en utilisant la formule de la moyenne de l'énoncé et la première relation établie à l'**Exercice 2.**

$$\begin{aligned}
n\mu_n &= \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n} k) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2n(n+1)}{2(n-1)}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{n(n+1)}{(n-1)}) \\
&= n.
\end{aligned}$$

La valeur de μ_n est $\mu_n = 1$.

A partir de la relation **2.1.a.**, on peut aussi établir par récurrence la relation :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \mu_k = 1 - \varepsilon(1 - \frac{k-1}{n-1}).$$

En conséquence de quoi, on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x_k - \mu_k = \varepsilon\frac{k-1}{n-1}. \tag{1}$$

On va utiliser cette relation pour calculer la variance de la suite. Pour ce qui concerne la variance, nous faisons un raisonnement par récurrence en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et (1) : étudions les cas où $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= 0,\\
\sigma_2^2 &= (x_2-\mu_2)^2 = \frac{(2-1)^2\varepsilon^2}{(n-1)^2},\\
\sigma_3^2 &= \frac{2}{3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + 2\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2},\\
\sigma_4^2 &= \frac{3.2}{4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3}{4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2},\\
\sigma_5^2 &= \frac{4.3.2}{5.4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{5.4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4}{5}(4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (5-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

Supposons la relation de récurrence : $\forall k \in \{1,\dots,n\}$,

$$\sigma_k^2 = \frac{2.(2-1)}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \dots + (k-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.$$

On a établit que pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$ l'hypothèse de récurrence est satisfaite, supposons la vraie à l'étape k et montrons qu'elle reste vraie à l'étape $k+1$; en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et la relation (1), on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{k+1}^2 &= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon\, k}{n-1}\right)^2\\
&= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + k\left(\frac{\varepsilon}{n-1}\right)^2\\
&= \frac{2.(2-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{k(k-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + k\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2};
\end{aligned}$$

la relation de récurrence est à présent établie. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k\right)\\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^2 n(n+1)(n-1)}{3n(n-1)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2 (n+1)}{3(n-1)} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\frac{2}{n-1}).
\end{aligned}
$$

La valeur de σ_n^2 est égale à $\sigma_n^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\frac{2}{n-1})$ pour tout $n > 1$.

Exercice 3. En posant $u = \ln(t)$ et $v' = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)dt &= [\ln(t)t]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{t}dt \\
&= \ln(2).2 - [1]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 1 \\
&= 0.386
\end{aligned}
$$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Pourquoi suffit-il d'un tableau noir et d'un morceau de craie pour établir des vérités mathémathiques, alors que le physicien a besoin d'observer et d'expérimenter ?

SUJET N° 2

Expliquer et apprécier cette assertion que "la liberté d'indifférence est le plus bas niveau de la Liberté".

Descartes "Méditations"

SUJET N° 3

Un philosophe a défini l'intelligence "la fonction qui adapte des moyens à des fins". Cette formule vous paraît-elle présenter les conditions d'une bonne définition ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = xLnx - 2x + e$$

où Lnx désigne le logarithme népérien de x et e le nombre de Néper.

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation suivante, où a est un paramètre réel :

$$xLnx - (2+a)x = 0$$

❸ Calculer l'aire limitée par les deux axes et la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE n° 2

Pour deux nombres réels a,b qui vérifient $a<b$, on pose :

$$\varphi_{a,b}(x)=\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+1-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

❶ Pour $x\in[-\pi,\pi]$, montrer que :

- Si $a<x<b$, alors $\varphi_{a,b}(x)>2$
- Si $x\leq a$ ou $a\geq b$, alors $-1\leq\varphi_{a,b}(x)\leq 1$

❷ Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[-\pi,\pi]$.
Montrer qu'il existe un couple $,a,b)$ de nombres réels et un entier naturel n tels que

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\neq 0$$

❸ On suppose maintenant que f vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d^{inx}\,dx=0$. Montrer que f est alors la fonction identiquement nulle.

EXERCICE n° 3

❶ Calculer $\sum_{k=1}^{n}k$ et montrer que : $\sum_{k=1}^{n}k^1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Pour toute suite finie de valeurs réelles x_t $(L=1)2)22n)$, trouver le nombre réel a qui minimise l'expression $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a)^2$

❸ Trouver les nombres réels a et b qui minimisent l'expression $\sum_{t=1}^{n}(X_t-(at+b))^2$

EXERCICE n° 4

On considère une suite réelle (u_n) dont les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

PROBLEME

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions f_n sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $a_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ Donner le tableau de variation de f_n.

❷ Montrer que l'équation $x^n = Ln(1+x)$ admet une unique solution sur l'ensemble des réels strictement positifs, notée α_n. Montrer que $\alpha_n \in ,0,1)$

❸ En étudiant le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$, montrer que la suite (α_n) est croissante. Montrer que cette suite est convergente et que sa limite est égale à 1.

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. Montrer que u_n est équivalent à $\dfrac{-Ln(Ln2)}{n}$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

Et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

✶✶✶

Ce texte est tiré du livre "LA SCIENCE à l'usage des non-scientifiques", par Albert Jacquard, paru aux éditions Calmann-Lévy, en septembre 2001. Il peut être résumé en 240 mots plus ou moins 10%.

Depuis que Jacques Monod en a fait le titre d'un livre retentissant, l'association du "hasard" et de la "nécessité" est présente dans tous les esprits. Ces deux mots forment un couple indissociable et antagoniste aussi définitivement lié, par la vertu d'un titre sur une couverture, que "le Rouge et le Noir", "l'Etre et le Néant" ou "Dr Jekyll et Mr. Hyde". Cette accointance nous incite à définir chacun des membres du couple par référence à l'autre, au risque d'un cheminement circulaire semblable à celui des dictionnaires lorsqu'ils définissent, par exemple, la vie comme "le propre des êtres qui sont nés et ne sont pas encore morts" et la mort comme "la cessation de la vie". Le *hasard* serait-il seulement ce qui reste lorsqu'on a épuisé la liste des facteurs participant à la *nécessité*, et la *nécessité* ce qui reste lorsque le *hasard* n'intervient plus ? Une définition moins tautologique est évidemment nécessaire ; elle va mettre en évidence l'intervention d'un troisième terme, la *finalité*.

Ces concepts s'introduisent à propos des attitudes possibles lorsque nous cherchons à expliquer les événements dont nous sommes les témoins. Nous pouvons admettre qu'ils sont la conséquence *nécessaire* de l'état du monde à l'instant où ils se produisent, état qui résulte de son histoire antérieure ; le présent est alors le produit du passé. Nous pouvons aussi renoncer à chercher un rapport entre ces événements et les conditions de leur survenue ; le présent n'est alors que le produit sans cause de lui-même, l'oeuvre du *hasard*. Nous pouvons enfin admettre qu'ils ont eu lieu pour rendre possible un événement futur, qu'ils sont au service d'une *fin*, le présent est alors le produit de l'avenir.

Ces trois termes : nécessité, hasard, finalité, sont donc la traduction de notre opinion sur le sens dans lequel agit la flèche du temps.

De la pensée magique à Démocrite

La réponse la plus simple, lorsque nous essayons de comprendre ce qui se passe autour de nous, est d'admettre que tout événement est le résultat des décisions d'un être puissant et inconnu. Nous ne sommes plus intrigués par la tempête si nous l'attribuons à une colère de Poséïdon, par la foudre si elle est une manifestation de la puissance de Zeus. Tout ce qui survient dépend des volontés ou des caprices des dieux. Ceux-ci sont décrits comme des personnages semblables aux humains ; ils sont animés par des intentions, par le désir de parvenir à un résultat. La pensée magique est donc fondamentalement finaliste : elle admet que le présent est au service d'un futur choisi par une divinité.

L'avantage de cette vision est de fournir une explication de tout ; il suffit, lorsque les divinités déjà en place dans le panthéon collectif ne sont pas suffisantes, d'ajouter de nouveaux personnages. Le prix à payer est d'accepter une attitude de soumission, car si tout dépend des dieux, chacun de nous en est le jouet.

C'est le refus de cette soumission qu'exprime la phrase de Démocrite qui a inspiré son titre à Jacques Monod : "Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité". Que pouvaient signifier ces mots pour un philosophe grec quatre siècles avant Jésus-Christ ?

Le sens de cette affirmation doit être cherché moins dans les deux termes énoncés que dans l'absence du troisième. En fait, en omettant de citer la finalité, Démocrite recuse l'influence des dieux.

Il propose de rendre compte de la succession des événements en admettant certaines régularités, les "lois de la nature", qui à chaque instant transforment l'état du monde, et qui participent à la *nécessité ;* mais il reconnaît que ces lois n'expliquent pas tout ; force est de constater qu'une part des faits échappe à leur rigueur ; cette part est attribuée au *hasard*.

De l'action des dieux, de la finalité qu'ils introduisent, il n'est plus question. Ce faisant, Démocrite fonde l'attitude scientifique.

Celle-ci consiste à tenir compte d'une évidence : l'avenir n'a pas d'existence, il est donc exclu de tenir compte de lui pour expliquer le présent. Les efforts de compréhension produits par les scientifiques seraient rendus stériles au départ s'ils admettaient qu'un fait se produisant aujourd'hui puisse être expliqué par la réalité de demain.

Il ne s'agit pas là d'une croyance à imposer, mais d'une règle du jeu à respecter. Il est parfaitement possible d'admettre que tout fait résulte de la volonté d'un Dieu (ou de dieux) veillant à la réalisation du programme qu'Il a (ou qu'ils ont) adopté, et intervenant, en permanence ou par impulsions, pour atteindre la fin, qu'il a (qu'ils ont) décidée. Rien ne peut prouver que cette hypothèse "finaliste", est fausse. Mais l'accepter est rendre vaine toute tentative d'explication rationnelle des faits observés. Entrer dans le cheminement scientifique, c'est prendre pour règle de ne pas y recourir.

Cette attitude consiste à regarder le monde réel avec la volonté de le déchiffrer, à se sentir simultanément immergé en lui et face à lui, à lui poser des questions en sachant que les réponses seront souvent provisoires et toujours partielles. Choisir cette voie manifeste une orgueilleuse volonté d'autonomie. Certes, il faut en payer le prix de doutes, de tâtonnements, de frustrations, mais elle procure aussi (à vrai dire depuis peu) de magnifiques récompenses. Comprendre l'enchaînement des causes et des effets permet parfois de modifier leur succession et d'engager la suite des événements dans une direction que la nature n'aurait pas spontanément suivie. L'exemple le plus clair est celui des maladies ; comprendre leur cause permet de plus en plus souvent de les guérir, alors que nous en étions autrefois réduits aux incantations et aux remèdes empiriques. Nous savons, grâce à la science, sauver des vies : si le roi est à l'agonie, une piqûre d'antibiotiques (attitude se référant à la nécessité) peut être plus efficace que l'attitude finaliste des chants implorant " God save the King ".

On comprend l'émotion ressentie par Jacques Monod en découvrant Démocrite : c'est le programme de la science que celui-ci a tracé il y a vingt-quatre siècles.

Les déguisements de la finalité

Certains raisonnements scientifiques donnent, à vrai dire, l'impression de suivre une démarche finaliste. Tel est le cas lorsque le processus étudié est présenté comme tendant vers un certain objectif, notamment vers l'optimisation de tel ou tel paramètre. Ainsi, selon la mécanique classique, le cheminement d'un système matériel pour passer d'un état initial à un état final est expliqué par le *principe de moindre action* : la trajectoire suivie par les différents éléments de ce système est celle qui rend minimale la somme des actions nécessaires. (ce concept d'action est défini à partir de celui d'impulsion, c'est à dire du produit de la masse par la vitesse : un objet de masse *m* et de vitesse *v* a une impulsion p = mv ; lorsque cet objet parcourt la longueur *l*, son action A est définie A = pl = mvl.)

Tout se passe comme si, face aux multiples possibilités de changement qui s'offrent à elle, la structure concrète choisissait la trajectoire correspondant à l'action globale la plus faible. L'introduction d'un choix dans le raisonnement est équivalente à l'acceptation d'un objectif, donc au recours à la finalité.

L'exemple classique est celui de la réfraction d'un rayon lumineux lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre ; son parcours rectiligne est alors brisé. Ce changement d'orientation est expliqué en recourant au concept d'indice de réfraction : les angles d'incidence et de réfraction (c'est à dire les angles *i* et *r* du rayon lumineux avec la perpendiculaire à la surface de séparation) sont tels que

sini/sinr = nr/ni

ou *ni* et *nr* sont les indices de réfraction des deux milieux. mais une telle présentation est plus une définition des indices de réfraction qu'une explication des causes du phénomène.

Ces causes peuvent être recherchées dans le fait que la lumière n'a pas la même vitesses dans les deux milieux et que le parcours choisi est celui qui rend minimal le temps total du parcours.

Pour comprendre le comportement du rayon lumineux, le physicien Richard Feynman imagine un homme assis sur une plage et qui voit soudain dans la mer un enfant en difficulté ; il faut vite lui porter secours, sinon il risque de se noyer. Pour être efficace, cet acteur ne doit pas se précipiter en ligne droite vers l'enfant, ce qui est le trajet le plus court, mais faire un détour de façon à allonger son trajet sur le sable, où il peut courir vite, et raccourcir celui dans l'eau , où sa nage est lente. De même, un rayon lumineux allant d'un point A dans l'air à un point B dans l'eau ne suit pas la ligne droite AB, mais fait un détour par le point C, car sa vitesse c_i dans l'air est plus grande que sa vitesse c_r dans l'eau.

Un calcul simple (...), permet de caractériser la position du point C minimisant la durée totale du parcours par la relation

$\sin i / \sin r = c_i / c_r$

On constate ainsi que les indices de réfraction, introduits empiriquement pour expliquer le phénomène observé, sont en fait reliés à une réalité physique : la vitesse de la lumière qui varie selon les milieux.

Mais l'important pour notre propos est que le raisonnement tenu est parfaitement finaliste, et la métaphore imaginée par Feynman le montre à l'évidence : l'homme à la plage a un objectif, arriver le plus vite possible. Faut-il admettre que la lumière a une attitude semblable et que les photons, avant de quitter le point A, font les calculs définissant le point C vers lequel ils doivent se diriger, pour ensuite obliquer vers B ? Telle n'est évidemment pas l'intention du physicien ; il constate que tout se passe comme si la nature avait un objectif, mais cette apparence n'est que le résultat de la multiplicité des causes en action.

De même, Newton se gardait d'affirmer que "les masses s'attirent", il se contentait de constater que tout se passe comme si elles s'attiraient. Avec la théorie de la relativité d'Einstein, cette apparence trouve une explication qui ne fait plus appel à une quelconque "attirance", mais à une courbure de l'espace.

Chaque fois qu'un processus est expliqué par la recherche d'un optimum, le "péché de finalisme" est effectivement commis, car le raisonnement revient à admettre que la nature fait un choix entre plusieurs attitudes possibles et qu'elle dispose d'un critère faisant référence à l'état futur de la réalité. Pour rester fidèle à la règle du jeu de la science, il est essentiel de ne pas oublier le "tout se passe comme si", qui est un aveu d'ignorance, donc une incitation à poursuivre la recherche.

De Démocrite à Laplace

Malgré la tentation permanente d'une attitude finaliste, la recherche de processus ne faisant appel qu'au déterminisme a obtenu de remarquables succès. Ils ont incité non seulement à récuser la finalité, mais aussi à réduire autant que possible le rôle du hasard. Celui-ci n'est vu que comme une conséquence de notre ignorance, une *terra incognita* provisoire dans notre description des enchaînements de cause à effet. Nous sommes enclins à n'attribuer d'importance qu'au seul acteur véritablement sérieux, le déterminisme qui fait, sans état d'âme, se succéder les événements dans une séquence rigoureuse. Le hasard n'est qu'un trublion dont la disparition est souhaitée. La nécessité fait penser à l'excellent Dr Jekyll, le hasard à l'abominable Mr. Hyde.

Un tel regard sur la réalité a été poussé à son paroxysme par le physicien et mathématicien Simon de Laplace au début du XIX^{e} siècle.

Dans un texte célèbre, il imagine un personnage (un démon, comme on disait alors) informé de toutes les lois de la nature et connaissant l'état, à un instant donné, de toutes les particules qui constituent l'Univers. Utilisant les formules mathématiques qui traduisent ces lois, ce démon serait en mesure de décrire ce que sera l'Univers à l'instant suivant, et, de proche en proche, tous ses états futurs, ; puis par des calculs semblables, de reconstituer tous ses états passés.

Dans la pensée de Laplace, l'Univers est réellement semblable à l'horloge dont Voltaire cherchait l'horloger ; chaque rouage en est dépendant de tous les autres, que se soit dans l'espace ou dans la durée. Connaître un lieu ou connaître un instant du cosmos, c'est être capable de connaître la totalité de son déploiement dans l'espace et la totalité de son histoire passée et à venir. La réalité d'aujourd'hui contient celle d'aujourd'hui et celle de demain ; l'Univers est comme enfermé dans une trajectoire préétablie dont il ne peut s'échapper ; le passage du temps ne fait que révéler ce qui était jusqu'alors caché sans rien apporter de fondamentalement nouveau.

Cette vision correspond assez bien à celle que nous retirons d'un premier regard sur ce qui nous entoure. À quelques détails près, l'univers semble immuable. "Il n'y a jamais rien de nouveau sous le soleil ? Tout est vanité et poursuite du vent", dit l'Ecclésiaste.

Que l'Univers soit stable, figé dans un état définitif, paraît en un premier temps, plutôt rassurant, tout au moins dans la mesure où nous nous regardons nous-mêmes comme simplement de passage, d'une autre nature que le monde réel. Mais, dès que nous admettons que nous en sommes un élément, il nous faut assumer le même statut et, par conséquent, perdre tout espoir de liberté.

Cette vision d'un monde sur lequel le temps n'a aucune prise, dont l'avenir est contenu dans le présent, est homogène à celle de la "prédestination" développée dans le domaine spirituel par Jean Calvin. Pour ce théologien, tout, y compris le salut éternel de chacun, a été décidé dès le jour de la Création. Pour le physicien qu'est Laplace, ce n'est pas du salut des âmes qu'il est question, mais son raisonnement aboutit au même constat pour le devenir du monde concret, dont chaque individu fait partie. Faut-il alors, au nom de la lucidité scientifique, accepter que la liberté tant célébrée ne soit qu'une chimère de poète ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

Le code antivol d'une autoradio est un nombre de 4 chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1,…,9.

1) Quel est le nombre de codes possibles ?
2) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux.
3) Après une panne de batterie, le propriétaire doit réintroduire son code pour pouvoir utiliser son autoradio. Il sait que les quatre chiffres de son code sont 2, 5 , 5, 8, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
   a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces quatre chiffres ? On pourra déterminer ces codes en construisant un arbre.
   b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 1 minute avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 2 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, le délai est de 4 minutes, entre le quatrième et le cinquième essai, il est de 8 minutes … et ainsi de suite, le délai d'attente double entre deux essais successifs.

Calculer en fonction de *n* la durée d'attente u_n (exprimée en minutes) entre le (*n-1)*-ième et le *n*-ième essai pour $n \geq 2$. En déduire en fonction de *n* le temps nécessaire (exprimée en minutes) pour tenter un *n-ième* essais.

c. Applications : On utilisera les approximations suivantes dans les calculs (*ln* désigne le logarithme népérien): $ln(1441) = 7.27$; $ln(2) = 0.69$; $2^{19} = 524288$.

1 - Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

2 - L'autoradio a été volé. Le voleur, ne connaissant pas les 4 chiffres du code, décide d'introduire successivement des codes formés de 4 chiffres distincts choisis au hasard. Combien temps le voleur passera-t-il pour introduire 20 codes de 4 chiffres, sachant qu'il doit respecter le délai entre deux essais successifs décrit dans la question 3.b).

Exercice 2

On désigne par **C** l'ensemble des nombres complexes.

1) Montrer que pour tout nombre complexe *z* différent de 1, on a l'égalité :

$$\frac{z^4-1}{z-1} = z^3 + z^2 + z + 1$$

2) Résoudre dans C l'équation **:** $z^4 = 1$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans **C** :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$

4) On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

   a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan complexe tels que *Z* soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que *Z* soit imaginaire pur.
   c) Déterminer l'ensemble (G) des points M tel que $|Z| = 1$.

Représenter graphiquement ces ensembles.

Problème

On considère la fonction *f* définie sur R par :

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

et on note (C) sa courbe représentative.

Partie A

1) Déterminer la fonction dérivée *f'* de *f.* Soit B le point de (C) d'abscisse 1. Préciser l'ordonnée de B et l'équation de la tangente à (C) en B.
2) On note A le point où la courbe (C) coupe l'axe des ordonnées. Déterminer l'équation de la tangente à (C) en A. Montrer que cette tangente est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$. Préciser les coordonnées du point où cette tangente coupe l'axe des abscisses.
3) Montrer que la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote quand x tend vers +∞. Quelle est la limite de la fonction f quand x tend vers -∞.
4) Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
5) Calculer à l'aide de deux intégrations par partie successives l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x} dx$$

Partie B

Dans cette partie, on cherche à déterminer une valeur approchée de x_0, abscisse du point d'intersection M_0 de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$ (voir la 2ème question de la partie A). On admet l'encadrement $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.

1) Donner une approximation décimale, à 10^{-2} près, de $f(1)$ et de $f(\frac{3}{2})$ en utilisant les valeurs approchées suivantes : $e^{-1} = 0.368$ et $e^{-3/2} = 0.223$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0$$

En utilisant la décroissance de f sur $[1, +\infty[$, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4) Justifier l'égalité $f(x_0) = x_0$. Montrer alors que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$$

puis que :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{0}\right)^{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n)

5) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n - x_0$ et $u_{n+1} - x_0$ sont de signes contraires. A partir de ces résultats, montrer comment on peut calculer une approximation de x_0, par exemple à 10^{-3} près. On ne demande pas d'effectuer les calculs.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE–CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Problème : Dans un magasin de vente de cuisines équipées, on veut étudier la liaison entre le nombre x d'appels téléphoniques de personnes intéréssées par les cuisines (x est donné en centaines d'appels) et le chiffre d'affaires réalisé y (y est donné en 2000 Euros). Les résultats simplifiés sont présentés dans le tableau ci-dessous, où les n_{ij} représentent le nombre de semaines où le magasin a reçu x_i appels téléphoniques et a fait y_j de chiffre d'affaires.

	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$
$x_1 = 2$	4	3	2	0
$x_2 = 3$	2	3	4	1
$x_3 = 6$	0	4	5	3
$x_4 = 7$	0	5	7	7

1 Tableau.

On définit les quantités :

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, 4,$$

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, 4,$$

et

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_{i.}, \quad n \text{ est l'effectif total.}$$

1. Que représentent les quantités $n_{2.}$ et $n_{.3}$?

2. Calculer $\tilde{n} = \sum_{j=1}^{4} n_{.j}$. En déduire une relation entre $\tilde{n}$ et n.

3. Dresser un tableau en complétant celui qui est dans l'énoncé comme suit :

   a. dans la sixième colonne, on calculera les quantités $n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la septième colonne, on calculera les produits $x_i n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la huitième colonne, on calculera les produits $x_i^2 n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la neuvième colonne, on calculera les quantités $x_i \sum_{j=1}^{4} n_{ij} y_j$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$.

   b. sur la sixième ligne, on calculera les quantités $n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la septième ligne, on calculera les produits $y_j n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la huitième ligne, on calculera les produits $y_j^2 n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la neuvième ligne, on calculera les quantités $y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$.

2 Moyenne, Variance, Covariance.

On définit les moyennes marginales $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$ par :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i,$$

et

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j.$$

On définit les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$ par :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i^2 - \bar{\bar{x}}^2,$$

et

$$\mathrm{V}(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j^2 - \bar{\bar{y}}^2.$$

On définit les écart-types marginaux de x et de y comme étant les racines carrés de $\mathrm{V}(x)$ et de $\mathrm{V}(y)$ respectivement.

On définit la covariance $\mathrm{Cov}(x, y)$ entre x et y par :

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} n_{ij}\, x_i\, y_j - \bar{\bar{x}}\, \bar{\bar{y}}.$$

A partir du tableau établi à la question **1.**3.,

1. Calculer $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$. Quelle est la signification de ces deux quantités ?

2. Calculer les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$. En déduire les écart-types marginaux de x et de y, exprimés avec leurs unités naturelles.

3. Calculer la covariance entre x et y.

4. Déduire de la question précédente le coefficient de corrélation linéaire r entre x et y défini par

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}}.$$

3 Droites d'ajustement.

On appelle droite d'ajustement de y en x, la droite D1 d'équation :

$$y = ax + b,$$

avec $a = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(x)}$ et $b = \bar{\bar{y}} - a\,\bar{\bar{x}}$.

On appelle droite d'ajustement de x en y, la droite D2 d'équation :

$$x = a'y + b',$$

avec $a' = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(y)}$ et $b' = \bar{\bar{x}} - a'\,\bar{\bar{y}}$.

1. Etablir les équations des droites d'ajustement D1 et D2.

2. Sur un même graphique et dans un même repère rectangulaire avec les x en abscisses et les y en ordonnées, tracer les droites D1 et D2. Représenter sur le graphique, le point $\mathrm{G} = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$.

Exercice 1. : Un dé est truqué de façon à ce que les probabilités de chaque face soient proportionnelles à leur numéro, avec le même coefficient de proportionnalité pour toutes les faces.

1. On jette le dé une fois et on note X le numéro obtenu. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de X, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. On jette le dé deux fois, et on note Y la somme des numéros obtenus. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de Y, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exercice 2. : Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \mathrm{E}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[, \end{cases}$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2002

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $f^{'}(x) = \ln x - 1$. La dérivée s'annule pour $x = e$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$, avec une branche parabolique dans la direction oy.

❷ La résolution de l'équation proposée revient à trouver l'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = ax + e$. D'après le graphe, il y a toujours deux solutions.

❸ $I = \int_0^e (xLnx - 2x + e)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Lnx - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex\right]_0^e = \frac{e^4}{4}$

EXERCICE n° 2

❶ $\varphi_{a,b}(x) - 1 = \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-x}{2}\right)$

Pour $a < x < b$, on a : $0 < \frac{x-a}{2} < \pi$ et $0 < \frac{b-a}{2} < \pi$, donc $\varphi_{a,b}(x) > 1$

Pour $x = a$ ou $x = b$, $\varphi_{a,b}(x) = 1$

Pour $x < a$ ou $x > b$, $\varphi_{a,b}(x) < 1$? D'autre part, $\varphi_{a,b}(x) \geq -\cos\frac{a-b}{2} > 1$

❷ Soit $M = \underset{[-\pi,\pi]}{Sup}|f|$. Cette borne est atteinte en x_0 et par continuité, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[-\pi,\pi]$, tel que pour tout x appartenant à $[\alpha,\beta]$, on a : $|f(x)| > \frac{M}{2}$. On suppose que $f(x) > 0$ sur cet intervalle (sinon on change f en $-f$). Posons $a = \alpha$ et $b = \beta$.

$$\int_a^b f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx \geq \frac{M}{2}(b-a)$$

Fixons η tel que $2\eta M < \frac{b-a}{8}M$, de sorte que :

$\left|\int_a^{b+\eta} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \leq \eta M < \frac{M}{16}(b-a)$ et $\left|\int_{a-\eta}^{a} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \leq \eta M$, avec $-\pi \leq a-\eta$ et $b+\eta \leq \pi$

$\varphi_{a,b}$ est continue sur le compact $[-\pi, a-\eta] \cup [b+\eta, \pi] = K$ et prend ses valeurs dans $[-1,1]$, il existe donc $k \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in K$, $|\varphi_{a,b}(x)| \leq k \Rightarrow \left|\int_K f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\,dx\right| \leq 2M\pi k^n$

On peut alors choisir n tel que $2\pi M k^n < \frac{b-a}{2}M$.

Pour toute valeur de n, $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \geq \frac{M(b-a)}{2} - 2\eta M - \frac{M(b-a)}{8} \geq \frac{M}{4}(b-a)$, l'intégrale est non nulle.

❸

$\varphi_{a,b}(x) = \cos x \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin x \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = pe^{ix} + qe^{-ix} + r$.

Par conséquent, $\varphi_{a,b}(x)$ est une combinaison linéaire de $\left(e^{inx}\right)$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\,dx = 0$ d'après l'hypothèse et la question 2, ceci implique $f = 0$

EXERCICE n° 3

❶ On montre que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et on vérifie par récurrence la relation : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Le minimum est atteint pour la valeur de a qui annule la dérivée. a est égal à la moyenne des X_t $(t = 1,2,\ldots n)$.

❸ On pose $f(a,b) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - (at+b))^2$. Le minimum est obtenu pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles :

$\sum_t t(X_t - at - b) = 0$ et $\sum_t (X_t - at - b) = 0$. Il faut alors résoudre le système suivant à deux équations :

$$\begin{cases} \sum_t t\,X_t = a\left(\sum_t t^2\right) + b\left(\sum_t t\right) \\ \sum_t X_t = a\left(\sum_t t\right) + bn \end{cases}$$

ou encore $\begin{pmatrix} \sum_t t^2 & \sum_t t \\ \sum_t t & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_t tX_t \\ \sum_t X_t \end{pmatrix}$

Soit $D = n\sum_t t^2 - (\sum_t t)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$. On obtient

$$a = \frac{\sum_t t\,X_t - \frac{(n+1)\sum_t X_t}{2}}{D} n \text{ et } b = \frac{(\sum_t t^2)(\sum_t X_t) - (\sum_t t)(\sum_t t\,X_t)}{D}$$

EXERCICE n° 4

Par hypothèse : $(u_{2n}) \to l_1$, $(u_{2n+1}) \to l_2$ et $(u_{3n}) \to l_3$. La suite extraite $(u_{6n}) \to l_3 = l_1$ et la suite extraite $(u_{6n+3}) \to l_3 = l_2$. Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et (u_n) est convergente.

PROBLEME

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions f_n sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ et ❷ $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{nx^{n-1}(x+1)-1}{x+1}$. La dérivée est du signe de $z(x) = nx^{n-1} + nx^n - 1$. En étudiant les variations de $z(x)$, on obtient :

x	$0 \qquad \alpha_n \quad 1 \quad +\infty$
$f_n(x)$	$0 \downarrow - \uparrow \qquad +\infty$

Il existe donc un unique α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

❸ On a $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - Ln(1+\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n+1} = \alpha_{n+1}^n(1-\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$, donc $f_n(\alpha_n) < f_n(\alpha_{n+1})$. Comme f_n est bijective, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

La suite (α_n) est croisante, majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l \in]0,1]$. Cette limite vérifie l'équation $l^n = Ln(1+l)$. Si $l \neq 1$, alors $l^n \to 0$ et $Ln(1+l) \neq 0$. En conclusion $l = 1$

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. On a : $\alpha_n^n = Ln(1+\alpha_n)$ et $Ln\alpha_n^n = Ln(Ln(1+\alpha_n))$. Par ailleurs $Ln\alpha_n^n = nLn\alpha_n = nLn(1-u_n) \approx -nu_n$ et $Ln(Ln(1+\alpha_n)) \to LnLn2$

u_n est donc équivalent à $\dfrac{-Ln(Ln2)}{n}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2002

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1) Le code est composé de 4 chiffres, chacun de ces chiffres pouvant prendre 10 valeurs : il y a 10^4 = 10 000 codes possibles.

2) Les 4 chiffres d'un code sont distincts 2 à 2 lorsque tous les chiffres qui le composent sont distincts. Le nombre de codes à 4 chiffres distincts est le nombre d'arrangements de 4 chiffres parmi 10 : c'est à dire A_{10}^{4} = 10 x 9 x 8 x 7 = 5040 codes formés de 4 chiffres distincts 2 à 2.

3) a) On sait que les 4 chiffres du code sont 2, 5, 5, 8. Les codes distincts que l'on peut composer avec ces chiffres peuvent être obtenus à partir d'un arbre. Ce sont les 12 codes suivants:

2-8-5-5, 2-5-8-5, 2-5-5-8, 5-2-5-8, 5-2-8-5, 5-8-2-5, 5-8-5-2, 5-5-2-8, 5-5-8-2, 8-5-5-2,

8-5-2-5, 8-2-5-5

b) Soit u_n le délai d'attente (en minutes) entre le $(n-1)$-ième et le n-ième essai. On a

$u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 4$. Plus généralement, on sait que le temps d'attente double entre 2 essais successifs, donc $u_{n+1} = 2u_n$. Le délai d'attente u_n est donc une suite géométrique de premier terme $u_2 = 1$ et de raison 2. Donc pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n = 2^{n-2}$

Le temps nécessaire pour tenter $n \geq 2$ essais est donc (en minutes)

$u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-2} = (2^{n-1}-1)/(2-1) = 2^{n-1}-1$ minutes.

c) **Application** :

1- le nombre de codes que le propriétaire peut introduire au maximum en 24 heures est le plus grand nombre entier n solution de l'équation $2^{n-1}-1\leq 1440$ (puisqu'il y a 60 x 24 = 1440 minutes dans 24 heures) . Ceci équivaut à :

$$2^{n-1} \leq 1441$$
$$(n-1)ln(2) \leq ln(1441)$$

car la fonction logarithme népérien *ln* est strictement croissante sur]0, +∞[. On en déduit :

$$n-1 \leq (ln(1441)/ln(2) = 10,54$$

soit $n \leq 10,54 + 1$: le propriétaire peut au maximum introduire 11 codes en 24 heures.

2- Pour introduire 20 codes différents, le voleur va passer $2^{20-1}-1=2^{19}-1$ = 524288-1 c'est à dire 524287/(60x24x365) = 0.9975 année. Il doit donc passer pratiquement une année pour introduire 20 codes !!!

EXERCICE n° 2

1) Il suffit de noter que le second membre est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison z différente de 1. On peut également multiplier les deux membres par z-1 et développer.
2) Les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1 et –i
3) Introduisons l'inconnue auxiliaire Z = $\frac{z+i}{z-i}$. Nous sommes ramenés à résoudre :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

D'après la question 1) , ceci équivaut à résoudre $Z^4 = 1$ avec Z différent de 1. D'après la question 2), Z peut prendre les valeurs i, -1 et –i. Les solutions correspondantes pour z sont 0, 1 et –1. On vérifie que ces solutions sont bien différentes de i.

4) On a $Z = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \frac{z\overline{z}+i(z+\overline{z})-1}{|z-i|^2} = \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$.

a) Z est réel s'il existe et si sa partie imaginaire est nulle donc si les coordonnées (x, y) de M vérifient :

$x = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x = 0$ et $y \neq 1$

C'est donc l'axe des ordonnées privé du point (0, 1)

b) De même Z est imaginaire pure si

$x^2 + y^2 -1= 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x^2 + y^2=1$ et $y \neq 1$

C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point (0, 1).

c) $|Z| = 1$ si $|z+i| =|z-i|$ et $z \neq i$ c'est à dire si $y = 0$

C'est donc l'axe des abscisses.

PROBLEME

Partie A.

1) La fonction $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur R et pour tout réel x on a :

$$f'(x) =2(x + 1) e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$=(x + 1)(1-x) e^{-x}$$

B est le point de (C) d'abscisse 1, l'ordonnée de B est donc $f(1) = 4e^{-1} = 4/e$.

L'équation de la tangente à (C) en B est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, c'est à dire $y = 4/e$ (puisque $f'(1) = 0$).

2) Le point A a pour coordonnées $(0, f(0))$ soit (0, 1) car $f(0)=1$. L'équation de la tangente à (C) en A est donnée par $y = f'(0)x+f(0)$, soit $y = x+1$ car $f'(0)=1$. Cette tangente est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$ car elles ont même coefficient directeur. Cette tangente coupe l'axe des abscisses pour y=0, donc au point de coordonnées (-1, 0).

3) On peut écrire pour tout réel x :

$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$ et comme quand x $\to$ +∞, lim $x^a / e^x = 0$ pour a>0, f(x) tend vers 0 quand x $\to$ +∞. Donc, l'axe des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de +∞. De même, quand x $\to$ -∞, lim f(x) = +∞.

4) Pour tout x, $e^{-x} > 0$ *et* la dérivée f'(x) est du signe de (x+1)(1-x), donc on a le tableau de variation de f suivant :

x	-∞		-1		1		+∞
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	+∞	↓	0	↑	4/e	↓	0

5) Posons $u(x) = (x + 1)^2$ *et* $v'(x) = e^{-x}$. Nous avons alors : $u'(x) = 2(x + 1)$ *et* $v(x) = -e^{-x}$

Une première intégration par parties donne :

$$I = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

$$I = -1 + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

Posons à nouveau : $w(x) = (x + 1)$ *et* $v'(x) = e^{-x}$. On obtenons : $w'(x) = 1$ *et* $v(x) = -e^{-x}$. Une nouvelle intégration par parties donne :

$$I = -1 + 2\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$

$$I = -1 + 2\left(-1 + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$

$$I = -3 + 2\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$I = 2e - 5$$

Partie B

1) Nous avons $f(1)= 4/e$. Une approximation décimale à 10^{-2} près de $f(1)$ =1.47.

On a $f(\frac{3}{2})=\frac{25}{4}e^{-3/2}$ dont une approximation décimale est $f(\frac{3}{2})=1.39$.

2) Raisonnons par récurrence sur n : on a $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$. Supposons que

$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur [1, +∞ [: on a

$$f(\frac{3}{2}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

Or f(1)=1.47 et $f(\frac{3}{2})=1.39$ *donc* $1 \leq f(\frac{3}{2})$ *et* $f(1) \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que

$1 \leq f(u_n) \leq \frac{3}{2}$, c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

3) Pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1)(1-x) e^{-x}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$x+1 \leq 5/2 \text{ puisque } x \leq \frac{3}{2} \text{ et } |1-x| = x-1 \leq ½$$

et comme la fonction $v(x)=e^{-x}$ est strictement décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$, on a :

$e^{-x} \leq e^{-1}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$|f'(x)| \leq 5/4e.$$

Une approximation décimale à 10^{-2} près de 5/4e est 0.46, donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a : $|f'(x)| \leq ½$.

4) M_0 d'abscisse x_0 étant le point d'intersection de (C) et de la droite y=x, on a $f(x_0) = x_0$.

Nous avons montré que $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier n et que $|f'(x)| \leq ½$ pour tout réel x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$. Comme x_0 appartient à cet intervalle, nous obtenons, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n)-f(x_0)| \leq 1/2|u_n - x_0| \text{ pour tour entier naturel n,}$$

En utilisant les résultats précédents : $|u_{n+1} - x_0| \leq 1/2|u_n - x_0|$ pour tour entier naturel n. Ainsi, nous avons les inégalités:

$|u_1 - x_0| \leq 1/2|u_0 - x_0|$

$|u_2 - x_0| \leq 1/2|u_1 - x_0|$

$|u_3 - x_0| \leq 1/2|u_2 - x_0|$

$|u_n - x_0| \leq 1/2|u_{n-1} - x_0|$

En multipliant membre à membre ces n inégalités, nous obtenons après simplification :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

Or $u_0 = 3/2$ et x_0 appartient à $[1, \frac{3}{2}]$, donc $|u_0 - x_0| \leq ½$. On en déduit que

$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout entier n. Comme $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ quand n tend vers $+\infty$, on a : $\lim |u_n - x_0| = 0$. La limite de la suite (u_n) est donc x_0.

5) f étant décroissante pour $x > 1$, $f(u_n)-f(x_0)$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires, c'est à dire que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

On peut calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-k} près en calculant successivement les termes de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ pour n=0, 1, 2 etc. et l'on s'arrêtera dès que la k-ème décimale ne varie plus : Ainsi pour k=3, on peut dresser le tableau suivant :

N	u_n
1	1.39456
2	1.42167
3	1.41516
4	1.41675
5	1.41636

Une approximation à 10^{-3} près de x_0 est 1.416.

Correction de l'épreuve de calcul numérique
CONCOURS 2002
ITS A – 2H

Problème :

1 Tableau.

1. $n_{2.} = 10$ représente le nombre de semaines pendant lesquelles le magasin a reçu $x_2 = 300$ coups de téléphones et $n_{.3} = 18$ le nombre de semaines pendant lesquelles le magasin a fait $y_3 = 8000$ Euros de chiffre d'affaires.

2. $\tilde{n} = \sum_{j=1}^{4} n_{.j} = 50$. La relation est $\tilde{n} = n = \sum_{j=1}^{4} n_{.j} = \sum_{i=1}^{4} n_{i.}$.

3.

	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$	$n_{i.}$	$n_{i.}\ x_i$	$n_{i.}\ x_i^2$	$x_i \sum_{j=1}^{4} n_{ij} y_j$
$x_1 = 2$	4	3	2	0	9	18	36	42
$x_2 = 3$	2	3	4	1	10	30	90	96
$x_3 = 6$	0	4	5	3	12	72	432	282
$x_4 = 7$	0	5	7	7	19	133	931	546
$n_{.j}$	6	15	18	11				
$n_{.j}\ y_j$	6	45	72	55				
$n_{.j}\ y_j^2$	6	135	288	275				
$y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i$	14	222	380	350				

2 Moyenne, Variance, Covariance.

1. $\bar{\bar{x}} = 5.06$ et $\bar{\bar{y}} = 3.56$. Le magasin reçoit en moyenne 506 appels téléphoniques par semaine, et fait, en moyenne 7120 Euros de chiffre d'affaires par semaine.

2. $\mathrm{V}(x) = 4.1764$ et $\mathrm{V}(y) = 1.4064$. L'écart-type marginal de x est égal à environ 204 appels téléphoniques hebdomadaires et celui de y est égal à environ 2372 Euros par semaine.

3. $\mathrm{Cov}(x, y) = 1.3064$
4. $r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}} = 0.539.$

3 Droites d'ajustement.

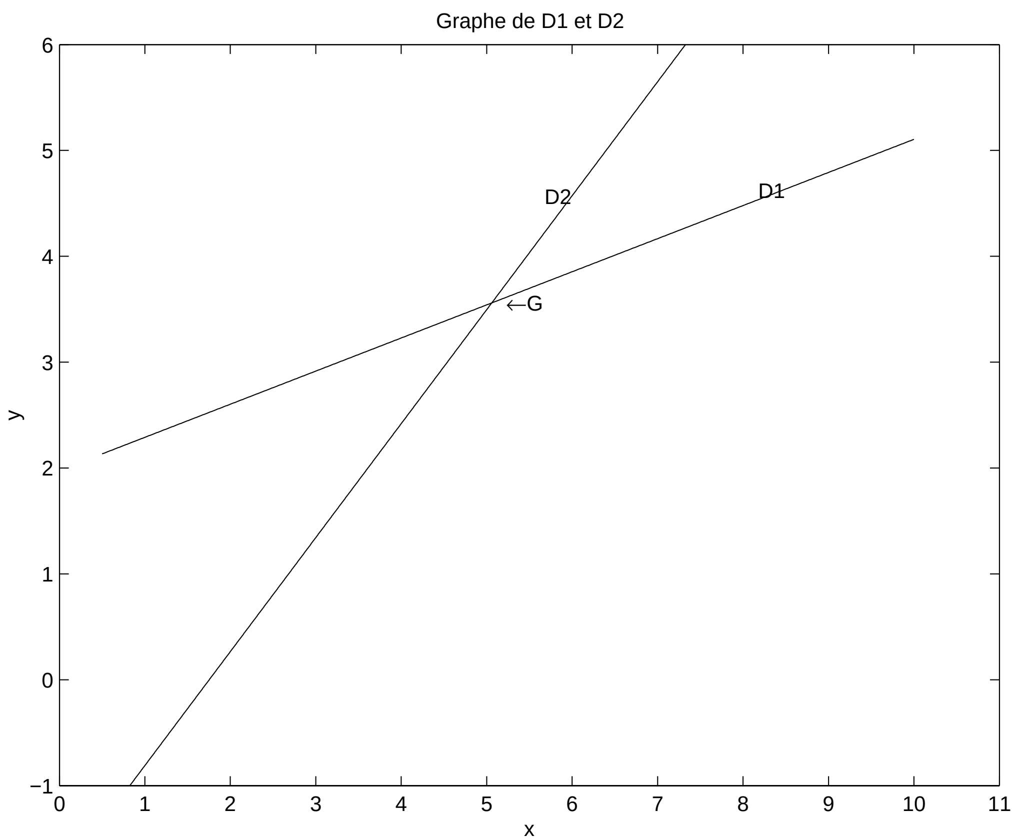
1. La droite d'ajustement de y en x est la droite D1 d'équation :

$$y = 0.3128x + 1.977.$$

La droite d'ajustement de x en y est la droite D2 d'équation :

$$x = 0.9289y + 1.753 \Leftrightarrow y = x/0.9289 - (1.753/0.9289)$$

2. Graphique.



Exercice 1. : Etant donné que les probabilités de chaque face sont proportionnelles à leur numéro, on a $\mathrm{P}(X = j) = k\ j, \ \ \forall j = 1, \dots, 6$, où k est un nombre réel. Or, comme $\sum_{j=1}^{6}\ \mathrm{P}(X =$

$j) = 1$, on en déduit la valeur de k

$$\sum_{j=1}^{6} \mathrm{P}(X=j) = 1 \Leftrightarrow k\sum_{j=1}^{6} j = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}$$

1.

j	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X=j)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. L'espérance de X est donnée par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{6} j\ \mathrm{P}(X=j) = \frac{1}{21}+\frac{4}{21}+\frac{9}{21}+\frac{16}{21}+\frac{25}{21}+\frac{36}{21} = \frac{91}{21}.$$

La variance de X est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{j=1}^{6} j^2\ \mathrm{P}(X=j) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \frac{1}{21}+\frac{8}{21}+\frac{27}{21}+\frac{64}{21}+\frac{125}{21}+\frac{216}{21} - (\frac{91}{21})^2 \\
&= \frac{980}{441}
\end{aligned}$$

3. Les valeurs possibles de Y sont $2, 3, \ldots, 12$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=2) &= (\mathrm{P}(X=1))^2 = \frac{1}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=3) &= 2(\mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=1)) = \frac{4}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=4) &= 2(\mathrm{P}(X=3)\mathrm{P}(X=1)) + (\mathrm{P}(X=2))^2 = \frac{10}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=5) &= 2(\mathrm{P}(X=3)\mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=4)\mathrm{P}(X=1)) = \frac{20}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=6) &= 2(\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(X=5) + \mathrm{P}(X=4)\mathrm{P}(X=2)) + (\mathrm{P}(X=3))^2 = \frac{35}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=7) &= 2(\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(X=6) + \mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=5) + \mathrm{P}(X=3)\mathrm{P}(X=4)) = \frac{56}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=8) &= 2(\mathrm{P}(X=3)\mathrm{P}(X=5) + \mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=6)) + (\mathrm{P}(X=4))^2 = \frac{70}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=9) &= 2(\mathrm{P}(X=3)\mathrm{P}(X=6)) + \mathrm{P}(X=4)\mathrm{P}(X=5) = \frac{76}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=10) &= 2(\mathrm{P}(X=4)\mathrm{P}(X=6)) + (\mathrm{P}(X=5))^2 = \frac{73}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=11) &= 2(\mathrm{P}(X=5)\mathrm{P}(X=6)) = \frac{60}{21^2} \\
\mathrm{P}(Y=12) &= (\mathrm{P}(X=6))^2 = \frac{36}{21^2}
\end{aligned}$$

j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(Y=j)$	$\frac{1}{21^2}$	$\frac{4}{21^2}$	$\frac{10}{21^2}$	$\frac{20}{21^2}$	$\frac{35}{21^2}$	$\frac{56}{21^2}$	$\frac{70}{21^2}$	$\frac{76}{21^2}$	$\frac{73}{21^2}$	$\frac{60}{21^2}$	$\frac{36}{21^2}$

Exercice 2. :

1. Graphe de la fonction f.

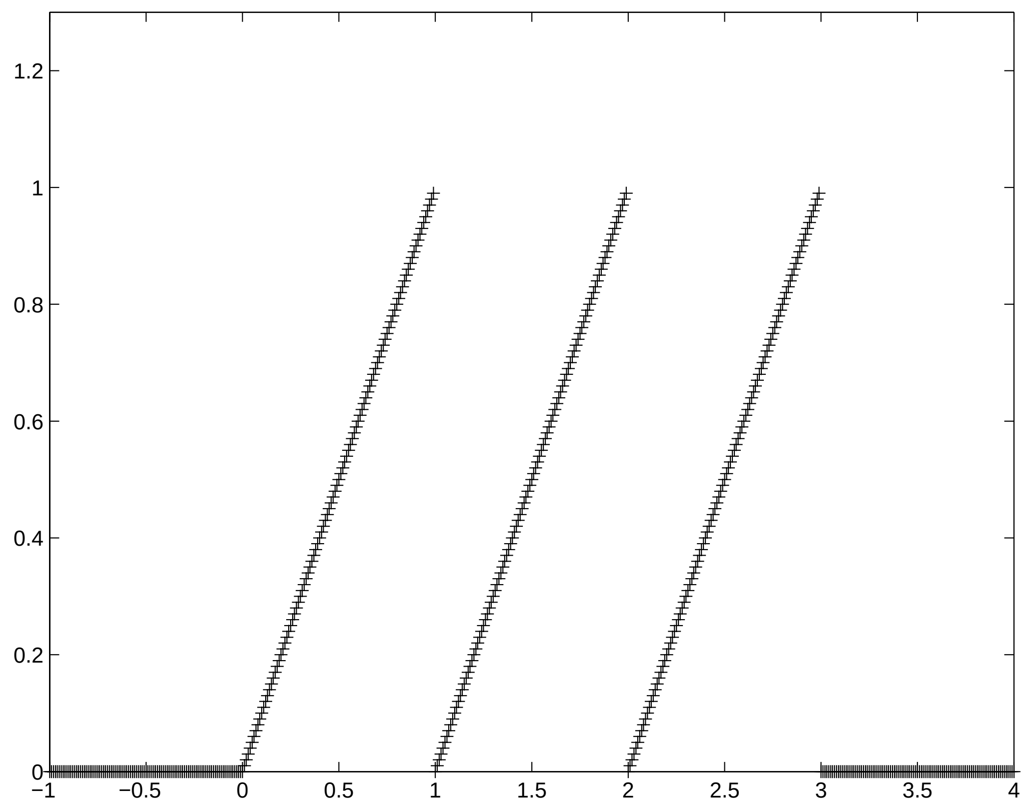


Figure 1: Graphe de la fonction $f(x)$.

2. On a $f(x_0)=0$ et $\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x)=0$. La fonction f est continue en x_0.
   On a $f(x_1)=0$ et $\lim_{x\to x_1,\, x<x_1} f(x)=1$. La fonction f n'est pas continue en x_1.
   On a $f(x_2)=0$ et $\lim_{x\to x_2,\, x<x_2} f(x)=1$. La fonction f n'est pas continue en x_2.
   On a $f(x_3)=0$ et $\lim_{x\to x_3,\, x<x_3} f(x)=1$. La fonction f n'est pas continue en x_3.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Pourquoi revenir sur le passé ?

SUJET n° 2

La parole suffit-elle à faire échec à la violence ?

SUJET n° 3

Quels peuvent être les effets de la mondialisation sur les spécificités socio-culturelles ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 5 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer $\underset{x \to +\infty}{Lim} \dfrac{\sin x}{x}$
2. Calculer $\underset{x \to 0^+}{Lim}\ x^{\frac{1}{x}}$
3. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $x^2 + 2x + 2 = 0$
4. Calculer la dérivée de : $\dfrac{\ln x}{1 + x^2}$ $(x > 0)$

5. Calculer la dérivée de : $x\cos x$

6. Calculer $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k$

7. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

8. Calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1}dx$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $U_n = 1+\frac{2}{3^n}$

10. Résoudre le système $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases}$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x)=(x-1)^2+a$$

où a est un paramètre réel.

❶ On suppose que $0<a<1$. Calculer l'aire du domaine D suivant :

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 / 0\le x\le 1,\ a\le y\le f(x)\right\}$$

❷ Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels strictement positifs, l'équation : $f(x)=\ln x$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

❸ On suppose $a=0$. Déterminer l'aire comprise entre les points d'intersection du graphe de f et du graphe de la fonction logarithme népérien (en fonction d'un paramètre que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = ax + e^{bx}$$

où a est un paramètre réel non nul et b un réel strictement positif.

❶ Etudier les variations de f dans le cas où $a > 0$.

❷ On suppose toujours $a > 0$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine réelle. Dans quel intervalle de la forme $]n, n+1[$ se situe-t-elle si $b = 1$? (n étant un entier relatif).

❸ Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- Etudier les variations de f
- Résoudre $\underset{x}{Min}\, f(x)$
- Quelle relation doivent vérifier a et b pour que la valeur du minimum soit négative ?

Exercice n° 4

Soient u et v deux fonctions numériques d'une variable réelle indéfiniment dérivables.

❶ Exprimer $Max(u,v)$ en fonction de $(u-v)_+$, où $(u-v)_+$ désigne la partie positive de $(u-v)$ (Si $(u-v) < 0$, alors $(u-v)_+ = 0$).

❷ Pour $t \in R$, on pose :

$$F(t) = Max\left\{2, \frac{u(t)}{v(t)}\right\},$$

où $u(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ et $v(t) = t + 1$. Etudier la dérivabilité de F.

❸ Pour $t \in R$, on pose :

$$G(t) = Max\left\{2, e^{l\,t}\right\},$$

où l est un paramètre réel. Etudier la dérivabilité de G en fonction de l.

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Déterminer le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et celui de la parabole g d'équation $y = x^2$

❸ Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire l'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

❹ On pose $j(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))\,dx$. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} j(t)$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard dont le titre est «DE L'ANGOISSE A L'ESPOIR, leçons d'écologie humaine», paru aux éditions Calmann-Lévy en mars 2002.

Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Jusqu'au milieu du XX^{e} siècle, nous avons considéré tout nouveau pouvoir nous permettant de transformer notre environnement comme un progrès humain. Nous avons rarement remis cette évidence en question; nous y sommes maintenant obligés devant le développement extraordinaire de nos capacités d'action, et ce nouveau regard constitue un changement profond du parcours de l'aventure humaine.

A la façon de Prométhée découvrant le feu, nous nous sommes réjouis de chaque progrès. Selon la mythologie grecque, Zeus, créant le monde, avait prudemment caché aux hommes le secret du feu. Prométhée le leur a dévoilé et en a été puni. Nous pourrions métaphoriquement identifier les scientifiques à Zeus et les techniciens à Prométhée ; les premiers proposent des concepts permettant d'expliquer le cosmos, les seconds apportent la capacité à le transformer. Pour le philosophe Francis Bacon, au XVII[e] siècle, le but de la science et de la technique était de réaliser tout ce qui était rendu possible par notre compréhension. A cette philosophie optimiste, nous sommes obligés de substituer celle d'Einstein, affirmant, le soir d'Hiroshima : « il y a des choses qu'il faudrait mieux ne pas faire ». Nous ne devons plus nous permettre d'utiliser aveuglément les moyens que nous nous donnons. La bombe nucléaire en est un exemple extrême. En découvrant le mystère de l'énergie présente dans la matière, nous nous sommes donnés des pouvoirs que nous ne devons utiliser qu'en les maîtrisant. Il en est de même pour la découverte du mystère des processus qui se déroulent chez les êtres vivants. Comment résoudre les problèmes éthiques posés par la manipulation du patrimoine génétique ?

Au cours de l'histoire, une des rares occasions où, face à un progrès technique, la question a été posée de renoncer à l'utiliser a été provoquée par la mise au point de l'arbalète, arme beaucoup plus efficace que l'arc. Au cours d'un concile, en 1139, l'Eglise romaine a interdit son usage dans les guerres entre chrétiens, mais l'a permis contre des ennemis non chrétiens. Même si la réponse nous fait sourire, constatons que la question a du moins été posée.

L'important aujourd'hui n'est pas d'accélérer les avancées techniques, mais de les orienter en fonction d'objectifs éthiques. Prenons l'exemple controversé du clonage. La célèbre brebis Dolly a montré qu'il est possible de faire agir la totalité des gènes présents dans le noyau d'une cellule, donc de ramener ce patrimoine à l'état qui était le sien lors de la conception, et de réaliser un double de l'individu. La compréhension des mécanismes en action au sein des êtres vivants nous permet d'intervenir à tous les niveaux : ce qui se produit dans le secret des organes sexuels est maintenant observé dans tous les détails. Nous avons le pouvoir de prendre en main, de transformer la réalité biologique des êtres vivants, y compris nous-mêmes. Nous sommes passés du rôle passif de spectateurs au rôle actif d'acteurs ; nous devenons des cocréateurs.

Des phénomènes évolutifs qui nécessitaient des milliers de générations, des innovations que la nature ne produisait que par erreur sont maintenant réalisables à volonté et rapidement dans les laboratoires. Les êtres vivants ne sont que des choses, la frontière entre l'inanimé et le vivant s'estompe, que devient alors la spécificité humaine ?

Cette spécificité ne peut guère être définie par notre dotation génétique, si proche de celle des autres primates. C'est en s'interrogeant sur l'origine de la conscience qu'une réponse peut être proposée.

Cette conscience nous est permise par la richesse fabuleuse de notre cerveau. Il représente l'objet le plus complexe et jouit de ce fait de performances inouïes, notamment la capacité de comprendre et de transformer le monde.

Mais surtout, cette complexité nous a permis de mettre en place un réseau de communication entre les hommes qui fait de leur ensemble, l'humanité, la seule structure qui soit plus complexe que chaque individu, et qui peut, par conséquent, avoir des performances supérieures. Parmi ces performances, la plus décisive est de permettre à chacun, non seulement d'être, mais de se savoir être, d'être conscient, de parvenir à dire « je ».

La clé de la spécificité humaine est donc l'utilisation de nos performances intellectuelles pour créer le surhomme qu'est la communauté des hommes. Cette communauté opère en chacun une métamorphose plus étrange que celle de la chenille devenant papillon : le passage de l'individu créé par la nature en une personne créée par la rencontre des autres.

Pour qu'un individu devienne un homme, pour qu'en lui émerge une personne, il faut qu'il soit immergé dans une collectivité. C'est grâce aux autres que chacun devient lui-même et est en droit d'exiger le respect. Nous devons donc mettre en place une société où chacun regardera tout autre, non comme un obstacle, mais comme une source.

Le rôle du projet

Dans notre univers, seuls interviennent le présent et le passé ; l'avenir n'existe pas. A chaque instant, les événements se déroulent en fonction de l'état actuel des choses, non en vue de réaliser un état futur. Seuls les hommes font exception : ils ont découverts que demain sera et prennent des décisions aujourd'hui en fonction de ce qu'ils désirent pour demain. Ce faisant, ils ont inversé le rôle du temps. Alors que tout ce qui peuple l'Univers subit les contraintes de l'état de choses présent, les hommes, grâce à la richesse fabuleuse de leur système nerveux central, ont eu l'idée fantastique d'inventer le concept d'avenir.

Du coup, leur statut dans le cosmos a été transformé. Au lieu de seulement subir les forces en action, ils ont pour rôle de les orienter, de choisir, de décider ce qui est bien et ce qui est mal, de construire une éthique. La morale est nécessitée par la possibilité du projet.

Ce constat doit être d'autant plus pris au sérieux que les avancées techniques ont rendues solidaires tous les hommes de la planète. Les choix collectifs doivent maintenant être « mondialisés ». La véritable mondialisation ne doit pas être celle de la finance ou du commerce, elle doit être celle de la culture, à condition de préserver la diversité et le respect des différences. Autrement dit, il faut mettre en place une démocratie planétaire de l'éthique.

Parmi les devoirs nouveaux qui s'imposent aux hommes aujourd'hui, l'un des plus urgents est la gestion raisonnée de leur effectif. Jusqu'à il y a quelques siècles, la nécessité était de préserver la survie de l'espèce en luttant contre l'excès de la mortalité. Cette lutte est maintenant victorieuse, du coup, le danger s'est inversé, c'est l'excès de naissances qui est devenu une menace. Le nombre des hommes, relativement stable jusqu'à la renaissance, a connu depuis une croissance exponentielle, qui s'est accélérée durant la seconde moitié du XX [è] en raison des succès remportés dans la lutte contre la mortalité infantile. Notre attitude envers la procréation doit désormais être inversée : elle était un devoir, elle devient un droit limité.

Un tel retournement, une telle révolution, s'impose dans de multiples domaines ; nous n'y sommes guère prêts, mais l'effort intellectuel qu'implique le raisonnement scientifique peut nous y aider. La science consiste en effet à aller au-delà des informations fournies par nos sens. Imaginer que la boule de feu qui se lève chaque matin est une étoile autour de laquelle nous tournons a exigé des siècles de réflexion. Ce n'est que bien récemment que nous avons compris la source de l'énergie qu'elle rayonne. Le soleil est un concept inventé par les hommes ; de même les protons, les quarks ou les trous noirs ; leur existence, définitivement cachée à ceux qui se contentent de leurs sensations, nous est révélée par notre capacité de raisonner. La connaissance est la naissance, en nous, d'une représentation du monde.

Pour la construire, la science s'impose quelques règles ; notamment, elle récuse les raisonnements finalistes expliquant ce qui se passe aujourd'hui en fonction de ce qui se passera demain, pour la bonne raison que demain n'existe pas. Tout doit être expliqué par des « parce que », et non pas par des « pour que ».

La connaissance toujours améliorée du cosmos est la grande tâche humaine, sa prouesse. Mais l'invention la plus extraordinaire est celle de l'Homme. Quoi de plus prodigieux que l'auto-construction qui nous permet, en nous regardant nous-mêmes, de nous transformer. La réponse de la science à la question de toujours « qu'est-ce qu'un être humain ? » est plus que jamais source d'émerveillement.

Le point d'arrivée : la personne humaine

Nous devons aujourd'hui non seulement être conscients de nos pouvoirs et nous interroger sur le droit de les exercer en assumant notre rôle de cocréateurs du cosmos, mais aussi comprendre comment notre hypercomplexité cérébrale nous permet d'échapper collectivement au sort commun des objets produits par l'Univers.

Rappelons que la « complexité » est la caractéristique d'une structure dont les éléments sont nombreux, sont divers, et sont reliés entre eux par de multiples interactions. Lorsque cette complexité est suffisante, la structure manifeste des performances qui ne peuvent être déduites de la connaissance de chacun de ses éléments. Appliquons ce constat à « l'objet » qu'est l'humanité. Elle est riche de six milliards d'individus, tous différents ; les conditions de nombre et de diversité sont donc remplies. Mais les interactions sont-elles suffisamment subtiles et intenses ? Cela dépend d'eux. S'ils sont capables de mettre en commun non seulement des projets, des angoisses, des espoirs, alors ils ne sont plus une foule, mais un ensemble intégré capable de performances inaccessibles à chacun des humains isolés, et chacun d'eux peut en profiter.

L'important est de comprendre que mettre en relation est différent d'additionner ; deux plus deux font quatre, mais deux et deux peuvent donner tout autre chose que quatre ; cela est vrai en permanence dans notre cosmos, et cette émergence de l'inattendu est particulièrement spectaculaire avec l'aventure de l'humanité. La richesse de notre cerveau nous a permis de manifester une merveilleuse intelligence, mais c'est la complexité du réseau que nous établissons avec les autres qui nous fait accéder à la conscience d'être.

Pour expliquer cette conscience, on peut évoquer une décision spécifique du Créateur ; mais c'est là une affirmation que l'on peut ni prouver, ni démontrer fausse ; elle repose sur une foi, elle n'entre donc pas dans le discours scientifique. Une autre explication est que notre capacité à dire « je » n'a pas été donnée à chacun par la nature, mais a été apportée par les « tu » venant des autres. Grâce à ce réseau, tout homme est plus que lui-même. Chacun le ressent dans le secret et dans le doute ; pour progresser, la meilleure voie est de comprendre que mon « plus », ce sont les autres, et d'en tirer les conséquences.

Pour appartenir à l'humanité, il ne suffit pas d'avoir reçu la dotation génétique caractéristique de l'espèce, il faut aussi avoir été immergé dans une communauté humaine. Il faut distinguer la définition de l'individu de celle de la personne. Le premier est fait de particules associées en cellules, réunies en organes, la seconde est constituée de liens. Il s'agit de deux univers du discours différents ; le premier est de l'ordre des objets, le second de l'ordre des valeurs.

Les liens que nous tissons constituent la meilleure définition de nous-mêmes. Etre un humain signifie être capable de sortir de soi, de dire « je » comme si l'on parlait d'un autre ; Arthur Rimbaud l'a osé : dans son œuvre, « je » se conjugue à la troisième personne.

Cette conscience a été donnée aux hommes au prix d'un long effort qui a sans doute nécessité la succession de milliers de générations ; elle est un cadeau que les hommes se sont faits à eux-mêmes. Nous avons fait l'humanité, et elle nous a transformés. Il ne s'agit pas d'un cercle vicieux constamment recommencé, mais d'une spirale vertueuse faisant toujours apparaître des possibilités nouvelles. La nature a produit, au terme provisoire d'une longue évolution, des individus ; nous avons créé les personnes.

En tant qu'individus, chacun est un objet parmi d'autres ; il est défini par ses caractéristiques biologiques résultant de son patrimoine génétique ; son histoire peu à peu le façonne, lui donnant une personnalité spécifique ; mais il ne devient véritablement une personne que lorsque la communauté humaine lui reconnaît des droits. Ce concept de droit est inconnu du cosmos ; rien parmi tous les objets qui le constituent, n'est source de droits ; chacun est aveuglément soumis aux forces qui s'exercent sur lui. Evoquer des droits, c'est changer d'univers. L'individu, le sujet, la personnalité appartiennent à l'ordre des réalités que nous pouvons constater et décrire ; la personne appartient à l'ordre du sacré, de l'infiniment respectable, de l'inviolable, défini collectivement par une décision humaine.

A quel stade de son histoire un individu devient-il une personne ? A cette question, il n'y a de réponse qu'arbitraire. Tout au plus pouvons nous évoquer des problèmes liés aux deux extrémités du parcours de vie : la conception, d'où l'interrogation concernant l'avortement, la mort, d'où l'interrogation concernant l'euthanasie.

Un ovule, un spermatozoïde ne sont pas, isolés, le support d'une personne, mais ils se fondent l'un dans l'autre, multiplient les cellules et commencent à former un individu ; celui-ci est alors capable de devenir une personne par l'échange des liens avec les autres. Le lien mère-fœtus introduit la réalité d'une personne dans l'amas de cellules qui se forment et qui, dans l'esprit de la mère, est l'équivalent de « quelqu'un ». Elle a conscience du fait qu'un enfant se forme, et cette conscience rend cet enfant sacré. Dans cette voie, le problème de l'avortement est affronté en admettant que l'embryon devient une personne en fonction de l'attitude de sa mère.

De même, la fin de la vie pose des problèmes nouveaux dus au développement de nos moyens techniques. Autrefois, la mort était la conséquence de processus naturels. Aujourd'hui, dans la plupart des cas, l'instant précis de la mort est le résultat d'une décision technique. Une possibilité de réflexion est de recourir au concept de « mourir », défini comme cette période de la vie qui est ressentie comme ultime. Le rôle de ceux qui assistent le mourant est de lui permettre de vivre son mourir en respectant un équilibre difficile entre la conscience, la lutte contre la douleur et la durée. Une mort plus sereine peut parfois être obtenue au prix d'une vie moins longue.

Entre une conception imprécise et une mort mal définie, il y a toute une vie qui consiste à multiplier les liens, à sortir de soi-même, ce qui est l'objectif dans l'éducation.

Il nous faut maintenant poursuivre cette construction de l'humanité et adopter un projet digne de ce que nous pouvons réaliser.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice n°1

Soit a un nombre réel. On considère la suite (a_n) définie par a_1 = a et $a_{n+1} = \cos a_n$.

1) Montrer que $0 < a_n < 1$ pour tout $n \geq 3$.

2) Montrer que :

   a. si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$

   b. si $a_n > a_{n+1}$ alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$

3) Montrer que les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite.

4) En déduire que la suite (a_n) est convergente et que sa limite ne dépend pas de a.

Exercice n°2

1) Soit φ un réel de [-π, π] et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}\left[\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi)\right]$$

Déterminer, en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle]0, π[. Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes suivants : $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$ où z est le nombre complexe défini au 1).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$.

Déterminer la nature géométrique des ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle]0, π[.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur [0, + ∞ [par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note a cette solution.

   b) Sachant que $e^{1,14} \approx 3{,}127$ et $e^{1,15} \approx 3{,}158$, donner un encadrement de a à 10^{-2} près.

3. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1. a) Calculer la dérivée *f '(x)* de *f(x)* en fonction de *g(x)* pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. a) Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a) Établir que $f(a) = \frac{1}{a+1}$

   b) En utilisant l'encadrement de a établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de *f*(a) d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la demie tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.

5. a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

   b) Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le signe de *u(x)*.

   c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe C par rapport à la droite (T).

6. Tracer C et (T).

Partie C

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0, +\infty[$ en utilisant l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B.2.**

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n \geq 2$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n)

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation :
$$z^2 = 1 + i. \tag{0.1}$$
2. Représenter graphiquement les nombres complexes z solutions de (0.1).
3. Ecrire les complexes z solutions de l'équation (0.1) sous forme exponentielle et sous forme algébrique pour en déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
4. A partir de la forme exponentielle de $1+i$, calculer $(1+i)^8$; calculer ensuite $(1+i)^8$ à l'aide de la formule du binôme et en déduire les valeurs respectives de $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ et de $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.
5. Linéariser $\cos^4(a)$ et $\sin^3(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
6. Exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de puissances de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème

Une entreprise P est constituée de deux établissements P_1 et P_2. Le tableau suivant donne la répartition des salaires (x_{1i} pour l'entreprise P_1 et x_{2i} pour l'entreprise P_2, tous les salaires sont exprimés en Euros) en fonction des effectifs salariés (n_{1i} pour l'entreprise P_1 et n_{2i} pour l'entreprise P_2); les salaires sont regroupés par classe et on notera une classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[$, où a_i est la borne inférieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$ et b_i est la borne supérieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$:

	x_{1i}	n_{1i}	x_{2i}	n_{2i}
Ouvriers	$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5
Employés	$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15
Cadres	$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30

1. Donner le nombre total des salariés de l'entreprise P. On notera ce nombre n.

2. Regrouper les résultats des deux établissements dans un unique tableau avec dans la première colonne les classes $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, des salaires ordonnés par ordre croissant et dans la deuxième colonne les effectifs n_i des salariés correspondants.

3. Ajouter une troisième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront **les fréquences** $f_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$.
   La fréquence f_i *de la classe* $\mathcal{C}_i$ *est la proportion des individus ayant un salaire compris dans l'intervalle* $[a_i, b_i[= \mathcal{C}_i$.

4. **Fréquence cumulée et Médiane.**

   a. Ajouter une quatrième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront pour chaque classe $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, **la fréquence cumulée** F_i définie par la formule
   $$F_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i} f_j, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq 6 \\ f_1 & \text{si} \quad i = 1 \end{cases}$$

   b. Quelle est la proportion de salariés de l'entreprise P qui gagne moins de 1800 Euros?

   c. La représentation graphique de la fréquence cumulée est appelée **courbe cumulative**; elle consiste à représenter en abscisse les bornes inférieures et supérieures des classes $\mathcal{C}_i,\ i = \{1, \ldots, 6\}$, puis à représenter dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le point $(a_1, 0)$ où a_1 est la borne inférieure de la classe $\mathcal{C}_1$, et les points $(b_i, F_i),\ i = \{1, \ldots, 6\}$, où b_i est la borne supérieure de la classe $\mathcal{C}_i$ et enfin à relier ces points par des segments de droite.
   Tracer **la courbe cumulative**.

   d. Déterminer graphiquement **la médiane**, c'est–à–dire, sur le graphe de la courbe cumulative, repérer la valeur du salaire en abscisse qui a une ordonnée égale à 0.5, puis donner une valeur approchée de Me.
   La médiane *notée* Me *est la valeur d'un salaire qui partage les salariés de* P *en deux sous-populations de même taille : ceux qui ont un salaire supérieur à* Me *et ceux qui ont un salaire inférieur à* Me.

5. **Histogramme et Mode.**

   a. Ajouter une cinquième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront **les amplitudes** $L_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, c'est–à–dire la longueur de chaque intervalle $[a_i, b_i[$.

b. Ajouter une sixième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront ou bien **les densités de fréquence** $h_i,\ i \in \{1,\dots,6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, qui sont le rapport de f_i sur L_i, ou bien des quantités $H_i,\ i \in \{1,\dots,6\}$ de chaque classe $\mathcal{C}_i$, proportionnelles à h_i (chacun étant libre de choisir son coefficient de proportion).

c. La représentation graphique de la densité de fréquence est appelée **histogramme**; elle consiste à représenter en abscisse les classes $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1,\dots,6\}$, et pour chaque classe $\mathcal{C}_i$, on dessine un rectangle de hauteur h_i repérée en ordonnée.
Tracer l'histogramme dans un repère différent de celui utilisé pour tracer la courbe cumulative.

d. A partir de l'histogramme, déterminer **la classe modale** qui est la classe de l'histogramme qui a la plus grande hauteur de rectangle.

6. **Moyenne et Variance.**

a. Par convention on admet que chaque classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1,\dots,6\}$, peut être représentée par **la valeur centrale** c_i, qui est le centre ou milieu de $[a_i, b_i[$.
Calculer **les valeurs centrales** $c_i\ i \in \{1,\dots,6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, que l'on fera figurer dans une septième colonne ajoutée au tableau de la question 2.

b. On définit **la moyenne** $\bar{x}$ par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i\, c_i,$$

et **la variance totale** Var par :

$$\text{Var} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i\,(c_i - \bar{x})^2,$$

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la variance totale Var.

c. On appelle **variance Inter** et on la note VarInter, la variance des moyennes de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\text{VarInter} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \bar{n}_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2),$$

où $\bar{x}_i,\ i = 1, 2$, est la moyenne calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Inter.

d. On appelle **variance Intra** et on la note VarIntra, la moyenne des variances de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\text{VarIntra} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1\text{Var}_1 + \bar{n}_2\text{Var}_2),$$

où $\text{Var}_i,\ i = 1, 2$, est la variance calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Intra.

e. Trouver la relation théorique qui relie la variance totale aux variances Intra et Inter.

AVRIL 2003

ITS

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, car $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$ implique $x = -1 \pm i$

4. La dérivée de $\frac{\ln x}{1+x^2}$ est égale à $\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}$

5. La dérivée de $x\cos x$ est égale à $\cos x - x\sin x$

6. $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k = 0$

7. $\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

8. $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1} dx = \int_0^1 (1 - \frac{3}{x+1})\, dx = 1 - 3\ln 2$

9. $\lim\limits_{n} (1 + \frac{2}{3^n}) = 1$, car $\lim\limits_{n} \frac{2}{3^n} = 0$

10. On obtient les valeurs $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$

Exercice n° 2

❶ $Aire = \int_0^1 f(x)\,dx - a = \left[\dfrac{(x-1)^3}{3} + ax\right]_0^1 - a = \dfrac{1}{3}$

❷ On pose $y = (x-1)^2 + a - \ln x$. La dérivée est du signe de $2x^2 - 2x - 1$.
La fonction admet un minimum pour $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Elle est décroissante avant cette valeur, puis croissante.

Si $f(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}) > 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $f(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}) = 0$ (c'est-à-dire $a = \ln(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}) - (\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4})$, l'équation admet une seule solution.

Si $f(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}) < 0$, l'équation admet deux solutions.

❸ Le graphe de f et le graphe de la fonction logarithme népérien ont deux points d'intersection d'abscisse 1 et a (que l'on ne cherchera pas à calculer).
L'aire est égale à :

$$\int_1^a (\ln x - (x-1)^2)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^a = a\ln a - a - \frac{(a-1)^3}{3} + 1$$

Exercice n° 3

❶ La fonction f est strictement croissante sur R.

$$f'(x) = a + be^{bx} > 0$$

❷ Comme f est continue et strictement croissante de R dans R, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution que l'on notera a.

Par ailleurs $f(-n) = -na + e^{-n}$.

Si $a > \frac{1}{e}$, alors $a \in \left]-1,0\right[$. Et si $\frac{1}{(n-1)e^{n-1}} > a > \frac{1}{ne^{n}}$, alors $a \in \left]-n+1,-n\right[$ $(n > 0)$

❸ $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + \frac{1}{b}e^{bx}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{e^b - 1}{b}$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- $f'(x) = a + be^{bx}$. Cette fonction s'annule pour une certaine valeur $d = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$. La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, d\right[$ et strictement croissante sur $\left]d, +\infty\right[$
- Le minimum de f est atteint pour $x = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$ et la valeur du minimum est égale à : $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b}$
- Il faut $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b} < 0$, d'où $a < -be$

Exercice n° 4

❶ Exprimer $Max(u,v) = (u-v)_+ + v$

❷ $\dfrac{u(t)}{v(t)} = t^2 + 1$, donc $F(t) = Max\{2, t^2+1\}$

F est dérivable sur $R - \{\pm 1\}$. En effet $f_d'(1) = 2 \neq f_g'(1) = 0$

❸ Si $l = 0$, $G(t) = Max\{2,1\} = 2$ et G est dérivable.

Si $l \neq 0$, $e^{lt} = 2$ implique $t = \dfrac{\ln 2}{l}$. G est dérivable sur $R - \left\{\dfrac{\ln 2}{l}\right\}$

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1+x^2)$$

❶ f est une fonction paire, il suffit donc de faire l'étude sur l'ensemble des nombres réels positifs. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La dérivée de f est $f'(x) = 2x\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2}$, expression qui est toujours positive. f est donc strictement croissante sur R^+. Le graphe de f a la forme de celui de la parabole d'équation $y = x^2$, mais avec des branches paraboliques plus verticales.

❷ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2(\ln(1+x^2) - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{e-1}$. Il y a donc deux points d'intersection entre les graphes de f et g.

❸ Le calcul de l'intégrale se fait dans un premier temps par parties.

On pose $u' = x^2$ et $v = \ln(1+x^2)$. On obtient :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3}J \text{ , où } J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx \text{ .}$$

Par ailleurs, $J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg\,x\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{p}{4}$

Par conséquent $I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{p}{6}$

L'aire comprise entre le graphe de f , le graphe de g et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{p}{6}$

❹ On a $\int_0^t (f(x) - g(x))\,dx \geq t^2 \int_0^t (\ln(1+x^2) - 1)\,dx$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} j(t) = +\infty$.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A
AVRIL 2003

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé

Exercice 1

1) $|\cos x| \leq 1$, donc $-1 \leq a_2 \leq 1$. Par conséquent $0 < a_3 < 1$ d'où $0 < a_n < 1$ pour n = 3.

2) Comme la fonction cos x est strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_{n+2} < a_{n+1}$. La dérivée de cos x est supérieure à -1 sur l'intervalle [0, 1], donc si $a_n < a_{n+1}$ alors on a $\cos a_n - \cos a_{n+1} < a_{n+1} - a_n$. Ceci montre que $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$. De la même façon, on montre que si $a_n > a_{n+1}$, alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$.

3) On en déduit que, soit la suite (a_{2n}) est croissante et majorée et la suite (a_{2n+1}) est décroissante et minorée, soit vice versa. Donc les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $|a_{n+1} - a_{n+2}| = |\cos a_n - \cos a_{n+1}| = \sin k\, |a_n - a_{n+1}|$ pour un certain k dans (0, 1). Mais $\sin k < \sin 1 < 0.9$. Donc les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite.

4) Notons h cette limite. Alors h = cos h. Mais comme cos x is strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], et comme la fonction identité $x \mapsto x$ est strictement croissante sur le même intervalle [0, 1], les deux fonctions ont un seul point d'intersection sur cet intervalle. Donc la limite h est l'unique point de (0, 1) qui vérifie h = cos h.

Exercice 2

1°) Module et argument de z

On peut écrire

$$z = [2\sin(\varphi/2)\cos\frac{j}{2} + i(1-1+2\sin^2\frac{j}{2}]/2$$

$$= \sin\frac{j}{2}[\cos\frac{j}{2} + i\sin\frac{j}{2})]$$

Discutons suivant les valeurs de φ, le signe de $\sin\frac{j}{2}$

* si φ=0 alors z=0.

* si φ∈]0, π[alors z a pour module $\sin\frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2}$

* si φ∈]-π, 0[alors z a pour module $-\sin\frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2}+\pi$

2°) Module et argument de (z-i)

On vérifie de la même manière que:

$z\text{-}i = \cos\frac{j}{2}[\cos(\frac{j}{2}-\frac{p}{2})+i\sin(\frac{j}{2}-\frac{p}{2})]$

Comme $\cos\frac{j}{2}>0$ pour tout φ ∈]0,π[, $z-i$ a pour module $\cos\frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2}-\frac{p}{2}$

De même on vérifie que: $\frac{z}{z-i}=itg\frac{j}{2}$ qui a pour module $tg\frac{j}{2}$ et argument $\frac{p}{2}$ car $tg\frac{j}{2}>0$ pour tout φ ∈]0,π[.

3°) Ensemble de points M lorsque φ décrit ∈]0,π[.

Soit M(z) un point de l'ensemble.

Comme on a : $z-i=\frac{1}{2}[\sin j - i(1+\cos j)]$ les coordonnées (x, y) de M(z) vérifient :

$x=\frac{1}{2}\sin j$ et $y=-\frac{1}{2}(1+\cos j)$

Donc $x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ et par suite M appartient au cercle (C) de centre $I(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Comme $0 \le \sin j \le 1$ et $-1<\cos\varphi<1$, on en déduit que M décrit le demi-cercle de (C) privé des points O(0, 0) et A(-1, 0).

*** L'ensemble de points N**

Les coordonnées x et y de N vérifient x=0 et y= $tg\frac{j}{2}$ avec φ ∈]0,π[.

On en déduit que N décrit la demi-droite définie par x=0 et y>0 c'est-à-dire le demi-axe des y positifs sans l'origine.

Problème

Partie A

1. $g'(x) = 1 - e^x < 0$ pour tout x∈ $[0,+\infty[$, donc g est décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, en utilisant la factorisation pour $x \neq 0$

$$g(x)=x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$$

on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

2.a) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$ qui contient 0, donc l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule a dans $[0,+\infty[$.

b) Comme $g(1,14) \cong 0,0132 > 0$ et $g(1,15) \cong -0,0082 < 0$, on a 1,14< a <1,15

D'après le tableau de variations de g, g(x) > 0 pour x $\in [0,a[$ et g(x)<0 pour x $\in\ ]a,+\infty[$.

Partie B

1.a) Pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$,

$$f'(x) = e^x \frac{x+2-e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b) Comme $e^x > 0$, le signe de f '(x) est celui de g(x) . Donc f est croissante sur $[0,a[$ et décroissante sur $]a,+\infty[$.

2.a) Pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation y = 0.

3.a) On a : $g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = a+2$. En remplaçant e^a par $a+2$ dans l'expression de $f(a)$, on obtient la relation demandée.

b) On en déduit :

$$1{,}14 < a < 1{,}15 \Rightarrow \frac{1}{1{,}15+1} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{1{,}14+1}$$

ce qui fournit un encadrement de $f(a)$ d'amplitude 10^{-2} : 0,46< $f(a)$<0,47

4. Une équation de la droite tangente à l'origine est y = x.

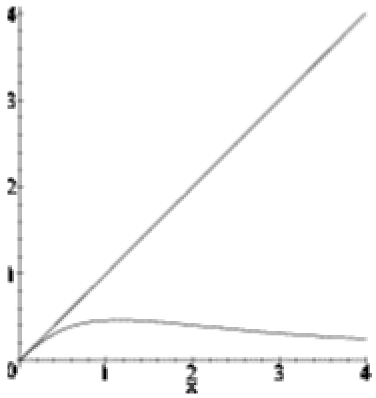
5. a) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$

$$f(x)-x = \frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1} = \frac{(1+x)(-xe^x+e^x-1)}{xe^x+1}$$

b) $u'(x) = -xe^x < 0$ sur $[0,+\infty[$, donc u est décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme u(0) = 0, on a donc u(x)= 0 sur $[0,+\infty[$.

c) Sur $[0,+\infty[$, le signe de f(x)-x est celui de u(x), donc la courbe C est située au-dessous de la droite (T).

6. On obtient la représentation graphique suivante:



Partie C

1. En remarquant que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on trouve que pour tout x de $[0,+\infty[$

$$F(x) = \ln(x + e^{x})$$

2.a) La fonction f est décroissante sur [n, n+1] puisque a <n dès que n=2. Donc pour tout x de [n, n+1] on a:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

d'où la relation demandée par intégration de cette inégalité entre n et n+1:

Pour tout n=2, on a :

$$f(n+1) \leq v_n \leq f(n) \text{ et } f(n+2) \leq v_{n+1} \leq f(n+1)$$

donc $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante pour n=2.

b) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$, on en déduit que la suite (v_n) admet en + 8 une limite nulle.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Notons $z = a + ib$, avec $a \in I\!R$ et $b \in I\!R$, les solutions de l'équation

$$z^2 = 1 + i, \tag{0.1}$$

alors les réels a et b vérifient le système d'équations suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & 1 + \sqrt{2} \\ 2b^2 & = & \sqrt{2} - 1 \\ 2ab & = & 1 \end{array}\right.$$

Les réels a et b étant de même signe, on en déduit les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (0.1) :

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2}\left[\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\right] \tag{0.2}$$

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2}\left[-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\right] \tag{0.3}$$

2. Représentation de z_1 et de z_2 : voir en fin d'exercice.

3. La forme exponentielle du nombre complexe $1+i$ est $1+i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \left((\sqrt{2})^{1/2}\,(e^{i\frac{\pi}{8}})\right)^2$; par conséquent le nombre complexe mis sous forme exponentielle $(\sqrt{2})^{1/2}\,(e^{i\frac{\pi}{8}})$ est solution de l'équation (0.1), il est donc égal à l'une de deux solutions trouvées dans la question 1. Comme la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z_1 sont positives, z_1 a donc un argument compris entre 0 et $\pi/2$, par conséquent $z_1 = (\sqrt{2})^{1/2}\,(e^{i\frac{\pi}{8}})$. La forme exponentielle de z_1 et la relation (0.2) donne :

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}},$$
$$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}.$$

4. La question précédente implique que

$$(1+i)^8 \;=\; 2^4\,e^{i2\pi}. \tag{0.4}$$

D'un autre coté en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \sum_{j=0}^{8} C_8^j i^j \\ &= (C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8) + i(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7).\end{aligned} \tag{0.5}$$

Des relations (0.4) et (0.5), on déduit que

$$C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 2^4 \quad \text{et} \quad C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0.$$

5. D'après les formules d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned}\cos^4(a) &= \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{C_4^0 e^{4ia} + C_4^4 e^{-4ia} + C_4^1 e^{2ia} + C_4^3 e^{-2ia} + C_4^2}{2^4} \\ &= \frac{1}{2^3}\left[\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(a) &= \left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{C_3^0 e^{3ia} - C_3^3 e^{-3ia} - C_3^1 e^{ia} + C_3^2 e^{-ia}}{(2i)^3} \\ &= \frac{1}{2^2}\left[-\sin(3a) + 3\sin(a)\right]\end{aligned}$$

6. En utilisant le fait que cos(6x) est la partie réelle du nombre complexe e^{i6x}, et en utilisant la formule de Moivre , on développe e^{i6x} et sa partie rélle est la valeur de cos(6x),

$$\begin{aligned} e^{i6x} &= (\cos(x)+i\sin(x))^6 \\ &= C_6^6\cos(x)^6 + iC_6^5\cos(x)^5\sin(x) - C_6^4\cos(x)^4\sin(x)^2 - iC_6^3\cos(x)^3\sin(x)^3 + \\ &\quad C_6^2\cos(x)^2\sin(x)^4 + iC_6^1\cos(x)\sin(x)^5 - C_6^0\sin(x)^6 \\ &= \left(\cos(x)^6 - C_6^4\cos(x)^4\sin(x)^2 + C_6^2\cos(x)^2\sin(x)^4 - \sin(x)^6\right) + \\ &\quad i\left(C_6^5\cos(x)^5\sin(x) - C_6^3\cos(x)^3\sin(x)^3 + C_6^1\cos(x)\sin(x)^5\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos(6x) = \cos(x)^6 - 15\cos(x)^4\sin(x)^2 + 15\cos(x)^2\sin(x)^4 - \sin(x)^6.$$

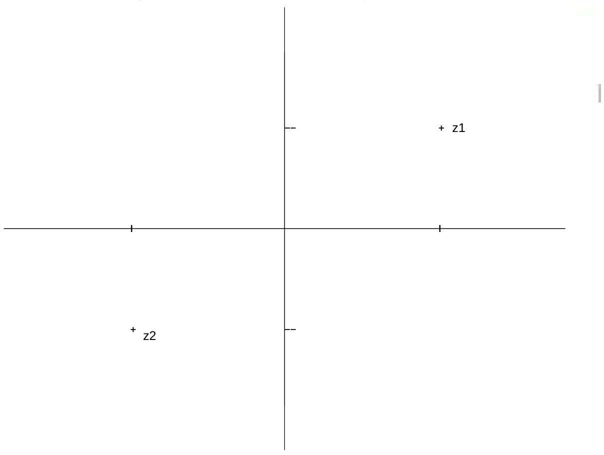
En utilisant le fait que sin(4x) est la partie imaginaire du nombre complexe e^{i4x}, et en utilisant la formule de Moivre , on développe e^{i4x} et sa partie imaginaire est la valeur de sin(4x),

$$\begin{aligned} e^{i4x} &= (\cos(x)+i\sin(x))^4 \\ &= C_4^4\cos(x)^4 + iC_4^3\cos(x)^3\sin(x) - C_4^2\cos(x)^2\sin(x)^2 - iC_4^1\cos(x)^1\sin(x)^3 + C_4^0\sin(x)^4 \\ &= \left(\cos(x)^4 - C_4^2\cos(x)^2\sin(x)^2 + C_4^0\sin(x)^4\right) + i\left(C_4^3\cos(x)^3\sin(x) - C_4^1\cos(x)\sin(x)^3\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sin(4x) = 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3.$$

Représentation de z1 et z2 solutions de l'équation z*z=1+i



Problème

1. $n = 210$.

2.

$\mathcal{C}_i$	n_i	f_i	F_i	L_i	$H_i = 300 \times h_i$	c_i
$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5	0.024	0.024	300	0.024	1050
$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	0.286	0.310	300	0.286	1350
$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15	0.071	0.381	300	0.071	1650
$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	0.452	0.833	300	0.452	1950
$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30	0.143	0.976	600	0.0715	2400
$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	0.024	1	600	0.012	3000

3. Voir tableau, question 2.

4. **Fréquence cumulée et Médiane.**

   a. Voir tableau, question 2.

   b. La proportion de salariés qui gagne moins de 1800 Euros est égale à 0.381.

   c. Voir graphe en fin de problème.

   d. La médiane est égale à $Me = 1878.982$ Euros.

5. **Histogramme et Mode.**

   a. Voir tableau, question 2.

   b. Voir tableau, question 2. On a choisi de faire figurer dans le tableau pour chaque classe $\mathcal{C}_i$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, les quantités $H_i = 300h_i$.

   c. Voir graphe en fin de problème.

d. La classe modale est la classe $\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$

6. **Moyenne et Variance.**

a. Voir tableau de la question 2.

b.
$$\bar{x} = \frac{1}{210}(5250 + 81000 + 24750 + 185250 + 72000 + 15000) = \frac{383250}{210} = 1825.$$

Pour le calcul de la variance, on utilise le fait que

$$\mathrm{Var} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i c_i^2 - \bar{x}^2,$$

ce qui conduit au résultat suivant

$$\begin{aligned}\mathrm{Var} &= \frac{1}{210}(5512500 + 109350000 + 40837500 + 361237500 + 172800000 + 45000000) - 3330625 \\ &= 168125.\end{aligned}$$

c. Pour calculer VarInter, il nous faut d'abord calculer la moyenne de chaque établissement P_1 et P_2;

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 1757.625 \\ \bar{x}_2 &= 2040,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathrm{VarInter} = \frac{1}{210}[160(1757.625^2 - 1825^2) + 50(2040^2 - 1825^2)] = 13943.1074$$

d. Pour le calcul de la variance Intra, il faut d'abord calculer la variance sur chaque établissement P_1 et P_2;

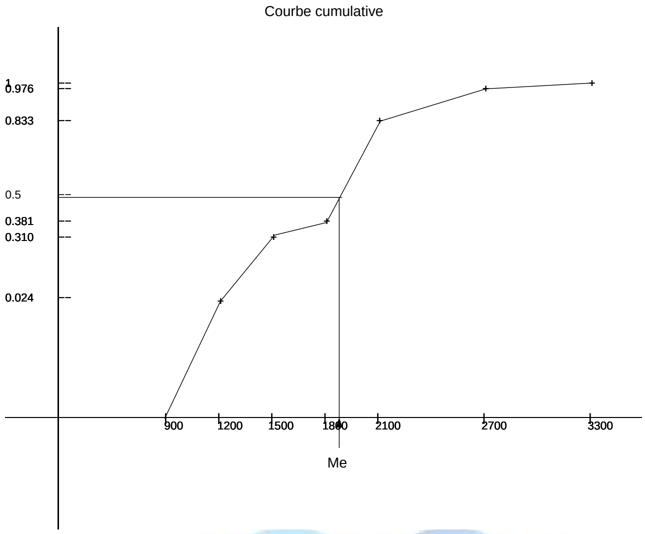
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_1 &= \frac{1}{160}(109350000 + 361237500 + 45000000) - \bar{x}_1^2 = \frac{515587500}{160} - 1757.625^2 \\ &= 133176.234 \\ \mathrm{Var}_2 &= \frac{1}{50}(5512500 + 40837500 + 172800000) - \bar{x}_2^2 = \frac{219150000}{50} - 2040^2 \\ &= 221400\end{aligned}$$

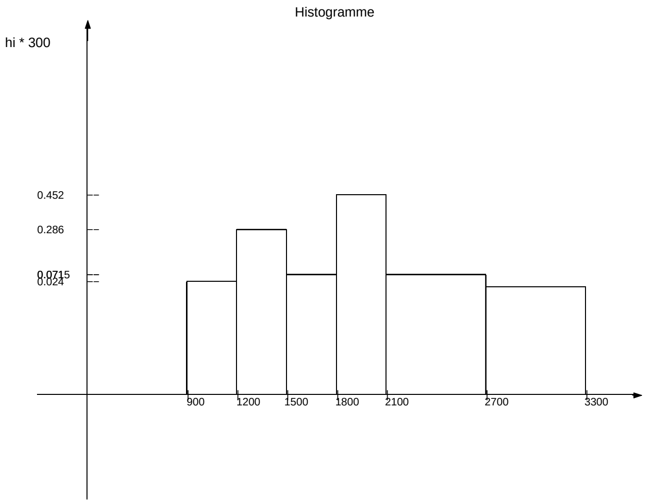
On en déduit la variance Intra,

$$\mathrm{VarIntra} = \frac{1}{210}(160 \times 133176.234 + 50 \times 221400) = \frac{32378197.44}{210} = 154181.8926$$

e. Il faut remarquer que

$$\mathrm{VarIntra} + \mathrm{VarInter} = \mathrm{Var}.$$


Courbe cumulative
1
0.976
0.833
0.5
0.381
0.310
0.024
900
1200
1500
1800
2100
2700
3300
Me


Histogramme
hi * 300
0.452
0.286
0.0715
0.024
900
1200
1500
1800
2100
2700
3300

6

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de : $x\,e^{x^2+3x}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \, Log\, x - x)$
4. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$
5. Donner une primitive de la fonction f définie par : $f(x) = Log\, x$
6. Calculer en fonction de n, l'expression suivante : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
7. Calculer $\int_0^{p/2} x \sin x \, dx$

8. Résoudre $x^2 - 5x + 4 < 0$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in N^*}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$ et $U_1 = 1$

10. Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$

Exercice n° 2

❶ Etudier la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et tracer son graphe.

❷ Déterminer le nombre de racines de l'équation : $1 - l\,x e^{-x} = 0$, où $l \in R$.

❸ Etudier et représenter la fonction réelle g définie par : $g(x) = \dfrac{x e^x}{x+1}$

❹ Déterminer le nombre de racines de l'équation : $x - l\,(x+1)e^{-x} = 0$, où $l \in R$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x - Ln\,|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Etudier les variations de f.

❷ Tracer le graphe de f.

❸ Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et le graphe de f.

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

❹ Etudier les variations de f_m.

❺ Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\, x \leq x - 1$.

❻ On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$. Démontrer que $G \leq M$ (on pourra appliquer ❺ avec $x = \frac{a_i}{M}$).

❼ Comparer G et H.

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x \sin \frac{p}{x} \text{ et } f(0) = 0$$

❶ Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

❷ Préciser l'ensemble des nombres réels tels que :

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$.

❸ Calculer les dérivées première et seconde de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

❹ Etudier les variations de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

Exercice n° 5

On considère n couples fixés (x_i, y_i) de valeurs réelles strictement positives et l un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer les paramètres *a* et/ou *b* d'une fonction f qui minimise l'expression suivante :

$$L(f, l) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + l \int_0^1 f''(x)\, dx$$

dans chacun des cas ci-dessous :

a) $f(x) = ax$
b) $f(x) = ax^2$
c) $f(x) = ax^2 + bx$

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans une société, quelles sont les conditions de la réduction des inégalités entre les hommes et les femmes ?

Sujet n° 2

L'homme moderne s'est-il trop éloigné de la nature ?

Sujet n° 3

Les découvertes techniques contribuent-elles à renouveler les questions morales ?

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme. Une porte est munie d'un dispositif de fermeture portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes correspondant respectivement à chacun des cas suivants :
   a) les trois chiffres sont pairs
   b) les deux lettres sont identiques
   c) le code contient deux chiffres impairs
3. La porte est équipée d'un système d'alarme qui se déclenche lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

Exercice n° 2

On note $\log_6$ et $\log_{36}$ respectivement les fonctions logarithmes de base 6 et 36 et on considère la fonction *f* définie par :

$$f(z) = \log_6(13 + |z - 4i|) + \log_{36} \frac{1}{(15 + |z + 4i|)^2}$$

où *z* est un nombre complexe et où $|w|$ désigne le module du nombre complexe *w*.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction *f(z)* ?

2. Montrer que la résolution de l'équation *f(z)* = 0 dans l'ensemble **C** des nombres complexes revient à la résolution dans **C** de l'équation :

$$|z - 4i| = 2 + |z + 4i|$$

3. Déterminer les solutions *z* de cette équation qui vérifient $|z| = 7$.

Problème

Partie A

Soit *f* la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. a) Montrer que la fonction *f* est définie sur l'ensemble des réels **R** et qu'elle est impaire.

b) Montrer que *f* est dérivable sur **R** et calculer sa dérivée. En déduire son sens de variation.

2. Soit (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b) Trouver une équation cartésienne de la tangente D à (C) à l'origine O du repère. Tracer la courbe (C).

3. Soit *a* un réel strictement positif. Calculer en fonction de *a*, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$.

Partie B

1. a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine **I** que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') représentative de la fonction g.

c) Montrer que, pour tout x de **I**, on a: $g(x)=\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})$

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$ une seule solution a et que $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra montrer que cette équation est équivalente à $f(x) = x$ et étudier les variations de la fonction p définie par $p(x) = f(x)-x$)

Partie C

1. On note $g'(x)$ la dérivée de g et on considère la fonction j définie sur **R** par :

$$j(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$$

a) Montrer que j est une bijection de **R** sur un intervalle **J** que l'on précisera.

b) On note $h=j^{-1}$ la fonction réciproque de j. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$ pour tout x de **J**.

2. On pose, pour tout x de [0,1[et pour tout entier n positif :

$$S_n(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

a) Calculer $S_n'(x)$ et en déduire que : $S_n(x)=h(x)-\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par :

$$u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+...+\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$$

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DÉPARTEMENT DE LA STATISTIQUE
ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

150 clients font la queue au guichet d'un cinéma; le guichetier n'a aucune monnaie disponible dans sa caisse. Le billet coûte 5 euros: 80 clients disposent de billets de 5 euros, les 70 autres clients ont uniquement un billet de 10 euros. On modélise le problème en définissant 150 variables $X_i,\ i \in \{1, \ldots, 150\}$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ a un billet de 5 euros,} \\ -1 & \text{si le client } i \text{ a uniquement un billet de 10 euros.} \end{cases}$$

A. On représente le nombre de billets de 5 euros disponibles dans la caisse après le passage du $k$ème client par la variable S_k définie pour tout $k \in \{0, \ldots, 150\}$ par

$$S_k = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_k & \text{si} \quad k \in \{1, \ldots, 150\}, \\ 0 & \text{si} \quad k = 0. \end{cases}$$

Si tous les clients peuvent être servis, c'est-à-dire si le guichetier peut toujours rendre la monnaie à un client qui se présente avec un billet de 10 euros, combien y-a-t-il de billets de 5 euros et de billets de 10 euros dans la caisse après le passage des 150 clients ?

B. On peut définir dans un repère orthogonal une trajectoire partant du point $(0, 0) = (0, S_0)$ et joignant par des segments de droite les points (k, S_k) pour tout $k \in \{1, \ldots, 150\}$.

1. Tracer une trajectoire possible dans un repère orthogonal allant de $(0, 0) = (0, S_0)$ à $(5, 1) = (5, S_5 = 1)$.

2. Exprimer sous forme d'une condition sur la trajectoire le fait que le guichetier puisse satisfaire tous les clients.

3. On s'intéresse dans cette question uniquement aux 100 premiers clients, c'est-à-dire aux valeurs prises par les variables $X_1, \ldots, X_{100}$. On note $p \in \mathbb{N}$ le nombre des $X_i,\ i \in \{1, \ldots, 100\}$ qui prennent la valeur 1 et on note $q \in \mathbb{N}$ le nombre des $X_i,\ \in \{1, \ldots, 100\}$ qui prennent la valeur -1. Donner les valeurs de p et q pour que la trajectoire atteigne le point $(100, 10)$.

Exercice 2

Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres rationnels définie par

$$x_m \;=\; 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(m-1)!}+\frac{1}{m!}, \qquad (0.1)$$

où $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 1$ est le produit des k premiers entiers non nuls, défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec la convention $0! = 1$.
Le nombre irrationnel e est représenté par la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ car il peut s'écrire :

$$e \;=\; 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}. \qquad (0.2)$$

Le but de cet exercice est de trouver une approximation du nombre irrationnel e.

1. Quelle est la nature de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par (0.1) : est–elle croissante ou bien est–elle décroissante ou bien est–elle ni croissante et ni décroissante? On justifiera sa réponse.

2. Pour $m \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, et $n > m$, calculer $|x_n - x_m|$.

3. Dans le terme $|x_n - x_m|$ déterminé à la question **2.**, mettre la quantité $\dfrac{1}{(m+1)!}$ en facteur.

4. En utilisant le fait que pour tout entier k tel que $1 < k \leq n-m$, on a $\dfrac{1}{m+k} < \dfrac{1}{m+1}$, et à partir de la question **3.**, déduire une majoration pour $|x_n - x_m|$.

5. Déterminer la valeur de la quantité S_{n-m-1} définie par

$$S_{n-m-1} \;=\; \sum_{k=0}^{n-m-1}\frac{1}{(m+1)^k}. \qquad (0.3)$$

Indication : il faut remarquer que S_{n-m-1} est la somme des $(n-m)$ premiers termes d'une suite géométrique.

6. Déduire de la question **5.**, la limite quand n tend vers l'infini de S_{n-m-1}, avec $m \geq 1$ fixé.

7. On va dans cette question déterminer un encadrement pour le nombre e.

- **a.** En utilisant l'écriture de e donnée par la relation (0.2), exprimer $|e - x_m|$, pour un $m \in \mathbb{N}^\star$ quelconque.
- **b.** Reprendre les questions **3.**, **4.** et **5.**, pour en déduire une majoration de $|e - x_m|$.
- **c.** En prenant $m = 15$, donner en utilisant la majoration de la question **7.b.**, un encadrement pour e. En déduire une valeur approchée pour e pour laquelle on spécifiera la précision.

Exercice 3

En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $\ln(1+x)$ définie pour $x > -1$, déterminer un encadrement de $\ln(2)$.

Exercice 4

1. **a.** Trouver les réels a, b et c tels que

$$\frac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

b. A partir de **1.a.**, déterminer la primitive de $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$, pour $x \in \mathbb{R}$ puis la primitive de $\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

2. En faisant le changement de variable $t = \tan(x)$, calculer $\int_0^2 \frac{1}{1+3(\cos x)^2}dx$.

Exercice 5

Dans la forêt de la Reine en Meurthe et Moselle, on veut étudier si la croissance des chênes est la même dans toutes les parties de la forêt.
Pour ce faire on compare la croissance des chênes dans 8 différentes zones choisies au hasard : ces zones seront dénommées par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H.
On classe les chênes en 3 classes suivant leur diamètre :

inférieur strictement à 10 cm   compris entre 10 cm et 20 cm   supérieur strictement à 20 cm

On note pour chaque zone le nombre de chênes appartenant à chacune des classes. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant : on notera N_{ij} le nombre de chênes observés se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. La donnée de ces effectifs observés représente la distribution empirique des chênes.

	diamètre < 10 cm	10 cm $\leq$ diamètre $\leq$ 20 cm	diamètre > 20 cm
A	5	18	28
B	22	29	24
C	19	37	34
D	15	26	11
E	25	39	40
F	23	26	33
G	18	23	23
H	16	23	24

Le but de cet exercice est de savoir si on peut conclure à partir des données du tableau à l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes.

1. Quel est le nombre total de chênes observés ? On note n ce nombre.

2. Déterminer les marges du tableau précédent, c'est-à-dire calculer les sous-totaux de chaque ligne et chaque colonne. On ajoutera une ligne et une colonne supplémentaires au tableau et dans chaque nouvelle case on reportera le sous-total calculé de la ligne ou la colonne en question.

3. Pour chaque case du tableau précédent se trouvant à l'intersection de la ligne i $(1 \leq i \leq 8)$ et de la colonne j $(1 \leq j \leq 3)$, on note n_{ij} le nombre de chênes théorique que l'on devrait obtenir si l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes était vérifiée. La donnée de ces effectifs théoriques représente la distribution théorique des chênes sous l'hypothèse d'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes. Le nombre n_{ij} est égal au produit des marges de la ligne i et de la colonne j divisé par le nombre total n.
Calculer pour toutes les cases du tableau ce nombre n_{ij}. On dessinera un nouveau tableau dans lequel on inscrira ces nombres de chênes théoriques.

4. On va mesurer l'écart entre la distribution théorique et la distribution empirique du nombre de chênes par la fonction Δ définie par

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{3} \frac{(N_{ij} - n_{ij})^2}{n_{ij}}. \tag{0.4}$$

Calculer la valeur de Δ définie par la relation (0.4).

5. Si on observe une grande valeur de Δ définie par (0.4), pensez-vous que l'on puisse conclure à l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes?

6. Soit $\alpha = 0.05$. La théorie des probabilités nous assure l'existence d'une valeur $c_\alpha = 23.685$ telle que, sous l'hypothèse qu'il y ait indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes, Δ est strictement inférieure à c_α avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \alpha = 0.95$. On prend alors la décision de :

–accepter l'hypothèse d'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes si $\Delta < c_\alpha$

–conclure à la dépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes si $\Delta > c_\alpha$.
Quelle décision prenez–vous?

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre d'Antonio R. Damasio dont le titre est *«Spinoza avait raison»* – Joie et tristesse, le cerveau des émotions – paru aux éditions Odile Jacob en mai 2003. Il sera résumé en 240 mots, plus ou moins 10%.

Qu'est-ce qu'un sentiment ?

Pour tenter d'expliquer ce que sont les sentiments, je voudrais commencer par poser une question au lecteur : quand vous envisagez n'importe quel sentiment que vous avez éprouvé, agréable ou non, intense ou non, quels en sont selon vous les contenus ? Remarquez bien que je ne vous interroge pas sur la cause du sentiment ; sur son intensité, sur sa valeur positive ou négative, ou encore sur les pensées qui vous sont venues à l'esprit à son occasion. Je vise plutôt les contenus mentaux, les ingrédients, le matériau qui font un sentiment. Afin de faire avancer cette expérience de pensée, voici quelques suggestions : imaginez que vous êtes allongé sur la plage, en fin de journée, que le soleil vous dore doucement la peau, que l'océan vient lécher vos pieds ; imaginez le bruissement des aiguilles de pin quelque part derrière vous, une légère brise estivale souffle, il fait 28°, et il n'y a pas un nuage dans le ciel. Prenez votre temps ; savourez cette expérience. Je suppose que rien ne vient vous contrarier, que vous vous sentez très bien, excessivement bien même, comme aime à dire un ami à moi. La question est : en quoi consiste ce sentiment de bien-être ? Voici quelques indices : votre peau a chaud, et c'est agréable. Vous respirez facilement, vous ne ressentez pas de gêne aux poumons ou à la gorge. Vos muscles sont si détendus que vous n'éprouvez aucun tiraillement aux articulations. Votre corps se sent léger, bien posé mais avec nonchalance. Si vous passez en revue votre organisme, vous pouvez sentir sa machinerie qui fonctionne doucement, sans anicroches, sans douleur, une vraie perfection. Vous avez l'énergie pour bouger mais, d'une certaine manière, vous préférez rester tranquille, combinaison paradoxale entre aptitude et inclination à agir d'un côté, et délectation à rester calme, de l'autre.

Bref : votre corps se sent différent, selon un grand nombre de dimensions. Certaines sont assez apparentes, et vous pouvez les situer en vous. D'autres sont plus impondérables. Par exemple, vous ressentez du bien-être et une absence de douleur ; bien que le lieu de ce phénomène soit le corps et ses opérations, cette sensation est si diffuse qu'il est difficile de décrire de façon précise où elle se situe dans le corps.

Cet état a des conséquences mentales. Si vous détournez votre attention du simple bien-être lié à ce moment, si vous parvenez à stimuler les représentations mentales qui ne renvoient pas directement à votre corps, vous découvrez que votre esprit est occupé par des pensées dont les thèmes créent une nouvelle vague de sentiment agréable. L'image d'événements dont vous anticipez ardemment qu'ils seront agréables vous vient à l'esprit, de même que des scènes que vous avez vécues avec plaisir dans le passé. Vous découvrez aussi que votre tournure d'esprit est bienheureuse. Vous avez adopté un mode de pensée dans lequel les images sont précises et s'écoulent en abondance et sans effort. Cela a deux conséquences sur votre sentiment de bien-être. Des pensées apparaissent dont les thèmes correspondent à l'émotion que vous éprouvez ; votre mode de pensée, votre style de processus mental augmente la vitesse avec laquelle les images surgissent et les multiplie. Tel Wordsworth à Tintern Abbey, vous avez «des sensations délicieuses qui cour[ent] dans [votre] sang jusqu'au fond de [votre] cœur» et ces sensations «pass[ent] même dans [votre] esprit le plus pur, calmement retrouvées». Ce que vous considérez d'habitude comme votre «esprit» et comme votre «corps» se mêlent en harmonie. Tout conflit semble désormais s'apaiser. Toutes les oppositions paraissent désormais moins tranchées.

Je dirais que ce qui définit le sentiment agréable lié à ces moments, ce qui fait que le sentiment mérite seul ce terme et qu'il est différent de toutes les autres pensées, c'est la représentation mentale des parties du corps ou de tout le corps opérant d'une certaine manière. Le sentiment, au sens pur et étroit du mot, est l'idée du corps qui est d'une certaine manière. Dans cette définition, on peut remplacer «idée» par «pensée» ou par «perception». Dès qu'on va au-delà de l'objet qui a causé le sentiment, les pensées et le mode de pensée qui s'ensuit on atteint le cœur même du sentiment. Son contenu consiste en une représentation d'un état donné du corps.

La même remarque vaut pour les sentiments de tristesse, pour les sentiments liés à n'importe quelle autre émotion, pour les sentiments liés aux appétits et pour ceux qui sont liés à n'importe quel ensemble de réactions régulatrices se déroulant dans l'organisme. Les sentiments, au sens employé dans ce livre, proviennent de n'importe quel ensemble de réactions homéostatiques, pas seulement des émotions. Ils traduisent l'état vécu actuellement dans le langage de l'esprit. Il me semble qu'il existe des «modes corporels» distincts qui résultent de différentes réactions homéostatiques, depuis l'état de douleur simple jusqu'à son équivalent complexe, et donc des sentiments fondamentaux distincts. Il existe aussi des objets déclencheurs distincts, des pensées correspondantes distinctes et des modes de pensée assortis. Par exemple, la tristesse s'accompagne d'une faible production d'images, mais d'une hyperattention aux images, alors que le bonheur va de pair avec des images qui changent vite et auxquelles on prête peu d'attention. Les sentiments sont des perceptions, et il me semble que leur soubassement se trouve dans les cartes corporelles du cerveau. Celles-ci renvoient à des parties du corps et à des états du corps. Une variation dans le plaisir ou la douleur est un contenu correspondant de la perception que nous appelons sentiment.

La perception du corps s'accompagne de celle de pensées dont les thèmes correspondent à l'émotion et d'une perception d'un certain mode de pensée, d'un style de processus mental. Comment cette perception apparaît-elle ? Elle résulte de la construction de métareprésentations de notre processus mental, opération sophistiquée grâce à laquelle une partie de l'esprit en représente une autre. Cela nous permet d'enregistrer le fait que nos pensées ralentissent ou s'accélèrent selon qu'on leur accorde plus ou moins d'attention ; ou bien le fait que les pensées représentent des objets et des événements de près ou à distance. Mon hypothèse, exprimée sous la forme d'une définition provisoire veut donc qu'un sentiment soit la perception d'un certain état du corps ainsi que celle d'un certain mode de pensée et de pensées ayant certains thèmes. Les sentiments apparaissent lorsque la simple accumulation des détails encartés atteint un certain stade. Dans une perspective différente, la philosophe Suzanne Langer restitue bien la nature de ce moment d'apparition lorsqu'elle dit que, lorsque l'activité d'une partie du système atteint un «pic critique, le processus est ressenti». Le sentiment est une conséquence du processus homéostatique en cours, c'est une étape suivante du cycle.

Cette hypothèse n'est pas compatible avec la conception selon laquelle l'essence des sentiments (ou bien celle des émotions lorsque émotions et sentiments sont pris comme synonymes) serait une collection de pensées pourvues de thèmes allant de pair avec un certain type de sentiment, comme les pensées qui portent sur des situations de perte dans le cas de la tristesse. Je crois que cette conception vide désespérément le concept de sentiment. Si les sentiments étaient seulement des ensembles de pensées ayant certains thèmes, comment pourrait-on les distinguer de n'importe quelles autres pensées ? Comment pourraient-ils posséder l'individualité fonctionnelle qui justifie leur statut en tant que processus mentaux spécifiques ? J'estime plutôt que les sentiments sont fonctionnellement distincts parce que ce sont par essence des pensées qui représentent le corps impliqué dans un processus réactif. Sans cela, la notion de sentiment disparaît. Sans cela, on ne pourrait jamais se permettre de dire : «Je me sens heureux» ; on devrait plutôt dire : «Je pense heureux». Mais cela pose une question légitime : qu'est-ce qui rend «heureuses» des pensées ? Si nous ne vivons pas un certain état du corps ayant une certaine qualité que nous appelons plaisir et que nous trouvons «bonne» et «positive» dans la vie en général, nous n'avons aucune raison de considérer une pensée comme heureuse. Ou comme triste.

L'origine des perceptions qui constituent l'essence du sentiment me semble claire : il existe un objet général, le corps, et il existe de nombreuses parties de cet objet qui sont sans cesse encartées dans un certain nombre de structures cérébrales. Les contenus de ces perceptions sont clairs eux aussi : ce sont divers états du corps dépeints par les cartes représentant le corps selon toute une gamme de possibilités. Par exemple, la micro- et la macrostructure des muscles tendus sont différentes de celles des muscles au repos. C'est vrai également de l'état du cœur lorsqu'il bat vite ou lentement, et pour la fonction d'autres systèmes — respiratoire, digestif — dont le travail peut être tranquille et harmonieux ou difficile et mal coordonné. Autre exemple, le plus important peut-être : la composition du sang relativement à certaines molécules chimiques dont dépend notre vie et dont la concentration, à tout instant, est représentée dans certaines régions du cerveau. L'état particulier de ces composants du corps, représentés dans les cartes corporelles du cerveau, est le contenu des perceptions qui constituent les sentiments. Les substrats immédiats des sentiments sont les encartages de tous ces états du corps dans les régions sensorielles du cerveau conçues pour recevoir les signaux venus du corps.

On pourrait objecter qu'il ne semble pas que nous enregistrions consciemment la perception de tous ces états des parties de notre corps. Et heureusement que nous ne les enregistrons pas tous. Nous avons une expérience de certains qui est assez spécifique et pas toujours plaisante — rythme cardiaque irrégulier, contraction douloureuse du ventre, etc. Cependant, pour la plupart des autres composants, j'émets l'hypothèse que nous en faisons l'expérience sous forme «composite». Certaines structures de notre chimie interne, par exemple, enregistrent des sentiments généraux d'énergie, de fatigue ou de gêne. Nous vivons aussi tout un ensemble de changements comportementaux qui deviennent des appétits et des besoins. Évidemment, nous n'avons pas d'«expérience» de notre niveau sanguin de glucose lorsqu'il descend en dessous d'un certain seuil, mais nous faisons rapidement l'expérience des conséquences de cette diminution à travers la façon dont d'autres systèmes opèrent (la musculature, par exemple) et dont certains comportements s'engagent (la faim par exemple).

Vivre un certain sentiment, le plaisir par exemple, c'est percevoir que le corps est d'une certaine manière et percevoir le corps de la manière qui exige des cartes sensorielles dans lesquelles des structures neurales sont en jeu et dont des images mentales peuvent dériver. Je reconnais que l'apparition d'images mentales à partir de structures neurales est un processus qu'on ne comprend pas parfaitement (...). Mais nous en savons assez pour émettre l'hypothèse que ce processus repose sur des substrats qu'on peut identifier — dans le cas des sentiments, plusieurs cartes de l'état du corps situées dans diverses régions du cerveau — et par conséquent qu'il implique des interactions complexes entre régions cérébrales. Ce processus n'est pas localisé dans une aire du cerveau.

En bref, le contenu essentiel des sentiments est l'encartage d'un état donné du corps ; le substrat des sentiments est l'ensemble des structures neurales qui dressent la carte de l'état du corps et dont une image mentale de l'état du corps peut émerger. Un sentiment est par essence une idée — à savoir une idée du corps et plus précisément encore une idée d'un certain aspect du corps, de son intérieur, dans certaines circonstances. Un sentiment d'émotion est une idée du corps lorsqu'il est perturbé par le processus émotionnel. Comme nous le verrons plus loin, cependant, il est peu probable que l'encartage du corps qui constitue l'élément décisif de cette hypothèse soit aussi direct que William James l'imaginait.

Un sentiment est-il davantage qu'une perception d'un état du corps ?

Quand je dis que les sentiments sont en grande partie constitués par la perception d'un certain état du corps ou que la perception d'un état du corps forme une essence d'un sentiment, mon usage des mots «en grande partie» et «essence» n'est pas fortuit. On trouvera la raison de cette subtilité dans l'hypothèse-définition du sentiment qui vient d'être discutée. En maintes circonstances, en particulier lorsqu'on dispose de peu de temps ou qu'on n'en a pas du tout pour examiner les sentiments, ils sont seulement la perception d'un certain état du corps. Toutefois, dans d'autres circonstances, le sentiment implique la perception d'un certain état du corps et celle d'un certain état d'esprit l'accompagnant — soit les changements dans le mode de pensée auxquels je me référais plus haut en tant qu'ils font partie des conséquences du sentiment. Dans ces circonstances, nous avons des images du corps qui est ceci ou cela et, parallèlement, des images de notre style de pensée.

Dans certaines circonstances, peut-être dans la variété la plus avancée du phénomène, le processus est tout sauf simple. Il comporte ceci : les états du corps qui sont l'essence du sentiment et lui confèrent un contenu distinct ; le mode altéré de pensée qui accompagne la perception de cet état du corps essentiel ; et la forme de pensée qui va, en termes de thème, avec la sorte d'émotion ressentie. Dans ces occasions, si on prend l'exemple d'un sentiment positif, on pourrait dire que l'esprit se représente davantage que le bien-être. Il se représente aussi le bien-penser. La chair opère de façon harmonieuse ou du moins l'esprit le dit, et notre puissance de penser est à son sommet ou peut s'y élever. De même, le sentiment de tristesse ne porte pas sur une maladie du corps ou sur un manque d'énergie pour continuer à vivre. Il renvoie souvent à un mode inefficace de pensée suscitant un nombre limité d'idées de perte.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de : $x\,e^{x^2+3x}$ est $e^{x^2+3x}(\,1+x(2x+3)) = e^{x^2+3x}(\,1+3x+2x^2)$
2. On a : $\left|\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$, d'où $\underset{x\to+\infty}{Lim}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=0$
3. $\underset{x\to+\infty}{Lim}\,(x\,Log\,x-x) = \underset{x\to+\infty}{Lim}\,x(Log\,x-1) = +\infty$
4. On obtient $e^x=-2$ et $e^x=1$, d'où une seule solution $x=0$
5. Une primitive de la fonction f définie par : $f(x)=Log\,x$ est $F(x)=xLog\,x-x$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{n+1}$
7. $\displaystyle\int_0^{p/2}x\sin x\,dx=[-x\cos x]_0^{p/2}+\int_0^{p/2}\cos x\,dx=\int_0^{p/2}\cos x\,dx=1$
8. L'équation correspondante admet deux racines 1 et 4. L'ensemble des solutions est donc $S=]1,4[$
9. Par récurrence, on obtient $U_n=\dfrac{U_1}{3^{n-1}}$, et la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ converge vers 0.
10. Les solutions du système $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{9}{4}\\ xy=6\end{cases}$ sont : $(x,y)=(3,2)\;ou\;(-3,-2)$

Exercice n° 2

❶ La fonction f n'est pas définie en 0 et sa dérivée est $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.
Cette dérivée s'annule en +1. La fonction est décroissante sur $]-\infty,0[$ de 0 à $-\infty$, décroissante également sur $]0,1[$ de $+\infty$ à e, puis croissante sur $]1,+\infty[$ de e à $+\infty$.
Le graphe de f présente une branche parabolique dans la direction verticale à $+\infty$ et les axes comme asymptotes.

❷ L'équation $1-l\,x\,e^{-x}=0$ est équivalente à $f(x)=l$ (graphiquement, ceci correspond à l'intersection du graphe de f avec une droite horizontale), d'où les résultats :

- Pour $l<0$, on a une seule racine,
- Pour $0\leq l<e$, on n'a pas de racine,
- Pour $l=e$, on a une seule racine,
- Pour $l>e$, on a deux racines.

❸ La fonction g n'est pas définie en -1 et sa dérivée est $g'(x)=\frac{e^x(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$. Cette dérivée est toujours positive et la fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ de 0 à $+\infty$ et sur $]-1,+\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$. La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote, ainsi que l'axe horizontal.

❹ L'équation $x-l\,(x+1)\,e^{-x}=0$ est équivalente à $g(x)=l$, d'où les résultats :
Pour $l\leq 0$, on a une seule racine et pour $l>0$, deux racines.

Exercice n° 3

❶ La fonction f est définie sur R^*.

On trouve les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=1$

La dérivée est égale à $f'(x)=1-\frac{1}{x}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ et décroissante sinon.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 1	1 $\nearrow$ $+\infty$	

❷ Pour le graphe de f, on a : une a une branche parabolique dans la direction $y = x$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. Le graphe suit le tableau de variation. La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction est convexe.

❸

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^2 = \frac{5}{2} - Ln4$$

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

❹ f_m est définie sur R_+^*. Sa dérivée est égale à : $f_m^{'}(x) = m - \frac{1}{x}$ et elle est nulle pour $x = \frac{1}{m}$. f_m est donc décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{m}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right[$. Elle admet un minimum en $x = \frac{1}{m}$ égal à $Ln\,m$.

❺ Pour $m = 1$, le minimum est nul, d'où pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \leq x - 1$.

❻ En appliquant ❺ avec $x = \frac{a_i}{M}$, on obtient : $Ln\frac{a_i}{M} \leq \frac{a_i}{M} - 1$.

En sommant ces différentes inégalités, on a : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \leq \frac{1}{M}\sum_i a_i - n$.

Comme par ailleurs $M = \frac{1}{n}\sum_i a_i$, l'inégalité devient : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \leq 0$ ou encore

$\frac{1}{n}\sum_i Ln\,a_i \leq Ln\,M$ et $\sum_i Ln\,a_i^{1/n} = Ln\,G \leq Ln\,M$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on obtient $G \leq M$

❼ On remplace a_i par $\frac{1}{a_i}$ dans $G \leq M$ pour obtenir :

$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times .... \times \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}$, c'est à dire $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}$, d'où $H \leq G$

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x\sin\frac{p}{x} \text{ et } f(0)=0$$

❶ f est dérivable, et donc continue, sur $R-\{0\}$ comme composée de fonctions élémentaires dérivables.

f est continue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, en effet $\left|x\sin\frac{p}{x}\right|\le|x|$.

Pour la dévivabilité en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{p}{x}$ et cette dernière limite n'existe pas, la fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

❷ Résolvons les différentes équations :

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $\sin\frac{p}{x}=\sin kp$, d'où $S=\{x/f(x)=0\}=\left\{0,\frac{1}{k}(k\in Z)\right\}$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ ou $\sin\frac{p}{x}=1=\sin(\frac{p}{2}+2kp)$, d'où $S=\{x/f(x)=x\}=\left\{0,\frac{2}{1+4k}(k\in Z)\right\}$

c) $f(x)=-x \Leftrightarrow x=0$ ou $\sin\frac{p}{x}=-1=\sin(-\frac{p}{2}+2kp)$, d'où

$S=\{x/f(x)=-x\}=\left\{0,\frac{2}{4k-1}(k\in Z)\right\}$

❸ Calculons les dérivées :

$$f'(x)=\sin\frac{p}{x}-\frac{p}{x}\cos\frac{p}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{p}{x^3}\sin\frac{p}{x}$$

❹ Variations de f pour $x\ge\frac{1}{2}$. Comme $x\ge\frac{1}{2}$, on a : $0\le\frac{p}{x}\le 2p$.

La dérivée seconde s'annule pour $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$. Elle est positive sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right]$,

donc la dérivée première est croissante sur cet intervalle et comme elle change de signe sur cet intervalle en étant bijective, elle s'annule une seule fois sur cet intervalle en une valeur notée a . En cette valeur la fonction admet un minimum.

x	$1/2$		a		1		$+\infty$
$f''(x)$	0		+		0	-	0
$f'(x)$	$-2p$		$\uparrow$		p	$\downarrow$	0
$f(x)$	0	$\downarrow$		$\uparrow$	0 | 0	$\uparrow$	$+\infty$

Exercice n° 5

a) Pour $f(x) = ax$, on a : $L(f, l) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2$. Cette fonction admet un minimum pour la valeur de a qui annule la dérivée de cette fonction L par rapport à a.

On obtient : $2a(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 0$, d'où $a = \dfrac{\sum_i x_i\, y_i}{\sum_i x_i^2}$

b) Pour $f(x) = ax^2$, $L(f, l) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2)^2 + 2a\,l$. En dérivant par rapport à a, on obtient :

$2a(\sum_{i=1}^{n} x_i^4) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i + 2\,l = 0$, d'où $a = \dfrac{\sum_i x_i^2\, y_i - l}{\sum_i x_i^4}$

c) Pour $f(x) = ax^2 + bx$, $L(f, l) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i)^2 + 2a\,l$. On dérive par rapport à a et par rapport à b.

$L'_a = 2a(\sum_{i=1}^{n} x_i^4) + 2b(\sum_i x_i^3) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i + 2\,l = 0$ et

$L'_b = 2a(\sum_{i=1}^{n} x_i^3) + 2b(\sum_i x_i^2) = 0$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(\sum_i x_i^4) + b(\sum_i x_i^3) = \sum_i x_i^2\, y_i - l \\ a(\sum_i x_i^3) + b(\sum_i x_i^2) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne, en posant $\Delta = (\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i^3)^2$:

$$a = \frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i x_i^2 \; y_i - l)}{\Delta} \text{ et } b = -\frac{(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i^2 \; y_i - l)}{\Delta}$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Un code est donc formé de :

- 3 chiffres pris dans l'ensemble N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Comme les trois chiffres sont distincts et que l'ordre intervient, le nombre de 3 chiffres possibles est le nombre d'arrangements de 3 éléments dans l'ensemble N à 9 éléments, soit :

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9x8x7 = 504$$

- les lettres n'étant pas nécessairement distinctes, le nombre de choix possibles de deux lettres parmi les quatre est le nombre de listes de deux éléments de {A, B, C, D} qui est $4^2=16$

Comme à chaque choix des 3 chiffres on peut associer $4^2=16$ choix de 2 lettres (principe multiplicatif), le nombre de codes possibles est $A_9^3 x4^2 = 8064$

2. a) Il y a 4 chiffres pairs : 2, 4, 6, 8 dans l'ensemble N. Un code de 3 chiffres pairs est donc formé d'un arrangement de 3 chiffres de l'ensemble {2, 4, 6, 8} et d'une liste de 2 éléments de {A, B, C, D}. D'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 3 chiffres pairs est $A_4^3 x4^2 = 384$

b) Les deux lettres sont identiques, donc il n'y a que 4 choix possibles pour les lettres. Les chiffres constituent toujours un arrangement de 3 chiffres de l'ensemble N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} . D'où, d'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 2 lettres identiques est $A_9^3 x4 = 2016$

c) Il y a 5 chiffres impairs :1, 3, 5, 7, 9. Comme les codes cherchés contiennent deux chiffres impairs, il y a $A_5^2 = 60$ choix possibles.

Il reste à choisir le dernier chiffre qui sera pair, il y a donc 4 choix possibles.

Enfin, les lettres constituent une liste de 2 éléments de {A, B, C, D}, donc il y a 4^2 choix possibles. D'où, d'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 2 chiffres impairs est $A_5^2 x4x4^2 = 3840$

3. L'alarme se déclenche lorsqu'on frappe 3 chiffres parmi les 6 chiffres n'appartenant pas au code et une liste de deux éléments de {A, B, C, D} quelconque.

On déduit du principe multiplicatif que le nombre de codes déclenchant l'alarme est $A_6^3 x4^2 = 1920$

Exercice n° 2

1. La fonction f est définie si le nombre complexe z vérifie :

$$\begin{cases} 13+|z-4i|>0 \\ \dfrac{1}{(15+|z+4i|)^2}>0 \end{cases}$$

et ces conditions sont vérifiées car le module d'un complexe est un réel positif.

2. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, on a :

$$\log_6(13+|z-4i|)+\log_{36}\frac{1}{(15+|z+4i|)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \log_6(13+|z-4i|)-2\log_{36}(15+|z+4i|)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(13+|z-4i|)}{\ln 6}-2\frac{\ln(15+|z+4i|)}{\ln 36}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(13+|z-4i|)}{\ln 6}-2\frac{\ln(15+|z+4i|)}{\ln 6^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{13+|z-4i|}{15+|z+4i|}=0=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{13+|z-4i|}{15+|z+4i|}=1 \Leftrightarrow |z-4i|=2+|z+4i|$$

3. En posant $z = a+ib$, on a :

$$|z|=7 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=7 \Leftrightarrow a^2+b^2=49$$

Par ailleurs :

$$|z-4i|=|a+(b-4)i|=\sqrt{a^2+(b-4)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-8b+16}=\sqrt{49-8b+16}=\sqrt{65-8b}$$

De même:

$$|z+4i|=|a+(b+4)i|=\sqrt{a^2+(b+4)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+8b+16}=\sqrt{49+8b+16}=\sqrt{65+8b}$$

L'équation devient :

$$\sqrt{65-8b}=2+\sqrt{65+8b}$$

Les deux membres étant positifs, nous obtenons une équation équivalente en les élevant au carré :

$$(\sqrt{65-8b})^2 = (2+\sqrt{65+8b})^2$$

(1) $$\Leftrightarrow 65-8b = 4+4\sqrt{65+8b}+65+8b$$

$$\Leftrightarrow -4b-1 = \sqrt{65+8b}$$

Le membre de droite étant positif, il faut que :

(2) $$-4b-1 \geq 0 \Leftrightarrow b \leq -\frac{1}{4}$$

On a alors, en élevant les 2 membres de (1) au carré :

$$(-4b-1)^2 = (\sqrt{65+8b})^2$$
$$\Leftrightarrow 16b^2+8b+1 = 65+8b$$
$$\Leftrightarrow 16b^2 = 64 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

Vu la condition (2), la valeur b = 2 doit être rejetée. Nous avons alors :

$$\begin{cases} b=-2 \\ a^2+b^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a^2+4=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=\pm\sqrt{45} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=\pm 3\sqrt{5} \end{cases}$$

et puisque $z = a+ib$, les solutions de l'équation sont : $S = \{3\sqrt{5}-2i, -3\sqrt{5}-2i\}$

Problème

Partie A

1. a**)** f est définie sur **R** car $2x+\sqrt{4x^2+1}>0$ pour tout réel x
Pour tout réel x on a : $f(x)+f(-x) = \ln(2x+\sqrt{4x^2+1})(-2x+\sqrt{4x^2+1}) = \ln(1) = 0$
donc $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

b) On a $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x+\sqrt{4x^2+1}>0$ qui est dérivable sur **R.** f est donc dérivable comme composée de deux fonctions dérivables et on vérifie que :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

2. a) Branches infinies de (C) : on vérifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs on a :

$$f(x) = \ln(x) + \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}) \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On en déduit que (C) admet une branche parabolique de direction l'axe Ox au voisinage de +∞. Comme f est impaire, (C) admet une branche parabolique de direction l'axe Ox au voisinage de (-∞).

b) On a $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$ et donc l'équation de la tangente D à (C) en O est $y = 2x$.

3. Comme f est positive sur [0, a] donc on peut écrire que l'aire de la partie limitée par (C) et les droites respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$: $A = \int_0^a f(t)dt$

A l'aide d'une intégration par partie en posant : $u(x) = f(x)$ et $v'(x)=1$, on vérifie que :

$$A = af(a) - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}$$

Partie B

1. a) f est continue et strictement croissante sur **R,** donc f est une bijection de **R** sur f(**R**) = **R,** et donc f admet une fonction réciproque g

b) La courbe (C') de g est le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation : $y = x$

c) Pour calculer l'expression de $g(x)$, on peut aussi résoudre dans **R** l'équation en y : $f(y)= x$

$$f(y) = \ln(2y + \sqrt{4y^2+1}) = x$$
$$e^x = 2y + \sqrt{4y^2+1}$$
$$4y^2 + 1 = (e^x - 2y)^2$$
$$e^{2x} - 4ye^x = 1$$
$$y = \frac{e^{2x}-1}{4e^x}$$

D'où le résultat. On peut également vérifier, à partir de l'expression donnée de $g(x)$, que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

2) a- Existence et unicité d'un réel a solution de l'équation $g(x) = x$ dans $]0,+\infty[$.

Comme f est la fonction réciproque de g, si $g(x) = x$, on a $x = f(g(x)) = x$, et inversement. Donc l'équation $g(x) = x$ est équivalente à $f(x) = x$.

Considérons la fonction $p(x) = f(x)-x$. On a :

$$p'(x) = \frac{3-4x^2}{(2+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}}$$

p est croissante sur $\left]0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, atteint son maximum en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, est décroissante vers $-\infty$ sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

Comme $p(\frac{\sqrt{3}}{2}) > 0$, il n'y a pas de solution dans l'intervalle $\left]0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$,

La fonction p étant continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, il existe un réel unique a dans cet intervalle qui vérifie $p(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$

Partie C

1. On a $j(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) On vérifie que j est continue et dérivable sur **R** et comme $j'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$, elle est strictement croissante de **R** vers $\left]\lim_{x\to-\infty} j, \lim_{x\to+\infty} j\right[$ =]-1,1[. On en déduit que j est une bijection de **R** sur **J** =]-1,1[.

b) Soit $y \in$ **R** et $x \in$]-1,1[, on a :

$h(x) = y \Leftrightarrow j(y) = x$

$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow e^{2y} - 1 = x(e^{2y}+1)$

d'où

$h(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

On vérifie que $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2. On a $S_n'(x) = 1 + x^2 + (x^2)^2 + ... + (x^2)^{n-1}$ qui est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison x^2. Comme x^2? 1, on a $S_n'(x) = \dfrac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$

a) Comme S_n est la primitive de S'_n sur [0,1] telle que $S_n(0)$=0, on a :

$$S_n(x) = \int_0^x S'_n(t)dt = \int_0^x \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}dt$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \int_0^x h'_n(t)dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$
$$= h(x) - h(0) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

D'où l'égalité.

b) On remarque que :

$$u_n = S_n(\frac{1}{3}) = h(\frac{1}{3}) - \int_0^{1/3} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

donc il suffit de calculer la limite quand n tend vers l'infini de $I_n = \displaystyle\int_0^{1/3} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$. Or on vérifie que pour tout t de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ on a $0 \le \dfrac{t^{2n}}{1-t^2} \le \dfrac{9}{8}(\dfrac{1}{3})^{2n}$ et on en déduit que $0 \le I_n \le \dfrac{9}{8}(\dfrac{1}{3})^{2n+1}$.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = h(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\ln 2$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} s'obtient en ajoutant à x_n le réel positif $\frac{1}{(n+1)!}$. La suite est par conséquent une suite croissante.

b. Pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, et $m > n$, on obtient

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= x_m - x_n \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

c.

$$x_m - x_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(m)}\right)$$

d.

$$x_m - x_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right)$$

e.

$$S_{m-n-1} = \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{(n+1)}}$$

f.

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} S_{m-n-1} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)}} \\ &= \frac{1}{n} + 1 \end{aligned}$$

g.

1.

$$|e - x_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

2. En reprenant les questions **c.**, **d.** et **e.**, on obtient

$$0 \quad < e - x_n < \quad \frac{1}{n!\, n}$$

3. En prenant $n = 10$, et en utilisant (0.1), on obtient un encadrement de e par

$$x_{10} \quad < e < \quad x_{10} + \frac{1}{(10)!10}, \tag{0.1}$$

où $x_{10} = 2.7182818011$; on en déduit que

$$2.7182818011 < e < 2.718281856.$$

La valeur approchée de e a 10^{-9} près est $e = 2.718281856$.

Exercice 2 L'utilisation du Théorème des Accroissements Finis requière la dérivabilité de la fonction sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$, a et b réels. Prenons l'intervalle $[10000, 10001]$ et la fonction $f : x \to \sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $[10000, 10001]$ de dérivée la fonction $f' : x \in [10000, 10001] \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Le Théorème des Accroissements Finis nous assure l'existence d'un réel $c \in]10000, 10001[$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{10001} - \sqrt{10000}}{10001 - 10000} &= \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\sqrt{10001} - 100}{1} &= \frac{1}{2\sqrt{c}}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Comme $c \in]10000, 10001[$, on a $\frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$. En utilisant (0.2) on obtient l'encadrement de $\sqrt{10001}$ suivant :

$$100 < \sqrt{10001} < 100 + \frac{1}{200} = 100,005.$$

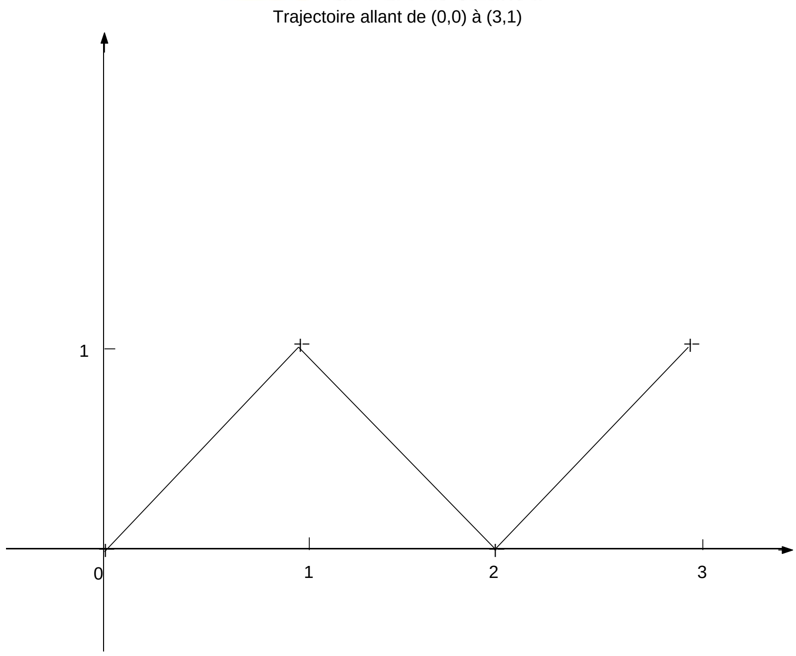
La valeur approchée de $\sqrt{10001}$ a 10^{-3} est $\sqrt{10001} = 100,005$.

Exercice 3

1. Si tous les clients sont servis, dans la caisse il y a (60 -40)=20 billets de 10 euros et 40 billets de 20 euros.

2.

a. Trajectoire possible dans un repère orthogonal allant de $(0, 0) = (0, S_0)$ à $(3, 1) = (3, S_3 = 1)$.



b. Le guichetier peut servir tous les clients si à aucun instant i pour $i \in \{1, \ldots, 100\}$, la trajectoire ne traverse l'axe des abscisses vers des valeurs de S_i négatives.

c. Pour que la trajectoire atteigne le point $(50, 10)$, il faut que $p + q = 50$ et $p - q = 10$, on en déduit que $p = 30$ et que $q = 20$.

d. Compter le nombre de trajectoires allant de $(0, 0) = (0, S_0)$ à $(100, 20) = (100, S_{100} = 20)$ consiste à compter le nombre de combinaisons que l'on peut faire en prenant 60 éléments dans un ensemble de 100 éléments. Par conséquent ce nombre est égal à C_{100}^{60}.

Exercice 4

On pose $u = \ln(x)$ et $v' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ pour faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x\ \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2}[\ln(x)\frac{1}{(1+x^2)}]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2)\frac{1}{(5)} + \frac{1}{2}\int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}) dx \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{2}[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_1^2 \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(5) \\
&= \frac{13}{20}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(5).
\end{aligned}$$

Exercice 5

a. Le nombre total de chênes observés est égal à $n = 581$

b.

Effectifs observés	diamètre < 10 cm	10 cm $\leq$ diamètre ≤ 20 cm	diamètre > 20 cm	Marges des lignes
A	18	28	5	51
B	29	24	22	75
C	37	34	19	90
D	26	11	15	52
E	39	40	25	104
F	26	33	23	82
G	23	23	18	64
H	23	24	16	63
Marges des colonnes	221	217	143	$n = 581$

c. Pour chaque case du tableau suivant, on détermine n_{ij} se trouvant à l'intersection de la ligne i $(1 \leq i \leq 8)$ et de la colonne j $(1 \leq j \leq 3)$:

Effectifs théoriques	diamètre < 10 cm	10 cm $\leq$ diamètre ≤ 20 cm	diamètre > 20 cm
A	19,399	19,048	12,552
B	28,528	28,012	18,459
C	34,234	33,614	22,151
D	19,779	19,421	12,799
E	39,559	38,843	25,597
F	31,191	30,626	20,182
G	24,344	23,903	15,752
H	23,964	23,530	15,506

d. Le calcul de Δ est

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\frac{(N_{ij}-n_{ij})^2}{n_{ij}} \\ &= 0,1+0,007+0,223+1,956+0,007+0,864+0,074+0,038+4,207+0,574+ \\ &\quad +0,004+3,651+0,034+0,184+0,034+0,009+4,543+0,679+0,448+ \\ &\quad +0,378+0,014+0,393+0,320+0,015 = 18,756. \qquad (0.3)\end{aligned}$$

e. Si on observe une grande valeur de Δ définie par (0.3), on aura tendance à conclure qu'il y a une dépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes puisque cela signifie qu'il y a une différence entre les distributions théorique et observée.

f. Comme $\Delta = 18,756 < 23,685$, alors on accepte l'hypothèse d'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes.

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer une primitive de $\sqrt[5]{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$
2. Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$
3. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et B(2,-1).
4. Résoudre l'équation : $(Ln\,x)^2 - Ln\,x - 6 = 0$, où Ln désigne le logarithme népérien.
5. Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2+1}$
6. Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie $P(1) = 0,\quad P(3) = -2 \quad \text{et} \quad P(4) = -\frac{3}{2}$
7. Ecrire le nombre suivant 2,3535353535…., dont le développement décimal est infini et périodique, sous la forme d'une fraction.

8. Résoudre l'inéquation $\frac{x^2-1}{x-2}<0$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par récurrence par : $U_{n+1}=(U_n)^2$ et $U_1=\frac{1}{3}$

10. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^3}{e^x}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$

❶ Trouver des nombres réels *a*, *b*, *c* tels que $f(x)=ax^2+b+\frac{c}{x^2-1}$

❷ Etudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.

❸ Soit P la courbe représentative de la fonction *g* définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+1$

- Quelle est la limite de $f(x)-g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
- Etudier la position de la courbe représentative de f par rapport à P.

❹ Calculer la dérivée de f et étudier ses variations.

❺ Tracer le graphe de f et la courbe P.

Exercice n° 3

❶ Montrer que pour tout entier n>0, on a : $\frac{1}{n+1}<Ln(n+1)-Ln(n)<\frac{1}{n}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

❷ En déduire la nature de la suite $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$ et trouver un équivalent simple de cette suite.

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}^{+}$ et déterminer son application réciproque notée f^{-1}.

❸ Tracer le graphe de f^{-1}.

❹ Exprimer le carré de f en fonction du carré de sa dérivée.

❺ Etudier les variations de la fonction $h = \frac{f}{f'}$ et tracer son graphe.

Exercice n° 5

Dans une population la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52.

On sait d'autre part que 2% des filles et 1% des garçons présentent à la naissance une luxation congénitale de la hanche.

On considère les événements suivants :

G : naissance d'un garçon

F : naissance d'une fille

L : le nouveau-né souffre d'une luxation de la hanche.

❶ Déterminer les probabilités de « L sachant G » (notation L/G) et de « L sachant F » (notation L/F).

❷ Calculer les probabilités des événements « G et L » et « F et L ». En déduire la probabilité de L.

❸ Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

❹ Dans une maternité il naît en moyenne 20 enfants par semaine.

- Quelle est la probabilité qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation ?

EXERCICE n° 6

Soit f une fonction continue, définie de l'intervalle $[a,b]$ sur R. On suppose que pour tous *c* et *d* de cet intervalle, il existe *e* compris entre *c* et *d* tel que $f(e) = f(a)$ ou $f(e) = f(b)$

Montrer que $f(a) = f(b)$

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

De quelle vérité l'opinion est-elle capable ?

Sujet n° 2

Dans quelle mesure l'école est-elle aujourd'hui un facteur d'intégration sociale ?

Sujet n° 3

Les hommes ont-ils besoin d'être gouvernés ?

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

1. **R** désigne l'ensemble des nombres réels. Résoudre, dans **R**x**R** , le système :

$$(S)\ \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \\ x^2 y^2 = 2 \end{cases}$$

2. On considère le nombre complexe $Z = 2e^{i\frac{p}{8}}$

a) Vérifier que : $Z^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

b) On pose $Z = x + i\,y$. Vérifier que x=0 et y = 0 et que le couple (x, y) est solution du système (S).

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{p}{8}$ et $\sin\frac{p}{8}$.

3. a) En utilisant les formules d'Euler, démontrer que pour tout réel a, on a :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

b) En choisissant convenablement a, retrouver le résultat de la question 2. c).

Exercice n° 2

1. On rappelle que la factorielle d'un entier naturel n est l'entier noté $n!$ défini par :

$$n\,! = 1 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x} \ldots \text{x } n \quad \text{pour} \quad n = 1 \text{ et } 0! = 1$$

a) Calculer 4!, 5! et 6!.

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $k = 1$ on a : $k! \geq 2^{k-1}$

c) Déterminer le plus petit entier n tel que : $n! \geq 10^7$

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrer que : $u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

et que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. En déduire une majoration de $(\mathrm{u_n})$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge. (On ne demande pas de calculer sa limite.)

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

On note ***l*** leur limite commune.

b) Donner, en le justifiant, une valeur approchée par défaut de ***l***, à 10^{-7} près. (On pourra utiliser la question 1.c).)

Problème

Partie *A*

On désigne par g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = e^x(x-1)+1$$

1) Calculer la dérivée g' de la fonction g et en déduire les variations de la fonction g.

2) Démontrer que $g(x) = 0$ pour tout x réel.

Partie *B*

On considère la fonction intégrale I définie pour tout x de **R** par :

$$I(x) = \int_0^x e^t(x-t)dt$$

1) En intégrant par parties, démontrer que : $I(x) = e^x - (1+x)$

2) Soit x un réel positif. Démontrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a : $1 \leq e^t \leq e^x$

En déduire que pour tout x positif, on a l'encadrement :

$$\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

3) Trouver de la même manière un encadrement de $I(x)$ pour tout x négatif.

4) En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$

Partie *C*

On désigne par f la fonction définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

On note ***C*** sa courbe représentative.

1) Étudier les limites de f en -8 et en +8 . Préciser les éventuelles asymptotes.

2) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 par une fonction que l'on notera encore f.

Que vaut $f(0)$?

3) Étudier la dérivabilité de f en 0. (On pourra utiliser la question 4 de la partie *B*.)

4) Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe. En déduire le sens de variation de f sur **R.**

5) Déterminer une équation de la tangente ***T*** à ***C*** au point d'abscisse 0.

6) Tracer dans un repère orthonormal la droite ***T*** puis la courbe ***C*** de la fonction f.

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Mihaly Csikszentmihalyi dont le titre est: "VIVRE, la psychologie du bonheur" paru aux éditions Robert Laffont en janvier 2004. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

La qualité de l'expérience vécue

Bonheur et expérience vécue

Il y a deux mille trois cents ans, Aristote déclarait que par dessus tout, les femmes et les hommes cherchent le bonheur. Tandis que le bonheur est convoité pour lui-même, tout autre but - santé, beauté, richesse ou puissance - est désiré tant qu'il est censé nous rendre heureux. Bien des choses ont changé depuis Aristote et notre compréhension du monde s'est considérablement élargie ; les dieux des Grecs semblent bien impuissants face aux pouvoirs que détient l'humanité actuelle. Pourtant, pour ce qui a trait au bonheur, peu de changements sont apparus au cours des siècles, notre compréhension en la matière a peu progressé et nous n'avons rien appris concernant les façons d'accéder à cette bienheureuse condition.

De nos jours, nous sommes en bien meilleure santé, nous pouvons espérer vivre plus longtemps, nous sommes entourés d'objets de luxe et de commodités inexistantes autrefois (il n'y avait pas de toilettes dans le palais du Roi-Soleil, les chaises étaient rares dans les châteaux médiévaux, et l'empereur romain ne pouvait regarder la télé), nous disposons de connaissances scientifiques stupéfiantes, mais si la majorité des gens se dit heureuse, bon nombre d'individus considèrent que leur vie se passe dans l'anxiété ou l'ennui.

Est-ce que le sort de l'humanité est qu'elle demeure insatisfaite, chacun désirant plus qu'il ne peut avoir ? Est-ce que le malaise qui gâte souvent de précieux moments provient du fait que l'individu cherche le bonheur au mauvais endroit ?

Les connaissances de la psychologie moderne ont pour objectif d'explorer cette question ancienne : *Quand les gens se sentent-ils le plus heureux ?* Il y a vingt-cinq ans, j'ai fait une "découverte" à propos du bonheur. Elle est maintenant assez connue mais demeure inexpliquée. Aussi ai-je passé ce quart de siècle à examiner ce phénomène insaisissable. Cette découverte est fort simple : le bonheur n'est pas quelque chose qui arrive à l'improviste ; il n'est pas le résultat de la chance ; il ne s'achète pas et ne se commande pas ; il ne dépend pas des conditions externes mais plutôt de la *façon dont elles sont interprétées.* Le bonheur est une condition qui doit être préparée, cultivée et protégée par chacun. Les gens qui apprennent à maîtriser leur expérience intérieure deviendront capables de déterminer la qualité de leur vie et de s'approcher aussi près que possible de ce qu'on appelle être heureux.

Nous ne pouvons pas atteindre le bonheur en le cherchant consciemment. Comme le disait le grand philosophe anglais J. S. Mill (1806 - 1873) :

"Demandez-vous si vous êtes heureux et vous cessez de l'être". C'est par le plein engagement dans chaque détail de sa vie qu'il est possible de trouver le bonheur et non par une recherche directe. Le psychologue autrichien Victor Fran le formule joliment :

"Ne visez pas le succès - plus vous le cherchez, plus vous courez le risque de le rater. On ne peut pas pourchasser le succès, pas plus que le bonheur ; il doit s'ensuivre ou survenir... comme l'effet non recherché d'un engagement personnel dans un projet plus grand que soi".

Alors, comment parvenir à ce but insaisissable qui ne peut être atteint par une route directe ? Mes vingt-cinq années de recherche m'ont convaincu qu'il existe un moyen : c'est un chemin circulaire qui commence par le *contrôle du contenu de sa conscience.*

Les perceptions qui arrivent au cerveau sont le produit de plusieurs forces qui façonnent l'expérience vécue ; elles influencent l'humeur et l'individu. La plupart des forces en question sont hors du contrôle de la personne. Peut-on changer son tempérament ? Peut-on influencer sa taille ou son intelligence ? Peut-on choisir ses parents ou son lieu de naissance ? Les instructions contenues dans les gènes, la loi de la gravité ou la qualité de l'air font également partie des innombrables choses qui influencent ce que nous voyons, la façon dont nous nous sentons et ce que nous faisons. Il n'est donc pas surprenant qu'autant de gens croient que notre sort est déterminé par des agents externes.

Pourtant, il nous est arrivé à tous, à certains moments, de nous sentir, non pas assaillis par des forces anonymes, mais dans le plein contrôle de nos actions, dans la parfaite maîtrise de notre vie. Dans ces rares occasions, nous éprouvons un enchantement profond longtemps vénéré qui devient une référence, un modèle indiquant ce que notre vie devrait être.

Voilà ce que nous entendons par *expérience optimale.* C'est ce que ressent le navigateur quand le vent fouette son visage et que le bateau fend la mer - les voiles, la coque, le vent et la mer créent une harmonie qui vibre dans ses veines ; c'est ce qu'éprouve l'artiste peintre quand les couleurs s'organisent sur le canevas et qu'une nouvelle oeuvre (une création) prend forme sous la main de son créateur ébahi ; c'est le sentiment d'un père ou d'une mère) face au premier sourire de son enfant. De pareilles expériences intenses ne surviennent pas seulement lorsque les conditions externes sont favorables. Des survivants des camps de concentration qui ont connu des conditions terribles et frôlé la mort se rappellent souvent, qu'au milieu de leurs épreuves, ils ont vécu de riches et intenses expériences intérieures en réaction à des événements aussi simples que le chant d'un oiseau, la réussite d'une tâche difficile, la création d'une poésie ou le partage d'un croûton de pain.

Contrairement à ce que croient bien des gens, des expériences comme celles-là, les meilleurs moments de la vie n'arrivent pas lorsque la personne est au repos (même si le repos peut être fort agréable après l'effort). Ces grands moments surviennent quand le corps ou l'esprit sont utilisés jusqu'à leurs limites dans un effort volontaire en vue de réaliser quelque chose de difficile et d'important.

L'expérience optimale est donc quelque chose que l'on peut provoquer, l'enfant qui place avec des doigts tremblants le dernier bloc sur la haute tour qu'il a construite, le nageur qui fait ses longueurs en essayant de battre son propre record, le violoniste qui maîtrise un passage difficile. Pour chacun, il y a des milliers de possibilités ou de défis susceptibles de favoriser le développement de soi (par l'expérience optimale).

De telles expériences intenses ne sont pas nécessairement plaisantes au moment où elles se produisent. Le nageur peut avoir les muscles endoloris, les poumons brûlants et être lui-même écrasé de fatigue ; pourtant, ces moments peuvent compter parmi les meilleurs de son existence. Le contrôle de sa vie n'est jamais facile et peut même être douloureux ; mais l'expérience optimale que produisent ces instants donne un sentiment de maîtrise qui s'approche d'aussi près que l'on puisse l'imaginer de ce qu'on appelle le bonheur.

Au cours de mes recherches, j'ai essayé de comprendre le mieux possible *comment* les gens se sentent quand ils sont au maximum de l'enchantement et *pourquoi* ils le sont. Au cours des premières études, nous avons interrogé des centaines *"d'experts"* - artistes, athlètes, musiciens, joueurs d'échec, et chirurgiens - qui consacraient la majeure partie de leur temps à leurs activités de prédilection. Dans le but de rendre compte de leur expérience intime, j'ai développé la théorie de l'expérience optimale qui correspond à l'état dans lequel se trouvent ceux qui sont fortement engagés dans une activité pour elle-même ; ce qu'ils éprouvent alors est si agréable et si intense qu'ils veulent le revivre à tout prix, uniquement pour le simple plaisir généré par l'activité elle-même.

Le modèle théorique a été mis à l'épreuve auprès de milliers de personnes interrogées par les membres de mon équipe (de l'université de Chicago) et, ensuite, par des collègues à travers le monde. Les résultats ont démontré que l'expérience optimale était décrite de la même façon par les femmes et les hommes, les jeunes et les moins jeunes, les gens de différentes conditions sociales et de différentes cultures.

L'expérience optimale n'est pas un privilège propre aux sociétés riches et industrialisées ; elle est rapportée essentiellement dans les mêmes termes par des femmes âgées de Corée, des adultes de l'Inde et de la Thaïlande, des adolescents de Tokyo, des bergers navajos, des bergers des Alpes italiennes et des ouvriers assignés aux lignes d'assemblage à Chicago. (....)

Les caractéristiques de l'expérience optimale

La première surprise révélée par les études, fut la similitude existant entre des activités très différentes lorsque tout se déroule particulièrement bien. Selon toute apparence, ce qu'éprouve un nageur qui traverse la Manche est à peu près identique à l'expérience intérieure d'un joueur d'échecs en plein tournoi ou d'un alpiniste qui gravit la montagne. Ces mêmes sentiments sont également partagés, pour une large part, par des musiciens qui composent une pièce et des adolescents qui participent à un championnat de basket.

La seconde surprise fut de découvrir que les gens décrivent leur enchantement à peu près de la même façon, sans égard à la culture, à la classe sociale, à l'âge et au sexe. *Ce* qu'*ils font* lorsqu'ils éprouvent l'expérience intense varie considérablement - le vieux Coréen médite, le jeune Japonais fait de la moto avec sa bande, etc. - , mais, lorsqu'ils décrivent *comment ils se sentent*, c'est à peu près dans les mêmes termes. Les raisons pour lesquelles ils éprouvent de l'enchantement se ressemblent également. Bref, l'expérience optimale semble être la même partout dans le monde et pour un grand nombre d'activités.

La phénoménologie de l'expérience optimale comporte huit caractéristiques majeures :

1. la tâche entreprise est réalisable mais constitue un défi et exige une aptitude particulière
2. l'individu se concentre sur ce qu'il fait
3. la cible visée est claire
4. l'activité en cours fournit une rétroaction immédiate
5. l'engagement de l'individu est profond et fait disparaître toute distraction
6. la personne exerce le contrôle sur ses actions
7. la préoccupation de soi disparaît, mais, paradoxalement, le sens du soi est renforcé à la suite de l'expérience optimale
8. la perception de la durée est altérée

La combinaison de ces éléments produit un sentiment d'enchantement profond qui est si intense que les gens sont prêts à investir beaucoup d'énergie afin de le ressentir à nouveau. Nous allons considérer chacun des éléments afin de mieux comprendre ce qui rend cette expérience si gratifiante. Cette connaissance devrait nous aider à mieux contrôler notre conscience et à convertir la monotonie de la vie quotidienne en expériences contribuant à l'accroissement de soi.

Défi et habileté

Quelqu'un peut éprouver une grande joie, une extase sans grande raison apparente : elle est déclenchée par une mélodie qui survient, par un beau panorama ou encore provient simplement d'un sentiment de bien-être. Cependant, dans la grande majorité des cas, l'expérience optimale se produit quand une activité est dirigée vers un but et gouvernée par des règles, une activité qui représente une certaine difficulté (un défi), qui exige l'investissement de l'énergie psychique et qui ne peut être réalisée sans les aptitudes requises. Il convient également de noter tout de suite que l' "*activité*" et l' "*aptitude*" dont il est question ne doivent pas être comprises seulement au sens physique. Par exemple, une activité très fréquemment mentionnée est la lecture. Cette dernière requiert de l'attention, elle a un but et requiert la connaissance du langage écrit. Elle n'exige pas seulement de savoir lire mais aussi de savoir lire les mots en images, d'avoir de l'empathie à l'endroit des personnages fictifs, de reconnaître le contexte historique et culturel, d'anticiper les tournants de l'intrigue, d'évaluer le style de l'auteur, etc.

La capacité de manipuler l'information symbolique est une "aptitude" comme l'est celle du mathématicien qui façonne les relations quantitatives ou logiques et celle du musicien qui combine les sons. La relation à autrui est une autre activité agréable, universellement reconnue. A première vue, il peut sembler qu'aucune aptitude ne soit nécessaire pour profiter d'une activité aussi simple que bavarder ou plaisanter avec d'autres personnes. Mais, de toute évidence, celle-ci est indispensable et les personnes qui sont avant tout préoccupées d'elles-mêmes, comme peuvent l'être les timides, redoutent les contacts informels et évitent la compagnie des autres.

Toute activité comporte un ensemble de possibilités d'action ou un "défi" qui requièrent des aptitudes appropriées. Pour ceux qui n'ont pas les aptitudes requises, l'activité ne représente pas un défi, elle n'est pas intéressante ou n'a tout simplement pas de sens. L'échiquier qui intéresse tant le joueur d'échecs, laisse indifférent celui qui n'en connaît pas les règles ; les montagnes ne sont que d' immenses masses rocheuses pour la plupart des gens, mais elles représentent pour l'alpiniste, un ensemble complexe de défis physiques et mentaux.

La compétition fournit des défis ; d'où l'intérêt des jeux et des sports qui opposent deux personnes ou deux équipes. "*Celui qui lutte contre nous,* écrit Edmund Burke, *renforce nos muscles et aiguise nos aptitudes ; notre adversaire est notre complice."* Les défis de la compétition peuvent donc être très stimulants et très agréables. Cependant lorsque le désir de bien jouer est remplacé par celui de gagner (et parfois à tout prix), l'agrément tend à disparaître. La compétition est agréable lorsqu'elle tend à perfectionner ses aptitudes ; elle ne procure plus grand plaisir lorsque la victoire devient une fin en elle-même.

Les défis ne se limitent pas aux activités physiques ou compétitives ; ils procurent des enchantements même dans des situations où on ne s'y attendait pas. Bien des gens pensent, par exemple, que le plaisir artistique provenant de la vue d'une toile est le simple fruit d'un processus immédiat ou intuitif, mais, pour un expert en matière d'art, c'est autre chose : *"certaines toiles sont si peu complexes qu'elles ne vous donnent aucune émotion, mais il y en a d'autres qui vous offrent une sorte de défi... ce sont celles-là, qui vous restent à l'esprit, qui sont vraiment intéressantes."* En d'autres termes, même le plaisir que l'on peut tirer d'une oeuvre dépend du défi que l'oeuvre contient.

Les activités qui procurent plaisir et enchantement ont souvent été inventées à cet effet. Les jeux, les sports, la lecture, n'existent-ils pas depuis des siècles en vue de favoriser justement les expériences plaisantes et enrichissantes ? Cependant, il ne faudrait pas penser que, seuls, les loisirs et les arts procurent des expériences optimales. Même le travail productif et la routine quotidienne peuvent être satisfaisants. C'est justement un des objectifs de ce livre de transformer les activités de la vie quotidienne en des "jeux" pleins de sens qui donnent lieu à des expériences optimales. Tondre le gazon, attendre chez le dentiste, faire un gâteau peuvent devenir des activités agréables si elles sont restructurées de façon à fournir un but, des règles, et autres éléments déjà signalés.

Chacun de nous a mis au point ses routines, afin de combler ses attentes ou aime se rappeler une expérience positive quand l'anxiété survient ; certains se tournent les pouces compulsivement, mâchonnent le bout de leur stylo, fument, tournent une mèche de leurs cheveux, fredonnent un air tandis que d'autres inventent des rituels plus ou moins ésotériques dans le même but : imposer un certain ordre à la conscience. Ces activités peuvent aider à passer des moments pénibles, à combler des vides, mais elles apportent assez peu d'agréments car elles sont peu complexes. Pour augmenter la qualité de la vie, il faut des tâches qui font appel à des aptitudes plus élaborées.

Les témoignages indiquent que l'expérience optimale survient lorsqu'il y a une correspondance adéquate entre les exigences de la tâche et les capacités de l'individu. Par exemple il n'est pas plaisant de jouer au tennis contre un adversaire trop fort, car on se sent anxieux et dévalorisé, ou un adversaire trop faible, car on s'ennuie.

L'expérience optimale apparaît entre le défi et l'ennui, lorsque le défi correspond aux capacités de l'individu. Même mon chien Hussar semble avoir compris cette règle d'or. Comme les enfants, il aime jouer à "fuite et poursuite" . Au début, il fait de grands cercles autour de moi et j'essaie de le toucher. Plus je suis fatigué, plus il se rapproche de façon à me faciliter la tâche.

Il a bien appris à faire durer son plaisir et le mien.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. $F(x) = \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x} + constante$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[Ln(1+e^x)\right]_0^1 = Ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

3 .L'équation de la droite est $y = -2x + 3$

4. On pose $u = Ln\, x$ et on obtient alors l'équation $u^2 - u - 6 = 0$, d'où $u = 3 = Ln\, x$ et $u = -2 = Ln\, x$. En conclusion : $x = e^3$ ou $x = e^{-2}$

5. La dérivée de $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2+1}$ est $f'(x) = \frac{e^{x+1}(1-x)^2}{(x^2+1)^2}$

6. Les réels *a*, *b*, *c* doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = -3/2 \end{cases}$$

On obtient : $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

7. Soit x = 2,3535353535…., alors 100x =235,353535…et par différence 99x=233, d'où x est égal à la fraction 233/99

8. On a : $\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)} < 0$ si et seulement si $x < -1$ ou $1 < x < 2$

9. On vérifie par récurrence que : $U_n = \frac{1}{3^{2^{n-1}}}$ et la limite est donc nulle.

10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3Lnx - x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(-1+\frac{3Lnx}{x})} = 0$, car $\lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Exercice n° 2

∂ Par identification des polynômes, on obtient $a=b=c=1$ et $f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x^2-1}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

÷ On a $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ qui tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $+\infty$

La courbe représentative de f est au dessus de P.

≠ La dérivée de f est $f'(x)=2x\left(1-\dfrac{1}{(x^2-1)^2}\right)=\dfrac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

Tableau de variation :

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$+\infty$ ↓ 4	4 ↑	$+\infty$

≡ Le graphe de f admet une asymptôte verticale en x = 1 et une branche parabolique dans la direction *oy* en $+\infty$

Exercice n° 3

∂ On applique le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme sur l'intervalle $[Ln\,p, Ln(p+1)]$, d'où il existe un réel *c* de cet intervalle tel que :

$$Ln(p+1)-Ln(p)=f'(c)=\frac{1}{c}$$

On a : $\frac{1}{p+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{p}$, d'où $\frac{1}{p+1}<Ln(p+1)-Ln(p)<\frac{1}{p}$

● Par sommation : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1}<\sum_{p=1}^{n}(Ln(p+1)-Ln(p))<\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

Soit $u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$, l'inégalité précédente devient $u_n+\frac{1}{n+1}-1<Ln(n+1)<u_n$.
La suite (u_n) étant minorée par la suite divergente de terme général $(Ln(n+1))$, elle est divergente et équivalente à $Ln(n+1)$.

Exercice n° 4

∂ La fonction f définie par : $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude pour des valeurs positives. Sa dérivée est égale à : $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ qui est toujours positive, la fonction est donc strictement croissante sur R^+ et donc aussi bijective (car continue) sur cet ensemble. Elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

● Soit $y=f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. On pose $t=e^x$, l'équation devient $t^2-2ty-1=0$, d'où $t=y+\sqrt{y^2+1}$ et $f^{-1}(y)=Ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

÷ Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice.

≠ On vérifie facilement que $f^2=(f')^2-1$.

≡ on a : $h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Cette fonction a des valeurs comprises entre –1 et 1 et elle est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine et les droites horizontales d'équation x = 1 et x = -1 sont des asymptôtes.

Exercice n° 5

∂ $\text{Prob}(L/G) = 0{,}01$ et $\text{Prob}(L/F) = 0{,}02$

• $\text{Prob}(G \cap L) = \Pr ob(G) \cap \Pr ob(L) = 0{,}52 \times 0{,}01 =$ 0,0052
$\text{Prob}(F \cap L) = \Pr ob(F) \cap \Pr ob(L) = 0{,}48 \times 0{,}02 =$ 0,0096
Par ailleurs $L = (G \cap L) \cup (F \cap L)$, d'où $\text{Prob}\, L = 0{,}0052 + 0{,}0096 = 0{,}0148$

÷ La probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille est égale à 2/3

≠ Pour 20 naissances en moyenne par semaine.

- La probabilité qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche est égale à $(1-0{,}052)+(1-0{,}096) = 0{,}9852$
- La probabilité qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation est égale à $1 - 0{,}9852 = 0{,}0148$ (la valeur 20 n'intervient pas).

Exercice n° 6

On montre que f est constante. Soit $t \in [a,b]$. Pour s suffisamment petit, il existe un $u(s)$ dans $[t-s, t+s]$ tel que $\mathrm{f(u(s))=f(a)}$ *ou* $\mathrm{f(b)}$.

On a alors par continuité
$(\mathrm{s} \to 0) \Rightarrow (\mathrm{u(s)} \to \mathrm{t}) \Rightarrow (\mathrm{f(u(s))} \to \mathrm{f(t)}) \Rightarrow (\mathrm{f(t)} \to \mathrm{f(a)}\ ou\ \mathrm{f(b)})$

L'image de $[a,b]$ par f est $f(a)$ ou $f(b)$ avec au maximum deux éléments. Mais f est continue donc l'image de $[a,b]$ est un intervalle fermé $[m,M]$. Il faut alors $m = M$ (sinon on a plus de deux éléments) et donc $f(x) = \text{Constante} = f(a) = f(b)$.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$ Les deux équations de (S) s'écrivent ainsi :

$$(E1):\ X - Y = 2\sqrt{2} \text{ et } (E2):\ XY = 2$$

Procédons par substitution :

Avec (E1), exprimons Y en fonction de X : $Y = X - 2\sqrt{2}$

En remplaçant dans (E2) : $(X - 2\sqrt{2})X = 2$

On obtient ainsi l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 2\sqrt{2}X - 2 = 0$$

Son discriminant est égal à 16 d'où : $X = \sqrt{2} + 2$ ou $X = \sqrt{2} - 2$

Mais comme $X \geq 0$ (puisque $X = x^2$), on a : $X = \sqrt{2} + 2$. D'où $Y = 2 - \sqrt{2}$

Tenant compte des relations $X = x^2$ et $Y = y^2$ et des conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on déduit :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ et } y = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Le système (S) admet donc un unique couple solution : $S = \{\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\}$

2. $Z = 2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

a) $Z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2\sqrt{2}(1+i)$

b) On a donc : $x = \mathrm{Re}(Z) = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = \mathrm{Im}(Z) = 2\sin\frac{\pi}{8}$

i) Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

ii) $Z^2 = (x + \mathbf{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy$.

iii) D'après 2)a) et 2)b)ii), on a : $x^2 - y^2 + 2ixy = 2\sqrt{2}(1+i)$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales. D'où :

$x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}$ et $2xy = 2\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}$ et $x^2y^2 = 2$

Et comme, d'après 2)b)ii), $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on peut affirmer que le couple (x, y) est solution du système (S).

c) D'après la question 1), on a : $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

D'après la question 2), on a : $x = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = 2\sin\frac{\pi}{8}$

D'où : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) a) D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}+2}{4} = \frac{2\cos(2\alpha)+2}{4} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}-2}{4} = \frac{2\cos(2\alpha)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

b) En prenant $\alpha = \frac{\pi}{8}$ on obtient :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

De même :

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice n° 2

1. a) 4 ! = 24 ; 5 ! = 120 et 6 ! = 720

b) Comme 1 ! = 1 et $2^{1-1}=2^0=1$ donc la l'inégalité est vraie pour k=1.

Supposons la vraie jusqu'à l'entier $k\geq 1$:

$$k!\geq 2^{k-1}$$

En multipliant par k+1, on obtient :

$$(k+1)k!\geq (k+1)2^{k-1}$$

$$(k+1)!\geq (k+1)2^{k-1}$$

Et comme $k+1\geq 2$: $(k+1)!\geq 2x2^{k-1}=2^k$

Donc l'inégalité est vraie pour k+1. On en déduit que l'inégalité est vraie pour tout entier $k\geq 1$.

c) On a 10! = 3 628 800 et 11! = 39 916 800. L'entier recherché est donc n = 11

2. a) On a $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=\frac{5}{2}=2.5$ et $u_3=u_2+\frac{1}{3!}=\frac{8}{3}=2.6666666$

b) Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

Donc (u_n) est une suite strictement croissante.

c) On a vu (partie 1, question c) que pour tout entier k>0 : $k!\geq 2^{k-1}$

Comme la fonction $g(t)=\frac{1}{t}$ est décroissante, on en déduit :

$$\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

Puis en ajoutant 1 de chaque côté, il vient :

$$u_n\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

(ii) La quantité $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

On a donc:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Et comme $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq 1$, il vient $u_n \leq 3$

La suite (u_n) est majorée par 3.

d) La suite (u_n) est (strictement) croissante et majorée, donc elle converge.

3. a) $v_0 = u_0 + 1 = 2$, $v_1 = u_1 + 1 = 3$, $v_2 = u_2 + \frac{1}{2} = 3$, $v_3 = u_3 + \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \approx 2.86$

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{-n+1}{(n+1)!}$$

Et comme n $\geq$ 2, on a : $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, on a vu que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

De plus, pour tout $n \geq 2$ on a :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Elle convergent donc vers une limite commune ***l***

b) On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \leq l \leq v_n$$

Donc en retranchant u_n de chaque membre :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{n!}$$

En choisissant n =11, on aura (d'après 1.c) :

$$0 \leq l - u_{11} \leq 10^{-7}$$

La distance entre ***l*** et u_{11} est bien inférieure à 10^{-7}.

Les calculs donnent : $u_{11} = \sum_{k=0}^{11}\frac{1}{k!} = 2{,}7182818$ à 10^{-7} par défaut.

Problème

Partie *A*

1) La fonction g est dérivable sur **R** comme somme et produit de fonctions dérivables et on a :

$$g'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$$

Donc : $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

On en déduit que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$

2) La fonction g admet donc un minimum global en 0. Or ce minimum étant nul puisque $g(0)=0$, la fonction g est positive sur **R.**

Partie *B*

1) On pose : $u(t) = x-t$ $\quad u'(t) = -1$

$v'(t) = e^t$ $\quad v(t) = e^t$

D'où :

$$I(x) = \left[(x-t)e^t\right]_0^x + \int_0^x e^t dt = -x + e^x - 1 = e^x - (1+x)$$

2) La fonction exponentielle étant croissante, $0 \leq t \leq x$ entraîne $1 \leq e^t \leq e^x$

En multipliant ce dernier encadrement par $(x - t) \geq 0$, il vient :

$$(x-t) \leq (x-t)e^t \leq (x-t)e^x$$

En intégrant entre 0 et $x \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^x (x-t)dt \leq I(x) \leq e^x \int_0^x (x-t)dt$$

Or : $\int_0^x (x-t)dt = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

D'où, pour tout $x \in [0,+\infty[$: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$

3) Idem avec $x \leq t \leq 0$

4) D'après la question 1 : $\frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{I(x)}{x^2}$

Et d'après la question 2, pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{I(x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$

Or, $\lim\limits_{x>0, x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x>0, x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

On montre, de même, en utilisant la question 3, que :

$$\lim_{x<0, x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Partie C

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$. Donc par produit: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x}=0$

La courbe ***C*** admet donc en -∞ un asymptote horizontale d'équation $y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$ et. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0$ Donc par somme: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}=+\infty$

La limite est infinie en +∞, donc pas d'asymptote horizontale en +∞ mais une direction asymptotique vers l'axe verticale.

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=\left[(e^x)'\right]_{x=0}=1$

Cette limite étant finie, la fonction *f* admet un prolongement continu en 0 et $f(0)=1$.

3) Par définition, la dérivée de *f* en 0 est la limite du taux de variation de *f* en 0. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$$

D'après la question ***B.***4) on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

La fonction *f* est donc dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$

4) D'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x)=\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

La fonction g étant positive sur **R**, on en déduit que la fonction dérivée f' est positive sur **R.**

On en déduit que f est croissante sur **R.**

5) La tangente ***T*** à ***C*** au point d'abscisse 0 est donnée par l'équation :

$$y = f(0) + f'(0)x$$

Compte tenu de $f(0) = 1$ et de $f'(0) = \frac{1}{2}$, on obtient : (***T***) : $y = \frac{1}{2}x + 1$

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire. Les questions de l'exercice sont indépendantes, chacune étant notée sur 1 point.

Globalement l'exercice n° 1 n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de l'épreuve.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{Log(1+x^2)}{e^{x^2}}$
2. Trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^2}+1+xe^x$
3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $x^3+x^2+x=0$
4. Calculer $\int_0^1 x\,Log(1+x^2)\,dx$
5. Trouver la longueur du côté du plus petit carré dans lequel on peut inscrire un cercle de surface égale à 9.
6. Résoudre le système : $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{37}{4} \\ xy=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

7. Trouver la limite, si elle existe, de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par récurrence par $U_{n+1} = \frac{1}{a} U_n$ et U_0 est un nombre réel non nul, ainsi que *a*.

8. On note E_n un ensemble à *n* éléments. Quel est le nombre d'applications injectives différentes de E_3 dans E_4 ?

9. Calculer les valeurs de *a*, *b*, *c* et *d* de façon que la fonction homographique f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ passe par le point A(0, -3) et admette les droites $x = 1$ et $y = 2$ comme asymptotes.

10. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels *a*, *b*, *c* tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.

4. Calculer l'aire comprise entre le graphe de f, la première bissectrice et les droites $x = 0, x = 1$.

5. Déterminer selon les valeurs de α et β, le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de f .

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de la fonction g définie par $g(x) = e^{x^2}$ et les droites $x = 0, x = 1$.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$.
2. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = (x - \frac{1}{2})f(x)$

Etudier la continuité et la dérivabilité de g .

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = (x - \frac{1}{2})^2 f(x)$

Etudier la continuité et la dérivabilité de h .

Exercice n° 5

Dans une entreprise, on note $\overline{x_H}$ (respectivement $\overline{x_F}$) la moyenne des salaires de hommes (respectivement des femmes). On désigne par *n* l'effectif total des salariés, par n_H (resp. n_F) le nombre d'hommes (resp. de femmes) dans l'entreprise.

1. Exprimer la moyenne $\overline{x}$ des salaires dans l'entreprise en fonction de la moyenne des salaires des hommes et des femmes.

Application numérique : calculer $\overline{x}$ pour $n_H = 50$, $n_F = 100$, $\overline{x_H} = 1500$, $\overline{x_F} = 1200$.

2. La dispersion des salaires (on note X la variable salaire) est mesurée par la variance définie par $V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$, où x_i correspond au salaire de l'employé i. On définit par le même principe la variance $V_H(X)$ (resp. $V_F(X)$) des salaires des hommes (resp. des femmes).

Exprimer $V(X)$ en fonction de $V_H(X)$ et $V_F(X)$.

Application numérique : calculer $V(X)$ pour $V_H(X)=40000$, $V_F(X)=10000$ et les valeurs données dans la question précédente.

Exercice n° 6

On considère l'ensemble des fonctions numériques f définies sur R^n. On rappelle que f est convexe si et seulement si :

$$\forall(u,v)\in R^n\times R^n, \forall t\in[0,1],\ f(tu+(1-t)v)\leq tf(u)+(1-t)f(v)$$

1. Montrer que la somme de deux fonctions convexes est convexe.

2. Montrer que la norme est une application convexe.

3. Montrer que f définie par $f(u)=\sum_{i=1}^{n}u_i\,Log(u_i)$ est convexe sur $(R^{+*})^n$.

4. Toute fonction convexe sur R^n admet-elle un minimum ?

5. On suppose que f est continue et que $\underset{\|u\|\to+\infty}{Lim} f(u)=+\infty$ Montrer que f admet un minimum sur R^n.

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La liberté est-elle une donnée ou une conquête ?

Sujet n° 2

Faut-il penser que l'accroissement des pouvoirs de la médecine lié aux découvertes de la biologie (clonage, médecine génétique, moléculaire) peut constituer un problème inquiétant ?

Sujet n° 3

Qu'est-ce que le développement durable ? Quelles en sont les conditions ?

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ENEA)
DAKAR–SÉNÉGAL

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Machines à calculer non autorisées

Exercice 1 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $n \in \mathbb{N}^\star$.

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2$.

a.1 Développer $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2$, puis déterminer le discriminant du polynôme du second degré $f(x)$. Que peut-on dire du signe de ce discriminant?

a.2 Déduire de la question précédente l'inégalité de Cauchy Schwartz:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

b. Développer $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2$, puis déduire de la question **a.** l'inégalité de Minkowski

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2)^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}$$

Exercice 2 On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère les deux nombres complexes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer la somme $(\alpha + \beta)$ puis le produit $(\alpha\, \beta)$.

2. Déterminer les valeurs de α et β.

3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en fonction des valeurs de α ou β trouvées à la question 2.

4. En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$ en fonction des valeurs de α ou β trouvées à la question 2.

Exercice 3 On effectue des essais indépendants de probabilité de succès constant égale à p $(0 < p < 1)$. On note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès. Calculer les probabilités des événements $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = k\}$ pour un k entier quelconque strictement positif. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X.
On note Y le nombre d'essais nécessaires pour obtenir m succès, avec $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ et m est fixé à l'avance. Donner la loi de Y. (On calculera $\mathrm{P}(Y = m + k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.)

Problème On admettra le résultat suivant noté **R.A.**

R.A. : Soit ϕ une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b$, et a et b réels$)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi(x)\sin(nx)dx = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi(x)\cos(nx)dx = 0$.

I. Préliminaires

I.1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

I.2. En déduire la limite de $\dfrac{\sin(nx)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et lorsque x tend vers 0.

I.3. Soit g la fonction à valeurs réelles définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Quel est le domaine de définition de g? Déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers 0.

On se restreint à l'intervalle $[0, \pi]$ et on définit la fonction f par

$$f : [0, \pi] \to \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in]0, \pi] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $[0, \pi]$.

I.4. Montrer qu'on peut définir la fonction f par

$$f : [0, \pi] \to \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) + \frac{1}{2}\frac{\sin(nx)\ \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

I.5. On considère une nouvelle fonction $\psi_{a,b}$ définie sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles; cette fonction est définie pour a et b réels par

$$\psi_{a,b}(x) = \begin{cases} (ax+bx^2)\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}, & \forall x \in]0,\pi] \\ a & \text{si} \;\; x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\psi_{a,b}$ est continue sur $[0,\pi]$.

II.

II.1. Déterminer les réels a et b tels que

$$\int_0^\pi h_{a,b}(x)\cos(2x)dx = \frac{1}{2^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi h_{a,b}(x)\cos(3x)dx = \frac{1}{3^2},$$

où $h_{a,b}(x) = (ax+bx^2)$.

II.2. En déduire que les réels a et b de la question **II.1.** sont ceux qui satisfont l'équation

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h_{a,b}(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}.$$

III.

III.1 Calculer la somme partielle $\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{ix})^k$ pour $x \in [0,\pi]$.

III.2 En remarquant que $\sum_{i=1}^{n}\cos(kx)$ est la partie réelle de $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{ix})^k$, en déduire que $\sum_{i=1}^{n}\cos(kx) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi]$.

IV. On veut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{6}$, où $u_n = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$.

IV.1. En prenant pour a et b les réels trouvés à la question **II.1.**, montrer à partir des questions **II.2.** et **III.2** que

$$u_n = \int_0^\pi (ax+bx^2)f(x)dx$$

IV.2. Déduire de **I.4**, **I.5** et **IV.1** que

$$u_n = \int_0^\pi -\frac{1}{2}(ax+bx^2)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi (ax+bx^2)\cos(nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \psi_{a,b}(x)\sin(nx)dx.$$

IV.3. Utiliser le résultat admis **R.A** pour en conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA –YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Daniel Schacter dont le titre est : «Science de la mémoire, oublier et se souvenir» paru aux éditions Odile Jacob (sciences) en septembre 2003. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Une bénédiction des dieux

Dans l'étrange nouvelle de Yasunari Kawabata intitulée « Yumiura », un romancier reçoit la visite inattendue d'une femme qui prétend l'avoir rencontré trente ans plus tôt dans l'île de Kyûshu : il s'était rendu dans la ville de Yumiura pour assister à la fête du Port lui dit-elle. Incapable de se souvenir de cette personne et préoccupé par la détérioration de sa mémoire, l'écrivain attribue d'abord cet incident au déclin mental qui le guette puis son embarras se transforme en inquiétude lorsque la visiteuse lui décrit ce qui s'était passé un jour où elle l'avait introduit dans sa chambre : « Vous m'avez même demandé si je ne voulais pas vous épouser », se rappelle-t-elle avec nostalgie. Pris de vertige en prenant conscience de l'ampleur de son oubli, le romancier est encore plus désemparé en entendant la révélation suivante : non seulement cette femme n'a jamais oublié les instants qu'ils auraient passés ensemble, mais le souvenir qu'elle a gardé de cette rencontre lui a rongé le cœur pendant de longues années.

Après cette visite, le romancier ébranlé va chercher dans sa bibliothèque un atlas détaillé du Japon et un répertoire de tous les noms de ville, communes et villages du pays – il espère retrouver ainsi le souvenir de cette ville de Yumiura et des raisons du séjour qu'il y aurait fait. Mais les cartes et les livres qu'il consulte ne font pas mention de cette cité, et il comprend alors qu'il n'aurait pas pu se trouver dans l'île de Kyûshu à l'époque concernée : si émouvant et détaillé qu'ait été le récit de cette femme, ses souvenirs étaient totalement faux.

Cette nouvelle de Kawabata illustre à merveille les divers types de problèmes mnésiques auxquels nous pouvons être sujets. Tantôt nous oublions le passé, tantôt nous le déformons ; et certains souvenirs particulièrement dérangeants nous hantent parfois pendant des années. En même temps, la mémoire est indispensable à l'accomplissement d'un nombre étonnant de tâches quotidiennes : le rappel de conversations amicales ou de vacances familiales, la remémoration de rendez-vous ou de listes de courses, la mobilisation des mots qui nous permettent de parler à autrui et de le comprendre, le souvenir des aliments que nous aimons ou non, l'acquisition des connaissances nécessaires à un nouveau travail, tout cela dépend de cette faculté, d'une façon ou d'une autre. Notre mémoire joue un rôle si omniprésent dans notre vie de tous les jours que nous la tenons le plus souvent pour acquise jusqu'à ce que l'incident d'un oubli ou d'une distorsion quelconque vienne attirer notre attention.

Je me propose tout à la fois d'explorer la nature des imperfections de la mémoire, d'exposer le mode de compréhension nouveau qu'elles appellent et de préciser comment leurs effets pernicieux peuvent être atténués ou évités. (….)

Si l'ampleur de la distorsion de la mémoire évoquée dans « Yumiura » vous laisse incrédule, sachez que la réalité peut égaler la fiction ou même la dépasser. Pensez par exemple au cas de Benjamen Wilkomirski, auteur d'une autobiographie unanimement célébrée en 1996 pour la description de l'Holocauste qu'elle contient : la vie en camp de concentration est dépeinte ici du point de vue d'un enfant. Non seulement les lecteurs de cet ouvrage ont cru lire les souvenirs toujours vivaces d'un jeune garçon témoin des horreurs de la *Shoah,* mais la prose du narrateur était empreinte de tant de puissance qu'un critique est allé jusqu'à proclamer que les *Fragments*… sont « si importants au plan moral et si dépourvus d'artifices littéraires » qu'il n'était « même pas sûr d'avoir le droit de faire l'éloge d'un tel livre ». Plus remarquable encore est le fait que Wilkomirski affirmait n'avoir retrouvé ses souvenirs d'enfance que sur le tard : il ne s'était confronté à ses traumatismes qu'au cours d'une thérapie suivie à l'âge adulte. L'histoire et les souvenirs de ce personnage ont inspiré tant de vocations littéraires que Wilkomirski est devenu une célébrité internationale et que son héroïsme a été célébré par les survivants de l'Holocauste.

L'affaire a commencé à être démêlée en août 1998 grâce à l'article stupéfiant de Daniel Ganzfried : ce journaliste suisse dont le père avait survécu à l'Holocauste a révélé dans un quotidien de Zurich que Wilkomirski s'appelle en réalité Bruno Dossekker et avait été mis au monde en 1941 par une dénommée Yvonne-Berthe Grosjean, laquelle avait placé son fils dans un orphelinat pour qu'il y soit adopté – le jeune Bruno avait passé toutes les années de guerre avec les Dossekker, ses parents adoptifs établis à proximité de son canton natal. Quelle que soit la source des « souvenirs » traumatiques d' horreurs nazies que prétendait avoir l'auteur des *Fragments…*, ils n'avaient donc rien à voir avec une expérience infantile des camps de concentration. Dossekker, alias Wilkomirski doit-il être rangé pour autant dans la catégorie des menteurs ? Sans doute pas : il reste persuadé que ses souvenirs sont réels.

Nous sommes tous capables de déformer notre passé. Repensez à votre première année de lycée et essayez de répondre aux questions suivantes : vos parents vous encourageaient-ils à pratiquer tel ou tel sport ? La religion vous aidait-elle ? La discipline était-elle maintenue au moyen de châtiments corporels ? Le psychiatre Daniel Offer et ses collaborateurs de la Northwestern University ont posé ces questions et d'autres encore à soixante-sept hommes frisant la cinquantaine, et les réponses qu'ils ont obtenues sont d'autant plus intéressantes qu'Offer avait déjà demandé à ces sujets de répondre à un questionnaire identique au début de leurs études secondaires, soit trente quatre ans plus tôt.

Les souvenirs d'adolescence de ces quadragénaires différaient largement de ceux qu'ils avaient décrits au lycée. Un peu moins de 40% de ces adultes se rappelaient que leurs parents les avaient encouragés à pratiquer assidûment un sport, alors qu'ils avaient été 60% à faire état de tels encouragements à l'adolescence ; un quart d'entre eux, à peine, affirmaient que la religion les avait aidés bien que près de 70% de réponses positives aient été enregistrées pour les adolescents ; et un tiers seulement avaient le souvenir d'avoir reçu des châtiments corporels des décennies plus tôt, au lieu de 90% pour le même groupe, interrogé à l'adolescence.

Les erreurs mnésiques sont aussi fascinantes qu'importantes. Avec quel type de système de mémorisation les distorsions comme celles qui sont dépeintes dans la fiction de Kawabata et documentées par le cas de Wilkomirski ou les imprécisions exemplifiées par l'étude d'Offer sont-elles compatibles ? Pourquoi sommes-nous si souvent incapables de mettre un nom sur un visage qui nous paraît pourtant tout à fait familier ? Comment expliquer les épisodes de clés ou de portefeuilles rangés au mauvais endroit ou les bévues du même ordre ? Pourquoi certaines expériences semblent-elles disparaître de notre esprit sans laisser la moindre trace ? Pourquoi nous souvenons-nous avec autant de constance d'expériences pénibles que nous ferions mieux d'oublier ? Et comment ces particularités fâcheuses de nos systèmes de mémorisation peuvent-elles être évitées, prévenues ou minimisées ?

Si les psychologues et les spécialistes des neurosciences ont publié de très nombreux articles sur tel ou tel aspect spécifique de l'oubli ou des distorsions de la mémoire, il n'en reste pas moins qu'aucun modèle conceptuel assez unifié pour rendre compte des divers types d'erreurs mnésiques auxquels nous sommes couramment exposés n'a encore été élaboré à ce jour. (….)

Mes premières recherches sur la mémoire remontant à plus de vingt ans, je suis intrigué depuis longtemps par les défaillances de cette aptitude. Mais c'est un matin de mai 1998 seulement que j'ai réfléchi à une question toute simple au beau milieu d'une promenade faite sous un soleil radieux. Comment la mémoire s'y prend-elle pour nous égarer ? me suis-je soudain demandé. J'ai compris, tout à la fois, qu'on ne saurait espérer parvenir à une compréhension exhaustive des erreurs mnésiques sans soulever cette question, et qu'elle n'avait pas encore été posée jusqu'alors. Au cours des mois suivants j'ai réuni les connaissances disparates que j'avais accumulées sur les diverses imperfections de la mémoire afin de tenter d'ordonner la vaste collection de pannes, de fautes et de distorsions que j'avais eu l'occasion d'observer : j'ai d'abord été insatisfait par les nombreux schémas explicatifs que j'ai plaqués sur ces observations, puis j'ai fini par découvrir un mode de penser qui a tout remis en place.

J'estime que les dysfonctionnements mnésiques peuvent être divisés en sept transgressions capitales, ou « péchés » fondamentaux, que je baptiserai respectivement fugacité, absence, blocage, méprise, suggestibilité, biais, et persistance. (…)

La fugacité, l'absence et le blocage sont des péchés d'omission ; ils impliquent qu'on ne parvient pas à retrouver le fait, l'événement ou l'idée dont on souhaite se souvenir. La fugacité renvoie à un affaiblissement ou une perte qui s'étale dans le temps. Pour prendre un exemple, il est probable que vous n'aurez aucun mal à vous souvenir aujourd'hui de ce que vous avez fait quelques heures plus tôt ; en revanche si je vous prie de me dire à quelles activités vous vous livriez il y a six semaines, six mois, ou six ans de cela, vos probabilités de remémoration décroîtront à mesure que vous remonterez dans le passé. La fugacité est un trait cardinal de la mémoire qui est à l'origine de nombreux problèmes mnésiques.

L'absence procède de la rupture de l'interface entre intention et mémoire. Les erreurs liées à ce péché (les clés ou les lunettes rangées au mauvais endroit, ou l'oubli d'une invitation à déjeuner) se produisent chaque fois qu'on est préoccupé ou distrait par des soucis qui empêchent de prêter attention à ce dont on a besoin de se souvenir. L'information désirée ne se perd pas à la longue : ou bien elle n'a jamais été mise en mémoire dans un premier temps ou bien elle n'est pas recherchée en temps voulu parce que l'attention se focalise ailleurs.

Le blocage qui est le troisième péché contrarie la recherche d'une information qu'on tente parfois désespérément de retrouver. Il nous est arrivé à tous de ne pas réussir à mettre un nom sur un visage familier : survenant même quand on se concentre soigneusement sur la tâche en cours, cette expérience frustrante ne signifie pas que le nom désiré s'est effacé de l'esprit – la récupération inattendue de noms bloqués pendant des heures ou des jours en fait preuve.

Contrairement à ces trois péchés d'omission, les quatre péchés suivants de méprise, de suggestibilité, de biais, et de persistance sont tous des péchés de commission : une certaine forme de mémoire est préservée mais elle est incorrecte ou involontaire. Le péché de méprise consiste à attribuer un souvenir à une source erronée : le fantasme est confondu avec la réalité, ou on se rappelle à tort qu'un ami a raconté une petite histoire qu'on vient en fait de lire dans un journal. La méprise est beaucoup plus fréquente qu'on ne le croit et elle peut avoir des implications très profondes dans les contextes judiciaires. Quant au péché voisin de suggestibilité, il a trait aux souvenirs implantés : j'entends par là tous ceux consécutifs aux questions, aux remarques ou aux suggestions tendancieuses d'une personne qui veut favoriser le rappel d'une expérience passée. Comme la méprise, la suggestibilité est particulièrement importante pour le système judiciaire : elle fait des ravages au sein des tribunaux.

Le péché de biais montre à quel point les connaissances et croyances actuelles influent puissamment sur les modes de remémoration du passé. Nous avons coutume de remanier ou de réécrire totalement nos expériences antérieures (à notre insu et/ou inconsciemment) pour les faire concorder avec nos connaissances ou convictions présentes : qu'elles se rapportent à un incident isolé ou à de plus longues périodes de notre existence, les interprétations faussées qui résultent de ces révisions en disent plus long sur nos sentiments d'*aujourd'hui* que sur ce qui est advenu *autrefois.*

Le septième péché – celui de persistance – se traduit par le rappel répétitif d'une information ou d'événements perturbants qu'on préférerait chasser à jamais de sa mémoire : on se souvient dans ce cas de quelque chose qu'on voudrait oublier, mais qui s'est gravé dans l'esprit. Nous connaissons tous la persistance à un degré ou à un autre : vous souvenez-vous de la dernière fois où, vous réveillant en sursaut à 3 heures du matin, vous n'avez pu faire autrement que de repenser à la gaffe humiliante que vous veniez de commettre sur votre lieu de travail ou au résultat décevant d'un examen capital. Dans les cas extrêmes de dépression aiguë ou d'expérience gravement traumatique, ce péché peut s'avérer très invalidant, voire mettre les jours en danger.

Les avancées décisives que les neurosciences connaissent depuis quelques années ont débouché sur des découvertes dont il sera souvent question dans ce livre : en permettant de visualiser les activités cérébrales concomitantes de l'apprentissage et de la remémoration, les études de neuro-imagerie ont commencé à éclairer les fondements mêmes des sept péchés. Ces travaux ayant le mérite de jeter une lumière novatrice sur ce qui se passe à l'intérieur de notre tête au moment même où nous sommes sujets à une défaillance ou à une erreur mnésique, je les commenterai tout en montrant aussi en quoi la connaissance de ces péchés peut atténuer les impacts quotidiens de ces incidents si frustrants.

Plus j'ai approfondi ce modèle des sept péchés, plus il m'est apparu qu'on ne peut éviter de se demander pourquoi nos systèmes de mémorisation ont fini par présenter ces propriétés gênantes, sinon dangereuses. Ces péchés attestent-ils que Mère Nature se serait fourvoyée au cours de l'évolution ? Les déficiences de la mémoire humaine feraient-elles courir des dangers inutiles à notre espèce ? Je ne suis pas de cet avis : j'estime au contraire que chacun de ces péchés est le sous-produit de particularités de l'esprit humain bénéfiques à d'autres égards parce que adaptatives.

Mon approche des péchés de la mémoire s'inspirera de cette conception. Plutôt que de les tenir pour des faiblesses ou des défauts inhérents à une organisation systémique, j'indiquerai en quoi les sept péchés ouvrent une fenêtre sur les forces adaptatives de la mémoire : en plus de faire comprendre pour quelles raisons cette aptitude fonctionne sans anicroche la plupart du temps, ils laissent entrevoir pourquoi sa configuration a évolué ainsi. L'importance que j'attacherai aux répercussions quotidiennes potentiellement problématiques ne vise donc pas à ridiculiser ni à dénigrer la mémoire : je la décrirai à l'inverse comme un guide le plus souvent fiable tant pour le passé que pour le futur, si ennuyeuses – en même temps que révélatrices – que soient les contrariétés que ce guide nous crée chaque fois qu'il lui arrive de nous laisser tomber.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice° 1

1. On obtient pour la dérivée de f

$$f^{'}(x) = \frac{2xe^{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - Log(1+x^2))}{e^{2x^2}} = \frac{2x(\frac{1}{1+x^2} - Log(1+x^2))}{e^{x^2}}$$

2. $F(x) = -\frac{1}{x} + x + xe^x - e^x$

3. $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = 0$, d'où $x = 0, x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

4. $I = \int_0^1 x\,Log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du$ en posant $u = 1 + x^2$.

   et $I = \frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du = \frac{1}{2}[u\,Log(u) - u]_1^2 = Log2 - \frac{1}{2}$

5. Le diamètre du cercle doit être égal à la longueur du côté du carré. La surface S du cercle est égale à $S = \pi R^2 = 9$, donc le rayon est $R = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ et la longueur du côté du carré vaut $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

6. On a $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{49}{4}$, d'où le système : $\begin{cases} x + y = \pm\frac{7}{2} \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases}$

   Il reste à résoudre l'équation : $x^2 - (\pm\frac{7}{2})x + \frac{3}{2} = 0.$

   On obtient $(x, y) = \left\{(3,\frac{1}{2}), (-3, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 3), (-\frac{1}{2}, -3)\right\}$

7. La suite $(U_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$.

   Si $|a| < 1$, la série est divergente. Si $|a| > 1$, la série est convergente. Pour $a = -1$, la série est alternée et pour $a = 1$, la série converge vers U_0.

8. Pour le premier élément de E_3, il y a 4 possibilités, puis 3 possibilités pour le deuxième et enfin 2 possibilités pour le dernier. Le nombre d'applications injectives différentes de E_3 dans E_4 est égal à 24.

9. Les réels *a*, *b*, *c* et *d* doivent vérifier les équations suivantes :
Pour A(0, -3) : $-3 = \frac{b}{d}$ et pour les deux asymptotes : $\frac{a}{c} = 2$ et $-\frac{d}{c} = 1$.
On obtient $b = -3d$, $c = -d$, $a = -2d$, d'où la fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

10. On a $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Exercice° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x+1}$

1. On a : $f(x) = \frac{x(x+1)+2}{x+1} = x + \frac{2}{x+1}$

2. La dérivée de f est égale à

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x+1)^2}$$

La fonction est croissante à l'extérieur des racines du numérateur de sa dérivée et décroissante entre ces racines. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale et la droite d'équation $y = x$ une asymptote oblique. Le graphe de f passe par les points de coordonnées (0, 2) et (-2, -4).

3. D'après le graphe, on pose $X = x + 1$ et $Y = y + 1$, d'où $Y = X + \frac{2}{X}$ est une fonction impaire et la fonction f admet le point A(-1, -1) comme point de symétrie.

4. L'aire comprise entre le graphe de f, la première bissectrice et les droites $x = 0, x = 1$ est égale à $\int_0^1 (f(x) - x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx = \left[2\,Log(x+1)\right]_0^1 = Log 4$

5. Le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est déterminé par la résolution de l'équation $x+\dfrac{2}{x+1}=\alpha x+\beta$.

Cette équation s'écrit sous forme d'une équation du second degré : $x^2(\alpha-1)+x(\alpha+\beta-1)+\beta-2=0$.

On obtient pour discriminant : $\Delta=\alpha^2+2\alpha(3-\beta)+(\beta^2+2\beta-7)$ et pour discriminant de cette expression : $\delta^{'}=8(2-\beta)$ En conclusion :

1. Si $\beta>2$, alors $\Delta>0$ et on a deux solutions.
2. Si $\beta=2$, alors $\Delta=(\alpha+1)^2$. Si $\alpha=-1$, on a une solution et pour $\alpha\neq-1$, on a 2 solutions.
3. Si $\beta<2$, alors $\delta^{'}>0$ et Δ change de signe selon la position de α par rapport aux racines de Δ, à savoir $\alpha_1=-(3-\beta)-\sqrt{8(2-\beta)}$ et $\alpha_2=-(3-\beta)+\sqrt{8(2-\beta)}$.

Si $\alpha<\alpha_1$ ou $\alpha>\alpha_2$, on a deux solutions. Si $\alpha=\alpha_1$ ou $\alpha=\alpha_2$, une seule solution et pour $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, aucune solution.

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie par : $f(x)=(x+1)e^{x^2}$

1. La dérivée de f est égale à $f^{'}(x)=e^{x^2}(2x^2+2x+1)$ qui est toujours strictement positive, donc f est strictement croissante et elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

2. La dérivée seconde de f est égale à $f^{''}(x)=e^{x^2}(2x^3+2x^2+3x+1)$ et elle est du signe de $z=2x^3+2x^2+3x+1$. Cette dernière fonction est strictement croissante. On vérifie que $z(0)=1$ et $z(-1)=-2$. Comme cette fonction est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur β, telle que $\beta\in\left]-1,0\right[$ et $f^{''}(\beta)=0$. La fonction f est convexe pour $x>\beta$ et concave sinon.

3. L'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de la fonction g définie par $g(x)=e^{x^2}$ et les droites $x=0, x=1$ est égale à : $\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in Q\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels (densité de Q et $R-Q$ dans R).

1. Pour tout $x_0 \in Q$, il existe donc une suite $x_n \in R-Q$ qui converge vers x_0. On a $f(x_n)=0$ et $f(x_0)=1$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0. De même, pour $x_0 \in R-Q$, il existe donc une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0. On a : $f(x_n)=1$ et $f(x_0)=0$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0.
Cette fonction est discontinue en tout point.

2. Comme précédemment, la fonction g est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½.

Pour une suite x_n quelconque qui converge vers ½, on a : $g(x_n)=0$ ou $g(x_n)=(x_n-\frac{1}{2})$ et dans tous les cas la suite $g(x_n)$ converge vers $g(\frac{1}{2})=0$ quand x_n tend vers ½, donc g est continue en ½.

Etudions la dérivabilité de g en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{g(x)-g(1/2)}{x-1/2}=\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$. L'étude de la dérivabilité de g revient à l'étude de la continuité de f, donc g n'est pas dérivable en ½.

3. Comme précédemment, la fonction h est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½. La fonction h est continue en ½ comme composée de deux fonctions continues (g et $(x-\frac{1}{2})$).

Etudions la dérivabilité de h en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{h(x)-h(1/2)}{x-1/2}=\lim\limits_{x\to 1/2} g(x)=g(1/2)=0$, donc h est dérivable en ½.

Exercicen° 5

1. La moyenne $\overline{x}$ des salaires est égale à $\overline{x} = \frac{n_H \overline{x_H} + n_F \overline{x_F}}{n}$. Pour l'application numérique, on trouve : $\overline{x} = 1300$

2. $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i\in F}(x_i - \overline{x})^2$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H} + \overline{x_H} - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})^2 + \sum_{i\in H}(\overline{x_H} - \overline{x})^2 + 2\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})(\overline{x_H} - \overline{x}))$$

Par ailleurs, $\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H}) = 0$, d'où $\frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n_H}{n}V_H(x) + \frac{n_H}{n}(\overline{x_H} - \overline{x})^2$

En conclusion : $V(X) = \frac{n_H V_H(X) + n_F V_F(X)}{n} + \frac{n_H(\overline{x_H} - \overline{x})^2 + n_F(\overline{x_F} - \overline{x})^2}{n}$

Pour l'application numérique, on trouve $V(X) = 40\,000$

Exercice n° 6

1. La somme de deux fonctions convexes est convexe (évident).

2. La norme est une application convexe (propriétés de la norme).

3. Soit $g(u_i) = u_i \, Log(u_i)$, sa dérivée seconde est égale à $\frac{1}{u_i}$, la fonction g est donc convexe et f est convexe comme somme de fonctions convexes.

4. Par exemple la fonction linéaire $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est convexe et n'admet pas de minimum.

5. Par hypothèse sur la limite :

$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall u \in R^n, \|u\| \geq B \Rightarrow f(u) > A$, donc $\underset{R^n}{Min}\, f = \underset{\{u/\|u\|\leq B\}}{Min}\, f$. Comme f est une fonction continue sur cet ensemble fermé borné $\{u \in R^n / \|u\| \leq B\}$, elle admet un minimum (et un maximum) sur cet ensemble et donc sur R^n.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

Correction de la deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $n \in \mathbb{N}^\star$.

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2$.

a.1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2 &= x^2(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) + 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \Delta &= 4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\end{aligned}$$

La fonction f est un polynôme de degré 2 positive ou nulle, par conséquent son discriminant est négatif ou nul.

a.2

$$\begin{aligned}\Delta &\leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \\ (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2} \qquad (0.1)\end{aligned}$$

où l'inégalité (0.1) résulte de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On en déduit l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 &\leq \left((\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \\ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{1/2} &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Exercice 2 On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère les deux complexes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

En remarquant que ω est une racine cinquième de l'unité, on a la relation $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$. On en déduit que

1.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \omega^k - w^0 \\ &= -1 \qquad (0.2) \\ \alpha\,\beta &= (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^1 + \omega^2 \\ &= -1, \qquad (0.3) \end{aligned}$$

2. Les relations (0.2) et (0.3) montrent que α et β jouent un rôle symétrique. Ces relations entraînent que α, respectivement β, satisfait l'équation du second degré:

$$X^2 + X - 1 = 0,$$

dont le discriminant est $\Delta = 5$ et qui admet deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Il s'ensuit que α et β sont réels. Le nombre α est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle positive tandis que β est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle négative donc $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. En conclusion, $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

4. $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\alpha}{2}$.

Exercice 3 L'événement $\{X = 1\}$ correspond à un succès au premier essai; l'événement $\{X = 2\}$ correspond à un échec au premier essai et un succès au deuxième essai; l'événement $\{X = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ correspond à $(k-1)$ échecs aux $(k-1)$ premiers essais et un succès au k-ième essai.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= p \\ \mathbb{P}(X = 2) &= (1-p)p \\ \mathbb{P}(X = k) &= (1-p)^{k-1}p \ \ \forall k \in \mathbb{N}^\star \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble $\mathbb{N}^\star$. L'événement $\{Y = m+k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ correspond à placer $(m-1)$ succès parmi les $(m+k-1)$ premiers essais puisqu'au dernier essai il y a forcément un succès, d'où

$$\mathbb{P}(Y = m+k) = C_{m+k-1}^{m-1}\ \ p^m\ \ (1-p)^k,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Problème

I. Préliminaires

I.1. En utilisant le taux d'accroissement, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1.$$

I.2. On en déduit $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(nx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} n\dfrac{\sin(nx)}{nx} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des points $\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{(n+\frac{1}{2})x}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}\times\frac{(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = 2n+1.$$

$\lim_{x\to 0} g(x) = n$, ce qui assure la continuité en 0 de la fonction f définie sur $[0,\pi]$. Sur $]0,\pi]$, la fonction f est continue en tant que rapport de fonctions continues sur $]0,\pi]$.

I.4. On peut définir la fonction f par

$$f : [0,\pi] \to \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) + \frac{1}{2}\frac{\sin(nx)\ \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } \ x \in]0,\pi] \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

en utilisant la formule trigonométrique suivante: $\sin((n+\frac{1}{2})x) = \sin(\frac{x}{2})\cos(nx) + \cos(\frac{x}{2})\sin(nx)$.

I.5.

$$\lim_{x\to 0}(ax+bx^2)\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0}(a+bx)\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = a.$$

La fonction $\psi_{a,b}$ est donc continue en 0 et elle continue sur $]0,\pi]$ en tant que produit et rapport de fonctions continues sur $]0,\pi]$.

II.

II.1.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x\cos(2x)dx &= 0 \\ \int_0^\pi x^2\cos(2x)dx &= \frac{2\pi}{2^2} \\ \int_0^\pi x\cos(3x)dx &= \frac{-2}{3^2} \\ \int_0^\pi x^2\cos(3x)dx &= \frac{-2\pi}{3^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$.

II.2.

$$\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$\int_0^\pi x^2\cos(kx)dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{-2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

En prenant $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$, on obtient le résultat demandé.

III.

III.1. III.2. Pour $x = 0$, on a $\sum_{i=1}^n (\mathrm{e}^{ix})^k = n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathrm{e}^{ix})^k &= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+1)} - \mathrm{e}^{ix}}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+1)} - \mathrm{e}^{ix}}{\mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}}{(2i)\sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2})) - \sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} + i\frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{2\sin(\frac{x}{2})} + i\frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

La partie réelle est bien égale à la fonction f pour $x \in [0, \pi]$.

IV. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, où $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k^2}$.

IV.1. IV.2. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2) \sum_{i=1}^n \cos(kx)dx \\ &= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2) f(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)\cos(nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(nx)\,\psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}(x)dx \end{aligned}$$

IV.3. On note $T_1 = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx$, $T_{2,n} = \frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)\cos(nx)dx$ et $T_{3,n} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(nx)\,\psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}(x)dx$. Comme les fonctions f et $\psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}$ sont continues sur $[0, \pi]$ alors, d'après le résultat admis **R.A.**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} T_{2,n} = \lim_{n\to+\infty} T_{n,3} = 0$. On en conclut que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= T_1 \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx \\ &= -\frac{1}{2}[-\frac{x^2}{2}]_0^\pi - \frac{1}{4\pi}[\frac{x^3}{3}]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{(6*2)\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x\cos^2 x}{1+x^2}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$
3. Trouver une primitive de $\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Résoudre le système : $\begin{cases} x-y=2Ln2 \\ x+y=4Ln2 \end{cases}$
5. Soit la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$. Déterminer, si elle existe, la valeur du minimum de f sur cet intervalle.
6. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\leq 0$
7. Donner l'équation de la droite dans le plan, parallèle au vecteur $u(1,2)$, et qui passe par le point $A(1,-1)$

8. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x - e^{-x/2})$
9. Dans une classe de lycée, la moyenne des filles à l'épreuve de mathématiques est de 12/20 et celle des garçons de 10,2/20. Sachant que la classe est composée pour les 2/3 de filles, quelle est la moyenne de la classe ?
10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.
2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
3. Calculer $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ et $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.
3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

   Etudier la convergence de cette suite (u_n) et calculer sa limite si elle existe.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

1. Etudier les variations de f.

2. Monter que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.

3. Trouver une primitive de f sur $]0,1[$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox, le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$.

5. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,1[$ par :

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

Trouver la primitive G de g qui vérifie $G(\frac{1}{2}) = 6$

Exercice n° 5

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où *n* est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout *n*.

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_n(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice n° 6

L'exercice consiste à prouver l'irrationalité de π et π^2 selon la méthode de Niven (Bulletin Amer. Math. Soc. 53, 509, 1947).
Soit $n \in N^*$. On définit la fonction :

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \text{ , où } c_k \in Z^*$$

1. Montrer que $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et que $f(1-x) = f(x)$ pour tout x.

2. Calculer la dérivée $m-ième$ $f^{(m)}(0)$ de f en 0 en fonction de m, n et c_m pour tout $m \in N$. En déduire que les nombres $f^{(m)}(0)$ et $f^{(m)}(1)$ sont des entiers relatifs quels que soient les entiers m (On peut dériver *m* fois l'égalité $f(1-x) = f(x)$).

3. On suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in N^2$. Soit

$$G(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

a) Montrer que $G(0)$ et $G(1)$ sont des entiers relatifs.

b) Montrer que $\dfrac{d}{dx}(G'(x)\sin \pi x - \pi G(x)\cos \pi x) = \pi^2 a^n \sin \pi x \times f(x)$

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \pi \displaystyle\int_0^1 a^n \sin \pi x \times f(x)\,dx$ en fonction de $G(0)$ et $G(1)$, et en particulier que I est un entier relatif.

d) Conclure à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice n° 7

Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie. On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a utilisé le vaccin *A*. Un cinquième le vaccin *B*.
- Lors d'une épidémie, 8 malades sur 1000 avaient utilisé le vaccin A et 6 le vaccin *B*.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note :

M = « l'individu est malade » et V = « l'individu est vacciné »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un vaccin le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\text{Probabilité qu'un individu non vacciné soit malade}}{\text{Probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Calculer λ pour chacun des deux vaccins. Que peut on en conclure ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les pays en voie de développement : éléments communs et diversité.

Sujet n° 2

La Politique peut-elle faire abstraction de la Morale ?

Sujet n° 3

Dans le cadre de la Mondialisation et de ses effets sur les économies et les sociétés, quelles sont les chances de l'Afrique ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1

Montrer que :

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \ \forall x > 0.$$

Exercice 2

1. Déterminer les nombres réels α, β, γ et η vérifiant :

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+2)} + \frac{\eta}{(x+2)^2}. \tag{0.1}$$

2. En utilisant l'équation (0.1), déterminer les primitives de

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}.$$

Exercice 3

Cinq pour-cent des réservations aériennes sur une ligne donnée sont annulées. C'est pourquoi la compagnie aérienne *CompA* enregistre 100 réservations pour 97 places sur le vol numéro 3750. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'annulations pour ce vol.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X.

2. Calculer $I\!P(X=3)$.

3. Soient $p_n \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, où λ est un nombre réel positif. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda)\,\frac{\lambda^k}{k!},\quad \forall k \in \{1,\ldots,n\},$$

où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et $k! = k\times(k-1)\times(k-2)\times\ldots 2\times 1$.

4. A partir de la question précédente, en déduire que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ définie par :

$$Y \text{de loi} \mathcal{P}(\lambda) \iff I\!P(Y=k) = \frac{\exp(-k)\lambda^k}{k!},\quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Utiliser cette approximation pour déterminer une valeur approchée de $I\!P(X=3)$.

Problème

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geq 1$ par

$$u_p \;=\; \frac{1}{p} - \int_p^{p+1}\frac{dt}{t}.$$

La valeur γ de la somme infinie, appelée série, de terme général u_p s'appelle la constante d'Euler et, pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p, \qquad r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

On désigne par S et R les fonctions définies, dérivables et de dérivées continues respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^\star$ par les relations :

$$S(x) = \int_0^x \frac{1-\exp(-t)}{t}dt \qquad R(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt,$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

Partie 1 : Convergence de la série définissant γ

1. Prouver que, pour tout $p \geq 1$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. Montrer que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Etablir que, pour tout $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{u+p}du. \tag{0.2}$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $y = u+p$ dans le membre de droite de l'équation (0.2).

4. Déduire de la question précédente que, pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p(p+1)}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{(p-1)p}).$$

5. Trouver les réels a, b, c et d tels que :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} \text{ et } \frac{1}{p(p-1)} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}.$$

6. Montrer que, pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}),$$

et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

7. On approche γ par γ_n. Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2}; même question pour la précision 10^{-8}. (On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n).

8. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_{n,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}$. Prouver que :

$$0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

9. Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,1}$ et déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2}.

Partie 2 : Expression intégrale de γ à l'aide de S et de R

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} dv.$$

Indication : on pourra faire un raisonnement par récurrence ou bien utiliser la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(1-v)^k,\ v \in [0,1]$.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt,$$

où $e_n(t)$ est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$.
Indication: on pourra faire le changement de variable $v = \frac{t}{n}$.

3. Etablir que :

$$\forall v \in \mathbb{R},\ 1 + v \leq \exp(v). \tag{0.3}$$

4. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in [0,n],\ (1-\frac{t^2}{n^2})^n \exp(-t) \leq e_n(t) \leq \exp(-t).$$

Indication : on pourra appliquer l'inégalité (0.3) en prenant alternativement $v = \frac{t}{n}$ *et* $v = -\frac{t}{n}$.

5. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in [0,n],\ 0 \leq \exp(-t) - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n}\ \exp(-t).$$

Indication : on étudiera l'application h *définie sur* $[0,1]$ *par* $h(v) = (1-v)^n + nv - 1$.

6. En supposant que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, montrer que $\gamma = S(1) - R(1)$.

Indication : on montrera que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - S(1)) = 0$$

et que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt) = 0.$$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Jean-Marie Pelt et Gilles-Eric Séralini dont le titre est « Après nous le déluge ? » paru aux éditions Flammarion / Fayard en avril 2006. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Nous sommes peu nombreux, quelques voix dispersées sur tous les continents, à dénoncer le massacre du vivant. Il est grand temps que le cercle s'élargisse. L'urgence nous dicte aujourd'hui de vous livrer notre expérience concrète de scientifiques pour que vous puissiez juger de la situation : votre situation d'êtres humains bientôt incapables de léguer à leur descendance une planète en bonne santé. Votre état de femmes et d'hommes en chute de fertilité, avec des altérations génétiques croissantes, votre état de cancéreux en puissance. Mais aussi votre statut de citoyennes et citoyens désireux d'agir sur leur vie. Une simple vie humaine, immensément belle en ce qu'elle est l'extraordinaire et intelligente manifestation des réseaux d'espèces et d'individus qui, de la bactérie au lichen, de l'insecte au mammifère, contribuent en permanence à l'émergence et à l'évolution de la vie. Une fabuleuse distribution où chaque être vivant doit sa place au rôle qu'il joue par rapport aux autres. Et à une complexité de fonctions jusqu'au cœur de la cellule. Mais une vie rare, fragile, agressée par les pollutions chimiques, génétiques, et par la disparition accélérée de milliers d'espèces. Une existence essentiellement menacée par nos modes de vie. Par notre usage du monde.

Nos sociétés, nos économies se sont développées sur l'axiome(1) d'une terre inépuisable, corvéable à merci. Dans cet esprit, l'impact de nos activités a toujours été évalué à la marge, et a toujours compté pour négligeable ; la terre en avait vu d'autres… Et la logique des systèmes en place consiste à « résoudre » le problème immédiat sans en chercher la cause initiale.

Certains nourrissent encore l'espoir, la croyance, que la science trouvera bien, un jour, une solution. Seulement, il ne s'agit plus de problèmes d'hygiène ou de microbes, que la science est parvenue *grosso modo,* à juguler, du moins dans les pays riches. Nous devons affronter une transformation radicale des milieux qui hypothèque le retour à un état sanitaire satisfaisant. Nous touchons aux rivages de l'irréversible.

Il a fallu la menace que font peser sur l'économie les cyclones, la sécheresse, les inondations et la fonte des glaciers pour que la classe politique mondiale commence à se saisir du dérèglement climatique et de la pollution atmosphérique. Mais les climatologues avaient réagi, constaté, interpellé. Par contre, alors que l'air, l'eau, la terre, se polluent toujours davantage, que notre environnement toujours chargé d'innombrables molécules suspectes devient de plus en plus pathogène, nous déplorons l'absence d'unanimité des biologistes, les scientifiques les plus près de la vie, pour alerter leurs concitoyens sur les dangers encourus.

C'est pourquoi nous unissons aujourd'hui nos voix pour partager avec le plus grand nombre notre inquiétude sur l'état de la terre et nos interrogations sur le rôle de la science tant dans le bilan des atteintes à la biodiversité (pollutions chimiques et génétiques), dans l'épuisement des ressources naturelles (eau douce, pétrole, gaz, forêts, sols arables), que dans les voies proposées pour remédier à ces désastres.

De la science, nous avons des approches et pratiques complémentaires, de la très visible observation de plantes, à l'invisible vie des cellules et des gènes. Le botaniste qu'est Jean-Marie Pelt a exploré l'Afghanistan, une partie de l'Afrique occidentale et sa Lorraine natale avant de créer l'Institut européen d'écologie à Metz. En son laboratoire universitaire de Caen, Gilles-Eric Séralini, le biologiste moléculaire, traque le rôle des pesticides dans les cancers humains et les problèmes de reproduction, après avoir affûté ses outils aux Etats-Unis et au Canada.

En fait, nous nous complétons. Nous formons à nous deux un scientifique tel que nous aimerions qu'il soit : relié aux autres questionnements scientifiques que le sien. Capable de faire ce va-et-vient nécessaire du détail à la globalité et de la globalité au détail.

Aujourd'hui dans nos universités et dans nos laboratoires de recherches, nous sommes trop rarement capables de rapporter le détail à la globalité, de lire les complémentarités à l'intérieur du biotope(2) terrestre, car nous n'avons plus, ou presque plus, les botanistes, les physiologistes, les embryologistes, les zoologistes, tous ces grands explorateurs du vivant qui asseyaient leur savoir sur leurs capacités d'observation et de description – ces qualités aujourd'hui méprisées car elles n'ont de valeur que dans le temps, alors que nous vivons dans l'instant.

Pourtant, comment connaîtrait-on la disparition des espèces sans les inventaires des XVIIè et XVIIIè siècles, sans les herbiers, sans les collections des muséums ? Comment connaître la richesse d'un biotope sans la précision des relevés des voyages scientifiques ? La science est devenue pressée. Elle vit dans l'urgence et le résultat immédiat. Elle n'investit pas sur le long terme, elle finance des projets de recherche dont on définit à l'avance ce qu'il faut qu'ils trouvent. Pas question de s'embarrasser avec des considérations générales. On préfère ignorer la cohérence du monde.

Depuis environ quatre décennies les biologistes ne jurent plus que par l'infiniment petit. Oublié l'homme qui se tient au sommet des cellules assemblées, effacé le paysage dans lequel il se meut, ignorée la planète sur laquelle il niche avec plantes et animaux. Au-delà du strict sujet d'étude, le monde est gommé. Il n'est plus étudié ou presque, qu'à travers le prisme des gènes et des micro- ou nano-particules. Certains scientifiques continuent à y projeter leurs fantasmes de simplicité, du genre, un gène = une protéine = une fonction. Ne leur vient-il pas à l'esprit que l'infiniment petit, à l'instar du grand, fonctionne en système, le monde entier n'est qu'interactions et interdépendances mais, aspirés par le tunnel de l'infiniment minuscule, ces chercheurs ne voient trop souvent que ce qui est au bout de leur lorgnette, fût-elle électronique. Devenus ce que nous appelons des scientifiques réductionnistes, ils s'enfoncent dans une parcelle infinitésimale de la réalité atteinte grâce à la technique, mais aussi isolée du reste – cellule, organe, corps, biotope, monde – par un mur technique. Microscopes et ordinateurs n'ont ni rétroviseurs ni zoom arrière.

La science et sa technologie de pointe, portée par la biologie, ressemblent à ces animaux de trait(3) tout à leur labeur immédiat. Atomisée en ses objets de recherche, la pratique scientifique a rompu avec une vision cohérente du monde, s'est trouvée entraînée, et l'humanité avec, dans un divorce avec la nature et un mariage avec l'économie de marché.

N'est-ce pas intenter un procès déplacé que de vouloir instruire un tel dossier, que de conférer à la science un tel pouvoir et une telle responsabilité ? Depuis l'époque des Lumières, elle est l'outil central de l'évolution de notre société. Elle a, par ses innombrables découvertes, bouleversé les modes de vie et d'organisation de la société. Elle a changé les conceptions de notre place dans l'Univers au point de devenir au XXè siècle, une référence morale supplantant celle de la religion. Pour s'en convaincre, il n'est que de voir le nombre de scientifiques à la tête des comités d'éthique, ou les décisions de justice tranchant en faveur de tel ou tel acharnement thérapeutique. La science et les systèmes technologiques qui en découlent ont pris les commandes de nos vies.

Nous considérons que la science n'est ni bonne ni mauvaise, mais nous voulons juger l'arbre à ses fruits. Nous comptons parmi les partisans du bilan de la science et de ses applications, plutôt que de ceux qui perpétuent les incantations sur ses bienfaits et les inéluctables progrès qu'elle engendre. Sur un plateau de la balance, une augmentation considérable de l'espérance de vie occidentale, un niveau de vie confortable, atteint au XXè siècle par un quart de la population mondiale concentré dans l'hémisphère Nord, mais si peu pour les autres. Sur l'autre plateau, un état de la dégradation du monde – pollution, épuisement des ressources, dérèglements climatiques – unique dans l'histoire de l'homme, dans l'histoire de la vie, dans l'histoire de la Terre. Ce mode de vie, dont nous sommes si fiers, nous l'exportons, via la globalisation économique, avec la vision du monde qui lui est consubstantielle(4) : se libérer des entraves naturelles, s'affranchir de l'environnement, accroître sans limites la consommation. En d'autres termes, raccourcir la distance qui nous sépare du point d'irréversibilité des dommages écologiques et humains.

Nous voudrions amorcer ici une critique de la pratique scientifique, lorsqu'elle s'érige en nouvelle religion. Lorsqu'elle épaule les pouvoirs politiques et économiques. A quelle autorité morale se réfère un président de la République, un premier ministre, et tout le personnel politique, pour savoir si les OGM sont bons ou pas ? si le clonage est profitable ou pas ? l'énergie nucléaire durable ou pas ? si l'étendue de la pollution mérite une loi sur l'air, celle des nappes phréatiques une loi sur l'eau, ou pas ?

Aujourd'hui, nous vous livrons nos éléments d'analyse avec trois buts : souligner l'avancée des connaissances sur la biodiversité et les effets des pollutions ; réapprendre à penser et à vivre en dehors du dogme technoscientifique ; et que la société civile puisse débattre du contrôle et de la transparence de la science, de ses objectifs et de son utilisation. Pour marquer notre engagement envers la société, nous proposons aussi un serment éthique à l'usage des chercheurs en sciences de la vie.

Rareté cosmique, rareté géographique, mais aussi rareté temporelle de la vie pour en arriver à la civilisation humaine… L'homme a colonisé beaucoup de milieux différents, mais des endroits habitables. Si nous faisons un tant soit peu varier nos conditions climatiques ou géothermiques, la donne humaine change. Et si nous n'y prenons pas garde, nous perdrons la richesse et la beauté des conditions exceptionnelles qui sont celles de la vie terrestre.

(....) Préserver le *diamant* de la société. C'est pour nous un préalable : l'homme est au centre de notre mobilisation. La Terre n'a pas besoin de nous pour continuer son existence cosmique. Nous, nous avons besoin d'elle dans un état qui satisfasse nos aspirations. Notre économie, globalisée comme elle l'est, ne préserve ni l'homme ni la nature. Elle est toujours sur le versant sombre de la théorie darwinienne : la compétition avec son corollaire, l'élimination des plus faibles. Biologistes, nos mots-clé sont la diversité, la coordination et la complémentarité. Le développement durable, c'est d'abord respecter l'autre, le protéger. La préservation des liens sociaux, la valorisation des initiatives collectives, de l'économie sociale, l'amélioration des conditions de vie, l'égalité d'accès aux biens fondamentaux, le respect des cultures, l'éducation, la justice sont les piliers indispensables du développement durable.

Encore faut-il s'entendre sur le mot « développement ». Nous ne l'entendons pas au sens d'une croissance continue (impossible au demeurant), d'une inflation des biens de consommation. Car personne ne doit rester sur le carreau de l'économie. Une société digne de ce nom attache un extrême souci à la personne. L'économie doit être au service de celle-ci, et non l'inverse.

(….) Les métiers changent : les informaticiens sont pléthoriques, les artisans de plus en plus rares, et les boulangers qui se lèvent encore la nuit auront bientôt disparu au profit du seul pain décongelé. Pourtant, à l'aune(5) de la durabilité de la planète, un métier n'en vaut pas un autre. Un inventeur de pesticides ne vaut pas un forestier qui restaure un massif. Un fabricant de plastique non dégradable qui laisse suinter des phtalates dans l'alimentation qu'il emballe, ne vaut pas le travail d'un agriculteur bio. Un industriel de l'armement ne vaut pas une infirmière pourtant bien moins rétribuée que lui.

La société de développement durable que nous appelons de nos vœux conduit à des reconversions professionnelles guidées par des impératifs, pas seulement économiques : l'écologie, la diversification, les échanges équitables, l'épanouissement, la moralisation des grands circuits financiers, la culture.

(….) Le respect des hommes ne peut passer que par un dialogue régulier entre science et société civile, entre scientifiques et citoyens. En toute modestie et avec l'appétit de contradictions que réclame la démocratie. Nous sommes nombreux, scientifiques ou non, à partager notre inquiétude quant à la situation. Nous craignons notamment que le corps scientifique ne révise aisément la conception de son rôle. Car un danger nous guette : l'outil de liberté et de culture que la science est devenue, pourrait devenir un outil d'asservissement. C'est pourquoi nous invitons les jeunes chercheurs en sciences de la vie à prononcer un serment éthique qui engage leur responsabilité morale, à l'instar du serment d'Hippocrate pour les médecins. Le chercheur s'engagerait ainsi à respecter l'état du monde, à mesurer l'impact de ses recherches sur l'homme et sur les écosystèmes, à transmettre son savoir.

Devenus conscients de l'état de la planète, citoyens soucieux du bien commun ces chercheuses et chercheurs passionnés par cet extraordinaire objet vivant retrouveraient la capacité de s'enchanter et de préserver la Terre pour les dix milliards d'êtres humains qui s'annoncent… Un pas des hommes vers l'homme. Et la société y gagnera des savants.

(1) axiome : proposition – principe
(2) biotope : lieu , étendue géographique correspondant à un groupement d'êtres vivants
(3) animaux de trait : animaux qui tirent une voiture
(4) consubstantiel : de la même substance
(5) à l'aune : à la mesure

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f'(x)=\frac{-2\sin x\cos x}{1+x^2}+\frac{(1-x^2)\cos^2 x}{(1+x^2)^2}$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = 1-\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = 1-Ln(\frac{1+e}{2})$, en posant $u=e^x$
3. Une primitive de $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ est $3\sqrt{1+x^2}$
4. Par soustraction des deux lignes, on obtient $y=Ln2$, puis $x=3Ln2$:
5. On obtient $f'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x=-2+\sqrt{3}$ sur l'intervalle $]-2,+\infty[$ et on vérifie que la fonction admet un minimum en ce point, à savoir $f(-2+\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x^2-2}{x-1}\leq 0$ est $]-\infty,-\sqrt{2}]\cup]1,\sqrt{2}]$
7. L'équation de la droite est $y=2x-3$
8. $\lim_{x\to-\infty}(1+x-e^{-x/2})=-\infty$ (la convergence de l'exponentielle est plus rapide que celle de x).
9. La moyenne de la classe est : $12\times\frac{2}{3}+10{,}2\times\frac{1}{3}=11{,}4$
10. $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{3}{4}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

1. On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1=f(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. Sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ sur R^+ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$; Son graphe admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptôte horizontale (et $y=-1$, comme f est impaire).

3. $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(1-\dfrac{1}{1+x})\,dx=1-Ln2$ et $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$ (car f est impaire)

Exercice n° 3

1. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}}>0$ et f est strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur R^+, avec une branche parabolique dans la direction oy.

2. $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{-1}^0=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Pour tout n, $u_n>0$ et on vérifie par récurrence (comme f est croissante) ; que $u_n<1$ et $u_{n+1}-u_n>0$. La suite est donc croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=f(l)$, d'où $l=1$.

Exercice n° 4

1. On a $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Le numérateur est toujours négatif. La fonction f est donc strictement décroissante de $]0,1[$ dans R.

2. Le graphe de f est symétrique par rapport au point $A(1/2,0)$, en effet si on pose $X=x-1/2$, on obtient $\tilde{f}(X)=\dfrac{2X}{X^2-1/4}$ qui est impaire.

3. Une primitive de f sur $]0,1[$ est $F(x) = Ln\, x(1-x)$.

4. L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$ est égale à : $-Ln\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + Ln\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3}) = Ln\frac{9}{8}$.

5. On obtient $G(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + k$ et avec $G(\frac{1}{2}) = 6$, $k = 2$.

Exercice n° 5

1. Pour $x \in [0, \pi/2]$, $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(n\sin x + x\cos x)$ et $f_n^{'}$ est du signe de $z_n = n\sin x + x\cos x$ $\quad z_n^{'} = x\cos x\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$ et $z_n^{'}$ est du signe de $\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$.

D'après les graphes de ces deux fonctions : $\frac{n+1}{x}$ et $tg(x)$, il existe une unique valeur $x_0 \in]0, \pi/2[$ telle que $\frac{n+1}{x_0} = tg(x_0)$. Les fonctions z_n sont donc croissantes de $[0, x_0]$ et décroissantes sur $[x_0, \pi/2]$, mais elles sont toujours positives.

Les fonctions f_n sont donc croissantes de $[0, \pi/2]$ sur $[0, (\pi/2)^n]$.

2. trouve $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x \; dx = 1$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} x\sin x \; dx = 1$.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = \left[-x^n \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} nx^{n-1}\cos x\, dx = n\left(\left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-2}\sin x\, dx\right)$$

d'où $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

3. On obtient $u_n(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})\sin x$

Pour $x = 1$, $u_n(1) = n\sin 1$ et cette suite tend vers $+\infty$

Pour $x \neq 1$, $u_n(x) = (\frac{1-x^n}{1-x})\sin x$.

Pour $|x| < 1$, la suite $u_n(x)$ converge vers $u(x) = \frac{\sin x}{1-x}$

Pour $|x| > 1$, la suite $u_n(x)$ est divergente.

On étudie $u(x)$ pour $|x| < 1$. Sa dérivée est : $u^{'}(x) = \frac{(1-x)\cos x + \sin x}{(1-x)^2}$ qui est du signe du numérateur et positive. La fonction $u(x)$ est croissante sur cet intervalle avec une asymptote verticale en $x = 1$ (on pouvait plus rapidement remarquer que $\sin x$ est croissant sur l'intervalle $]-1,1[$ et le dénominateur décroissant).

Exercice n° 6

Soit

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}c_k x^k \text{ , où } c_k \in Z^*$$

1. On vérifie aisément que $0<x(1-x)<1/4$ pour tout $x\in]0,1[$, d'où $0<f(x)<\frac{1}{4^n n!}<\frac{1}{n!}$. La second assertion est triviale.

2. La dérivée $m-ième$ est $f^{(m)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}c_k\,k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}$ si $m\le n$, d'où $f^{(m)}(0)=0$ si $m<n$ ou $m>2n$, $f^{(m)}(0)=\frac{m!}{n!}c_m$ si $n\le m\le 2n$.

Dans les deux cas, $f^{(m)}(0)$ est un entier relatif. Il suffit de dériver *m* fois l'égalité $f(1-x)=f(x)$

pour obtenir $(-1)^m f^{(m)}(1-x)=f^m(x)$, d'où $f^{(m)}(1)=(-1)^m f^m(0)$ qui est un entier relatif.

3. On suppose que $\pi^2=\frac{a}{b}$ avec $(a,b)\in N^2$. Soit

$$G(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

a) $G(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b^k a^{n-k}f^{(2k)}(0)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(0)$ est un entier relatif puisque les $f^{(2k)}(0)$ le sont. Le raisonnement est identique pour $G(1)$.

b) $\frac{d}{dx}(G'(x)\sin\pi x-\pi G(x)\cos\pi x)=G''(x)\sin\pi x+\pi^2G(x)\sin\pi x=\pi^2A\sin\pi x$

où

$$A(x)=\frac{1}{\pi^2}G''(x)+G(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k-2}f^{(2k+2)}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2(k+1)}f^{(2(k+1))}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n\sum_{u=1}^{n+1}(-1)^{u-1}\pi^{2n-2u}f^{(2u)}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n(-1)^n\pi^{-2}f^{(2n+2)}(x)+b^n\pi^{2n}f(x)=b^n\left(\frac{a}{b}\right)^n f(x)=a^nf(x)\text{ , d'où}$$

l'égalité demandée.

c) On en déduit que

$$I=\pi\int_0^1 a^n \sin\pi x\times f(x)\,dx=\left[\frac{1}{\pi}G'(x)\sin\pi x-G(x)\cos\pi x\right]_0^1=G(0)+G(1)$$ et I sera un entier relatif.

d) L'encadrement obtenu à la première question pour $x\in\left]0,1\right[$ implique $0<I<\frac{2a^n}{n!}$, de sorte que $0<I<\frac{2a^n}{n!}<1$ pour n assez grand. Ceci est absurde puisque I est un entier relatif. Ainsi, l'hypothèse de départ, que π^2 est rationnel, est fausse. De même π n'est pas rationnel sinon π^2 le serait.

Exercice n° 7

On a :

$$\lambda=\frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)}=\frac{\mathrm{P}(M\cap\overline{V})P(V)}{\mathrm{P}(M\cap V)P(\overline{V})}=\frac{P_M(\overline{V})P(M)P(V)}{P_M(V)P(M)P(\overline{V})}=\frac{P_M(\overline{V})P(V)}{P_M(V)P(\overline{V})}=\frac{(1-P_M(V))P(V)}{P_M(V)(1-P(V))}$$

Pour le vaccin A : $\lambda=\frac{(1-0{,}008)\times0{,}25}{0{,}008\times(1-0{,}25)}\approx41{,}33$

Pour le vaccin B : $\lambda=\frac{(1-0{,}006)\times0{,}2}{0{,}006\times(1-0{,}2)}\approx41{,}42$

Les deux vaccins ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

La fonction qui à $y \geq 0$ associe $\ln(1+y)$ est continue et dérivable pour tout $y \geq 0$. Considérons la sur l'intervalle $[0, x]$, avec $x > 0$. Le Théorème des Accroissements Finis implique qu'il existe un réel $c \in]0, x[$ satisfaisant

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{1}{1+c}, \tag{0.1}$$

avec la fonction $\frac{1}{1+y}$ qui est la fonction dérivée de $\ln(1+y)$. L'inégalité $1 + c < 1 + x$ avec $0 < 1 + c$ est équivalente à $\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}$. Cette dernière inégalité et l'équation (0.1) prouve que pour tout $x > 0$,

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

Exercice 2

1. En mettant au même dénominateur le membre de droite de l'équation suivante

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+2)} + \frac{\eta}{(x+2)^2},$$

nous obtenons le système suivant à résoudre en α, β, γ et η

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + \eta & = & 2 \\ 4\beta - 3\gamma - 2\eta & = & 2 \\ -4\alpha + 4\beta + 2\gamma + \eta & = & 5 \end{cases}$$

Ce qui conduit au système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & -\gamma \\ \eta & = & 2-\beta+3\gamma \\ 2\beta & = & 1+\frac{3}{2}\gamma \\ 12\gamma+3\gamma-\frac{3}{2} & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & 0 \\ \eta & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0\end{array}\right.$$

2. Les primitives sont alors sur chacun des intervalles $]-\infty,-2]$,]-2,1[et $]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)} + k,\ k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 3

1. La variable aléatoire X suit la loi Binomiale $B(100, 0.05)$.
2. $I\!P(X=3) = C_{100}^3\,(0.05)^3\,(0.95)^{97} = 0.1395757$.
3. Considérons $p_n \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} C_n^k\,p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}(1-p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}\exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n})\exp(-k\ln(1-p_n)).\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(np_n)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(-k\ln(1-p_n)) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n}) = \exp(-\lambda)$ car $\lim\limits_{p_n\to 0}\frac{\ln(1-p_n)}{p_n} = \lim\limits_{p_n\to 0}\frac{\ln(1-p_n)-\ln(1)}{p_n-0} = -\frac{1}{1-0}$ en utilisant la dérivabilité de la fonction $\ln(1-x)$ en zéro. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k\,p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda)\,\frac{\lambda^k}{k!},\quad \forall k \in \{1,\ldots,n\},$$

4. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(100 * 0.05 = 5)$. Le calcul approché de $I\!P(X=3)$ est donné par

$$\exp(-5)\frac{5^3}{3!} = 0.1403739.$$

Problème

Partie 1 : Convergence de la série définissant γ

1. Pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[p, p+1]$, on a $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$, pour $t \in [p, p+1]$. Cela implique que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p} \\ & \Longleftrightarrow \\ & 0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite (γ_n) est par conséquent une suite croissante. Par ailleurs, toujours d'après la question précédente, on a

$$0 \leq \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ équivaut à la majoration de la suite γ_n par 1. Donc (γ_n) est une suite convergente (car croissante et majorée) et par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Pour tout $p \geq 1$, on a les égalités suivantes en effectant le changement de variable $y = p+u$

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{y-p}{y} dy = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} dy - \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{p}{y} dy = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{y} dy = u_p.$$

4. Pour tout $p \geq 2$, et tout $u \in [0, 1]$, on a

$$0 < p - 1 \leq u + p \leq p + 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{u+p} \leq \frac{1}{p-1}.$$

De ces inégalités et de la question préecédente, on obtient le résultat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+1} du \leq u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du \leq \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p-1} du \\ & \Longleftrightarrow \\ & \frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p(p-1)}. \end{aligned}$$

5. Mettons au même dénominateur le terme de droite des deux égalités ci-dessous et égalisons avec le terme de gauche de chacune d'elles :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} \text{ et } \frac{1}{p(p-1)} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}.$$

On obtient d'une part que $a(p+1) + pb = 1$ et d'autre part que $c(p-1) + pd = 1$, par identification on obtient que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 1$.

6. Des questions 4. et 5., on en déduit que pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}).$$

On note m un entier strictement supérieur à $n+1$ avec $n \geq 1$. D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p})$$
$$\iff$$
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m-1}). \tag{0.2}$$

Par passage à la limite en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation (0.2), on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

7. On cherche le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement tel que $r_n \leq 10^{-8}$. Si n est tel que $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2} \iff n \geq \frac{10^2}{2} = 50$, respectivement $\frac{1}{2n} \leq 10^{-8} \iff n \geq \frac{10^8}{2}$ alors on a $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement $r_n \leq 10^{-8}$. En prenant $n = 50$, respectivement $n = \frac{10^8}{2}$, on a la précision demandée.

8. D'après la question 6., on a

$$0 \leq \gamma-\gamma_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} = r_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{(n+1)-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

9. On cherche à déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\gamma-\gamma_{n,1} \leq 10^{-2}$. Cette inégalité est satisfaite pour tout n tel que $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2} \iff n^2 \geq 50$. L'entier $n = 8$ convient. Dans ce cas, la valeur approchée de γ est $\gamma_{8,1} = 0.575$ et $0.575 \leq \gamma \leq 0.575 + \frac{1}{128} = 0.585$.

Partie 2 : Expression intégrale de γ à l'aide de S et de R

1. Faisons un raisonnement par récurrence :
pour $n = 1$, on a bien $1 = \int_0^1 \frac{1-1+v}{v}dv$. Posons l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}(n) : 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv.$$

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}dv &= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n+(1-v)^n-(1-v)^{n+1}}{v}dv \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 \frac{(1-v)^n[1-(1-v)]}{v}dv \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 (1-v)^n dv \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+[-\frac{1}{n+1}(1-v)^{n+1}]_0^1 \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Remarquons tout d'abord en faisant le changement de variable $\frac{t}{n} = v \in [0,1]$ dès que $t \in [0,n]$ et en utilisant la question précédente que :

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt \\ &= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t/n}\frac{1}{n}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \end{aligned} \tag{0.3}$$

Ensuite en utilisant la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + [\ln(t)]_1^n - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \end{aligned} \tag{0.4}$$

Le résultat découle des équations (0.3) et (0.4).

3. On étudie la fonction définie pour tout $v \in \mathbb{R}$ par $g(v) = \exp(v) - 1 - v$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $g'(v) = \exp(v) - 1$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-^\star$. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$, croissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$, ce qui implique que $g(v) = \exp(v) - 1 - v \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}$.

4. Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de droite demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = -t/n$: dans ce cas, on a $1 - \frac{t}{n} \leq \exp(-t/n) \Longrightarrow e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \leq \exp(-tn/n) = \exp(-t)$.
Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de gauche demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = t/n$: dans ce cas, on a $(1+\frac{t}{n})^n \leq \exp(t) \Longleftrightarrow (1+\frac{t}{n})^n \exp(-t) \leq 1 \Longleftrightarrow (1-\frac{t^2}{n^2})^n \exp(-t) \leq (1-\frac{t}{n})^n = e_n(t)$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall t \in [0,n]$ l'inégalité de droite de la question précédente est équivalente à l'inégalité $0 \leq \exp(-t) - e_n(t)$ et l'inégalité de gauche de la question précédente est équivalente à l'inégalité $\exp(-t) - e_n(t) \leq (1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n)\exp(-t)$. L'application h définie sur $[0,1]$ par $h(v) = (1-v)^n + nv - 1$ est dérivable, elle vérifie $h(0) = 0$ et sa dérivée $h'(v) = -n(1-v)^{n-1} + n = n(1-(1-v)^{n-1}) \geq 0$. Donc pour tout $v \in [0,1]$, $h(v) \geq 0$, d'où $1 - (1-\dfrac{t^2}{n^2})^n \leq n\dfrac{t^2}{n^2} = \dfrac{t^2}{n}$, ce qui permet d'obtenir le résultat demandé.

6. Si $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ alors d'après la question 2. de la Partie 2, $u_n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt$, où $e_n(t)$ est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n$. Or d'après la question précédente

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)}{t}dt = \int_0^1 \frac{\exp(-t)-e_n(t)}{t}dt \leq \int_0^1 \frac{t\ \exp(-t)}{n}dt \leq \frac{1}{n}.$$

Du théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt = S(1).$$

D'autre part, d'aprés la question précédente et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$0 \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)t}{n}dt = \frac{1}{n}(2\exp(-1)-\exp(-n)-n\exp(-n)).$$

Le théorème d'encadrement implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{e_n(t)}{t}dt = R(1).$$

Il s'ensuit que $\gamma = S(1) - R(1)$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x \sin x}{1+e^x}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
3. Michel a trois ans de plus que Paul et 7 ans de plus que Pierre. A eux trois, ils ont 101 ans. Quel est l'âge de Pierre ?
4. Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$
5. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e}$ et $u_0 = 1$. Quelle est la limite de cette suite ?

7. Entre janvier 2004 et janvier 2007, votre salaire a augmenté de 40% alors que dans cette même période les prix à la consommation ont augmenté de 25%. Quelle est la variation du pouvoir d'achat de votre salaire durant cette période ?

8. Calculer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} x^k \, dx$

9. Dans un concours d'entrée à une école de statistique, trois pays (A, B, C) présentent des candidats. Le tableau suivant donne la moyenne des candidats selon les pays :

Pays	A	B	C
Moyenne	10	8	12

Sachant que 3/5 des candidats sont originaires du pays A, 3/10 du pays B et 1/10 du pays C, quelle est la moyenne de l'ensemble de ces candidats ?

10. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})$, où $\overline{x}$ correspond à la moyenne arithmétique des $(x_k),\ k = 1,\ldots,n$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Etudier la convexité de f .
3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2(x-1)g(x)$$

où $g(x)$ est la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est un nombre rationnel} \\ 0 \text{ si } x \text{ est un nombre irrationnel} \end{cases}$$

1. Montrer que tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels.

2. Etudier la continuité de g sur R.

3. Etudier la continuité de f sur R.

4. Etudier la dérivabilité de f sur R.

Exercice n° 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) est convergente, quelle est alors sa limite ?

3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction numérique f définie, sur R^+, par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, le graphe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice n° 5

Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \text{, puis } \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

1. Montrer que $u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{x+p}dx$

2. Montrer que la suite γ_n est convergente.

Exercice n° 6

1. Comparer les deux fonctions $f(x) = Ln(x+e)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$ sur l'ensemble des réels positifs.

2. Calculer $I_n = \int_0^n (\sqrt{x+1} - Ln(x+e))dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3. Dans une course à pied de 10 kilomètres, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête se trouvent sur une même ligne. Si x désigne la distance restante a parcourir, la probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et pour le coureur B à $\frac{1}{g(x)}$.

Cet énoncé a-t-il un sens? et qui a le plus de chances de gagner la course ?

Exercice n° 7

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n): x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive et strictement inférieure à 1, de (E_n) , notée x_n.

2. Calculer la limite de la suite (x_n) quand n tend vers $+\infty$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles sont les grandes orientations de la politique étrangère des Etats africains ? Vous essayerez de dégager les signes d'une volonté unitaire.

Sujet n° 2

Quels sont les nouveaux Centres d'impulsion économiques et les nouveaux flux (commerciaux et migratoires) apparus avec la Mondialisation ?

Sujet n° 3

Commentez cette phrase de l'écrivain américain Samuel Huntington dans « Le choc des Civilisations et la Refonte de l'ordre mondial » 1996 : « Il est probable que les premières années du 21è siècle voient une résurgence de la puissance et de la culture non occidentale ainsi que le choc des peuples de civilisations non occidentales avec l'Occident et entre eux ».

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1.
Le but de l'exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{4\pi}{5})$. Pour cela, on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u+v &= -\frac{1}{2} \\ uv &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. En déduire la valeur de

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4.$$

3. Déduire de la question précédente que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$.
4. En utilisant la formule trigonométrique de $\cos(a+b)$ (a et b réels), montrer que

$$\begin{aligned} \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{4\pi}{5}), \\ \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{2\pi}{5}). \end{aligned}$$

5. Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$.
6. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice 2.
Les parties **A.** *et* **B.** *sont indépendantes.*

- **A.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, dont l'expression est

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

  1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  2. Pour quels points x réels, la dérivée seconde $f^{(2)}(x)$ existe-t-elle ? Déterminer cette dérivée seconde quand elle existe.

- **B.** Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{(1 - \cos(x))}$$

Exercice 3.
Chaque vis fabriquée par la société *SOC* présente un défaut avec une probabilité 0.01; l'état d'une vis est indépendant de celui des autres vis. Les vis sont vendues par paquet de 10. La société accepte de rembourser un paquet de vis qu'elle vend s'il contient au moins une vis défectueuse. On note X_k ($k \in \{1, \ldots, 10\}$) la variable aléatoire égale à 1 si la k-ième vis du paquet est défectueuse et 0 sinon. On note aussi $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de vis défectueuses présentes dans un paquet donné.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_1.
2. Quelle est la loi de la variable S_{10} ?
3. Calculer $\mathbb{E}(S_{10})$ et $\text{Var}(S_{10})$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z définie par $Z = S_{10} * 100$ qui représente le nombre de vis défectueuses sur 100 paquets.
5. Quelle proportion de paquets vendus la société *SOC* s'expose-t-elle à devoir rembourser ?

Problème

Etant donnés deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n), les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \geq 0$, par $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
Si $a = 1$ et $b = x$, avec $x \geq 0$, alors a_n et b_n sont des fonctions de x que l'on notera respectivement u_n et v_n.
On admettra le résultat suivant :
Résultat $\mathcal{R}$: Soit (r_n) une suite d'applications continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, convergeant vers une application r, de telle sorte que pour tout a, b $(a < b)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a,b]} |r_n(x) - r(x)| = 0,$$

alors r est continue sur $\mathbb{R}$.

1. **Convergence des suites (a_n) et (b_n)**
   - **a.** Montrer que : $\forall n \geq 1$ et $a \neq b$,
   $$(0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n) \text{ et } ((a_{n+1} - b_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n))$$
   - **b.** Que deviennent ces inégalités quand $a = b$?
   - **c.** Montrer que ces deux suites sont convergentes et qu'elles ont la même limite.
   On notera $M(a, b)$ cette limite commune et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = M(x, 1)$, $\forall x \in [0, +\infty[$.
2. **Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique**
   - **a.** Montrer que : $\forall\ (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$M(a_n, b_n) = M(a, b), \quad M(a, b) = M(b, a) \text{ et } \ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b).$$
   - **b.** En déduire que, pour $a > 0$, $M(a, b) = af(\frac{b}{a})$.
3. **Continuité de la fonction f**
   - **a.** Montrer que pour tout $n \geq 0$, les fonctions v_n et u_n sont continues.
   - **b.** Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,
   $$0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}|1 - x|.$$
   - **c.** En déduire que la fonction f est continue.
4. **Etude de la fonction f au voisinage de 1**
   - **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a
   $$0 \leq \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}.$$
   - **b.** En déduire que la fonction f est dérivable au point 1.
5. **Etude aux bornes de la fonction f**
   - **a.** Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?
   - **b.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf(1/x)$.
   - **c.** Montrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction, quand x tend vers $+\infty$.
6. **Sens de variation de la fonction f**
   - **a.** Montrer que pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
   - **b.** En déduire que la fonction f est croissante.
7. **Représentation graphique de la fonction f**
   - **a.** Calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-3} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0.01 0.1 0.2 0.4 0.6 0.8 2 3 10 100.
   - **b.** Donner une représentation graphique sur l'intervalle $[0, 3]$ de la fonction f ainsi que des fonctions : $g\ :\ x \mapsto \frac{1+x}{2}$ et $h\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre du Professeur Michel Lejoyeux dont le titre est « Overdose d'info. Guérir des névroses médiatiques. » paru aux éditions du Seuil en janvier 2006. Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Internet comme un nouveau stupéfiant

L'Internet a changé la vie des amateurs d'actualités. Il a fait plonger dans la dépendance nombre de ceux qui se contentaient de la lecture quotidienne d'un journal imprimé. La possibilité de se connecter en permanence crée une nouvelle relation à l'information. L'Internet est bien - les patients que je rencontre me le confirment - un nouveau stupéfiant. Il est un sujet de préoccupation pour bien des parents, qui viennent me demander comment raisonner leurs enfants quand ils passent leurs journées et leurs nuits face à un écran. Il faut dire que l'Internet possède bien des charmes pour nous piéger. Nous recevons sur nos écrans de veille, qui ne s'endorment jamais, des nouvelles sans cesse renouvelées qui mobilisent notre peur et nous intriguent. Sans y avoir été préparés, nous allons devoir apprendre à consommer ces nouvelles de l'Internet. Nous savons enfin comment faire fonctionner les ordinateurs. Il ne nous reste plus qu'à savoir comment les éteindre pour profiter de la vie réelle qu'ils nous masquent parfois.

Max entretient une relation qui tient de la passion avec son Macintosh. Il lui souhaite son anniversaire et lui offre régulièrement des accessoires, comme un écran ou une carte censée le faire fonctionner plus rapidement. Le matin et le soir, il vérifie que son disque dur est bien rangé. Les amis auxquels il tient le plus, sont ceux qui partagent sa passion de l'informatique ou qui lui envoient des messages sur son ordinateur…

Sa « cyber-idylle » fait le bonheur et la fortune des vendeurs de matériel informatique. Il « gâte » sa machine préférée en lui offrant le dernier modèle de carte graphique, ou la version la plus performante des logiciels d'exploitation.

Les premiers cas de dépendance ayant sensibilisé le grand public et les professionnels, étaient des parents qui négligeaient leurs enfants au profit des news et de l'Internet. Une jeune femme élevant seule son enfant avait installé son ordinateur dans une pièce confortable et bien chauffée. Elle surveillait régulièrement l'actualité. Dans le même temps, elle « rangeait » son enfant dans un réduit sans chauffage ni lumière.

Nombre d'autres histoires sont venues confirmer les liens de dépendance que peuvent susciter l'ordinateur et l'Internet. Elles dépassent le cadre de l'anecdote et traduisent une nouvelle relation au virtuel et à l'actualité. Un cardiologue, grand consommateur d'actualités en continu me racontait comment l'ordinateur était rentré dans sa vie pour ne plus en sortir. Il avait commencé à l'utiliser pour des raisons professionnelles, puis il avait découvert à quel point ce mode de communication lui facilitait l'accès aux revues scientifiques, qu'il mettait du temps à chercher en bibliothèque avant. Il s'était ensuite abonné à des sites d'information qui le tenaient au courant des progrès de sa spécialité. En quelques mois, l'ordinateur était devenu indispensable à sa vie professionnelle. Il avait découvert qu'il pouvait présenter à des collègues les cas difficiles pour lesquels il cherchait un autre avis. Après avoir plongé dans les forums mêlant discussions et actualité, il n'a plus réussi à contrôler le temps passé devant l'écran. Il est entré dans l'addiction à petits pas. Il s'est abonné à des lettres d'information sur l'actualité de sa profession et s'est inscrit aux forums dans lesquels il pouvait commenter cette actualité, échanger des conseils et des informations.

Ce phénomène de dépendance au virtuel commence à faire l'objet de campagnes d'information en Angleterre. Aux Etats-Unis, un salarié américain sur quatre est considéré comme dépendant de l'Internet et consomme sur son lieu de travail les actualités des sites de news en ligne. Une étude qui a porté sur trois cents cinq salariés et deux cent cinquante directeurs des ressources humaines a montré que les salariés passaient plus d'une journée entière chaque semaine à surfer sur des sites qui n'ont pas de rapport avec leur activité professionnelle. Environ 23% du temps passé sur Internet concerne les sites d'information.

Une étude conduite aux Etats-Unis par la fondation Kaiser a trouvé chez les adolescents des quantités impressionnantes de temps passé devant l'ordinateur. Deux mille lycéens et étudiants ont été interrogés. Ils ont déclaré passer entre six heures et demi et huit heures et demi par jour devant un écran. Les écoliers plus jeunes passent de trente-cinq à quarante heures par semaine devant la télévision ou l'ordinateur… Autant que leurs parents au travail. Les relations amicales, la lecture et le sport sont autant d'activités sacrifiées au profit de l'intoxication médiatique.

Yang et Tung, des psychiatres, ont étudié l'usage de l'Internet chez mille sept cent huit étudiants taïwanais. Ils ont retrouvé une prévalence de 13,8% pour l'addiction à Internet. Les conséquences de cette addiction étaient, comme dans les autres cas, les effets négatifs sur la vie familiale, la scolarité, la santé. Les « addicts » à l'Internet percevaient bien que le temps passé en connexion avait une influence négative sur leur activité quotidienne, leurs performances scolaires, leurs relations avec les parents, les enseignants. Les dépendants et les non-dépendants considéraient tous que l'Internet était un moyen privilégié d'augmenter son nombre d'amis. Les étudiants ayant une personnalité caractérisée par la dépendance, la timidité, la dépression et la faible estime de soi présentaient plus de risques que les autres.

Lynda Hinkle, présidente de la Ligue féminine des violences sur Internet, raconte sa cyberdépendance : « je me suis connectée pour la première fois en 1993. J'ai allumé l'ordinateur de l'université Rutgers. Un ami m'a envoyé des messages et m'a appris à me servir des boîtes aux lettres. Après une semaine d'entraînement, je maîtrisais la technique de l'Internet. J'ai commencé à rencontrer de nouveaux correspondants. J'ai trouvé des pervers sexuels, mais aussi plein de chics types. Pour la première fois la solitaire que je suis a eu l'impression de faire partie d'une communauté. Et en même temps je suis tombée dans une sorte de dépression. Mes amis et mon médecin ont mis cette dépression sur le compte de l'Internet. Ils n'avaient pas complètement tort. En dehors du Web, plus rien ne m'intéressait vraiment. Je restais assise devant mon ordinateur près de vingt heures par jour. Je ne dormais presque plus. Je mangeais à peine. Je passais en coup de vent dans la salle de bains. Mes parents m'écrivaient des petits mots sur les murs ou sur la porte de mon bureau pour essayer d'entrer en contact avec moi. Ils voulaient me rappeler qu'ils existaient encore. Ils pensaient tous que j'avais un gros problème avec l'Internet. Moi, c'est avec la vie réelle sans écran que j'avais l'impression d'avoir des problèmes. J'ai commencé à prendre mes distances avec tout ce qui ne passait pas par un ordinateur. J'ai quitté l'université. J'ai interrompu mes études. Je n'avais plus le temps. Je restais dans ma chambre à coucher transformée en bureau virtuel. J'étais accrochée au fil qui reliait mon ordinateur à la ligne de téléphone. »

Malgré les effets de l'Internet sur sa vie, Lynda ne remet pas sa passion en cause. Elle trouve à ce média des aspects positifs. J'ai appris, dit-elle, à aimer, à parler, à confier mes sentiments les plus intimes grâce à mon ordinateur. Je fais mes courses et je communique avec mes parents éloignés. J'ai accepté pour la première fois de ma vie de confier des secrets qui me semblaient inavouables. Le seul problème, c'est que les leçons de l'Internet ne sont pas utilisables dans la vie réelle.

(…) Le psychiatre américain Donald Black ne désintoxique pas les accros du virtuel. Il a étudié en 1999 le profil typique du dépendant à l'Internet, consommateur d'actualités en ligne et de dépêches d'agence : c'est un homme de trente-deux ans ayant fait des études jusqu'à l'université, ayant un bon niveau socio-économique et qui possède un ordinateur depuis trois ans en moyenne. La plupart des addicts à l'Internet éprouvent un intérêt majeur pour le surf sur le Web, les forums de chat, les sites de news et les jeux en ligne. Ils passent en moyenne trente heures par semaine devant leur ordinateur par plaisir pendant leur temps de loisir. Ils se sentent excités, heureux et puissants quand ils sont connectés au monde entier, même si leur connexion ne leur annonce que des catastrophes. En quelques semaines ou quelques mois, l'ensemble de leur activité professionnelle passe par l'Internet. Insidieusement, ils se connectent de plus en plus longtemps, pendant les heures de bureau et le soir ou la nuit jusqu'à l'aube. Donald Black a montré que cette surconsommation d'informations virtuelles nuit à la vie réelle. Il a comparé la vie de vingt drogués du Net à celle de consommateurs plus modérés. Le résultat est sans appel. Les drogués du Net et de l'information en ligne abandonnent leurs proches. Ils connaissent les sites les plus rares mais oublient de sortir de leur bureau pour saluer leurs collègues. Les drogués du virtuel renoncent aussi aux rituels familiaux. Ils ne dînent plus avec leur famille. Ils s'inventent une nouvelle communauté d'amis, virtuelle celle-ci, avec laquelle ils communiquent par écrans interposés. Leur addiction à Internet se nourrit d'une envie de changer de vie, d'univers, de personnalité. Sans presque s'en rendre compte, ils sont entrés dans une « addiction sage », suscitée et justifiée par des motifs d'ordre professionnel, intellectuel ou scientifique.

Quand ils sont lassés des blogs et des journaux sur l'Internet, les drogués du virtuel voyagent sur la Toile. Ils n'éteignent pas leur ordinateur, mais changent de sites favoris. Ils vagabondent sur les sites de jeu. Ils trouvent là encore une illusion de socialisation qui les incite à poursuivre la connexion. Les loteries gratuites les incitent à tenter leur chance une première fois. Elles les orientent ensuite vers de véritables casinos en ligne. Damien Bonnête, président de Bingopoly explique dans un entretien au journal *Le Monde* les relations entre le virtuel et le jeu. « Nous travaillons avec des ethnologues sur le discours : maîtriser l'Internet, c'est se montrer évolué ; gagner à un jeu le prouve. L'internaute est davantage prêt à payer pour jouer que pour disposer d'un service utile. » Le journal du Net note que 51% des internautes se sont déjà connectés à un site de jeu gratuit. Ils peuvent y gagner jusqu'à dix millions d'euros. Ils passent ainsi d'un coin à l'autre de leur écran, du besoin de maîtrise au bonheur de la prise de risque.

L'Internet est aussi un grand magasin qui ne ferme jamais. Les boutiques généralistes ou spécialisées proposent à chaque heure du jour ou de la nuit de nouvelles promotions. Quand la pression des rues du commerce se relâche, les sites d'enchères en ligne prennent le relais. L'achat en ligne est, comme la consultation d'informations, une expérience passionnelle et solitaire. Toutes les conditions sont réunies pour qu'on cède à l'achat coup de tête. Nous sommes seuls. Aucun autre client, aucun vendeur maladroit ne vient troubler notre relation passionnelle à l'achat. Les vêtements, les livres ou les disques sont présentés sous leur meilleur jour. L'achat est dédramatisé. Il n'y a pas besoin de sortir d'argent de son portefeuille. Il suffit d'égrener sur le clavier les quelques chiffres de sa carte de crédit pour engager une dépense sans douleur. Et puis, plaisir ultime, le magasin virtuel ne ferme pas plus que ne dorment les sites d'information en continu. Il autorise les achats aux heures et aux jours les plus inhabituels. Un amateur de livres, collectionneur de romans policiers commandés sur des sites anglais, m'a raconté avec quel bonheur il se ruinait. Une acheteuse compulsive, fanatique d'écharpes et de chaussures, tente de restaurer l'image qu'elle a d'elle même en se couvrant de cadeaux. Les dimanches après-midi qu'elle passe seule, en proie à un sentiment d'abandon, déclenchent ses boulimies d'achats. Quand les boutiques sont closes, l'Internet est à l'écoute de son besoin de consolation.

Le plaisir de la connexion et de la consultation des sites de news ressemble aux effets de l'alcool ou de la drogue : apaisement, euphorie, excitation sont au rendez-vous. Certains analystes américains ne doutent pas de la réalité de cette nouvelle addiction. Ils proposent des sites de « soin en ligne » aux junkies de news en continu et ils appellent les entreprises et les pouvoirs publics à se mobiliser contre ce fléau nouveau.

(…) Depuis 1996, des critères diagnostiques ont été proposés. Ils indiquent que les « internetornanes », les drogués de l'information en ligne, partagent bien des symptômes : une tendance à la perte de contrôle, un temps important passé avec l'objet de leur addiction, un sentiment de manque, de malaise, ou même un vrai syndrome de sevrage quand ils sont déconnectés. Cette passion extrême provoque rapidement des effets néfastes, comparables, là encore, à ceux des autres toxicomanies. On retrouve ainsi chez les drogués du Net des difficultés familiales, professionnelles et affectives, un refus de l'existence réelle, avec ses satisfactions, ses contraintes et ses tracas au profit d'une vie virtuelle par écran interposé. Leur passion de l'information se double d'un attrait pour la technique. Ils parlent des performances de leur processeur comme les amateurs de voitures annoncent le nombre de cylindres ou de chevaux de leur moteur. Ils vous racontent la manière dont ils se sont « gâtés » en s'offrant le dernier modèle d'écran à balayage ultrarapide. Ils redécouvrent le plaisir de faire des photos depuis que leur dernier téléphone portable intègre une fonction de photo numérique. Ils vous parleront aussi de leurs tri-bandes, des messages en couleurs qu'ils reçoivent, des séquences vidéo que leur envoie en continu leur opérateur. Le message ici est double. A l'intérêt pour l'actualité s'ajoute l'envie de faire partie du cercle restreint des individus « branchés » initiés aux techniques les plus nouvelles et les plus sophistiquées.

Les motivations de la dépendance au virtuel sont multiples. Elles ne sont pas les mêmes chez ceux qui visitent les sites marchands et ceux qui fréquentent les sites d'information. Quelques principes généraux émergent. Au plaisir de parcourir le monde et de connaître un sentiment d'omniscience, s'ajoutent d'autres plaisirs plus régressifs. Le psychologue américain David Greenfield suggère que la tendance à utiliser le virtuel pour se consoler du réel ou pour tenter de le maîtriser est un comportement appris dès l'enfance. L'enfant passe progressivement du scintillement de l'écran de télévision à celui de l'ordinateur. Le danger est peut-être ici moins dans les heures passées et le temps perdu que dans une altération de la réalité dont le dévoreur d'images n'est pas conscient, mais qui modifie profondément sa personnalité et ses relations aux autres. Le romancier Tonino Benaquista avait bien illustré dans son roman *Saga* cette relation passionnelle à l'écran : « je suis né devant la télévision et ce n'est pas une vue de l'esprit. La première image dont je me souvienne vraiment, n'est pas le sein de ma mère, mais une chose brillante et carrée qui m'a irrésistiblement attiré. La télé, c'était ma baby-sitter, c'était mes mercredis après-midi, c'était la découverte du monde en marche sous mes petits yeux ébahis. La télé, c'était le copain avec qui on ne s'engueule jamais, celui qui aura toujours une bonne idée en tête du matin au soir. La télé, c'était une brassée de héros qui m'ont appris l'exaltation, les premiers émois, mais aussi les premiers dégoûts. »

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f'(x)=\dfrac{e^x \sin x}{(1+e^x)^2}+\dfrac{e^x \cos x}{1+e^x}$

2. $\int_0^3 E(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 dx+\int_2^3 2dx=1+2=3$

3. Soit x l'âge de Michel, y celui de Paul et z celui de Pierre. On a :
$x=y+3,\ x=z+7,\ x+y+z=101$, d'où $z=30\ (x=37, y=34)$

4. De ce système : $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$, on obtient $x=\dfrac{12-3y}{2}$ et on remplace dans la première équation pour obtenir : $5y^2-72y+124=0$. Les solutions sont :
$(x=3, y=2)$ et $(x=-63/5, y=62/5)$

5. Soit la fonction f définie par $f(x)=x^6+x^4+x^2+1$. Il est évident que $f(x)>0$ pour tout x, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

6. La suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{e}$ est une suite géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1. Elle converge donc vers 0.

7. La variation du pouvoir d'achat de votre salaire durant cette période est égale à +12% ($\dfrac{1{,}40}{1{,}25}=1{,}12$).

8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^n x^k\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{k+1}=+\infty$

9. La moyenne de l'ensemble des candidats est égale à :

$$\frac{6\times10+3\times8+1\times12}{10}=9{,}6$$

10. $\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{x})=\sum_{k=1}^n x_k-n\overline{x}=n\overline{x}-n\overline{x}=0$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f^{'}(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y^{'}$		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ et $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

3.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-e^{-x}x^2\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\left[-e^{-x}x\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{5}{e} + 2$$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2(x-1)g(x)$$

où $g(x)$ est la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q)

1. Soit x un nombre rationnel, alors la suite $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est une suite de nombres irrationnels qui converge vers x.

2. Etude de la continuité de g sur R.

En un point $x \in R - Q$, $g(x) = 0$ et il existe une suite de nombres rationnels x_n qui converge vers g (Q est dense dans R), donc $g(x_n) = 1$ et g n'est pas continue en x.

En un point $x \in Q$, $g(x) = 1$ et il existe une suite de nombres irrationnels x_n qui converge vers g (question 1), donc $g(x_n) = 0$ et g n'est pas continue en x.

En conclusion g n'est continue en aucun point.

3. Etude de la continuité de f sur R.

Le raisonnement est identique à celui de la question précédente à savoir que tout nombre réel est à la fois limite d'une suite de nombres rationnels et de nombres irrationnels. f est donc seulement continue en 0 et 1.

4. Etude de la dérivabilité de f sur R. Seuls les points 0 et 1 peuvent être des points de dérivabilité pour f.

En 1, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=x^2g(x)$ et cette expression n'admet pas de limite quand $x\to 1$ (distinguer les cas rationnels et irrationnels).

En 0, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=x(x-1)g(x)$ qui tend vers 0 et f est dérivable en zéro avec une dérivée égale à 0.

Exercice n° 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1}$ et $u_0=1$

1. On vérifie par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) converge, sa limite l vérifie le théorème du point fixe, $l=\frac{l+2}{l+1}$ et on trouve $l=\sqrt{2}$

3. La fonction f est une fonction homographique décroissante qui admet les droites $x=-1$ et $y=1$ comme asymptotes.

4. L'aire comprise entre l'axe *Ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à

$$\int_1^2\frac{x+2}{x+1}dx=\int_1^2(1+\frac{1}{x+1})dx=\left[x+Ln(x+1)\right]_1^2=1+Ln(3/2)$$

5. Comme la fonction f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites de rang pair et impair sont monotones. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ (on le vérifie par récurrence à partir de u_1) et la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice n° 5

Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \text{, puis } \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

1. On a, en posant $t = x + p$,

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{x+p}dx = \frac{1}{p}\int_p^{p+1} \frac{t-p}{t}dt = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1}\frac{dt}{t} = u_p$$

2. On a : $\frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{p}$, d'où $0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

On en déduit que $0 \le \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \le \sum_{p=1}^{n}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \le 1$

et $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \ge 0$, la suite γ_n est croissante et majorée donc elle converge.

Exercice n° 6

1. Soit $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, sa dérivée est $y' = \frac{2\sqrt{x+1} - (x+e)}{2\sqrt{x+1}(x+e)}$, elle est du signe du numérateur. Soit $z = 2\sqrt{x+1} - (x+e)$ dont la dérivée $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$ est toujours négative, et y' aussi, donc y est décroissante et négative. En conclusion : $f(x) \le g(x)$.

2.

$$I_n = \int_0^n (\sqrt{x+1} - Ln(x+e))dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^n - \int_e^{n+e} Lnt\,dt = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - [tLnt - t]_e^{n+e}$$, d'où

$I_n = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - (n+e)Ln(n+e) + (n+e)$ et $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

3. On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1 donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités. D'après la première question, $f(x) \leq g(x)$ et A a plus de chances de gagner la course.

Exercice n° 7

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

2. Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ (car $x_n \in]0,1[$)

et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

1.
$$\begin{cases} u+v &= -\frac{1}{2} \\ uv &= -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ v &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 1$, $1+z+z^2+z^3+z^4$ est la somme des 5 premiers termes d'une série géométrique de raison z, c'est à dire $1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. Le cas particulier de $z=\omega$ donne $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ (ou encore $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$ est la somme des racines 5-ième de l'unité qui est égale à 0).

3. On en déduit aisément l'égalité demandée en remarquant que $\omega^3 = \mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et que $\omega^4 = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$ et en utilisant le fait que $\mathrm{e}^{i\frac{l\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-i\frac{l\pi}{5}} = 2\cos(l\pi/5)$, $l = 2, 4$.

4. Les formules trigonométriques $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos(a-b)$ et $\cos(-a) = \cos(a)$ (a et b réels), donnent immédiatement le résultat
$$\begin{aligned} \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{4\pi}{5}), \\ \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{2\pi}{5}). \end{aligned}$$

5. D'après la question 3 et en sommant les deux égalités de la question précédente, on obtient la résultat $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$.

6. Les équations des questions 3 et 5 correspondent aux équations du système de la question 1, on en déduit que
$$\begin{cases} \cos(\frac{4\pi}{5}) &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ \cos(\frac{2\pi}{5}) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Exercice 2

- **A.**

  1.
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x) - 0}{x-0} = 0 = f'_d(0) = f'_g(0),$$
  où f'_d et f'_g désignent les dérivées à droite respectivement à gauche de f. La fonction f est par conséquent dérivable en 0. En dehors du point 0, f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.

  2. Pour $x < 0$, $f^{(2)}(x) = 2$, où $f^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de f. De même $f_g^{(2)}(0) = 2$. Pour $x > 0$ la dérivée première de f, $f'(x) = (1/x^2)\exp(-1/x)$ est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables. Etudions la dérivée seconde à droite de f en 0 :
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x^2)\exp(-1/x) - 0}{x-0} = 0 = f_d^{(2)}(0) \neq f_g^{(2)}(0),$$
  donc f n'admet pas de dérivée seconde en 0. Pour $x > 0$,
  $$f^{(2)}(x) = ((-2/x^3) + (1/x^4))\exp(-1/x).$$

- **B.** Quand $x \neq 0$,
$$\begin{aligned}\frac{2}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{(1-\cos(x))} &= \frac{2(1-\cos(x)) - (1-(\cos(x))^2)}{(1-\cos(x))(\sin(x))^2} \\ &= \frac{(1-\cos(x))(2-(1+\cos(x)))}{(1-\cos(x))(1-\cos(x))(1+\cos(x))} \\ &= \frac{1}{(1+\cos(x))},\end{aligned}$$

  qui tend vers $1/2$ quand x tend vers 0.

Exercice 3

1. On note F la fonction de répartition de X_1.

$$F(x) = I\!P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0.99 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2. S_{10} suit une loi Binomiale $B(10, 0.01) = B(n,p)$, avec $n = 10$ et $p = 0.01$.

3. $I\!E(S_{10}) = 10 * (0.01) = 0.1$ et $\text{Var}(S_{10}) = 10 * (0.01) * (0.99) = 0.099 = np(1-p)$.

4. $I\!E(Z) = I\!E(S_{10} * 100) = 100 * 0.1 = 10$ et $\text{Var}(Z) = 100^2 * 0.099 = 990$.

5. $I\!P(S_{10} \geq 1) = 1 - I\!P(S_{10} = 0) = 1 - 0.99^{10} = 0.095$.

Problème

1. **Convergence des suites** (a_n) **et** (b_n)

   - **a.** $\forall n \geq 1$ et puisque $a \neq b$, on a

$$\begin{array}{rcl} 2(a_n - b_n) = (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 & > & 0 \\ & \Leftrightarrow & \\ a_n & > & b_n \end{array} \qquad (0.1)$$

et cela implique que

$$a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \quad > \quad 0 \qquad (0.2)$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \quad \geq \quad 0. \qquad (0.3)$$

Par récurrence b_n est positif ou nul, et d'après les relations (0.1) , (0.2) et (0.3), on a

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n.$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} 2(a_{n+1} - b_{n+1}) & = & a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \\ & = & a_n - b_n + 2\sqrt{b_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \\ & \leq & a_n - b_n \end{array} \qquad (0.4)$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant la relation (0.1).

- **b.** Quand $a = b$, on a $a_1 = b_1 = a$, et par récurence, on peut montrer que $\forall n \geq 0$, $a_n = b_n = a$.

- **c.** D'aprés la question 1.**a.**, a_n est une suite décroissante et b_n est une suite croissante qui vérifient d'après la relation (0.4),

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq 2^{-n}(a_1 - b_1),$$

qui permet de conclure, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes : elles convergent et ont la même limite $M(a, b)$.

2. **Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique**

- **a.** La limite commune des suites $(a_k)_{k\geq n}$ et $(b_k)_{k\geq n}$ est $M(a_n, b_n)$ mais elle est aussi égale à $M(a, b)$, donc par unicité de la limite, $M(a_n, b_n) = M(a, b)$.
Soient (a'_n) et (b'_n) les suites définies par $a'_0 = b$, $b'_0 = a$, alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$, ce qui implique que $M(a'_0, b'_0) = M(b, a) = M(a, b)$.
Soient $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ les suites définies par $\tilde{a}_0 = \lambda a$, $\tilde{b}_0 = \lambda b$, on a alors $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$ et $\tilde{b}_1 = \lambda b$, et par récurrence on peut montrer que $\forall n \geq 0$, $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ et $\tilde{b}_n = \lambda b_n$. On en déduit que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.
- **b.** De la question précédente et si $a \neq 0$, on a $M(a, b) = M(\frac{ab}{a}, a) = aM(\frac{b}{a}, 1) = af(\frac{b}{a})$.

3. **Continuité de la fonction** f

- **a.** $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = x$, et $\forall n > 0$, $u_n(x) = \frac{v_{n-1}+u_{n-1}}{2}$ et $v_n(x) = \sqrt{v_{n-1}u_{n-1}}$. Par récurrence sur n et d'après les opérations sur les fonctions continues, les fonctions (u_n) et (v_n) sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** D'après (0.4), $\forall n > 0$ et $\forall x \geq 0$, on a

$$0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1}) \tag{0.5}$$

et

$$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x). \tag{0.6}$$

Les relations (0.5) et (0.6) impliquent que

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(x) - f(x) &\leq u_n(x) - v_n(x) \\ &\leq 2^{-(n-1)}(u_1(x) - v_1(x)) \end{aligned}$$

Or

$$(u_1(x) - v_1(x)) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}(1 - x)\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}|1 - x|,$$

ce qui achève la démonstration.

- **c.** En utilisant la question précédente restreinte à $x \in [0, A]$, où A est une constante strictement positive quelconque, on obtient que $\sup_{x\in[0,A]} |u_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}|1+A|$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La résultat admis $\mathcal{R}$ permet de conclure que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. **Etude de la fonction f au voisinage de** 1

- **a.** $\forall x \geq 0$,

$$v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x),\ \forall n \geq 0,$$

qui pour $n = 1$ correspond à la relation demandée.

- **b.** Remarquons que $f(1) = M(1, 1) = 1$ d'après la question 1.**b.**. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{f(x)-1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2};$$

en utilisant le théorème d'encadrement, f est dérivable au point $x = 1$ puisque

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2} = f'(1).$$

5. **Etude aux bornes de la fonction f**

- **a.** $f(0) = M(0, 1) = 0$ puisque $v_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$. L'encadrement établi en 4.**a.** implique que f n'est pas dérivable à droite en 0 puisque

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x},$$

et que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, f admet une demi-tangente verticale en 0.

- **b.** Pour tout $x > 0$, $f(x) = M(x, 1) = x\,M(1, 1/x) = x\,M(1/x, 1) = x\,f(1/x)$.

- **c.** D'après la question précédente, on a

$$\frac{f(x)}{x} = f(1/x),$$

et comme f est continue en 0, $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = f(0) = 0$, ce qui implique que le graphe de f présente une branche parabolique de direction (Ox), quand x tend vers $+\infty$.

6. **Sens de variation de la fonction f**

- **a.** Les fonctions $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, de même $u_1(x) = \frac{1+x}{2}$ et $v_1(x) = \sqrt{x}$ sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** Par passage à la limite simple de u_n ou de v_n, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

7. **Représentation graphique de la fonction** f

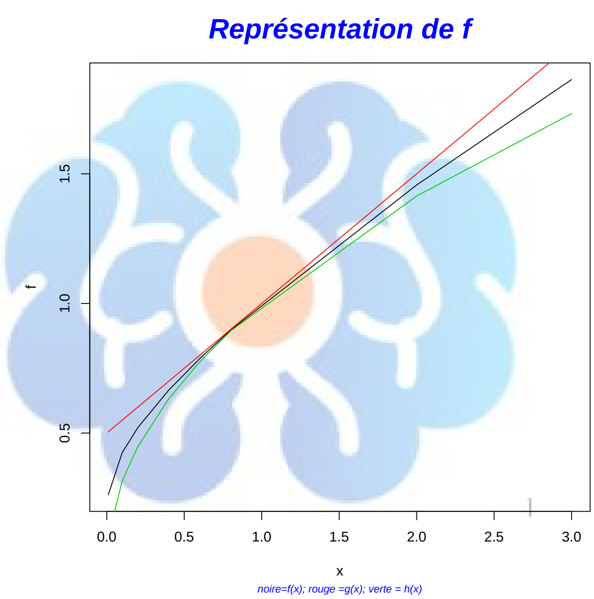
- **a.** D'après la question 3.**b.**, on va approcher $f(x)$ par $u_n(x)$ pour $x \in [0,3]$ et pour n tel que

$$2^{n-1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{3\log(10)}{\log(2)} = 10.96578.$$

Enfin $f(10) = 10f(0.1)$ et $f(100) = 100f(0.01)$. Avec $n = 11$, on obtient les résultats suivants :

x	0.01	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	2	3	10	100
$f(x)$	0.262	0.425	0.520	0.665	0.787	0.897	1.456	1.863	4.250	26.216

- **b.**



INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée, *en* $x = 0$, de la fonction numérique d'une variable réelle f définie par :

$$f(x) = e^{x^2}\, Ln(1+x)$$, où Ln désigne le logarithme népérien.

2. Soit la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$$, où b et c sont des paramètres réels.

Pour quelle valeur de x, la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^3 + x - 2 = 0$

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation :

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

5. Calculer $I = \int_0^1 (Ln4 - Ln(1+x))\,dx$, où Ln désigne le logarithme népérien.

6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, où $u_0 = -1, u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ pour $n \geq 1$. Calculer $\lim_{n \to \infty} S_n$.

7. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

8. Au mois de janvier, les prix ont augmenté de 0,8 %. Sachant que sur les deux premiers mois (janvier et février), les prix ont augmenté de 1,808 %. Quelle est l'augmentation du mois de février ?

9. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x^3 + 3y = 4 \\ x^2 - 2y = -1 \end{cases}$$

10. Dans une épreuve scolaire nationale, le premier groupe d'élèves composé de 120 candidats a obtenu une moyenne égale à 8,20, le second groupe composé de 80 candidats une moyenne de 13,10 et enfin le troisième groupe formé de 100 candidats une moyenne de 9,68. Quelle est la moyenne nationale ?

Exercice n° 2

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f définie sur R^{+*} par :

$$f(x) = \frac{Ln\, x}{x}$$, où Ln désigne le logarithme népérien.

2. Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

3. Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^e f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + z = 2 \\ x + 2y + 3z = \frac{13}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 4

Soient a et b deux paramètres réels strictement positifs tels que $b < a$.

On considère la fonction numérique d’une variable réelle définie par :

$$f(x) = ax^2 + (1-x)^2 b.$$

1. Déterminer, s’il existe, le minimum de cette fonction.

2. Trouver a et b tels que le minimum de f soit égal à 2/3 et leur somme à 3.

3. Déterminer le nombre de points d’intersection entre le graphe de f et le graphe de la fonction g définie par : $g(x) = \alpha x$, selon les valeurs du paramètre réel strictement positif α.

4. Montrer que f admet un axe de symétrie.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x^2)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f (on précisera l’allure du graphe au voisinage de l’origine).

2. Calculer $I = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   - Montrer que cette suite est bien définie.
   - Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

Exercice n° 6

On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x. On définit alors la fonction numérique f par : $f(x) = xE(x)$.

1. Etudier la continuité de f.

2. Etudier la dérivabilité de f.

3. Calculer $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

Exercice n° 7

On considère la fonction f définie sur $R^{+*} \times R^{+*}$ par $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs, α et β étant des paramètres réels strictement positifs.

1. Pour y fixé, on pose $g_y(x) = f(x, y)$. Etudier les variations de g_y selon les valeurs de α et donner l'allure de son graphe.

2. On suppose que pour tout couple (x, y) de $R^{+*} \times R^{+*}$, on a : $ax + by \leq r$, où a, b et r sont des réels strictement positifs. Résoudre le problème $\underset{x}{Max}\, f(x, y)$ (maximum de f en x).

3. Interpréter le problème d'optimisation précédent.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En quoi certains pays africains peuvent-ils constituer un effet d'entraînement pour tout le continent africain ? Vous prendrez des exemples comme l'Afrique du Sud ou d'autres pays de votre choix.

Sujet n° 2

Que vous inspire l'élection de Barack Obama comme Président des Etats-Unis ?

Sujet n° 3

Quels sont les aspects de la crise financière et économique mondiale actuelle qui vous ont le plus frappé ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, donnée par

$$f(x) = \frac{ax^4}{(b+cx)^3},$$

où a, b et c sont des constantes réelles non nulles.

1. Quelles relations doivent satisfaire les constantes a, b et c pour que le graphique de la fonction f admette la droite $y = x - 3$ comme asymptote ? On supposera dans la suite de l'exercice que ces relations sont satisfaites.
2. Déterminer le domaine maximal de définition E de la fonction f et l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 2. Soient x_0 et a deux nombres réels strictement positifs. On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **A.** Dans la première partie de l'exercice, nous allons considérer le cas $x_0 \geq a$.
  1. Montrer que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$.
  2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  3. En déduire que la suite est convergente et trouver sa limite.
- **B.** Nous considérons maintenant le cas $x_0 < a$.
  1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  2. Étudier la monotonie de la suite.
  3. Peut-on en déduire que la suite est convergente ? Si la réponse est positive, trouver la limite.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, dont l'expression est

$$f(x) = \max(\sin(x), \lambda + \cos(x)),$$

où λ est un paramètre réel. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de λ telles que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique et donner la période.
2. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et à valeurs réelles, donnée par $g(x) = \lambda + \cos(x) - \sin(x)$. Montrer que la fonction g a un minimum et un maximum dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. En déduire que $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
3. Pour $\lambda \leq -\sqrt{2}$ ou $\lambda \geq \sqrt{2}$, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
4. Pour $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$, montrer qu'il existe un nombre x_0, $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$, tel que $g(x_0) = 0$. Étudier la dérivabilité de f en x_0.
5. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Les parties **A.** et **B.** sont indépendantes.

- **A.** Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes donnés par $z_1 = a + bi$ et $z_2 = \frac{1-\overline{z}_1}{1+\overline{z}_1}$, où a et b sont des réels et $\overline{z}_1$ désigne le conjugué du nombre complexe z_1.
    1. Écrire le nombre z_2 sous la forme $z_2 = m + ni$, avec m et n des réels à déterminer.
    2. Déterminer aussi les parties réelles et imaginaires des nombres complexes $(z_1 - z_2)$ et z_2^2.
    3. Trouver les nombres complexes z_1 tels que $(z_1 - z_2)$ et z_2^2 soient des nombres réels.
- **B.** Considérons les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, données par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

    1. Calculer les fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$ définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
    2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5. On sait que, dans une population donnée, une personne a une certaine maladie M avec la probabilité $\mathbb{P}(M) = 0,03$. On considère un groupe de 100 sujets pris au hasard dans la population. L'état de maladie d'une personne est supposé indépendant de celui des autres personnes.

1. On s'intéresse d'abord à la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans ce groupe de 100 sujets. Écrire cette probabilité à l'aide d'une variable aléatoire X.
2. Quelle loi suit cette variable aléatoire X ? Pour k un entier positif, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$, en précisant quelles sont les valeurs possibles de k.
3. Notons par F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Calculer $F(2)$.
4. En déduire la probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans le groupe de 100 sujets.
5. Calculer aussi le nombre moyen des personnes présentant la maladie M dans le groupe de 100 sujets.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Mihaly Csikszentmihalyi dont le titre est « Mieux vivre en maîtrisant votre énergie psychique » paru aux éditions Réponses chez Robert Laffont en février 2005. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.

Bienfaits et risques des loisirs

Il semble un peu ridicule d'affirmer que le temps libre constitue un problème parce que nous n'avons pas appris à l'employer intelligemment. C'est pourtant une inquiétude fréquemment exprimée depuis le milieu du XXe siècle. Pour diverses raisons, nous en sommes arrivés à dire que le temps libre était l'une des aspirations les plus fortement ancrées dans l'homme. Le travail apparaît comme un mal nécessaire et l'absence de toute activité comme la voie royale vers le bonheur. On pense généralement que profiter de son temps libre ne nécessite aucun savoir-faire, que tout le monde en est capable.

Or les faits prouvent le contraire : il est plus difficile de bien profiter de ses loisirs que de son travail. En soi, le temps libre ne rend pas la vie plus belle, à moins que l'on ne sache en tirer parti, et cela ne s'apprend pas tout seul.

A la fin du XIXe siècle, le psychanalyste hongrois Sàndor Ferenczi remarquait déjà que le dimanche, ses patients avaient des crises d'hystérie et de dépression plus nombreuses que les autres jours de la semaine. Il a appelé ce syndrome « névrose dominicale ». Depuis, on a constaté que les troubles mentaux se manifestent plus fréquemment pendant les vacances et les jours fériés. La retraite pour ceux qui se sont fortement identifiés à leur travail annonce souvent une période de dépression chronique.

Nos propres recherches avec la méthode ESM (1), nous ont permis de constater que même la santé physique s'améliore dès que la personne est tendue vers un but. Pendant les week-ends, la solitude et le désœuvrement révèlent plus de symptômes qu'à l'ordinaire.

Tous ces éléments tendent à prouver que l'individu moyen est mal équipé pour l'oisiveté. Sans but, sans la présence de ses semblables, il perd motivation et concentration. Son esprit s'évade et la plupart du temps, il finit par ruminer des problèmes insolubles, facteurs d'anxiété. Afin d'éviter d'en arriver là, la plupart des gens recourent à des stimulations qui limitent l'entropie psychique (2). Sans en être nécessairement conscients, ils recherchent tout ce qui est susceptible de faire barrage à l'anxiété : regarder la télévision, s'adonner au jeu, multiplier les rencontres sexuelles, se saouler ou se droguer. Ce type de stratégies qui apaise rapidement le chaos de la conscience, ne laisse la plupart du temps qu'un vague sentiment d'insatisfaction.

De toute évidence, l'évolution de notre système nerveux l'a rendu capable de répondre aux signaux extérieurs, mais n'est pas allée jusqu'à l'adapter à de longs intervalles de temps dénués d'obstacles ou de dangers.

Au cours de l'Histoire, peu de gens ont appris à structurer leur énergie psychique par eux-mêmes, de l'intérieur. Dans ces bienheureuses sociétés où les hommes avaient beaucoup de temps libre, des pratiques culturelles élaborées étaient mises en place pour occuper l'esprit. Cycles complexes de rituels, cérémonies, danses et tournois pouvaient durer plusieurs jours ou plusieurs semaines – les Jeux Olympiques, notamment, qui commencèrent à l'aube de notre Histoire. Et si tous les villages n'offraient pas des activités religieuses ou artistiques, ils permettaient au moins de se livrer à de longues et joyeuses palabres ; assis sous le plus bel arbre de la place du village, les hommes qui n'avaient rien d'autre à faire fumaient la pipe, mâchonnaient des feuilles ou des fruits légèrement hallucinogènes tout en discutant de sujets divers.

…/… Ces méthodes permettent effectivement de limiter le chaos dans la conscience, mais jusqu'à un certain point seulement, mais elles contribuent rarement à améliorer la qualité de l'expérience vécue. Comme nous l'avons vu plus haut, les êtres humains se sentent mieux lorsqu'ils s'appliquent à relever un défi, résoudre un problème ou découvrir quelque chose de nouveau.

La plupart des activités qui produisent le flux (3) se définissent par un but clair, des règles précises et une rétroaction immédiate – données extérieures qui concentrent l'attention et font appel au savoir-faire.

Or, dans le domaine des loisirs, ces conditions sont justement celles qui manquent le plus souvent. Certes, les gens qui s'adonnent à un sport, à une activité artistique ou à un violon d'Ingres y retrouvent les éléments indispensables au flux. Mais la simple situation de liberté, quand rien de particulier ne sollicite l'attention, provoque le contraire de l'expérience optimale : l'entropie psychique qui procure un sentiment d'indifférence et d'apathie.

Toutes les activités de loisirs ne se ressemblent pas. On peut déjà établir une différence entre les loisirs actifs et les loisirs passifs dont les effets psychologiques ne sont pas les mêmes. Les adolescents américains par exemple, ont des expériences-flux (définies comme des défis importants requérant un savoir-faire maximal) environ 13% du temps où ils regardent la télévision, 34% du temps où ils font quelque chose qu'ils aiment et 44% du temps où ils jouent ou font du sport.

Cela suggère que les violons d'Ingres ont deux fois et demie plus de chance de provoquer un état de plaisir intense que la télévision, les jeux et les sports à peu près trois fois plus. Pourtant, ces mêmes adolescents passent au moins quatre fois plus de temps à regarder la télévision qu'à se livrer à leur activité favorite. Et la proportion est la même chez les adultes.

Pourquoi passons-nous quatre fois plus de temps à faire quelque chose qui a deux fois moins de chances de nous donner du plaisir ?

Quand nous posons la question aux participants à nos études, une explication cohérente commence à se dessiner. L'adolescent type admet qu'il est plus heureux en faisant de la bicyclette, une partie de basket-ball ou en jouant du piano qu'en traînant avec ses copains ou en regardant la télévision.

Mais, organiser une partie de basket demande du temps – il faut se changer, réunir l'équipe. Avant d'éprouver du plaisir en jouant du piano, il faut faire au moins une demi-heure d'exercices ennuyeux. Autrement dit, chacune des activités productrices de flux nécessite un investissement de départ avant d'être gratifiante. Il faut commencer par s'échauffer avant de goûter au plaisir d'une activité complexe. Quand on se sent trop fatigué, anxieux ou paresseux pour franchir l'obstacle préliminaire, il faut se contenter d'activités moins agréables mais plus accessibles.

C'est là qu'interviennent les activités de loisirs passifs. Traîner avec des copains, lire un livre facile ou allumer un téléviseur n'implique pas une dépense d'énergie préalable importante et n'exige ni savoir-faire ni concentration. C'est pourquoi la consommation de loisirs passifs devient trop souvent l'option principale des adolescents, mais également des adultes.

Il apparaît dans nos études que les loisirs actifs ou sociaux – sports et jeux, violons d'Ingres, fréquentation des amis – procurent plus d'expériences-flux que les activités solitaires et moins structurées – réfléchir, écouter de la musique, regarder la télévision.

On constate également que les activités productrices de flux, plus difficiles, plus exigeantes, déclenchent parfois l'anxiété, alors que les trois activités passives la provoquent rarement ; elles contribuent au contraire à un état de relaxation et d'apathie.

En consacrant son temps libre à des loisirs passifs, on n'éprouvera pas de grandes satisfactions, mais on évitera aussi de trop s'impliquer. C'est apparemment la solution qui plaît au plus grand nombre.

Je ne prétends pas que la relaxation soit mauvaise en soi. Tout le monde a besoin de se détendre, de lire n'importe quoi, de rester vautré sur un canapé les yeux dans le vide ou fixés sur un écran de télévision. Comme pour tous les autres aspects de l'existence, c'est une question de dosage.

Les loisirs passifs ne posent problème que s'ils constituent la principale – ou l'unique – forme de loisir. Car avec le temps, ils finissent par avoir des conséquences décisives sur la qualité de la vie dans son ensemble. Les gens qui passent leur temps libre à jouer de l'argent, par exemple, peuvent se retrouver prisonniers d'une habitude qui interfère avec leur métier, leur famille et finalement leur propre bien-être. Ceux qui regardent la télévision plus souvent que la moyenne ont aussi tendance à avoir des métiers moins intéressants et des relations médiocres.

Une vaste étude réalisée en Allemagne a montré que plus les individus lisaient des livres, plus ils avaient d'expériences-flux, alors que ceux qui regardaient la télévision disaient le contraire.

De telles corrélations n'impliquent pas, bien sûr, que l'habitude des loisirs passifs détermine la médiocrité de l'emploi, des relations, etc. Il est plus probable que le lien causal soit inverse : les solitaires exerçant des métiers sans intérêt consacrent volontiers leur temps libre à des loisirs passifs. Ou bien : ceux qui ne trouvent pas à vivre d'expérience optimale se tournent vers des activités faciles.

Mais, dans la vie, la causalité est généralement circulaire : ce qui a commencé par être un effet devient finalement une cause. Un parent abusif peut obliger son enfant à adopter un système de défense fondé sur l'agressivité réprimée ; lorsque l'enfant a grandi, c'est ce style de défense qui risque de l'inciter à devenir lui-même un parent abusif.

De la même façon, l'habitude des loisirs passifs n'est pas simplement l'effet de problèmes préalables, mais devient à son tour une cause qui coupe l'individu des choix qu'il aurait pu faire pour améliorer sa vie.

.../… Il n'est pas nécessaire d'avoir une personnalité extraordinaire pour occuper son temps libre de façon créative. Tous les arts et artisanats traditionnels – chansons, tissage, poterie, sculpture, qui confèrent à chaque culture son cachet propre – sont nés grâce à la volonté de gens ordinaires d'exprimer leur savoir-faire pendant les heures qui n'étaient pas consacrées au labeur.

On a du mal à imaginer ce que serait notre monde si nos ancêtres s'étaient contentés de loisirs passifs au lieu de voir dans leur temps libre une occasion d'explorer le savoir et la beauté.

Actuellement, environ 7% des énergies non renouvelables que nous utilisons – électricité, essence, papier et produits métalliques – servent essentiellement aux loisirs. Construction et entretien de terrains de golf, impression de magazines, trajets en avion vers des destinations de vacances, production et distribution d'émissions de télévision, fabrication et utilisation de hors-bord et de scooters des mers épuisent une bonne partie des ressources de notre planète.

Et il semble ironiquement que le bonheur et la satisfaction que nous retirons de nos loisirs n'aient aucune relation – ou alors une relation négative – avec la quantité d'énergie matérielle consommée.

Les activités qui requièrent un savoir-faire, des connaissances ou des émotions, c'est-à-dire notre énergie psychique, sont tout aussi gratifiantes que celles qui nécessitent des équipements lourds et une source d'énergie extérieure. S'entretenir avec quelqu'un, jardiner, lire de la poésie, travailler bénévolement ou apprendre quelque chose de nouveau n'épuise aucune ressource naturelle et donne au moins dix fois plus de plaisir que des activités qui consomment dix fois plus d'énergie.

De même que la qualité d'une vie individuelle dépend dans une large mesure de l'utilisation du temps libre, la qualité d'une société résulte de la manière dont ses membres occupent leurs loisirs.

Les quartiers riches peuvent donner une impression de fadeur déprimante parce qu'on se dit que derrière ces splendides façades dressées sur des pelouses impeccables personne ne fait rien d'intéressant.

Dans certains pays, même en parlant avec l'élite de la société, on a l'impression qu'en dehors de l'argent, de la famille, de la mode, des vacances et des commérages, il n'y a pas grand-chose qui retienne l'attention des gens.

A l'inverse, dans d'autres régions du monde, on trouve encore des retraités amoureux de la poésie classique qui collectionnent de vieux livres, des fermiers qui jouent d'un instrument de musique ou écrivent l'histoire de leur village, préservant ainsi les plus belles créations du passé et les enrichissant.

Nous avons vu que les habitudes de loisirs au niveau social et au niveau personnel agissent autant comme causes que comme conséquences. Lorsque le style de vie d'un groupe social devient obsolète, lorsque le travail se transforme en une routine ennuyeuse et que les responsabilités de la communauté perdent leur signification, on peut prévoir que les loisirs vont prendre une importance accrue.

Et si une société devient trop dépendante de ses distractions, on peut prévoir qu'elle n'aura plus assez d'énergie psychique pour relever les défis technologiques et économiques qui ne vont pas manquer de se présenter.

Il peut paraître contradictoire de signaler les dangers de l'industrie des loisirs à une époque où elle est si florissante aux Etats-Unis. Musique, cinéma, mode et télévision rapportent des masses de devises du monde entier. Les boutiques de vidéo poussent comme des champignons à tous les coins de rue et réduisent le nombre de chômeurs. Nos enfants prennent pour modèles des célébrités médiatiques, et notre esprit déborde d'informations sur les faits et gestes des stars du cinéma ou du sport.

Comment toutes ces belles choses pourraient-elles être nuisibles ? Si nous les évaluons du seul point de vue financier, il n'y a rien à redire. Mais si nous tenons compte des conséquences à long terme du consumérisme pratiqué par les jeunes générations « accros » à des loisirs passifs, il y a effectivement lieu de s'inquiéter.

Comment éviter le danger que constitue la polarisation de nos vies autour d'un travail dénué de signification parce que forcé et de loisirs dénués de signification parce que inutiles ?

L'une des issues possibles nous est indiquée par l'exemple des individus créatifs évoqués précédemment.

Pour eux, travail et loisirs sont indissociables, comme ils le sont pour les membres de certaines communautés traditionnelles. Mais les individus créatifs ne sont pas enfermés dans une époque révolue. Ils mettent à profit les connaissances héritées du passé et celles du présent pour inventer une meilleure façon d'être dans le futur.

Dans la mesure où nous pouvons nous inspirer de leur exemple, il n'y a rien à craindre des loisirs. Le travail lui-même devient un plaisir et quand on a besoin de s'arrêter, le temps libre peut être une véritable recréation au lieu d'un abrutissement programmé.

Si le métier qu'on exerce ne peut être amélioré, il faut faire de son temps libre une réelle occasion de vivre des expériences optimales – d'explorer son être et tout ce qui l'entoure.

Par chance, le monde regorge de choses intéressantes à faire. Les seuls obstacles sont le manque d'imagination ou d'énergie. Sans cela, chacun d'entre nous est capable d'être poète, musicien, inventeur, explorateur, savant amateur, artiste ou collectionneur.

(1) Experience Sampling Method qu'on peut traduire : « échantillons de vécu » est la méthode scientifique utilisée par l'auteur sur un large échantillon de personnes pour réaliser son étude.
(2) entropie : dégradation, perte de l'énergie
(3) flux : moments exceptionnels - plaisir intense

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée est égale à $f^{'}(x) = 2xe^{x^2}\, Ln(1+x) + \dfrac{e^{x^2}}{1+x}$ et $f^{'}(0) = 1$.

2. Il faut que la dérivée seconde soit nulle pour obtenir un point d'inflexion et qu'elle change de signe :

   $f^{"}(x) = 6x \; - 6 = 0$, d'où $x = 1$.

3. $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$, d'où $x = 1$ car $(x^2 + x + 2) \neq 0$.

4. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4 = 0$, d'où $x = 1$ avec une multiplicité d'ordre 4.

5. $I = Ln4 - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = Ln4 - \left[xLn(1+x)\right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}dx = Ln2 + \left[x - Ln(1+x)\right]_0^1 = 1$.

6. $\underset{n \leftarrow \infty}{Lim} S_n = -1 + \underset{n \to \infty}{Lim} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = -1 + 2 = 1$.

7. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ est définie par :

   $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, soit ici 7/3.

8. Si i désigne le taux d'inflation de février, on doit avoir :

   $(1 + 0{,}008)(1 + i) = 1{,}01808$, soit $i = 1\%$.

9. Par combinaison des deux lignes, on obtient :

   $2x^3 + 3x^2 - 5 = (x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 0,$ d'où $x = y = 1$, car $(2x^2 + 5x + 5) \neq 0.$

10. La moyenne nationale est égale à : $\dfrac{(8{,}2 \times 120) + (13{,}1 \times 80) + (9{,}68 \times 100)}{(120 + 80 + 100)} = 10$.

Exercice n° 2

1. La dérivée de f est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{1-Ln\,x}{x^2}$, cette fonction est croissante sur l'intervalle $]0,e]$, décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$ et nulle pour $x=e$.

2. La dérivée seconde de f est égale à : $f^{''}(x)=\dfrac{(-3+2Ln\,x)}{x^3}$ et cette dérivée seconde s'annule pour $x=e\sqrt{e}$ et change de signe au voisinage. Le point de coordonnées $(e\sqrt{e},3/2e\sqrt{e})$ est donc un point d'inflexion pour cette fonction.

3. On obtient directement $I=\int_1^e f(x)\,dx=\left[\dfrac{(Ln\,x)^2}{2}\right]_1^e=1/2$.

Exercice n° 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+z=2 \\ x+2y+3z=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

En combinant la première et la troisième ligne, on obtient : $z=x+\dfrac{1}{2}$, puis en remplaçant dans les deux premières équations; $xy+x=\dfrac{3}{2}$ et $2x+y=\dfrac{5}{2}$, d'où $-4x^2+7x-3=0$. On obtient alors les solutions suivantes :

$$(x,y,z)=(1,1/2,3/2)\text{ ou }(3/4,1,5/4).$$

Exercice n° 4

1. Cette fonction f est strictement convexe (dérivée seconde strictement positive), elle admet un minimum unique en la valeur qui annule la dérivée première.

$f'(x)=2ax-2(1-x)\;b=0$ pour $x=\dfrac{b}{a+b}$ et le minimum est égal à $f(\dfrac{b}{a+b})=\dfrac{ab}{a+b}$

2. On a $\frac{ab}{a+b}=2/3$ et $a+b=3$. Il s'agit donc de trouver deux nombres connaissant leur produit et leur somme. On trouve $b=1$ et $a=2\,(b<a)$.

3. Les points d'intersection sont déterminés par l'équation : $f(x)=g(x)$ ou encore $ax^2+(1-x)^2b=\alpha x$, ce qui revient à résoudre l'équation : $(a+b)x^2-(\alpha+2b)x+b=0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta=(\alpha+2b)^2-4b(a+b)=\alpha^2+4\alpha b-4ab$.

Si $0<\alpha<-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a deux points d'intersection,

Si $\alpha=-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a un seul point d'intersection (la droite est tangente à la parabole),

Si $\alpha>-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, pas d'intersection entre les deux graphes.

4. Montrons que l'axe vertical qui passe par le minimum de la fonction est un axe de symétrie.

Soit $X=x-\frac{b}{a+b}$, la fonction devient $f(x)=f(X+\frac{b}{a+b})=(a+b)X^2+\frac{ab}{a+b}$ et cette fonction est paire en *X*.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x}$

1. On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus $\underset{x\to 0}{Lim}\,f(x)=\underset{x\to 0}{Lim}\frac{x^2}{x}=0$, on peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0)=0$.

La dérivée de f est égale à $f'(x)=\frac{2x^2-(1+x^2)Ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$.

ou encore $2(t-1)-tLnt=0$ en posant $t=1+x^2$, $t\geq 1$.

Soit $z(t)=2(t-1)-tLnt=0$, $z'(t)=1-Lnt$ qui est nulle pour $t=e$.

On trouve $z(e)=e-2>0$ et par exemple $z(e^2)=-2<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur t_0 dans l'intervalle $\left]e,e^2\right[$ qui annule $z(t)$. Soit $x_0=\sqrt{t_0-1}$. La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]0,x_0\right[$ et décroissante sur $\left]x_0,+\infty\right[$.

La fonction est croissante sur l'intervalle $\left]0,\sqrt{e-1}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{e-1},+\infty\right[$.

2. $I = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 Ln(1+x^2)\, dx = \left[x\, Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = Ln2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

On obtient :

$$I = Ln2 - 2 + 2\left[Arctgx\right]_0^1 = Ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel *n* strictement positif.

On vérifie facilement par récurrence que $u_n > 0$ pour tout *n*.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{Ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$,

La suite (u_n) étant minorée et décroissante, elle converge vers une limite unique l solution de l'équation $l = f(l)$, car f est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où $l = 0$

Exercice n° 6

On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x. On définit alors la fonction numérique f par : $f(x) = x\,E(x)$.

1. $E(x)$ étant constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, où *n* est un entier. Elle est continue et dérivable sur $R - Z$. Donc f est également continue et dérivable sur $R - Z$. Les questions ne se posent qu'aux valeurs entières.

Pour $x = n$, $f(x) = n^2$ et $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} x(n-1) = n(n-1) \neq f(n)$ si $n \neq 0$.

En conclusion f est continue seulement en $x = 0$ parmi les valeurs entières.

2. D'après la question précédente, la dérivabilité ne se pose qu'en zéro. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(f(x) - f(0))}{x} = -1 \neq f(0) = 0$, donc f n'est pas dérivable à l'origine.

3. $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} x\, dx + 0 + \int_{1}^{2} x\, dx = 1/2 + 3/2 = 2$

Exercice n° 7

On considère la fonction f définie sur $R^{+*} \times R^{+*}$ par $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs, α et β étant des paramètres réels strictement positifs.

1. On obtient : $(g_y)^{'}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta}$. La dérivée étant strictement positive, la fonction est strictement croissante. Elle est convexe si $\alpha > 1$, concave pour $0 < \alpha < 1$ et constante si $\alpha = 1$.

2. Comme la fonction f est croissante, son maximum est atteint pour la plus grande valeur possible de x qui vérifie la contrainte $ax + by \leq r$, donc pour $x = \frac{r - by}{a}$

Ce maximum est égal à $(\frac{r - by}{a})^{\alpha} y^{\beta}$

3. On peut considérer que x et y correspondent à deux produits. L'individu cherche à maximiser sa consommation en x (quitte à diminuer sa consommation en y, sans être nulle) sans dépasser son revenu (r) disponible. La fonction correspond à une fonction de Cobb-Douglas.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

1. Le graphique de la fonction f admet la droite $y = x - 3$ comme asymptote si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-3) = 0.$$

À partir de la première limite nous obtenons

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{(b+cx)^3} = \frac{a}{c^3}$$

et

$$-3 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{c^3x^4}{(b+cx)^3} - x \right) = -3\frac{b}{c}.$$

La seconde limite fournit les mêmes relations. En conclusion, les constantes a, b et c doivent satisfaire les relations

$$a = c^3 \text{ et } b = c.$$

2. On en déduit que l'expression de la fonction est

$$f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}, \text{ pour tout } x \in E = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

3. Comme

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty,$$

le graphique de f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale. La dérivée de la fonction f est

$$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$$

et nous avons le tableau de variation suivant :

x	-∞		-4		-∞	-1			0		+∞
$f'(x)$		+	0	-		|		-	0	+	
$f(x)$	-∞	↑	-256/27	↓	-∞	|	+∞	↓	0	↑	+∞

Exercice 2

- **A.** Si $x_0 \geq a$.

1. Nous démontrons par récurrence que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} \geq 0$, donc $x_1 \geq a$. Ensuite, en supposant que $x_{n-1} \geq a$, nous avons

$$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \geq \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+x_{n-1}} = a.$$

2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} \leq 0$, car $(a - x_n) \leq 0$ et $x_n > 0$.
3. La suite étant décroissante et minorée, elle est par conséquent convergente. Notons par l_1 sa limite, $l_1 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous avons :

$$l_1 = \frac{2al_1}{l_1+a},$$

d'où on obtient $l_1 = 0$ ou $l_1 = a$. D'autre part, nous savons que $x_n \geq a > 0$, ce qui implique que $l_1 \geq a > 0$. Par conséquent, la limite recherchée est $l_1 = a$.

- **B.** Si $x_0 < a$.

1. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} < 0$, donc $x_1 < a$. En plus, nous avons $x_1 = \frac{2ax_0}{x_0+a} > 0$, donc $0 < x_1 < a$. Par récurrence on démontre que $0 < x_n < a$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} > 0$, car $(a - x_n) > 0$ et $x_n > 0$.
3. La suite étant croissante et bornée, elle est par conséquent convergente. Soit $l_2 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous obtenons $l_2 = 0$ ou $l_2 = a$. D'autre part, comme $0 < x_n < a$ et la suite est strictement croissante, nous en déduisons $l_2 = a$.

Exercice 3

1. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant périodiques de période 2π, la fonction f est périodique de période 2π. Par conséquent, on peut d'abord considérer la restriction de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
2. En résolvant l'équation $g'(x) = 0$, nous obtenons $-\sin(x) - \cos(x) = 0$, qui a les solutions $x_1 = 3\pi/4$ et $x_2 = 7\pi/4$ sur $[0, 2\pi]$. En tenant compte du fait que $g(0) = g(2\pi) = \lambda + 1$ et de la variation de g, nous obtenons que la fonction g a un minimum global $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2}$ et un maximum global $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2}$. Par conséquent, $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
3. Si $\lambda \leq -\sqrt{2}$, on a $g(x) \leq 0$, donc $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. Cette fonction est évidement dérivable sur $[0, 2\pi]$. Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, on a $g(x) \geq 0$, donc $f(x) = \lambda + \cos(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, cette fonction étant dérivable sur $[0, 2\pi]$.
4. Pour $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$, comme la fonction g est continue, avec $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$, $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2} < 0$ et $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2} > 0$, il en résulte par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x_0, $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$, tel que $g(x_0) = 0$. Par conséquent, sur l'intervalle $[3\pi/4, 7\pi/4]$ la fonction f a l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } 3\pi/4 < x < x_0, \\ \lambda + \cos(x), & \text{si } x_0 < x < 7\pi/4. \end{cases}$$

   Prouvons que la fonction f n'est pas dérivable en x_0. En effet, nous avons $f'_g(x_0) = \cos(x_0)$ et $f'_d(x_0) = -\sin(x_0)$, où f'_g et f'_d désignent les dérivées à gauche respectivement à droite de f. L'égalité $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ a lieu si et seulement si $\cos(x_0) = -\sin(x_0)$, c'est-à-dire si $x_0 = 3\pi/4$ ou $x_0 = 7\pi/4$, ce qui n'est pas possible car $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en x_0.
5. On conclut que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \leq -\sqrt{2}$ ou $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Exercice 4

- **A.**

  1. Nous avons

$$z_2 = \frac{1 - \overline{z}_1}{1 + \overline{z}_1} = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1 + a)^2 + b^2},$$

  donc

$$m = \frac{1 - a^2 - b^2}{(1 + a)^2 + b^2} \text{ et } n = \frac{2b}{(1 + a)^2 + b^2}.$$

  2. Nous obtenons

$$z_1 - z_2 = \frac{a[(1 + a)^2 + b^2] + a^2 + b^2 - 1 + (a^2 + b^2 - 1 + 2a)bi}{(1 + a)^2 + b^2}$$

et

$$z_2^2 = \frac{(1-a^2-b^2)^2 - 4b^2 + 4(1-a^2-b^2)bi}{[(1+a)^2+b^2]^2},$$

qui fournissent les parties réelles et imaginaires demandées.

3. Le nombre complexe $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire :

$$(a^2 + b^2 - 1 + 2a)b = 0. \quad (0.1)$$

De même, pour que le nombre complexe z_2^2 soit un nombre réel il faut que sa partie imaginaire soit nulle, ce qui implique

$$(a^2 + b^2 - 1)b = 0. \quad (0.2)$$

Nous devons résoudre le système formé par les équations (0.1) et (0.2). Si $b = 0$, les deux équations sont satisfaites et nous obtenons $z_1 = a$, avec a un réel quelconque. Si $b \neq 0$, alors de l'équation (0.2) on obtient $a^2 + b^2 = 1$, ce qui implique, en utilisant l'équation (0.1), que $a = 0$. À partir de l'équation (0.2) on en déduit que $b = 1$ ou $b = -1$, donc les valeurs possibles de z_1 dans ce cas sont $z_1 = i$ ou $z_1 = -i$.

- **B.**

1. Pour tout réel x nous avons $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$. Par conséquent, nous obtenons

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

D'autre part,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x) - 2)^2 = \begin{cases} 9, & \text{si } x < 0, \\ 4, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. La fonction $f \circ g$ est constante sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, donc elle est continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$. Comme

$$\lim_{x \to 2} f \circ g(x) = 1 \neq f \circ g(2) = 0,$$

on obtient que $f \circ g$ n'est pas continue en $x = 2$.

La fonction $g \circ f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, donc elle est continue sur ces deux intervalles. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g \circ f(x) = 9 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g \circ f(x),$$

donc la fonction $g \circ f$ n'a même pas limite en $x = 0$ et, donc, elle n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 5

1. Soit A l'événement $A = \{$trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans le groupe de 100 sujets$\}$ et X la variable aléatoire qui donne le nombre de sujets ayant la maladie M dans ce groupe de 100 personnes. Nous pouvons alors écrire

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2).$$

2. La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(100; 0,03)$, avec

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{100}^{k} 0,03^{k}(1 - 0,03)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 100.$$

3.

$$\begin{aligned} F(2) &= \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 0,97^{100} + 100 * 0,03 * 0,97^{99} + \frac{100 * 99}{2} * 0,03^{2} * 0,97^{98} \\ &= 0,4199. \end{aligned}$$

4. Nous calculons la probabilité demandée :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 0,5801.$$

5. Le nombre moyen des malades dans le groupe de 100 sujets est donné par

$$\mathbb{E}(X) = 100 * 0,03 = 3.$$

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par $u_n = n(e^{1/n} - 1)$.

2. Calculer $I = \int_0^1 (2x-1)^2 \, dx$

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ (x+2y)(x-y) = 28 \\ x > 0 \end{cases}$$

dans l'ensemble des nombres réels.

4. Trouver, dans R^3, un vecteur orthogonal au vecteur $u(1,2,3)$ et dans le plan d'équation : $x+y+z=0$.

5. Paul a 4 ans de plus que Pierre et 2 ans de moins que Jacques. A eux trois, ils totalisent 70 ans. Quel est l'âge de Pierre ?

6. Quelle est la dérivée de $x\,Arctgx$ au point $x=\pi/4$?

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.

b. Toute fonction continue est dérivable.

c. La dérivée d'une fonction dérivable est continue.

d. Il existe des fonctions définies sur tout R et continues en aucun point.

8. Un groupe d'entreprises possède 3 usines. Dans la première, le salaire moyen est de 100, dans la deuxième de 120 et dans la troisième de 90. Sachant que la moyenne des salaires dans ce groupe est de 104, qu'il y a 10 salariés dans la première usine et 20 salariés dans la deuxième, quel est l'effectif salarié de la troisième usine ?

9. Ecrire le nombre suivant x, ayant un développement décimal infini et périodique, sous la forme d'une fraction rationnelle : x = 2,356356356…

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour x>1, par $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Exercice n° 2

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f_n(x)=\frac{n^2x^2+2(n-1)x+1}{x+1}$$

1. Résoudre l'équation $f_n(x)=0$ selon les valeurs du paramètre réel n.

2. Montrer que l'on peut exprimer $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x)=a_nx+b_n+\dfrac{c_n}{x+1}$;

on explicitera les termes : a_n, b_n et c_n.

3. Soit $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Calculer I_0, I_1, I_2.

4. Calculer l'aire comprise entre les graphes de f_0 et f_1, et les axes verticaux d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{n}$

6. Tracer le graphe de la fonction f_1.

7. Montrer que le graphe de la fonction f_1 admet un point de symétrie.

Exercice n° 3

1. Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} Log(1+\frac{k}{n})$$

Exercice n° 4

Soit *f* une application numérique d'une variable réelle.

On rappelle que *f* est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombres réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

On dit que *f* est quasi-convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombres réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que toute fonction convexe est quasi-convexe.

2. Donner un exemple de fonction quasi-convexe et non convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, concave et non convexe.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

1. Etudier les variations de la fonction f.

2. Etudier la convexité de f.

3. Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x}{1+E(x)}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Etudier la continuité de f.

3. Soit g la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \in R - Q \end{cases}$$

Soit $h(x) = f(x) \times g(x)$. Etudier la continuité de h.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

"Permettre au mécanisme du marché d'être l'unique directeur du sort des êtres humains et de leur environnement naturel aurait pour résultat la démolition de la société."

Karl Polanyi (1886-1964), *La grande transformation*, 1944.

En quoi cette phrase du philosophe et historien de l'économie Karl Polanyi, vous paraît-elle pouvoir s'appliquer à la situation actuelle ?

Sujet n° 2

Face au changement climatique, quels rôles peuvent jouer les états africains dans la gestion durable des ressources naturelles et la préservation de l'environnement ?

Sujet n° 3

Les principaux pays émergents, Brésil, Russie, Inde et Chine (BRIC), auxquels on ajoute parfois l'Afrique du Sud et le Mexique, ont un poids croissant dans l'économie mondiale. Quels rôles peuvent jouer ces pays – en particulier, certains d'entre eux – dans le développement de l'Afrique ? Vous illustrerez votre propos d'exemples concrets.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de *f*.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ et interpréter le résultat.

Exercice n° 2

Soit la suite $(t_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

1. Calculer $t_n(\alpha)$ en fonction de n et selon les valeurs de α.

2. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} t_n(\alpha)$

3. Interpréter géométriquement $t_n(\alpha)$.

4. Soit la suite $(u_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n(\alpha))$ selon les valeurs de α.

5. Trouver un encadrement de la limite de $(u_n(\alpha))$ quand elle existe.

6. Interpréter géométriquement $u_n(\alpha)$.

Exercice n° 3

Deux assurances automobiles proposent chacune un contrat (*A* et *B*). On dispose des données suivantes :

- Un quart des conducteurs a choisi le contrat *A*. Un cinquième le contrat *B* (les autres conducteurs ayant souscrit des contrats dans d'autres compagnies).
- Lors d'une enquête sur les conducteurs, on constate que sur 1000 conducteurs responsables d'un accident de la route, 160 ont souscrit le contrat *A* et 120 le contrat *B*.

On choisit un conducteur au hasard dans la population et on note :

R = « le conducteur est responsable d'un accident »

et

C = « le conducteur a souscrit un contrat *A* ou *B* »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un contrat le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{Probabilité\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ autre\ contrat}{Probabilité\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ contrat\ A\ ou\ B}$$

Calculer λ pour chacun des deux contrats. Que peut-on en conclure ?

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n), notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$$

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

Problème

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle qui vérifie : $g(x+y)=g(x)+g(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels.

1. Montrer que g est impaire.

2. Calculer $g(nx)$ en fonction de n (entier naturel) et de $g(x)$.

3. Calculer $g(ax)$ en fonction de a (nombre rationnel) et de $g(x)$.

4. En supposant que g est continue, expliciter $g(x)$.

5. Soit f une application continue de R dans C (ensemble des nombres complexes) telle que :

$$f(x)=\exp(2\pi i g(x))$$

Montrer que $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels.

6. Calculer $f(0)$.

7. Montrer que f est dérivable.

8. Donner l'expression analytique de f.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Richard Branson dont le titre est : *« Du capitalisme à l'écologie… Ma petite philosophie »* paru aux éditions Scali en février 2008.

Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.

Lors de mes débuts dans la vie, les perspectives étaient moins incertaines qu'actuellement. Votre carrière était toute tracée et c'était souvent celle de votre père. La plupart des mères restaient à la maison. De nos jours, plus rien n'est sûr et la vie est un long combat. Si vous voulez arriver quelque part, vous devez faire des choix. La meilleure leçon que j'ai tirée de tout cela, c'est « Just do it ». Fais-le sans te poser de questions. Peu importe de quoi il s'agit, peu importent les difficultés apparentes. Comme l'a dit Platon : « Le début est la partie la plus importante de n'importe quel travail. »

Un voyage de plusieurs milliers de kilomètres commence toujours par le premier pas. Si vous tentez déjà d'apercevoir l'arrivée et cette immense distance qui vous en sépare, avec tous les dangers que vous devrez affronter, vous ne ferez peut-être jamais ce premier pas. Et peu importe ce que vous voulez réaliser dans votre vie, si vous ne faites pas ce premier effort, vous n'atteindrez jamais votre but. Alors faites le premier pas. Il y aura beaucoup de défis à relever. Parfois, vous vous retrouverez au tapis, mais à la fin, soyez sûr que vous réussirez. Bonne chance.

L'équipe de Virgin (1) m'a trouvé un surnom : « Dr Yes » (Dr Oui). Ils m'appellent ainsi car je ne dis jamais non. Je trouve toujours de meilleures raisons de faire les choses plutôt que de ne pas les faire. Mon credo est : « On s'en fout ! On le fait ! »

Je sais que beaucoup de gens disent « non » ou « je vais réfléchir », presque comme une réponse pavlovienne à toute question, qu'il s'agisse d'un petit problème ou d'un projet énorme et révolutionnaire. Peut-être sont-ils très prudents ou se méfient-ils des idées nouvelles, ou ont-ils simplement besoin d'un peu de temps pour réfléchir. Mais ce n'est pas ma façon de voir les choses. Si quelque chose me semble être une bonne idée, je vais dire « oui, pourquoi pas » puis voir comment on peut mettre ce projet en route. Evidemment, je ne dis pas oui à tout, mais qu'est ce qui est pire, commettre une erreur occasionnelle ou avoir l'esprit fermé et passer à côté d'opportunités ?

Je crois qu'il faut savoir utiliser et exploiter l'expérience des autres, c'est pourquoi j'aime travailler en équipe. Exploiter les énergies, c'est comme exploiter des ressources intellectuelles. Quel intérêt d'exploiter quelqu'un pour une tâche particulière si l'on ne tient pas compte de son expérience et de ses capacités ? C'est comme si on consultait des experts tout en ignorant leurs conseils.

J'ai également foi en mon instinct et en mes capacités à accomplir presque tout ce que je décide d'entreprendre. Si une idée ou un projet sont bons et valent la peine, s'il est humainement possible de les accomplir, je les envisagerai toujours sérieusement, même s'il s'agit d'un domaine tout nouveau pour moi ou qui ne m'a jamais effleuré l'esprit. Je ne dirai jamais : « Je ne peux pas le faire car je ne sais pas comment le faire. ». Je demanderai, je ferai des recherches, je trouverai un moyen. Regarder, écouter, apprendre, sont des choses que nous devrions faire tout au long de notre vie, pas seulement à l'école.

Et puis il y a toutes ces petites règles absurdes que quelqu'un a inventées pour des raisons obscures. Je me dis toujours que si on crée un panel ou un comité, ils trouveront toujours quelque chose d'inutile à faire. Le monde est plein de bureaucratie créée par des comités qui ont beaucoup trop de temps à perdre et un trop grand besoin de tout contrôler. Toute cette bureaucratie se traduit souvent par un jargon inutile et incompréhensible. Si je désire me lancer dans un projet sérieux ou juste pour le plaisir, je ne vais pas laisser des règles absurdes m'en empêcher. Je trouverai un moyen légal de passer outre et j'irai de l'avant. Je dis toujours à mes employés : « Si tu veux le faire, vas-y, fonce. » Tout le monde est gagnant. Le travail et l'équipe sont valorisés, et c'est Virgin qui bénéficie de leur mise en œuvre. Les gens ne démissionnent pas parce qu'ils sont mal payés, ils démissionnent car ils ne sont pas valorisés. Nombreuses sont les compagnies qui mettent leurs employés dans des cases ; si vous êtes standardistes, vous le resterez. Nous avons de l'estime pour nos employés et nous les encourageons à être novateurs.

Je ne crois pas que ces petits mots, « on ne peut pas » doivent vous arrêter. Si rien dans ce que vous avez déjà vécu ne vous montre comment atteindre votre but, trouvez un moyen inédit. Si vous voulez piloter un avion, dès que vous avez seize ans, foncez à l'aérodrome le plus proche et préparez le thé pour les pilotes. Gardez vos yeux ouverts. Regardez et apprenez. Pas besoin d'avoir été à l'école pour devenir un créateur de mode. Faites-vous embaucher par une entreprise de ce secteur pour passer le balai. Et puis gravissez les échelons.

Ma mère Eve est l'exemple parfait de cette attitude volontaire. Pendant la guerre, elle voulait à tout prix devenir pilote. Elle s'est rendue à l'aéroport d'Heston et a postulé pour un boulot. Ma mère qui était très jolie avait été danseuse. Elle était vraiment très féminine, mais ce n'était pas un obstacle pour elle. Elle a enfilé un gros blouson d'aviateur, a caché ses cheveux blonds sous une casquette de cuir et s'est efforcée de parler avec une voix grave. Et finalement, elle a obtenu le boulot qu'elle convoitait. Par la suite elle a appris à piloter et s'est même retrouvée chargée de la formation des jeunes pilotes, ceux-là même qui allaient combattre les Allemands aux commandes d'avions de chasse pendant la Bataille d'Angleterre.

Après la guerre, elle a voulu devenir hôtesse de l'air. A l'époque il fallait parler espagnol et avoir une formation d'infirmière. Mais ma mère a baratiné le veilleur de nuit qui a inscrit son nom sur la liste des candidates. Peu après, elle est devenue hôtesse de l'air. Elle ne parlait pas un mot d'espagnol et n'avait jamais été infirmière. Mais elle avait fait fonctionner ses petites cellules grises. Elle ne s'était pas dit : « Je ne peux pas. » Elle l'avait fait tout simplement.

Et ma mère n'est pas la seule personne de la famille qui s'est dit un jour : « on fonce. » Le célèbre explorateur, le capitaine Robert Scott, était le cousin de mon grand-père. C'était un homme d'un grand courage.

Il a organisé deux expéditions vers l'Antarctique. Son but était de devenir le premier homme à atteindre le pôle Sud. Les gens lui assuraient que c'était impossible. Mais lui était sûr du contraire : « Je peux le faire » a-t-il dit. Et il a presque réussi. Il a atteint le pôle Sud mais en deuxième position, juste derrière Roald Amundsen. Ce fut une très grande déception pour Scott. Il est mort pendant le trajet du retour. Quand j'entends dire qu'il n'y a pas de récompense pour les seconds, je pense à lui. Il est devenu célèbre en étant le deuxième homme à atteindre le pôle Sud. Il a aussi été le premier à survoler l'Atlantique en ballon, mais les gens ont oublié cet exploit.

J'ai lancé *Student magazine* à l'âge de quinze ans. J'étais encore à l'école et tout le monde soutenait que c'était irréalisable. J'étais trop jeune, disait-on, je n'avais aucune expérience. Mais j'ai voulu leur prouver qu'ils avaient tort. J'étais sûr que c'était possible. J'ai calculé avec soin le montant des investissements nécessaires. J'ai estimé les coûts du papier et de l'encre. Puis, j'ai calculé combien allaient me rapporter les ventes au numéro et les espaces publicitaires. Ma mère m'a donné 4 livres (environ 7 euros) pour acheter des timbres. Avec mon camarade de lycée, Jonny Gem, nous avons passé presque deux années pour envoyer des centaines de lettres pour essayer de vendre des espaces publicitaires. Nous tentions aussi d'obtenir des interviews de personnalités. Ecrire ce courrier et attendre les réponses, était bien plus drôle que les cours de latin. J'ai été bouleversé quand nous avons reçu notre premier chèque pour la vente d'un espace publicitaire : 250 livres (environ 350 euros), une somme, à nos yeux, faramineuse. Ma foi avait été récompensée.

Je vais m'attarder un peu sur ma première vraie aventure commerciale, le magazine *Student*, car il me semble que ma méthodologie était bonne et que c'est un bon exemple de mon état d'esprit fonceur. J'ai lancé *Student* à l'âge de quinze ans alors que j'étais encore scolarisé au pensionnat Stowe. Je ne l'ai pas fait dans le but de gagner de l'argent, mais pour le simple plaisir de publier un magazine. Je n'aimais pas les méthodes pédagogiques de mon école, l'actualité mondiale m'inquiétait et je voulais en parler. Une des raisons principales de la création du magazine était de pouvoir exprimer mon point de vue sur la guerre du Vietnam. En 1965, sous la présidence de Lyndon B. Johnson, un grand nombre de troupes américaines ont commencé à arriver, et les journaux décrivaient les bombardements de routes et de villes au nord du Vietnam. Des défoliants chimiques (2) étaient aspergés un peu partout depuis des avions. Tout cela semblait inutile et injustifié.

Comme bien d'autres entrepreneurs novices, je ne voyais pas mon idée comme un vrai business mais plutôt comme un projet politique sympathique et novateur. Pour moi, les hommes d'affaires travaillaient dans le centre ville, fumaient des gros cigares et portaient des costumes. Ça ne m'était même pas venu à l'esprit qu'il existait des hommes d'affaires de toutes sortes, car jusqu'à présent, ils suivaient généralement un chemin tout tracé. J'avais déjà essayé de me lancer dans les affaires en essayant de vendre des lapins, des perruches et des sapins de Noël. Pour lancer le magazine, il y a eu beaucoup de tâtonnements au départ ; il est vrai que je n'étais encore qu'un jeune lycéen. J'ai tout de même eu le réflexe de préparer un plan d'activités précis, la base de toute jeune entreprise. Le personnage de Charles Dickens dans *David Copperfield, Mr Micawber,* avait raison quand il a dit : « Revenu annuel, vingt livres sterling ; dépense annuelle, dix-neuf livres ; résultat : bonheur. Revenu annuel, vingt livres sterling ; dépense annuelle, vingt livres et six pence ; résultat : misère. » Mes parents étaient de bons gestionnaires de leurs revenus, je savais que ceux-ci devaient être supérieurs aux dépenses. Le profit devrait être le but principal de toute entreprise, même si l'on s'amuse à la mettre en œuvre. Un business sans profit est une prise de tête, une source de stress et une folie sur le plan fiscal.

(…/…) Chaque fois qu'une opportunité se présentait, nous la saisissions. Nous avons été les premiers à vendre des disques à moitié prix par correspondance. Nous avons annoncé ce premier service par un encart publicitaire dans *Student.* Lorsqu'une grève de la poste est venue contrarier notre projet, nous avons décidé de changer notre fusil d'épaule en renonçant à la vente par correspondance. Mais, il n'était pas question d'abandonner. Notre but était d'ouvrir des boutiques de disques. Une seule chose nous manquait : l'argent. Aussi nous avons demandé au propriétaire d'un magasin de chaussures de nous louer une partie de ses locaux inutilisés. Nous avons travaillé dur pour assurer la promotion de l'ouverture de notre nouvelle boutique. Elle est devenue un endroit « cool » fréquenté par de nombreux étudiants. Et cette première boutique a mené à l'ouverture d'une seconde puis d'une troisième. En très peu de temps, nous avons ouvert une boutique dans presque toutes les grandes villes d'Angleterre. Et je n'avais pas encore vingt ans. L'argent coulait à flot, mais il n'était pas question de nous endormir sur nos lauriers. Nous avions mis dans le mille, mais nous visions encore d'autres cibles.

L'un de mes plus grands buts était, comme le capitaine Scott, de vivre pleinement mon existence. Et quand, en 1984, on m'a proposé d'être le sponsor du navire qui allait tenter de décrocher le Ruban Bleu pour la Grande Bretagne, j'ai accepté d'emblée.

Le Ruban Bleu récompense le record de vitesse de traversée de l'Atlantique entre les Etats-Unis et l'Irlande. J'ai annoncé que je ferais partie de l'équipage et, dès lors, je me suis astreint à un entraînement rigoureux. Il n'y avait qu'un seul problème : mon épouse Joan attendait un enfant et j'avais promis d'être là le jour de la naissance. Mais la météo était idéale : si je renonçais à partir maintenant, je laissais tomber toute l'équipe.

J'ai demandé à Joan : « Qu'est-ce que je dois faire ? Fais-le : pars », m'a-t-elle répondu. Le bébé n'est pas attendu avant deux semaines. Tu seras rentré avant. »

Nous avons donc entamé la traversée, luttant contre les vagues à bord du *Virgin Atlantic Challenger*. A la fin du premier jour, on m'a annoncé que mon fils Sam était né. Nous avons sabré le champagne et poursuivi notre route. Le Ruban Bleu était dans la poche jusqu'à ce que nous soyons pris dans une violente tempête au large de l'Irlande. A moins de cent kilomètres de l'arrivée, nous avons été frappés par une vague géante. La coque du navire s'est brisée et nous avons fait naufrage. « SOS ! SOS ! SOS ! »

Nous étions en pleine mer, au milieu d'une tempête à bord d'un petit canot de sauvetage. Par chance, un bateau qui se dirigeait vers les Etats-Unis s'est détourné de sa route et nous a sauvés. Nous avions échoué dans notre première tentative pour décrocher le Ruban Bleu, mais le mot découragement ne fait pas partie de notre vocabulaire. Six ans plus tard, j'étais de retour avec le *Virgin Atlantic Challenger II*.

La course se passait bien jusqu'à ce que nous découvrions que de l'eau de mer s'engouffrait dans les réservoirs de carburant. Le moteur s'est arrêté. Nous avons passé des heures à nettoyer les réservoirs et à essayer de redémarrer les machines. La situation paraissait désespérée. A la fin, les membres de l'équipage pensaient qu'il fallait abandonner. Pour eux, c'était fini. Mais c'était notre dernière chance de gagner ce ruban. C'était maintenant ou jamais. Il fallait que je les persuade de ne pas abandonner. Je leur ai dit : « Allez, il faut le faire, on doit essayer. »

On avait tout tenté, nous avions les yeux rouges et nous étions épuisés. Nous avions tous le mal de mer. On détestait le navire, on détestait l'océan. On ne souhaitait qu'une chose : dormir pendant une semaine d'affilée.

« Il faut qu'on continue » ai-je crié, « Ok » m'ont-ils répondu, « on essaye une dernière fois. »

On ne sait trop comment nous sommes parvenus à redémarrer les machines et à poursuivre la traversée. Mais nous avions perdu tant de temps que continuer semblait bien inutile. Et pourtant, nous sommes parvenus à rattraper notre retard et finalement nous avons battu le record de deux heures et neuf minutes ! Une victoire sur le fil, mais une victoire !

(…/…) Chacun peut tirer profit de ces leçons. Peu importe ce que nous voulons être, peu importe ce que nous voulons faire, nous pouvons réussir. Alors, foncez et faites-le. Tout simplement.

(1) - Virgin : Groupe industriel créé par l'auteur.
(2) - Défoliants chimiques : Produits détruisant la végétation.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATICS

Exercice n° 1

1. $\underset{n}{Lim}\, u_n = \underset{n}{Lim}\, n(e^{1/n} - 1) = \underset{n}{Lim}\, n(1 + \frac{1}{n} - 1) = 1$.

2. $I = \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \left[\frac{(2x-1)^3}{6}\right]_0^1 = 1/3$

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ (x+2y)(x-y) = 28 \\ x > 0 \end{cases}$$

dans l'ensemble des nombres réels. On obtient $x = 6$ et $y = 4$ (On remarque que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$).

4. Trouver, dans R^3, un vecteur orthogonal au vecteur $u(1,2,3)$ et dans le plan d'équation : $x + y + z = 0$. Ce vecteur v(x,y,z) doit vérifier $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$. Par exemple v(1,-2,1).

5. Paul a 4 ans de plus que Pierre et 2 ans de moins que Jacques. A eux trois, ils totalisent 70 ans. Quel est l'âge de Pierre ? Pierre a 20 ans.

6. La dérivée de $xArctgx$ est égale à $Arctgx + \frac{x}{1+x^2}$ et au point $x = \pi/4$,

on trouve $1 + \frac{4\pi}{16+\pi^2}$.

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.

b. Toute fonction continue est dérivable.

c. La dérivée d'une fonction dérivable est continue.

d. Il existe des fonctions définies sur tout R et continues en aucun point.

Réponse (d), avec la fonction caractéristique des rationnels (par exemple).

8. Un groupe d'entreprises possède 3 usines. Dans la première, le salaire moyen est de 100, dans la deuxième de 120 et dans la troisième de 90. Sachant que la moyenne des salaires dans ce groupe est de 104, qu'il y a 10 salariés dans la première usine et 20 salariés dans la deuxième, quel est l'effectif salarié de la troisième usine ?

Soit x l'effectif salarié de la troisième usine. On doit avoir :

$$\frac{(100\times 10)+(120\times 20)+(90\times x)}{10+20+x}=104\text{, d'où } x = 20.$$

9. Ecrire le nombre suivant x, ayant un développement décimal infini et périodique, sous la forme d'une fraction rationnelle : $x = 2{,}356356356\ldots$

On a $1000x = 2356{,}356356\ldots$ et par différence : $999x = 2354$, d'où $x=\frac{2354}{999}$.

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour $x>1$, par $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

On a $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$, donc $F(x)=x-2Ln(x+1)+k$

Exercice n° 2

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f_n(x)=\frac{n^2x^2+2(n-1)x+1}{x+1}$$

1. Résoudre l'équation $f_n(x)=0$. Il faut résoudre $n^2x^2+2(n-1)x+1=0$.

Soit $\Delta^{'}=(n-1)^2-n^2=-2n+1$.

Si $n>1/2$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $n=1/2$, l'équation admet une racine double égale à 2.

Si $n<1/2$, l'équation admet deux racines : $x=\frac{1-n\pm\sqrt{\Delta^{'}}}{n^2}$

2. Montrer que l'on peut exprimer $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x)=a_nx+b_n+\frac{c_n}{x+1}$.

Par identification des polynômes, on obtient :

$$a_n=n^2, b_n=-n^2+2(n-1)\text{ et }c_n=n^2-2n+3.$$

3. Soit :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 a_n x + b_n + \frac{c_n}{x+1}\,dx = \left[a_n \frac{x^2}{2} + b_n x + c_n Ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{a_n}{2} + b_n + c_n Ln2 .$$

D'où $I_n = -\frac{n^2}{2} + 2(n-1) + (n^2 - 2n + 3)Ln2$

4. Calculer l'aire comprise entre les graphes de f_0 et f_1, et les axes verticaux d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Cette aire est égale à :

$$A = \int_0^1 \left| f_0(x) - f_1(x) \right| dx = \int_0^1 \left| -x - 1 + \frac{1}{x+1} \right| dx = 3/2 - Ln2$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{2n} = +\infty$

6. Tracer le graphe de la fonction f_1. On a : $f_1(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ et sa dérivée $f_1'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$ est nulle pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$. La fonction n'est pas définie pour $x = -1$.

Son graphe admet les droites d'équation $x = -1$ et $y = x - 1$ comme asymptotes.

La fonction est décroissante sur l'intervalle $\left]-1, -1+\sqrt{2}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right[$.

7. Montrer que le graphe de la fonction f_1 admet un point de symétrie. Ce point de symétrie correspond à l'intersection des deux asymptotes, à savoir le point de coordonnées (-1, -2). Avec le changement de variables : $x = X - 1$ et $y = Y - 2$, on obtient $Y = X + \frac{2}{X}$ qui est une fonction impaire.

Exercice n° 3

1. On a : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = -1/2 + Ln2$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} Log(1 + \frac{k}{n})$$

On a : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}Log(1+\frac{k}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}Log(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 xLn(x+1)\,dx$ (somme de Riemann).

Avec une intégration par parties, on retrouve l'intégrale précédente et :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}Log(1+\frac{k}{n}) = 1/4$$

Exercice° 4

Soit f une application numérique d'une variable réelle.

On rappelle que f est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

On dit que f est quasi-convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que toute fonction convexe est quasi-convexe.

Soit f une fonction convexe, on a :

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\, Sup(f(x), f(y)) + (1-\lambda)Sup(f(x), f(y))$ d'où $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$ et f est quasi-convexe.

2. Donner un exemple de fonction quasi-convexe et non convexe.

Par exemple, une fonction « convexe par morceaux » :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe et concave. Par exemple *Lnx.*

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

1. La dérivée de f est égale à : $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive, donc la fonction est croissante. Elle passe par les points : (0,1) et (1,e/2). Elle tend vers $+\infty$ à $+\infty$ (branche parabolique dans la direction oy) et vers 0 à $-\infty$ (asymptote horizontale).

En x=1, on a une tangente horizontale et un point d'inflexion.

2. La convexité de f s'étudie avec le signe de la dérivée seconde.

On peur remarquer que $f''(x)=e^x(v(x)+v'(x))$, où $v(x)=\dfrac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Le signe de f'' est celui de $v(x)+v'(x)$.

On obtient : $v(x)+v'(x)=\dfrac{(1-x)}{(1+x^2)^3}(-x^3+3x^2-5x-1)$

Ce polynôme d'ordre 3 est strictement décroissant sur R et s'annule pour une seule valeur α comprise entre -1 et 0.

La fonction f est donc convexe sur $\left]-\infty,\alpha\right]$ et $\left[1,+\infty\right[$, et concave entre α et 1.

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x)=\dfrac{x}{1+E(x)}$, où *E(x)* désigne la partie entière de *x*.

1. Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est définie pour $E(x)\neq -1$, donc pour $x\notin\left[-1,0\right[$.

2. Etudier la continuité de *f*.

Pour tout $x\in\left[n,n+1\right[\cap Df$, $E(x)=n$ et $f(x)=\dfrac{x}{1+n}$ est une fonction affine continue.

Pour x=n, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=1\neq f(n)=\dfrac{n}{n+1}$ et f n'est pas continue. En conclusion, f est continue sur $Df\cap(R-Z)$.

3. Soit g(x) la fonction indicatrice des nombres rationnels (*Q*), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \in R - Q \end{cases}$$

Soit $h(x) = f(x) \times g(x)$. Etudier la continuité de *h*.

La fonction *g* est définie sur *R* et continue en aucun point (densité des rationnels et des irrationnels dans *R*). Par conséquent *h* n'est continue en aucun point de *Df*.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de *f*.

On a aussi: $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. Cette fonction est définie sur $R^*-\{-1\}$. Sa dérivée est égale à : $f'(x)=-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ qui est nulle pour $x=-\frac{1}{2}$. La fonction est croissante pour $x<-1/2$ et décroissante pour $x>-1/2$.

2. Graphe de *f*.

Les deux axes et la droite d'équation $x=-1$ sont des asymptotes. La fonction admet un maximum local en $x=-\frac{1}{2}$, qui est égal à -4.

3. Calculer $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ et interpréter le résultat.

$$\int_1^x f(t)\,dt=\left[Ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^x=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+Ln2 \text{ et } \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt=Ln2$$

Cette limite correspond à l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe des x et la droite d'équation $x=1$.

Exercice n° 2

Soit la suite $(t_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha>0$, par :

$$t_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

1. Calculer $t_n(\alpha)$ en fonction de n et selon les valeurs de α .

On a, pour $\alpha \neq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1}\right)$, puis

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right).$$

Pour $\alpha = 1$, $t_n(\alpha) = Ln(n+1)$.

2. Calculer $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha)$.

Si $\alpha = 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$,

Si $\alpha > 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$,

Si $\alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$.

3. Interpréter géométriquement $t_n(\alpha)$.

$t_n(\alpha)$ correspond à l'aire comprise l'axe ox, le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n+1$.

4. Soit la suite $(u_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n(\alpha))$ selon les valeurs de α .

La fonction $f(k) = \frac{1}{k^\alpha}$ est positive, continue et décroissante. La suite $u_n(\alpha)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ existe, donc si et seulement si $\alpha > 1$.

5. Trouver un encadrement de la limite de $(u_n(\alpha))$ quand elle existe.

On suppose $\alpha > 1$.

Pour $k \le x \le k+1$, on a : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha}$ et par intégration : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \le \frac{1}{k^\alpha}$.

Puis par somation sur k de 1 à n, on obtient : $u_n(\alpha) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \le t_n(\alpha) \le u_n(\alpha)$. En notant $l(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))$ et par passage à la limite, on obtient :

$l(\alpha) - 1 \le \frac{1}{\alpha - 1} \le l(\alpha)$, d'où $\frac{1}{\alpha - 1} \le l(\alpha) \le \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ (on rappelle que $\alpha > 1$).

6. Interpréter géométriquement $u_n(\alpha)$

$u_n(\alpha)$ correspond à la somme des aires des rectangles sous le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ (à partir de x=1 avec un pas de sous division égal à 1).

Exercice n° 3

Deux assurances automobiles proposent chacune un contrat (*A* et *B*). On dispose des données suivantes :

- Un quart des conducteurs a choisi le contrat *A*. Un cinquième le contrat *B* (les autres conducteurs ayant souscrit des contrats dans d'autres compagnies).
- Lors d'une enquête sur les conducteurs, on constate que sur 1000 conducteurs responsables d'un accident de la route, 160 ont souscrit le contrat *A* et 120 le contrat *B*.

On choisit un conducteur au hasard dans la population et on note :

R = « le conducteur est responsable d'un accident » et,

C = « le conducteur a souscrit un contrat *A* ou *B* »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un contrat le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{Prob.\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ autre\ contrat}{Prob.\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ contrat\ A\ ou\ B}$$

Calculer λ pour chacun des deux contrats. Que peut-on en conclure ?

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{P(R\cap\overline{C})P(C)}{P(R\cap C)P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C})P(R)P(C)}{P(C)P(R)P(\overline{C})} = \frac{P_R(\overline{C})P(C)}{P_R(C)P(\overline{C})} = \frac{(1-P_R(C))P(C)}{P_R(C)(1-P(C))}$$

Pour le contrat A : $\lambda = \frac{(1-0{,}16)\times 0{,}25}{0{,}16\times(1-0{,}25)} \approx 1{,}75$

Pour le contrat B : $\lambda = \frac{(1-0{,}12)\times 0{,}2}{0{,}12\times(1-0{,}2)} \approx 1{,}83$

Les deux contrats ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises. On peut ajouter que ces deux compagnies d'assurance ont plutôt des assurés moins risqués que les autres (pour la première 16 % de responsables pour un quart de la population, et pour la deuxième 12% pour un cinquième de la population).

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) .

Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\,n}{n}$.

Problème

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle qui vérifie : $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

1. Montrer que g est impaire.
On a : $g(0) = g(0+0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$. Puis $g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = 0$, donc g est impaire.

2. Calculer $g(nx)$ en fonction de n (entier naturel) et de $g(x)$.
$g((n+1)x) = g(nx + x) = g(nx) + g(x)$ et par récurrence, $g(nx) = ng(x)$.

3. Calculer $g(ax)$ en fonction de a (nombre rationnel) et de $g(x)$.

Soit $a = \frac{p}{q}$. $pg(x) = g(px) = g(q \times \frac{p}{q}x) = qg(\frac{p}{q}x)$, donc $g(ax) = ag(x)$

4. En supposant que g est continue, expliciter $g(x)$.
D'après la question précédente, pour x=1, on a : $g(a) = ag(1)$. L'ensemble des nombres rationnels étant dense dans l'ensemble des réels, par passage à la limite (g est continue), on obtient : $g(x) = xg(1)$ pour tout réel x.

5. Soit f une application continue de R dans C (ensemble des nombres complexes) telle que :

$$f(x) = \exp(2\pi i g(x))$$

Montrer que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

On a :

$f(x+y)=\exp(2\pi i g(x+y))=\exp(2\pi i(g(x)+g(y)))=\exp(2\pi i g(x))\times\exp(2\pi i g(y))$
$f(x+y)=f(x)\times f(y)$

6. Calculer $f(0)$.

$f(0)=f(0+0)=f(0)^2$, donc $f(0)=0$ ou 1. Si $f(0)=0$, alors $f(x)=f(x)\times f(0)=0$ et *f* est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'expression de *f* (exponentielle). Donc $f(0)=1$

7. Montrer que *f* est dérivable.

Comme *f* est continue, elle admet une primitive *F*. $F(s)=\int_0^s f(x)dx$.

En intégrant la relation : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ par rapport à *x*, on obtient : $\int_0^s f(x+y)dx=f(y)\int_0^s f(x)dx$, puis $\int_y^{s+y} f(x)dx=f(y)\int_0^s f(x)dx$, donc $F(s+y)-F(y)=f(y)\times F(s)$.

On vérifie que $F(s)\neq 0$ pour *s* suffisamment petit car *f* est continue en 0 et *f*(0)=1. En effet, Pour $\varepsilon=1/2$, il existe $\alpha>0$, tel que $|s|<\alpha\Rightarrow|f(s)-1|<1/2$.

Si $|s|<1/2$, $|F(s)-s|=\int_0^s(f(x)-1)dx\leq\int_0^{|s|}|f(x)-1|dx\leq\int_0^{|s|}1/2=\frac{|s|}{2}$, d'où

$|s|=|F(s)-s+F(s)|\leq\frac{|s|}{2}+|F(s)|\Rightarrow 0<\frac{|s|}{2}\leq|F(s)|$ et $F(s)\neq 0$.

En conclusion, $\frac{F(s+y)-F(y)}{F(s)}=f(y)$ et *f* est dérivable.

8. Donner l'expression analytique de *f*.

On a : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$. En dérivant cette relation par rapport à *x*, puis pour *x*=0, on obtient : $f'(y)=f(y)\times f'(0)$. Les solutions de cette équation sont de la forme : $f(x)=k\exp(f'(0)x)$ et comme *f*(0)=1, *k*=1.

On a : $|f(x)|=1$ et $|\exp(f'(0)x|=\exp(\mathrm{Re}(f'(0))$. $f'(0)$ est un imaginaire pur que l'on peut écrire $f'(0)=2\pi i a$ et $f(x)=\exp(2\pi i a)$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=1$, la dérivée de : $x e^{x^2+3x}$

2. Calculer $I=\int_0^1 (x^2+\sqrt{x})\,dx$

3. Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{9}{4} \\ xy=6 \end{cases}$

4. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ en fonction de *n*.

5. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x^2-1}{x-2}<0$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et parallèle au vecteur de composantes (2, -1).

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle)?

a. Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné est continue sur cet intervalle.

b. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

c. Toute fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

d. Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné qui ne sont pas bornées.

8. Quel est le capital obtenu au bout de 3 mois pour un montant de 200 Euro placé au taux mensuel de 1% ?

9. Laquelle de ces assertions est exacte ?

a. Riemann (célèbre pour ces travaux sur l'intégrale) est né en 1926.

b. Cauchy (célèbre pour ces travaux sur les séries) est né en 1789.

c. Newton (qui partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal) est né en 1843.

d. Euler (reconnu pour ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres) est né en 1807.

10. Trouver une primitive de la fonction *f* définie, pour *x*>1, par $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x)=x-Ln|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f.

2. Tracer le graphe de f.

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$, et le graphe de f.

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x)=mx-1-Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

4. Etudier les variations de f_m.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\, x \le x - 1$.

6. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$.

Comparer G et M (on pourra appliquer la question 5 avec $x = \frac{a_i}{M}$).

7. Comparer G et H.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x \cos(\frac{\pi}{x}) \text{ si } x \text{ est non nul et } f(0) = 0.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

2. Préciser l'ensemble des nombres réels x dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$

3. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f pour $x \ge \frac{1}{2}$.

4. Etudier la convexité de f pour $x \ge \frac{1}{2}$.

Exercice n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de son produit, elle décide d'offrir des places pour une rencontre de football dans un dixième des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 80% permettent de gagner une place et 20% deux places.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées par un acheteur d'une seule tablette de chocolat.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Un autre client achète deux tablettes de chocolat.

- Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place.
- Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place.
- Déterminer la probabilité qu'il gagne exactement deux places.

4. Les résultats obtenus aux 3 questions précédentes peuvent-ils être modifiés si des précisions sont données sur les équipes de la rencontre de football ?

Exercice n° 5

Soit la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Exercice n° 6

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n.

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_{n+1}(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

On note $u(x)$ la limite quand elle existe de la suite $(u_n(x))$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Commentez cette phrase du Directeur Général de l'UNESCO écrite en 1986 :

« Longtemps, mythes et préjugés de toutes sortes ont caché au monde l'histoire réelle de l'Afrique. Les sociétés africaines passaient pour des sociétés qui ne pouvaient avoir d'histoire. (…) Si L'*Iliade* et L'*Odyssée* pouvaient être considérées comme des sources essentielles de l'histoire de la Grèce ancienne, on déniait, en revanche, toute valeur à la tradition orale africaine, cette mémoire des peuples qui fournit la trame de tant d'événements qui ont marqué leur vie. On se limitait en écrivant l'histoire d'une grande partie de l'Afrique à des sources extérieures à l'Afrique, pour donner une vision non de ce que pouvait être le cheminement des peuples africains, mais de ce que l'on pensait qu'il devait être. »
Amadou Mahtar M'Bow, préface à l'*Histoire générale de l'Afrique*, T. 1, *Méthodologie et préhistoire africaine*, Paris, UNESCO, 1986, p. 5.

Sujet n° 2

On entend beaucoup parler d'immigration décliné en autant de thèmes presque aussi connus les uns que les autres. L'un de ceux-ci est pourtant rarement abordé : plus de dix pays africains ont plus de 40% de leur main-d'œuvre hautement qualifiée en dehors de leur pays. Quelles seraient selon vous les conditions nécessaires pour éviter cette fuite des cerveaux africains vers l'occident alors que ce constat valait surtout jusqu'à présent dans le sens Europe/Amérique ?

Sujet n° 3

Comment et selon quelles modalités peut-on faire appel à une histoire « officielle » ? Quelles peuvent en être les avantages, les risques, les tendances, le rôle dans notre société ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle positive définie par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 9e \quad et \quad u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$$

On pose $v_n = \ln(\frac{u_n}{9})$, où ln désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

2. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de *n*.

3. Etudier la limite de la suite (u_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3

Calculer en fonction de n (où n est un entier strictement positif), l'expression :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,k$$

Exercice n° 4

1. Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 5 cartes simultanément, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus avec ces cinq tirages. Déterminer la loi de probabilités de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Problème

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t)\,dt = 0$$

Exprimer F à l'aide de la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

2. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes (B_n) par :

$$B_0 = 1,\ B'_{n+1} = B_n \ \text{ et } \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \geq 0$$

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.

Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4.

3. Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout entier naturel n :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

Comparer les suites (B_n) et (C_n).

Que peut-on en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3.

5. Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré de l'intervention de Monsieur EMILE-ETIENNE BAULIEU, Président de l'Académie des sciences, le 21 octobre 2003.

Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.

CHANGEMENT DE LA SCIENCE, PROGRES POUR L'HOMME ?

Changements de la science, progrès pour l'homme, point d'interrogation ?

Faut-il qu'il y ait un grave problème, pour que le titre de mon intervention doive inclure un point d'interrogation, une ponctuation que je qualifierais de politiquement correcte, de bien pensante ! Eh bien c'est un souci pour moi que cette interrogation !

L'homme domine le monde vivant, grâce à la science. Celle-ci progresse sans nul doute, mais soudain une question surgit : ses changements contemporains seraient-ils devenus contreproductifs ?

Comment cette science, qui ne cesse de mieux connaître la matière et la fait fonctionner à l'échelle nanométrique (le milliardième de mètre), met depuis quelques années les hommes de toute la terre en communication instantanée, sans fil et sans frontière, décrit le squelette génétique à la base de la vie des individus normaux et malades, permet de contrôler notre reproduction et de visualiser notre fonctionnement cérébral, comment cette science en progrès comme jamais, si spécifique de notre espèce, peut-elle être mise en examen au tribunal du progrès humain ?

Faut-il que l'humanité soit devenue hypocondriaque pour douter à ce point de sa santé collective ! Le sentiment de progrès est un sentiment de confiance ; aujourd'hui le doute a remplacé la confiance.

Pour nous scientifiques, l'activité de la science vise à *comprendre* : comprendre le monde, comprendre le fonctionnement de notre planète, comprendre le destin de l'homme et participer à son questionnement métaphysique. Nous, scientifiques, savons combien notre condition humaine, équilibre entre le corporel, le cérébral, le spirituel est à la fois vulnérable et aléatoire. Nous savons que nous ne savons pas prédire l'avenir de notre espèce, nous savons, et peut-être est-ce la grandeur de notre condition humaine, que nous sommes menacés.

La première perception du progrès tient aux différents usages de la technique : des améliorations concrètes, proches de nous, immédiatement utiles, acceptables et intégrables. Le génie de l'homme, son inventivité, son insatiable curiosité, son infatigable manie d'essayer, l'ont conduit à voler le feu, à capturer le vent, à semer des graines, à inventer la roue… à « faire » avant de comprendre, à agir avant d'analyser, et bien souvent la technique a interrogé et stimulé la recherche fondamentale par ses observations.

Dans l'histoire de l'humanité, la technique a souvent précédé la science. Mais, naturellement aussi, la technique accompagne la science et fréquemment lui succède en concrétisant ses concepts et en appliquant ses découvertes.

C'est pourquoi je me réjouis que notre Académie ait voulu aider à la reconnaissance, à côté de l'abstraction scientifique, des avancées vertigineuses des techniques, en favorisant la création d'une Académie des technologies.

L'harmonieuse intégration et l'efficace articulation des inventions de la science et de ses applications ont ainsi engendré deux percées refondatrices de la condition humaine : d'une part l'extraordinaire développement des moyens de communication, qui ont aboli les distances tant entre les hommes qu'entre les cultures, et, d'autre part, l'implacable accroissement jusque-là silencieux de la longévité humaine.

Le doute qui saisit l'époque me paraît lié au double sentiment de pouvoir et d'impuissance qu'a l'homme vis-à-vis de la nature et de lui-même. Le sentiment de pouvoir est sans doute né des interrogations et des craintes sur l'usage de l'énergie nucléaire : l'homme maintenant craint son propre pouvoir.

Il a désormais plus peur de lui-même que de la nature ! Or, depuis l'origine, les phénomènes naturels ont menacé de très près les hommes. L'homme a réussi à résister, se protéger, et même à utiliser bien des forces de la nature : le feu, l'électricité, l'atome… La science a libéré l'homme de ses peurs, de ses superstitions d'une nature enchantée, animée d'intentions plus ou moins bonnes à son égard : la science donne à voir la nature comme indifférente. C'est en quelque sorte un libre arbitre conquis par rapport à la nature. Mais désormais l'homme s'interroge : saura-t-il la protéger de lui-même et de ses excès ? C'est aussi un libre arbitre entamé ou perdu par rapport à lui-même : l'homme est-il déterminé par ses gènes, n'est-il qu'une somme de structures et de réactions chimiques, sans pouvoir sur sa personnalité et ses choix de vie ?

Aujourd'hui, les hommes seraient-ils en train de se venger de la nature et de la menacer à leur tour ? Certains redoutent que l'activité des hommes n'altère notre environnement, notre climat, nos océans, notre atmosphère, ne les fragilise, ne les prive de leurs possibilités de régénération. Au point qu'ils s'interrogent pour savoir si notre développement est durable, ou s'il faut en changer.

La question du rapport de la science avec la nature est au cœur du doute actuel concernant les progrès de la science et se pose en des termes nouveaux à propos du monde vivant, animal et végétal.

À partir de l'exemple des organismes génétiquement modifiés, les O.G.M., je voudrais illustrer la passion et la difficulté des rapports de la Science avec le sentiment de progrès.

Voici que vient de commencer la grande aventure de la maîtrise des éléments fondamentaux du vivant, avec la découverte de l'arrangement de l'A.D.N. des gènes.

Des molécules assez simples chimiquement, mais numériquement sélectionnées pour faire exister la diversité des formes de la vie, permettent la synthèse d'autres composés (protéines en particulier), qui assureront la régulation de la matière vivante en réaction avec un environnement infiniment varié et variable.

« Maîtriser le vivant » veut dire que l'on sait de mieux en mieux isoler, découper, recombiner, transférer cet A.D.N. des gènes. Dans le cas des O.G.M., les caractéristiques du monde végétal peuvent être directement soumises à notre volonté : créer des plantes qui ont un meilleur rendement, qui résistent mieux au froid ou au chaud, à l'eau ou à la sécheresse, à certains pesticides, qui peuvent empoisonner spécifiquement les prédateurs animaux, créer des plantes qui se conservent mieux…

Cette méthode permet même de créer des plantes qui produisent des substances chimiques difficiles et chères à synthétiser par d'autres moyens, par exemple certains médicaments… Ainsi l'hémoglobine, dont le manque n'est aujourd'hui compensé que par la transfusion, pourrait être produite en quantité par des plants de tabac génétiquement modifié ! Tout devient possible par construction, de façon utile et efficace.

Or le sigle O.G.M., est mondialement stigmatisé, plus encore que les produits eux-mêmes. N'est-ce pas un affreux symbole, cet été au Larzac que d'avoir mis en avant des centaines de volontaires prêts à les faucher.

Cette inquiétude a pour première réponse la prudente modestie de l'attitude autocritique qui gouverne l'activité scientifique. L'essence de l'activité est de comprendre le monde, mais sa méthodologie n'est que modestie, à partir du doute, de l'hésitation, de la vérification ; c'est à tort que l'on suspecte la science d'arrogance, car son propos est de conquérir le savoir. Y a-t-il tentation du pouvoir ?

Les hommes de science d'aujourd'hui ne sont pas, comme on le croit quelquefois, les adeptes du « tout-scientifique », pas plus que d'un quelconque « tout-économique ». Ils savent que les croyances, les valeurs morales, politiques, culturelles et affectives d'une époque, déterminent le bon ou le mauvais usage des découvertes.

Après la peur, l'*ignorance*. L'exemple d'un nouveau maïs, le « maïs-t » illustre bien un malentendu qui repose d'abord sur une mauvaise compréhension du mécanisme en cause et des objectifs poursuivis. Le « maïs-t », le « t » représentant l'élément génétique d'une bactérie (*bacillus thuringiensis*) qu'on ajoute à l'ADN du maïs (c'est l'objet de la modification O.G.M.) et qui permet la synthèse d'une protéine tueuse de la chenille pyrale, ennemie du maïs. Le maïs ainsi pourvu, la récolte sera épargnée par la chenille. La méthode plus traditionnelle est l'utilisation complexe et polluante d'insecticides qui, certes, sauveront la récolte, mais qui causeront d'autres effets négatifs sur l'environnement…/…

Le charbon contre l'électricité, l'électricité contre le nucléaire… L'exemple de l'énergie montre combien les techniques se renouvellent avec une efficacité croissante, d'où la nécessité d'encadrer, de normaliser leurs usages.

La « révolution verte » qui, à la fin du siècle dernier, utilisa les méthodes conventionnelles, pour le riz et le blé, a sauvé les grands pays d'Asie de la famine.

Mais l'évolution démographique de notre planète, qui a vu sa population passer de trois à six milliards d'habitants au cours des soixante-dix dernières années, promet à nouveau trois milliards d'individus de plus d'ici 2100, 50 % d'augmentation ! Le choix collectif de nombreux pays du Tiers Monde a consisté à ne pas encadrer le contrôle des naissances. Comment sauver aujourd'hui ces nouveaux êtres de la famine sans une nouvelle révolution agraire ?

La révolution des O.G.M. est un progrès indispensable, il faut l'admettre.

Ceci ne veut pas dire que notre confiance doive être aveugle. La science se doit par exemple de prévoir l'apparition et la multiplication d'insectes résistant au gène si efficace contre la chenille : pour se débarrasser de ces mutants, il faudra encore plus de science – continuer la recherche pour détecter et circonvenir cette évolution.

Après la peur et l'ignorance, voici enfin l'*idéologie* : ceux qui s'opposent violemment aux plus précautionneuses recherches sur les O.G.M., et le font avant même de connaître le résultat des expériences, se dressent contre les principes (et les lois) démocratiques de notre République, et recrutent leurs adeptes en fabriquant des amalgames : économiques (les multinationales), politiques (le grand capital), et médiatiques (Astérix redoutant que le ciel ne tombe sur la tête des habitants du village gaulois). Faut-il que nous ayons scientifiquement tort parce certains ont – provisoirement j'espère – médiatiquement raison ?

Ainsi le nécessaire débat entre la science et la société se trouve faussé et obscurci. Il est pourtant urgent de montrer, de donner à voir ce que sont ces découvertes, et de débattre de leur utilisation. Il importe de ne pas faire du principe de précaution un principe de suspicion et une pratique d'inaction, mais de rechercher, vérifier, contrôler, sans négliger aucune critique, et d'être toujours prêt à des solutions différentes. C'est le devoir d'humanité et la responsabilité politique des scientifiques dans la Cité.

Ce devoir et cette responsabilité sont plus manifestes encore quand le vivant est l'espèce humaine et que le matériau implique des cellules-souches de type embryonnaire. Le débat entre la science et la société atteint son paroxysme avec ce qui est communément appelé le « clonage thérapeutique ».

De quoi s'agit-il ? Depuis peu, les découvertes permettent de canaliser la différenciation de certaines cellules humaines (souvent appelées cellules-souches) pour obtenir celles capables de réparer un défaut d'origine héréditaire, ou une lésion causée par un traumatisme ou une maladie. Cette méthode s'applique en particulier au traitement des troubles qui ont leur origine dans le cerveau comme certaines maladies neuro-dégénératives.

La controverse est double : d'une part, certains s'élèvent contre ce qu'ils nomment une « chosification » des cellules humaines, redoutant leur « instrumentalisation ». Ils oublient, qu'en leur temps, les premières transfusions sanguines ou les premières greffes d'organes avaient été jugées scandaleuses et même dangereuses. Qui se souvient que les premières greffes cardiaques furent attaquées au motif qu'elles étaient considérées déshumanisantes ? Je voudrais également rappeler la transgression qu'ont commise, à une époque où la religion définissait l'éthique, nos prédécesseurs lorsqu'ils s'autorisèrent à pratiquer des autopsies. Avaient-ils pour autant altéré notre respect des autres, notre amour du prochain, corps et âmes réunis ?

La controverse a, d'autre part, des arguments invoqués au nom du débat sur le début de la vie. Certains excluent en effet toute recherche sur l'embryon puisque celui-ci est potentiellement une personne. C'est tout à fait une position cohérente, de la part de ceux qui refusent toute intervention dans le processus de reproduction, adoptant ainsi, par principe, une position proche de celle de l'Église catholique romaine, pour laquelle la vie humaine commence dès la fécondation.

Mais, s'agissant de cellules humaines, la crainte de Faust ou du Golem resurgit. On fantasme facilement sur des dérives imaginaires. On a raison de tout anticiper et de prévoir un arsenal de limites et d'encadrement, mais il ne faut pas pour autant céder à l'aveuglement : il faut regarder la réalité et la connaissance en face.

Le changement et la transgression sont consubstantiels à la science : chercher du nouveau est une activité permanente de tous les hommes, « une version plus hardie du métier de vivre », comme l'a rappelé Pierre-Gilles de Gennes ici même l'an dernier, en citant Primo Levi, le chimiste mais aussi l'humaniste dont la déportation a marqué le destin.

Progrès tout cela ? Oui, si on l'inscrit dans une perspective de plus grande fraternité, de meilleure compréhension de notre monde et des hommes. Faisons en sorte que les progrès scientifiques ne soient pas qu'un moyen de plus pour renouveler des activités marchandes.

Comment ces changements et ces progrès influencent-ils notre bonheur personnel, amoureux, familial ? Je crois qu'avec le feu, l'électricité, les antibiotiques, nous sommes plus heureux que les hommes qui dessinèrent Lascaux : nous avons plus de temps à vivre, pour être libre et pour aimer. Mais leur art nous parle et nous touche : le *continuum* entre nous tient sans doute à l'affectivité, à l'imaginaire, aux désirs, qui ne se résument pas à des conditions de vie, à des acquis.

Nos progrès nous déterminent : ils ne nous définissent pas.

On pourrait aujourd'hui avoir la tentation de s'en tenir aux acquis d'une humanité qui dispose déjà de tant de moyens pour mieux vivre, et choisir de mieux les partager. Je comprends ce sentiment, cette intuition qu'il faudrait marquer une pause.

Mais il ne faut pas compter sur un palier de l'évolution scientifique, sur un moratoire du changement : c'est une hypothèse totalement irréaliste – et bien des conservateurs tranquilles vont le regretter. L'homme invente, veut savoir toujours plus, que cela touche le climat sur notre terre et son évolution, les planètes alentour, ou les possibilités de vie prolongée en bonne santé et pleine lucidité.

C'est irrépressible. Aux hommes et aux femmes, à leurs représentants, à leurs civilisations, d'en faire des bonheurs, d'accompagner ces percées, et d'inventer les règles de vie qui en feront des progrès pour le genre humain.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de xe^{x^2+3x} est égale à $(1+x(2x+3))e^{x^2+3x}$ et en 1, on obtient $6e^4$

2. $I=\int_0^1 (x^2+\sqrt{x})\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=1$

3. La résolution du système : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{9}{4} \\ xy=6 \end{cases}$ donne (x, y) = (3, 2) ou (-3, -2)

4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{n+1}$

5. L'inéquation : $\frac{x^2-1}{x-2}<0$ est vérifiée pour x<-1 ou 1<x<2.

6. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et parallèle au vecteur de composantes (2, -1). Cette droite d'équation $y=ax+b$ admet pour pente a=-1/2 et donc : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné est continue sur cet intervalle. Faux

b. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Vrai

c. Toute fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Faux

d. Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné qui ne sont pas bornées. Faux

8. Quel est le capital obtenu au bout de 3 mois pour un montant de 200 Euro placé au taux mensuel de 1% ? Ce capital est égal à : $200(1{,}01)^3 = 206{,}06$

9. Laquelle de ces assertions est exacte ?

a. Riemann (célèbre pour ces travaux sur l'intégrale) est né en 1926. Faux en 1826

b. Cauchy (célèbre pour ces travaux sur les séries) est né en 1789. Vrai

c. Newton (qui partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal) est né en 1843. Faux en 1643

d. Euler (reconnu pour ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres) est né en 1807. Faux en 1707

10. Une primitive de la fonction *f* définie, pour *x*>1, par $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ est $F(x) = \frac{1}{2}Ln\left|x^2-1\right|$.

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x - Ln|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f .

La fonction f est définie sur R^* .

On trouve les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

La dérivée est égale à $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ et décroissante sinon.

Tableau de variation :

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ $\uparrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ 1	1 $\uparrow$ $+\infty$

2. Tracer le graphe de f .

Pour le graphe de f , on a une branche parabolique dans la direction $y = x$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. Le graphe suit le tableau de variation. La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction est convexe.

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$, et le graphe de f .

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^2 = \frac{1}{2} - Ln4$$

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

4. Etudier les variations de f_m .

f_m est définie sur R^*. Sa dérivée est égale à : $f_m^{'}(x) = m - \dfrac{1}{x}$ et elle est nulle pour $x = \dfrac{1}{m}$. f_m est donc décroissante sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{m}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{m}, +\infty\right[$.

Elle admet un minimum en $x = \dfrac{1}{m}$ égal à $Ln\,m$.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \le x - 1$.

Pour $m = 1$, le minimum est nul, d'où pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \le x - 1$.

6. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\dfrac{n}{H} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}$.

Comparer G et M (on pourra appliquer la question 5 avec $x = \dfrac{a_i}{M}$).

En appliquant la question 5 avec $x = \dfrac{a_i}{M}$, on obtient : $Ln\dfrac{a_i}{M} \le \dfrac{a_i}{M} - 1$.

En sommant ces différentes inégalités, on a : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \le \dfrac{1}{M}\sum_i a_i - n$.

Comme par ailleurs $M = \dfrac{1}{n}\sum_i a_i$, l'inégalité devient : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \le 0$ ou encore

$\dfrac{1}{n}\sum_i Ln\,a_i \le Ln\,M$ et $\sum_i Ln\,a_i^{1/n} = Ln\,G \le Ln\,M$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on obtient $G \le M$

7. Comparer G et H .

On remplace a_i par $\frac{1}{a_i}$ dans $G \leq M$ pour obtenir :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\times ....\times\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+.....+\frac{1}{a_n}}{n}$$, c'est à dire $\frac{1}{G}\leq\frac{1}{H}$, d'où $H \leq G$

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$f(x) = x\cos(\frac{\pi}{x})$ si x est non nul et $f(0)=0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

f est indéfiniment dérivable en dehors de l'origine, le problème ne se pose donc qu'en x=0.

On a : $\underset{0}{Lim}\, f(x) = 0 = f(0)$ (car la fonction cosinus est bornée par 1) et $\underset{0}{Lim}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\cos(\pi/x)$ qui n'existe pas. La fonction est donc continue en 0, mais non dérivable.

2. Préciser l'ensemble des nombres réels tels que :

a) $f(x)=0$ si et seulement si $x=0$ ou $\cos(\pi/x)=\cos(\pi/2)$, soit $\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x=\frac{2}{1+2k}$

b) $f(x)=x$ si et seulement si $\cos(\pi/x)=1=\cos(2k\pi)$, soit $x=\frac{1}{2k}$

c) $f(x)=-x$ si et seulement si $\cos(\pi/x)=-1=\cos((2k+1)\pi)$, soit $x=\frac{1}{2k+1}$

3. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f pour $x\geq\frac{1}{2}$.

$f^{'}(x) = \cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}$ et

$f^{''}(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x}$

4. Etudier la convexité de f pour $x\geq\frac{1}{2}$.

$f^{''}(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x}=0$ pour $\cos\frac{\pi}{x}=0=\cos\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, d'où $x=\frac{2}{2k+1}>\frac{1}{2}$

Seules les valeurs de k=0 et 1 conviennent. Et f est convexe sur l'intervalle (2/3, 2).

Exercice n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de son produit, elle décide d'offrir des places pour une rencontre de football dans un dixième des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 80% permettent de gagner une place et 20% deux places.

Soit *X* la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées par un acheteur d'une seule tablette de chocolat.

1. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

X	0	1	2
Probabilités	9/10	0,8/10	0,2/10

2. Calculer l'espérance mathématique de *X*.

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1{,}2}{10} = 12\%$$

3. Un autre client achète deux tablettes de chocolat.

Ecrivons la loi de probabilité de Y (nombre de places gagnées dans l'achat de deux tablettes) :

Y	0	1	2	3	4
Probabilités	81/100	14,4/100	4,24/100	0,32/100	0,04/100

- La probabilité qu'il ne gagne aucune place est égale à 81%.
- La probabilité qu'il gagne au moins une place est égale à 19%.
- La probabilité qu'il gagne exactement deux places est égale à 4,24%.

4. Le processus aléatoire est indépendant des équipes.

Exercice n° 5

Soit la fonction réelle f définie par : $f(x)=\dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

Cette fonction est définie pour x>-1 et $x \neq 0$, mais remarquons que l'on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0)$=1.

La dérivée de f est égale à $f'(x)=\dfrac{x-(1+x)Ln(x+1)}{x^2(x+1)}$.

Etudions alors $z=x-(1+x)Ln(x+1)$. On obtient alors $z'=-Ln(x+1)$. Cette fonction est croissante sur $\left]-1,0\right]$ et décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$, mais elle est reste toujours négative.

La fonction f est donc décroissante sur $\left]-1,+\infty\right]$ et à valeurs dans $\left]+\infty,0\right[$

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le graphe de f permet de voir qu'il ne coupe la première bissectrice qu'en un seul point. Algébriquement, il faut résoudre l'équation : $f(x)=x$, soit $Ln(x+1)=x^2$.

L'étude de la fonction $g(x)=Ln(x+1)-x^2$ et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de montrer qu'il existe un unique point fixe sur l'intervalle $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Exercice n° 6

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x)=x^n\sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0,\pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

La fonction f_n est positive sur $[0,\pi/2]$, ainsi que sa dérivée : $f'_n(x)=nx^{n-1}\sin x+x^n\cos x$. La fonction est donc croissante sur cet intervalle et à valeurs dans $[0,(\pi/2)^n]$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout *n*.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \left[-x^n \cos x\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx \text{ et}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = \left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-2}\sin x\,dx \text{, d'où :}$$

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$$

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_{n+1}(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

On note $u(x)$ la limite quand elle existe de la suite $(u_n(x))$.

On a : $u_0(x) = f_0(x) = 0$, $u_1(x) = f_1(x)$ et par récurrence :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sin x \sum_{k=1}^{n} x^n = x\left(\frac{x^n - 1}{x-1}\right)\sin x$$

La suite $(u_n(x))$ est divergente pour $|x| \geq 1$, et elle est convergente pour $|x| < 1$. Dans ce cas, sa limite est égale à $u(x) = \dfrac{-x\sin x}{x-1}$

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle positive définie par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1. Etudier les variations et la convexité de. *f*.

La dérivée de *f* est égale à : $f^{'}(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est toujours positive. La fonction est donc strictement croissante et elle est nulle à l'origine.

Sa dérivée seconde est égale à : $f^{''}(x) = 2 - \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ et elle est nulle pour $x = \dfrac{1}{4}$. La fonction est concave avant cette valeur et convexe ensuite.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 9e \quad et \quad u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$$

On pose $v_n = \ln(\dfrac{u_n}{9})$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

On vérifie par récurrence que : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. La raison est égale à 1/2 et le premier terme est : $v_0 = \ln(e) = 1$

2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de *n*.

On obtient $v_n = (\frac{1}{2})^n$, puis $u_n = 9e^{1/2^n}$

3. La limite de la suite (u_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$ est égale à 9.

Exercice n° 3

Calculer en fonction de *n* (où *n* est un entier strictement positif), l'expression :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k$$

On obtient :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k = n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$$

Exercice n° 4

1. Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 5 cartes simultanément, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de *X* et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est le nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 12, soit $\binom{12}{5}$ et après simplification 99x8.

Le nombre de façons de choisir *k* rois parmi 4 est $\binom{4}{k}$.

Le nombre de façons de choisir 5-*k* autres cartes parmi les 8 restantes est $\binom{8}{5-k}$

Pour k=0, 1, 2, 3, 4, on obtient $P(X=k)=\dfrac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$

La loi de probabilités de X :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	7/99	35/99	42/99	14/99	1/99	1

Espérance de X :

$$E(X)=\sum p_i x_i=\frac{165}{99}=\frac{5}{3}\,, où\ \ p_i=P(X=x_i)\,.$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est de 5/3 (environ 1,67)

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus avec ces cinq tirages. Déterminer la loi de probabilités de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Cette expérience aléatoire possède deux issues : obtenir un roi (succès) ou non (échec), c'est une loi de Bernoulli, où la probabilité d'obtenir un roi est égale à 4/12=1/3.
On répète de façon indépendante 5 fois cette expérience.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n=5 et p=1/3.

Pour k=1, 2, 3, 4, 5, on obtient $P(Y=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$

La loi de probabilités de Y :

Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

Espérance de Y :

$$E(Y)=np=5\times(1/3)=5/3$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est le même que dans la méthode de tirage précédente.

Problème

Soit *f* une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction *F* continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t)\,dt = 0$$

Exprimer *F* à l'aide de la fonction *G* définie par : $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Si F_1 et F_2 vérifient les conditions précédentes, alors $F_1' = F_2'$ et $F_1 = F_2 + k$. La condition sur l'intégrale implique que cette constante *k* est nulle, d'où l'unicité de la fonction *F*, qui est continûment dérivable par définition.

De plus, $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x F'(t)\,dt = F(x) - F(0)$ et $\int_0^x F'(t)\,dt = F(x) = G(x) + F(0)$

2. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes :

$B_0 = 1,\ B_{n+1}' = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.
Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4.

L'existence de la suite de polynômes est un cas particulier de la question précédente.
Par définition de la suite, on a :

$B_1' = B_0 = 1$, d'où $B_1(x) = x + k$ et $\int_0^1 B_1(t)\,dt = \left[(x^2/2) + kx\right]_0^1 = 1/2 + k = 0$ et $k = -1/2$

Par conséquent :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

On procède de même pour les autres polynômes et on obtient :

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2$$

On vérifie facilement par récurrence que le degré de B_n est égal à n et que le terme de plus haut degré est égal à 1/n !

3. Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

On a : $\int_0^1 B_n(t)\,dt = \int_0^1 B_{n+1}'(t)\,dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$, donc $B_n(0) = B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout entier naturel n :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

a) Comparer les suites (B_n) et (C_n).

On a : $C_0 = B_0 = 1$, puis $C_{n+1}'(X) = (-1)^{n+1}(-1)B_{n+1}'(1-X) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$ et $\int_0^1 C_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$ (il suffit d'effectuer le changement de variable t =1-u).

En conclusion la suite (C_n) vérifie les mêmes propriétés que la suite (B_n), qui est unique, donc

$$B_n = C_n$$

b) Que peut-on en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

On a : $B_n(X) = C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ et pour $X = 1/2$, on obtient pour n impair : $B_n(1/2) = -B_n(1/2)$, donc $B_n(1/2) = 0$

De même pour $X = 1$, $B_n(0) = -B_n(1)$. Comme ces deux termes sont égaux d'après la question précédente, on trouve :

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n(1/2) = 0$$

Les graphes des B_n sont symétriques par rapport au point de coordonnées (1/2, 0).

5. Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.

B_{2p+1} est un polynôme de degré 2p+1, qui peut s'écrire sous la forme :

$B_{2p+1}(X) = X^{2p-1}(aX^2 + bX + c)$ et qui admet trois racines 0, ½ et 1. Il ne s'annule donc pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2 \, Ln(x + e^x)$

2. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} (x+1)\sin x \, dx$

3. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

4. Trouver la primitive de $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ qui s'annule en x=1.

5. Résoudre l'inéquation : $6x^2 - x - 1 < 0$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

8. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$.

9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4.

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in N}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t^{'}(0)$?

2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose

$$F_t(x) = 1 + \varphi_0(t) + \frac{\varphi_1(t)}{1!}x + \frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2 + ... + \frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p + x^p\,\varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x)\text{, pour } x>0$$

où Ln désigne le logarithme népérien et *a* est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de *a*, le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.

2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites *x*=1 et *x*=2.

4. Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, et tout $x, t > 0$, on a : $f_a(\alpha\, x + (1-\alpha)t) \geq \alpha\, f_a(x) + (1-\alpha) f_a(t)$

5. Etudier, selon les valeurs de *a*, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t+1} dt$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$

2. Calculer $I_3(x)$

3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.

4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x)\, dx$

Exercice n° 5

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement un point M (*x*, *y*). Quelle est la probabilité que le point *M* appartienne au domaine *D* ?

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in N$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$
2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$
3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$
4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)}$
5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.
6. Démontrer que, pour tout n, $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.
7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} nI^2(n)$
8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^{p} et de p (C_{2p}^{p} désigne l'ensemble des combinaisons de p éléments pris parmi 2p).

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Peut-on toujours faire confiance à la science et aux scientifiques ?

Sujet n° 2

En quoi les énergies alternatives peuvent-elles être bénéfiques pour le continent africain ?

Sujet n° 3

Comment gérer l'émergence des grandes villes africaines ? Faut-il y voir une nouvelle preuve du dynamisme de l'Afrique ou au contraire le signe de l'accélération de l'exode rural ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^{x} + 1$

1. Etudier les variations de *f*.
2. La fonction *f* admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
3. Tracer le graphe de *f*.
4. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{1}^{e} x(Lnx)^n\,dx$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
3. Calculer I_3 et I_4.

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n).

3. Soit $w_n = Ln(u_n)$.

   - Montrer que la suite (w_n) converge.
   - Déterminer la limite de (w_n).

4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

1. Calculer I_n

2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.

2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

Exercice n° 6

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - 3y = 2Ln2 \\ x + y = 4Ln2 \end{cases}$

2. On pose : $I = \int_0^{Ln16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{Ln16} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

Calculer I et J.

Exercice n° 7

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :
$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée.

2. Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est extrait du livre « Eloge de l'optimisme » Quand les enthousiastes font bouger le monde de Philippe GABILLET publié en janvier 2011 aux éditions Saint Simon.

Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

En ces temps troublés, à l'heure où les conflits, les catastrophes naturelles et humanitaires, les récessions économiques et sociales ne cessent de rappeler à notre bon souvenir les misères du monde, comment ne pas percevoir un parfum d'insolence et de scandale, voire de franche provocation, dans l'annonce d'un possible *Eloge de l'optimisme ?* Confirmons dès à présent cette intention malicieuse, impertinente et politiquement incorrecte. Nous plaiderons donc coupable en affirmant que si l'homme a des droits, il a aussi des devoirs et que le premier d'entre eux est le devoir d'optimisme, clé de tous les autres ! Mais nous n'en sommes pas encore là.

Car autant l'admettre d'emblée, l'optimisme n'est pas vraiment à l'ordre du jour. D'ailleurs, l'a-t-il jamais été ? Qu'ils dissertent du climat, de la situation économique et financière nationale ou mondiale, de la déliquescence de l'éducation, de la culture et de l'environnement, des tensions géopolitiques ou des risques sanitaires divers auxquels nous expose la modernité, la majorité des experts compétents diffusent globalement de forts arômes de pessimisme, voire de pessimisme donneur de leçons.

Bref, nous déclare-t-on en substance, le monde va globalement assez mal, cela ne s'arrangera pas dans l'avenir et d'ailleurs, vous l'avez bien cherché !

Haro sur les optimistes ! Qu'un grand quotidien se pique de ne plus diffuser que des bonnes nouvelles, et son nombre de pages diminuera sans doute à mesure que fondra son lectorat. Quant au sympathique politicien excessivement optimiste, en particulier sur les sujets graves, la supposée immaturité d'une telle attitude risque rapidement de lui faire interrompre une carrière prometteuse, faute de crédibilité et de suffrages.

Car tout est là. Non seulement le pessimisme fait davantage vendre que l'optimisme, mais en outre il fait plus sérieux, plus solide, bref plus réaliste !

Le citoyen que nous sommes, qu'il soit père ou mère de famille, qu'il soit salarié ou retraité, étudiant ou enseignant, peine ainsi à trouver au fil des séquences de son journal télévisé favori quelques miettes de réconfort et de confiance en l'avenir. Et pour peu que -pris d'une sorte d'addiction morose- il se mette à fréquenter assidument les forums et autres blogs d'humeur qui fleurissent sur le Net, le désespoir ne tarde pas à s'infiltrer, incrustant au cœur des esprits les moins chagrins, son visage mélancolique et résigné.

Il demeure bien sûr nombre de quêteurs, porteurs et autre diffuseurs d'espoir et de confiance. Ils constituent la communauté invisible de toutes celles et ceux qui, de par le monde, pensent que l'avenir est toujours ouvert, que la partie est loin d'être perdue, que les forces vives de l'intelligence frappent à nos portes, que la créativité et la passion peuvent tout, que d'autres solutions ne demandent qu'à être inventées et que tant d'autres chemins n'attendent qu'à être explorés.

Qu'à cela ne tienne. Rendons un instant la parole aux experts et ils ne tarderont pas à qualifier ces « incorrigibles optimistes » de rêveurs, de poètes, voire de naïfs ou d'utopistes. Et c'est sous couvert de réalisme et de lucidité qu'ils les renverront séance tenante à l'analyse froide de la seule vérité qui compte, celle de la rationalité des chiffres et du bon sens, celle de l'étroite sagesse des possibles raisonnables dont il s'agit d'assurer la victoire face à l'immense éventail des impossibles radieux !

Dès lors, pourquoi un *Eloge de l'optimisme ?* Pourquoi tenter de défendre, de promouvoir, de diffuser largement cette forme de pensée, sympathique certes, mais tellement inadaptée-aux dires de certains- aux réalités d'un monde si cruel et désespérant ?

La réponse est simple : nous sommes de plus en plus nombreux à penser qu'il existe une authentique *voie optimiste* et qu'à l'heure de la montée des incertitudes dans tous les domaines, cette voie seule est à même de faire bouger dans le bon sens la société de ceux qui y vivent. Que ce soit dans le monde de l'éducation ou de la santé, dans la famille ou au bureau, chez les travailleurs sociaux ou les hommes d'affaires, dans les médias ou au coin de la rue, l'optimisme repart en campagne. Mais une chose a changé. Les optimistes ne sont plus seuls ! Dans le monde entier, un nombre croissant de chercheurs, journalistes, intellectuels, philosophes, écrivains, enseignants, psychologues etc. entreprennent désormais de mieux comprendre, de défendre et de diffuser largement la pratique de cette fabuleuse dimension de la nature humaine.

Les optimistes avaient déjà leurs grands auteurs, ils ont désormais leurs grands chercheurs, leurs chaires universitaires, et même une organisation internationale, Optimistes sans frontières, et un pays d'accueil virtuel, l'Optimistan ! Celles et ceux qui dans leur vie personnelle et professionnelle font le choix de l'optimisme sont bien sûr convaincus que cette voie est à la fois nécessaire et salubre. Mais n'est-ce pas un chemin bien abrupt en ces temps si difficiles parfois si désespérants ? Non, car l'optimisme peut être une aventure réellement positive et agréable, souriante et énergique, et somme toute relativement aisée d'accès, pour peu que l'on accepte de regarder différemment le monde qui nous entoure et par conséquent, de conduire différemment notre propre existence.

Car, et c'est bien là l'autre bonne nouvelle annoncée par les spécialistes de la question, l'optimisme n'est plus uniquement considéré comme un trait inné de personnalité, même si nous n'avons pas tous les mêmes prédispositions en la matière. Mais ce que les maîtres ès optimisme nous apprennent, c'est que la partie n'est pas jouée d'avance, même pour les plus pessimistes (pardon, les plus réalistes) d'entre nous. Oui, l'optimisme se travaille, se développe et s'entretient comme on entretient son corps et son esprit.

Au cœur de cet *Eloge de l'optimisme* réside une conviction simple, à la fois humaniste et citoyenne. Il n'y a pas, il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais d'alternative durable à l'optimisme surtout quand les brouillards descendent, que résonnent encore dans le lointain les orages qui s'éloignent et que grondent ceux qui s'approchent. Seul l'optimisme peut faire bouger le monde et évoluer positivement ceux qui y viennent.

Il est vrai que le pessimisme peut avoir raison. Il a même souvent raison techniquement parlant. Mais c'est aussi parce que l'optimiste ne le croit pas, qu'il entreprend des folies déraisonnables, qu'il sort du cadre, qu'il prend des risques, qu'il s'aventure, qu'il parie, bref qu'il profite davantage du voyage de la vie, quelles que soient les surprises -bonnes ou mauvaises- que celle-ci lui réserve.

Voilà ce qui fait désormais de l'optimisme militant un authentique combat philosophique et social, et donc une quête majeure car chargée de sens pour les générations présentes et à venir.

L'optimisme est nécessaire car il se nourrit d'enthousiasme autant qu'il en diffuse autour de lui. Il peut arriver que cet enthousiasme se révèle excessif, illusoire ou risqué. Mais qu'importe. Comme nous le rappelle la célèbre formule du philosophe Hegel, » Rien de grand ne s'est accompli dans le monde sans passion ». Et quand bien même l'enthousiasme ferait trébucher l'optimisme, c'est quand même lui qui lui donne l'envie de se relever puis de poursuivre, le sourire aux lèvres, l'aventure promise à chacun au fil de cette merveilleuse route que l'on appelle la vie.

Mais connaissons-nous vraiment l'optimisme ? C'est à cette définition et aux mises en perspectives qu'elle exige que nous nous attacherons. Nous entreprendrons une excursion dans quelques domaines où l'optimisme fait aujourd'hui la différence, notamment pourquoi et comment l'attitude optimiste nous maintient plus longtemps en meilleure forme physique et mentale, nous conduit à créer des relations sociales plus agréables, nous rend plus attractif dans le monde professionnel et, ce qui ne gâte rien, fait de nous des hommes ou de femmes plus chanceux que les autres. Nous apprendrons comment développer cette dimension optimiste dans nos propres vies, éduquer notre regard à voir le monde de façon optimiste, prendre des décisions porteuses de possibilités nouvelles et, surtout, nous permettre de contribuer à la création d'une authentique « société optimiste » pour le plus grand bénéfice de tous.

L'optimiste et les lendemains qui chantent

On constate en premier lieu que l'optimiste, sans toujours voir tout en rose -comme on le lui reproche parfois- n'en perçoit pas moins l'avenir à travers un filtre particulier. Les premiers chercheurs dans le domaine ont étudié de près ce trait de personnalité, cette façon remarquable de se projeter dans le temps et d'optimiser son futur en l'imaginant de façon globalement positive. Pour le psychiatre Christophe André être optimiste conduit toujours à « supposer, face à l'incertain, qu'il existe une issue favorable et se donner le droit d'agir pour la faciliter » Cette définition rejoint d'ailleurs celle d'une autre grande spécialiste Sonja Lyubomirski, qui voit dans l'optimisme « l'anticipation globale d'un avenir positif, assortie de la certitude qu'on pourra remplir ses objectifs » Aux dires de ces experts, l'optimisme présente donc -psychologiquement parlant- deux facettes :

- Une facette cognitive et intellectuelle : l'optimiste est un individu qui envisage aisément une issue favorable aux situations qu'il rencontre ;

- Une facette émotionnelle et affective : l'optimiste est aussi quelqu'un qui éprouve un sentiment de confiance heureuse dans l'évolution ou le dénouement d'une situation.

Les optimistes, une ressource pour l'entreprise

L'optimisme représente souvent un critère essentiel d'appréciation, en particulier lorsqu'on recrute un nouveau collaborateur. Certes, les pessimistes ont toujours leur chance, toute entreprise comprenant aussi des postes exigeant de ceux qui les occupent un sens aigu des réalités, voire un haut niveau de prudence et d'évitement du risque. On pense en particulier à des métiers concernant la sécurité des personnes, l'estimation de coûts, la gestion de fonds importants, le contrôle sous toutes ses formes le respect des procédures et des normes techniques, etc. Dans ce genre de fonction, un pessimisme modéré peut même représenter une réelle ressource et un optimisme excessif, un danger patent.

En revanche, dès lors que la mission qui lui est confiée exige persévérance, prise d'initiatives, esprit d'innovation et créativité, l'optimisme réapparaît dans les critères de choix d'un collaborateur. Il en sera de même si le travail demandé tend à créer des tensions psychologiques (que ce soit avec soi-même ou avec les autres), c'est-à-dire s'il comprend une dose non négligeable d'échecs ou de vexations. Confrontés à des situations de ce genre, les plus optimistes sauront mieux que d'autres, trouver le mode d'explication positif qui leur permettra de résister au frustrations et de trouver des voies permettant de rebondir.

Dans le cadre de sa politique de recrutement, l'entreprise peut donc utiliser l'optimisme comme un critère pertinent de sélection de nouveaux collaborateurs.

…/… L'attitude positive au travail, comment ça marche ?

Mais si l'optimisme -en tant qu'état d'esprit collectif- peut être considéré comme une ressource pour l'entreprise, cette ressource est-elle pour autant développable ? Oui, nous disent les spécialistes. Tel est d'ailleurs l'un des buts des politiques visant à développer une authentique « attitude positive au travail ».

C’est dans les périodes difficiles et conflictuelles que l’on prend plaisir à redécouvrir les vertus d’un climat de travail positif. Dans toute entreprise, c’est en effet le « climat » -c'est-à-dire l’atmosphère prédominante ressentie par les employés- qui crée le terrain culturel sur lequel vont prospérer négativité et tension ou au contraire attitude positive et énergie d’action.

Une attitude positive au travail « fabrique » de l’optimisme individuel et collectif car elle accroît naturellement le niveau d’engagement et d’implication investi par les employés dans leur tâche. Ce faisant, elle entraine la motivation et la performance des équipes à travers une satisfaction accrue. Elle favorise de même l’apparition de comportements solidaires et crée enfin les conditions pour que prospère un esprit d’innovation et d’ouverture.

« Il n’y a pas d’amour, mais uniquement des preuves d’amour. » Cette phrase de Jean Cocteau s’applique parfaitement à l’attitude positive au travail qui n’existe, elle aussi, que par ses manifestations. Sur le terrain, dans la réalité de la vie des entreprises, elle se manifeste par un comportement collectif (employés, cadres, dirigeants) composé à la fois d’ouverture, de participation active et d’esprit constructif. Si l’attitude positive au travail se nourrit d’optimisme autant qu’elle l’entretient, c’est qu’elle finit par générer un climat mêlant naturellement :

- une grande clarté sur les buts poursuivis et les règles à suivre,

- un appui des acteurs entre eux, que ce soit dans l’action quotidienne ou en cas de problème,

- une atmosphère de défis à relever, nourrie par des marques de confiance réciproques des personnes entre elles.

Néanmoins, malgré tous ces avantages, la fin de la négativité au travail ne saurait être décrétée si facilement ! L’attitude négative au travail est en fait une sorte de cocktail « létal », car potentiellement tueur de motivation et d’enthousiasme. Ses ingrédients clés -souvent nourris par l’organisation elle-même- sont toujours les mêmes : pessimisme, défiance, jalousie, critique systématique et rumination. Et leur mélange conduit assez rapidement à l’instauration d’un sentiment collectif d’impuissance et de découragement.

Car même fondée sur des faiblesses réelles du système, une attitude négative au travail nuit toujours profondément à ceux qui en sont porteurs ainsi qu’à celles et ceux qui les entourent. En effet, elle entretient un esprit délétère orienté sur la seule dénonciation des faiblesses, légitimée et nourrie par l’illusion utopique de la possibilité d’un monde parfait.

L’attitude positive au travail, en revanche, ne fait pas l’impasse sur les difficultés : mais elle les regarde différemment, de façon sereine et surtout constructive.

Elle est aussi un phénomène fonctionnant selon les lois de le gravitation -c’est-à-dire en cascade- du sommet de l’entreprise jusqu’aux niveaux d’exécution les plus modestes. Inutile donc d’espérer une attitude positive durable de la part de collaborateurs qui n’observent pas l’équivalent dans le comportement de leurs propres managers et dirigeants.

L’attitude positive au travail enfin est un phénomène diffus et contagieux qui infiltre l’ensemble des dimensions de la vie de l’entreprise. Qu’il s’agisse de la relation entre les collaborateurs d’une même organisation, des modes de fonctionnement hiérarchiques ou de la façon de traiter les clients et les fournisseurs, l’attitude positive ne saurait être cloisonnée. Elle est partie intégrante de la culture de l’entreprise et de ses modes de fonctionnement, ou n’est pas.

Afin de faire vivre l’attitude positive au travail, l’entreprise doit donc compter en priorité sur celles et ceux qui la dirigent et l’animent. Parmi eux une population occupe aujourd’hui une place éminemment stratégique : les *managers de proximité.*

…/…Un manager optimiste est celui dont on peut dire : « Il m’a donné envie d’essayer, il m’a autorisé à ne pas réussir tout de suite et m’a poussé à recommencer jusqu’à ce que je gagne la partie ! ».

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2\, Ln(x + e^x)$

$$f'(x) = 2xLn(x + e^x) + \frac{x^2(1 + e^x)}{x + e^x} \qquad f'(1) = 2Ln(1 + e\ ) + \frac{(1 + e\ )}{1 + e} = 2Ln(1 + e) + 1$$

2. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} (x+1)\sin x\, dx = \left[-(x+1)\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2$

3. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

En posant $X = e^x$, on obtient : x=0.

4. Trouver la primitive de $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}$.

$F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1 + x^3} + k$ et $F(1) = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} + k = 0$, d'où $k = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

5. Résoudre l'inéquation : $6x^2 - x - 1 < 0$

$x^2 - x - 1 = 6\ (x - 1/2)(x + 1/3)$, donc $x \in \left]-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

$$g = (\frac{9}{5}, \frac{14}{5})$$

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

La moyenne est égale à : $(0{,}5 \times 100) + (0{,}4 \times 300) + (0{,}1 \times 800) = 250$

8. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4

Pour n=3, x=1,

Pour n=4, x=1 ou -1

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in N}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

$U_{n+1} = \frac{1}{4^n}$ et cette suite converge vers 0.

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t\ (x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t\ (0)$ et $F_t^{'}\ (0)$?

$$\lim_{x\to 0} F_t(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1+(1+t)x-1}{1=x-1} = 1+t \text{ et } F_t(0) = 1+t$$

$$F'_t(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F_t(x) - F_t(0)}{x} = \frac{1}{2}(t+t^2)$$, sachant qu'au voisinage de 0 : $e^u \approx 1+u+u^2/2$

2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose

$$F_t\ (x) = 1 + \varphi_0(t) + \frac{\varphi_1(t)}{1!}x + \frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2 + ... + \frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p + x^p\ \varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1.

Avec ce qui précède : $\varphi_0(t) = t$ et $\varphi_1(t) = (t+t^2)/2$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x)$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.

$f_a^{'}(x) = 0$ pour $x = 1/a$.

Si $a < 1/e$, alors l'équation admet deux racines,

Si $a = 1/e$, alors l'équation admet une racine,

Si $a > 1/e$, alors l'équation n'admet aucune racine.

2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.

$f_{1/2}$ est croissante jusqu'au maximum atteint en 2, puis décroissante, avec une branche parabolique dans la direction $y = -ax$.

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites x=1 et x=2.

$$I = \int_2^1 (-ax + Lnx)\ dx = \left[-ax^2/2 + xLnx - x\right]_2^1 = 7/4 - 2\ln 2$$

4. Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, et tout $x, t > 0$, on a : $f_a(\alpha x + (1-\alpha)t) \geq \alpha\ f_a(x) + (1-\alpha)\ f_a(t)$

$f_a^{''}(x) = -1/x^2$ et f est concave.

5. Etudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

On aune suite géométrique :

Si $a < 1$, la suite est convergente vers 0,

Si $a = 1$, la suite est stationnaire égale à u_0,

Si $a > 1$, la suite est divergente.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t+1} dt$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$

On obtient : $I_1(x) = x - 2Ln(x+1)$ et $I_2(x) = \frac{x^2}{2} - x$

2. Calculer $I_3(x)$

On obtient : $I_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 2Ln(x+1)$

3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $\dfrac{x-1}{x+1}$ qui est nulle pour x=1. La fonction est décroissante de $-\infty$ à 1 puis croissante. Son minimum est égal à $1-2Ln2$.

4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x)\,dx$

$$J_1 = \int_0^1 I_1(x)\,dx = \int_0^1 (x - 2Ln(x+1)\,dx = \tfrac{1}{2} - 2\big[(x+1)Ln(x+1) - (x+1)\big]_0^1 = \frac{5}{2} - 4Ln2$$

Exercice n° 5

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$.

On tire aléatoirement un point M (x, y). Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

La probabilité est égale au rapport des deux surfaces : la partie du disque dans le carré et le carré, soit : $\pi / 4$

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in N$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$

On obtient $I(0) = \pi/2, I(1) = 1, I(2) = \pi/4$

2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$

On obtient : $I(n) = \dfrac{n-1}{n} I(n-2)$

3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$

On calcule $I(n+1) - I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos t - 1)\,dt \le 0$. La suite est donc décroissante et de plus positive, donc convergente vers l.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I(n+1)}{I(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = \frac{l}{l} = 1$$

5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.

$u(0) = u(1) = \pi / 2$

6. Démontrer que, pour tout n, $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.

$$u(n+1) = (n+2)I(n+2)I(n+1) = (n+2)\times\frac{(n+1)}{(n+2)}I(n)I(n+1) = u(n) = \pi/2$$

7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} nI^2(n)$

Comme la suite $I(n)$ est décroissante : $I(n+1) \le I(n) \le I(n-1)$, puis en multipliant par $I(n)$ et n, on obtient : $u(n)\times\dfrac{n+1}{n} \le nI^2(n) \le u(n-1)$ et par passage à la limite $\lim\limits_{n\to\infty} nI^2(n) = \pi/2$

8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^{p} et de p.

On obtient : $I(2p) = \dfrac{1\times 2....\times(2p-1)}{2\times 4...\div(2p)}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi\times C_{2p}^{p}}{2\times 4^{p}}$ et

$$I(2p+1) = \frac{2\times 4....\times(2p)}{3\times 5...\div(2p+1)}\times 1 = \frac{4^{p}}{(2p+1)\times C_{2p}^{p}}$$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^x + 1$.

1. Etudier les variations de *f*.
   La dérivée de *f* est égale à $f'(x) = e^x(x+1)$
   La fonction est donc décroissante avant -1, puis croissante.

2. La fonction *f* admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
   La dérivée seconde de *f* est égale à $f''(x) = e^x(x+2)$ et elle admet un point d'inflexion $(-2, 1 - 2/e^{-2})$

3. Tracer le graphe de *f*. On a une asymptote horizontale en 1 et une branche parabolique dans la direction Oy.

4. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1 + \left[e^x x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\,dx = 2/e$.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n\,dx$

1. Calculer I_1 et I_2.
   $$I_1 = \int_1^e x\,Lnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Lnx\right]_1^e - \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
   Par intégration par parties, on obtient : $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}$, d'où $I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2-1}{4}$.

3. Calculer I_3 et I_4. On obtient : $I_3 = \frac{e^2+3}{8}$ et $I_4 = \frac{e^2-3}{4}$.

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   On peut vérifier que $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge 1 (on peut aussi le voir directement).

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n).

   $$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \frac{(2\times 4)\times(3\times 5)....n(n+2)\times(n+1)(n+3)}{3^2 \times 4^2....(n+1)^2\times(n+2)^2} = \frac{2}{3}\times\frac{(n+3)}{(n+2)}$$
   et la suite converge vers 2/3.

3. Soit $w_n = Ln(u_n)$.

   - Montrer que la suite (w_n) converge. Comme (u_n) converge vers 1, (w_n) converge vers 0.

4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.

$t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} Ln(u_k) = Ln(\prod_{1}^{n} u_k) = Ln(v_n)$ qui converge vers $Ln(2/3)$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. Calculer I_n. On effectue deux intégrations par parties, en posant chaque fois : $u(x) = e^{-x}$ pour obtenir $I_n = (-1)^n e^{-n\pi} (\dfrac{1+e^{-\pi}}{2})$.

2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite. On a : $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = (-1)e^{-\pi}$, soit une suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue qui converge vers 0.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.

   La surface de l'étang est égale à $\frac{(500-400)}{500}\times\text{Surface du terrain} = 200\,m^2$.

2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

   Première possibilité : augmenter le nombre de flèches tirées, mais ceci présente l'inconvénient d'augmenter les coûts.

   Deuxième possibilité : s'assurer que toute la zone est couverte par les flèches, en stratifiant le terrain en rectangles et en envoyant les flèches dans chaque sous rectangle (et sans augmenter le nombre total de flèches).

Exercice n° 6

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x-3y = 2Ln2 \\ x+y = 4Ln2 \end{cases}$

   Pars soustraction des deux lignes, on obtient : $x = \frac{7}{2}Ln2$ et $y = \frac{1}{2}Ln2$.

2. On pose : $I = \int_0^{Ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J = \int_0^{Ln16} \frac{1}{e^x+4}dx$.

Calculer I et J.

D'après la première question, on est amené à calculer :

$I-3J = 2Ln2$ et $I+J = 24Ln2$, d'où $I = \frac{7}{2}Ln2$ et $J = \frac{1}{2}Ln2$.

Exercice n° 7

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \le x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand *x* tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*

2. Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

   On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si x est non nul et $f'(0)=0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand x tend vers zéro, donc f n'est pas de classe C^1

3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x)=0$. On trouve $x=0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=1$, la dérivée de : $x^2 \, Arc\tan(x)$

2. Calculer $I=\int_1^2 \frac{Log(x)}{x}dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

3. Résoudre l'équation : $x^3-6x^2+11x-6=0$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t+1}{t+2}dt$

5. Résoudre l'inéquation $\frac{x^2-2}{x-1}\leq 0$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan, qui passe par le point $A(1,-1)$ et est parallèle au vecteur $u\,(1,2)$

7. Résoudre le système d'équations, où Ln désigne le logarithme népérien :

$$\begin{cases} Ln\,x+Ln\,y=2 \\ x+y=\frac{5}{2}e \end{cases}$$

8. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}u_n$ et $u_0 > 0$

9. Une course à pied en relais (3 équipiers) se déroule entre les communes de Rockville et Fieldville, distantes de 38 kms.
Le premier coureur doit parcourir 10 kms et sa vitesse est de 14 kms/heure,
le deuxième coureur doit parcourir 13 kms et sa vitesse est de 17 kms/heure, et
le troisième coureur doit parcourir 15 kms et sa vitesse est de 16 kms/heure.
Quel sera le temps réalisé par ce relais ?

10. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) est convergente, quelle est alors sa limite ?

3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox, le graphe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 + x^2}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Tracer le graphe de f.
3. Préciser les points d'inflexion de son graphe.
4. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (f(x) - 1)\,dx$

Exercice n° 4

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par:

$$f(x) = 2x - \frac{Ln(x)}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que la courbe C admet une asymptote oblique D, et étudier la position relative de la courbe C par rapport à la droite D.

3. Etudier les variations de la fonction *f*.

4. Tracer la courbe C.

5. Calculer $I_n = 2\int_1^n \frac{Ln(x)}{x^2}dx$, pour *n* entier strictement supérieur à 1.

6. Que représente I_n ?

7. Calculer la limite de I_n.

Exercice n° 5

On dispose de deux « dés ».

Le premier dé est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.

Le deuxième dé est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (superficie la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que $X>4$?
3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?

Exercice n° 6

On considère la suite de polynômes réels P_n définie par : $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$, pour $n \geq 2$.

1. Calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$
2. Montrer que P_n admet une unique racine α_n comprise entre 0 et 1 (on précisera la valeur exacte de α_2)
3. Démontrer que, pour $n \geq 2$: $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
4. Etudier la convergence de la suite (α_n)
5. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$ et en déduire que α_n est solution d'une équation de degré n+1.
6. Comparer $2\alpha_n - 1$ et α_2^{n+1}
7. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n)

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'intangibilité des frontières héritées de la colonisation a été consacrée par l'OUA en 1963. L'application de ce principe devrait-il être remis en question ? Peut-il connaître des aménagements selon les situations locales ?

Sujet n° 2

L'Histoire de l'Afrique apparaît comme un véritable enjeu. On ne compte plus les commentaires venus de tous horizons estimant que l'Afrique est peu ou prou un continent sans Histoire jusqu'au philosophe Friedrich Hegel estimant que « L'Afrique n'est pas une partie historique du monde ». D'où vient selon vous cette tendance récurrente des occidentaux à considérer que l'Afrique n'a pas d'Histoire ?

Sujet n° 3

Quelles seraient selon vous les conditions nécessaires pour que l'Afrique connaisse un développement industriel, commercial et financier au moins intra continental ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

1. Etudier les variations de *f* et sa convexité.
2. Tracer le graphe de *f*.
3. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$
4. Pour quelle valeur du paramètre α a-t-on $I = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 2e - 3$?
5. On considère la fonction numérique g d'une variable réelle définie par : $g(x) = (x^2 + 1)^k e^x$ où k est un nombre réel strictement supérieur à 1 dans cette question. Etudier ses variations.
6. Etudier la convexité de g pour k=1/2.

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction *f* définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
2. Etudier la convergence de la suite (u_n).
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \dfrac{f(t)}{t}\,dt$
4. Soit $I_\alpha(x) = \int_{1}^{x} \dfrac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$. Pour quelles valeurs de α, $I_\alpha(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$?

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée.

2. Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$

Exercice n° 4

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3,$$

où k est un paramètre réel.
Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local pour f ?

Exercice n° 5

Soient f et g deux applications numériques définies sur R^{+*} (ensemble des nombres réels strictement positifs), où f est convexe et g affine.
On suppose que :

(1) $\forall x > 0, \quad f(x) \leq g(x)$
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g.

Exercice n° 6

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

2. $\int_1^2 x^2 \, Log\, x\, dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Frédéric LENOIR : intitulé : « L'AME DU MONDE » paru aux éditions NIL en mai 2012.

Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

Du sens de la vie

Un sage prit la parole et dit : « Ô enfants des hommes, écoutez le premier noble enseignement sur le sens de la vie humaine.

La plupart des malheurs de l'humanité viennent du fait que bien des hommes, surtout ceux qui exercent le pouvoir et possèdent la richesse ne se sont jamais interrogés sur la signification de leur existence. Ils vivent suivant la pente de leurs pulsions et de leurs besoins matériels. Ils descendent, inconscients le fleuve de l'existence, telles des bûches ballotées par les eaux, sans jamais rien maîtriser du cours de leur vie.

A ce compte-là, même les cadavres jetés dans la rivière descendent plus vite que les vivants !

Mais est-il encore un Vivant, celui qui ne vit que selon les besoins immédiats de son corps et étouffe les questions et les besoins de son âme ?

Pourquoi sommes-nous sur terre ? Avons-nous chacun quelque chose de particulier à réaliser ? Les évènements qui nous arrivent sont-ils seulement le fruit du hasard ou bien ont-ils une signification ? Avons-nous une destinée à accomplir ? Sommes-nous le jouet de nos instincts et de notre éducation ou bien pouvons-nous acquérir une vraie liberté ?

Et si tel est le cas, comment en faire bon usage ? Sur quels rochers fonder notre vie ? Peut-on atteindre un bonheur véritable et durable ? Comment nourrir notre âme autant que notre corps et comment faciliter la bonne entente de cet attelage de l'être humain ? Notre esprit disparaît-il avec le corps physique ?

… / …Voici les questions que devrait se poser tout être humain lorsqu'il comprend qu'il n'est pas qu'un animal soumis aux lois universelles du plaisir ou du déplaisir, de l'attraction et de la répulsion ; lorsqu'il découvre qu'il possède un esprit ou une âme spirituelle, peu importe les mots utilisés, qui lui permettent de maîtriser son corps, ses émotions, ses pulsions.

La grandeur de l'être humain, c'est qu'il est le seul être vivant qui puisse s'interroger sur la signification de son existence et lui donner une direction, un but.

Mais malheureux l'homme qui n'a pas découvert le sanctuaire de l'esprit. Malheureux celui qui n'a d'autre préoccupation que de survivre !

Malheureux l'homme qui ne se pose jamais la question : comment vivre de manière proprement humaine ? Comment mener une vie bonne ? Qu'est ce qui est vraiment important et qu'est-ce qui ne l'est pas ?

Comment devenir pleinement moi-même et être utile aux autres ?

Comment réussir ma vie afin qu'à l'instant de ma mort, je puisse partir en paix et regarder derrière moi le cœur serein ?

Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il possède deux grands trésors à l'intérieur de lui-même : la clarté de l'esprit qui peut le rendre libre, et la bonté du cœur qui peut le rendre heureux.

Malheureux l'homme qui mène une existence semblable à celle des bêtes, enchaîné à ses instincts et seulement préoccupé des soucis matériels de la vie. Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il est un homme ».

Un sage prit la parole et dit : « La vie est un voyage. Comme les oiseaux nous sommes un jour appelés à quitter le nid de notre enfance pour voler de nos propres ailes. Nous allons découvrir l'amour et bien souvent fonder une famille. Nous allons apprendre un métier pour nous réaliser dans un travail et subvenir à nos besoins matériels et à ceux de nos enfants.

Tout cela est bien. Mais tout cela n'est pas suffisant. Au long du voyage de la vie, nous allons rencontrer bien des obstacles. La maladie peut survenir, l'amour peut s'éclipser, nos proches vont mourir, nous ne sommes jamais sûrs de toujours pouvoir faire face aux difficultés matérielles de l'existence.

Nous allons aussi découvrir combien il est difficile d'aimer, combien il est rare de trouver un travail qui nous épanouisse en profondeur, combien nous sommes souvent pris dans des contradictions intérieures, dans des peurs, des colères, des frustrations, des jalousies, des découragements.

Au fil de la vie, nous allons devoir apprendre à vivre. Non pas à survivre, mais à vivre. A vivre pleinement, les yeux ouverts avec conscience et attention. A vivre en étant capable de choisir les bonnes personnes pour partager notre quotidien, en évitant de commettre les mêmes erreurs que dans le passé, en se donnant les moyens d'être véritablement soi-même et heureux, autant que faire se peut.

Tout cela s’apprend avec le temps et l’expérience. Mais il est infiniment précieux d’utiliser au plus tôt la clarté de notre esprit pour nous guider sur le chemin de la vie. Bien des égarements, des erreurs, des mauvais choix et des drames pourront être évités.

Ecoutez l’histoire de cette femme tenant son enfant dans les bras.

Passant devant une grotte, elle entend une voix mystérieuse qui lui dit : entre et prends tout ce que tu veux. Mais souviens-toi d’une chose : quand tu seras ressortie, une porte se refermera à tout jamais. Profite de l’opportunité, mais n’oublie pas le plus important.

La femme pénètre dans la grotte et y découvre un fabuleux trésor. Fascinée par l’or, les diamants et les bijoux, elle dépose son enfant sur le sol et s’empare de tout ce qu’elle peut. Elle rêve à tout ce qu’elle va pouvoir faire de ces richesses. La voix mystérieuse lui dit : « Le temps est écoulé, n’oublie pas le plus important. » A ces mots, la femme chargée d’or et de pierres précieuses court hors de la cavité dont la porte se referme derrière elle à tout jamais. Elle admire son trésor, et se souvient alors, seulement, de son enfant qu’elle a oublié à l’intérieur.

Combien d’êtres humains passent l’essentiel de leur vie à se soucier de choses matérielles ou futiles et oublient de prendre le temps de vivre les expériences les plus essentielles : l’amour, l’amitié, l’activité créatrice, la contemplation de la beauté du monde ? Ils ne sont ni bêtes ni méchants, mais ignorants. Ignorants de ce que la vie peut donner de meilleur et cela ne coûte rien ! Le superflu est onéreux, mais l’essentiel est offert. Encore faut-il le savoir.

Et combien aussi préfèrent suivre la masse de ceux qui obéissent aux modes de leur époque ? Apprenez, ô enfants des hommes, à cheminer sur votre voie, celle qui est bonne pour vous, celle qui vous est destinée et qui réjouira votre cœur. »

De la vraie liberté

Un chant d’oiseau déchira le ciel. Alors un sage prit la parole et dit : « Ecoutez, ô enfants des hommes, le noble enseignement sur la connaissance de soi et la liberté. Tout homme aspire à être libre et c’est là une grande et belle ambition, car que vaut la vie d’un prisonnier, ou celle d’un esclave ?

Il existe toutefois de nombreuses formes de prisons ou de servitudes. La plus subtile et la plus pernicieuse, celle que bien peu d’homme considèrent et dénoncent, c’est la prison intérieure de l’homme esclave de lui-même.

Est-il libre l’homme qui s’adonne au jeu, au point d’en perdre tous ses biens ? Est-il libre l’homme qui passe plusieurs heures par jour devant son écran, sans pouvoir décrocher ? Est-il libre l’homme qui se laisse emporter par une violente crise de jalousie, allant jusqu’à frapper sa femme ? Est-il libre l’homme qui est tellement angoissé qu’il ne pourra parler en public, ou celui qui ne pourra rester dans une pièce où il a vu une araignée ?

Nous sommes tous plus ou moins prisonniers de nos peurs, de nos pulsions, de notre caractère, de nos habitudes, de nos émotions. La plupart de nos actions et de nos choix sont mus par ces tendances qui nous dominent. Esclaves de nous-mêmes, nous sommes les seuls à pouvoir nous libérer de cette prison intérieure.

Le début de la libération passe par la connaissance de soi. C'est par une introspection, une fine observation de notre comportement, de nos réactions, de l'affleurement de nos émotions que nous parvenons progressivement à nous connaître et à comprendre les causes profondes de nos actions.

Travailler sur nous-mêmes, corriger nos réactions, modifier nos réflexes spontanés ou nos mauvaises habitudes demande effort et volonté. Mais c'est le prix à payer pour gagner notre liberté intérieure.

Car l'homme qui ne se connaît pas est comme aveugle. Il marche sans assurance et risque à tout instant de heurter un obstacle ou de s'égarer.

C'est pourquoi le commencement de la sagesse, c'est de tourner son regard vers soi-même et d'apprendre qui nous sommes, quels sont nos motivations, nos besoins, nos réactions, nos attirances et nos répulsions, nos habitudes, nos addictions, nos émotions les plus fortes et quelles en sont leurs causes. Comme le disait un ancien maître de la sagesse : « On ne naît pas libre, on le devient. »

… / …Un sage prit la parole et dit : « L'esclavage intérieur ne vient pas seulement de nos pulsions et de nos émotions, mais aussi de l'attachement que nous portons aux objets qui nous entourent.

La dépendance à l'égard des choses matérielles est un des esclavages les plus répandus de nos jours. Non seulement nous voulons toujours plus et toujours mieux, mais nous n'arrivons pas à nous passer de ces choses qui n'existaient pas la veille.

La plupart des humains ont pu vivre heureux pendant des millénaires sans voiture et sans téléphone portable, sans électricité et sans Internet, sans télévision.

Mais imaginons aujourd'hui quelqu'un qui partirait vivre dans un lieu sans rien de tout cela. On le prendrait pour un fou et nul n'aurait envie de le suivre, car nous nous sommes tant habitués à ce confort et à ces objets qu'ils nous semblent indispensables à notre équilibre, voire à notre survie.

Il nous serait fort utile au contraire d'apprendre à nous en détacher. A en user librement sans addiction, en sachant parfois nous en séparer volontairement.

Possédez des objets mais n'en soyez pas possédés. Usez des biens matériels sans en être esclaves. Voilà un pas important vers la vraie liberté.

Être libre, c'est aussi ne pas agir en fonction du regard d'autrui. Or bien souvent nos actions ou nos réactions sont mues par le désir de plaire ou de ne pas déplaire, de se conformer aux usages communs ou bien au contraire de se rebeller contre eux, d'attirer l'attention ou de rester discrets.

Agissant ainsi, nous sommes prisonniers du regard des autres. La sagesse consiste aussi à se libérer de ce regard pesant, bien souvent si intériorisé que nous n'en avons pas conscience.

Voici l'histoire d'un enfant qui demande à son père le secret du bonheur.

Alors le père dit à son fils de le suivre ; ils sortent de leur maison, le père sur leur vieil âne, le fils à pied. Et les gens du village de s'indigner : « Quel mauvais père d'obliger ainsi son fils d'aller à pied !

Tu as entendu mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le lendemain, le père installe son fils sur l'âne tandis que lui marche à côté. Les gens du village lancent alors : « Quel fils indigne qui ne respecte pas son vieux père et le laisse aller à pied !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils montent tous les deux sur l'âne. Les villageois de dire : « Ils n'ont donc aucun cœur pour surcharger ainsi cette pauvre bête !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils partent en portant eux-mêmes leurs affaires, l'âne marchant derrière eux. Les gens du village commentent de plus belle : « voilà qu'ils portent eux-mêmes leurs bagages maintenant ! C'est le monde à l'envers !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Arrivés à la maison, le père dit à son fils : « Tu me demandais le secret du bonheur ? Peu importe ce que tu fais, il y aura toujours quelqu'un pour y trouver à redire. Fais ce que tu aimes ou ce que tu penses juste de faire, et tu seras heureux ! »

Nous avons tous besoin de reconnaissance, nous ne supportons pas qu'on nous critique et qu'on nous insulte. Ce besoin et cette aversion règnent en tyrans sur notre âme. Nous sommes sans cesse en quête d'un regard approbateur, d'un compliment, d'une gratification, d'un prix honorifique, d'une renommée sociale ou d'une bonne réputation.

A l'inverse, nous sommes bouleversés par une critique ou un reproche, blessés par une insulte même si elle vient d'un parfait inconnu, mis à terre par un échec qui nuit à notre réputation ou à notre prestige.

Ce comportement est normal dans l'enfance. Un enfant a besoin d'être conforté, encouragé, récompensé pour ses efforts. De même, il est normal qu'il vive mal les reproches qui atteignent son égo.

Mais ce qui est ordinaire chez l'enfant ne l'est pas chez l'adulte. Il est nécessaire de prêter attention à l'avis d'autrui, cependant un être humain doit pouvoir acquérir assez de confiance en lui pour ne pas constamment se soucier de l'approbation ou des critiques d'autrui.

Hélas, bien des hommes n'ont pas su ou n'ont pas pu acquérir cette confiance et ils continuent de vivre comme des enfants. La confiance et le juste amour de soi sont nécessaires à la croissance de l'être humain, à sa liberté et à son bonheur.

... / …Apprenez, ô enfants des hommes à passer de l'ignorance à la connaissance. Car l'ignorance est la cause de la plupart des maux.

Développez votre intelligence et vos connaissances pour apprendre à discerner. Toute votre vie, vous aurez à discerner le vrai du faux, le juste de l'injuste, le positif du négatif, l'utile de l'inutile, le nécessaire du superflu. La connaissance de vous-mêmes vous rendra libres et capables de faire les justes choix pour mener une vie bonne.

Mais rappelez-vous que la connaissance de soi est la plus importante. C'est pourquoi un ancien maître de la sagesse disait : « Connais-toi toi-même et tu connaîtras le monde et les dieux. »

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=1$, la dérivée de : $x^2\,Arc\tan(x)$ Soit $f(x)=x^2\,Arc\tan(x)$, alors $f'(x)=2x\,Arc\tan(x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $f'(1)=2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi+1}{2}$

2. Calculer $I=\displaystyle\int_1^2\frac{Log(x)}{x}dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

$I=\left[1/2\,(Log\,x)^2\right]_1^2=\dfrac{(Log\,2)^2}{2}$

3. Résoudre l'équation : $x^3-6x^2+11x-6=0$

On vérifie que $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)=0$, d'où x=1, 2, 3.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{t+1}{t+2}dt$

On a : $\dfrac{t+1}{t+2}=1-\dfrac{1}{t+2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{t+1}{t+2}dt=\lim_{+\infty}(x-Ln(x+2)-1+Ln3)=+\infty$

5. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\le 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\le 0$ est $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left]1,\sqrt{2}\right]$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan, qui passe par le point $A(1,-1)$ et parallèle au vecteur $u(1,2)$. L'équation de la droite est $y=2x-3$

7. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} Ln\, x + Ln\, y = 2 \\ x + y = \frac{5}{2}e \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x \times y = e^2 \\ x + y = \frac{5}{2}e \end{cases}$, d'où $y = \frac{e^2}{x}$ et $2x^2 - 5ex + 2e^2 = 0$. L'ensemble des solutions est : $(x, y) = (2e, e/2)$ ou $(e/2, 2e)$

8. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n$ et $u_0 > 0$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1}u_{n-1} = ... = \frac{2}{n+2}u_0 \to 0$$

9. Une course à pied en relais (3 équipiers) se déroule entre les communes de Rockville et Fieldvillle, distantes de 38 kms.
Le premier coureur doit parcourir 10 kms et sa vitesse est de 14 kms/heure,
le deuxième coureur doit parcourir 13 kms et sa vitesse est de 17 kms/heure, et
le troisième coureur doit parcourir 15 kms et sa vitesse est de 16 kms/heure.
Quel sera le temps réalisé par ce relais ?

Le premier coureur parcourt 1 km en $\frac{60}{14} = 4{,}2857mn$

Le deuxième coureur parcourt 1 km en $\frac{60}{17} = 3{,}5294mn$

Le troisième coureur parcourt 1 km en $\frac{60}{16} = 3{,}75mn$

Au total, le temps est : $10 \times 4{,}2857 + 13 \times 3{,}2594 + 15 \times 3{,}75 = 144mn,$ soit $2h24$

10. Déterminer $\underset{x \to 0+}{Lim} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$

$$\underset{x \to 0+}{Lim} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \underset{x \to 0+}{Lim} \frac{x - (x - x^3/6)}{x^3} = 1/6$$

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. On vérifie par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) converge, sa limite l vérifie le théorème du point fixe, $l = \frac{l+2}{l+1}$ et on trouve $l = \sqrt{2}$

3. La fonction f est une fonction homographique décroissante qui admet les droites $x=-1$ et $y=1$ comme asymptotes.

4. L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à :

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}dx = \int_1^2 (1+\frac{1}{x+1})dx = [x+Ln(x+1)]_1^2 = 1+Ln(3/2)$$

5. Comme la fonction f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites de rang pair et impair sont monotones. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ (on le vérifie par récurrence à partir de u_1) et la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de *f*.

La dérivée de *f* est : $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ et elle s'annule pour $x = \pm 1$

La fonction est décroissante de moins l'infini à -1 et à valeurs dans l'intervalle $[1/2, 1[$
elle est croissante de -1 à 1 et à valeurs dans l'intervalle ½, 3/2, et
elle est décroissante de 1 à plus l'infini et à valeurs dans l'intervalle 3/2, 1.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Préciser les points d'inflexion de son graphe. Les points d'inflexion correspondent aux valeurs qui annulent la dérivée seconde. Le numérateur de la dérivée seconde est égal à :

$$-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)4x(1+x^2) = 2x(x^2-3)$$

On obtient donc 3 points d'inflexion, à savoir $(0,1); (\sqrt{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{4}); (-\sqrt{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{4})$

4. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (f(x)-1)\,dx$

Comme *f*(*x*)-1 est impaire, *I*=0.

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par:

$$f(x)=2x-\frac{Ln(x)}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0+}(2x-\frac{Ln(x)}{x^2})=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(2x-\frac{Ln(x)}{x^2})=+\infty$$

2. Démontrer que la courbe C admet une asymptote oblique D, et étudier la position relative de la courbe C et de la droite D.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ *et* $\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x=0$

La courbe admet donc une asymptote oblique D d'équation : *y=2x*.

3. Etudier les variations de la fonction *f*.

La dérivée de f est égale à $f'(x)=\frac{2x^3-1+2Ln(x)}{x^3}$ et elle est du signe de

$g(x)=2x^3-1+2Ln(x)$, qui a pour dérivée : $g'(x)=6x^2+2/x>0$. La fonction g est donc strictement croissante à valeurs dans R et comme elle est continue, elle est bijective. Il existe donc une unique valeur α qui annule g, et f est décroissante entre 0 et α, puis croissante.

4. Tracer la courbe C.

La courbe C admet D comme asymptote oblique, l'axe Oy comme asymptote verticale et un minimum en α.

5. Calculer $I_n=2\int_1^n\frac{Ln(x)}{x^2}dx$

Par intégration par parties, en posant $u=Ln(x)$ *et* $v'=1/x^2$, on obtient :

$$I_n=2\left[1-\frac{Ln\,n}{n}-\frac{1}{n}\right]$$

6. Que représente I_n ?

Elle représente l'aire comprise entre la courbe C, l'asymptote D et les droites verticales x=1 et x=n.

7. Calculer la limite de I_n. On obtient 2 comme limite.

Exercice n° 5

On dispose de deux « dés ».
Le premier dé A est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.
Le deuxième dé B est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (superficie la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
Pour le premier dé A, la probabilité de faire 1 est égale à 3/6, de faire 2 égale à 2/6, puis 1/6 pour le 3.
Le total des surfaces des faces différentes du deuxième dé B est égal à 26 cm2.
Pour les deux plus petites surfaces (2*3) qui portent la chiffre 1, la probabilité est donc égale à 6/26=3/13.
Pour les deux surfaces moyennes (2*4) qui portent la chiffre 2, la probabilité est donc égale à 8/26=4/13.
Pour les deux plus grandes surfaces (4*3) qui portent la chiffre 3, la probabilité est donc égale à 12/26=6/13.
La loi de probabilité de X est donc :

X	2	3	4	5	6
Probabilité	9/78	18/78	29/78	16/78	6/78

2. Quelle est la probabilité que $X>4$? 22/78=11/39=0,28…

3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?
L'hypothèse selon laquelle la probabilité que le « dé » parallélépipédique tombe sur une certaine face est proportionnelle à sa surface n'est pas réaliste. En effet, le dé a vraiment une probabilité presque nulle de tomber sur la plus petite face, du fait du positionnement du centre de gravité et de l'angle d'incidence.

Exercice n° 6

On considère la suite de polynômes réels P_n définie par : $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$, pour $n \geq 2$.

1. Calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$

$P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n-1$

2. Montrer que P_n admet une unique racine α_n comprise entre 0 et 1 (on précisera la valeur exacte de α_2)

$$P_n^{'}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \text{ et } P_n^{'} > 0 \text{ sur } R^+$$

Cette suite de polynômes est strictement croissante et continue sur l'ensemble des réels positifs et on a : $P_n(0) \times P_n(1) < 0$

Il existe donc une unique racine α_n pour P_n dans l'intervalle $]0,1[$

3. Démontrer que, pour $n \geq 2$: $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

$$P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+1}^k + \alpha_{n+1}^{n+1} - 1 = P_n(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = 0, \text{ d'où } P_n(\alpha_{n+1}) < 0$$

4. Etudier la convergence de la suite (α_n)

De plus $P_n(\alpha_n) = 0$ et l'inégalité ci-dessus s'écrit : $P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$, ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante et comme elle est minorée par zéro, elle converge.

5. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$ et en déduire que α_n est solution d'une équation de degré n+1.

Comme on a une suite géométrique, on obtient $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$

Et comme $P_n(\alpha_n) = 0$, on a : $\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

6. Comparer $2\alpha_n - 1$ et α_2^{n+1}

La suite (α_n) étant décroissante, on a, pour *n* plus grand que deux : $\alpha_n < \alpha_2 < 1$

Par stricte croissance de la fonction puissance, il vient : $\alpha_n^{n+1} < \alpha_2^{n+1}$

Et d'après la question précédente, on obtient : $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$

7. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n)

Comme $\alpha_2 \in]0,1[$, la suite (α_n) converge vers ½ (car α_n^{n+1} tend vers zéro).

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

1. Etudier les variations de *f* et sa convexité.
   On a : $f'(x) = (x^2 + 1 + 2x)e^x = (x+1)^2 e^x$
   La fonction est donc strictement croissante à valeurs dans $[0, +\infty[$ et elle admet une branche parabolique dans la direction Oy en $+\infty$
   La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (x+1)(x+3)e^x$ et la fonction *f* est concave entre -3 et -1 et convexe sinon.

2. Tracer le graphe de *f*.
   La fonction est strictement croissante. On a une tangente horizontale au point (-1, 2/e) et l'axe Ox est une asymptote horizontale à $-\infty$

3. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

   $$I = \int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x\,dx = \left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} x e^x\,dx = (1 - 2/e) - 2\left[x e^x\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^x\,dx$$

   Et $I = (1 - 2/e) - 2(-1 + 2/e) = 3 - 6/e$

4. Pour quelle valeur du paramètre α a-t-on $\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 2e - 3$?

   Une primitive de *f* est $F(x) = (x^2+1)e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$
   Il faut donc $F(\alpha) - F(0) = F(\alpha) - 3 = 2e - 3$, soit $\alpha = 1$

5. On considère la fonction numérique *g* d'une variable réelle définie par : $g(x) = (x^2+1)^k e^x$ où k est un nombre réel strictement supérieur à 1. Etudier ses variations.
   Remarquons que la fonction *f* correspond à la fonction *g* pour *k*=1. On a :
   Cette dérivée s'annule pour $(1 + 2kx + x^2) = 0$
   Et on obtient deux racines $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$
   La fonction est décroissante entre ces deux racines et croissante à l'extérieur.

6. Etudier la convexité de g pour k=1/2.
   On obtient : $g''(x) = (x^2+1)^{-3/2} e^x (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
   Le signe de cette expression est donc celui de $z = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
   Et sa dérivée $z' = (x+1)(2x^2 + x + 2)$
   Elle s'annule en -1, z est égal à 1 pour cette valeur et reste toujours positive, donc la fonction est convexe.

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction f définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

   Sa dérivée est égale à $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et la fonction est donc strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $[2, 1[$. Le graphe de f coupe la première bissectrice en $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Etudier la convergence de la suite (u_n).
   On vérifie par récurrence que $u_n > 1$ pour n>1. L'examen du graphe de f nous conduit à considérer la suite des termes de rang pair et celle de rang impair. On a :
   $u_{2n} = \dfrac{1+2u_{2n-2}}{1+u_{2n-2}}$. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   La suite (u_{2n+1}) vérifie la même relation, elle est décroissante et minorée par l. Les deux suites sont convergentes vers l, et donc aussi (u_n).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \lim_{x\to+\infty} \left[Ln\, t - \frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(Ln\, x - \frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$$

4. Soit $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$. Pour quelles valeurs de α, $I_\alpha(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   On sait que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, donc il faut $\alpha > 1$.

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$$

1.Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \leq x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand x tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*

2.Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si x est non nul et $f'(0) = 0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand x tend vers zéro, donc f n'est pas de classe C^1

3.Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$. On trouve $x = 0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}(k \in Z^*)$.

Exercice n° 4

Soit f une fonction numérique d'une variable réelles définie par :

$$f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3,$$

où k est un paramètre réel.
Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local pour f ?

On a : $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$ et $f''(x) = 2(1-k)^3 + 6(1+k)x$, puis $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$. Si $k \neq 1$, alors 0 est extremum local. Si k=1, alors $f(x) = 2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Exercice n° 5

Soient f et g deux applications numériques définies sur R^{+*}, où f est convexe et g affine.
On suppose que :

(1) $\forall x > 0, \quad f(x) \leq g(x)$
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g.

On suppose que $f \neq g$, alors $\exists\, y > 0, y \neq 1,\ f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme g est affine, $g(y) = ay + b$ et f étant convexe, pour α compris entre zéro et 1, on a :

$$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(1) < \alpha g(y) + (1-\alpha)(a+b)$$

et pour $\alpha = 0$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction, donc $f = g$.

Exercice n° 6

$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ par changement de variable ou intégration par parties (on peut écrire au numérateur : $1 = (1 + x^2) - x^2$).

$\int_1^2 x^2 \, Log\, x \, dx = \frac{8}{3} Ln2 - \frac{7}{9}$ par intégration par parties

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ par décomposition canonique du dénominateur en posant $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$

INSTITIT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans toute la composition *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 0$, la dérivée de : $\dfrac{x e^x}{1+x^2}$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \sin x \, dx$

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} e^{x+y} = \sqrt{e^3} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $2x + 1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 e^t}{t^2+2} dt = 0$

5. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{x^x}{1+x}$

6. Dans un repère orthonormé de l'espace R^3, déterminer un vecteur orthogonal au plan d'équation : $3x - 5y + 2z - 4 = 0$

7. Soit *f* la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où *k* est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de *k*, l'origine est-elle un extremum local ?

8. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x+2}\, dx$

9. Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi ces sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Quel est le pourcentage de lycéens faisant du volley, mais pas de natation ?

10. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$, où *n* est un entier naturel non nul et $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de *k* éléments pris parmi *n*.

Exercice n° 2

On définit, sur *R*, la fonction G_k par : $G_k(x) = e^{-kx^2}$, où *k* est un nombre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de G_k.

2. Résoudre l'équation : $G_k''(x) = 0$

3. Tracer le graphe de G_k pour *k*= ½ et *k*=1. Que peut-on en déduire ?

4. On suppose *k*= ½. Soit *a* la solution positive de l'équation $G_k''(x) = 0$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de G_k au point d'abscisse *a*.

Exercice n° 3

Soit $f : [a,b] \to R$, une application continue telle que : $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = 0$ pour toutes fonctions en escalier *g*, définies sur $[a,b]$. Expliciter *f*.

Exercice n° 4

Soit la suite (F_n) définie par :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_1 = -3,\ F_2 = 2$$

1. Exprimer $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1}$ en fonction de n. (On pourra calculer cette expression pour $n = 2$ et $n = 3$)

2. La suite (F_n) est-elle convergente ?

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = x^2 \times Ln(x^2 + 1)$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de la fonction f et tracer C.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

3. On considère la fonction numérique f_n à valeurs réelles définie par:

$$f_n(x) = x^n \times Ln(x^2 + 1) \text{, où } n \text{ est un entier strictement supérieur à 2.}$$

Etudier les variations de la fonction f_n et tracer son graphe.

4. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ en fonction de n (entier naturel). On calculera d'abord J_0, J_1 et J_2.

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ en fonction de n.

Exercice n° 6

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$. Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de *f* pour $x \to +\infty$

Exercice n° 7

Soit *F* l'application numérique définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que *F* est définie, continue et dérivable sur *R*.

2. Etudier la parité de *F*.

3. Montrer que pour tout $x > 0$: $0 < F(x) < \frac{1}{2x}$. En déduire la limite de *F* en $+\infty$

4. Calculer la dérivée de *F* et résoudre l'équation $F'(x) = 0$ pour $x > 0$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Que pensez-vous du droit d'ingérence ? Sous quelles conditions est-il applicable et quelles pourraient-être selon vous les solutions alternatives ?

Sujet n° 2

D'après-vous, l'Afrique est-elle prête à mener une politique de recherche et d'innovation ? Dans quelles conditions et dans quel cadre ?

Sujet n° 3

Quelle politique, notamment agraire, faudrait-il mettre en place pour que les terres agricoles et les récoltes qu'elles procurent puissent mieux profiter à la population africaine et créer une nouvelle dynamique économique et commerciale bénéfique au continent africain dans son ensemble ?

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Etudier la convexité de f.
3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$f(x) = x^3\, Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Etudier la convexité de f.
3. Tracer le graphe de f.
4. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple:

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est positive ou nulle.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est décroissante.

3. Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est la primitive d'une fonction continue.

Exercice n° 4

Soit $M(x,y)$ un point du plan où $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

On pose $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$.

On tire aléatoirement des valeurs de *x* et de *y* entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le point *M* appartienne au domaine *D* ?

Exercice n° 5

Soit f l'application numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$

1. Etudier les variations de *f*.

2. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Etudier la convergence de cette suite (u_n) .

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x (f(t) - t)\,dt$

5. Trouver une fonction *g* continue telle que $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x (g(t) - t)\,dt$ soit finie.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e (Ln\, t)^n \, dt$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}
3. Pour tout $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}
4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

Exercice n° 7

Soit $f :]-1,1[\to R$ définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\, Ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

1. Donner un développement limité de f, d'ordre 3, au voisinage de 0.

2. Montrer que f admet une tangente T au point d'abscisse 0, donner son équation et la position du graphe de f par rapport à T.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Joël de Rosnay intitulé : Surfer la vie. Comment *sur-vivre* dans la société fluide, et paru aux éditions LLL, Les liens qui libèrent, en Mai 2012.

Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

Il nous faut donc promouvoir ce que j'appelle la « société fluide ». Une société qui se fonde sur des rapports de flux et pas seulement sur des rapports de force. L'avènement de la société fluide permettra de traiter les grands problèmes actuels, qu'ils soient liés à l'énergie, à la santé, à l'éducation ou à l'environnement. Trop souvent considérés sous l'angle de décisions centralisées et pyramidales, les grands enjeux de société sont soumis à des jeux de pouvoir personnel ou à des groupes de pression qui nous transforment en usagers passifs. Ainsi en est-il du nucléaire, symbole de la centralisation, de l'industrie pétrolière, de l'influence de quelques géants de l'industrie pharmaceutique ou de la mainmise de l'agroalimentaire sur nos vies quotidiennes.

Dans le même ordre d'idées nous avons besoin d'une réelle démocratie énergétique responsabilisante. Forts de notre conquête de *l'automobilité* avec l'automobile, puis de *l'infomobilité* avec Internet et le Smartphone, il nous reste à nous libérer de la tutelle énergétique en créant une *écomobilité* qui nous transformerait en producteurs – consommateurs à la fois autonomes et solidaires.

Cette nouvelle approche permettrait de passer d'un système de rapports de force, de concurrence et de compétition acharnée à un système de rapports de flux et d'échanges solidaires mettant en œuvre de nouvelles valeurs de nouvelles actions et de nouvelles responsabilités par exemple de sortir des rapports de force exercés par l'industrie nucléaire et pétrolière sur les usagers pour s'ouvrir à des rapports de flux représentés par une électricité autoproduite de manière décentralisée à partir d'énergies renouvelables et librement échangée entre utilisateurs. Pour y parvenir, il est nécessaire de se référer à des modèles autres que les seuls modèles économiques ou politiques.

En un certain sens, le surf représente la transposition dynamique de la vie elle-même : un modèle pour affronter la complexité du monde. Le surfeur chevauche un élément improbable, la vague qui va mourir sur le rivage, et en tire un plaisir éphémère. Le surf est bien plus qu'un sport, c'est un style de vie, un mode de fonctionnement en société. C'est aussi une expression passée dans le langage courant. On parle de surfer sur les sondages, sur Internet, dans l'esprit de l'opinion publique comme s'il s'agissait d'une grande vague puissante et déterminée. Cette métaphore (1) de plus en plus répandue symbolise l'entrée dans l'ère de la fluidité, après des siècles de rapports de force. Dans le cadre de la nouvelle société du numérique, de la fluidité des échanges et des rapports sociaux, nous commençons enfin à nous construire les uns par rapport aux autres

Effectivement, dans un monde reconfigurable et instable, rien n'est extrapolable comme par le passé. Des « effets pervers » peuvent tout remettre en cause. Que signifie « se former » à une époque où les connaissances acquises sont sans cesse bouleversées ? Comment exercer son « métier » sans être à la traîne d'un monde en perpétuel mouvement ? Associée à la crise mondiale, cette sorte de fuite en avant nourrit le sentiment d'insécurité des jeunes générations. Pour compenser cette impression que leur avenir se construit sur des sables mouvants, elles veulent profiter maintenant de tout ce qu'elles tiennent dans leurs mains. Elles veulent vivre de la gratification instantanée plutôt que d'attendre une récompense ou une reconnaissance tardive.

La transposition de ces valeurs dans la conduite de sa vie s'accorde aux comportements des surfeurs. Surfer sa vie, c'est profiter de l'instant, être à l'écoute de son environnement, de ses réseaux, évaluer en temps réel. les résultats de son action pour réussir à affronter les nouveaux défis de la société fluide. Le but du surfeur est non seulement de conserver son équilibre tout en surveillant ceux qui sont sur la même vague que lui et qui risqueraient de le déstabiliser, mais aussi et surtout de prendre du plaisir, de faire reconnaître ses compétences, d'être félicité par les surfeurs qui remontent pour prendre la vague suivante, comme dans une quête de renaissance perpétuelle.

Comme la vie qui s'éteint, la vague va mourir sur la plage mais il est possible de renaître de ses cendres dans une autre vie, et de repartir à la recherche de nouveaux enjeux et de nouveaux plaisirs avec la recherche de vagues suivantes.

Surfer la vie est à la fois un jeu, un défi, et une compétition et parfois une douleur. L'échelle des valeurs se déplace de la concurrence - qui vise à s'imposer et à réussir, - vers le partage, la solidarité, l'échange, le « gagnant-gagnant » qui autorisent davantage de souplesse dans la conduite de sa vie.

La métaphore du surf peut nous aider à construire des modèles de vie et de société plus vivables, plus solidaires. Dans un autre contexte, la génération du numérique, avec sa capacité de travail en réseau et son habileté à surfer sur la complexité, peut nous aider à explorer de nouvelles voies pour concevoir ensemble notre avenir. Au-delà des égoïsmes traditionnels à toute volonté de pouvoir, est-il possible que soit en train de naître une « société fluide » plus altruiste, plus empathique, plus soucieuse de l'intérêt commun que de l'intérêt particulier de quelques groupes ?

Surfer la vie dans une société fluide : risque et innovation

Une société qui ne prend pas de risques ne peut évoluer. Sans développement, sans croissance, sans partage, elle reste à l'état statique, se sclérose et menace de disparaitre. Prendre des risques, c'est accroître ses chances de gagner. C'est vrai d'une personne comme d'une entreprise. Pour cela, il faut affronter la peur : celle de l'échec, de la faillite, ou, pour un sportif celle de la chute et de la défaite. C'est la prise de risques matérialisée, par les nouveaux projets de recherche en laboratoire qui permet la découverte, l'invention et en définitive, l'innovation bénéfique pour la société toute entière.

Or, découverte, invention et innovation vont à l'encontre de la stabilité des idées reçues et des situations acquises. L'innovation dérange. Elle crée des rejets, tout comme un système immunitaire qui se défend avec ses anticorps et ses globules blancs contre les antigènes étrangers des microbes qui cherchent à envahir les cellules. Dans une entreprise, quand une équipe propose des idées nouvelles, on entend très souvent des réactions comme : « on n'a pas le budget », « ça se fait déjà en Chine », « la règlementation internationale ne le permettra pas », etc. Les Américains appellent ce syndrome le NIH, pour Not Invente Here : cela n'a pas été inventé ici, donc cela ne peut qu'être meilleur que ce que feraient nos équipes de recherche.

D'où la paralysie des innovations dans de grandes structures trop rigides et trop centralisées. Lorsque je travaillais à l'institut Pasteur, le professeur Jacques Monod me disait souvent : « Quand vous lancez une nouvelle idée, vous avez trois catégories de personnes contre vous : ceux qui font la même chose, ceux qui font le contraire et ceux qui ne font rien, c'est-à-dire tout le monde ! » C'est pourquoi il faut se battre pour innover, et pour cela prendre des risques.

Les personnes responsables de la naissance des innovations dans les entreprises publiques ou privées me semblent appartenir – d'après l'expérience que j'ai pu acquérir dans ces structures - à deux catégories : les « oui-mais » et les « oui-et ». Pour les premiers, la proposition que l'on vient de faire est toujours impossible à réaliser : « D'accord, c'est une assez bonne idée, *mais* on n'aura pas le temps de la mettre en œuvre, *mais* les concurrents y travaillent déjà, *mais* le planning est trop chargé, etc. Pour les seconds, il y a toujours une autre idée derrière la première : « Oui, c'est une bonne idée, *et* on pourrait aussi en profiter pour lancer un nouveau journal » ; « Excellente proposition, *et* on pourrait ajouter la coopération avec l'entreprise X » etc. L'ouverture d'esprit face à l'innovation est essentielle pour créer des synergies, des complémentarités, voire des amplifications permettant d'aller au-delà de l'idée originale.

Pour surfer la vie de manière créative et gratifiante, il est nécessaire de connaître et de mettre en œuvre certaines règles fondamentales qui permettent d'assurer, comme pour le surf lui-même, la sécurité, l'efficacité, et le plaisir dans la fluidité. Dans la vie individuelle et collective, des règles ayant fait leurs preuves au cours des siècles, voire des millénaires, ont permis aux hommes de construire les sociétés afin d'évoluer, de travailler ensemble et de coopérer, dans le respect de la dignité humaine, de la liberté, de la démocratie et de l'égalité.

Des règles trop souvent enfreintes, tout au long de l'histoire, par des régimes dictatoriaux totalitaires ou intégristes qui ont laissé en place, voire favorisé la répression des libertés humaines, l'esclavagisme, la torture, la criminalisation de l'économie, les guerres et les profondes inégalités sociales. Néanmoins, de grands principes de vie personnelle et collective existent et sont respectés dans le monde.

J'ai tenté de sélectionner ces principes d'humanité tels qu'ils ont été décrits par les grands philosophes et mis en pratique par les cinq grandes religions. Il n'est pas interdit de penser que leur application par de hauts dirigeants politiques et industriels ouvriraient des voies nouvelles pour affronter et surmonter la crise qui frappe le monde.

Voici mes sept règles et concepts pour surfer harmonieusement et intelligemment la vie : le respect de la diversité ; le respect de l'autre ; l'altruisme ; l'empathie ; la responsabilité individuelle et collective ; la fraternité ; la spiritualité laïque.

Le respect de l'autre, base de la solidarité pour construire l'avenir

Dans une société fluide fondée sur le partage, l'échange et les rapports de flux, le respect de l'autre constitue une donnée essentielle à la survie et au développement. Le respect de l'autre a toujours été considéré par les grandes religions et les grandes philosophies laïques comme une priorité majeure. Pour surfer la vie en harmonie avec les autres, chaque personne doit chercher à pratiquer une telle forme constructive de relation plutôt que de maintenir des rapports de force et de pouvoir conduisant à donner la priorité aux biens matériels, à la possession immédiate, donc à l'égoïsme, au détriment de l'ouverture aux autres.

La question du respect de l'autre et du vivre-ensemble est une constante chez tous les grands penseurs de la construction des sociétés humaines, de Gandhi à Martin Luther King. Selon ce dernier, « il faut apprendre à nous aimer comme des frères ou nous préparer à périr comme des imbéciles ». Pour lui, la question du « bien- vivre » plutôt que du « mal-être » est une question collective et pas seulement personnelle, car elle passe par le respect fondamental de l'autre et sa pratique.

La responsabilité individuelle et collective, clé de la réciprocité dans les liens sociaux

Une autre grande valeur nécessaire pour surfer sa vie, et surtout pour être capable d'agir collectivement, est la responsabilité : la prise de conscience de sa capacité à comprendre l'évolution des phénomènes d'un monde complexe, à gérer cette complexité et à agir sur elle pour en modifier l'évolution. Or nous semblons aujourd'hui dépassés par l'évolution scientifique et technologique, en constante accélération. Nous en perdons le contrôle, la maîtrise de la maîtrise. Cette incapacité à gérer la complexité et l'accélération fait naître des menaces qui requièrent non seulement de nouvelles responsabilités, mais plus que tout une nouvelle éthique (2).

Une bioéthique, bien sûr, compte tenu des progrès rapides des sciences du vivant, mais aussi ce que j'appelle une info -éthique et une éco-éthique responsable, pour construire une civilisation du numérique respectueuse des droits et des libertés de chacun, ainsi qu'un environnement assurant la biodiversité et la durabilité des écosystèmes.

C’est justement ce que prône le philosophe allemand Hans Jonas dans son livre *Le principe responsabilité* publié en 1979. Il insiste sur l’urgence de nous doter d’une « éthique pour la civilisation technologique » fondée sur ce qu’il appelle le « principe de responsabilité ». Il part du postulat que les promesses de progrès des techniques modernes se sont transformées en menaces de catastrophes : « La science confère à l’homme des forces jamais encore connues, l’économie pousse toujours en avant dans une impulsion effrénée. » Les politiques de croissance à l’échelle mondiale conduisent inévitablement à des dérèglements de l’équilibre de la planète. On sait maintenant à quel point l’impact de l’homme met en danger nos sociétés et leur environnement. De nouvelles disciplines scientifiques apparues au cours des trente dernières années, telles que le génie génétique, le clonage ou la biologie de synthèse, risquent de mener à des débordements et à des dérives préjudiciables à l’intégrité même du vivant.

L’approche éthique fondée sur le principe de responsabilité se traduit dans le vivant et dans l’environnement par le fait de « prendre soin » de ce qui compte pour l’avenir physique, énergétique, biologique, environnemental de l’humanité. Ce que l’on pourrait appeler les « arts du soin »ne concerne pas seulement le domaine médical, mais aussi les accompagnements humains de tout type : éducation, prévention, éco-participation à la protection de l’environnement, art du jardin, du paysage, pratiques esthétiques, soutien juridique, police de proximité, psychothérapie de groupe, services à la personne… Ce soin implique un investissement intellectuel, financier et en termes de temps, d’où l’importance d’avoir précédemment investi un « capital-temps »

LA VOIE PERSONNELLE VERS LE BONHEUR

Au terme de ces réflexions, il est nécessaire de retenir quelques clés essentielles pour parvenir à surfer harmonieusement vers son destin.

Tout d’abord, il faut souligner l’importance de la création individuelle et collective. Les grands enjeux actuels ne tournent plus seulement autour de la production mais de l’échange et de la création. C’est la création qui procure le sentiment d’avoir investi du temps qui pourra servir aux autres. C’est cette création qui transforme la mort en un passage, puisque ce que l’on a créé, partagé, diffusé, mémorisé, se retrouvera chez ceux qui poursuivront la tâche entreprise en se référant à celui ou celle qui l’a initiée. L’acte de création est lié au rayonnement. Donner, partager, transmettre, sont des actes essentiels, non seulement dans l’éducation de ses enfants, la formation de ses collaborateurs, les messages que l’on diffuse à la société, mais sur le plan psychologique et moral, en lien avec les grands principes évoqués – l’altruisme, la solidarité, et l’empathie.

(1) Métaphore : exemple
(2) Ethique : respect de règles morales

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 0$, la dérivée de : $\dfrac{x e^x}{1+x^2}$

La dérivée est égale à : $\dfrac{(1-x^2)e^x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{\mathrm{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{x}^2}$, puis pour $x = 0$, on obtient 1

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} x^2 \sin x \; dx$

Comme la fonction est impaire, l'intégrale est nulle.

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} e^{x+y} = \sqrt{e^3} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Le système devient : $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $x(x-1) = 0$. L'ensemble des solutions est : $(x, y) = (0, 3/2)$ *ou* $(1, 1/2)$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $2x + 1 + \int_0^1 \dfrac{t^2 e^t}{t^2 + 2} dt = 0$

L'intégrale ci dessus est un nombre réel, donc il n'y a qu'une solution.

5. Calculer $\lim_{x\to 0+}\frac{x^x}{1+x}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^x}{1+x}=\lim_{x\to 0+}e^{x\,Ln\,x}=1$$

6. Dans un repère orthonormé de l'espace R^3, déterminer un vecteur orthogonal au plan d'équation : $3x-5y+2z-4=0$. Le vecteur u(3,-5,2) est orthogonal.

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$

où k est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local ?
On a : $f'(x)=2(1-k)^3x+3(1+k)x^2$ et $f'(0)=0$

De plus $f''(x)=2(1-k)^3+6(1+k)x$ et $f''(0)=2(1-k)^3$

L'origine est un extremum local si et seulement si $k\neq 1$

8. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1\frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx$

On a (par division euclidienne) : $\frac{2x^2+3x}{x+2}=2x-1+\frac{2}{x+2}$

D'où $I=\left[x^2-x+2Ln(x+2)\right]_0^1=2\,Ln\left(3/2\right)$

9. Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi les sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Quel est le pourcentage de lycéens faisant du volley, mais pas de natation ?

On a : 15%-5%=10% des 30%, soit 3%

10. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, où n est un entier naturel non nul et $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n. En développant par la formule du binôme,

$$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$$

Exercice n° 2

On définit, sur R, la fonction G_k par : $G_k(x) = e^{-k\,x^2}$, où k est un nombre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de G_k.

La fonction est paire, donc son graphe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et on en fait l'étude que pour les réels positifs.
On obtient : $G_k^{'}(x) = -2kx\,e^{-k\,x^2}$ et la fonction est décroissante à valeurs dans l'intervalle 0,1. L'axe des abscisses est une asymptote.

2. Résoudre l'équation : $G_k^{''}(x) = 0$

$G_k^{''}(x) = 2k\,e^{-kx^2}(2k^2x^2 - 1)$
Cette fonction s'annule pour $x = \mp 1/2K$

3. Tracer le graphe de G_k pour *k*= ½ et *k*=1. On obtient une courbe de Gauss qui est plus étalée pour *k*= ½ que pour *k*=1.

4. On suppose *k*= ½ . Soit *a* la solution positive de l'équation $G_k^{''}(x) = 0$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de G_k au point d'abscisse *a*.

Pour *k*= ½, *a*=1. L'équation de la tangente est donnée par : $y = G_k(1) + G_k^{'}(1)(x-1)$, soit $y = \dfrac{2-x}{\sqrt{e}}$

Exercice n° 3

Soit $f:[a,b] \to R$, une application continue telle que : $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = 0$ pour toutes fonctions en escalier *g*, définies sur $[a,b]$. Expliciter *f*.
Si *f* est non nulle sur $[a,b]$, il existe un *x* tel que *f(x)*>0 (sinon on change *f* en –*f* et les hypothèses restent valables). Comme *f* est continue, il existe un voisinage (un intervalle) de cet *x* sur lequel la fonction reste strictement positive. On considère alors la fonction *g* en escalier égale à 1 sur cet intervalle et 0 ailleurs, alors l'hypothèse $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = 0$ n'est plus vérifiée. Par conséquent, *f*=0.

Exercice n° 4

Soit la suite (F_n) définie par :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_1 = -3\,;\, F_2 = 2$$

1. Exprimer $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1}$ en fonction de *n*.

On trouve, $F_3 = 1;\ F_4 = -1$. Montrons par récurrence que : $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1} = (-1)^n$
Cette relation est vérifiée pour *n*=2 et *n*=3, puis on suppose que cette relation est vraie jusqu'à l'ordre *n*+1.

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_n\,(F_{n+1} + F_n) = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n - F_n^2$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n + (-1)^{n+1} - F_{n-1} \times F_{n+1} =$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+1}\,(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n+1} = (F_{n+1})^2 - (F_{n+1})^2 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$$

2. La suite (F_n) est-elle convergente ?

Si la suite (F_n) converge vers une limite *l*, alors *l* serait solution de $l^2 - l \times l = Lim(-1)^{n+1}$ qui n'existe pas. Par conséquent la suite est divergente.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = x^2 \times Ln(x^2 + 1)$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1.Etudier les variations de la fonction f et tracer *C*.

On peut remarquer que la fonction est paire et l'étudier que sur les réels positifs.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = 2x \times Ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^3}{1 + x^2} \geq 0$

La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction oy et est convexe.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

On calcule cette intégrale par parties : $I = \int_0^1 x^2 Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\ (1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}$

Par ailleurs, $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$

D'où $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg(x)\right]_0^1 = -2/3 + \pi/4$

On obtient finalement : $I = \int_0^1 x^2 Ln(1+x^2)\,dx = \frac{Ln\,2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{Ln\,2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$

3. On considère la fonction numérique f_n à valeurs réelles définie par:

$f_n(x) = x^n \times Ln(x^2+1)$, où n est un entier strictement supérieur à 2.

Etudier les variations de la fonction f_n et tracer son graphe.

Si *n* est pair, la fonction est également paire, de même si *n* est impair, la fonction est impaire, d'où l'étude que sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f_n{}'(x) = nx^{n-1} \times Ln(x^2+1) + \frac{2x^{n+1}}{1+x^2} = x^{n-1} \times \frac{n(1+x^2)Ln(1+x^2) + 2x^2}{1+x^2}$

La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction Oy et est convexe. La symétrie étant différente selon la parité de *n*.

4. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ en fonction de *n* (entier naturel). On calculera d'abord J_0, J_1 et J_2.

$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [Arctg\,x]_0^1 = \pi/4$; $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}[Ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{Ln2}{2}$;

Et $J_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = [x - Arctg\,x]_0^1 = 1 - \pi/4$

On vérifie par récurrence les expressions suivantes :

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2} = x^{2n-2} - x^{2n-4} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{1}{1+x^2} \; et \; \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = x^{2n-1} - x^{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{x}{1+x^2}$$

$$J_{2n} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \pi/4$$

$$J_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$ en fonction de *n*.

Par intégration par parties : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \left[\frac{x^{n+1} Ln(1+x^2)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$

$$I_n = \frac{Ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

Il suffit alors de remplacer la deuxième intégrale par sa valeur trouvée à la question précédente, pour obtenir :

$$I_{2n} = \frac{Ln 2}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n + (-1)^{n-1}\pi/4\right)$$

$$I_{2n-1} = \frac{Ln 2}{2n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2\right)$$

Exercice n° 6

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de l'origine à l'ordre 3.

On peut soit dans l'expression précédente remplacer x par le développement de e^x ou effectuer la division du numérateur par le dénominateur. Dans les deux cas, on obtient :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

3. Soit $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$. Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de *f* pour $x \to +\infty$

On pose $X = 1/x$ et $X \to +0$.

Alors $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}=\dfrac{1}{X(1+e^{X})}=\dfrac{1}{2X}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{X^2}{48}+o(X^2)$.

La droite $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Exercice n° 7

Soit *F* l'application numérique définie par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que *F* est définie, continue et dérivable sur *R*

La fonction est définie, continue et dérivable car $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie et continue et $x \to 2x$ est dérivable.

2. Etudier la parité de *F*. En posant *t* = -*x*, on vérifie que *F* est impaire.

3. Montrer que pour tout $x>0$: $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. En déduire la limite de *F* en $+\infty$

On a : $0<\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{t^4}}=\dfrac{1}{t^2}$ et par intégration $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. Par conséquent: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

4. Calculer la dérivée de *F* et résoudre l'équation $F'(x)=0$ pour $x>0$.

$$F'(x)=\frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$F'(x)=\frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times(\sqrt{x^4+x^2+1})(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1})}$$

Cette dérivée est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

On obtient : $x^4 = 1/4$ et $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-		+		-	
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ et $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

3.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-e^{-x}x^2\right] + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\left[-e^{-x}x\right] + 2\int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{5}{e} + 2$$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^3\,Ln(x)$ où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? La dérivée de f est égale à : $f'(x) = x^2(3Ln(x)+1)$ et s'annule pour $x = e^{-1/3}$. On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. Elle est décroissante sur $\left[0, e^{-1/3}\right]$ et croissante ensuite.

2. Etudier la convexité de *f*.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = x(6Ln(x)+5)$. La fonction est concave sur $\left[0, e^{-5/6}\right]$ et convexe ensuite.

3. Tracer le graphe de *f*.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}Ln(x)\right] - \frac{1}{4}\int_0^1 x^3\,dx = -\frac{1}{16}$$

Exercice n° 3

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple:

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est positive ou nulle.

Soit F une primitive de *f* sur $[a,b]$. On pose $M = Sup|F(x)| \geq 0$. G définie par $G(x) = F(x) - 2M - 1$ est aussi une primitive de *f*.
On a : $-M \leq F(x) \leq M \Rightarrow -3M - 1 \leq F(x) - 2M - 1 \leq -M - 1 \Rightarrow G(x) \leq -M - 1 < 0$
Par conséquent la proposition est fausse.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est décroissante.

Soit F une primitive de *f* sur $[a,b]$, alors $F'(x) = f(x) \leq 0$, donc F est décroissante.
Par conséquent la proposition est vraie.

3. Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est la primitive d'une fonction continue.

Si pour toute fonction continue F sur un intervalle $[a,b]$, il existe f continue telle que $F'(x) = f(x)$, cela voudrait dire que toute les fonctions continues sont de classe C^1.
Trouvons un contre-exemple. Soit $F(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Cette fonction est continue et n'est pas la primitive d'une fonction continue.

Par conséquent la proposition est fausse.

Exercice n° 4

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
On pose $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
On tire aléatoirement des valeurs de *x* et de *y*. Quelle est la probabilité que le point *M* appartienne au domaine *D* ?
La probabilité est égale au rapport des surfaces des deux ensembles (le quart du cercle unitaire et le carré), soit $\pi / 4$

Exercice n° 5

Soit f l'application numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de *f*.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Cette dérivée s'annule en 0 et -2. La droite *x*=-1 est une asymptote verticale et la droite d'équation *y*=*x* est une asymptote oblique.

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -2]$ sur $]-\infty, -3]$
La fonction est strictement décroissante de $[-2, -1[$ sur $[-3, -\infty[$
La fonction est strictement décroissante de $]-1, 0]$ sur $]+\infty, 1]$
La fonction est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

2. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Etudier la convergence de cette suite (u_n).

La suite est strictement positive. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{1 + u_n} > 0$, la suite est donc croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite *l* qui vérifierait : $l = f(l)$, ce qui est impossible, donc la suite est divergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

On a : $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $\int_0^1 f(x)\, dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + Ln(x+1)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} + Ln\, 2$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x (f(t)-t)\,dt$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x (f(t)-t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t+1}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x+1) = +\infty$

5. Trouver une fonction g continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x (g(t)-t)\,dt$ soit finie.

Si cette limite est finie, il faut que $(g(t)-t)$ tende vers zéro et que l'intégrale soit convergente. Soit, par exemple, $g(t)=t+\frac{1}{t^2}$ et dans ce cas la limite recherchée est égale à 1.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e (Ln\,t)^n\,dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0 et I_1

On obtient : $I_0 = e-1$ et $I_1 = [t\,Ln\,t - t]_1^e = 1$

2. Pour tout $n\geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_1^e 1\times(Ln\,t)^n\,dt = \left[t\,(Ln\,t)^n\right]_1^e - \int_1^e n(Ln\,t)^{n-1}dt = e - nI_{n-1}$$

3. Pour tout $n\geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

En utilisant la relation précédente, on obtient : $I_n = e - nI_{n-1} = e(1-n)+n(n-1)I_{n-2}$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

Pour $t\in[1,e]$, $0 < Ln\,t < 1$ et $(Ln\,t)^{n+1} < (Ln\,t)^n$. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

Exercice n° 7

Soit $f : \left]-1,1\right[\to R$ définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\, Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Donner un développement limité de *f*, d'ordre 3, au voisinage de 0.

$$f(x) = (x^2 - 1)\left[Ln(1+x) - Ln(1-x)\right] = (x^2 - 1)\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3))\right]$$

D'où $f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

2. Montrer que *f* admet une tangente *T* au point d'abscisse 0, donner son équation et la position du graphe de *f* par rapport à *T*.

On a *f'*(0) = - 2. La tangente *T* a pour équation $y = -2x$ et $y + 2x = +\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ qui est du signe de *x*.

Si *x*>0, *T* est en dessous de la courbe.

Si *x*<0, *T* est au-dessus de la courbe.

3. On pose *t* = 1 – *x*, *donc* $t \to 0^+$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{t \to 0^+} t(t-2)\ Ln\left(\frac{2-t}{t}\right) = 0$$

Car $\lim_{t \to 0^+} t\, Ln\, t = 0$

INSTITIT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^{x}(1-e) - e = 0$

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

3. Calculer $I = \int_0^3 E(x)\, dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

4. On augmente la longueur d'un rectangle de 20% et on diminue sa largeur de 20%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.

5. Calculer la dérivée de $\frac{e^{x+1}}{1+x^2}$ au point x=1.

6. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle strictement positive, définie par : $f(x) = x^{x^x}$. Calculer sa dérivée en x=1.

8. On considère le nombre x=4,584584584…Ecrire ce nombre sous la forme d'une fraction rationnelle.

9. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

10. Dans un train, 20% des voyageurs portent un chapeau, 60% des voyageurs sont des femmes et 20% des hommes portent un chapeau. Quel est le pourcentage de femmes qui portent un chapeau ?

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = \frac{1}{2}x - Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Montrer que f admet un unique point fixe.
3. Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

La fabrication d'un produit P nécessite de passer successivement par les machines A-B-C dans cet ordre. Le tableau suivant présente le temps de passage du produit dans chaque machine et la durée de fonctionnement des machines dans une journée.

Machine	Temps de passage	Durée
A	5 minutes	5 heures
B	10 minutes	6 heures
C	6 minutes	4 heures

Combien de produits peut-on fabriquer dans une journée ?

Exercice n° 4

Soit la fonction φ définie sur R (ensemble des nombres réels) par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in R - Q \\ x^2 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

Où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de φ .
2. Etudier la dérivabilité de φ.
3. Soit $f(x) = \sin(x).\varphi(x)$, étudier la continuité de f.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique g_y définie sur R par :

$$g_y(x) = x^\alpha . y^\beta \text{, où } y, \alpha, \beta > 0$$

1. Etudier les variations de g_y et tracer son graphe.
2. On suppose que $ax + by \leq R$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs. Déterminer le maximum en x de la fonction g_y .
3. Soit la fonction h définie par : $h(t) = \dfrac{(R - bt)^\alpha t^\beta}{a^\alpha}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$.

   Etudier les variations de h.

Exercice n° 6

Pour chacune des questions suivantes indiquées si l'assertion est vraie ou fausse.

1. Il existe des fonctions numériques d'une variable réelle définies en tout point et continues en aucun. Si l'assertion est vraie, donner un exemple.
2. Toute fonction numérique d'une variable réelle qui admet une dérivée première continue est deux fois dérivable.

Exercice n° 7

Soit f l'application définie par : $f(x) = 2x + \sin(x)$.

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 à l'origine.
2. Montrer que f est une bijection et que son application réciproque f^{-1} est 3 fois continûment dérivable.
3. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en x=0.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'exploitation du pétrole peut apporter des bénéfices énormes aux pays dont le sous-sol est pourvu de cette ressource. Selon-vous, la rente pétrolière est-elle toujours une chance pour les pays producteurs ?

Sujet n° 2

Quelles solutions pourrait-on envisager pour que la ressource en eau demeure obligatoirement un bien commun qui ne devrait pas faire l'objet de batailles juridiques, économiques voire militaires à l'occasion de conflits territoriaux par exemple ?

Sujet n° 3

Quel sens peut prendre l'économie verte pour les pays en développement ? Doit-elle obligatoirement passer par les aides incitatives des institutions internationales ou au contraire s'inspirer de solutions déjà partiellement adoptées localement ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
2. Monter que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x)\,dx$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$
3. Montre que f admet un centre de symétrie que l'on précisera.
4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \neq -1 \; et \; u_{n+1} = f(u_n)$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs de u_0.

Exercice n° 3

Soit $f :]0,+\infty[\to R$ définie par : $f(t) = \dfrac{Ln\, t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$, où Ln désigne le logarithme népérien et R l'ensemble des nombres réels.

Soit $F :]0,+\infty[\to R$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$

1. Etudier la continuité de f sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Etudier les variations de F sur $]0,+\infty[$.

Exercice n° 4

On note P l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P. On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n - 1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., $n - 2$, $n - 1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou – 1. Par exemple, on a $4 = ((-1)\times 1) + (1\times 2) + (1\times 3)$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition de la forme :

(E) $$n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou – 1 à affecter à l'entier k.

1. La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?

2. Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (E).

Exercice n° 5

Etudier la nature des suites suivantes en précisant la limite pour celles qui sont convergentes.

1. $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e t^2 (Lnt)^n \, dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1
3. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Jacques ATTALI « Devenir soi » paru aux éditions Arthème Fayard en 2014.

Il devra être résumé en 250 mots (+ou- 10%). Le nombre de mots sera indiqué. Il sera tenu compte de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Dans un monde aujourd'hui insupportable, et qui, bientôt le sera plus encore pour beaucoup, il n'y a rien à attendre de personne. Il est temps pour chacun de se prendre en main. Ne vous contentez pas de réclamer une allocation ou une protection de l'Etat, arrachez-vous à la routine, aux habitudes, au destin tout tracé, à une vie choisie par d'autres. Choisissez votre vie !

Où que vous soyez dans le monde, homme ou femme, qui que vous soyez dans la société, agissez comme si vous n'attendiez plus rien des gens de pouvoir ; comme si rien ne vous était impossible. Ne vous résignez pas ! Ne vous bornez pas à dénoncer l'«horreur économique» du monde, ne vous contentez pas de vous indigner : l'une et l'autre attitude ne sont que des formes de lâcheté mondaine.

Pour vous débrouiller, pour réussir votre propre vie, ayez confiance en vous. Respectez-vous. Osez penser que tout vous est ouvert. Ayez le courage de vous remettre en question, de bousculer l'ordre établi, d'entreprendre et de considérer votre vie comme la plus belle des aventures. Pour trouver la force de le faire, réfléchissez sur toutes les instances qui conditionnent votre avenir.

Vous verrez alors que vous êtes beaucoup plus libre que vous ne le croyez ; que, qui que vous soyez, quel que soit votre âge, quelles que soient vos ressources matérielles, votre sexe, votre origine et votre situation sociales, vous pouvez affronter des difficultés qui vous paraissent insurmontables, changer radicalement votre destin, celui de ceux qui vous aiment et que vous aimez, et celui des générations à venir, dont dépendent votre bien-être et votre sécurité.

Les femmes en sont particulièrement empêchées. Si elles y réussissent, elles bouleverseront le monde.

Ce dont je parle ici n’est significativement désigné par aucun mot en français, ni dans aucune autre langue que je connaisse. Il ne s’agit pas de résistance ni de résilience, ni de libération ni de désaliénation, ni de pleine conscience. Je proposerai le mot «*devenir-soi*»

Le monde est dangereux et le sera de plus en plus : la violence rôde partout, elle se déchaîne en maints endroits au nom des pires intolérances et des idéologies les plus obscures ; des guerres de religion se rallument ; des sécessions se multiplient ; des différences ne se nourrissent plus les unes des autres ; l’environnement se dégrade ; la nourriture est de plus en plus polluée ; l’emploi disparaît ; les classes moyennes se défont ; la croissance ne permet pas de répondre aux besoins d’une population urbaine de plus en plus dense et solitaire ; les inégalités se creusent entre quelques riches et un nombre immense de pauvres. L’un après l’autre, tous les filets de sécurité se déchirent.

La croissance n’étant plus au rendez-vous, pour maintenir leur niveau de vie menacé de toutes parts, Etats, entreprises, particuliers vivent de plus en plus à crédit, au crochet des générations passées dont ils pillent l’héritage, et des générations futures dont ils dégradent le patrimoine.

Face à ces périls, la plupart des hommes politiques et des dirigeants d’entreprise, presque tous préoccupés par leur seul présent se contentent de gérer au mieux le quotidien et de colmater les brèches ; les politiciens ne cherchent qu’à améliorer leur popularité auprès des électeurs par des décisions démagogiques ; les chefs d’entreprises auprès des actionnaires par la recherche frénétique de profits trimestriels.

Tous oublient que vivants d’aujourd’hui auraient pourtant un intérêt égoïste à penser au long terme, soit parce qu’ils font partie des générations passées (plus d’un tiers de l’humanité actuelle était déjà sur terre il y a cinquante ans), soit parce qu’ils font déjà partie des générations futures (plus des deux tiers de nos contemporains seront encore vivants dans trente ans).

En France en particulier, les dirigeants successifs ont laissé le pays s’enfoncer depuis deux décennies dans un lent déclin, un engourdissement qui pourrait devenir mortel. Lassé d’avoir dit, écrit et répété qu’il est urgent de réformer la gouvernances du monde, de l’Europe et de mon pays ; lassé d’exposer le détail de toutes les mesures urgentes à prendre pour éviter les catastrophes écologiques, retrouver une croissance durable et juste, fournir à chacun les moyens de vivre pleinement sa liberté sans la refuser aux autres ; lassé d’entendre les hommes et les femmes de pouvoir, de tout parti, de tout pays, me dire en confidence qu’ils partagent avec moi la diagnostique et la prescription, qu’ils savent ce qu’il faudrait faire, mais que ce n’est pas le moment de le mettre en œuvre à cause de la crise, ou de l’absence de crise, ou de leur popularité ou de leur impopularité ; lassé de les voir se réfugier derrière leur scepticisme, leur cynisme, leur narcissisme, leur autosatisfaction, leur égoïsme, leur avidité, leur pusillanimité, leur orgueil ; enragé de les voir procrastiner en rois fainéants soucieux de leur seul intérêt , je voudrais désormais dire à chacun d’entre vous : n’attendez plus rien de personne, faites un nouveau pari à la Pascal !

Ce grand génie français avait proposé, en son temps, de faire le pari de croire en Dieu indépendamment de toute révélation ; de croire sans preuve ; parce que, expliquait-il, nul n’a rien à y perdre : s’Il n’existe pas, on ne sera pas puni d’y avoir cru ; s’Il existe, on sera peut-être récompensé de l’avoir honoré.

Je propose d'agir de même dans le monde d'aujourd'hui : faire le pari de prendre le pouvoir sur sa propre vie, de se trouver, indépendamment de l'hypothétique action des autres. Parce qu'en toute hypothèse on a tout à y gagner.

En effet, de deux choses l'une :

Soit, comme c'est le plus probable, les puissants, publics et privés ne seront pas à la hauteur des enjeux ; alors chacun aura agi à temps pour suppléer pour lui-même au moins à leur impuissance.

Soit, au contraire, les hommes de pouvoir se décideront enfin à affronter les enjeux écologiques, éthiques, politiques, sociaux et économiques du siècle. Là encore, de deux choses l'une : soit ils échoueront, ce qui ramènera au cas précédent ; soit ils réussiront, et nul n'aura rien perdu à s'inscrire au mieux, par son initiative personnelle, dans l'abondance retrouvée.

Certes, cette liberté, but ultime, n'est pas et ne sera jamais illimitée : le même Blaise Pascal nous rappelle que notre vie se déroule à l'intérieur d'une prison, déterminée par les conditions de notre naissance et les exigences de notre mort. A nous d'en écarter les murs. C'est encore lui qui compare la liberté de tout homme avec celle du paysan : sa récolte dépend de son travail autant que de la pluie et de la fertilité de son champ qui lui échappent.

Faire un tel pari ne va pas de soi : bien des gens ne se résignent à être toute leur vie que ce que les autres ont décidé qu'ils seront ; ils mènent l'existence que les autres ou les hasards, ont tracée pour eux là où ils sont nés. Par peur. Par paresse. Par passivité. Ils survivent au mieux, trouvant parfois de minces bonheurs dans les anecdotes de leurs destins.

D'autres croient y échapper en s'indignant ; ils critiquent, manifestent, protestent. Jamais ils ne transforment leur indignation en actes. Ni pour réussir leur propre vie, ni pour améliorer celle d'autres. Où qu'ils soient, ils ne font que se donner bonne conscience et s'inventer d'honorables sujets de conversation.

D'autres, enfin, refusent le destin que la société, la religion, la famille, la classe sociale, la nation où ils sont nés, leurs moyens matériels, leur sexe, leur patrimoine génétique prétendent choisir pour eux ; ils s'arrachent aux déterminismes de toute nature ; ils se choisissent à leur gré, sans obéir à leurs aînés, des études, un métier, un physique, une orientation sexuelle, une langue, un conjoint, un combat, un idéal, une éthique. Ils quittent parfois leur famille, leur pays. Ils cherchent en quoi ils sont uniques. Ils se forgent une utopie et cherchent à la réaliser. Ou plus modestement, ils décident de se prendre en main et de ne plus rien attendre de personne : ni emploi, ni épanouissement. Ils tentent alors de devenir eux-mêmes. Ils ne réussiront certes pas tous. Au moins auront-ils été libres en essayant.

Une telle recommandation n'est évidemment pas facile à suivre : pendant des millénaires, au nom des dieux, princes et prêtres ont imposé leur pouvoir aux hommes qui ont à leur tour, imposé leur caprices aux femmes et aux enfants. Aujourd'hui encore, le sort de presque tous les humains –surtout les femmes et les enfants– dépendent de forces écrasantes, visibles ou invisibles, matérielles ou immatérielles, économiques ou idéologiques, financières ou politiques, religieuses, militaires ou climatiques ; du bon vouloir des autres, de leurs désirs, de leur folie, de leur violence ou de leur indifférence.

Chacun, même parmi les classes moyennes des pays riches, peut penser qu'il n'a aucun pouvoir sur l'environnement, la paix, la guerre, la croissance, l'emploi, l'évolution du climat et celle des technologies ; donc aucun pouvoir sur l'essentiel de ce qui fait sa propre vie. Et de fait, bien des gens ne réaliseront pas leurs rêves. Ils ne sont pas –et ne seront pas– les artistes, les médecins qu'ils auraient rêvés d'être.

Et pourtant, presque tous les humains, hommes et femmes, même les plus faibles, les plus démunis, les plus écrasés par les diverses forces qui se disputent le monde, ont la capacité de prendre le pouvoir sur leur propre vie. S'ils ressentent le besoin vital de se libérer ; s'ils apprennent à ne pas se résigner, à résister, à trouver dans leur vie intérieure et dans l'exercice de leur raison une façon de se libérer des déterminismes qui les asservissent.

Bien des évènements peuvent provoquer une telle prise de conscience : une situation matérielle améliorée ou dégradée ; le sentiment de sa mort prochaine ou d'une santé florissante ; une réflexion sereine ou une crise existentielle ; un profond chagrin ou un accès de bonheur ; un moment de solitude ou un coup de foudre ; le désir de soi ou le besoin de l'Autre dont la présence est déjà rupture à soi.

Il s'agit là bien plus que de résilience ; il n'y est pas seulement question de survivre aux crises, ni de se tirer d'affaire dans la vie quotidienne, mais de se trouver, de réussir sa vie, de découvrir la raison de sa présence sur cette terre pour « devenir-soi » et trouver le courage de se débrouiller par soi-même.

De cet arrachement aux autres, de cette prise de pouvoir de chacun sur soi-même, sortiront des cohortes de créateurs, dans leur vie privée ou leur activité professionnelle ; ils vivront ce qu'ils sont et créeront pour eux-mêmes et pour le reste de l'humanité. S'ils éclosent en grand nombre, s'ils en aident beaucoup d'autres à devenir soi, les crises seront bientôt surmontées …/…

Les entrepreneurs privés

D'autres ont pris le parti de se dégager de la vie prévue pour eux en se lançant dans une autre forme de création : celle d'une entreprise.

Les mécanismes qui conduisent un homme ou une femme à vouloir, sans en être l'héritier, créer une entreprise plutôt que d'être simple employé sont tout aussi mystérieux : un hasard, souvent ; une nécessité le plus souvent ; une énergie particulière, toujours. Rarement le choix d'un domaine particulier. En général, juste le besoin d'être son propre maître ; le désir de faire fortune aussi.

Sans revenir aux marchands de Bruges du XIVème siècle ou aux armateurs vénitiens du XVème, voici quelques exemples qui démontrent que la création d'entreprise est à la portée de qui le veut et le décide.

Ainsi de Thomas Edison, né dans une très modeste famille immigrée en 1847 dans l'Ohio, atteint d'une surdité quasi-totale à l'âge de treize ans qui débute en tant qu'employé dans les trains du Michigan. Rien ne le prédispose à la création d'entreprise. Pourtant résolu à prendre le pouvoir sur sa vie, il n'accepte aucun métier qu'on lui propose. Passionné par les sciences physiques et la chimie, auxquelles il s'initie seul pour une large part, il met au point à vingt-deux ans un télégraphe automatique utile aux trains, puis fonde à vingt-neuf ans l'Edison Illuminating Company qui deviendra General Electric. Il ne cesse plus d'innover tout en développant sa firme : il invente le phonographe à trente ans et dépose en tout près de onze cents brevets, attirant auprès de lui nombre de jeunes ingénieurs, les incitant à créer à leur tour leurs propres entreprises.

…/… Ainsi d'Alizéta Ouédraogo, aujourd'hui femme la plus prospère de son pays, le Burkina Faso. Après avoir fait fortune dans le cuir au cours des années 1990, elle s'est lancée dans l'immobilier et les travaux publics. Elle a pris la tête de la Chambre de Commerce et d'Industrie de son pays en 2011.

Ainsi de Tilahun Alemu (Ethiopie), reconnue comme une des femmes les plus influentes d'Afrique par *The Guardian* en 2013, fondatrice en 2004 de SoleRebels, entreprise fabriquant des chaussures dont la semelle est faite à partir de pneus usagés. Ayant commencé dans un humble atelier à Addis-Abeba, la société emploie désormais plus d'une centaine de personnes et distribue ses produits dans une trentaine de pays.

…/… Ainsi de Takao Sasaki, au Japon, qui perd son emploi de salarié dans l'industrie des sushis à cause du Tsunami de 2011. Fort de vingt années d'expérience, il crée sa propre entreprise de sushis dans la région de Töhoku. Il emploie actuellement plus d'une dizaine de personnes.

…/… Tous et toutes, quelle que soit la taille de leur entreprise, «entrepreneurs de l'envie» ou «entrepreneurs de la survie», ont compris qu'il n'y a pas d'entreprise sans marché, ni de marchés sans clients satisfaits. Ce ne sont donc pas seulement des égoïstes intelligents, mais aussi des altruistes pour motifs rationnels, qui déploient de plus en plus d'efforts pour s'intéresser à leurs clients et fournisseurs à venir, autrement dit au bien-être des générations futures.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x(1-e) - e = 0$

On pose $X = e^x$ pour obtenir : $X^2 + X(1-e) - e = 0$ qui a deux solutions *e* et -1. Mais comme l'exponentielle est positive, on obtient *x*=1.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

3. Calculer $I = \int_0^3 E(x)\, dx$, où *E(x)* désigne la partie entière de *x*.

$$I = \int_0^3 E(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx + \int_1^2 1\, dx + \int_2^3 2\, dx = 3$$

4. On augmente la longueur d'un rectangle de 20% et on diminue sa largeur de 20%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.

Notons *L* la longueur et *l* la largeur du rectangle, sa surface est égale à $L \times l$ et en effectuant les changements, la surface est égale à : $1{,}2 \times L \times 0{,}8 \times l = 0{,}96 L \times l$; La surface a donc diminué de 4%.

5. Calculer la dérivée de $\frac{e^{x+1}}{1+x^2}$ au point *x*=1.

Pour $y = \frac{e^{x+1}}{1+x^2}$, on a $y' = \frac{e^{x+1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$ et en 1 sa valeur est égale à 0.

6. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$$I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\left[Ln(1+e^x)\right]_0^1=Ln(1+e)-Ln2$$

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle strictement positive, définie par : $f(x)=x^{x^x}$. Calculer sa dérivée en x=1.

Rappelons la définition des puissances : $x^a=e^{a\,Ln\,x}$. Posons $z=x^x=e^{x\,Ln\,x}$ et sa dérivée est égale à : $z'=x^x(1+Ln\,x)$, d'où $f'(x)=x^{x^x}\times x^x\times\left[Ln\,x\,(1+Ln\,x)+\frac{1}{x}\right]$ et $f'(1)=1$

8. On considère le nombre x=4,584584584…Ecrire ce nombre sous la forme d'une fraction rationnelle.

On a : 1000 x=4584,584584 et par différence : 999x= 4580, d'où $x=\frac{4580}{999}$

9. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

10. Dans un train, 20% des voyageurs portent un chapeau, 60% des voyageurs sont des femmes et 20% des hommes portent un chapeau. Quel est le pourcentage de femmes qui portent un chapeau ?

Il y a 40% d'hommes dans le train, dont 20% portent un chapeau, soit 8% des voyageurs. Donc 12% de femmes portent un chapeau.

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x)=\frac{1}{2}x-Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour x>0. $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x-2}{2x}$.

La fonction est décroissante de $]0,2]$ sur $]+\infty,1-Ln2]$ et elle est croissante de $[2,+\infty[$ sur $[1-Ln2,+\infty[$. Elle admet une asymptote oblique d'équation : $y=\frac{1}{2}x$ et une asymptote verticale à l'origine.

2. Montrer que f admet un unique point fixe.

Un point fixe x vérifie : $f(x)=x$, soit $\frac{1}{2}x+Ln\,x=z=0$. On étudie cette fonction z, qui est strictement croissante de R^{+*} sur R. Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution, donc un unique point fixe.

3. Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2+(x-x\,Ln\,x)\right]_1^2=\frac{7}{4}-Ln4$$

Exercice n° 3

La fabrication d'un produit P nécessite de passer successivement par les machines A-B-C dans cet ordre. Le tableau suivant présente le temps de passage du produit dans chaque machine et la durée de fonctionnement des machines dans une journée.

Machine	Temps de passage	Durée
A	5 minutes	5 heures
B	10 minutes	6 heures
C	6 minutes	4 heures

Combien de produits peut-on fabriquer dans une journée ?

La machine A permet de fabriquer 12 produits en 1 heure, soit 60 produits

La machine B permet de fabriquer 6 produits en 1 heure, soit 36 produits

La machine C permet de fabriquer 10 produits en 1 heure, soit 40 produits

On peut donc fabriquer 36 produits dans la journée.

Exercice n° 4

Soit la fonction φ définie sur R (ensemble des nombres réels) par :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in R-Q\\ x^2 \text{ si } x\in Q\end{cases}$$

Où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de φ .

Rappelons que l'ensemble des nombres rationnels comme celui des irrationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels.

Si $x_0 \in R - Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = x_n^2 \to x_0^2 \neq \phi(x_0)$, donc la fonction n'est pas continue en tout point irrationnel ;

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R - Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = 1 \to 1 = \phi(x_0) = x_0^2$, si et seulement si $x_0 = \pm 1$,

En conclusion la fonction n'est continue qu'en +1 et -1.

2. Etudier la dérivabilité de φ.

La fonction étant paire et continue qu'en +1 et -1. Il suffit d'étudier la dérivabilité en 1.

$$\text{On a } \frac{\phi(x) - \phi(1)}{x-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in R - Q \\ x+1 & \text{si } \ x \in Q - \{1\} \end{cases}$$

Ces deux expressions sont différentes en 1, donc la fonction n'est pas dérivable.

3. Soit $f(x) = \sin(x).\varphi(x)$, étudier la continuité de *f*.

$$\text{On obtient } \ f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ si } \ x \in R - Q \\ x^2 \sin x \ \text{ si } \ x \in Q \end{cases}$$

Si $x_0 \in R - Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = x_n^2 \sin x_n \to x_0^2 \sin x_à = \sin x_0$ pour $x_0{}^2 = 1$ ou $\sin x_0 = 0$, soit $x_0 = \pi/2 + k\pi$

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R - Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = \sin x_n \to \sin x_à = x_0^2 \sin x_0$ pour $x_0{}^2 = 1$, soit $x_0 = \pm 1$;

En conclusion la fonction est continue sur $\{\pm 1\} \cup \{\pi/2 + k\pi\}$.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique g_y définie par:

$$g_y(x) = x^\alpha \times y^\beta \text{, où } y, \alpha, \beta > 0$$

1. Etudier les variations de g_y et tracer son graphe.

La fonction est définie pour *x*>0 et rappelons que : $x^\alpha = e^{\alpha Ln x}$.

Sa dérivée est égale à : $g_y^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1} \times y^{\beta}$. La fonction est donc strictement croissante de R^{+*} sur R^{+*}.

Si $\alpha > 1$, la fonction est convexe avec une branche parabolique dans la direction verticale.

Si $\alpha < 1$, la fonction est concave avec une branche parabolique dans la direction horizontale.

Si $\alpha = 1$, la fonction est une droite.

2. On suppose que $ax + by \leq R$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs. Déterminer le maximum en x de la fonction g_y.

Comme la fonction est strictement croissante en x, le maximum est donc atteint pour la plus grande valeur de x qui satisfait la contrainte, à savoir $x = \dfrac{R-by}{a}$ et le maximum vaut $\left(\dfrac{R-by}{a}\right)^{\alpha} y^{\beta}$

3. Soit la fonction h définie par : $h(t) = \dfrac{(R-bt)^{\alpha} t^{\beta}}{a^{\alpha}}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$. Etudier les variations de h.

La fonction est définie pour $R - bt > 0$ et $t > 0$, soit $0 < t < \dfrac{R}{b}$

Sa dérivée est égale à : $h^{'}(t) = \dfrac{(R-bt)^{\alpha-1}}{a^{\alpha}} t^{\beta-1} \left[\beta(R-bt) - \alpha bt\right]$

Comme $\alpha + \beta = 1$, $h^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\beta R}{b}$ et la fonction h est strictement croissante de

$h(t) = \dfrac{(1-\beta)^{\alpha} R^{\alpha}}{a^{\alpha}} \times \dfrac{(\beta R)^{\beta}}{b^{\beta}} = M$

La fonction h est strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\beta R}{b}\right]$ sur $\left]0, M\right]$ et

La fonction h est strictement décroissante de $\left[\dfrac{\beta R}{b}, \dfrac{R}{b}\right[$ sur $\left[M, 0\right[$

Exercice n° 6

Pour chacune des questions suivantes indiquées si l'assertion est vraie ou fausse.

1. Il existe des fonctions numériques d'une variable réelle définies en tout point et continues en aucun. Si l'assertion est vraie, donner un exemple.

Exact, avec par exemple la fonction caractéristique des rationnels.

2. Toute fonction numérique d'une variable qui admet une dérivée première continue est deux fois dérivable.

Faux, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exercice n° 7

Soit f l'application définie par : $f(x)=2x+\sin(x)$.

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 à l'origine.

$f(x)=3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

2. Montrer que f est une bijection et que son application réciproque f^{-1} est 3 fois continument dérivable.

$f'(x)=2+\cos(x)\geq 1>0$ et $\underset{-\infty}{Lim}\, f(x)=-\infty$, $\underset{+\infty}{Lim}\, f(x)=+\infty$, donc f est une fonction strictement croissante de R sur R, c'est donc une bijection. L'application réciproque f^{-1} est aussi une fonction strictement croissante. Comme la dérivée n'est jamais nulle, (f^{-1}) est dérivable et $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Par récurrence immédiate on en déduit que f^{-1} admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en x=0.

On a $f(0)=0$ et on peut appliquer la formule du développement limité de f^{-1} à $f(x)$ au voisinage de 0. On détermine les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 du développement limité à partir de l'égalité $f^{-1}(f(x))=x$ qui équivalente à :

$$a_0+a_1\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+a_2\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+a_3\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o\left((3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3\right)=x$$

ou encore :

$$a_0+a_1\left(3x-\frac{x^3}{6}\right)+a_2\,x^2+a_3\,x^3+o(x^3)=x$$

Et par identification des polynômes, on obtient : $a_0=0, a_1=1/3, a_2=0, a_3=1/18$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{x^3}{18}+o(x^3)$

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

La fonction f est définie pour $x>-1$ et $x\neq 0$. Mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, on peut donc prolonger par continuité la fonction en posant : $f(0)=1$.

Sa dérivée est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{x-(x+1)Ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Cette dérivée est négative sur l'ensemble de définition et la fonction est donc strictement décroissante de $]-1,+\infty[$ sur $]+\infty,0[$. Le graphe de f admet deux asymptotes : x=-1 (verticale) et y=0 (horizontale). La fonction est convexe sur son ensemble de définition.

2. Monter que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

La recherche d'un point fixe revient à résoudre l'équation : $f(x)=x$. Ce qui revient à résoudre : $Ln(x+1)-x^2=0$. On étudie donc cette fonction $z=Ln(x+1)-x^2$ et son tableau de variation montre l'existence d'un point unique avec le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x)\,dx$

Soit $I=\displaystyle\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x)\,dx=\int_1^e \frac{Ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left[Ln^2(x+1)\right]_1^e=\frac{1}{2}(Ln^2(e+1)-Ln^2(2))$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ et cette dérivée s'annule en 0 et -2. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$ et une asymptote oblique d'équation $y=x-1$.

La fonction est strictement croissante de $\left]-\infty,-2\right]$sur $\left]-\infty,-4\right]$,
La fonction est strictement décroissante de $\left[-2,-1\right[$sur $\left[-4,-\infty\right[$,
La fonction est strictement décroissante de $\left]-1,0\right]$sur $\left]+\infty,0\right]$,
La fonction est strictement croissante de $\left[0,+\infty\right[$sur $\left[0,+\infty\right[$,
La courbe se présente sous la forme d'une hyperbole oblique.

2. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Soit $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1+\frac{1}{x+1})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+Ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+Ln2$

3. Montre que f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

Le point A de coordonnées (-1, -2) est un centre de symétrie, en effet si on pose : $X=x+1;Y=y+2$, on obtient : $Y=X+\frac{1}{X}$ qui est une fonction impaire.

4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\neq -1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs de u_0.

Si la suite (u_n) est convergente, sa limite l vérifie : $l=f(l)$, à savoir l=0.

Pour $u_0>0$, on vérifie par récurrence que $u_n>0$, de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n}{1+u_n}<1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers zéro.

Pour $u_0=0$, la suite est stationnaire égale à zéro.

Pour $-1<u_0<0$, on a : $u_1=\frac{u_0^2}{1+u_0}>0$, et on se ramène au premier cas où la suite converge vers zéro.

Enfin pour $u_0<-1$, on vérifie que : $u_{n+1}<u_n<-1$. Si la suite était convergente, sa limite serait inférieure à -1, donc elle est divergente.

Exercice n° 3

Soit $f:\left]0,+\infty\right[\to R$ définie par : $f(t)=\frac{Lnt}{t-1}$ si $t\neq 1$ et $f(1)=1$, où Ln désigne le logarithme népérien.

Soit $F:\left]0,+\infty\right[\to R$ définie par : $F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt$

1. Etudier la continuité de f sur $]0,+\infty[$

Le seul problème est au point 1.

$\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \lim\limits_{t\to 1}\frac{Lnt}{t-1} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{Ln(1+u)}{u} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{u} = 1 = f(1)$, donc f est continue sur $]0,+\infty[$

2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0,+\infty[$.

Si $t>1$, $t-1>0$ et $Lnt>0$, donc la fonction f est positive et

Si $0<t<1$, $t-1<0$ et $Lnt<0$, donc la fonction f est encore positive.

Comme $x>0$ et f positive, F est positive.

3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

F est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour x différent de 1 :

$F'(x) = 2x\,f(x^2) - f(x) = 2x.\frac{Ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{Lnx}{x-1} = \frac{(3x-1)Lnx}{x^2-1}$, et

$F'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-x)\,f(c(x))}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x.\,f(c(x)) = 1$, car f est continue.

4. Etudier les variations de F sur $]0,+\infty[$.

Pour $0<x<1/3$, $3x-1<0, Lnx<0$ et $x^2-1<0$, donc F est décroissante.

Pour $1/3<x<1$, $3x-1>0, Lnx<0$ et $x^2-1<0$, donc F est croissante.

Pour $x>1$, $3x-1>0, Lnx>0$ et $x^2-1>0$, donc F est croissante.

Exercice n° 4

On note P l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P. On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n-1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou – 1. Par exemple, on a $4 = ((-1)\times 1) + (1\times 2) + (1\times 3)$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition de la forme :

$$\text{(E)} \qquad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou – 1 à affecter à l'entier k.

1. La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?

Par exemple 8=(-1+2)+(-3+4)+(5-6)+7=(1-2)+(-3+4)+(-5+6)+7. La décomposition n'est donc pas unique.

2. Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (E).
On peut remarquer que 2 et 6 ne sont pas décomposables. Montrons par récurrence que tout nombre pair de la forme 4p est décomposable.

Pour p=1, la relation est vraie. On suppose que : $4p=\sum_{k=1}^{4p-1}\varepsilon_k k$

On obtient :

$$4p+4=\sum_{k=1}^{4p-1}\varepsilon_k k+4=\sum_{k=1}^{4p-1}\varepsilon_k k-1+2+3=\sum_{k=1}^{4p-1}\varepsilon_k k-4p-(4p+1)+(4p+2)+(4p+3)=\sum_{k=1}^{4p+3}\varepsilon_k k$$

Exercice n° 5

Etudier la nature des suites suivantes en précisant la limite pour celles qui sont convergentes.

1. $u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})$ et en sommant, les deux premiers termes de la première expression restent ainsi que les deux derniers de la deuxième expression. D’où

$$u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

Et la suite va converger vers ¾.

2. $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2+3k+2}=(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$ et en sommant, le premier terme de la première expression reste ainsi que le dernier de la deuxième expression. D’où

$$u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=(1-\frac{1}{n+2})$$

Et la suite va converger vers 1.

3. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{2\sqrt{k}}$ et en sommant, on obtient :

$2(\sqrt{n+1}-1)\leq u_n$ et la suite est divergente.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e t^2 (Lnt)^n \, dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0

$$I_0 = \int_1^e t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^e = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

2. Calculer I_1

$$I_1 = \int_1^e t^2 \, Lnt \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 \, Lnt\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3} dt = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$, en intégrant par parties.

3. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

On effectue une intégration par parties pour obtenir :

$$I_{n+1} = \int_1^e t^2 (Lnt)^{n+1} \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 (Lnt)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e \frac{t^2}{3}(Lnt)^n dt = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3} I_n$$ ou encore

$$3I_{n+1} + (n+1) I_n = e^3$$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

On vérifie par récurrence que la suite (I_n) est positive. On a :

$$I_n = \int_1^e t^3 \frac{(Lnt)^n}{t} dt \leq e^3 \int_1^e \frac{(Lnt)^n}{t} dt = e^3 \left[\frac{(Lnt)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e = \frac{e^3}{n+1}$$, on obtient : $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ et la suite est convergente vers zéro.

INSTITIT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. La fonction f étant définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = x^2 e^x + Ln(1+x^2)$. Calculer sa dérivée au point x=0

2. Pour x et y nombres réels, résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

3. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\sin(x)\ dx$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = 0$

5. Calculer $\underset{x\to 0}{Lim}\left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}} + 2\right)$

6. Calculer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par $u_n = n(e^{1/n} - 1)$, où n est un entier strictement positif.

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation : x-y+1=0

8. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^3 \, Ln(x) \, dx$.

9. Résoudre l'équation : $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

    - Qualité supérieure : 80% des parcelles

    - Qualité moyenne : 15% des parcelles

    - Qualité inférieure : 5% des parcelles

    Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ?

Exercice n° 2

Le paramètre t étant un nombre réel strictement positif, on pose $y_t(x) = \frac{e^{-xt}}{xt}$, où x est un nombre réel non nul.

1. Etudier les variations de la fonction y_t et donner l'allure de son graphe.

2. Calculer $I_t = \int_0^1 x^2 \, y_t(x) \, dx$

3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I_t$ et $\lim\limits_{t \to 0} t^3 I_t$

Exercice n° 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ par :

$f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1, +\infty[$.

2. Pour k entier naturel non nul, on pose : $I_k = \left[-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$

4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty}\varphi_n(x)$.

Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres, inférieurs à 10^p, dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel p).

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f définie par:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Calculer $(f(x))^2$ pour simplifier l'expression de $f(x)$ et tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels (x,y) tels que $y=f(x)$, avec $x\leq 10$.

4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur J.

5. Déterminer la fonction g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère que celui de f. Que peut-on dire ?

Exercice n° 6

1. Etudier les variations et tracer le graphe da la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, le graphe de f et les droites d'équation x=1 et x=2.

3. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

Exercice n° 7

Pour un entier n, n>0, on pose : $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$, où n ! désigne le produit des entiers de 1 à n.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n
4. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'alternance politique est l'expression de la vie d'une démocratie permettant entre autre d'éviter la confiscation du pouvoir par une ou plusieurs personnes. Quelles dispositions (institutionnelles, économiques, juridiques, internationales…) faudrait-il prendre selon vous pour que la voix du peuple puisse être suffisamment reconnue ?

Sujet n° 2

Le continent africain dans son ensemble affiche un taux de croissance économique élevé dont les effets tardent à se faire sentir sur l'emploi et le développement. Quelles sont les raisons qui expliquent selon vous cet état de fait ?

Sujet n° 3

Quels sont les moyens dont disposent les démocraties pour lutter contre le terrorisme tout en préservant les libertés individuelles ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute la composition, R désigne l'ensemble des nombres réels

Exercice n° 1

Soit f_λ la fonction définie sur R par : $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de f_λ et donner l'allure de son graphe.
2. Monter que f_λ admet un centre de symétrie.
3. Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_λ.
4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$, où n est un entier naturel.
5. Calculer $I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$
6. Calculer $J_n = \int_{0}^{n} (1 - f_\lambda(x))\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

Exercice n° 2

On considère la famille de courbes C_m dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est : $x^2 + 4mx - 2(m+1)y = 0$, où m est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe C_m selon la valeur du paramètre m ?
2. Montrer que les courbes C_m passent en général par des points fixes dont on donnera les coordonnées, sauf pour une valeur particulière de m que l'on précisera.
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de C_m (pour $m < -1$), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x=4.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et pour chaque entier naturel n (n>1), la fonction f_n est définie sur R par : $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n. La courbe représentative de f_n est désignée par C_n.
2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes C_2 et C_3. On précisera la position relative de ces deux courbes.
3. Etant donné un nombre réel x, on note $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison (-x) et de premier terme 1. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
4. Pour $|x|<1$, déterminer la limite de $S_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Qu'en est-il pour x=1 ?
5. Pour x nombre réel positif ou nul, on pose : $a_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$. Montrer que l'expression suivante A est une constante (Ln désigne le logarithme népérien), dont on donnera la valeur :
$$A=a_n(x)+(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,dt-Ln(1+x)$$
6. Comparer $a_n(x)$ et $Ln(1+x)$
7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1)$

Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels a, b, c et d vérifiant (pour tout nombre réel x) :
$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}$$
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.
2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ et $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes, dont les termes généraux sont donnés pour *n* entier supérieur à 1 et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$
2. $v_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jacques ATTALI : intitulé : « Peut-on prévoir l'avenir ? » Paru aux éditions Fayard en août 2016.

Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.
Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre copie

Je veux ici expliquer comment je prévois l'avenir et comment chacun de nous peut y parvenir.

« Connaître l'avenir », « prédire l'avenir », « prévoir l'avenir » : trois expressions qui disent apparemment la même chose. Et qui sont pourtant fort distinctes. Dans toutes les langues.

« Connaître l'avenir », c'est penser qu'il est fixé à l'avance et qu'on peut en découvrir tous les détails. Ceux qui le croient possible en déduisent qu'il faut se résigner à accepter notre destin comme il viendra, puisqu'il nous est imposé, jour après jour, par les dieux ou par la nature. Que nous devons prier les dieux afin qu'ils le changent.

« Prédire l'avenir », c'est encore penser qu'il est immuable, mais sans plus croire qu'il soit entièrement accessible à notre connaissance ; c'est alors se contenter d'en deviner les bribes, d'anticiper un peu de ce que le destin nous réserve, sans non plus espérer le modifier sinon par la prière…

Enfin « prévoir l'avenir », c'est aussi essayer de le deviner au moins partiellement, mais en considérant qu'il n'est pas figé, et qu'il est possible, par l'action, de lui faire prendre un autre chemin que celui que décrit la prévision.

Chercher à « connaître » l'avenir ou à le « prédire », c'est se résigner. Chercher à le prévoir, c'est se préparer, si on le souhaite, à vivre libre, à « devenir soi ».

…/… Ceux qui pensent qu'ils peuvent influer sur leur destin ont besoin, d'abord, de comprendre ce que l'avenir semble leur réserver ; pour détourner, si nécessaire, le cours du destin et le rapprocher d'une trajectoire rêvée. Comme un général envoie, un éclaireur ou un espion, observer ce qui se passe chez l'ennemi, pour lui rendre ensuite compte de la situation et lui permettre d'élaborer une stratégie ; prévoir c'est se faire éclaireur du temps. Espion de l'avenir.

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie : on peut souhaiter prévoir son propre avenir juste pour éviter un danger, sans pour autant vouloir changer le cours de sa vie, ni chercher à « devenir soi ». Par exemple, quand on roule sur une route de nuit, on a intérêt à allumer les phares afin d'éviter les obstacles, mais pas nécessairement pour changer de destination ; de même, une entreprise a intérêt à évaluer tous les risques qu'elle peut encourir juste pour les éviter, sans pour autant vouloir changer d'activité. Un banquier a intérêt à connaître toutes les circonstances dans lesquelles son prêt pourrait ne pas être remboursé sans pour autant vouloir modifier sa politique de crédit. Une nation a intérêt à prévoir les risques qu'elle peut courir, sans pour autant nécessairement vouloir changer de modèle de développement ou de projet politique. L'humanité a intérêt à prévoir l'évolution du climat de la planète, pour essayer d'en contenir les conséquences désastreuses, sans pour autant vouloir changer plus largement son destin. Et plus particulièrement les peuples martyrs, et victimes de ségrégation spécifique sont sans cesse dans l'obligation de prévoir les menaces qui les guettent ; prévoir l'avenir est pour eux une condition de survie, qui ne leur impose pas nécessairement de changer de pays ou de confession.

Aujourd'hui, ceux qui ne peuvent ou ne veulent prévoir leur avenir se préparent des lendemains tragiques. Prosaïquement, ils ne préparent pas leur retraite ; ils vivent à crédit sans se préoccuper de savoir comment rembourser ; ils négligent les conséquences de leurs actes sur l'environnement et sur les autres ; même s'ils savent ce qui va en découler, ils préfèrent l'ignorer.

Seuls survivront longtemps ceux qui n'auront pas joué un jeu aussi suicidaire, et qui auront su prévoir et aider les autres à prendre conscience de l'urgence d'anticiper. Pour rester des êtres humains. Ou mieux encore : pour le devenir enfin.

C'est possible. Il ne faut jamais oublier que le propre de l'homme, ce qui lui a permis de dominer les autres espèces, c'est sa capacité de prévoir l'avenir. Et le propre des chefs, parmi les humains, c'est leur capacité supérieure à y parvenir, à le faire croire, ou à contrôler ceux qui le font ; prévoir doit devenir une obsession. La liberté est à ce prix.

Est-il possible de prévoir l'avenir ?

Pour certains c'est tout à fait impossible, autant y renoncer tout de suite.

D'abord parce qu'on ne sait même pas ce qu'est le temps : si chacun ressent bien qu'il s'écoule (dans nos corps, nos vies, nos sensations, nos souvenirs, nos espérances) ; si chacun comprend à peu près ce que sont le passé et le présent, chacun sait aussi que la mémoire est trompeuse, que le présent est souvent illusoire, que l'avenir est immédiatement du passé ; et qu'on ne peut même pas définir le temps.

Ensuite, parce que tant d'évènements peuvent influer sur l'avenir, personnel ou collectif, qu'il est absurde d'espérer déterminer le cours des choses : si on n'avait pas croisé telle personne par hasard, notre vie eut été totalement différente ; à l'inverse, si on n'avait pas pris du retard dans tel rendez-vous, on aurait pu rencontrer celui ou celle qui aurait pu changer notre destin. Si une entreprise n'avait pas eu tel dirigeant, elle aurait peut-être manqué telle technologie qui l'a sauvée.

De même, à l'échelle des peuples et de l'Histoire : si en juin 1914, à Sarajevo, l'archiduc François- Ferdinand avait échappé à l'attentat qui l'a tué, la première guerre mondiale n'aurait peut-être pas eu lieu. Si le 11 septembre 2011 le quatrième avion détourné n'avait pas été dévié de sa trajectoire par des passagers courageux et s'était écrasé sur la Maison-Blanche, le sort de la planète eût été différent.

…/… On peut donc comprendre qu'après un millier de pages d'analyses savantes sur ce sujet, le mathématicien Nassim Nicholas Taleb conclue péremptoirement : « Les prévisions sont tout bonnement impossibles. »

Pour d'autres, au contraire, même s'il était possible de prévoir, de prédire et même de connaître l'avenir, il faudrait surtout s'en empêcher : faut-il vraiment se savoir atteint d'une maladie incurable ? Faut-il songer à la mort ? Dans un couple, faut-il vraiment chercher à prévoir le comportement de l'autre ? N'est-ce pas se condamner à l'ennui ? Si on savait, avant un dîner chez des amis qui on allait y rencontrer et ce qui allait s'y dire, aurait-on encore envie de s'y rendre ? De même, si on avait pu prévoir que l'électricité allait causer la mort de plusieurs millions de personnes, l'aurait-on jamais utilisée ? Plus généralement, si l'avenir était totalement prévisible, aurait-on encore envie de vivre ? L'imprévisible n'est-il pas nécessaire à toute vie en société ? A tout plaisir ? A toute décision ?

…/…Les hommes, depuis toujours scrutent les astres, interrogent des voyantes, font parler les cartes et fouillent dans ce qu'ils pensent être des expressions du destin. Etonnement, ils s'entêtent à le faire sans douter de la validité de techniques dont nul n'a pourtant jamais apporté la moindre preuve rationnelle de leur efficacité. Comme si l'homme s'accrochait à tout et n'importe quoi pour tenter de comprendre ce qui l'attend, dans un monde où rien ne lui paraît prévisible, pas même, au début de l'humanité, le retour du soleil à l'aube, ni celui de la nuit, au crépuscule. Chacune de ces techniques dit malgré tout beaucoup de l'avenir : de l'observation des astres à l'analyse des rêves, des jeux de hasard à l'interprétation des signaux les plus faibles, tout peut être signifiant.

Comme le pouvoir appartient très largement à celui qui prévoit, ou qui réussit à faire croire qu'il est capable de le faire, ou encore à celui qui contrôle ceux qui prévoient – successivement hommes de Dieu, d'armes, politiciens et hommes d'argent -, cette histoire de la prédiction est aussi, d'une certaine façon, celle du pouvoir.

Ceux qui parlent de l'avenir se trouvent toujours dans une position dangereuse : ils sont en général pessimistes (car on a toujours tendance à noircir l'avenir que l'on ne connaîtra pas, comme pour punir les autres d'exister après vous). Et ceux qui prévoient sont souvent considérés comme responsables de ce qu'ils annoncent (en tout cas, comme l'ayant souhaité).

…/… Prévoir l'avenir a d'abord été l'apanage des dieux et de leurs représentants sur terre. Ceux que Victor Hugo appelle les « contemplateurs de ténèbres » tentent alors de percer les secrets de l'avenir, par des prières, des transes, l'observation de signes célestes ou corporels, des jeux de hasard, de la méditation, de la musique, de la danse. Ils sont chamans, prophètes, augure ; ils sont à la fois adorés et haïs, craints et vénérés.

Peu à peu, les hommes ont tenté de s'approprier ces pouvoirs et sont parvenus à prévoir au moyen de diverses techniques rationnelles quelques données du futur. Ils ont peu à peu mis au point des méthodes pour apprendre à prévoir : les jeux, la littérature, la musique, l'humour.

Et puis, très récemment, tout s'est détraqué : aucune des directions que l'Histoire était censée prendre n'a tenu ses promesses ; ni celle du capitalisme, ni celle du socialisme, ni celle de la démocratie. Le monde est devenu de moins en moins prédictible. La plupart des hommes, ivres de liberté et de caprices se contentent désormais de vivre l'instant présent sans plus chercher à rien attendre de l'avenir. Sans plus penser à l'éternité, ni même aux années qui leur restent à vivre. Faisant tout pour oublier qu'ils sont mortels, étourdis par d'absurdes distractions, d'illusoires convoitises.

Aujourd'hui, face à la complexité des interactions, les hommes confient de plus en plus la mission de prévoir à des machines. De façon de plus en plus précise. Dans tous les domaines : la finance, la santé, la sécurité, la consommation, la production. La prévision redevient ici prédiction.

Ce savoir sur l'avenir n'est pas également partagé, et il restera ce qu'il est depuis l'aube des temps : un instrument majeur de pouvoir au profit de quelques-uns. D'abord, comme toujours, ceux qui, mystérieusement sauront faire preuve d'intuition et de prescience. Puis, demain, des compagnies d'assurances et des gestionnaires de données sauront tout des risques encourus par chacun, et orienteront les comportements pour les minimiser. Chacun sera alors un collaborateur plus ou moins volontaire d'une dictature prédictive.

Pour ma part, je ne veux pas croire que la liberté des hommes sera ainsi perdue. Je ne veux pas croire que nous n'aurons plus jamais les moyens d'anticiper notre avenir et d'agir sur lui. Je ne crois pas non plus que les machines soient aujourd'hui, et seront même jamais, capables de remplacer la sophistication de la pensée humaine. Ni que la démocratie deviendra définitivement un leurre. Je ne veux pas croire enfin que l'espèce humaine acceptera de perdre ce qui fait l'essentiel de sa grandeur : sa capacité à se projeter dans l'avenir, pour le choisir.

Je crois au contraire, que les potentialités de chacun de se prévoir sont, et seront, bientôt plus grandes que jamais. Et que devancer notre avenir deviendra une arme, l'arme ultime, de défense et de conquête de notre liberté.

…/… La paresse est le pire ennemi de l'anticipation. La prévision est le meilleur allié de la liberté ; le seul moyen, même, d'éviter que ne se réalise le scénario noir, pour chacune de nos vie comme pour l'humanité. Il faut donc oser prévoir et y consacrer le temps nécessaire ; on s'aperçoit vite que c'est moins difficile qu'on ne le pense. Et qu'on apprend infiniment sur soi et sur les autres en s'y livrant. On peut, on doit aussi convier à ce processus toutes les techniques disponibles, y compris les plus étranges, les plus anciennes. Certes, rien ne me fera jamais douter de l'absurdité de la chiromancie ou de l'astrologie, prises l'une et l'autre au pied de la lettre. Rien ne me fera non plus croire que l'observation de la chute d'une feuille ou du marc de café, ou encore de l'envol d'un oiseau, puisse aider à prévoir quoi que ce soit. En revanche, en particulier, les techniques les plus récentes de prévision, permettent de comprendre l'influence, certaine même si elle est très indirecte, des astres sur la météorologie et sur l'humeur des gens ; de l'influence de leur physique sur leur capacité à séduire et à convaincre ; de l'influence du hasard sur les destins. Il est aussi vraisemblable qu'on ne sait pas encore tout sur la fonction d'analyse causale des signaux faibles par les rêves, ni sur la capacité d'intuition, d'analyse totale, de pressentiment, de précognition dont certains disposent, surtout parmi les artistes, les musiciens, les poètes. Et inversement, c'est en cherchant à prévoir que chacun peut faire surgir ses propres capacités créatrices artistiques

Il appartient donc à chacun de nous de développer ces dons. Ils conduisent tant à prédire l'avenir qu'à échapper à la pesanteur du présent pour rêver, oser, créer.

Imaginez un monde dans lequel chacun ferait cet exercice. Cette lucidité transformerait profondément l'avenir individuel et collectif. Nul ne pourrait plus procrastiner ni se conduire en aveugle. Nul ne pourrait se résigner à la dictature des machines ni se contenter de son propre égoïsme. Nul ne pourrait plus s'enfermer dans la résignation ni dans le tunnel d'une vie décidée par d'autres.

En attendant cette inaccessible lucidité universelle, ceux qui prendront la peine d'apprendre ces techniques verront assez vite de grands changements dans leur vie, dans leur force créatrice et dans leurs rapports aux autres. Encore leur faudra-t-il affronter le fait que toute prévision de l'avenir est un appel à l'action et que tout change une fois qu'on a écarté le voile de l'ignorance. Même la peur devient alors un moteur de l'action. Même le chagrin n'est plus un obstacle à la joie parce que prévoir conduit à penser au-delà de lui et au moment où, inévitablement, il s'estompera.

Pour les avoir moi-même beaucoup pratiquées, je peux témoigner de l'extraordinaire force créatrice et auto réalisatrice de ces techniques. Il suffit d'y croire sincèrement, pour que, d'une certaine façon, elles participent au surgissement mystérieux de l'avenir. Oui, le fait de croire à une prévision, aussi irréaliste soit-elle en apparence, peut participer à sa réalisation.

Chaque vie est comme une cathédrale. Il faut la rêver avant de la vivre, la rêver pour la vivre. Même si on n'a pas le temps de l'achever de son vivant, on finit toujours par vivre dans son œuvre : prévoir donne vie.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $x^2e^x + Ln(1+x^2)$ au point x=0

La dérivée est égale à $(x^2+2x)e^x + \dfrac{2x}{1+x^2}$ et au point x=0, cette dérivée est nulle.

2. .Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

On obtient $y = 6/x$, puis $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$: L'ensemble des solutions est :

(3,2) ;(-3,-2) ; (2,3) ;(-2,-3)

3. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\sin(x)\ dx$.

La fonction étant impaire, l'intégrale est nulle.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt = 0$.

Tous les termes sont strictement positifs, donc l'équation n'admet aucune solution.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{x^3}{2})}+2\right)=0$$

6. $\lim\limits_{n} u_n=\lim\limits_{n} n(e^{1/n}-1)=\lim\limits_{n} n(1+\dfrac{1}{n}-1)=1$.

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation : x-y+1=0.

   On obtient $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

8. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} x^3\, Ln(x)\, dx$.

   Par intégration par parties, en posant $u'=x^3$, on obtient : $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} x^3\, Ln(x)\, dx=\left[\frac{x^4}{4}Ln\, x\right]_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^3}{4}dx=-\frac{\varepsilon^4}{4}Ln\,\varepsilon-\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon^4}{16}$ et la limite est égale à

   -1/16

9. Résoudre l'équation : $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$.

   Cette équation s'écrit : $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$ et les solutions sont : 0, 1, 2, 3

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

    - Qualité supérieure : 80% des parcelles

    - Qualité moyenne : 15% des parcelles

    - Qualité inférieure : 5% des parcelles

    Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ? La probabilité est égale à $(0{,}8)^3=51{,}2\%$

Exercice n° 2

Le paramètre t étant un nombre réel strictement positif, on pose $y_t(x)=\dfrac{e^{-xt}}{xt}$

1. Etudier les variations de la fonction réelle y_t et donner l'allure de son graphe.

   La fonction est définie pour x non nul. On a : $y'_t(x) = \dfrac{-e^{-xt}\, t\,(xt+1)}{(xt)^2}$ et cette dérivée est nulle pour x=-1/t. on a : $y_t(-1/t) = -e$. On a une branche parabolique dans la direction Oy à moins l'infini.

x	$-\infty$ $\quad$ $-1/t$	0	0 $\quad$ $+\infty$
$y'_t(x)$	+	-	-
$y_t(x)$	$-\infty \nearrow$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

2. Calculer $I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx$

$$I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx = \frac{1}{t}\int_0^1 x e^{-xt}\, dx = \frac{-1}{t^2}\left[e^{-xt}\,(x+\frac{1}{t})\right]_0^1 = \frac{1}{t^3}\left(1-e^{-t}(t+1)\right)$$

3. Calculer $\lim_{t\to+\infty} I_t$ et $\lim_{t\to 0} t^3\, I_t$

   $\lim_{t\to+\infty} I_t = 0$ et $\lim_{t\to 0} t^3\, I_t = 1-1=0$

Exercice n° 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x) = -x-\sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = -x+\sqrt{x^2-1}$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1,+\infty[$.

   La dérivée de f est $f'(x) = -1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$ et la fonction est décroissante de -1 à $-\infty$

   La dérivée de g est $g'(x) = -1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ et la fonction est croissante de -1 à 0

2. Pour k entier naturel non nul, on pose : $I_k = \left[-k+\sqrt{k^2-1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k-\sqrt{k^2-1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

   Comme g est croissante, on a : $I_{k+1} \subset I_k$

   Comme f est décroissante, on a : $J_k \subset J_{k+1}$

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$

La résolution de l'équation $x^2+2kx+1>0$, montre que le domaine de définition de $f_k(x)$ est $I_k\cup J_k$ et on en déduit que le domaine de définition de φ_n est $I_n\cup J_n$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]=k$ (en multipliant l'expression par sa quantité conjuguée) et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres qui sont inférieurs à 10^p, dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel p)

Notons x y et z les trois chiffres qui composent un entier strictement inférieur à 10^p. Ce nombre s'écrit : $n=100x+10y+z$. Il faut pour que la somme soit inférieure à 10^p et que $x\le 3; y\le 3; z\le 3$.

Pour p= 0, $10^0=1$ et il n'existe aucun entier inférieur à 1 et dont la somme des chiffres est égale à 3,
Pour p= 1 $10^1=10$ et 3=003 est le seul nombre, donc $S_1=\{3\}$
Pour p= 2 $10^2=100$ et pour un entier de la forme xyz, il fat x=0 et y+z=3. D'où
$S_2=\{03,12,21,30\}$

Pour $p\ge 2$, x y et z doivent vérifier : $\begin{cases}100x+10y+z<10^p\\ x+y+z=3\end{cases}$

En faisant varier x, puis y, puis z de 0 à 3, on trouve :
$S_p=\{3,12,21,30,102,111,120,201,210,300\}$

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f définie par:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
   Le domaine de définition de *f* est l'intervalle $[2,+\infty[$

2. Calculer $\left(f(x)\right)^2$ pour simplifier l'expression de $f(x)$ et tracer le graphe de *f* dans un repère orthonormé.
   $\left(f(x)\right)^2 = 2\left((x-1)+|x-3|\right)$
   Puis $\left(f(x)\right) = \begin{cases} 2 \;\; si \;\; 2 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{x-2} \;\; si \;\; x \ge 3 \end{cases}$

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) tels que $y = f(x)$, avec x inférieur ou égal à 10.
   Les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $y = f(x)$ sont (2, 2) ; (3, 2) et (6, 4).

4. Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que *g* est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de *g* est dérivable sur *J*.
   Comme la fonction *f* est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$

5. Déterminer la fonction g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère que celui de *f*. Que peut-on dire ?
   On a $g^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 2$ et le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de *g* par rapport à la première bissectrice.

Exercice n° 6

1. Etudier les variations et tracer le graphe da la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$
   On décompose la fonction sous la forme : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1} = x-1+\dfrac{3}{x+1}$
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty;\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1;\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = -1$. La droite d'équation $y = x-1$ est donc une asymptote oblique et la droite *x*=-1 une asymptote verticale.

$$f'(x) = \frac{x^2+2}{x+1} = 1-\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ $-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation x=1 et x=2.

   Soit $I=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 (x-1+\frac{3}{x+1})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+3Ln(x+1)\right]_1^2=\frac{1}{2}+3Ln(\frac{3}{2})$

3. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
   Le point (-1, -2) est un centre de symétrie (intersection des deux asymptotes), en effet en posant $X=x+1$ et $Y=y+2$, on obtient la fonction impaire : $Y=X+\frac{3}{X}$

Exercice n° 7

Soit $I_n=\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1. On obtient $I_1=e^2-3$ (en intégrant par parties).

2. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a : $0\le I_n\le\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

   $0\le I_n\le\int_0^2 \frac{1}{n!}2^n e^2\,dx\le\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

   $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ (intégration par parties)

4. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

   La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro, et comme elle est majorée par $\frac{2^n e^2}{(n)!}$ qui converge vers 0, elle converge vers 0.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f_λ la fonction définie sur R par : $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de f_λ et donner l'allure de son graphe.

   La fonction f_λ est définie sur *R*, et sa dérivée est égale à $f_\lambda^{'}(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} > 0$.

   La fonction est donc strictement croissante sur R à valeurs dans $\left]0,1\right[$. Elle admet l'axe *Ox* et la droite *y*=1 comme asymptotes horizontales.

2. Monter que f_λ admet un centre de symétrie.

   Le point $A(0,1/2)$ est un centre de symétrie. Il suffit de poser $Y = y - \dfrac{1}{2}$ pour obtenir la fonction impaire $Y = \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{2(1+e^{-\lambda x})}$

3. Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_λ

   Posons $h_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$. On a $h_\lambda(0) = 1/2; h_\lambda(1) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda}} - 1 < 0$, h_λ est strictement décroissante et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $x_\lambda \in \left]0,1\right[$ à l'équation : $h_\lambda(x) = 0$

4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$

   Comme la fonction f_λ est continue, si la suite (u_n) admet une limite *l*, alors elle vérifie $l = f_\lambda(l)$ et donc $l = x_\lambda$. Il reste à vérifier que la suite est convergente.
   En effet, on a $0 < u_n < 1$ et elle est décroissante.

5. Calculer $I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

   $$I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx = \int_{-n}^{0} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{\lambda x}}\,dx = \left[\frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{\lambda x})\right]_{-n}^{0} = \frac{1}{\lambda} Ln2 - \frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{-\lambda n})$$

   Et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{\lambda} Ln2$

6. Calculer $J_n = \int_{0}^{n} (1 - f_\lambda(x))\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

En posant $u=-x$, on obtient : $J_n = I_n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{\lambda} Ln2$

Exercice n° 2

On considère la famille de courbes C_m dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est : $x^2+4mx-2(m+1)y=0$, où m est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe C_m selon la valeur du paramètre m ?
   Si $m=-1$, on obtient deux droites verticales : $x=0, x=4$

   Si $m>-1$, on obtient une parabole convexe d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$

   Si $m<-1$, on obtient une parabole concave d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$

2. Montrer que les courbes C_m passent par des points fixes que l'on précisera (sauf pour une valeur particulière de m).
   De l'équation précédente, on obtient : $2y-x^2=m(2y-4x)$, soit le système : $\begin{cases} 2y-x^2=0 \\ 2y-4x=0 \end{cases}$, d'où les deux points fixes (0,0) et (4,8) (pour $m\neq -1$)
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de C_m ($m<-1$), l'axe des abscisses et les droites x=0 et x=4.
   On doit vérifier le signe de la fonction sur ce domaine (pour $m<-1$)
   $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$ et $y'=\frac{2x+4m}{2(1+m)}=\frac{x+2m}{1+m}$. On vérifie que la fonction est positive sur le domaine d'intégration, d'où :
   $$Aire=\int_0^4 \frac{x^2+4mx}{2(1+m)}dx=\frac{1}{2(1+m)}\left[\frac{x^3}{3}+2mx^2\right]_0^4=\frac{1}{2(1+m)}\left(\frac{64}{3}+32m\right)>0$$

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et pour chaque entier naturel n (n>1), la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n. La courbe représentative de f_n est désignée par C_n

   On obtient : $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}(n+nx-x)}{(1+x)^2}$ et cette dérivée s'annule pour x=0 et $x=\frac{n}{1-n}$

   Si n est pair, le signe de la dérivée est celui de $(n+nx-x)$. D'autre part :
   $\lim\limits_{-\infty} f_n(x)=-\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f_n(x)=+\infty$; $\lim\limits_{-1} f_n(x)=\infty$. La droite x = -1 est une asymptote verticale.

x	$-\infty$ $\quad$ $n/(1-n)$	-1	-1 $\quad$ 0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	-	-	+
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	↗ $+\infty$

Si n est impair, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ $n/(1-n)$	-1	-1 $\quad$ 0	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	+	+	+
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 0	↗ $+\infty$

2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes C_2 et C_3. On précisera la position relative des deux courbes.
   Pour tracer ces deux courbes, il suffit de reprendre les tableaux précédents.
   Pour C_2, $f_2(-2)=-4$ et pour C_3, $f_3(-3/2)=27/4$
   La position des deux courbes est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{1+x}-\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$
   Pour $-1<x<1$, la courbe C_3 est en dessous de C_2, sinon c'est l'inverse.

3. Etant donné un réel *x*, on note $S_n(x)$ la somme des *n* premiers termes de la suite géométrique de raison (-*x*) et de premier terme 1. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
   On a : $S_n(x)=1-x+x^2+...+(-x)^{n-1}$ et
   $xS_n(x)=x-x^2+...+(-x)^n$
   On vérifie alors aisément que $S_n(x)=f(x)-(-1)^n f_n(x)$

4. Pour $|x|<1$, déterminer la limite de $S_n(x)$ lorsque *n* tend vers l'infini. Qu'en est-il pour *x*=1 ?
   Pour $|x|<1$, $Lim\, x^n=0$ et donc $Lim\, S_n(x)=f(x)$ et pour *x*=1, la suite n'a pas de limite.

5. Pour *x* réel positif ou nul, on pose : $a_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$. Montrer que l'expression suivante est une constante : $a_n(x)+(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,dt-Ln(1+x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.
   On a (question 3) : $\int_0^x(1-t+t^2+...+(-1)^{n-1}t^{n-1})\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,dt$, soit
   $a_n(x)=Ln(1+x)-(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,dt$ et $a_n(x)-Ln(1+x)+(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,dt=0$

6. Comparer $a_n(x)$ et $Ln(1+x)$
   La fonction f_n étant positive entre 0 et *x*, si *n* est pair $a_n(x)\le Ln(1+x)$ et si *n* est impair, $a_n(x)\ge Ln(1+x)$

7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1)$

   On a : $|a_n(x) - Ln(1+x)| \leq \int_0^x t^n\, dt = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

   Pour $0 \leq x \leq 1$, $\lim\limits_{n} a_n(x) = Ln(1+x)$ et $\lim\limits_{n} a_n(1) = Ln(2)$

Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c* et *d* vérifiant (pour tout nombre réel *x*) :

   $$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$

   Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles des fractions rationnelles, on obtient : $\dfrac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\, dx$

   $$\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+2)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{0} = 1$$

Exercice n° 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.

   On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = 1 = f'(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

   La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. On peut donc se restreindre aux nombres réels positifs.

   Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$;

   Son graphe admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

   $$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 1 - Ln2 \text{ et } \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \text{ (car } f \text{ est impaire)}$$

Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$, on a : $|u_n| \leq \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ et la suite tend vers 0
2. $v_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$, on a $v_n = \dfrac{2n(1 + (-1)^n / 2n)}{5n(1 + (-1)^{n+1} / 5n)}$ et la suite tend vers 2/5

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $y = x(1 + x\, Arctg\, x)$ en x=0.

2. Résoudre le système : $\begin{cases} x\,Ln\,x + y\,Ln\,y = 2e \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

3. Calculer $I = \int_0^1 x\,(e^x - 2)\,dx$

4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

5. Un coureur à pied, spécialiste du 10 km, effectue en général cette distance en 35 minutes. Il décide de s'aligner au départ d'un semi-marathon, d'une longueur de 21 km. Toutes choses étant égales par ailleurs, quel sera son temps pour parcourir 21 km

du semi-marathon, sachant qu'il perdra, en moyenne, 10 secondes chaque kilomètre par rapport à son temps sur 10 km ?

6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx$

7. Résoudre, dans R, l'équation suivante : $x^3\int_{-1}^{1} t^3\,dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + x\int_{-1}^{1} t\,dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dt = 0$

8. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\left|x^2-3x+2\right|}{x}$

9. Résoudre dans R^2 le système suivant : $x+y = xy = x^2+y^2$

10. Pour quelles valeurs, la fonction numérique f définie pour $x>0$ par $f(x) = x^2\,Ln(x)$ est-elle convexe ?

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{Ln(1-x)}{x-1}$

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_{1-e}^{0} f(x)\,dx$

Exercice n° 3

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\le n}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n\sin(u_n)$ et $0 < u_1 < 1$

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\le n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Exercice n° 4

Soit $f_n(x) = x^n\,Ln\,x$, où n est un nombre entier strictement positif et x un nombre réel strictement positif.

1. Étudier les variations de f_n et tracer son graphe.

2. Étudier la convexité de f_n

3. Calculer $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$

Exercice n° 5

Soit la fonction numérique g définie par : $g(t) = (1+t)Ln(1+t) + 2t$

1. Étudier les variations de g.

2. Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x\,Ln(1+x^2)$
   Étudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 6

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels positifs par :
$f(x) = Ln(x+e)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
2. Dans une course à pied de 15 km, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête de la course se trouvent sur une même ligne. Si x désigne la distance restante à parcourir, la probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et pour le coureur B à $\frac{1}{g(x)}$. Cet énoncé a-t-il un sens? Qui a le plus de chances de gagner la course ?

Exercice n° 7

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{1\le n}$ définie par : $u_n = \frac{1}{nC_{2n}^n}$,

où C_{2n}^n désigne le nombre de parties à n éléments pris parmi un ensemble à $2n$ éléments.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quel intérêt les pays africains peuvent-ils avoir à s'engager dans un processus international plus ou moins contraignant de réduction des gaz à effet de serre ?

Sujet n° 2

Quelles solutions pourrait-on proposer pour accueillir et former convenablement les étudiants de plus en plus nombreux dans l'enseignement supérieur en Afrique ?

Sujet n° 3

D'après-vous, quel rôle peut jouer le développement des Technologies de l'Information et des Télécommunications en Afrique ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f''(x) = 0$.

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^3+x^2+x+1}$

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Trouver les constantes réelles a, b, c qui vérifient : $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x+1}$

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

4. Étudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

5. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1 + i$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^{+*} par : $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. La fonction *f* admet-elle un point fixe ?

Exercice n° 5

Soit *a* un nombre réel fixé non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. On introduira la fonction *g* définie par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

2. Étudier le signe de la suite (u_n) pour *a* négatif.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) pour *a* négatif.

4. On suppose que *a*>0.

   - Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$

- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé par une fonction *f* définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x)=(ax+b)e^{-x}$, où *a* et *b* sont deux nombres entiers naturels. On donne $e\approx 2,7;\frac{1}{e}\approx 0,37$ et $e^{-8}\approx 0$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe pour *a*=3 et *b*=1 (on étudiera également sa convexité).

2. Déterminer la valeur de *b* pour que la tangente au graphe de *f* au point d'abscisse 1 soit horizontale.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de *a*.

4. Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artisan sur une seule face (partie entre le sol et le toboggan). Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Pierre RABHI * intitulé : « la puissance de la modération », paru aux éditions HOZHONI en octobre 2015.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10 %). Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

La puissance de la modération

La plus grande exaction (1) de la modernité est d'avoir outrepassé les limites de la nature afin de servir le culte d'une croissance indéfinie, irréaliste au sein de notre planète aux ressources abondantes mais limitées.

Ce culte enkysté dans le cerveau des experts et des politiques, s'est imposé comme une évidence sans cesse invoquée pour solutionner tous les problèmes. Il est devenu une sorte de dogme, de crédo quasi religieux, dont la remise en cause serait un blasphème qui, en des temps moins tolérants, aurait mérité le bûcher.

Pour que la logique dont il est question puisse s'imposer et perdurer, il a fallu cultiver le « toujours plus » en manipulant le citoyen réduit au statut de consommateur, afin d'installer dans sa psyché (2) le sentiment permanent du manque voire de la pénurie. Nous avons ainsi instauré le règne de la quantité et aboli la juste mesure. Le seuil de satisfaction étant sans cesse repoussé, le productivisme a finalement provoqué l'inverse de ce qu'il était censé produire : l'insatisfaction dans l'abondance engendre cet état pernicieux où les biens se banalisent, avant même d'avoir assouvi les désirs.

Nos outrances extérieures se révèlent inefficaces à combler nos vides intérieurs. L'accumulation de possessions ne garantit en rien la joie de vivre. Celle-ci, comme sentiment et sensation suprême, est d'une essence (3) qui ne peut être subordonnée à la volonté humaine, car elle ne peut être confondue avec le plaisir. Elle peut advenir dans la chaumière et déserter le plus somptueux palais.

En Grèce antique déjà, la démesure, *l'hubris,* était considérée comme un crime engendrant immanquablement la juste colère des Dieux visant à rétablir l'équité (4) ; il est évident que notre immodération est la source de très nombreux déséquilibres actuels, que ce soit en termes de dissipation des ressources naturelles ou d'inégalités planétaires. Faut-il encore rappeler à nos esprits endoctrinés qu'un cinquième de l'humanité accapare actuellement les quatre cinquièmes des ressources ? Nous nous demandons comment et pourquoi tant de nos frères et sœurs continuent à souffrir de la faim en dépit de l'abondance des ressources.

C'est à la démesure des prospères gaspilleurs, que cela est dû, comme le pensaient les grecs, à l'orgueil de l'homme qui s'est érigé prince de la création et s'est approprié ce que la vie a élaboré depuis des milliards d'années.

Le drame du monde actuel est d'avoir permis à l'argent de légitimer de véritables hold-up sur le bien commun. Une minorité a légalisé son droit à piller ce qui est nécessaire à la survie de tous. La démesure des uns provoque la ruine et l'indigence des autres.

Le « toujours plus » pour quelques-uns engendre le « toujours moins » pour le plus grand nombre. L'organisation du vivre-ensemble universel, non seulement ne remet pas en cause cette anthropophagie mais la valide et la propage.

Bien avant nous déjà, l'émergence des grandes civilisations a montré à quel point un développement démesuré pouvait être néfaste à notre sphère terrestre et participer activement au processus de sa désertification, comme ce fut le cas en Égypte ancienne, en Mésopotamie, et dans bien d'autres espaces terrestres désertifiés, comme nous pouvons l'observer au Sahel et ailleurs.

Avec l'avènement de l'agriculture, l'être humain s'est libéré de sa condition aléatoire de « chasseur-cueilleur-pêcheur » et de sa fragile dépendance aux aléas naturels. L'agriculteur naissant est devenu également un défricheur et un pasteur immodéré.

Tel Prométhée, il a voulu atteindre une maîtrise totale de sa vie en s'exonérant des limites établies par la nature. La science et l'industrialisation ont exalté les capacités du cerveau humain à innover dans ce sens, mais l'intelligence fondamentale n'a pas suivi.

Il en résulte un constat plus que déplorable : l'humain qui était censé se libérer est aujourd'hui plus aliéné que jamais au sein d'un système vendeur de rêves, mais destructeur d'autonomie. Le dévouement à la mort outrepasse le respect et la célébration de la vie. Avec ces considérations indéniables, l'humanité contemporaine est particulièrement invitée à choisir d'urgence entre la bourse ou la vie !

Autrefois, le crime de *l'hubris* recouvrait des violations comme le vol de propriété publique ou sacrée, et il était considéré comme répréhensible et immoral. Telle devrait être notre juste posture aujourd'hui. La spéculation et le négoce autour de la terre nourricière et de ses ressources sont insensés. C'est une véritable profanation de ce qui devrait être reconnu et protégé par les lois, comme bien commun et inaliénable de l'ensemble de l'humanité.

Cela m'évoque le discours que tint le chef indien Seattle au gouvernement d'Isaac Stevens en 1854 : « *La terre n'appartient pas à l'homme ; l'homme appartient à la terre. Toutes choses se tiennent comme le sang qui unit une même famille. Tout ce qui arrive à la terre arrive aux fils de la terre ...* ». Ces paroles révèlent pour moi la spiritualité incarnée, l'intelligence à l'état pur.

La crise fondamentale que nous vivons aujourd'hui est due en grande partie à notre rupture avec l'ordre et le sentiment sacrés. Nous évaluons les choses sur leur contrepartie financière et n'avons plus conscience de leur valeur réelle. La perception d'une planète merveilleuse, pourvoyeuse de toutes les offrandes jubilatoires, est ravalée à celle d'un gisement de ressources à épuiser.

C'est là une des grandes défaillances de l'esprit, qui démontre bien que l'humanité est capable de prouesses extraordinaires, mais qu'elle demeure profondément béotienne (5) quant à la valeur transcendante des liens inaliénables, garants de la continuité de notre aventure terrestre.

Dans l'état actuel du monde qui nous pose l'ultimatum de changer pour ne pas disparaître, peut-être aurions-nous grand intérêt à nous inspirer des processus de notre Terre-Mère et à opter délibérément pour la modération. Antidote à la démesure qui nous a causé tant de désagréments, elle apparaît comme une option consciente, un devoir moral, une posture soucieuse de contribuer à l'harmonie universelle.

À titre personnel, la modération a grandement inspiré notre retour à la terre et même le choix de notre ferme. Aridité du sol, rareté de l'eau, absence d'électricité : avec ma compagne Michèle, nous avons opté pour la modération car elle recelait beauté et simplicité. Le fait qu'aujourd'hui l'humain soit prêt à sacrifier la beauté sur l'autel de la rentabilité, m'affecte profondément. C'est une renonciation à l'une des plus belles et indispensables potentialités de l'espèce humaine, qui est celle d'admirer.

Dans notre cheminement, nous savions que l'immodération serait un piège. Beaucoup d'agriculteurs ont échoué et échouent encore à cause de cela : toujours plus de terres, de matériel, d'emprunts, etc. ne font que les anéantir.

C'est pourquoi à la chimie qui était alors en plein essor, nous avons préféré l'agroécologie. Loin du gigantisme et de la spécialisation, causes de tant de ruptures dans nos écosystèmes naturels, l'agroécologie implique de renouer avec les lois de la vie, en recréant une synergie entre les divers éléments : terre, végétal, animal, humain, qui nourrissent à leur tour la terre.… L'agroécologie est une démarche juste car elle permet de répondre au besoin impérieux de se nourrir dans le respect des sources même de la vie et de la transmission d'une terre vivante aux générations futures.

Elle offre une occasion de se reconnecter profondément à la Terre-Mère et permet ainsi de mieux appréhender le grand mystère. Vous pouvez faire analyser un échantillon de terre mais vous ne saurez jamais qui ordonne au grain de blé de germer et de se multiplier à l'infini. C'est cela qui est fascinant : malgré tous nos savoirs, le mystère demeure...

La modération est puissante en ce qu'elle nous permet de reconquérir notre légitimité : plus nous sommes modérés, plus nous pouvons répondre par nous-mêmes à nos besoins fondamentaux et nous garder de l'aliénation. Elle concentre nos efforts sur l'essentiel, nous libère d'un système complexifié, et exalte le génie et la force de la simplicité. Elle libère du temps pour être et admirer, plutôt que de nous incarcérer dans le « produire » et le « consommer » et nous permet ainsi de répondre à notre véritable vocation.

La modération est puissante en ce qu'elle met en actes la conscience du lien immuable qui nous unit à la nature et à l'ensemble de l'humanité. Elle devient ainsi une posture de reliance et de solidarité : en étant modéré dans mes besoins, je permets à d'autres de satisfaire les leurs. Je me respecte, je respecte mes frères et sœurs humains, je respecte notre terre commune.

Je ne dis pas que le chemin vers la simplicité ou la sobriété est facile. Le système lui-même est pétrifiant et je comprends que bon nombre de personnes aient du mal à s'en extirper. Nous en sommes d'ailleurs tous complices, et alimentons au quotidien les multinationales par nos actes d'achat. Moi-même je ne m'éclaire pas à la bougie et ne roule pas en charrette. Mais il nous reste toujours un espace dans lequel nous avons une marge de choix : il incombe à chacun de se demander à quel moment il outrepasse la juste mesure. Car l'indispensable à la survie est par nature limité.

Il est évident qu'un changement de paradigme (6) est nécessaire pour la survie de notre espèce, replaçant le respect de l'humain et de la nature au cœur de nos préoccupations, et que celui-ci ne pourra advenir sans la modération. La modération peut transformer le monde à condition qu'elle révèle une transformation sincère de l'être humain lui-même, retrouvant le sentiment profond d'appartenance à la réalité vivante universelle. Un être humain conscient, éveillé, faisant délibérément le choix de la modération, peut réellement participer à l'avènement d'un grand changement pour sortir de la logique que l'inintelligence continue à prôner et propager, au risque d'une impasse mortelle dans l'épopée historique du genre humain.

Il est difficile de définir ce qui fait une destinée humaine. Je vois mon propre itinéraire comme un chemin initiatique et n'aurais jamais pu imaginer que le petit orphelin du désert soit mené là où j'en suis aujourd'hui. Les multiples déchirements que j'ai subis auraient pu me faire tomber dans la révolte amère. J'ai préféré me mettre au service de l'amour et de la vie. Je suis entré dans cette posture sacrée à partir du moment où j'ai compris que je pouvais prendre soin de la Terre-Mère, participer à sa régénération et à sa préservation pour le bien de tous, la respecter et l'honorer dans mes actes quotidiens. Aimer, prendre soin et rechercher la cohérence ont été pour moi des moteurs porteurs de sens et d'enthousiasme.

.../… En relisant les citations compilées ici, qui égrainent l'essentiel du message que je n'ai cessé de porter depuis plus de trente ans, je m'aperçois que la modération a toujours été au cœur de mon itinéraire, et que celui-ci s'apparente à une véritable insurrection contre la démesure, source de plus de frustrations que de satisfactions. Décidément, la modération est à l'évidence une puissance libératrice …/…

Je ne crois pas à la puissance des comptes en banque. La vraie puissance est dans la capacité d'une communauté humaine à se contenter de peu, mais à produire de la joie.
Nous ne pouvons accéder au bonheur par la voie de la matière, mais peut-être par la subtilité des éléments qui sont en nous, par une posture de détachement, par le fait de se déligoter des choses qui nous appesantissent.

Aucun faste sous des lustres flamboyants de cristal, aucune manifestation de la vanité conquérante, aucune construction en luxueuse chimères, n'ont la force d'un humble foyer rassemblant des hommes et des femmes dans la simplicité et la bienveillance.

Les ressources demeureront toujours insuffisantes, tant que la justice, la modération, un humanisme authentique et une conscience radicalement différente, ne présideront pas à leur usage.

Mettons en route dès maintenant les processus qui permettront d'éviter une immense déconvenue. Car la finalité est inévitable : il faudra faire de la frugalité un nouveau paradigme.

Je suis frugal parce que j'ai conscience d'habiter une planète aux ressources limitées soumise à un pillage illimité. Je suis frugal parce que je veux me libérer de la surconsommation et m'affranchir du statut de consommateur manipulé, auquel l'idéologie de la marchandise veut me réduire. Je suis frugal parce que je ne veux pas contribuer à rendre la vie des générations à venir impossible.

La modération libère du temps pour un art de vivre. Le travail devient un labeur constructeur de sens et de bien-être physique et moral. Le temps de la puissance de la modération constitutive de l'essor d'un vivre ensemble généreux et solidaire, est aujourd'hui la seule évidence.

Changement, cheminement

Tout changement implique le changement de soi, car si l'être humain ne change pas lui-même, il ne pourra changer durablement le monde dont il est le responsable. Nous oublions trop souvent que tout ce qui se produit dans le monde germe d'abord en chacun d'entre nous. Nos tourments sont à la racine de toutes les déviances de la société.

Si on admet que chacun d'entre nous est le monde, et que le monde est chacun de nous, instaurer la paix en soi, c'est contribuer à la paix dans le monde. Et nous voici affranchis de l'impuissance. Au lieu de nous positionner en victimes ou de chercher des boucs émissaires, nous cherchons et expérimentons des solutions.

Il y a en chacun de nous un tyran et une victime. Ces failles, si nous ne les accueillons pas pour les penser et les panser (7), font le lit des idéologies, du dogmatisme religieux, du conformisme militant. On se cherche un sauveur, une appartenance, une ligne de conduite, et l'on néglige de prendre sa part de responsabilité à l'égard de soi et des autres.

Bien sûr qu'il y a des protestations nécessaires, mais l'idéal est une détermination paisible, qui nous engage en notre âme et conscience et dans notre libre arbitre, à participer avec toute l'énergie dont nous disposons au changement du monde.

(1) Exaction : abus ; détournement.
(2) Psyché : psychisme ; âme.
(3) D'une essence : d'une nature, d'une origine.
(4) Équité : égalité.
(5) Béotienne : imparfaite.
(6) Paradigme : modèle.
(7) Panser : soigner.

*Pierre RABHI est né en 1938 en Algérie. Il est auteur, conférencier et philosophe, et l'un des pionniers de l'agriculture écologique en France.

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $y = x(1 + x\,Arctg\;x)$ en x=0.

On obtient : $y^{'} = 1 + 2x\,Arctg\;x + \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $y^{'}(0) = 1$

2. Résoudre le système : $\begin{cases} x\,Ln\,x + y\,Ln\,y = 2e \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

On obtient x=y, d'où $x\,Ln\,x = e$, soit x=e=y (l'étude rapide de la fonction $x\,Ln\,x - e$ permet de vérifier qu'il n'y a qu'une solution.

3. Calculer $I = \int_0^1 x(e^x - 2)\,dx$

$I = \int_0^1 x(e^x - 2)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx - 1 = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 - 1 = 0$ (Intégration par parties, en posant : $u = x, v^{'} = e^x$

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

On a une suite géométrique de raison 1/2. Et $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1-(1/2^{n+1})}{1-1/2}$ qui tend vers 2

5. Un coureur à pied parcourt les 10 km en 35 minutes. Toutes choses étant égales par ailleurs, quel sera son temps pour parcourir 21 km, sachant qu'il perdra 10 secondes chaque kilomètre.

Si le coureur gardait la même vitesse sur 21 km que 10 km, il parcourrait la distance en : 35minutes*2 + (1/10)*35minutes, soit un temps de : 1h : 13 minutes et 30 secondes. Mais il perd 10 secondes au kilomètre, donc au total il va perdre 3 minutes et 30 secondes.
Le temps sera donc de 1h :17 minutes.

6. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(x+2)(x+1)}dx$

On a : $\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(x+2)(x+1)}dx = \lim_{n\to+\infty}\left[Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^n = \lim_{n\to+\infty} Ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + Ln2 = Ln\,2$$

7. Résoudre l'équation suivante : $x^3\int_{-1}^{1} t^3\,dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + x\int_{-1}^{1} t\ \ dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\ dt = 0$

On a : $x^3\int_{-1}^{1} t^3\,dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + x\int_{-1}^{1} t\ \ dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\ dt = 0 + \frac{2}{3}x^2 + 0 - \frac{2}{3} = 0$, soit $x = \pm 1$

8. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\left|x^2-3x+2\right|}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\left|x^2-3x+2\right|}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x^2-3x+2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x^2(1-3/x+2/x^2))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2Ln\,x}{x} = 0$$

9. Résoudre dans R^2 le système suivant : $x+y = x\,y = x^2+y^2$

On élève au carré l'équation $x+y = x\,y$ pour obtenir : $3x\,y = x^2+y^2$, soit
$xy(3-xy) = 0,\ d'où\ x\,y = 0$

donc $(x,\ y) = (0,0)$

10. Pour quelles valeurs, la fonction numérique *f* définie pour *x*>0 par $f(x) = x^2\ Ln(x)$ est-elle convexe ?

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = 2x\,Ln(x) + x$ et la dérivée seconde à $f''(x) = 2Ln(x)+3$
La fonction est convexe si sa dérivée seconde est positive soit $x \geq e^{-3/2}$

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{Ln(1-x)}{x-1}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour x<1. La dérivée est égale à : $f'(x)=\dfrac{1-Ln(1-x)}{(x-1)^2}$ qui s'annule pour x=1-e. La fonction est décroissante de $]-\infty,1-e]$ sur $]0,-1/e]$ et croissante de $[1-e,1[$ sur $[-1/e,+\infty[$. La droite d'équation x=1 est une asymptote verticale.

2. Calculer $I=\int_{1-e}^{0} f(x)\,dx$

$$I=\int_{1-e}^{0} f(x)\,dx=\int_{e}^{1}\frac{Lnt}{t}\,dt=\left[\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_e^1=-\frac{1}{2}$$

Exercice n° 3

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\leq n}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=u_n\sin(u_n)$ et $0<u_1<1$

On vérifie aisément par récurrence que : $0<u_{n+1}<1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sin(u_n)<1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=l\sin(l)$, soit l=0.

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\leq n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1}=Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a : $v_{n+1}=Ln(\sin(u_n))\approx Ln(u_n)\to-\infty$ (car la suite u_n tend vers zéro).

Exercice n° 4

Soit $f_n(x)=x^n\,Lnx$, où n est un entier strictement positif et x un nombre réel strictement positif.

1. Étudier les variations de f_n et tracer son graphe

Sa dérivée est égale à : $f_n^{'}(x)=x^{n-1}(n\,Ln\,x+1)$, qui s'annule pour $x=e^{-1/n}$. La fonction peut être prolongée par continuité en zéro, en posant $f_n(0)=0$ et admettant en ce point une tangente horizontale. Elle admet une branche parabolique à l'infini.

La fonction est décroissante de $\left[0,e^{-1/n}\right]$ sur $\left[0,\frac{-1}{n\,e}\right]$ et croissante par la suite.

2. Étudier la convexité de f_n

Sa dérivée seconde est égale à : $f_n^{''}(x)=x^{n-2}(n(n-1)Ln\,x+2n-1)$ qui est nulle pour $x=\exp\left(\frac{1-2n}{n(n-1)}\right)$ et la fonction est convexe après cette valeur.

3. Calculer $I_n=\int_1^e f_n(x)\,dx$

Par intégration par parties, on obtient : $I_n=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}Ln\,x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^n}{n+1}dx=\frac{1}{(n+1)^2}(n\,e^{n+1}+1)$

Exercice n° 5

Soit la fonction numérique *g* définie par : $g(t)=(1+t)\,Ln\,(1+t)+2t$.

1. Étudier les variations de *g*.

La fonction est définie pour t >-1 et sa dérivée est égale à : $g^{'}(t)=Ln\,(1+t)+3$ qui est nulle pour $t=e^{-3}-1$ et $g(e^{-3}-1)=-2-e^{-3}<0$ et $g\,(0)=0$. La fonction est décroissante pour $t<e^{-3}-1$ et croissante pour $t>e^{-3}-1$

2. Soit la fonction numérique *f* définie par $f(x)=x\,Ln\,(1+x^2)$

Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction est impaire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine et il suffit de l'étudier sur les réels positifs.

Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x)=\frac{1}{1+x^2}\left((1+x^2)\,Ln(1+x^2)+2x^2\right)=\frac{g\,(x^2)}{1+x^2}>0$

Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy, avec *f(0)=0 ;*

3. Calculer $I=\int_0^1 f\,(x)\,dx$

Par intégration par parties, on obtient : $I=\left[\frac{x^2}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}Ln2-J$

Avec $J=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\,dx=\int_0^1(x-\frac{x}{1+x^2})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Ln2$, d'où

$I=Ln2-\frac{1}{2}$

Exercice n° 6

On considère les deux fonctions $f(x)=Ln(x+e)$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$ définies sur l'ensemble des réels positifs.

1. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

On considère la fonction : $h(x)=f(x)-g(x)$, sa dérivée est égale à :
$h'(x)=\dfrac{1}{x+e}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-(x+e)}{2(x+e)\sqrt{x+1}}$. Le dénominateur est positif et on pose $u(x)=2\sqrt{x+1}-(x+e)$, dont la dérivée est strictement négative, et u est à valeurs dans $[2-e,-\infty[$. La dérivée de h est négative et seule x=0 est solution de l'équation.

2. Dans une course à pied de 15 km, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête se trouvent sur une même ligne. Si x désigne la distance restante à parcourir, la probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\dfrac{1}{f(x)}$ et pour le coureur B à $\dfrac{1}{g(x)}$. Cet énoncé a-t-il un sens? Qui a le plus de chance de gagner la course ?

On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1 donc les valeurs $\dfrac{1}{f(x)}$ et $\dfrac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités.

Soit $y=f(x)-g(x)=Ln(x+e)-\sqrt{x+1}$ sur R^+, d'après la première question y est décroissante et négative. En conclusion: $f(x)\le g(x)$.
Comme $f(x)\le g(x)$, A à plus de chances de gagner la course.

Exercice n° 7

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{1\le n}$ définie par : $u_n=\dfrac{1}{nC_{2n}^n}$,

où C_{2n}^n désigne le nombre de parties à n éléments pris parmi un ensemble à 2n éléments.

Il est clair que la suite $(u_n)_{1\le n}$ est positive. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{nC_{2n}^n}{(n+1)C_{2n+2}^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\times\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\approx\frac{n^3}{4n^3}\approx\frac{1}{4}<1$$

La suite $(u_n)_{1\le n}$ est donc décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

On pouvait le voir directement : $0\le u_n=\dfrac{1}{nC_{2n}^n}=\dfrac{n!n!}{n(2n)!}=\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=n+1}^{2n}k}\le\dfrac{1}{2n}\to 0$ (on a n-1 termes au numérateur et n termes au dénominateur)

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x)=\dfrac{Ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{(2-Ln(1+x))}{2(\sqrt{1+x})(1+x)}$ et elle est du signe du numérateur qui s'annule pour $x=e^2-1$. La limite à plus l'infini est nulle. L'axe horizontal donne une asymptote.

x	0	e^2-1	$+\infty$
$f^{'}(x)$	+		-
$f(x)$	0 ↗	2/e	↘ 0

2. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

En posant $u=\sqrt{1+x}$, on obtient :

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=4\int_1^{\sqrt{2}} Ln u\ du=4\left[u\,Ln u-u\right]_1^{\sqrt{2}}=4(\sqrt{2}\,Ln\sqrt{2}-\sqrt{2}+1)$$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f^{''}(x)=0$.

La dérivée seconde est égale à : $f^{''}(x)=\dfrac{-\left[2+3(2-Ln(1+x))\right]}{4(1+x)^{5/2}}$. Cette dérivée seconde est nulle quand le numérateur est nul.

Soit $2+3(2-Ln(1+x))=0$ ou encore $Ln(1+x)=8/3$, soit $x_0=e^{8/3}-1$. La fonction est concave sur $\left[0,x_0\right]$

Exercice n° 2

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x^3+x^2+x+1}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

On peut remarquer que le dénominateur s'écrit : $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$.

Sa dérivée est égale à : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(3x^2+3x+2)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$ qui s'annule uniquement en 1.

Le graphe de la fonction passe par les points de coordonnées (0,1) ; (1/3 ,0) et (1,-1/2). L'axe ox est une asymptote horizontale et l'axe d'équation x=-1, une asymptote verticale.

x	$-\infty$ -1	-1 1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	↗ 0

2. Trouver les constantes *a*, *b*, *c* qui vérifient : $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+1}$

Par identification des polynômes, on obtient : *a*=-2 ;*b*=-1 et *c*=2.

3. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{-2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}\right)dx=\left[-Ln(x^2+1)-Arctg\,x+2Ln(x+1)\right]_0^1=Ln2-\frac{\pi}{4}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction peut s'écrire : $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{2}{1+x}$. Cette fonction admet la droite d'équation *y*=*x*-1 comme asymptote oblique et la droite *x*=-1 comme asymptote verticale.

Sa dérivée est égale à : $f'(x)=1-\dfrac{2}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$ et elle s'annule pour $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $f(-1-\sqrt{2})=-\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ et $f(-1+\sqrt{2})=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Tableau des variations :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ -			-		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	↗	$+\infty$

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

On pose $Y = y+2; X = x+1$ pour obtenir la fonction impaire : $Y = X + \dfrac{2}{X}$. Le point de coordonnées (-1, -2) est donc un centre de symétrie.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\,Ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln\,2$$

4. Étudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

Si la suite est convergente vers une limite *l*, alors cette limite vérifie : $l = f(l)$, soit *l*=1.
La seule limite possible est donc 1. Tous les termes de la suite sont positifs.
Si $u_0 = 0$ ou 1, alors $u_n = 1$ et la suite est stationnaire en 1.

On remarque que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$

Si $u_0 < 1$. On suppose que $u_n < 1$, alors $u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} < 1 \Leftrightarrow u_n\,(u_n - 1) < 0$, ce qui est vrai. Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n} > 0$. La suite est donc croissante et majorée, et elle converge vers 1.

Si $u_0 > 1$, par un raisonnement analogue, la suite est décroissante minorée et elle converge vers 1.

5. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1+i$

On pose $z = x + i\,y$, d'où $1 + (x+i\,y)^2 = (1+i)(1+x+i\,y)$, ce qui donne le système :
$\begin{cases} 1+x-y = 1+x^2-y^2 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases}$

Si $x+y-1=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $-x^2+x-1=0$ qui n'admet pas de racines réelles.

Si $x-y=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $2x^2-2x-1=0$, soit $x = \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2} = y$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^{+*} par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = (\frac{1}{1+x} - Ln\left(1+\frac{1}{x}\right))\,f(x)$

Le signe de la dérivée est celui de $u(x) = \frac{1}{1+x} - Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On a : $u^{'}(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$

La fonction *u* est strictement croissante de R^{+*} sur $\left]-\infty, 0\right[$ et la fonction *f* est donc décroissante de R^{+*} sur $\left]1, 0\right[$. On peut prolonger *f* par continuité en zéro, en posant : *f*(0)=1.

2. La fonction *f* admet-elle un point fixe ?

Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = x$, à savoir : $-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = Ln\,x$.

Soit $-x\,Ln(1+x) + (x-1)\,Ln\,x = 0$. On pose $t = -x\,Ln(1+x) + (x-1)\,Ln\,x$,

puis $t^{'} = Ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} < 0$ et la fonction *t* est continue, strictement décroissante, à valeurs dans *R*, elle admet donc une unique valeur nulle, et donc un seul point fixe pour la fonction *f*.

Exercice n° 5

Soit *a* un nombre réel fixé non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

On a : $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n$. Posons $g(x) = e^{2x} - e^{x} - x$. Sa dérivée est égale à : $g^{'}(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1 = (e^{x}-1)(2e^{x}+1)$ qui s'annule en zéro (minimum) et qui est toujours positive. Par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite est croissante.

2. Étudier le signe de la suite (u_n) pour *a* négatif.

Si *a* = 0, la suite est stationnaire égale à 0.
Si *a* < 0, on vérifie par récurrence que $u_n < 0$, en effet $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}\,(e^{u_n} - 1) < 0$

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) pour *a* négatif.

La suite étant croissante et majorée par zéro, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation ; *g(l)* = 0, soit *l* = 0.

4. On suppose que $a > 0$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$
- Déterminer la limite de la suite (u_n)

D'après la première question, la suite est croissante ainsi que la fonction g (sur les réels positifs), donc $g\,(u_n) \geq g\,(a)$, ce qui est l'inégalité demandée.
On a : $u_n - a = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - a) \geq n\,g\,(a)$.
La suite converge donc vers plus l'infini.

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[1{,}8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f\,(x) = (ax + b)\,e^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe pour $a = 3$ et $b = 1$ (on étudiera également sa convexité).

On obtient $f^{'}\,(x) = (2 - 3x)\,e^{-x}$. Cette dérivée est toujours négative sur l'intervalle considéré et la fonction est décroissante de $[1{,}8]$ sur $[4/e, 25/e^8]$.
Sa dérivée seconde est égale à : $f^{''}\,(x) = (3x - 5)\,e^{-x}$. La fonction est concave pour $x < 5/3$ et convexe pour $x > 5/3$.

2. Déterminer la valeur de b pour que la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il faut que la dérivée soit nulle en 1, soit $f^{'}\,(x) = (-ax - b + a)\,e^{-x}$ et $f^{'}\,(1) = (-b)\,e^{-1} = 0$, donc $b = 0$.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de a.

On a : $f\,(x) = ax\,e^{-x}$ et pour $x = 1$, $3{,}5 \leq y = f\,(1) = \dfrac{a}{e} \leq 4$. Comme $e \approx 2{,}7$, on obtient $a = 10$.

4. Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artisan sur une seule face (partie entre le sol et le toboggan). Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis (on donne $e \approx 2{,}7; \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$) ?

Calculons la surface à peindre, soit $I = \displaystyle\int_1^8 10x\,e^{-x}\,dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I = \left[-10\,x\,e^{-x}\right]_1^8 - \int_1^8 10\,e^{-x}\,dx = -80\,e^{-8} + 10\,e^{-1} - 10\left[-e^{-x}\right]_1^8 = -90\,e^{-8} + 20\,e^{-1} \approx 7{,}4$$

Donc le devis sera de 200+30*7,4=422 euros.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.
2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.
4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.
6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?
7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?
9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).
10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle
$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$
Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.
2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction
$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$
est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}$
3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?
4. Tracer le graphe de F.
5. Montrer qu'il existe un unique réel y tel que $F(y) = y$.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation
$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.
2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.
3. On suppose désormais que $a > 0$.
   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.
   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction
   $$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$
   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.
   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.
   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $\ln x \leq x/e$.
2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx.$$

3. Calculer I_0 et I_1.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
5. En utilisant la question 1., montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

6. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}.$$

7. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = e^3.$$

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 & = & 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 & = & 7 \\ z_1 z_2 z_3 & = & 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -3$.
2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire les solutions du système (2).

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.
3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).
4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Les boules de chaque couleur sont numérotées de 1 à 8. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.
2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les relations séculaires que l'Afrique du Nord entretient avec l'Afrique par-delà le Sahara semblent connaître un nouvel élan. Selon vous, quels sont les domaines de coopération les plus importants qu'il serait souhaitable de développer entre ces deux zones géographiques du continent africain?

Sujet n° 2

Les progrès de la recherche ont-ils toujours des retombées, notamment technologiques, bénéfiques pour la société dans son ensemble ?

Sujet n° 3

Quel rôle peut-on attribuer aux médias selon vous dans nos sociétés, notamment à l'heure de l'information quasi immédiate diffusée par voie électronique ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2 Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n\, Ln(x)\, dx$ pour tout entier n supérieur à 1.

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

4. Pour n entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de n, les variations de f_n et tracer son graphe.

5. Résoudre l'équation $f_n(x) = e^x$ pour n >2 et x >-1.

Exercice n° 4

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x=1$ et $x=-1$.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n}{a} + \frac{u_n^2}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \frac{v_n^{\ 2}}{4} + \frac{3}{4}$ et $v_0 \in \left]1,2\right]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en zéro ?

3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jean-Louis SERVAN-SCHREIBER, intitulé : « C'est la vie ! », paru aux éditions Albin Michel en avril 2015.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

MON MONDE : unique

Même au milieu des autres, j'habite un monde qui n'appartient qu'à moi. Il est contenu en totalité dans mon cerveau et dans mon corps ; il est le produit de mes perceptions, de mes sensations, de mes pensées, de mes sentiments, de mes souvenirs, de mes connaissances et de mes ignorances. Fait de tout ce que je reçois du monde extérieur. Il est mon équipement pour y vivre. Il en est ainsi dans mon rapport à tout autre être humain, comme à tout ce que j'ai rencontré et expérimenté, au gré des jours, depuis que je suis né.

Une illusion est commune à tous : il semble si naturel de croire que les autres perçoivent le même monde que moi. Or ce qui me semble évident, aller de soi, ne l'est pas pour un autre. Comprendre cela désoriente d'abord, remet en cause mes idées reçues. Mais, une fois que je l'ai admis, je suis devenu plus tolérant en même temps que plus intéressé par l'infinie diversité de nos points de vue.

Mon cerveau est fort limité en mémoire comme en capacité à manier les idées. Mais ce qu'il a emmagasiné depuis ma naissance, ou produit en combinant tout ce qu'il a perçu, compris, retenu, est déjà si foisonnant en moi, que je ne peux en exprimer, en décrire, en partager avec d'autres qu'une infime partie. Laquelle est filtrée par celui qui m'écoute ou me lit selon ses propres critères, différents des miens. Je pense souvent que c'est une chance et une prouesse improbable de se comprendre entre nous autrement que par bribes.

Quelle que soit ma richesse intérieure, je ne peux tenter de la communiquer que par le maigre filet de mes mots, mes intonations, mes gestes ou mes intonations de visage. Il en est de même pour chacun de nous, puisque nous sommes tous porteurs de notre univers, complexe, unique, et qui restera largement inexploré, y compris par nous. Je ne prends pourtant pas cette évidence au tragique. Elle est constitutive de nous tous, humains, et nous parvenons bien à vivre ainsi. Ces mondes élaborés par chaque bipède de notre espèce pour son propre usage, sont plus ou moins originaux, intéressants ou agréables à habiter. Toutefois, c'est là que nous passons nos vies, seuls dans notre monde, mais en compagnie des autres.

Mon monde est l'œuvre de ma vie. Je le meuble, le complète, le modifie chaque jour, au gré de mes expériences et de mes idées. Au début, une cire vierge. Mes premiers souvenirs, à partir de trois ou quatre ans, étaient en forme de point d'interrogation. Qui sont ces gens qui viennent voir mes parents ? Comment répondre à ce que l'on me dit ? Qu'est ce qui est important ? Qu'est-ce que j'ai le droit de faire ? Et toujours et encore : comment ça marche, depuis les rapports avec les autres jusqu'aux objets que je les vois utiliser ?

En thérapie, on commence par explorer l'enfance, car dans nos débuts de la vie tout s'inscrit plus durablement. Puis ce que l'on apprend en vivant s'empile et forme vite un humus si épais que chaque nouvelle couche recouvre et occulte une partie de celles qui l'ont précédée. Mais le socle des impressions d'enfance reste le plus déterminant pour notre avenir.

Etudes, relations, responsabilités, découvertes, déceptions, joies, mon monde s'est ensuite constamment élargi, approfondi. Souvent en désordre et sans que j'aie toujours pu prendre le temps de bien comprendre ou situer ce qui se déposait ainsi en moi. Le résultat de cette imprégnation est forcément personnel, puisque j'en suis l'auteur et l'acteur. En même temps, le processus en est banal, car c'est ainsi que chacun s'élabore lui-même.

Nous construisons tous notre propre monde à partir des éléments communs à tous les autres, ceux du réel extérieur, trié par nos goûts, intérêts et valeurs. Le tout pimenté par les hasards de notre vécu. Comme nous ne pouvons connaître qu'une fraction de la complexité des autres et que nous ne sommes que partiellement conscients de la nôtre, on mesure combien communiquer mobilise une part essentielle de nos énergies et de nos talents. Et que les résultats ne peuvent en être qu'approximatifs.

Ce monde, le mien, est déterminé par mes capacités à savoir, comprendre, mémoriser, voir, écouter. Lesquelles sont restreintes. Nous les humains, qui nous désignons comme des semblables, sommes surtout dissemblables, par nos capacités et nos cheminements si différents.

Nos mondes ont-ils des richesses et des profondeurs variées selon nos aptitudes ? A l'évidence oui. Nous connaissons nombre de nos semblables dont nous admirons l'univers intérieur, plus large et nourri que le nôtre. Mais aussi d'autres dont le monde nous paraît bien étriqué. Chacun se construit une demeure à la mesure de ses moyens et de ce qui l'entoure, comme la chèvre broute autour de son piquet.

Certains astrophysiciens avancent des théories, dites des « multivers », selon lesquelles notre univers ne serait qu'un parmi d'autres. Je le constate à ma toute petite échelle personnelle. Mon propre univers existe dans ma tête, mais il y en a autant que d'humains vivant en même temps que moi. Si je ne pouvais concevoir au-delà du mien, j'y resterais enfermé. Heureusement mon monde personnel tient aussi compte, au moins un peu, de l'existence de ceux de tous mes semblables. Pas étonnant que l'on réalise aujourd'hui qu'il faut prendre de plus en plus en compte la complexité.

Cette singularité me rend unique, donc seul, même si je suis entouré par d'autres, dont la présence m'est agréable autant que vitale. Raison pour laquelle nous parvenons à bien vivre tous côte à côte. Une proximité n'est pas une connaissance, mais elle nous aide à palier notre solitude existentielle. Il n'y a pas là de quoi dramatiser cette condition, puisque la solitude est constitutive de notre condition d'humains autonomes. Mais si nous sommes par nature seuls, nous nous efforçons d'éviter d'être isolés.

En fait cette singularité/solitude est providentielle, car si les autres étaient et voyaient exactement comme moi, que pourraient-ils m'apporter ? Quand on fait une rencontre, on se raconte, on échange des informations et des impressions. C'est alors que je peux choisir soit d'aller plus loin dans la relation, soit, le cas le plus fréquent, d'en rester là. Mais en même temps que j'en apprends plus sur nos différences, j'explore les éventuelles similitudes et affinités. Une relation féconde se nourrit à la fois de nos dissemblances, grâce auxquelles l'autre nous complète, et de nos ressemblances qui rendent tentants les rapprochements. Là, comme dans tant de situations de la vie, j'essaye de trouver le juste équilibre entre des pôles qui peuvent paraître inconciliables.

Cet effort même rend ma vie plus intéressante. Que l'autre vive dans un monde qui lui est propre en fait à la fois sa complexité et sa richesse. Entrer en relation avec quiconque fait de moi un explorateur.

[…] L'AUTRE : un peu moi

Je dois tout aux autres. Parce que certains sont un peu moi, parce que tout ce que je sais, tout ce qui me permet de vivre me vient d'eux. Surtout dans une société d'aujourd'hui, produite et entretenue par un travail collectif incessant de milliards d'entre nous.

Seul, je ne peux pas me nourrir, me loger, me déplacer, m'instruire, me soigner, me divertir, ni surtout échapper à l'isolement. Ceux du passé ont construit ce pays où je me sens à l'aise. Ils m'ont légué des pensées, des traditions, des principes, des inventions qui rendent ma vie agréable ou simplement possible. Mes contemporains créent et fabriquent tout ce dont je peux avoir besoin et que je serais bien incapable de faire seul. Vivre grâce à tout ce qui me vient d'eux me remet à ma juste place : celle d'une minuscule partie d'un ensemble infiniment complexe.

Au-delà de ces évidences utilitaires mais nécessaires, les autres sont surtout pour moi les sources d'émotion, de stimulation, de désirs parfois, bref de vie. Parce qu'ils sont mes semblables, ils me complètent, parce qu'ils sont différents, ils m'enrichissent.

Donc, tout autre m'intrigue et m'importe. Il m'est par nature, inconnaissable. Il me reste à le découvrir constamment, par bribes. En même temps l'autre me permet de mieux me définir ; par effet miroir, par contraste, par comparaison, voire par antagonisme. Le désir que je peux aussi avoir de l'autre comporte l'espoir d'aménager ma solitude, et même, par instants de l'oublier.

D'ailleurs cette solitude existentielle est-elle une infortune ? Il est convenu de s'en plaindre, alors qu'elle découle de ma singularité de naissance, qui fonde ma liberté de vivre. Je suis seul du fait même que je suis vivant. S'en arranger est la grande affaire. Déplorer l'inévitable ne produit qu'une peine stérile. D'autant que je peux choisir librement d'être seul, quand j'en ressens le besoin. C'est d'être privé de ma solitude qui peut alors devenir une infortune.

Mais l'autre ne m'offre pas seulement sa compagnie, je suis partiellement fait de lui et il est aussi fait de moi. De bien des manières. D'abord génétique puisque, de même que nous sommes tous issus de poussières d'étoiles, je suis un cocktail des gènes de ma chaîne familiale biologique. N'est-il pas toujours troublant de retrouver en soi, dans son aspect ou son comportement, des traits que l'on pouvait constater chez nos ascendants ou collatéraux ? Si j'agis par instants comme mon père, est-ce génétique ou mimétique ? Souvent les deux à la fois. Mais ça signe aussi ce qui, dans mon destin, ne dépend pas de ma seule volonté et assure une continuité, même à mon insu.

L'essentiel de ce que j'ai appris, en bien et en moins bien, m'a été transmis par d'autres. Mes valeurs, mes références, mes exemples me sont venus d'eux, dès le début de mon existence, puis au long de mon parcours. Même en négatif. Ne pas vouloir ressembler à tel autre contribue tout autant à me définir. On se comprend soi-même autant par nos différences avec les autres que par nos similitudes.

[…] LE NOUS : il revient

S'il existe autant de mondes que d'individus singuliers, comment vivre ensemble ? La focalisation de nos contemporains sur la liberté de l'individu comme valeur fondamentale ne trouve-t-elle pas déjà ses limites ? Chacun a l'expérience plus ou moins occasionnelle, que plus je m'affirme comme individu, plus je ressens ma solitude. Cette dernière n'est pas négative par essence, mais demande, au long de ma vie, à être compensée, soutenue, complétée, bref, aménagée.

Le moment semble venu de retrouver le « nous », car l'individu triomphant, dont les droits légitimes ont été enfin reconnus, actés en loi, quasi sacralisés, a peut-être passé son apogée.

Un peu de bon sens suffit pour comprendre que mon autonomie est une fiction. L'individualisme dont se grisent les modernes que nous sommes rappelle nos illusions d'adolescents qui croyaient pouvoir s'affranchir de leurs parents. Il fallait probablement que cette soif d'émancipation s'exprime historiquement dans nos sociétés pour que nous prenions concrètement conscience de ses limites. Le moment semble venu de la dépasser pour aller plus loin en humanité.

[…] Il en était de même dans la principale cellule du nous et du vivre ensemble, la famille. Partout cette dernière reposait sur des hiérarchies méticuleuses, régissant les droits des hommes sur les femmes, comme ceux des parents sur les enfants. Les coutumes comme les religions étaient imposées dès le plus jeune âge et pérennisées une génération après l'autre. La première entrave à toute liberté, en particulier pour les femmes était familiale avant d'être politique ou sociale. Et trop rares encore sont les pays où cette contrainte s'est réellement desserrée. Dans nos nations où la parité entre les hommes et les femmes a fait de réels progrès, nous l'avons un peu vite oublié.

L'idée neuve que chacun puisse vivre pleinement sa liberté d'être, formulée en Europe dès les Lumières, s'est déployée depuis le milieu du siècle dernier. Au moment même où les idéologies collectives s'effondraient et où les technologies de communication mettaient presque le monde entier à la portée de chacun, l'individualisme trouvait là son terrain fertile. Nous voici d'autant plus autonomes qu'hyperconnectés.

Mais un nouvel isolement en a résulté. Exemple banal : dans nos rapports de travail, les liaisons électroniques sont la règle courante. Nous envoyons couramment un même message à la fois à un collègue basé à Londres et à un autre dans le bureau mitoyen. Pour le premier, c'est une plus grande proximité ; pour le second, une plus grande mise à distance. Les mêmes adolescents qui échangent constamment des messages entre eux se rencontrent moins souvent en personne.

La propagation vertigineuse de nos contacts instantanés s'est faite au détriment de leur profondeur. En s'industrialisant, la relation à l'autre s'est diluée. Notre rayon d'action et notre solitude ont progressé au même rythme. A force de se vouloir cool, le rapport à l'autre s'est refroidi. Pourtant le besoin de chaleur et de proximité humaine reste aussi présent dans chaque individu, même émancipé. Par un habituel balancier de l'histoire, l'heure du retour au « nous » se rapproche. Mais sur des bases à réinventer.

Le nous, le groupe, la communauté, la famille, sont potentiellement, à la fois oppressant et chaleureux. L'individu récemment émancipé n'est pas encore prêt à aliéner sa toute nouvelle liberté, mais commence à ressentir l'attrait de liens non hiérarchiques, non pyramidaux, pour se rapprocher des autres. L'essor actuel des formes associatives et bénévoles en témoigne. D'autant que les Etats se désengagent de plus en plus de leurs tâches et responsabilités. Face à quoi les individus comprennent tout l'intérêt pratique de se regrouper, sur la base d'une coopération librement acceptée. Est-ce si nouveau que ça ?

Comment croire en effet que l'ensemble des créations humaines n'aient pu être réalisées que par des systèmes de contrainte ? Les villages, les villes, toutes les modalités de vie commune regroupant des populations sans cesse croissantes ont demandé une capacité de coopération et une imagination qu'aucune loi, aucune hiérarchie n'aurait pu imposer. Le monde actuel est tissé d'une infinité de cellules humaines de taille variable, non hiérarchisées mais où chacun reconnaît sa dépendance aux autres et en a besoin.

[…] Le nous s'impose là au moi, du simple fait que chacun comprend qu'il en est de son intérêt. Si on y ajoute que les réseaux sociaux permettent de mettre en faisceaux les intelligences et les créativités avec une efficacité sidérante, cette numérisation du nous peut amplifier un pas en avant dans la modernité.

Le progrès de nos sociétés libres passera par l'association d'individus libres dans des actions communes qui surpassent de loin les résultats de chacun. Nous sommes en train de passer des liens imposés par la tradition et la loi, aux associations et coopérations d'autant plus fructueuses qu'elles sont consenties. Dans la morale contemporaine, la prise en compte des autres s'est, heureusement, substituée aux injonctions venues du Ciel.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - Corrigé
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.

   On pose $u = e^x$, $du = e^x dx$, et on en tire

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx = \int_1^e \frac{du}{u+5} = \ln(e+5) - \ln 6$$

2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.

   En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées pour le dénominateur, puis la règle de dérivation d'un quotient, on trouve que

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos(2x) + 4\sin x \sin(2x)}{\cos^3(2x)}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

   En divisant numérateur et dénominateur par x, il vient immédiatement que la limite demandée est 0.

4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.$$

   On simplifie la fraction par $(\sqrt{x}-1)$ et la limite cherchée est 1/4.

5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?

   Chaque joueur a une probabilité égale à 1/10 de gagner 40 francs, une probabilité égale à 1/10 de gagner 10 francs, une probabilité égale à 1/10 de ne rien gagner, et une probabilité égale à 7/10 de perdre sa mise, soit 10 francs. L'espérance du gain est donc

$$40 \times \frac{1}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{10} - 10 \times \frac{7}{10} = -2$$

   soit une perte de 2 francs.

7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

$$(x-1)\ln(x^2-1) = (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+1).$$

   Le premier terme tend vers 0 par la règle de comparaison des fonctions logarithme et puissances au voisinage de 0, et le deuxième terme ne pose pas de problème : la limite recherchée est donc 0.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

   $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1$, la suite (u_n^2) est donc une suite arithmétique qui tend vers $+\infty$: la suite (u_n) tend donc elle aussi vers l'infini.

9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).

   Soit r la raison de la suite (v_n). On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{v_{n+1}-v_n} = e^r.$$

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = e^r$.

10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

   En posant $y = x^2 > 0$, l'équation devient $y^2 + 3y - 4 = 0$ dont la seule solution positive est $y = 1$. Les solutions réelles de l'équation considérée sont donc $x = 1$ et $x = -1$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

   Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.

   f est définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$. Par croissance comparée, sa limite à droite de 0 vaut $-\infty$, et il est immédiat sa limite à gauche de 1 vaut $-\infty$, sa limite à droite en 1 vaut $+\infty$, et sa limite en $+\infty$ est 0. On en déduit que le graphe de f admet les asymptotes verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, ainsi que l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

La dérivée de f vaut

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

qui est donc nulle en $1/e$, positive si $x < 1/e$, et négative si $x > 1/e$. On complète le tableau de variations en remarquant que $f(1/e) = -e$

2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction

$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$

est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbf{R}$

Comme $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$, F est bien définie et continue sur $]0, 1[$ et on trouve que $F' = f$. D'après la question précédente, le maximum de f sur $]0, 1[$ est $-e < 0$, donc F est strictement décroissante sur cet intervalle. Enfin, on trouve directement que

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} F(x) = -\infty$$

d'où le résultat.

3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?

Le point en question est $1/e$. Comme $f(1/e) = -e$, l'équation recherchée est

$$y = -e\left(x - \frac{1}{e}\right) = -ex + 1.$$

Enfin, on a vu que f' s'annule en $1/e$ en y changeant de signe : il s'agit donc d'un point d'inflexion de la courbe représentatrice de F.

4. Tracer le graphe de F.

Il se déduit des questions précédentes.

5. Montrer qu'il existe un unique réel $y \in]0, 1[$ tel que $F(y) = y$.

Entre 0 et 1, la fonction $G(x) = F(x) - x$ est continue et décroit strictement de $+\infty$ à $-\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule donc en un point unique, d'où le résultat.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.

Dans ce cas, l'équation s'écrit $1 = x$ et donc elle admet l'unique solution $x = 1$!

2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.

   $f'(x) = ae^{ax} - 1 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Il est immédiat que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

   et donc f s'annule en un unique point x_0, qui est l'unique solution de l'équation (1) dans ce cas.

3. On suppose désormais que $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.

   On a $f'(x) = 0$ ssi $x = -\ln a/a$, $f'(x) > 0$ ssi $x > -\ln a/a$ et $f'(x) < 0$ ssi $x < -\ln a/a$ d'où le résultat demandé avec $x_0 = -\ln a/a$ et $m = (1 + \ln a - a^2)/a$.

   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction

   $$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$

   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.

   g est bien définie sur $]0, +\infty[$, avec une asymptote verticale en 0 et une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$. Un calcul de dérivée immédiat prouve que g admet son maximum au point indiqué. Enfin, $g(\sqrt{2}/2) = 1 - \ln 2/2 - 1/4 > 1 - 0,35 - 0,25 = 0,4 > 0$ en utilisant le rappel fait au tout début de l'énoncé.

   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.

   Comme $g(y)$, qui est une fonction continue, tend vers $-\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition, son graphe coupe l'axe des x une fois avant $\sqrt{2}/2$ et une fois après. Par ailleurs, $y = 1$ est une solution évidente de l'équation $g(y) = 0$, et par suite $\alpha < \sqrt{2/2}$.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).

   Comme $m = -(1 + \ln a - a^2)/a$ avec $a > 0$, $m = -g(a)$ et est donc
   - négatif si $0 < a < \alpha$ ou $a > 1$: dans ce cas, f s'annule deux fois et l'équation (1) admet deux solutions ;
   - positif si $\alpha < a < 1$: dans ce cas, f ,ne s'annule pas et l'équation (1) n'admet pas de solution ;
   - nul si $a = \alpha$ ou $a = 1$: dans ce cas, f s'annule uniquement au point $x_0 = -\ln a/a$.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $\ln x \leq x/e$.

   Un rapide calcul de la dérivée de la fonction

   $$f(x) = \ln x - \frac{x}{e}.$$

   montre que cette fonction atteint son maximum au point e, et que ce maximum vaut 0.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx.$$

Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3-1}{3};$$

Par ailleurs, une intégration par parties prouve que

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^e x^2(\ln x)dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} \\ &= \frac{2e^3+1}{9}. \end{aligned}$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

Pour $1 < x < e$, $0 < \ln x < 1$, donc $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ pour tout entier n : on en déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ; comme par ailleurs $x^2(\ln x)^n > 0$, on en déduit que $I_n > 0$, et la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est minorée : elle est donc convergente.

4. En utilisant la question 1., montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

D'après la question 1.,

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n dx \\ &= \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{2+n}dx \\ &= \frac{1}{e^n}\frac{e^{n+3}-1}{n+3} \\ &\leq \frac{e^3}{n+3}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tendant vers 0 avec n, la positivité de I_n permet de conclure via le théorème "des gendarmes".

5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{3}I_n + \frac{e^3}{3}.$$

Par intégration par parties, en prenant $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, il vient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n. \end{aligned}$$

6. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = e^3.$$

De la question précédente, on tire que

$$nI_n = \frac{3n}{n+1}\left(-I_{n+1} + \frac{e^3}{3}\right)$$

et le résultat s'ensuit dès qu'on se souvient que $I_{n+1} \to 0$.

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 &=& 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &=& 7 \\ z_1 z_2 z_3 &=& 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -3$.

   On part de
   $$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$$
   et en reportant les valeurs des deux premières équations du système on aboutit directement au résultat demandé.

2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
   En développant, on trouve l'expression demandée avec $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ et $c = -z_1z_2z_3$.

3. En déduire les solutions du système (2).
   D'après la question précédente, z_1, z_2 et z_3 sont donc racines de l'équation $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$.
   -1 étant une racine évidente de cette équation, il vient $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1) = (x+1)(x - (1-\sqrt{2}))(x - (1+\sqrt{2}))$.
   Les solutions du système (2) sont donc les triplets qui s'obtiennent par une permutation interne de $(-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.

   $(-z)^4 = z^4$ donc $-z$ est solution de cette équation. De plus, $\overline{z}^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$.

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).

   on peut calculer directement

$$(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$$

   ou en passant par la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

   D'après la première question, $-z_0$, $\overline{z_0}$ et donc $-\overline{z_0}$, c'est-à-dire $-1-i$, $1-i$ et $-1+i$ sont également solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Pour tout entier k compris entre 1 et 8, une boule de chaque couleur porte le numéro k. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.

   Il y a $\binom{24}{3}$ possibilités de tirer 3 boules parmi les 24 que contient l'urne. Un seul de ces tirages correspond au trois premières boules blanches, et la probabilité cherchée est donc $1/\binom{24}{3} = 1/1224$.

2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.

   Les séquences de nombres possibles vont de (1,2,3) à (6,7,8), il y en a donc 6. Pour chacune de ces séquences, chaque boule peut être de 3 couleurs différentes, il y a donc 27 possibilités de couleurs. La probabilité cherchée est donc $162/\binom{24}{3} = 81/1012$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2 \, Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x) = x(2Ln\,x + 1)$ et elle s'annule pour $x = 1/\sqrt{e}$. Le graphe de f admet une branche parabolique dans la direction verticale. De plus on a : $f(1) = 0$ et $\underset{0}{Lim}\, f'(x) = 0$

x	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	0 ↘	- 1/2e	↗ $+\infty$

2. Etudier la convexité de la fonction f.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = 2Ln\,x + 3$ qui s'annule pour $x = e^{-3/2}$. La fonction est convexe pour $x \geq e^{-3/2}$ et concave dans le cas contraire.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

On procède par intégration par parties en posant : $u' = x^2\,; v = Ln\,x$ et on obtient :

$$I = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\,x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n\,Ln(x)\,dx$ pour tout entier supérieur à 1.

On procède encore par intégration par parties en posant : $u' = x^n\,; v = Ln\,x$ pour obtenir :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\, x \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n\, dx = \frac{1+ne^{n+1}}{(n+1)^2}$$

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

On a : $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n^\alpha (ne^{n+1}+1)}{e^n (n+1)^2} = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n^{\alpha+1} e + n^\alpha e^{-n}}{n^2} = \underset{n\to\infty}{Lim}\, n^{\alpha-1} e$ et cette limite est égale à e pour $\alpha = 1$

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie sur $[-1,1]$ et elle est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe Oy. Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ et la fonction est décroissante sur $[0,1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

On a $I = 2\int_0^1 f(x)\, dx$ et en posant $x = \sin u$, on obtient

$$I = 2\int_0^1 \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\, du = \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.
On obtient $f'(x) = e^{-x}\left[2(1+x) - (1+x)^2\right] = (1-x^2)e^{-x}$ et $f''(x) = e^{-x}\left[x^2 - 2x - 1\right]$
La dérivée seconde s'annule pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$ et la fonction est convexe sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[$

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
Cette fonction est toujours positive et nulle en -1. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy quand $x \to -\infty$ et l'axe Ox comme asymptote quand $x \to +\infty$. La fonction est décroissante sur $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ et croissante entre -1 et 1, avec $f(-1) = 0; f(1) = 4/e$

3. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

La fonction *f* admet une primitive *F* de la forme : $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ et en identifiant les coefficients, on obtient : $F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$, d'où $I=F(1)-F(0)=\dfrac{-10+5e}{e}>0$

4. Pour *n* entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x)=(1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de *n*, les variations de f_n et tracer son graphe.

La dérivée vaut $f_n'(x)=(1+x)^{n-1}e^{-x}(n-1-x)$ qui s'annule pour $x=-1$ et $x=n-1$;

On peut remarquer que l'expression $(1+x)^{n-1}$ dans la dérivée change de signe pour *n* pair mais ne change pas si *n* est impair pour 1 + x < 0 .

Si *n* est pair, la fonction est décroissante sur $]-\infty,-1[$, croissante sur $]-1,n-1[$ et décroissante sur $]n-1,+\infty[$

Si *n* est impair, la fonction est croissante sur $]-\infty,-1[$, croissante sur $]-1,n-1[$ et décroissante sur $]n-1,+\infty[$

Dans tous les cas, on a une branche parabolique dans la direction verticale à $-\infty$, et l'axe Ox est asymptote à $+\infty$

5. Résoudre l'équation $f_n(x)=e^x$ pour *n* >2 et x >-1.

Il faut résoudre $(1+x)^n e^{-x}=e^x$ ou encore $(1+x)^n=e^{2x}$ et par passage au logarithme $y=n\,Ln(1+x)-2x=0$

On obtient : $y'=\dfrac{n}{1+x}-2$ qui est nulle pour $x=\dfrac{n-2}{2}$. Posons $a_n=n\,Ln(n/2)-(n-2)>0$

La fonction *y* est strictement croissante et continue de $\left]-1,\dfrac{n-2}{2}\right[$ sur $]-\infty,a_n[$, elle est donc bijective et 0 est la seule valeur qui annule *y*.

La fonction *y* est strictement décroissante et continue de $\left]\dfrac{n-2}{2},+\infty\right[$ sur $]a_n,-\infty[$, elle est donc bijective et admet une unique valeur (qui dépend de *n*) qui annule *y*.

Exercice n° 4

Soit *f* la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1)=f(1)=0$ et $f(x)=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x\in\,]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de *f* en $x=1$ et $x=-1$.

La fonction étant paire, il suffit d'étudier la dérivabilité en $x=1$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{x-1}=\lim\limits_{u\to+\infty}(u\,e^{-u/2})=0$, en posant u = 1/(1-x), u tend vers +∞,et la fonction est dérivable.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de f, pour $x \in]-1,1[$, est égale à : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} f(x)$ avec $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$

La fonction est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ et son graphe symétrique par rapport à l'axe Oy.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

On doit résoudre : $\dfrac{x^2}{x^2-1} = x$, soit $x^3 - x^2 - x = 0$, à savoir $x = 0$ et $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mais $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, donc on a que deux solutions : $x = 0$ et $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1]$ et la relation dé récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^{\,2}}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée
Il est évident par récurrence que la suite est toujours positive.
Comme $u_0 \leq 1$, on vérifie par récurrence que pour tout n, $u_n \leq 1$;

En effet $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^{\,2}}{a^2} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ et cette expression sera inférieure à 1 si $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \leq 1$, à savoir $a^2 - a - 1 \geq 0$, ce qui est vérifié puisque $a \geq 2$

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Comme la suite est à termes positifs, on peut considérer le rapport : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{u_n}{a^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} < 1$

donc la suite est décroissante.
3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)
Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = \dfrac{l}{a} + \dfrac{l^2}{a^2}$, d'où $l = 0$ ou $l = a(a-1)$. ? Comme la suite est décroissante, elle converge vers 0.

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \dfrac{v_n^{\,2}}{4} + \dfrac{3}{4}$ et $v_0 \in]1,2]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

On vérifie par récurrence que la suite est bornée : $1 < v_n \leq 2$

On a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}(v_n-1)(v_n-3)$. Comme $1<v_n\leq 2$, le premier terme est positif et le second est négatif, la suite est donc décroissante.
Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=\frac{l^2}{4}+\frac{3}{4}$, d'où $l=1$ ou $l=2$. Comme la suite est décroissante, elle converge vers 1.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction *f* est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

On a : $\underset{0^+}{Lim}\, f(x)=\underset{0^+}{Lim}\frac{1+\frac{1}{2}x-1}{x}=\frac{1}{2}$, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=1/2$

2. La fonction *f* est-elle dérivable à droite en zéro ?

On a au voisinage de zéro : $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, d'où
$\underset{0^+}{Lim}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\underset{0^+}{Lim}\frac{2(\sqrt{1+x}-1)-x}{x^2}=\underset{0^+}{Lim}\frac{2(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-1)-x}{x^2}=-\frac{1}{8}$, donc la fonction est dérivable à droite en zéro.

3. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.
On remarque que $f(x)>0$ et que $\underset{+\infty}{Lim}\, f(x)=0$, donc l'axe Ox est une asymptote au graphe de *f*. La dérivée de *f* est égale à : $f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et cette dérivée est du signe de $u(x)=2\sqrt{1+x}-(2+x)$. On a : $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1<0$, donc u est strictement décroissante sur R^+ à valeurs dans R^-, donc u est négative et f' aussi. La fonction *f* est décroissante de ½ à zéro.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

On remarque que $u_n=f(1/n)$ et donc $\underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n=\underset{x\to 0}{Lim}\, f(x)=1/2$, la suite est donc convergente vers 1/2
On peut aussi calculer directement la limite en multipliant par la quantité conjuguée.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1}$$

Exercice 1

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.
2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.
4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.
6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2

1. a étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   (b) Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de f dans le cas où $a = 4$.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

   (a) Déduire de la question précédente que pour tout n, $u_n > \sqrt{a}$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

3. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

   (b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que 10^{-4} dès la troisième itération.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ qui à x associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction ϕ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

   (b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ, et en déduire le tableau de variations de ϕ.

   (c) Faire l'étude des branches infinies de ϕ

   (d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera α, par rapport à $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de x.

   (c) Donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

   (d) Dresser le tableau de variations de f.

   (e) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

   (f) Dessiner la courbe représentative de f.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

   pour tout $x \in [0,1]$).

   (b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

   (c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   (a) Etudier le signe de g sur $\mathbf{R}^+$.

   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où λ désigne un paramètre réel.
2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels a et b tels que $f(a) = f(b)$.
   (a) Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$.
   (b) En déduire que $a = b$.

Exercice 6 On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Ecrire z_1 sous forme trigonométrique.
2. Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
3. En déduire la forme trigonométrique de z_2.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7 Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à n ont été distribués aléatoirement à n candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis A et B participent à cette épreuve. On note n_A et n_B leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples (n_A, n_B) possibles ?
2. Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq n - 1$. Montrer que $2(n - r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.
3. Quel est l'écart le plus probable entre n_A et n_B ?
4. Quel est l'écart moyen entre n_A et n_B ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quel rôle peut jouer l'agriculture sur le continent africain, notamment en termes de développement et d'innovation ?

Sujet n° 2

Beaucoup de pays occidentaux se convertissent progressivement à l'économie verte et au recyclage, notamment le recyclage des produits manufacturés et des déchets de toutes sortes afin d'en limiter les effets polluants. De quelle façon les pays africains peuvent-ils s'intéresser à l'économie du recyclage ? Pour quels besoins ? Selon quelles modalités ?

Sujet n° 3

Différents pôles de formation émergent progressivement au sein du continent africain (Enseignement supérieur, Enseignement technique, Recherche et innovation). Quels rôles peuvent-ils jouer pour les pays concernés voire pour une région donnée ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, Ln désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper et R l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f\,(x) = x\,Ln\,x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$, non nul :

$$x\,Ln\,x - (2+a)\,x = 0$$

3. Pour $\alpha > 0$, calculer $\underset{\alpha \to 0}{Lim} \int_{\alpha}^{e} f\,(x)\,dx$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur R par : $f\,(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de *f*.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f\,(u_n)\,.$$

Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de *x*, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à *x*. Pour *x* non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\,dx$

2. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} f(x)\,dx$

3. Expliciter *f* (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur R

Exercice n° 4

1. Résoudre dans *C* (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1} = i$

2. Soient *M*, *A* et *B* les points d'affixes respectives *z*, 1 et 2. On suppose que *M* est distinct de *A* et *B*.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$;
- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

3. Résoudre dans *C*, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

Exercice n° 5

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions f_n sur *R* par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de f_1 et tracer son graphe.

2. Comparer les graphes de f_{2n} et f_{2n+1}.

3. Pour *p* entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

4. Déterminer $\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} f_n(x)\,dx$

Exercice n° 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n + 1)$, où a est un paramètre réel.

1. Déterminer a pour que cette suite soit constante.

2. Déterminer a pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) pour $a > 0$.

Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit *X* la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

2. Calculer l'espérance de *X*. Ce résultat était-il prévisible ?

3. Un joueur mise une unité monétaire sur *X*.
Si *X*=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si *X*=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si *X*=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Yuval Noah Harari intitulé : *« 21 leçons pour le 21ème siècle »* paru aux éditions Albin Michel en 2018.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Education : La seule constante est le changement

L'humanité est confrontée à des révolutions sans précédent, tous nos vieux récits s'émiettent, et aucun nouveau récit n'est jusqu'ici apparu pour les remplacer. Comment nous préparer, nous et nos enfants, à ce monde de transformations inédites et d'incertitudes radicales ? Un bébé qui naît aujourd'hui aura trente et quelques années en 2050. Si tout va bien, il sera encore là en 2100 et pourrait bien être un citoyen actif du XXIIème siècle. Que devrions-nous enseigner à ce bébé pour l'aider à survivre et à s'épanouir dans le monde de 2050 ou du XXIIème siècle ? De quel genre de compétences aura-t-il besoin pour trouver un emploi, comprendre ce qui se passe autour de lui et se repérer dans le dédale de la vie.

Hélas, personne ne sachant de quoi le monde aura l'air en 2050 –pour ne pas parler de 2100-, ces questions demeurent sans réponses. Bien entendu, les hommes n'ont jamais su prédire l'avenir avec exactitude. Mais c'est aujourd'hui plus difficile que jamais : en effet, dès lors que la technologie nous permet d'intervenir dans le corps, le cerveau et les esprits, nous ne pouvons plus être sûrs de rien, y compris de ce qui semblait fixe et éternel.

Voici un millier d'années en 1018, il y a beaucoup de choses que les gens ignoraient de l'avenir, mais ils n'en étaient pas moins convaincus que les traits de base de la société humaine n'allaient pas changer. Si vous viviez dans la Chine de 1018, vous saviez qu'en 1050 l'empire des Song pouvait s'effondrer, que les Khitan pouvaient envahir le pays par le nord et que les épidémies pouvaient faire des millions de morts. En revanche, il était clair qu'en 1050, la plupart travailleraient toujours comme paysans et tisserands, que les souverains continueraient de recruter des hommes pour leurs armées et leurs bureaucraties, que les hommes domineraient encore les femmes, que l'espérance de vie tournerait autour de quarante ans et que le corps humain serait exactement le même. Dans la Chine de 1018, donc, les parents pauvres apprenaient à leurs enfants à planter du riz et à tisser la soie ; les plus riches apprenaient aux garçons à lire les classiques confucéens, à pratiquer la calligraphie et à se battre à cheval ; aux filles à être des épouses pudiques et soumises. A l'évidence, ces talents seraient encore nécessaires en 1050.

Aujourd'hui, au contraire, nous n'avons aucune idée de quoi la Chine ou le reste du monde auront l'air en 2050. Nous ne savons pas comment les gens gagneront leur vie, comment les armées ou les bureaucraties fonctionneront, ni à quoi ressembleront les relations entre hommes et femmes. D'aucuns vivront probablement bien plus longtemps qu'aujourd'hui. Du fait du génie biologique et des interfaces directes cerveau-ordinateur, le corps humain lui-même pourrait bien subir une révolution sans précédent. Une bonne partie de ce que les enfants apprennent aujourd'hui n'aura probablement plus aucune pertinence en 2050.

A l'heure actuelle, trop d'écoles privilégient l'accumulation d'information. Cela avait du sens autrefois parce qu'elle était rare et que la censure coupait régulièrement sa lente diffusion. En 1800, l'habitant d'une petite ville provinciale du Mexique ne pouvait pas savoir grand-chose du monde : il n'y avait ni radio, ni télévision, ni quotidiens ni bibliothèques publiques. La situation était largement la même dans les villes de province en Russie, en Inde, en Turquie ou en Chine. Apprenant à chaque enfant à lire et à écrire tout en lui inculquant des rudiments de géographie, d'histoire et de biologie, les écoles modernes représentèrent un immense progrès.

[…] Au XXIème siècle, à l'opposé, nous sommes inondés d'énormes quantités d'informations.

Des habitants du monde entier sont à un clic des toutes dernières informations sur le bombardement d'Alep ou la fonte de la calotte glacière dans l'Arctique, mais les versions contradictoires sont si nombreuses qu'il est difficile de savoir laquelle croire. En outre, bien d'autres choses sont à portée de clic, ce qui ne nous aide pas à nous concentrer. Quand la politique ou la science paraissent trop compliquées, il est tentant de passer à des vidéos amusantes de chats, ou des échos sur les stars.

Dans un tel monde, donner plus d'informations à ses élèves est la dernière chose qu'ait besoin de faire un enseignant. Ils en ont déjà beaucoup trop. Il leur faut plutôt apprendre à en dégager le sens, à distinguer l'important de l'insignifiant, et surtout à associer les multiples bribes d'informations en une vision d'ensemble du monde

[…] Que devrions-nous donc enseigner ? De nombreux spécialistes de pédagogie affirment que les écoles devraient passer à l'enseignement des « quatre C » : pensée critique, communication, collaboration et créativité. Plus généralement les écoles devraient minimiser l'importance des compétences techniques pour privilégier les compétences générales nécessaires dans la vie courante. La plus importante de toutes sera la capacité d'affronter le changement, dans des situations peu familières. Pour être à la hauteur du monde de 2050, il faudra non seulement inventer des idées et des produits, mais d'abord et avant tout se réinventer sans cesse.

En effet, avec l'accélération du changement, l'économie, mais aussi le sens même de « l'être humain » sont susceptibles de se transformer. Dans le Manifeste communiste de 1848, Marx et Engels déclaraient déjà que « tout ce qui est solide se volatilise ». Mais ils pensaient surtout aux structures sociales et économiques. En 2048, les structures physiques et cognitives se volatiliseront elles aussi dans l'air ou dans un cloud de bits de données.

En 1848, des millions de gens quittaient les fermes de leurs villages pour aller travailler en usine dans les grandes villes. Là, il était peu probable de les voir changer de sexe ou ajouter un sixième sens. Et s'ils trouvaient du travail dans une usine textile, ils pouvaient espérer le conserver jusqu'à la fin de leur vie active.

[…] Mais ne prenez pas ce scénario à la lettre. Nul ne saurait prédire les changements précis dont nous serons les témoins. Tout scénario particulier risque d'être bien loin de la vérité. Si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela ait des airs de science-fiction, probablement sa description est-elle fausse. Mais si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela n'ait pas des airs de science-fiction, sa description est certainement fausse. Nous ne pouvons être sûrs des détails ; la seule certitude, c'est le changement. Un tel changement en profondeur peut fort bien transformer la structure élémentaire de la vie et faire de la discontinuité son trait saillant (1). Depuis des temps immémoriaux, la vie se divisait en deux parties complémentaires : une période d'apprentissages, suivie d'une période de travail. Dans la première, vous aviez accumulé des informations, acquis des compétences, élaboré une vision du monde et construit une identité stable. Même si à quinze ans vous passiez le plus clair de votre journée à travailler dans le champ de riz familial (plutôt qu'à l'école), votre activité la plus importante était d'apprendre : à cultiver le riz, à négocier avec les marchands cupides de la grande ville et à résoudre des conflits avec les autres villageois sur des questions de terre et d'eau. Dans la seconde partie, vous vous en remettiez à vos connaissances accumulées pour naviguer dans le monde, gagner votre vie et contribuer à la société. Bien entendu, à cinquante ans, vous continuiez à apprendre des choses nouvelles sur le riz, les marchands et les conflits, mais ce n'étaient que des petits ajustements de capacités bien rodées ?

Au milieu du XXIème siècle, l'accélération du changement et l'allongement de la durée de la vie rendront ce modèle traditionnel obsolète. La vie craquera aux entournures, il y aura de moins en moins de continuité entre les différentes périodes de l'existence. « Qui suis-je ? » sera une question plus urgente et compliquée que jamais.

Cela induira probablement des niveaux de stress considérables. Car le changement est presque toujours stressant. Passé un certain âge la plupart des gens n'aiment pas changer. A quinze ans, votre vie entière est changement. Le corps grandit, l'esprit se développe, les relations s'approfondissent. Tout est en mouvement, tout est nouveau. Vous êtes occupé à vous inventer. La plupart des ados s'en effraient, mais c'est aussi excitant. De nouveaux horizons s'offrent à vous, vous avez un monde à conquérir.

A cinquante ans, vous n'avez pas envie de changement ; la plupart ont alors renoncé à conquérir le monde. J'ai déjà été là, j'ai déjà fait çà, acheté ce T-shirt. Vous préférez de beaucoup la stabilité. Vous avez tellement investi dans vos compétences votre carrière, votre identité et votre vision du monde que vous n'avez aucune envie de tout recommencer. Plus vous avez travaillé dur pour construire quelque chose, plus il vous est difficile de le lâcher pour faire place à du nouveau. Vous pourriez encore apprécier les expériences nouvelles et les petits ajustements, mais à la cinquantaine, la plupart des gens ne sont pas prêts à chambouler les structures profondes de leur identité et de leur personnalité.

Il y a des raisons neurologiques à cela. Bien que le cerveau adulte soit plus flexible et changeant qu'on ne le pensait autrefois, il reste moins malléable que celui d'un adolescent. Reconnecter les neurones et recâbler les synapses est une tâche sacrément difficile. Au XXIème siècle cependant, on ne peut guère se permettre la stabilité. Si vous essayez de vous accrocher à une identité stable, un travail ou une vision du monde, vous risquez fort de vous retrouver en rade tandis que le monde continuera sa course folle. L'espérance de vie étant susceptible d'augmenter, vous pourriez passer des décennies dans un état de fossile paumé. Pour garder une pertinence –économique, mais aussi sociale-, un jeune de cinquante ans devra être capable d'apprendre et de se réinventer constamment.

L'étrangeté devenant la nouvelle norme, vos expériences passées, comme celles de toute l'humanité, deviendront des guides moins fiables. Les individus et l'humanité dans son ensemble devront de plus en plus affronter des choses que personne n'aura encore jamais rencontrées : machines super-intelligentes, corps modifiés, algorithmes capables de manipuler vos émotions avec une mystérieuse précision, enchaînement rapide de cataclysmes climatiques produits par l'homme et nécessité de changer de profession tous les dix ans. Face à une situation totalement inédite, quelle est la bonne attitude ? Comment se conduire quand on est inondé d'énormes quantités d'information et qu'il n'y a absolument aucun moyen de l'absorber et de l'analyser dans sa totalité ? Comment vivre dans un monde où l'incertitude n'est pas un bug, mais un trait caractéristique ?

Pour survivre et s'épanouir dans un monde pareil, il faut beaucoup de souplesse mentales et de grandes réserves d'équilibre émotionnel. Vous devrez vous défaire régulièrement d'une partie de ce que vous connaissez le mieux pour vous sentir à l'aise dans l'inconnu.

[…] Mais alors, à quoi se fier ? A la technologie ? C'est un pari encore plus risqué. Elle peut vous aider beaucoup, mais si elle prend trop d'ascendant dans votre vie, vous pouvez devenir l'otage de son ordre du jour. Voici des milliers d'années, les humains ont inventé l'agriculture, mais cette technologie n'a enrichi qu'une minuscule élite tout en asservissant la majorité. De l'aube au crépuscule, la plupart des gens étaient occupés à arracher des herbes sauvages, à porter des seaux d'eau et à ramasser le blé sous un soleil de plomb. Vous pouvez devenir victime du même schéma.

La technologie n'est pas mauvaise en soi, si vous savez ce que vous voulez dans la vie, elle peut vous aider à l'obtenir. Si vous ne le savez pas, ce sera un jeu d'enfants pour elle de façonner vos objectifs à votre place et de prendre le contrôle de votre existence. La technologie parvenant à mieux comprendre les humains, vous pourriez vous retrouver de plus en plus à son service au lieu d'être servi par elle.

[…] Afin de réussir dans cette tâche aussi redoutable, il vous faudra consentir de gros efforts pour mieux connaître votre système opératoire. Savoir qui vous êtes et ce que vous attendez de la vie. C'est bien entendu le plus vieux conseil du monde : connais-toi toi-même. Depuis des milliers d'années, philosophes et prophètes pressent les gens de se connaître, mais ce conseil n'a jamais été plus impérieux qu'au XXIème siècle parce que la concurrence est autrement plus sérieuse aujourd'hui qu'au temps de Lao-Tseu ou de Socrate. Coca-Cola, Amazon, Baidu et l'Etat sont tous engagés dans une course pour vous hacker, vous pirater. Pas uniquement votre Smartphone, votre ordinateur ou votre compte en banque, mais vous-même et votre système opératoire organique. Sans doute avez-vous entendu dire que nous vivons à l'époque du piratage des ordinateurs, mais ce n'est guère qu'une moitié de la vérité. En vérité, nous sommes entrés dans l'ère du hacking des êtres humains. Dès maintenant, les algorithmes vous surveillent. Ils observent vos déplacements, vos achats, vos rencontres. Bientôt, ils surveilleront vos pas, votre respiration, les battements de votre cœur. Ils s'en remettent aux Big Data et à l'apprentissage automatique pour vous connaitre de mieux en mieux. Et du jour où ces algorithmes vous connaîtront mieux que vous ne vous connaissez vous-mêmes, ils pourront vous contrôler et vous manipuler sans que vous n'y puissiez grand-chose. Vous vivrez dans la matrice (2) ou dans le Truman Show. Somme toute, c'est une simple question empirique : si les algorithmes comprennent ce qui se passe en vous réellement mieux que vous ne le comprenez, c'est à eux que reviendra l'autorité.

Bien entendu, vous pourriez être heureux de céder toute l'autorité aux algorithmes et de les laisser décider pour vous et le reste du monde. En ce cas, détendez-vous, et bon voyage ! Vous n'avez rien à faire. Les algorithmes s'occuperont de tout. Si toutefois, vous voulez garder un certain contrôle sur votre existence personnelle et l'avenir de la vie, vous devez courir plus vite que les algorithmes, plus vite qu'Amazon et l'Etat, et apprendre à vous connaître avant eux. Pour courir vite, ne prenez pas trop de bagages. Abandonnez toutes vos illusions, elles sont trop lourdes.

(1) - saillant : marquant, remarquable.

(2) - matrice : moule qui permet de reproduire une forme.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1}$$

Exercice 1

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.

Il vient directement que

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x} &= \ln\ln 4 - \ln\ln 2 \\ &= \ln(2\ln 2) - \ln\ln 2 \\ &= \ln 2 + \ln\ln 2 - \ln\ln 2 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.

   f est définie sur $]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$ et pour tout x de son domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{3}{x\,(\ln x + 1)^2}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.

   Quand $x \to +\infty$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to +\infty$ et donc $f(x) \to +\infty$.

4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

   Quand $x \to 0$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to -\infty$ et donc $f(x) \to 0$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

   $z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

   expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

   f est de période π, et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, d'en déduire par parité l'étude sur $]-\pi/2, 0]$ puis de compléter par périodicité à l'ensemble de définition de f (c'est-à-dire $\mathbf{R}$ privé des points de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec k entier).

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

   Il existe $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles de 3 de ces 10 boules. Comme les boules 5 et 10 sont les seules dont le numéro est un multiple de 5, il reste 8 boules dont les numéros ne sont pas des multiples de 5, et donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles de 3 boules parmi ces 8. La probabilité qu'au moins une des boules tirées soit un multiple de 5 est donc

$$p = 1 - \frac{336}{720} = \frac{8}{15}.$$

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

   En multipliant au nominateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve

$$u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

   et donc la suite (u_n) tend vers $1/2$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Un calcul sans problème montre que $v_{n+1} = v_n - 1/2$. Par conséquent, la suite (v_n) est une suite arithmétique tendant vers $-\infty$, et comme $u_n = 1 + 1/v_n$, on en déduit que u_n tend vers 1.

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

Le discriminant de cette équation vaut -5 : les solutions dans $\mathbf{C}$ sont donc $i(-1+\sqrt{5})/2$ et $i(-1-\sqrt{5})/2$. Il n'y a pas de solution réelle.

Exercice 2

1. a étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

(a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

On se ramène à une équation du second degré dont l'unique solution positive est $x = \sqrt{a}$.

(b) Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de f dans le cas où $a = 4$.

La dérivée de f, définie pour tout $x > 0$, vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

et est donc négative pour $x < \sqrt{a}$, nulle en $\sqrt{a}$, et positive pour $x > \sqrt{a}$. On en déduit que f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}[$, et croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Un calcul immédiat montre qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = 0$, et que f tend vers l'infini en l'infini. Comme $f(x) - x/2$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit l'asymptote oblique $y = x/2$, la courbe de f restant au-dessus de l'asymptote. Le graphe de f s'en déduit aisément.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(a) Déduire de la question précédente que pour tout n, $u_n > \sqrt{a}$.

Comme f est croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$, partant de $u_0 > \sqrt{a}$, une récurrence immédiate prouve que si $u_n > \sqrt{a}$, $u_{n+1} = f(u_n) > f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ d'où le résultat

(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

D'après la question précédente, $f(u_n) < 1/2(u_n + u_n^2/u_n) = u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers une limite l vérifiant $f(l) = l$, et on tire de la première question que $l = \sqrt{a}$.

3. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

   Il suffit d'écrire v_{n+1} en fonction de u_n et de tout mettre au même dénominateur pour obtenir le résultat.

   (b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

   Il suffit d'exprimer que $u_n > a$ dans l'égalité précédente, et de raisonner par induction.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

   Pour approcher numériquement $\sqrt{a}$, il suffit de partir d'une valeur $u_0 > \sqrt{a}$ (par exemple a si $a > 1$ ou 1 si $a < 1$), et d'itérer la suite u_n.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que 10^{-4} dès la troisième itération.

   En utilisant que $\sqrt{5} < 3$ et que $\sqrt{5}^{2^n} = 5^{2^{n-1}}$, on trouve que $v_3 < 3,75 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, d'où le résultat.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ qui à x associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

(a) Donner le domaine de définition de la fonction ϕ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

ϕ est définie sur $]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$. Elle a pour limites $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $1/2^-$, $-\infty$ en $1/2^+$, et $+\infty$ en $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ, et en déduire le tableau de variations de ϕ.

Un calcul standard montre que

$$\phi'(x) = \frac{1-4x+5x^2}{(1-2x)^2}.$$

Le signe du numérateur est constant, donc on a $phi'(x) > 0$ pour tout x appartenant au domaine de définition de ϕ. Par suite, ϕ est croissante sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$, d'où le tableau de variations.

(c) Faire l'étude des branches infinies de ϕ

ϕ admet deux asymptotes verticales, d'équations $x = 0$ et $x = 1/2$. De plus, en $+\infty$, $\phi(x)/x$ tend vers 0 en vertu de la croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissances, donc ϕ y admet une branche parabolique de direction l'axe Ox.

(d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera α, par rapport à $1/2$.

ϕ est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc une fois sur chacun de ces intervalles. 1 est une solution évidente de l'équation $\phi(x) = 0$, l'autre solution α se trouve donc entre 0 et $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

(a) Calculer $f'(x)$.

Par un calcul standard,

$$f'((x) = \left[(1-2x)\ln x + 1 - x\right] e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

(b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de x.

$(1-2x)\ln x + 1 - x$ est du même signe que $\phi(x)$ si $x < 1/2$, et de signe contraire si $x > 1/2$. Par suite $f'(x)$ est négatif si $0 < x < \alpha$ ou $x > 1$, positif si $\alpha < x < 1$ (on vérifie directement que $f'(1/2) > 0$).

(c) Donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

On trouve directement que la limite de f en l'infini vaut 0, et que f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de f.

Il se déduit des question précédentes, en notant que $f(1) = 1$, et que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

(e) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

comme $x\ln x$ tend vers 0 en 0, la limite de $f'(x)$ à droite de 0 vaut $-\infty$, et on a donc une demi-tangente verticale en ce point.

(f) Dessiner la courbe représentative de f.

Elle se déduit de ce qui précède.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

pour tout $x \in [0,1]$).

$I_0 = [\ln 2]_0^1 = \ln 2$.
Pour I_1, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\ &= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\ &= \ln 2 - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \text{ (en utilisant l'indication de l'énoncé)} \\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 \\ &= 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

(b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$. Par suite,

$$\int_0^1 0dx \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2dx$$

d'où le résultat demandé.

(c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ d'où $I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

(a) Etudier le signe de g sur $\mathbf{R}^+$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

qui est strictement négatif dès que $x > 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$, et comme $g(0) = 0$, $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

(b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Si $x \in [0,1]$, $x^n \in [0,1]$ et d'après ce qui précède, $\ln(1+x^n) \leq x^n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et comme $I_n \geq 0$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où λ désigne un paramètre réel.

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2+2) = -3\lambda^2 - 8 < 0$. On en déduit que l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels a et b tels que $f(a) = f(b)$.

(a) Montrer que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0$.

En développant, on trouve que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=a^3-b^3+2a-2b=0$ puisque $f(a)=f(b)$.

(b) En déduire que $a=b$.

On a donc $f(a)-f(b)=(a-b)(a^2+ab+b^2+2)$. Par suite, si $f(a)=f(b)$, on a soit $a=b$, soit $a^2+ab+b^2+2=0$, ce qui est impossible d'après la première question : on en déduit donc que $a=b$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ On considère deux nombres complexes $z_1=1-i$ et $z_2=2+\sqrt{3}+i$.

1. Ecrire z_1 sous forme trigonométrique.

   $z_1=\sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$

2. Ecrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

   En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}-i)}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2+1}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}i)}{8+4\sqrt{3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\,(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))\,.\end{aligned}$$

3. En déduire la forme trigonométrique de z_2.

   On a $z_2=z_1/(z_1/z_2)$ et donc le module de z_2 est le quotient du module de z_1 par celui de z_1/z_2, et son argument est la différence de l'argument de z_1 et de celui de z_1/z_2. Tous calculs effectués, on trouve

$$z_2=\frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}\,(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))\,.$$

4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

   En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de z_2, il vient

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}=\frac{5+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

   et

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$$

Exercice 7 Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à n ont été distribués aléatoirement à n candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis A et B participent à cette épreuve. On note n_A et n_B leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples (n_A, n_B) possibles ?

   Il y en a $n(n-1)$.

2. Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq n-1$. Montrer que $2(n-r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.

   Parmi les couples pour lesquels le dossard de B a un numéro inférieur à celui de A, pour avoir $n_A - n_B = r$, on a $(1, r+1), (2, r+2), \cdots, (n-r, n)$, soit $n-r$ possibilités. On en a évidemment autant si le dossard de A a un numéro inférieur à celui de B, d'où le résultat.

3. Quel est l'écart le plus probable entre n_A et n_B ?

   D'après ce qui précède, la probabilité pour que cet écart soit égal à r est

   $$p_r = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

   qui est maximum pour $r = 1$. Le plus probable est donc que les deux candidats partent immédiatement l'un derrière l'autre.

4. Quel est l'écart moyen entre n_A et n_B ?

   L'espérance E de l'écart entre n_A et n_B se calcule comme suit, en utilisant le rappel donné en début de l'énoncé :

   $$\begin{aligned} E &= \sum_{r=1}^{n-1} r \frac{2(n-r)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} r - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3}. \end{aligned}$$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper et *R* l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = x\,Ln\,x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x) = Ln\,x - 1$ et elle s'annule pour $x = e$. Le graphe de f admet une branche parabolique dans la direction verticale. La fonction est strictement décroissante sur $]0, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$. On a : $f(e) = 0$. On peut prolonger la fonction par continuité à droite en zéro, en posant $f(0) = e$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$:

$$x\,Ln\,x - (2+a)x = 0$$

L'équation devient $x(Ln\,x - (2+a)) = 0$, soit $x = e^{2+a}$, on a donc une solution.

3. Calculer Pour $\alpha > 0$, Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx$

$$\int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Ln\,x - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex\right]_{\alpha}^{e} = \frac{e^2}{4} - \left[\frac{\alpha^2}{2}Ln\,\alpha - \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 + e\alpha\right] \to \frac{e^2}{4}$$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur R par : $f\ (x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est bien définie et sa dérivée est égale à :

$$f^{'}\ (x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}+x)} > 0$$

La fonction est donc strictement croissante de R sur $\left]-\infty, 0\right[$. Elle admet l'axe Ox et la droite d'équation y=2x, comme asymptotes ($f(x) \approx x + x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)$ au voisinage de moins l'infini).

On a : $f(0) = -1$.

2. Etudier la convexité de f.

La dérivée seconde de f est égale à : $f^{''}\ (x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} < 0$ et la fonction est donc concave.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\ (u_n)$.

Comme la fonction f est continue, si la suite converge vers une limite l, elle est solution de l'équation : $l = f\ (l)$ ou encore $\sqrt{1+l^2} = 0$, ce qui est impossible, donc la suite (qui est décroissante) est divergente.

Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de x, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à x. Pour x non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\ dx$

On a : $I = \int_{1/2}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1/2}^{1} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int_{1}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1/2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = 3/8$

2. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} f\ (x)\,dx$

Pour x>1, la partie entière $E\left(\frac{1}{x}\right)$ est identiquement nulle, donc la limite demandée est nulle.

3. Expliciter f (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur R

Pour x>1, $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $f(x)=0$, donc elle est continue ;

Pour x<-1, $E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$ et $f(x)=-x$, donc elle est continue ;

En zéro, la fonction n'est pas définie ;

Pour $x\in\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ avec k entier positif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k$ et $f(x)=kx$, donc elle est continue ;

Pour $x\in\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[$ avec k entier négatif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k+1$ et $f(x)=(k+1)x$, donc elle est continue ;

Pour $x=\frac{1}{k}$, la limite à droite est différente de la limite à gauche et la fonction est non continue.

Exercice n° 4

1. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1}=i$

On pose $z=x+iy$ pour obtenir : $(x-2)+iy=i(x-1)-y$, d'où $x-2=-y; x-1=y$ et $z=\frac{1}{2}(3+i)$

2. Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et 2. On suppose que M est distinct de A et B.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$;

Le module correspond au rapport de longueur des deux segments $\frac{BM}{AM}$ et l'argument à l'angle entre $\vec{MB}$ et $\vec{MA}$

- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

La solution de l'équation correspond à l'intersection entre la médiatrice de AB (x=3/2) et du demi-cercle tel que $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}$.

3. Résoudre dans C, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i$

On procède comme dans la première question pour obtenir d'abord x puis y. On obtient deux solutions : $z_1=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$; $z_2=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice n° 5

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions f_n sur R par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de f_1 et tracer son graphe.

La dérivée est égale à : $f_1^{'}(x) = e^{x^2}(2x^2+1) > 0$ et la fonction est impaire et strictement croissante de R sur R avec une branche parabolique dans la direction Oy.

2. Comparer les graphes de f_{2n} et f_{2n+1}.

Le graphe de f_{2n} est symétrique par rapport à l'axe Oy et le graphe de f_{2n+1} est symétrique par rapport à l'origine. Les deux graphes admettent une branche parabolique dans la direction Oy.
Une différence : la pente de la tangente à l'origine est égale à 1 pour f_{2n+1} et nulle pour f_{2n}.

3. Pour p entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

On a évidemment $u_n > 1$. Si la suite est convergente, $u_n \to l$, alors $l = f_p(l)$ et $l \geq 1$, d'où $l^{p-1} e^{l^2} = 0$ est impossible .La suite (u_n), strictement positive et croissante, ne peut pas converger vers une limite finie, elle tend vers l'infini.

4. Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}\int_0^1 f_n(x)\,dx$

On a : $0 < \int_0^1 f_n(x)\,dx < e\int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{e}{n+1} \to 0$

Exercice n° 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1)$, où a est un paramètre réel.

1. Déterminer a pour que cette suite soit constante.
Si la suite est constante, on a : $u_n = (a+2)(u_n+1) = (a+2)(2) = 1$, soit $a = -3/2$
2. Déterminer a pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).
Pour une suite arithmétique, on a : $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1) = u_n + r$, soit $a = -1; r = 1$
3. Etudier la convergence de la suite (u_n) pour $a > 0$.
La suite (u_n) est toujours strictement positive et si elle converge, sa limite l vérifie : $l = (a+2)(l+1)$, d'où $l = -\dfrac{a+2}{a+1} < 0$. Par conséquent la suite n'est pas convergente. On peut remarquer qu'elle est croissante $u_{n+1} - u_n = (a+1)u_n + a + 2 > 0$ et non majorée, donc elle tend vers plus l'infini.

Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de X.

La loi de probabilité est :

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(X)$	1/36	3/36	5/36	6/36	6/36	6/36	5/36	3/36	1/36

2. Calculer l'espérance de X. Ce résultat est-il prévisible ?

L'espérance de X est donnée par : $E(X) = \sum_{i=3}^{11} x_i \, p(X = x_i) = 7$. Ce résultat était prévisible car cette distribution discrète avec un nombre impair de valeurs est symétrique.

3. Un joueur mise une unité monétaire sur X.
Si X=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si X=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si X=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

L'espérance de gain est égale à : $\frac{1}{36}(3\times 2 + 1{,}5\times 6 + 10\times 0{,}5 - 18) = 1/18$

Ce jeu n'est pas réaliste car dans tous les jeux d'argent l'espérance de gain des joueurs est négative.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, tan la fonction tangente et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx$.

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x}-10}{1-e^x}$.

3. Donner le comportement au voisignage de $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

4. Ecrire le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

5. Donner le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

6. Calculer la dérivée de la fonction définie à la question précédente.

7. On considère un dé truqué où l'apparition d'une face est proportionnelle au numéro de cette face. Donner la probabilité d'obtenir un 6 quand on lance ce dé.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4u_n+3}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

9. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1.$$

10. Résoudre l'equation $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation
$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0. \tag{1}$$

1. Soit α une solution de (1) et g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x - 1$. Donner la valeur de $(g(\alpha))^2$.
2. Déduire de la question précédente les solutions de (1) dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ définie par
$$\phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
   (a) Donner le domaine de définition de ϕ, et calculer les limites de ϕ aux bornes de son domaine de définition.
   (b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ.
   (c) Etudier les variations de la fonction h définie par
   $$h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$
   et en déduire le signe de $\phi'(x)$ selon la valeur de x.
   (d) Dresser le tableau de variations de ϕ, et donner l'allure de sa courbe représentative (on ne cherchera pas à calculer la limite de $\phi'(x)$ en 0).
2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 1$ associe
$$f(x) = \int_1^x \phi(t)dt.$$
   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que
   $$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \leq f(x) \leq \int_1^x \frac{ln(2t)}{t}dt.$$
   En déduire que
   $$\frac{\ln^2 x}{2} \leq f(x) \leq \ln 2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

(c) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$$
et en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$
5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. Etudier les variations de la fonction f_n.
2. Montrer que l'équation
$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$$
admet une unique solution $a_n \geq 0$. Donner la valeur de a_2.
3. Montrer que $f_n(a_{n+1}) \leq 0$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
4. Donner, en la justifiant, la valeur de $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n$, et en déduire que
$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}.$$
5. Déterminer la limite de la suite $(a_2^{n+1})_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$. En déduire la limite, toujours quand $n \to \infty$, de la suite $(a_n^{n+1})_{n\geq 0}$, puis celle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 6

1. Caractériser l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'équation
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

2. On considère l'équation

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

   (a) Trouver, si elles existent, les solutions réelles et les solutions imaginaires pures de l'équation (2).

   Soit $z = a + ib$ une solution de (2)

   (b) Montrer que
   $$a^2 + (b-m)^2 = k$$
   où m et k sont deux réels qu'on déterminera.

   (c) soit $Z = z + 3i$: donner le module de Z.

   (d) Dans le plan complexe, où placeriez-vous les solutions de (2) ?

Exercice 7

Un établissement scolaire estime qu'un élève sérieux doit avoir une probabilité au plus égale à 2% d'arriver en retard en cours. On considère dans cet exercice un élève sérieux, dont la probabilité d'arriver en retard est, chaque jour, de 2%. Sur un semestre scolaire de 100 jours, on note X la variable aléatoire égale au nombre de retards constatés chez cet élève.

1. Nommer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance ainsi que sa variance.
2. Quelle est la probabilité pour que l'élève n'ait jamais été en retard sur tout le semestre ? Pour qu'il ait été en retard exactement une fois ? Pour qu'il ait été en retard tous les jours ? Que pensez-vous de ce dernier résultat ?
3. L'établissement décide d'infliger une sanction à partir du 3ème retard dans le semestre. Calculer la probabilité pour que l'élève sérieux considéré dans cet exercice soit sanctionné. Quelle aurait été cette probabilité pour un élève très sérieux ayant chaque jour une probabilité de 1% d'arriver en retard ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les grands équilibres mondiaux issus de l'après Seconde Guerre mondiale sont progressivement remis en question, notamment sous l'impulsion de pays émergents asiatiques. Quels sont selon vous les avantages et les inconvénients d'une telle recomposition ?

Sujet n° 2

De nombreuses études s'alarment de l'épuisement des ressources de notre planète, de l'appauvrissement progressif de la biodiversité tandis que la population mondiale ne cesse d'augmenter. Quelles solutions transitoires peut-on proposer selon vous pour que notre modèle de développement actuel puisse devenir soutenable ?

Sujet n° 3

Comment envisagez-vous le continuum formation-entreprises, notamment les conditions pratiques de son développement, afin d'améliorer l'emploi des jeunes diplômés ?

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *C* l'ensemble des nombres complexes.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur $R-\{2\}$ par : $f\ (x)=\dfrac{x^3-x^2}{(x-2)^2}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Déterminer les constantes *a, b, c* et *d* telles que : $f\ (x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{(x-2)^2}$

3. Calculer $I=\int_0^1 f\ (x)\ dx$

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n(x)=Ln\ ((1+x^2)^n)$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe (on étudiera également la convexité de cette fonction).

2. Calculer $I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

3. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pour $n > 1$.

4. Etudier la suite réelle (x_n) définie par la relation de récurrence: $x_{n+1} = Ln(1+x_n^2)$ et $x_0 > 0$

Exercice n° 3

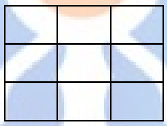
1. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|z+1| = 1$

2. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|2z+1| = 1$

3. Soit $z_n \in C$, vérifiant l'équation : $|\alpha_n z_n + 1| = 1$, où (α_n) est une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Exercice n° 4

On dispose d'un casier carré formé de trois lignes et de trois colonnes (donc de neuf cases), comme le montre le dessin suivant :



Dans ce jeu, on dispose de trois balles qui seront lancées une par une dans le casier. On suppose que chaque balle tombe toujours dans une case. On gagne si les trois balles sont alignées sur une même ligne, colonne ou diagonale.

1. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans la case au centre du carré ?

2. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au coin du carré ?

3. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au milieu d'un côté du carré ?

4. Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice n° 5

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

1. Démontrer que f n'a pas de limite quand x tend vers zéro.

2. Soit la fonction g définie sur R par : $g(x) = \begin{cases} x\,f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur R.

3. On considère la fonction h définie sur R par : $h(x) = g(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{f(x)}\right)$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$ (ensemble des entiers relatifs) et $h(x) = 0$ dans les autres cas.

Etudier la continuité de h sur R.

4. La fonction h est-elle dérivable en zéro ?

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2\, e^{-x}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 3/2$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 3/2$ pour tout n. On donne $e^{-1} \approx 0.368$ et $e^{-3/2} \approx 0.223$.

2. Montrer que $\left|f'(x)\right| \leq 1/2$ pour tout $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

3. Montrer que f admet un point fixe que l'on notera x_0.

4. Etudier la convergence de la suite (u_n).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre de Monsieur Serge TISSERON, intitulé : « ***Le jour où mon robot m'aimera. Vers l'empathie artificielle*** **», paru aux éditions Albin Michel en Septembre 2015.**

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

En juin 2014, le groupe japonais SoftBank a lancé le robot Pepper en jouant largement sur la confusion entre l'homme et la machine. Lors de sa présentation devant la presse mondiale, son président Masayoshi Son a déclaré : « Pour la première fois dans l'histoire de la robotique, nous présentons un robot avec un cœur. » Un robot qui a du cœur ? Comme Rodrigue, donc, et prêt à craquer pour les beaux yeux de Chimène ? Ne rêvons pas, et sachons raison garder, même si le président de SoftBank ne nous y encourage guère. Pepper n'aura pas plus de cœur qu'une machine à laver, mais à la différence de celle-ci, il sera capable de simuler l'affection que tout être humain attend de ses semblables – ou au moins de certains d'entre eux. Et c'est ce qui donnera envie de l'acheter ! En effet, nous n'avons guère envie d'héberger sous notre toit une créature de métal qui nous batte constamment aux échecs ou au Mémory (1), qui nous demande si nous avons bien pris nos médicaments et nous rappelle l'heure d'aller nous coucher.

Ce n'est donc pas l'intelligence des robots qui sera mise en avant pour nous convaincre d'en acheter, mais leur « cœur ». L'intelligence artificielle fait peur, l'empathie artificielle sera là pour nous rassurer. C'est elle qui sera le fer de lance de leur promotion. Et pour nous en convaincre, il est très important que nous puissions communiquer avec ces robots exactement comme avec un être humain, c'est-à-dire en utilisant la voix, le regard et le geste. Telle est donc la première référence qui va nous guider dans notre projet de penser nos relations aux robots : l'homme. Pourtant nous ne cesserons probablement jamais tout à fait de considérer les robots comme des machines. Nous reporterons inévitablement sur eux des attentes et des espoirs que nous avons renoncé à satisfaire avec des humains, exactement comme nous le faisons déjà avec nos objets familiers.

Notre seconde référence sera donc les relations de l'homme à ces objets et nous verrons qu'elle est beaucoup plus riche et complexe que nous le pensons. Enfin, les progrès technologiques nous permettront très vite de donner à nos robots les apparences de notre choix, y compris le nôtre ou celle d'un proche (…)

Mon robot, les émotions et moi.

Le PDG de SoftBank qui parle de « cœur » pour vendre les qualités de son robot Pepper n'est pas le seul à jouer sur cette fibre. Depuis 2006, l'Europe développe un projet intitulé *Feelix-croissance.* La croissance, tout le monde comprend de quoi il s'agit. Quant au mot *« feelix »,* il est fabriqué à partir des mots anglais *feel,interactive* et *express* qui signifient respectivement « sentir », « interagir » et « exprimer ». Ce programme s'est fixé comme objectif de concevoir des robots capables de décrypter les manifestations émotionnelles des humains et de leur répondre de façon adaptée. Et comme toute grande entreprise à destination commerciale, il est porté par un slogan : *Emotional robot has empathy*, en français : Un robot émotionnel a de l'empathie. Les émotions seraient- elles donc indispensables à un robot ? Pas du tout. Un robot est un système capable de percevoir les informations du monde ambiant grâce à ses nombreux capteurs, d'avoir une représentation de ce monde et de s'y adapter. Cette définition ne nécessite pas que les robots aient une apparence humaine, avec une tête, deux bras et deux jambes et encore moins qu'ils aient des émotions. Mais si c'était la condition pour que les humains les adoptent ?

Robot as-tu du cœur ?

Imaginez un robot qui vous propose une partie de cartes ou d'échecs au moment où vous tombez de sommeil ou qui vous invite à faire une promenade alors que vous souffrez d'un terrible mal de dos. Il est probable que vous demanderiez vite qu'on vous en débarrasse ! Pour qu'un robot soit accepté, la première condition est qu'il soit capable de reconnaître la signification des mimiques humaines et les émotions dont elles témoignent, afin d'y répondre de façon adaptée. Mais ce n'est pas suffisant. Si le même robot qui vous voit tomber de sommeil vous déclare d'une voix métallique et sans esquisser un geste : « Vous-devriez-aller-vous-coucher », il vous semblera vite insupportable. Et s'il demande à un enfant de la même manière : « Est-ce-que-tu-as-envie-que-nous-jouions-ensemble ? », il finira enfermé dans un placard ! Pour qu'un robot soit complètement accepté, il est indispensable qu'il parle avec des intonations et des mimiques qui évoquent de vraies émotions. C'est cela que le PDG de SoftBank appelle un robot qui a du « cœur », et sur cette voie que s'avancent les recherches dédiées à ce qu'il est convenu d'appeler « l'empathie homme-machine ». Elles ont pour objectif de concevoir un robot capable non seulement d'interagir avec un être humain en s'adaptant à lui, mais aussi comme s'il était lui-même un être humain. Il semble en effet que cela soit essentiel pour que nous acceptions d'être aidés par un robot en lui faisant pleinement confiance. Mais en même temps, un robot, parce qu'il n'est pas un être humain, peut aussi proposer une communication simplifiée. Et cette caractéristique s'avère très utile avec des personnalités, ou dans des situations où la complexité des émotions humaines peut dérouter. C'est pourquoi les travaux sur les robots et les émotions portent sur trois domaines : mieux comprendre les émotions humaines, fabriquer des robots mieux acceptés par la majorité de la population, et, dans certaines circonstances réduire la complexité des échanges

(…) Bien sûr, tout cela peut nous paraître lointain, mais n'oublions pas que beaucoup d'entre nous vivront parmi les robots et que ce sera évidemment le cas de nos enfants. Or chacun conviendra qu'il serait absurde de les élever pour qu'ils soient capables de vivre dans le monde d'hier, mais il n'est pas non plus adapté de les préparer à vivre dans celui d'aujourd'hui puisque ce ne sera plus le leur demain. Nous devons les préparer à vivre dans un monde où les objets seront fondamentalement différents de ce qu'ils sont aujourd'hui, et la première condition pour y parvenir est de prendre conscience de ce que seront ses opportunités mais aussi ses séductions et ses risques. Bref, il nous faut faire avec nos enfants ce que nos propres parents n'ont pas fait avec nous lorsqu'ils n'ont pas pris la mesure de la révolution des écrans et la nécessité d'y préparer les plus jeunes. Si les écrans sont devenus pour certains adolescents et jeunes adultes d'aujourd'hui autant de pièges, c'est parce que leurs parents n'avaient pas compris que le monde est en train de changer. Ils ont expliqué à leurs enfants qu'il ne fallait pas faire confiance aux gentils messieurs qui leur tendent un bonbon à travers la portière de leur voiture, et nous découvrons aujourd'hui qu'il est bien aussi important de les protéger précocement contre les séductions des écrans, qu'il s'agisse du flux télévisuel qui transforme chacun en spectateur passif du monde, des jeux vidéo répétitifs ou des espaces numériques dans lesquels pullulent les Églises et les sectes. Bientôt nous allons devoir leur apprendre beaucoup d'autres choses. Pas pour les tenir à l'écart des robots, mais pour leur apprendre à les utiliser pour ce qu'ils peuvent leur apporter de meilleur tout en se gardant de leur demander ce qu'ils ne peuvent pas donner.

Tout d'abord, il va devenir nécessaire de penser autrement notre rapport aux objets : accepter que nous puissions les aimer et les désirer, peut-être même jusqu'à la passion amoureuse, et en même temps prendre en compte qu'ils puissent être autant de mouchards reliés à des tiers. Nous devrons renoncer à penser en termes de « ou bien, ou bien » et accepter qu'ils puissent être à la fois la cause de grands avantages et de grands dangers, de façon à choisir, à chaque fois, en comparant les uns et les autres.

Parallèlement, il sera essentiel de développer dès le plus jeune âge le goût du débat et de la controverse afin de familiariser nos enfants avec la multitude de choix possibles dans chaque situation, et d'éviter que les logiciels conçus par quelques-uns ne finissent par imposer à tous une représentation univoque du monde. Mais surtout l'éducation devra apprendre à considérer les robots tous ensemble comme des objets technologiques perfectionnés, des créatures possiblement douées d'une forme de conscience – même si celle-ci n'a rien de commun avec la nôtre -, et comme des images porteuses de toutes les confusions possibles. Les robots seront *à la fois* et *inséparablemen*t un alter ego, un simple objet et une image. Et la meilleure manière de préparer les nouvelles générations à une pensée si complexe sera probablement de les inviter à en construire eux-mêmes le plus précocement possible. Si l'apprentissage du langage de la programmation est un élément majeur sur la voie de comprendre ce qu'on appelle bien improprement l'« intelligence artificielle », il n'est pas suffisant à lui seul pour écarter tous les pièges que les robots pourront susciter. La fabrication d'objets-robots conçus à l'image de figures que l'enfant désire animer est un autre volet de cet indispensable travail de prévention. Fabriquer des robots comme autant de nouvelles formes d'images deviendra aussi important pour l'enfant qu'apprendre à dessiner aujourd'hui : il y découvrira le fait que le robot, comme l'image, se substitue au modèle d'une façon qui ne le remplace pas, et que sa fabrication est l'occasion privilégiée de s'approprier à la fois l'expérience de sa construction et celle de sa perception propre du monde, puisque le robot une fois fabriqué permet de voir, d'entendre, de toucher le monde à travers ses capteurs. Le robot deviendra alors pour eux une machine transformable à tout instant en fonction de leurs attentes, et c'est ce qu'on peut leur souhaiter de mieux. En effet, plus un usager saura transformer son robot et moins le risque d'attachement à lui sera problématique

(…) Bien sûr, ces mesures éducatives, si importantes soient-elles, ne seront pas suffisantes pour nous protéger des risques que les robots nous feront courir. En effet, avant même de nous retrouver - peut-être - tous dominés par un super-cerveau artificiel plus puissant que l'ensemble des intelligences humaines réunies, nous courons le risque d'être manipulés par une multitude de petites intelligences artificielles introduites par des programmeurs dans le moindre de nos objets quotidiens. C'est pourquoi nous devrons toujours exiger que leurs choix soient explicites.

Dans la mesure où nos robots domestiques n'auront pas seulement de grands yeux attendrissants et des oreilles surdimensionnées pour mieux nous comprendre, mais aussi pour mieux nous surveiller, il sera également essentiel que leurs utilisateurs puissent les paramétrer de façon à décider de ce qu'ils accepteront ou non de transmettre sur eux-mêmes, et qu'ils puissent connaître la destination et l'usage des données recueillies. Toutes les machines qui nous seront proposées, justement parce qu'elles seront des machines, devront se présenter comme des systèmes ouverts, modifiables et reprogrammables. Enfin, plus l'apparence des robots se rapprochera de celle des humains et plus nous risquons de renouer avec la tentation qui a toujours marqué la relation de l'homme aux représentations qu'il fabrique : penser qu'une image puisse contenir un peu –ou beaucoup ! – de ce qu'elle représente.

(…) En d'autres termes, l'objectif à poursuivre ne serait pas de donner aux robots une conscience toujours plus grande, mais de réfléchir aux modalités limitées de conscience dont ils pourraient être dotés, de façon à permettre à l'homme de développer toutes les formes de sa propre conscience du monde et de lui-même.

Et pour y répondre, demandons-nous, parmi toutes les choses que les robots peuvent apprendre à faire, lesquelles sont vraiment valables. A mon avis, ce sont celles qu'une société qui vise l'égalité de ses membres doit chercher à réaliser et soutenir. Par exemple, il y aurait un grand danger à ce que les robots d'assistance infantilisent les gens et les traitent comme des récipiendaires passifs de soins et de services. Au contraire, nous aurons tout à gagner à avoir des robots qui protègent et soutiennent l'autonomie des personnes : des robots qui fassent faire de la gymnastique et de la rééducation aux personnes âgées plutôt que des robots qui les portent dans leurs bras ; et des robots qui leur apprennent l'Internet et ses nouveautés, et facilitent leurs communications avec d'autres personnes partout dans le monde plutôt que des robots qui leur proposent de jouer avec elles.

Réfléchissons alors dès aujourd'hui à ce que nous pouvons faire tous ensemble, que nous ne pouvons faire ni chacun séparément, ni ensemble sans robots. Les experts de Google prévoient que l'intelligence artificielle sera en 2045, un milliard de fois plus puissante que tous les cerveaux humains réunis. Mais les robots peuvent aussi devenir des partenaires au service de notre désir de mieux nous connaître et de mieux nous comprendre afin de devenir toujours plus maître de notre propre vie. Pour cela, il est vrai, il va nous falloir renoncer à des robots auxquels nous dirions : « obéis-moi en tout, fais à ma place ce que je renonce à faire moi-même, anticipe mes désirs même les plus secrets et montre-moi toujours que tu m'aimes. » Car s'il arrivait que ce soit un jour le cas, cette situation entraînerait inévitablement l'angoisse que la machine veuille nous manipuler à son tour, et l'oubli des hommes qui les auraient conçues pour nous asservir ! Demandons plutôt aux programmeurs de réfléchir à des robots auxquels nous puissions dire : « Permets-moi de mieux me connaître, de mieux comprendre mon passé et mon histoire, de mieux communiquer mon présent, et, avec toi ou sans toi, de mieux maîtriser mon avenir ».

(1)- Memory : jeu de société.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, tan la fonction tangente et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx &= \frac{1}{2}[\tan^2 x]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x}-10}{1-e^x}$.

$$f(x) = -e^x\left(\frac{1-10e^{-2x}}{1-e^{-x}}\right)$$

d'où $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

3. Donner le comportement au voisignage de $x = 0$ de la fonction de la question précédente.
   Quand x tend vers 0, le numérateur de $f(x)$ tend vers -9, et son dénominateur vers 0 par valeurs négatives si $x > 0$, par valeurs positives si $x < 0$. On en déduit que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

4. Ecrire le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

   Pour que $f(x)$ soit bien défini, il faut que la fraction à l'intérieur du logarithme soit elle-même bien définie et positive. C'est le cas si et seulement si $1 - x^2 > 0$, autrement dit quand $x \in]-1, 1[$.

6. Calculer la dérivée de la fonction définie à la question précédente. Par exemple, on peut écrire

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1-x^2\right)\right)' \\ &= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x}{1-x^2} \\ &= \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{1-x^4} \\ &= \frac{4x}{1-x^4} \end{aligned}$$

7. On considère un dé truqué où l'apparition d'une face est proportionnelle au numéro de cette face. Donner la probabilité d'obtenir un 6 quand on lance ce dé.
   Soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer. D'après l'énoncé, il existe $\lambda > 0$ tel que $P(X = k) = \lambda k$ pour tout entier k compris entre 1 et 6. Comme la somme de ces probabilités vaut 1, on a donc $\lambda(1+2+3+4+5+6) = 1$ d'où $\lambda = 1/21$ et $P(X = 6) = 6/21 = 2/7$.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4u_n+3}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?
   Il est clair (faire éventuellement un raisonnement par récurrence) que $u_n > 0$ pour tout n. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4u_n^2}{4u_n+3} < 0$$

   Donc la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite positive ou nulle l qui vérifie

$$l = \frac{3l}{4l+3},$$

   équation dont la seule racine (double) est 0, qui est donc la limite de cette suite.

9. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k!k &= \sum_{k=1}^{n} k!(k+1-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

par élimination des dominos.

10. Résoudre l'equation $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
On pose $y = x^2$, l'équation devient donc $y^2 - 6y - 1 = 0$, dont les solutions sont $y_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $y_2 = 3 + \sqrt{10}$.
Seule y_2 est positive et admet donc deux racines réelles, donc en revenant à x, les solutions réelles de l'équation considérée sont $\sqrt{3+\sqrt{10}}$ et $-\sqrt{3+\sqrt{10}}$.
Les solutions dans $\mathbf{C}$ sont les deux précédentes auxquelles on adjoint $i\sqrt{-3+\sqrt{10}}$ et $-i\sqrt{-3+\sqrt{10}}$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation
$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0. \tag{1}$$

1. Soit α une solution de (1) et g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x - 1$. Donner la valeur de $(g(\alpha))^2$.
$(g(x))^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ donc en utilisant l'équation on trouve directement que $(g(\alpha))^2 = 4$.
2. Déduire de la question précédente les solutions de (1) dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
Si α est solution de (1), on déduit de la question précédente que $\alpha^2+\alpha-1 = -2$ ou $\alpha^2+\alpha-1 = 2$. La deuxième équation admet les solutions réelles $(-1+\sqrt{13})/2$ et $(-1-\sqrt{13})/2$. La première n'admet pas de solution réelle, en revanche elle admet les solutions complexes j et j^2. On vérifie sans peine que ces solutions sont bien des solutions de (1).

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ définie par
$$\phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
(a) Donner le domaine de définition de ϕ, et calculer les limites de ϕ aux bornes de son domaine de définition.
$\phi(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $1 + x > 0$. Le domaine de définition de ϕ est donc $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, $\phi(x)$ tend vers

$+\infty$ car $x < 0$. En utilisant par exemple la règle de l'Hôpital, on montre que $\phi(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 à droite ou à gauche. Par croissance comparée, $\phi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ.

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\end{aligned}$$

(c) Etudier les variations de la fonction h définie par

$$h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$

et en déduire le signe de $\phi'(x)$ selon la valeur de x.

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 - \frac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) \\ &= -\ln(1+x)\end{aligned}$$

qui est positive si $-1 < x < 0$ et négative dès que $x > 0$: h est croissante, puis décroissante sur ces intervalles, sa limite en 0 étant nulle. On en déduit que $h(x) \leq 0$ pour tout x de son domaine de définition, et donc qu'il en est de même de $\phi'(x)$ puisque $\phi'(x)$ est du même signe que $h(x)$, son dénominateur étant positif sur l'ensemble de son domaine de définition.

(d) Dresser le tableau de variations de ϕ, et donner l'allure de sa courbe représentative (on ne cherchera pas à calculer la limite de $\phi'(x)$ en 0).
Ils se déduisent des questions précédentes.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 1$ associe

$$f(x) = \int_1^x \phi(t)dt.$$

(a) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
$f'(x) = \phi(x) > 0$ d'après les questions précédentes, donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

(b) Montrer que

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \leq f(x) \leq \int_1^x \frac{ln(2t)}{t}dt.$$

En déduire que

$$\frac{\ln^2 x}{2} \leq f(x) \leq \ln 2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $x \leq 1 + x \leq 2x$ donc $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{\ln 2x}{x}$ et en intégrant entre 1 et x cette double inégalité, on obtient le premier résultat. Pour obtenir le second, on remarque que $\frac{\ln t}{t}$ est de la forme $u'u$ qui s'intègre facilement, en notant en outre que le membre de droite s'écrit $\int_1^x \frac{ln(2)}{t} + \int_1^x \frac{ln(t)}{t}$.

(c) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.
L'inégalité de gauche donne immédiatement $\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$, et par croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes, l'inégalité de droite nous dit que $\lim_{n\to+\infty} f(x)/x = 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Ils se déduisent des questions précédentes en remarquant en outre que $f(1) = 0$ et que la courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des abcisses en $+\infty$ d'après le dernier résultat obtenu.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
   $I_0 = \pi/2$; $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.
2. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
   On intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\sin^{n+1} x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n x \cos x \cos x dx \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n x(1 - sin^2 x)dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

   d'où

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
   Pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $0 < \sin^n x$ et $0 < \sin x \leq 1$, donc $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Par suite, $I_{n+1} \leq I_n$. Par ailleurs, $I_n \geq 0$ puisque $\sin^n x > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$$

   et en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

D'après ce qui précède,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

On a donc

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1,$$

et on conclut à l'aide du lemme des gendarmes.

5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.

   On fait un raisonnement par récurrence : la proposition est vraie pour $n = 1$ d'après la première question. Supposons que, pour tout $k \leq n$, $kI_kI_{k-1} = \pi/2$: alors

$$\begin{aligned}(n+1)I_{n+1}I_n &= (n+1)\frac{n}{n+1}I_{n-1}\frac{n-1}{n}I_{n-2} = \\ &= (n-1)I_{n-1}I_{n-2} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

   d'apèrs l'hypothèse de récurrence, ce qui conclut la démonstration.

   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

   On sait que I_n converge vers une limite $l \geq 0$, c'est donc le cas aussi de I_{n-1}. De la question précédente, on tire que

$$I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$$

   d'où, en passant à la limite dans cette égalité, $l^2 = 0$ et finalement $l = 0$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. Etudier les variations de la fonction f_n.

   La fonction f_n est somme d'une constante et de fonctions puissances strictement croissantes sur $\mathbf{R}^+$: elle est donc elle-même strictement croissante de -1 à sa limite en $+\infty$, qui est évidemment $+\infty$.

2. Montrer que l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$$

   admet une unique solution $a_n \geq 0$. Donner la valeur de a_2.

   f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$; $f_n(0) = -1$ et $f_n(2) > 1$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}^+$.

   $f_2(x) = x^2 + x - 1$ donc a_2 est l'unique racine positive de ce trinôme, à savoir $a_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$.

3. Montrer que $f_n(a_{n+1}) \leq 0$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

   On a $f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^n + \cdots + a_{n+1} - 1 = -a_{n+1}^{n+1} \leq 0$ puisque $a_{n+1} \geq 0$. Par suite, $f_n(a_{n+1}) \leq f_n(a_n)$ et comme f est strictement croissante, $a_{n+1} \leq a_n$. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $a \geq 0$.

4. Donner, en la justifiant, la valeur de $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n$, et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}.$$

$a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n = a_n f_n(a_n) = 0$, et comme $a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 = 1 - a_n$, on trouve que $a_n^{n+1} + 1 - 2a_n = 0$ d'où le résultat demandé.

5. Déterminer la limite de la suite $(a_2^{n+1})_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$. En déduire la limite, toujours quand $n \to \infty$, de la suite $(a_n^{n+1})_{n\geq 0}$, puis celle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

$a_2 = (-1+\sqrt{5})/2 \in]0,1[$ donc $\lim_{n\to\infty} a_2^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_2^n = 0$. Comme la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $0 \leq a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1}$, et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} a_n^{n+1} = 0$. Enfin, il découle de la question précédente que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

Exercice 6

1. Caractériser l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'équation

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

En posant $z = a + ib$, l'équation précédente s'écrit $|a + (b-1)i| = |a + (b+1)i|$ d'où, en élevant au carré, $a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2$, d'où on tire que $b = 0$: z doit donc être un nombre réel.

2. On considère l'équation

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

(a) Trouver, si elles existent, les solutions réelles et les solutions imaginaires pures de l'équation (2).

Si z est réel, $z = a \in \mathbf{R}$ et en reprenant le raisonnement ci-dessus, on arrive à $a^2 + 1 = \frac{1}{2}(a^2+1)$ d'où $a^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbf{R}$: il n'y a donc pas de solution réelle.

Si z est imaginaire pur, $z = ib$, $b \in \mathbf{R}$, et le même raisonnement donne $(b-1)^2 = \frac{1}{2}(b+1)^2$ d'où $b^2 - 6b + 1 = 0$ dont les solutions sont $b_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $b_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Les solutions imaginaires pures de (2) sont donc ib_1 et ib_2.

Soit $z = a + ib$ une solution de (2)

(b) Montrer que

$$a^2 + (b-m)^2 = k$$

où m et k sont deux réels qu'on déterminera.

D'une manière générale, par les mêmes calculs, on trouve $a^2 + b^2 - 6b + 1 = 0$, soit $a^2 + (b-3)^2 = 8$

(c) soit $Z = z + 3i$: donner le module de Z.

Si on écrit $Z = A + iB$, $A = a$ et $B = b - 3$, donc $A^2 + B^2 = 8$ d'où $|Z| = 2\sqrt{2}$.

(d) Dans le plan complexe, où placeriez-vous les solutions de (2) ?

Z se trouve donc sur le cercle centré en 0 et de rayon $2\sqrt{2}$. Pour passer de Z à z, on fait une transition de $3i$: les solutions de (2) se trouvent donc sur le cercle centré au point d'affixe $3i$, donc sur l'axe des ordonnées, et de même rayon.

Exercice 7

Un établissement scolaire estime qu'un élève sérieux doit avoir une probabilité inférieure à 2% d'arriver en retard en cours. On considère dans cet exercice un élève sérieux, dont la probabilité d'arriver en retard est, chaque jour, de 2%. Sur un semestre scolaire de 100 jours, on note X la variable aléatoire égale au nombre de retards constatés chez cet élève.

1. Nommer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance ainsi que sa variance.

   Il s'agit de la loi binomiale de paramètres 100 (nombre de jours) et $0,02$ (probabilité de retard chaque jour). Son espérance est $100 \times 0,02 = 2$, et sa variance $100 \times 0,02 \times 0,98 = 1,96$.

2. Quelle est la probabilité pour que l'élève n'ait jamais été en retard sur tout le semestre ? Pour qu'il ait été en retard exactement une fois ? Pour qu'il ait été en retard tous les jours ? Que pensez-vous de ce dernier résultat ?

   La probabilité de n'avoir connu aucun retard est de $0,98^{100} = 0,13$. Celle d'avoir connu exactement un retard est de $100 \times 0,98^{99} \times 0,02 = 0,27$, et celle d'avoir été tous les jours en retard de $0,02^{100} = 1,26 \times 10^{-170}$. Cette quantité est assurément négligeable !

3. L'établissement décide d'infliger une sanction à partir du 3ème retard dans le semestre. Calculer la probabilité pour que l'élève sérieux considéré dans cet exercice soit sanctionné. Quelle aurait été cette probabilité pour un élève très sérieux ayant chaque jour une probabilité de 1% d'arriver en retard ?

   L'élève sera sanctionné s'il a au moins trois retards dans le trimestre, avec la probabilité $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0,98^{100} - 100 \times 0,98^{99} \times 0,02 - 495 \times 0,98^{98} \times 0.02^2 = 0,32$. Pour un élève très sérieux, le résultat aurait été de 8%.

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *C* l'ensemble des nombres complexes.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur $R-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{(x-2)^2}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction est définie pour *x* différent de 2. La droite *x*=2 est une asymptote verticale et la droite d'équation $y=x+3$ une asymptote oblique.

La dérivée de *f* est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{(3x^2-2x)(x-2)^2-(x^3-x^2)2(x-2)}{(x-2)^4}$ et après simplification $f^{'}(x)=\dfrac{x(x^2-6x+4)}{(x-2)^3}$ qui s'annule pour $x=0; x=3\pm\sqrt{5}$.

La fonction est :

- croissante de $]-\infty,0]$ sur $]-\infty,0]$;
- décroissante sur $[0,3-\sqrt{5}]$;
- croissante sur $[3-\sqrt{5},\ 2[$;
- décroissante sur $]2,\ 3+\sqrt{5}]$;
- croissante sur $[3+\sqrt{5},\ +\infty[$.

2. Déterminer les constantes *a*, *b*, *c* et *d* telles que : $f\ (x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{(x-2)^2}$

Par identification des polynômes, on obtient : $f\ (x) = x + 3 + \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}$

3. Calculer $I = \int_0^1 f\ (x)\ dx$

$$I = \int_0^1 f\ (x)\ dx = \int_0^1 x + 3 + \frac{8}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 8Ln\,|x-2| - \frac{4}{(x-2)}\right]_0^1 = \frac{11}{2} - 8Ln2$$

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par $f_n(x) = Ln\,((1+x^2)^n)$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe (on étudiera également la convexité de cette fonction).

La fonction est paire et sa dérivée est égale à $f_n^{'}(x) = \dfrac{2nx}{1+x^2}$, qui est strictement positive sur l'ensemble des réels positifs. Sa dérivée seconde est : $f_n^{''}(x) = \dfrac{2n(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. La fonction est concave pour *x*>1. Elle admet une branche parabolique dans la direction horizontale.

2. Calculer $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I_1 = \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = Ln2 - 2 + \pi/2$$

3. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. On a tout simplement $I_n = n I_1$

4. Etudier la suite réelle (x_n) définie par : $x_{n+1} = Ln(1+x_n^2)$ et $x_0 > 0$

Si cette suite converge vers une limite *l*, cette dernière vérifie : $l = Ln(1+l^2)$, soit *l*=0. Par ailleurs cette suite est à termes positifs et décroissante, donc elle converge vers 0.

En effet : $x_{n+1} - x_n = Ln(1+x_n^2) - x_n < 0$ (Etude brève de la fonction).

Exercice n° 3

1. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|z+1| = 1$

L'équation est équivalente à $(x+1)^2 + y^2 = 1$, les solutions se trouvent donc sur le cercle de centre $\omega(-1, 0)$ et de rayon 1.

2. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|2z+1| = 1$

L'équation est équivalente à $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$, soit $(x+1/2)^2 + y^2 = 1/4$ les solutions se trouvent donc sur le cercle de centre $\omega(-1/2, 0)$ et de rayon 1/2.

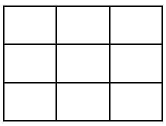
3. Soit $z_n \in C$, vérifiant l'équation : $|\alpha_n z_n + 1| = 1$, où (α_n) est une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}\, z_n$

L'équation est équivalente à $(\alpha_n x_n + 1)^2 + \alpha_n^2 y^2 = 1$, soit $(x_n + \frac{1}{\alpha_n})^2 + {y_n}^2 = \frac{1}{\alpha_n^2}$.

Quand $n \to \infty$, $z_n \to 0$

Exercice n° 4

On dispose d'un casier carré formé de trois lignes et de trois colonnes (donc de neuf cases), comme le montre le dessin suivant :



Dans ce jeu, on dispose de trois balles qui seront lancées une par une dans le casier. On gagne si les trois balles sont alignées sur une même ligne, colonne ou diagonale.

1. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans la case au centre du carré ?

La deuxième balle peut tomber n'importe où. Et il reste 1 chance sur sept pour la troisième,

donc 1/7.

2. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au coin du carré ?

On a 6 possibilités sur 8 pour la deuxième balle et une seule possibilité pour la dernière, soit 6/8*1/7=3/28

3. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au milieu d'un côté du carré ?

Pour la deuxième balle, on a 4 possibilités sur 8, d'où pour gagner : 4/8*1/7=1/14

4. Quelle est la probabilité de gagner ?

Les trois cas envisagés précédemment constituent l'ensemble des évènements possibles.

La probabilité de gagner est donc : 1/9*1/7+4/9*3/28+4/9*1/14=2/21

Exercice n° 5

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

1. Démontrer que *f* n'a pas de limite quand *x* tend vers zéro.

Par exemple, on considère la suite $x_n = \frac{2}{1+2n}$ qui tend vers 0 et

$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)\right) = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite.

2. Soit la fonction *g* définie sur *R* par : $g(x) = \begin{cases} x\,f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de *g* sur *R*.

- Pour $x \neq 0$, la fonction *g* est le produit de fonctions continues et dérivables, donc elle est continue et dérivable.

- En 0, on a : Pour $x \neq 0$, $|g(x)| \leq |x|$ qui tend vers 0 quand *x* tend vers 0. La fonction est donc continue en 0.

- En 0, on a : Pour $x \neq 0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ qui n'a pas de limite (question 1) et la fonction n'est pas dérivable en 0.

3. On considère la fonction h définie sur R par : $h(x) = g(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{f(x)}\right)$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$ et $h(x) = 0$ dans les autres cas.

Etudier la continuité de h sur R.

- Si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$, la fonction est bien définie et continue comme composée de fonctions continues.

- En 0, pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \in Z$, $h(x) = 0 \rightarrow h(0) = 0$. Pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$, $|h(x)| \leq |x| \rightarrow 0$ et la fonction est continue en 0.

- Pour $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \in Z$, posons $x = \dfrac{1}{n}$. On a, pour $x \neq 0$, $|h(x)| \leq |g(x)|$ et $\underset{x \to 1/n}{Lim}\, g(x) = g(1/n) = 0$

En conclusion h est continue sur R.

4. La fonction h est-elle dérivable en zéro ?

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{h(x)}{x} = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi/x)}\right)$ si $\dfrac{1}{x} \notin Z$ et sinon $\dfrac{h(x)}{x} = 0$.

Soit la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{h(x_n)}{x_n} = 0$, donc si la fonction h est dérivable en 0, alors $\dfrac{h(x)}{x}$ a une limite nulle en 0.

Soit la suite $y_n = \dfrac{3}{1+6n}$ et $\dfrac{h(y_n)}{y_n} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi/3+2n\pi)}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)$ qui ne tend pas vers 0 à l'origine, donc la fonction h n'est pas dérivable en 0.

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$

1. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=3/2$. Montrer que $1\le u_n \le 3/2$ pour tout n. On donne $e^{-1}\approx 0.368$ et $e^{-3/2}\approx 0.223$

Démonstration par récurrence : $u_0=3/2$ et on suppose que $1\le u_n\le 3/2$.

La dérivée de f est : $f'(x)=-e^{-x}(x-1)^2$ et cette fonction est décroissante sur $[1,3/2]$, donc $f(1)\ge f(u_n)\ge f(3/2)$ et $f(1)<3/2$; $f(3/2)>1$. Par conséquent $1\le u_{n+1}\le 3/2$.

2. Montrer que $\left|f'(x)\right|\le 1/2$ pour tout $x\in[1,3/2]$.

On a $f'(x)=-e^{-x}(1-x)^2$ et donc $\left|f'(x)\right|\le 1/4e\le 1/2$

3. Montrer que f admet un point fixe que l'on notera x_0.

Soit $y=f(x)-x$, alors $y'=f'(x)-1$ et $y''=e^{-x}(x-1)(x-3)$. A l'aide du tableau des variations y est strictement décroissante et continue avec $f(-1)>0$ et $f(1)<0$, il existe donc un unique $x_0\in[-1,1]$ (théorème des valeurs intermédiaires), tel que : $f(x_0)=x_0$.

4. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Si la suite est convergente, elle converge nécessairement vers x_0. La fonction f étant décroissante, la suite ne sera pas monotone. Il faut donc procéder autrement.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\left|f(u_n)-f(x_0)\right|\le \frac{1}{2}\left|u_n-x_0\right|$, soit $\left|u_{n+1}-x_0\right|\le\frac{1}{2}\left|u_n-x_0\right|$ et par conséquent $\left|u_{n+1}-x_0\right|\le\frac{1}{2^n}\left|u_0-x_0\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}\to 0$. La suite est donc convergente vers x_0.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien. On rappelle les relations

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

valables pour tout réel θ.

On rappelle enfin la limite classique :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx$.
2. Exprimer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{\cos x}$ comme une fonction de $\sin x$.
3. Donner la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1} + x$.

4. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la fonction $f(x) = \sin x \ln(x - x^2)$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = -3 + 3i$ sous forme trigonométrique.

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

7. Une urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard uniforme et avec remise deux fois une boule, et on fait le produit X des chiffres obtenus. Pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 4)$. Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

9. En utilisant la double inégalité (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

valable pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

10. Résoudre l'equation $x^3 + 6x^2 - x = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_a(x) = ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1$$

1. Dans cette partie, on pose $a = -1/3$ et pour simplifier on note $f_{-\frac{1}{3}} = f$.
   (a) Calculer f', et en déduire les intervalles de croissance de f.
   (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la valeur de $f(-2)$.
   (c) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport aux valeurs -2, -1 et 0.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.

2. On suppose désormais a quelconque.
   (a) Pour un point (x, y) tel que $x \neq \{0, 3\}$, montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $f_a(x) = y$ et donner la valeur de a.
   (b) Pour y fixé, résoudre en a l'équation $f_a(3) = y$.

(c) Déduire de ce qui précède que toutes les courbes représentatives des fonctions f_a, $a \in \mathbf{R}$, passent par deux points M_1 et M_2 du plan dont on donnera les coordonnées.

(d) Montrer que la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction de la variable réelle f définie par

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

1. Montrer que
$$\lim_{|x| \to \infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2.$$
(on pourra utiliser le rappel donné au début de l'énoncé avant l'exercice 1)
2. Donner le domaine de définition de f, calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier soigneusement ses éventuelles branches infinies.
3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si $t > 1$,
$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}\,dx = \frac{t^2 e^{\frac{2}{t}} - e^2}{2} + \int_1^t e^{\frac{2}{x}}\,dx.$$
6. En déduire l'ensemble des primitives de f.
7. Calculer l'aire du domaine du plan constitué des points (x, y) vérifiant $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1 = \ln 2 - 1/2$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}.$$
3. Pour x réel différent de -1 et n entier naturel non nul, montrer que
$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x}.$$
4. On pose
$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
Déduire de la question précédente que
$$I_n = (-1)^n(S_n - \ln 2).$$

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition
   $\mathcal{P}_n$ *: Si* n *nombres réels strictement positifs* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *vérifient* $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$*, alors* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.
   Pour ce faire, on suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n+1$ nombres réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_{n+1}$ vérifiant $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. On supposera les a_i rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.
   (a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.
   (b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.
   (c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.
   (d) En déduire que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, puis conclure soigneusement.
2. On considère maintenant n nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que
   $$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$
   (on pourra poser $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).
3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.
   (a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$.
   (b) Montrer que
   $$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Exercice 6 Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $a > 0$ et $b > 0$. On définit une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ par $z_0 \in \mathcal{Q}$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que $z_n \in \mathcal{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. En déduire qu'il existe un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, \pi/2[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,
   $$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$$
   et
   $$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$
4. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle $l \geq 0$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne dans laquelle on a mis n boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules jaunes, soit $n+8$ boules en tout.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note p_n la probabilité que ces deux boules aient la même couleur.
   (a) Donner la probabilité d'avoir sorti deux boules bleues, celle d'avoir sorti deux boules rouges et celle d'avoir sorti deux boules jaunes. En déduire la valeur de p_n
   (b) Calculer la limite de p_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?
2. On effectue maintenant une série de 10 tirages successifs de deux boules comme à la question précédente, en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors de ces 10 tirages, on a obtenu deux boules de même couleur.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité r_n d'avoir obtenu exactement 9 fois deux boules de même couleur dans ces tirages.
   (c) Calculer la limite de r_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Pensez-vous que l'on peut avoir confiance dans l'information, quel que soit le moyen utilisé pour la diffuser ?

Sujet n° 2

Comment pouvons-nous mieux protéger les démocraties pour éviter notamment qu'elles soient détournées par des hommes politiques hors de contrôle ?

Sujet n° 3

Selon vous, quels risques fait courir la remise en cause du principe de la stabilité des frontières issues de la colonisation adopté par l'Organisation de l'Union Africaine en 1964 ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f\ (x) = x - Ln\ (1 + x^2)$

1. Etudier les variations de f (on précisera son comportement aux infinis) et donner l'allure de son graphe.

2. Etudier la convexité de *f*.

3. Calculer $I = \int_0^1 f\ (x)\ dx$.

4. Etudier la suite réelle $(u_n)_{n \in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = Ln(1 + u_n^2)$ et $u_0 \neq 0$.

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n\ (x) = \frac{e^x}{(1 + x^2)^n}$$

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n* (on précisera son comportement à l'infini).

2. Tracer les graphes de f_1 et f_2 .

3. Déterminer $\underset{n \to \infty}{Lim} \int_1^2 f_n(x)\, dx$.

Exercice n° 3

On dispose de 12 cartes retournées sur une table (on ne voit pas la couleur de ces cartes). Ce dispositif contient 3 cartes de chaque couleur (cœur, carreau, pique et trêfle).

On retourne au hasard les cartes une par une et sans remise. Le jeu s'arrête quand on a tiré 3 couleurs identiques.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au troisième tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au quatrième tirage ?
3. Quel est le nombre maximal possible de tirages pour obtenir 3 cartes de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de 3 couleurs différentes au troisième tirage ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 cartes de 4 couleurs différentes au quatrième tirage ?

Exercice n° 4

1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n^2}{4}$ et $1 < u_0 \leq 2$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_{n+1} = v_n + Ln(u_n)$ et $v_0 > 0$. Etudier la convergence de cette suite $(v_n)_{n\in N}$.

3. On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = \dfrac{9+w_n^2}{6}$ et $w_0 = 0$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).

Exercice n° 5

Soit la fonction f_α définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f_α est prolongeable par continuité en zéro. On notera encore f_α la fonction ainsi prolongée en zéro.

2. Etudier la dérivabilité de f_α sur *R*.

3. Etudier la continuité de la fonction dérivée de f_α sur *R* (quand elle existe).

4. La fonction f_α est-elle deux fois continument dérivable en zéro ?

5. Résoudre l'équation $f_\alpha(x) = 0$

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x}$

1. Montrer que *f* admet une application réciproque, notée f^{-1}, définie sur *R*.

2. Donner un développement limité de f^{-1}, à l'ordre 5, au voisinage de zéro.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre de Messieurs Isaac GETZ et Laurent MARBACHE, intitulé : *L'ENTREPRISE ALTRUISTE*, paru en Octobre 2019 aux éditions Albin Michel.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Nous sommes partis à la recherche d'entreprises qui agissent avec un respect profond de leurs fournisseurs, de leurs clients, de leurs employés ou des territoires où elles opèrent. Chemin faisant, nous avons découvert une « espèce » nouvelle – qui existait avant cette enquête, bien entendu, mais dont les traits communs, la philosophie commune, n'avaient jamais été décrits. Nous avons nommé cette philosophie *l'entreprise altruiste*.

Nous avons identifié deux grandes idées que ces entreprises altruistes partageaient – même si elles sont toutes différentes dans leur mode de fonctionnement.

La première est celle – qu'elles ont toutes abandonnée – selon laquelle la seule façon d'obtenir un bon résultat économique consiste à le viser directement – mécaniquement – à l'aide de modèles économiques et de processus. Ces entreprises considèrent plutôt leurs résultats comme une *conséquence organique*, fruit d'un service authentique de tous ceux avec qui elles interagissent. L'idée n'est pas nouvelle en soi. Un philosophe chinois néoconfucianiste, Mencius (380-289 avant J.C.), a écrit ceci : « Essayer d'aider les pousses à grandir en tirant sur leur tige est non seulement futile, mais cela les abîme aussi. » C'est l'idée que plutôt qu'agir sur une chose, mieux vaut agir sur son environnement. Le bon résultat organique de cette action – son beau fruit – n'est alors pas déterministe, même s'il est fort probable.

La seconde idée – celle qu'elles ont toutes acceptée – est plus subtile : se concentrer sur leurs interlocuteurs, sur l'autre, *inconditionnellement*. L'idée paraît radicale, mais c'est ainsi que ces entreprises se prouvent d'abord à elles-mêmes, puis à leurs interlocuteurs, qu'elles sont altruistes et ne les instrumentalisent pas. Dans la vie, on ne dit pas à une personne avec qui on veut se lier d'amitié : « tu es un ami tant que ça ne me coûte pas trop, ou tant que ça me rapporte. » Certes, les relations des entreprises avec leurs interlocuteurs ne sont pas à priori des relations d'amitié. Mais elles ne doivent pas non plus nécessairement être réduites à de simples transactions économiques. C'est ce qu'ont décidé les entreprises que nous avons étudiées : elles essaient d'avoir des liens profondément authentiques avec toutes les personnes avec qui elles sont en rapport. D'ailleurs, certaines n'hésitent pas à qualifier d'amis leurs clients, leurs partenaires ou leurs fournisseurs. Pour reprendre la métaphore du jardin, pour qu'une pousse devienne une belle fleur, il ne faut pas seulement cesser d'agir sur elle et se concentrer sur son environnement. Il faut le faire de façon à ce que la fleur « ressente qu'on l'aime », comme nous l'a dit un dirigeant. Enfin, en vue de servir ces interlocuteurs sans condition, ces entreprises ont toutes été amenées à transformer leurs activités de cœur de métier, ces dernières étant, le plus souvent, subordonnées à l'intérêt économique. Sans une telle transformation, l'intérêt financier conditionne le service authentique des interlocuteurs de l'entreprise, voire l'emporte sur lui tout simplement.

Cependant, ces deux grandes idées – que la performance économique ne doit pas être une finalité, mais une conséquence organique de la finalité sociale ; et que cette finalité sociale du service de l'autre doit être poursuivie inconditionnellement à travers les activités de cœur de métier – ne sont pas faciles à adopter pour des dirigeants, tant les esprits sont conditionnés par l'impératif de rentabilité immédiate.

Quelques dizaines d'entreprises de toutes tailles et de tous secteurs d'activité sur trois continents démontrent quotidiennement qu'on peut bâtir sur de tels principes des organisations qui créent de la valeur sociale et qui, par là même, prospèrent économiquement. L'étude que nous avons faite de ces entreprises altruistes nous ont permis d'extraire des enseignements communs à leurs divers chemins de transformation, enseignements qui peuvent vous inspirer pour vous engager dans votre propre chemin.

Ces enseignements, les voici :

1- Assurez-vous que vous êtes un leader qui vit une seule vie et non pas deux – sa vie personnelle et sa vie professionnelle. Que vous vous comportez dans l'entreprise exactement comme avec vos amis, guidé par les mêmes convictions du service inconditionnel de tous ceux avec qui vous interagissez. Travaillez sur vous-même, si c'est nécessaire.
2- Prenez le temps de co-construire avec vos salariés une vision, une raison d'être de votre entreprise, tournée vers la création de valeur sociale. Cette valeur peut s'exprimer dans le service inconditionnel de vos clients, de vos fournisseurs, de vos partenaires, des communautés où votre entreprise opère, des jeunes de votre territoire ou encore des anciens à l'origine d'un savoir-faire local.
3- Arrêtez de viser la création de valeur économique. Oui, vous avez bien lu. Et ne tentez même pas de le faire en parallèle avec la création de valeur sociale. Tant que vous visez les résultats financiers, ceux-ci vont toujours conditionner le service de l'autre, service qui sera toujours sacrifié au moindre tassement des résultats. « A chaque baisse de résultat, dit Odd Reitan P.D.G. du grand distributeur norvégien Reitan, revenez encore plus fort vers [vos] valeurs. »

4- Transformez avec les salariés les pratiques organisationnelles, et plus important encore, les activités de cœur de métier de votre entreprise pour qu'elle puisse servir l'autre inconditionnellement. Le mode de fonctionnement de votre entreprise doit être structurellement conçu pour la création de valeur sociale – et non pas pour créer de la valeur économique. Avec le temps cependant et parfois rapidement, cette dernière sera au rendez-vous sans que vous ayez besoin de la rechercher.

Découvrons à présent ces entreprises très différentes qui redéfinissent l'essence même de l'entreprise capitaliste.

S'enrichir en donnant tout

[…] « Comment devenir millionnaire *grâce* à des actions qui mènent à un monde meilleur ? » (Peter Drucker, journaliste)

En d'autres termes, notre thèse est que l'entreprise peut être une formidable force de progrès social et, grâce à cela, formidablement réussir. Or, comment une entreprise peut-elle se mettre au service de la société, alors qu'elle est structurellement au service de son propre intérêt économique ? Cette question n'est pas récente.

Entre l'apparition au début du XIXe siècle de l'entreprise industrielle moderne et le début du XXIe siècle, le niveau de vie moyen des pays industrialisés a été multiplié par vingt. Mais nous savons aussi que ce progrès social a été accompagné par de multiples souffrances humaines. A l'aube de la révolution industrielle au Royaume uni, seuls des marginaux et des paysans ruinés ou expropriés rejoignaient les usines, tant les conditions de travail y étaient dégradantes. Aujourd'hui, dans les pays développés, ces conditions se sont largement améliorées, bien qu'il reste encore de nombreuses activités pénibles physiquement. La souffrance la plus répandue a changé de registre : elle est devenue non plus physique, mais psychologique, que ce soit du fait du stress au travail ou encore de la démotivation due au manque de contrôle que les salariés ont sur leurs tâches. Cette souffrance psychologique n'est pourtant pas une fatalité. Des centaines d'entreprises dites libérées, ont démontré qu'il est possible de se transformer pour donner de la liberté et de la responsabilité d'action à tous les salariés, contribuant ainsi à leur bien-vivre

Toutefois, l'impact de l'entreprise sur ceux qui y travaillent – si important qu'il soit – ne constitue pas sa seule dimension sociale. A travers ses activités économiques, l'entreprise impacte également ses clients, ses fournisseurs, ses partenaires, les communautés où elle opère, les jeunes de son territoire, les anciens qui ont fondé le savoir-faire local – tous ses interlocuteurs externes, faisant partie de la société, au sens large.

Historiquement, l'entreprise a eu une incidence positive sur la plupart d'entre eux. Ainsi, en tant que clients, nous sommes tellement habitués à tous les objets qui nous facilitent la vie de tous les jours que nous oublions parfois que ce sont des entreprises qui les ont produits et vendus à un prix accessible au plus grand nombre. Les filatures qui sont apparues à la fin du XVIIIe siècle, ont rendu abordable l'habillement de qualité. Les faïenceries qui datent de la même époque, ont rendu abordable la vaisselle jusqu'alors réservée aux seuls fortunés. Les compagnies de canaux, puis de chemins de fer, ont fait de même pour le transport longue distance ; les imprimeries et la presse rotative l'ont fait pour les journaux ; les fabricants de crayons, suite à l'invention de la mine par Nicolas Jacques Conté, l'ont fait pour les instruments d'écriture – des milliers de produits et de services qui ont contribué à améliorer la vie de nos sociétés. Mais les clients ne sont pas les seuls à avoir bénéficié de l'impact socialement positif de l'activité de l'entreprise.

Fabriquer un produit utile au client suscite immédiatement l'apparition d'un autre type d'interlocuteur indispensable : les fournisseurs. La fabrication d'un objet aussi simple qu'un crayon en bois nécessite des dizaines de fournisseurs allant de mines de graphite, de fabricants de poudre d'argile, de bois ou de peinture jusqu'à ceux nécessaires pour l'anneau d'aluminium et la gomme qui couronnent tout crayon qui se respecte. D'une manière générale, les entreprises ont toujours contribué à la subsistance, voire à la prospérité, d'un grand tissu d'artisans, d'agriculteurs et d'autres entreprises fournisseurs. […]

Les entreprises que vous allez découvrir dans ce livre font plus que répondre par l'affirmative à cette question – elles le démontrent jour après jour. Dans des secteurs allant de la finance, de l'industrie et de la santé à l'agroalimentaire à la grande distribution, ces entreprises ont choisi de se mettre progressivement au service de tous leurs interlocuteurs sans subordonner ce choix à leurs propres intérêts économiques. Elles servent ces « autres » de l'entreprise sans condition. Ainsi, elles sont devenues des entreprises altruistes – un mot qui vient du latin *alter* (en français, « l'autre »). Étonnamment – ou plutôt naturellement -, en devenant une force de progrès social sans condition, elles ont toutes connu et connaissent encore un remarquable développement économique. En une phrase, l'entreprise altruiste est celle dont l'essentiel des activités sert ses interlocuteurs externes de façon inconditionnelle et qui, grâce à cette orientation radicale, prospère économiquement. […]

Servir inconditionnellement l'autre, c'est agir pour son autonomie

Beaucoup parmi nous aspirent à servir, aider, assister ceux qui vivent fragilisés. Le chemin d'ailleurs paraît tout tracé. Quand nous avons plus de moyens, d'expérience, d'argent et que nous faisons face à quelqu'un qui n'en a pas, l'action la plus naturelle est de les partager – de donner sans la moindre contrepartie. Souvent une telle action est appelée altruiste. Grâce à elle, la personne qui a bénéficié de notre assistance va peut-être se porter mieux. Pour notre part, on se sent bien en ayant accompli ce qui est aussi appelé une bonne action. Il ne s'agit pas que d'actions individuelles. Les Etats ou les entreprises, à travers des fondations ou directement, financent de nombreux organismes ou ONG qui viennent en aide aux plus fragiles

Et pourtant, malgré tout le soulagement que cela apporte à des millions de personnes, la plupart des actions de bienfaisance ne changent pas fondamentalement la situation difficile dans laquelle ils se trouvent. Pour le dire franchement, beaucoup d'actions envers les personnes fragiles peuvent sembler « donner du poisson à celui qui a faim, plutôt que de lui apprendre à pêcher ». L'approche de microcrédit du Prix Nobel Muhammad Yunus vise le contraire : permettre aux pauvres de devenir des entrepreneurs pour subvenir à leurs propres besoins et rejoindre un jour les classes moyennes. L'un de nous a créé un programme semblable au Chili et a pu voir sur le terrain les bienfaits de cette approche. […]

Les entreprises altruistes que nous avons décrites sont engagées précisément dans ce dessein – elles font des personnes fragiles des interlocuteurs économiques légitimes. On comprend mieux aussi pourquoi cela prend bien plus de temps que de simplement donner. Il faut du temps pour apprendre à une personne à bien pêcher, puis pour créer un système qui lui permette de financer l'achat de ses outils de pêche et de les rembourser plus tard. Donner un poisson ou signer un chèque pour en acheter un, est un acte qui a un effet immédiat, mais une fois le poisson consommé, la personne se retrouve exactement dans le même état – voire pire, car elle s'attend maintenant à ce que quelqu'un lui fournisse un autre poisson. […]

Selon le proverbe indien, « tout ce qui n'est pas donné est perdu ». Certes, le proverbe a raison : lorsqu'on laisse passer une chance de rendre service à l'autre, l'occasion est perdue et ne reviendra jamais. Cependant, si notre façon de donner rend l'autre dépendant, alors cela va le desservir. Il s'agit donc de donner à l'autre de façon qu'il n'ait plus besoin de notre aide.

Donner l'occasion au meilleur de se révéler chez chacun

Tous ces exemples sont remarquables, tant il est important de permettre aux personnes fragiles de trouver les moyens de ne plus vivre dans la dépendance et la marginalité. Cependant, nos entreprises altruistes se sont mises également au service inconditionnel de tous leurs interlocuteurs indépendamment de leur degré de fragilité. Elles l'ont fait de la même manière fondamentale : en transformant leur propre entreprise et en y transformant les activités de cœur de métier pour servir l'autre sans condition. […]

C'est justement parce que les personnes fragiles se trouvent intégrées dans les rapports économiques des entreprises altruistes ou en interaction avec les activités économiques où l'entreprise a sa plus grande compétence que la portée sociale de ces entreprises est forte. Certes les entreprises altruistes ne pourront pas résoudre tous les problèmes sociaux de nos pays, mais quand elles s'attaquent à un problème spécifique, elles sont très efficaces, car elles utilisent tout leur savoir-faire. Cette efficacité provient aussi de leur capacité à s'y employer sans idéologie, un être humain à la fois. Chaque résultat est important.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien. On rappelle les relations

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1+\cos\theta}{2}\\ \sin\theta &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

valables pour tout réel θ.

On rappelle enfin la limite classique :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Exercice 1

1. Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx$.

   En posant $u = \cos x$, il vient $u' = -\sin x$ et

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -u^2du \\ &= \left[-\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{12}.\end{aligned}$$

2. Exprimer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{\cos x}$ comme une fonction de $\sin x$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3\sin^2 x\cos^2 x + \sin^3 x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{3\sin^2 x(1-\sin^2 x) + \sin^4 x}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x(3 - 2\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}\end{aligned}$$

3. Donner la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1} + x$.
Tout d'abord, $2x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x. De plus,

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+x+1} + x &= |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \\ &= x\left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

dès que $x < 0$. Par passage à la limite, comme $1 - \sqrt{2} < 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la fonction $f(x) = \sin x \ln(x - x^2)$.
Pour $0 < x < 1$, on a

$$f(x) = \sin x \ln(x) + \sin x \ln(1-x).$$

Le second terme du membre de droite tend vers 0, et pour le premier on a

$$\sin x \ln(x) = \frac{\sin x}{x} x \ln x.$$

$\sin x/x$ tend vers 1 quand $x \to 0$, et par croissance comparée $x \ln x$ tend vers 0, donc finalement la limite recherchée vaut 0.

5. Ecrire le nombre complexe $z = -3 + 3i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

On remarque que f est une fonction paire définie sur $\mathbf{R}$ privé de l'origine. On peut donc faire l'étude de f sur $]0, +\infty[$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = 0$.

7. Une urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard uniforme et avec remise deux fois une boule, et on fait le produit X des chiffres obtenus. Pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

X prend la valeur 1 si la boule numérotée 1 est tirée 2 fois, c'est-à-dire avec probabilité 1/9. De même, X prend la valeur 4 si la boule numérotée 2 est tirée 2 fois, donc là aussi avec probabilité 1/9. X vaut 2 si on a tiré soit 1 puis 2, soit 2 puis 1, donc avec probabilité 2/9. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire avec probabilité $1 - 1/9 - 1/9 - 2/9 = 5/9$, X vaut 0. L'espérance de X est donc égale à $0 \times 5/9 + 1 \times 1/9 + 2 \times 2/9 + 4 \times 1/9 = 1$.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 4)$. Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 4).$$

Cette expression est de signe constamment positif car l'équation $x^2 - 2x + 4 = 0$ n'admet pas de racine réelle. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante. Si elle convergeait, sa limite vérifierait $l^2 - 2l + 4 = 0$ or on vient de voir que c'était impossible : la suite diverge donc vers $+\infty$.

9. En utilisant la double inégalité (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

valable pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}.$$

D'après la double inégalité de l'énoncé, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

soit

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}$$

et d'après le théorème de comparaison, la suite de terme général u_n converge vers 1.

10. Résoudre l'equation $x^3 + 6x^2 - x = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
On a soit x=0, soit $x^2 + 6x^2 - 1 = 0$, équation qui admet les racines réelles $-3 - \sqrt{10}$ et $-3 + \sqrt{10}$. Les racines complexes sont les mêmes que les racines réelles.

Exercice 2 Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_a(x) = ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1$$

1. Dans cette partie, on pose $a = -1/3$ et pour simplifier on note $f_{-\frac{1}{3}} = f$.
   (a) Calculer f', et en déduire les intervalles de croissance de f.
   On a donc
   $$f(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 1$$
   d'où
   $$f'(x) = -x^2 - 4x + 1$$
   qui s'annule en $x_1 = -2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{5}$, et est de signe négatif au voisinage de l'infini. Par suite, f est décroissante sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$, et croissante sur $]x_1, x_2[$.

   (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la valeur de $f(-2)$.
   Il vient immédiatement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-2) = -19/3$.
   (c) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport aux valeurs -2, -1 et 0.
   f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, x_1[$ avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, puis strictement croissante sur $]x_1, x_2[$. Comme $x_1 < -2 < x_2$, on en déduit que $f(x_1) < 0$, puis d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution z_1 à l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\infty, x_1[$, avec donc $z_1 < -2$.
   On a par ailleurs $x_1 < -1 < 0 < x_2$, donc comme $f(-1) = -5/3 < 0$ et$f(0) = 1$, en reproduisant le raisonnement précédent on montre l'existence d'une unique solution z_2 sur $]x_1, x_2[$, avec $-1 < z_2 < 0$.
   Enfin, comme $f(x_2) > f(0) = 1 > 0$, il existe de même une unique solution z_3 sur $]x_2, +\infty[$, et on a donc $z_3 > 0$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
   Ils se déduisent des questions précédentes.

2. On suppose désormais a quelconque.
   (a) Pour un point (x, y) tel que $x \neq \{0, 3\}$, montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $f_a(x) = y$ et donner la valeur de a.
   $f_a(x) = y$ ssi $ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1 = y$ ssi $a(x^3 - 3x^2) = y + 3x^2 - x - 1$. Par suite, si $x \neq \{0, 3\}$, la solution unique a vaut

$$a = \frac{y + 3x^2 - x - 1}{x^2(x-3)}.$$

(b) Pour y fixé, résoudre en a l'équation $f_a(3) = y$.

On remarque que $f_a(3) = -23$ pour tout a. Par suite l'équation considérée n'a pas de solution si $y \neq -23$, et admet $\mathbf{R}$ comme ensemble de solutions si $y = -23$.

(c) Déduire de ce qui précède que toutes les courbes représentatives des fonctions f_a, $a \in \mathbf{R}$, passent par deux points M_1 et M_2 du plan dont on donnera les coordonnées.

On remarque que $f_a(0) = 1$ pour tout a, donc toutes les courbes passent par le point M_1 de coordonnées $(0, 1)$. D'après la question précédente, elles passent également toutes par le point M_2 de coordonnées $(3, -23)$.

(d) Montrer que la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{R}$.

$f_a'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ passe par le point de coordonnées $(0, 1)$ et admet 1 comme coefficient directeur : elle ne dépend donc pas de a.

Exercice 3

On considère la fonction de la variable réelle f définie par

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

1. Montrer que

$$\lim_{|x|\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2.$$

(on pourra utiliser le rappel donné au début de l'énoncé avant l'exercice 1)

Posons $y = 2/x$. On a alors

$$\lim_{|x|\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \lim_{y\to 0} \frac{2}{y}(e^y - 1) = 2$$

d'après le rappel donné au début de l'énoncé.

2. Donner le domaine de définition de f, calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier soigneusement ses éventuelles branches infinies.

f est définie sur $\mathbf{R}$ privé de 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs négatives, $2/x$ tend vers $-\infty$ donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 0 et $f(x)$ également.

Quand x tend vers 0 par valeurs positives, $2/x$ tend vers $+\infty$ donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers $+\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$: on a donc ici une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, $2/x$ tend vers 0 donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 1. Par suite $f(x)$ tend vers $+\infty$ si $x \to +\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$ si $x \to -\infty$. On a donc deux branches infinies à étudier. Il est clair que $f(x)/x$ tend vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. On a alors

$$f(x) - x = x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}.$$

D'après la première question, $x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$ tend vers 2 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, et on a vu également que $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 1. Par suite $f(x)-x$ tend vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, et on a donc une unique asymptoque oblique d'équation $y=x+1$.

3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.

   Un calcul standard montre que la dérivée de f vaut

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}>0.$$

   f est donc croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Le tableau de variation se déduit alors des résultats précédents.

4. Tracer la courbe représentative de f.

   Elle se déduit également des résultats précédents, en remarquant que, par comparaison des fonctions puissances et exponentielles, la limite de f' à gauche de 0 est nulle.

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si $t>1$,

$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}dx=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}+\int_1^t e^{\frac{2}{x}}dx.$$

   On pose $u'(x)=x$ et $u(x)=x^2/2$ d'une part, $v(x)=e^{\frac{2}{x}}$ et $v'(x)=-2e^{\frac{2}{x}}/x^2$ d'autre part, la formule d'intégration par parties donne

$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}dx=\left[\frac{x^2}{2}e^{\frac{2}{x}}\right]_1^t-\int_1^t\frac{x^2}{2}\frac{-2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}dx$$

   d'où le résultat demandé.

6. En déduire l'ensemble des primitives de f.

   D'après ce qui précède,

$$\int_1^t(x-1)\,e^{\frac{2}{x}}dx=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}.$$

   Les primitives de f sont donc de la forme $F(t)=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}+C$ où C est une constante réelle.

7. Calculer l'aire du domaine du plan constitué des points (x,y) vérifiant $1\leq x\leq 2$ et $0\leq y\leq f(x)$.

   En reprenant les notations ci-dessus, l'aire demandée vaut $F(2)-F(1)=\frac{4e-e^2}{2}\simeq 1,74$.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1=\ln 2-1/2$.

$$I_0=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx=1-\int_0^1\frac{dx}{1+x}=1-\ln 2$$

   et

$$I_1=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^2-1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_0^1(x-1)dx+\ln 2$$

   d'où le résultat demandé.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}.$$

I_n est l'intégrale d'une fonction positive entre 0 et 1, donc elle est positive. L'inégalité de droite découle du fait que $x+1 \geq 1$ pour $x \in [0,1]$.

3. Pour x réel différent de -1 et n entier naturel non nul, montrer que

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x}.$$

Le début du terme de gauche est la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$: elle vaut donc $(1-(-1)^{n+1}x^{n+1})/1+x$. Le résultat demandé s'obtient alors immédiatement.

4. On pose

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Déduire de la question précédente que

$$I_n = (-1)^n (S_n - \ln 2).$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1, il vient :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \ln 2 = (-1)^{n+2} I_n.$$

Le résultat demandé s'obtient en multipliant les deux membres de cette équation par $(-1)^n$, et en remarquant que $(-1)^{2n-2} = 1$.

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

I_n tend vers 0 d'après la question 2., donc S_n tend vers $\ln 2$ quand $n \to \infty$.

Exercice 5

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition

$\mathcal{P}_n$: *Si n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \cdots, a_n$ vérifient $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.*

Pour ce faire, on suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n+1$ nombres réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_{n+1}$ vérifiant $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. On supposera les a_i rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.

(a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.

Si $a_1 > 1$, alors tous les termes de la suite sont plus grands que 1 (puisqu'on les a rangés par ordre croissant), et donc leur produit est strictement supérieur à 1. De même, si $a_n < 1$, tous les termes de la suite sont strictement plus petits que 1, et comme ils sont tous positifs, leur produit est lui-même strictement inférieur à 1

(b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.

On a $b_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, et comme $b_1, a_2, \cdots, a_n$ sont n nombres strictement positifs, d'après l'hypothèse $\mathcal{P}_n$, leur somme est supérieure ou égale à n, ce qui est le résultat demandé.

(c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.
On a donc

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}n &= b_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_1 - b_1 \\ &\geq n + a_{n+1} + a_1 - a_1 a_{n+1} \\ &= n + 1 + a_{n+1} + a_1 - a_1 a_{n+1} - 1 \\ &= n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

(d) En déduire que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, puis conclure soigneusement.
D'après la première question, $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq 0$, et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée d'après l'inégalité que nous venons de montrer. Par ailleurs il est clair que $\mathcal{P}_1$ est vérifiée (si $a_1 = 1$, alors $a_1 \geq 1$) : comme nous avons montré que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, nous avons bien prouvé par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

2. On considère maintenant n nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(on pourra poser $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).
En utilisant l'indication de l'énoncé, on s'aperçoit que le produit des a_k vaut 1, donc d'après la question précédente la somme des a_k est supérieure à n. Autrement dit,

$$\frac{x_1}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}} + \cdots + \frac{x_n}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}} \geq n$$

ou encore

$$\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

d'où le résultat.

3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.

(a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$.
En additionnant les puissances, on trouve $0 + 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$ et donc le résultat demandé est x^n

(b) Montrer que

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n + 1}$$

Le résultat provient directement de l'inégalité vue à la question précédente :

$$(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}} \leq \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}}{2n + 1}$$

et du fait que $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}} = x^n$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $a > 0$ et $b > 0$. On définit une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ par $z_0 \in \mathcal{Q}$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que $z_n \in \mathcal{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$.

   On fait un raisonnement par récurrence : l'énoncé nous dit que $z_0 \in \mathcal{Q}$, et si $z_n \in \mathcal{Q}$, en posant $z_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n positifs, on a $b_{n+1} = b_n/2 > 0$ et $a_{n+1} = (a_n + |z_n|)/2 > 0$, d'où $z_{n+1} \in \mathcal{Q}$ et le résultat.

2. En déduire qu'il existe un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, \pi/2[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$.

   Il existe de toutes façons un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, 2\pi[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$. Comme $z_n \in \mathcal{Q}$, $\theta_n \in]0, \pi/2[$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$$

   et

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \rho_n\cos\theta_n + i\rho_n\sin\theta_n\right). \tag{1}$$

   Par suite,

$$\begin{aligned}
\rho_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(\rho_n^2(1+\cos\theta_n)^2 + \rho_n^2\sin^2\theta_n\right)\\
&= \rho_n^2\left(\frac{2+2\cos\theta_n}{4}\right)\\
&= \rho_n^2\cos^2(\theta_n/2)
\end{aligned}$$

   d'après le rappel donné au début de l'énoncé. Comme $z_n \in \mathcal{Q}$, $\cos(\theta_n/2) > 0$, on a donc $\rho_{n+1} = \rho_n\cos(\theta_n/2)$.

   En utilisant ce résultat et l'expression de z_{n+1} donnée en (1), on obtient

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\rho_n(1+\cos\theta_n) + i\rho_n\sin\theta_n\right)\\
&= \rho_n\cos^2(\theta_n/2) + i\rho_n\sin(\theta_n/2)\cos(\theta_n/2)\\
&= \rho_{n+1}(\cos(\theta_n/2) + i\sin(\theta_n/2))
\end{aligned}$$

   d'où on conclut que $\theta_{n+1} = \theta_n/2$.

4. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle $l \geq 0$.

   D'après la question précédente, la suite de terme général ρ_n est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite réelle $l \geq 0$. De plus la suite de terme général θ_n converge évidemment vers 0. Par suite z_n converge vers $l(\cos 0 + i\sin 0) = l$ d'où le résultat.

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne dans laquelle on a mis n boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules jaunes, soit $n+8$ boules en tout.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note p_n la probabilité que ces deux boules aient la même couleur.

   (a) Donner la probabilité d'avoir sorti deux boules bleues, celle d'avoir sorti deux boules rouges et celle d'avoir sorti deux boules jaunes. En déduire la valeur de p_n

   Les boules étant tirées simultanément, il y a $(n+8)(n+7)/2$ paires possibles de boules tirées, dont n(n-1)/2 permettent de sortir 2 boules bleues. La probabilité d'avoir sorti deux boules bleues est donc de $\dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$. De même, la probabilité d'avoir sorti deux boules rouges est $\dfrac{20}{(n+8)(n+7)}$ et la probabilité d'avoir sorti deux boules jaunes est $\dfrac{6}{(n+8)(n+7)}$.

   On en déduit que $p_n = \dfrac{n(n-1)+26}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) Calculer la limite de p_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?

   La limite de p_n est celle des termes de rang principal dans la fraction ci-dessus, soit 1. C'est intuitif car plus n est grand, plus les boules bleues sont majoritaires dans l'urne et les chances de tirer une boule d'une autre couleur dans l'urne tendent vers 0.

2. On effectue maintenant une série de 10 tirages successifs de deux boules comme à la question précédente, en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors de ces 10 tirages, on a obtenu deux boules de même couleur.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   La loi de X est une loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) Calculer la probabilité r_n d'avoir obtenu exactement 9 fois deux boules de même couleur dans ces tirages.

   Par définition de la loi binomiale,

$$r_n = 10 \times \left(\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right)^9 \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right).$$

   (c) Calculer la limite de r_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?

   On a toujours $0 \leq \left(\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right)^9 \leq 1$, et quand $n \to +\infty$, $\left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right) \to 0$. Par suite, r_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela signifie que l'hégémonie des boules bleues est telle que la possibilité de tirer autre chose que systématiquement 2 boules bleues sur 10 tirages est asymptotiquement nulle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

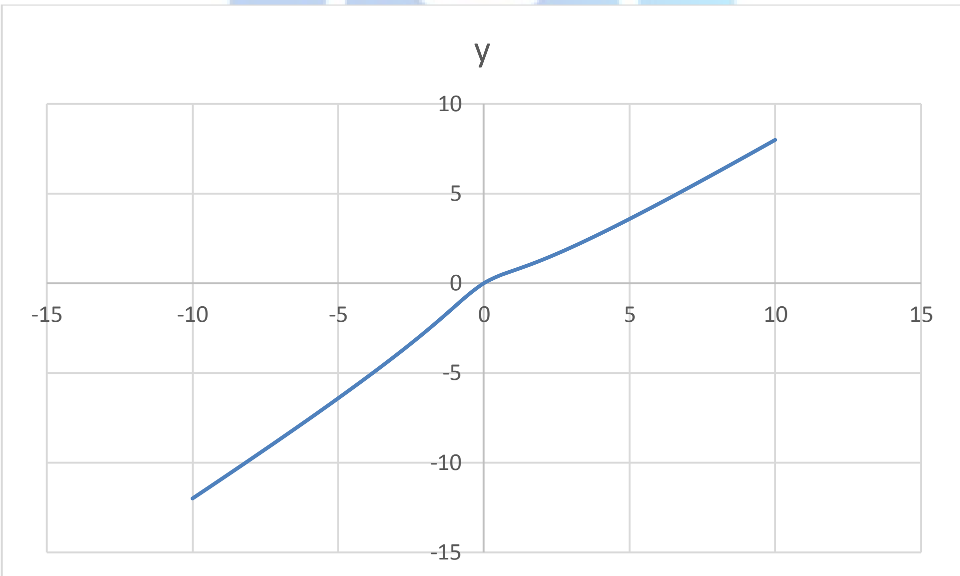
Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f\ (x) = x - Ln\ (1+x^2)$

1. Etudier les variations de f (on précisera son comportement aux infinis) et donner l'allure de son graphe.

La dérivée de *f* est égale à : $f^{'}(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$. La fonction est donc strictement croissante de *R* sur *R* avec une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice.



2. Etudier la convexité de *f*.

La dérivée seconde est égale à : $f^{''}(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$. La fonction est donc convexe pour *x*<-1 et *x*>1 et par conséquent concave entre -1 et 1.

3. Calculer $I = \int_0^1 f\ (x)\ dx$.

Soit $J = \int_0^1 Ln\ (1+x^2)\ dx$ que l'on intègre par parties, à savoir :

$J = \left[x\, Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{x^2}{1+x^2}\ dx = Ln2 - 2\left[x - Arctg\ x\right]_0^1 = Ln2 - 2(1-\frac{\pi}{4})$. Par conséquent :

$I = \frac{5}{2} - Ln2 - \frac{\pi}{2}$

4. Etudier la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = Ln(1+u_n^2)$ et $u_0 \neq 0$.

Si la suite converge vers une limite *l*, cette dernière est solution de l'équation : $l = Ln(1+l^2)$ ou encore $f\ (l) = 0$, soit *l*=0 ;

Par ailleurs $\forall n > 0, u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n = - f\ (u_n) < 0$. La suite est donc décroissante et minorée, et elle converge vers 0.

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n\ (x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^n}$$

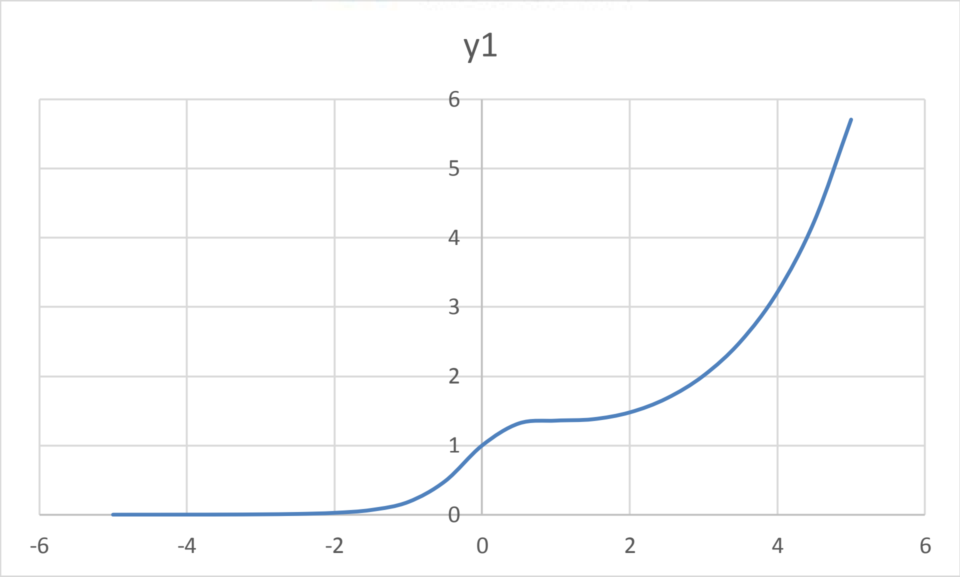
1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n* (on précisera son comportement à l'infini).

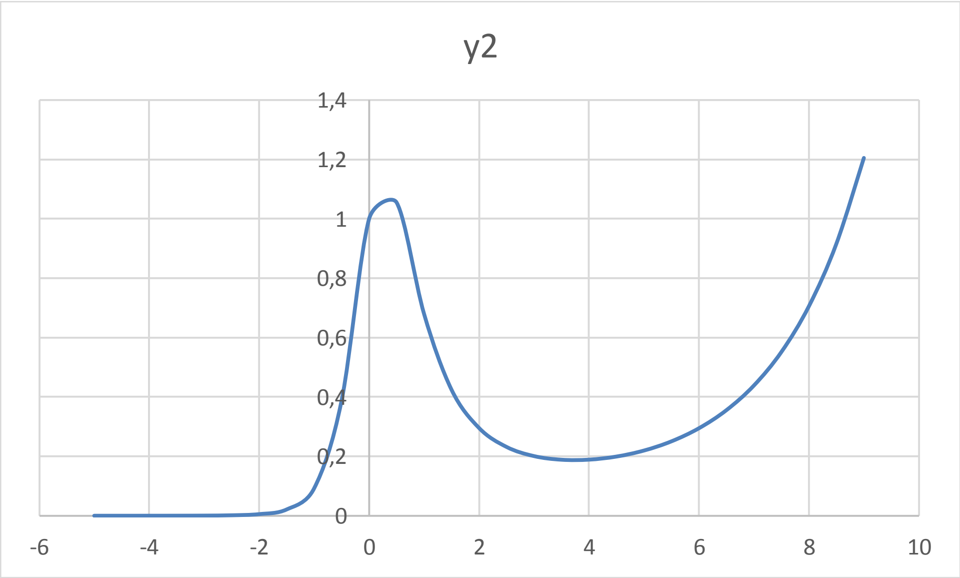
La dérivée est égale à : $f_n^{'}\ (x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^{n+1}}(x^2 - 2nx + 1)$

Si *n*=1, $f_1^{'}\ (x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}(x-1)^2 \geq 0$ et la fonction est strictement croissante de *R* sur R^+, avec une banche parabolique dans la direction verticale à plus l'infini et l'axe des abscisses comme asymptote à moins l'infini. Son graphe admet une tangente horizontale en 1.

Si *n*>1, la dérivée s'annule pour $x = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$, la fonction est croissante pour $x < n - \sqrt{n^2 - 1}$ et $x > n + \sqrt{n^2 - 1}$ et décroissante entre ces deux valeurs.

2. Tracer les graphes de f_1 et f_2 .





3. Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx$.

Sur cet intervalle, on a : $0 < f_n(x) < \dfrac{e^2}{2^n} \to 0$, donc la limite est nulle.

Exercice n° 3

On dispose de 12 cartes retournées sur une table (on ne voit pas la couleur de ces cartes). Ce dispositif contient 3 cartes de chaque couleur (cœur, carreau, pique et trêfle).
On retourne au hasard les cartes une par une et sans remise. Le jeu s'arrête quand on a tiré 3 couleurs identiques.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au troisième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte,
- La deuxième carte doit être de la même couleur que la première, soit une probabilité de 2/11
- Pour la troisième, une probabilité égale à : 1/10

Au total, la probabilité est : $\dfrac{2}{11} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{55}$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au quatrième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte, notons A cette première couleur et B pour les autres couleurs.
3 possibilités pour arrêter le jeu au quatrième tirage :
AABA avec une probabilité de $\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
ABBB avec une probabilité de $\frac{9}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
ABAA avec une probabilité de $\frac{9}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
Au total, la probabilité est de 3/55

3. Quel est le nombre maximal possible de tirages pour obtenir 3 cartes de la même couleur ?
Le nombre maximal est obtenu quand on a déjà tiré deux cartes de chacune des quatre couleurs, soit donc au 9ème tirage.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de 3 couleurs différentes au troisième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte,
- La deuxième carte doit être couleur différente, soit une probabilité de 9/11
- Pour la troisième, de couleur différente aux deux premières, une probabilité égale à : 6/10
Au total, la probabilité est : $\frac{9}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{27}{55}$
5. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 cartes de 4 couleurs différentes au quatrième tirage ?

La probabilité est : $\frac{9}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{9}{55}$

Exercice n° 4

1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=\frac{3+u_n^2}{4}$ et $1<u_0\le 2$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).
On vérifie aisément par récurrence que : $1<u_n\le 2$ pour tout *n*.
De plus $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-3)}{4}<0$. La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation $l=\frac{3+l^2}{4}$ et on trouve *l*=1.

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_{n+1}=v_n+Lnu_n$ et $v_0>0$. Etudier la convergence de cette suite $(v_n)_{n\in N}$.
On a $v_{n+1}-v_n=Lnu_n\ge 0$, car $1<u_n$. La suite est donc croissante. Si elle était majorée, par exemple : $v_n\le M$, alors $v_{n+1}\le M+Lnu_n$ et ce majorant est plus grand que *M*. La suite n'est donc pas majorée et elle tend vers plus l'infini.

3. On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = \dfrac{9+w_n^2}{6}$ et $w_0 = 0$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).

La suite est à termes positifs et si elle converge vers une limite l alors cette limite vérifie : $l = \dfrac{9+l^2}{6}$, à savoir l=3. On vérifie par récurrence que $w_n < 3$ et que $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(3-w_n)^2}{6} \geq 0$. La suite étant croissante et majorée, elle converge vers l=3.

Exercice n° 5

Soit la fonction f_α définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f_α est prolongeable par continuité en zéro. On notera encore f_α la fonction ainsi prolongée en zéro.

On a : $\left|x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x^\alpha| \to 0$ quand x tend vers zéro. Par conséquent, on peut prolonger par continuité en posant $f_\alpha(0) = 0$.

2. Etudier la dérivabilité de f_α sur R.

La fonction est indéfiniment dérivable (comme composée de fonctions élémentaires indéfiniment dérivables) sur R^*. Les difficultés se posent uniquement à l'origine (idem pour les deux questions suivantes).

Rappelons que les fonctions $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'ont pas de limite en zéro.

On a : $\underset{0}{Lim}\dfrac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\, x^{\alpha-1}\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ si $\alpha > 1$. La fonction est donc dérivable en zéro avec une dérivée nulle si $\alpha > 1$, sinon elle n'est pas dérivable.

3. Etudier la continuité de la fonction dérivée de f_α sur R (quand elle existe).

Il faut $\alpha > 1$.

En dehors de zéro, la dérivée est : $f_\alpha^{'}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}\sin(\dfrac{1}{x}) - x^{\alpha-2}\cos(\dfrac{1}{x})$.

Cette dérivée tend vers zéro pour $\alpha > 2$ et elle est donc continue en zéro. Sinon la fonction dérivée n'est pas continue.

4. La fonction f_α est-elle deux fois continument dérivable en zéro ?

Cherchons d'abord la dérivée seconde en zéro :

$$\underset{0}{Lim}\frac{f_\alpha^{'}(x) - f_\alpha^{'}(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\ \alpha\, x^{\alpha-2}\sin(\frac{1}{x}) - x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) = 0 = f_\alpha^{''}(0) \text{ si } \alpha > 3$$

Puis pour $x \neq 0$,

$$f_\alpha^{''}(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin(\frac{1}{x}) - \alpha\, x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) - (\alpha-2)x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) + x^{\alpha-4}\sin(\frac{1}{x})$$

On a : $\underset{0}{Lim}\, f_{\alpha}^{''}(x) = 0 = f_{\alpha}^{''}(0)$ si $\alpha > 4$.

En conclusion la fonction est de deux fois continument dérivables ssi $\alpha > 4$

5. Résoudre l'équation $f_{\alpha}(x) = 0$. On obtient $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{k\pi}$.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x}$

1. Montrer que *f* admet une application réciproque, notée f^{-1}, définie sur *R*.
On va montrer que *f* est continue et strictement croissante, donc bijective et elle admet alors une application réciproque. On rappelle que $e^{u} \approx 1 + u + \dfrac{u^2}{2}$ au voisinage de 0.

- La fonction est continue $\forall x \neq 0$ et en zéro : $\underset{0}{Lim}\ f(x) = \underset{0}{Lim}\dfrac{x^2}{x} = 0 = f(0)$

- Dérivabilité de *f* en zéro :

$\underset{0}{Lim}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\dfrac{f(x)}{x} = \underset{0}{Lim}\dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} = 1 = f^{'}(0)$ et la fonction dérivée est aussi continue.

- Monotonie de *f* :

On a : $f^{'}(x) = \dfrac{(2x^2 - 1)e^{(x^2)} + 1}{x^2}$ ou encore $x^2 f^{'}(x) e^{-x^2} = (2x^2 - 1) + e^{-(x^2)}$

En remplaçant x^2 par *u*, soit $g(u) = (2u - 1) + e^{-u}$ pour $u \geq 0$. Le signe de la dérivée de *f* est le même que celui de *g*. On a : $g^{'}(u) = 2 - e^{-u} > 0$, la fonction *g* est donc croissante et comme *g*(0)=0, on a : $\forall u \geq 0,\ g(u) \geq 0$

La fonction *f* est donc strictement croissante et bijective.

2. Donner un développement limité de f^{-1}, à l'ordre 5, au voisinage de zéro.
Le développement limité de *f* au voisinage de 0 est :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

f^{-1} étant impaire (comme *f*), son développement limité sera de la forme :

$$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

On doit avoir :

$$x = f^{-1} o\, f(x) = a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x + \frac{x^3}{2})^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

$x = a_1 x + (\dfrac{a_1}{2} + a_3) x^3 + (\dfrac{a_1}{6} + \dfrac{3a_3}{2} + a_5) x^5 + o(x^5)$ et par identification, on obtient :

$a_1 = 1; a_3 = -\dfrac{1}{2};\ a_5 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{12}$. Par conséquent :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$.
2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x + 5\cos x - \ln x}{5x + 1 + \ln(x^2+1)}$.
3. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la même fonction.
4. Ecrire le nombre complexe $z = -2\sqrt{3} - 2i$ sous forme trigonométrique.
5. Donner le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$
6. Donner une expression simple de la dérivée de la fonction définie à la question précédente.
7. Une étude montre qu'après un repas, 1 personne sur 3 prend un café, 1 personne sur 6 en prend 2, et les autres n'en prennent pas du tout. Deux personnes viennent de finir leur repas, et on note X le nombre de cafés consommés : pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

8. On considère la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

9. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour $n \geq 0$. Déterminer la nature de la suite définie par $v_n = u_n - 1$, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

1. (a) Donner le domaine de définition de f_n, et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que toutes les courbes représentatives de f_n ont deux points communs, que l'on déterminera.
   (c) Etudier les variations des fonctions f_1, f_2 et f_3, et dresser leurs tableaux de variation.
   (d) Représenter graphiquement f_1, f_2 et f_3 sur une même figure. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
   (e) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 1.
   (f) On suppose que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4/5, 0)$: quelle est la valeur de n ?

2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

   (a) Calculer I_1 et I_2.
   (b) Etudier la monotonie de la suite I_n.
   (c) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (I_n).

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
   (b) En déduire que

$$0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) quand $n \to \infty$.

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, on considère la fonction de la variable réelle f_a définie par

$$f_a(x) = \frac{x+a}{1+x^2+a^2} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

   (a) Faire l'étude de cette fonction, dresser son tableau de variations et montrer qu'elle admet un unique maximum, atteint en un point x_a dont on donnera l'expression en fonction de a.

(b) Donner la valeur de ce maximum.

(c) Dessiner la courbe représentative de la fonction f_2.

2. On considère désormais la fonction de la variable y

$$g(y) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)}.$$

(a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$2y = \sqrt{2y^2+1}$$

(b) Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de g.

(c) Montrer que g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$. En déduire la valeur maximale prise par $g(y)$.

(d) Dresser le tableau de variations de g.

3. Donner la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

quand x et y décrivent $\mathbf{R}$, et préciser pour quelles valeurs de x et y ce maximum est atteint.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

(d) En déduire la valeur de I_{2n} et celle de I_{2n+1}.

2. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $\frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$ quand $n \to \infty$.

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1} \right)^2.$$

4. Montrer que

$$(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1 = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

et en déduire que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

5. On lance une pièce équilibrée $2n$ fois et on note p_n la possibilité d'obtenir exactement n résultats "pile". Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 5

1. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, montrer l'inégalité

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. On considère désormais la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   Etudier la monotonie, puis la convergence de cette suite.

3. Prouver l'inégalité

$$u_{2n} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $z(z+1) \in \mathbf{R}$ correspond à deux droites du plan complexe que l'on dessinera.
2. On considère trois points distincts du plan affine A, B et C, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer que les trois points sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des nombres complexes z tels que les images de z, z^2 et z^4 soient alignées.
4. Illustrer ce résultat pour le nombre complexe vérifiant la propriété précédente et dont la partie imaginaire est égale à 1 (on pourra utiliser le même graphique qu'à la question 1).

Exercice 7

Deux personnes A et B jouent aux dés selon la règle suivante : A mise la somme a, B mise la somme b. Si le dé tombe sur 1 ou 2, A récupère sa mise et empoche celle de B ; s'il tombe sur 4, 5 ou 6, B récupère sa mise et empoche celle de A ; et s'il tombe sur 3, chaque joueur récupère sa mise. On suppose que le dé utilisé dans ce jeu n'est pas truqué, donc que chaque face apparaît avec la même probabilité.

On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il obtient après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances.
2. Calculer la valeur de la variable $X + Y$ et interpréter le résultat.
3. Le jeu est dit équitable si l'espérance du gain de chaque joueur est nulle. A quelle(s) condition(s) sur a et b le jeu ainsi défini est-il équitable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quels sont les moyens dont nous disposons pour lutter contre la désinformation et les complots imaginaires ?

Sujet n° 2

Quels sont selon vous les effets des crises notamment sanitaires sur l'organisation de nos sociétés, l'équilibre de nos institutions et la vie sociale en général ?

Sujet n° 3

On assiste à une diversification des partenariats des pays africains avec d'autres pays dans le monde. Quels effets peut avoir cette redistribution des relations sur le devenir des pays africains et sur le continent africain dans son ensemble ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f\ (x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Le graphe de *f* admet-il un centre de symétrie ?

4. Calculer $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n-1}{x^2+1}\,dx$, pour tout $n\in N^*$.

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_0=1$ et la relation de récurrence: $(3+u_n)u_{n+1}+1=0$.

1. Calculer u_1 *et* u_2. Montrer que la suite est monotone.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite si elle existe.
3. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice n° 3

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls par :

$$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

et la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

1. Etudier les variations de h et tracer son graphe (on précisera la pente de la demie tangente en zéro).

2. Calculer $I = \int_0^1 h(x)\, dx$

3. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \le 0 \\ h(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f ainsi que de ses dérivées premières et secondes.

Exercice n° 4

On note $P = \{z \in C \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in C \ / \ |z| < 1\}$, où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie réelle de z et $|z|$ son module. On considère l'application f définie sur C par : $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f est une bijection de P sur D.

2. Déterminer le lieu géométrique des points d'affixe $f(z)$.

Exercice n° 5

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. On note X cette variable aléatoire. Par exemple si on obtient 3 et 4, le produit est égal à 12 et X=2.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer la probabilité que X=0.

3. Calculer la probabilité que X soit strictement supérieure à 4.

4. Sur ce jeu (lancement de ces deux dés), un joueur mise 10 euros.
La règle du jeu est la suivante :
- Si X=0, le joueur perd sa mise,
- Si X est pair et différent de zéro, le joueur gagne 2 euros,
- Si X est impair, non nul et strictement inférieur à 9, le joueur gagne 4 euros,
- Si X=9, le joueur gagne 60 euros.

Calculer l'espérance de gain pour ce jeu. Commenter le résultat obtenu.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel non nul *n*, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \text{, où } n! = 1\times 2\times \ldots\times n$$

1. Calculer u_1.

2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n, en déduire l'expression de u_n.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre de Stanislas Dehaene : « Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines », paru aux éditions Odile Jacob en septembre 2018.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Pourquoi l'apprentissage ?

Pourquoi devons-nous apprendre ? L'existence même de la faculté d'apprentissage pose question. Ne vaudrait-il pas mieux que nos enfants sachent parler et réfléchir dès le premier jour, telle Athéna dont la légende dit qu'elle sortit toute armée et casquée du crâne de Zeus, en poussant son cri de guerre ? Pourquoi ne naissons-nous pas pré-câblés, avec un logiciel préprogrammé et doté de toutes les connaissances nécessaires à notre survie ? Dans la lutte pour la vie que décrit Darwin, un animal qui naîtrait mature, avec plus de savoir que les autres, ne devrait-il pas finir par l'emporter ? Pourquoi l'évolution a-t-elle donc inventé l'apprentissage ?

Ma réponse est simple : le pré-câblage complet du cerveau n'est ni possible ni souhaitable. Impossible vraiment ? Oui, car si notre ADN devait spécifier tous les détails de nos connaissances, il n'aurait simplement pas la capacité de stockage nécessaire […] Le génome humain se réduit à 750 mégaoctets – le contenu d'un CD-ROM ou d'une petite clé USB ! Et ce calcul ne tient même pas compte des nombreuses redondances qui parsèment notre ADN.

A partir de cette modeste somme d'informations héritées des millions d'années d'évolution, notre génome, initialement confiné à une seule cellule, l'ovule fécondé, parvient à organiser l'ensemble du corps – chaque molécule de chacune des cellules de notre foie, de nos reins, de nos muscles, et bien sûr de notre cerveau : 86 milliards de neurones, 1 000 milliers de milliards de connexions… Comment pourrait-il les définir une par une ? […]

Pré-câbler un cerveau humain dans tous ses détails serait rigoureusement impossible, c'est pourquoi l'apprentissage doit prolonger l'œuvre des gènes.

Ce simple argument comptable, toutefois, ne suffit pas à expliquer pourquoi l'apprentissage est universellement répandu dans le monde animal. En effet, même des organismes simples et dépourvus de cortex, comme le ver de terre, la mouche drosophile ou le concombre de mer, apprennent bon nombre de leurs comportements. Prenez le petit ver qu'on appelle « nématode », ou *C. elegans*, et qui est rapidement devenu une star de laboratoire. Cet organisme est incroyablement pré-câblé : la plupart des individus comprennent exactement 959 cellules dont 302 neurones, dont toutes les connexions sont connues et reproductibles. Et pourtant, il apprend. Les chercheurs le considéraient initialement comme une sorte d'automate tout juste capable de ramper en avant ou en arrière, mais ils se sont ensuite aperçus qu'il possédait au moins deux formes d'apprentissage : par habituation et par association.

L'habituation signifie que l'organisme s'habitue à la présence répétée d'une stimulation (par exemple une molécule dans l'eau) et finit par ne plus y répondre. L'association, quant à elle, consiste à découvrir et à retenir en mémoire quels aspects de l'environnement prédisent les sources de nourriture ou de danger. Le ver nématode s'avère être un champion de l'association, capable de se souvenir que tel goût, telle odeur ou telle température ont été associées par le passé à de la nourriture (des bactéries) ou à des molécules repoussantes (l'odeur de l'ail) et d'utiliser cette information pour choisir son chemin dans son environnement.

Avec son petit nombre de neurones, le nématode aurait très bien pu être pré-câblé. S'il ne l'est pas, c'est parce qu'il est avantageux, pour sa survie, de s'adapter aux conditions spécifiques dans lesquelles il naît. Même des organismes génétiquement identiques ne naissent pas forcément dans le même environnement. Tous ont intérêt à s'adapter rapidement à des conditions fondamentalement imprévisibles. La sélection naturelle, qui est l'algorithme découvert par Darwin, parvient certes à adapter chaque organisme à sa niche écologique, mais elle le fait avec une lenteur affligeante : il faut que des générations meurent, faute d'être adaptées, avant qu'une mutation favorable puisse augmenter la survie. La faculté d'apprentissage, elle, agit bien plus vite : elle modifie le comportement en quelques minutes. Et c'est ce qui fait tout l'intérêt de l'apprentissage : s'adapter, le plus vite possible, à des conditions imprévisibles.

C'est pourquoi l'évolution a inventé la faculté d'apprendre. Au fil des générations, elle a découvert qu'il était utile de laisser certains paramètres de l'organisme libres de se modifier pour mieux s'ajuster aux aspects les plus changeants de son environnement. Certains aspects de la physique du monde sont strictement invariables : la gravitation est universelle, la propagation de la lumière ou des sons dans l'air ne change pas du jour au lendemain, et c'est pourquoi nous n'avons – Dieu merci ! – pas besoin d'apprendre à faire pousser nos oreilles, nos yeux, ou les labyrinthes de notre système vestibulaire qui mesurent l'accélération de notre corps : toutes ces propriétés de notre corps et de notre cerveau sont codées génétiquement. Par contre, l'espacement de nos yeux, le poids et la longueur de nos membres, la hauteur de notre voix varient, et c'est pourquoi notre cerveau doit les apprendre. Notre pensée est le résultat d'un compromis : énormément d'inné (toutes les grandes catégories intuitives à l'aide desquelles nous subdivisons le monde en images, sons, mouvements, objets, animaux, personnes, causes…), mais encore plus d'acquis qui raffine ces compétences précoces.

Notre espèce a fait de l'apprentissage sa spécialité. Dans notre cerveau, des milliards de paramètres sont libres de s'adapter à notre milieu, notre langue, notre culture, nos parents, notre nourriture… Ces paramètres sont choisis avec soin : au sein de notre cerveau, l'évolution a défini avec précision, quels circuits sont pré-câblés et lesquels sont ouverts à l'environnement. Dans notre espèce, la part d'apprentissage est particulièrement vaste, car notre enfance se prolonge pendant de longues années. Par le biais du langage et des mathématiques, nos espaces d'hypothèses se démultiplient en une combinatoire potentiellement infinie – même s'ils s'appuient toujours sur des fondations fixes et invariables, héritées de notre évolution.

Homo docens

S'il fallait résumer d'un mot le talent particulier de notre espèce, je retiendrais donc le verbe « apprendre ». Plus que des *Homo sapiens,* nous sommes des *Homo docens* –car ce que nous savons du monde ne nous a pas été donné : nous l'avons appris de notre environnement ou de notre entourage. Aucun autre animal n'a su, comme nous, découvrir les secrets du monde naturel. Grâce à l'extraordinaire flexibilité de ses apprentissages, notre espèce est parvenue à quitter sa savane natale pour traverser déserts, montagnes, océans, et, en quelques milliers d'années seulement, conquérir les îles les plus lointaines, les grottes les plus profondes, les banquises les plus glaciales, et jusqu'à la Lune. Depuis la conquête du feu et la fabrique des outils jusqu'à l'invention de l'agriculture, de la navigation ou de la fission atomique, l'histoire de l'humanité n'est que constante réinvention. A la source de tous ces triomphes, un seul secret : l'extraordinaire faculté de notre cerveau à formuler des hypothèses et à les sélectionner pour transformer certaines d'entre elles en connaissances solides sur notre environnement.

Cette remarquable capacité d'apprentissage, l'humanité a découvert qu'elle pouvait encore l'augmenter grâce à une institution : l'école. La pédagogie active est l'apanage de notre espèce : aucun autre animal ne prend le temps d'enseigner de nouveaux talents à ses enfants, activement, en prêtant attention à leurs difficultés et à leurs erreurs. L'invention de l'école, en systématisant l'instruction informelle présente dans toutes les sociétés humaines, a décuplé notre potentiel cérébral. Nous avons compris qu'il fallait profiter de cette exubérante plasticité du cerveau de l'enfant pour lui inculquer un maximum d'informations et de talents. Au fil des siècles, notre système scolaire n'a cessé de progresser en efficacité, commençant toujours plus tôt, dès la maternelle, et se prolongeant pendant une quinzaine d'années, voire plus : un nombre toujours croissant de cerveaux bénéficient d'un enseignement supérieur, à l'université, véritable raffinerie neuronales où nos circuits cérébraux acquièrent leurs meilleurs talents.

Aujourd'hui, l'Education Nationale peut être considérée comme le principal accélérateur de notre cerveau. Sa place de choix, parmi les tout premiers postes de dépenses de l'Etat, se justifie aisément : sans elle, nos circuits corticaux resteraient des diamants bruts. La complexité de nos sociétés contemporaines ne doit son existence qu'aux multiples améliorations que l'éducation a apportées à notre cortex : lecture, écriture, algèbre, musique, sens du temps et de l'espace, raffinement de la mémoire… Sait-on, par exemple, que la capacité de mémoire immédiate d'un analphabète, le nombre de syllabes ou de chiffres qu'il peut répéter, est près de deux fois plus faible que celle d'une personne scolarisée ?

Apprendre à apprendre

L'éducation démultiplie les facultés déjà considérables de notre cerveau –mais pourrait-elle faire mieux encore ? A l'école, à l'université et au travail, contraints de nous adapter toujours plus vite, nous jonglons avec nos algorithmes cérébraux d'apprentissage. Cependant nous le faisons d'une façon intuitive, sans avoir jamais appris à apprendre. Personne ne nous a expliqué les règles qui font que notre cerveau mémorise et comprend, ou, au contraire, oublie et se trompe. C'est dommage, car les données abondent. Un excellent site anglais, l'Education Endowment Fund (EEF) recense les interventions pédagogiques qui marchent. Et l'une des plus efficaces est la métacognition, c'est-à-dire le fait de mieux connaître son propre fonctionnement cognitif. Savoir apprendre est l'un des plus importants facteurs de réussite scolaire.

Au cours des trente dernières années, d'importants progrès ont été réalisés dans la compréhension des principes fondamentaux de la plasticité cérébrale et de l'apprentissage. Le fonctionnement de la mémoire, le rôle de l'attention, l'importance du sommeil sont autant de découvertes riches de conséquences pour chacun d'entre nous. Lorsque vous refermerez ce livre, j'espère que vous en saurez beaucoup plus sur vos propres processus d'apprentissage. Il me paraît fondamental que chaque enfant, que chaque adulte prenne la pleine mesure du potentiel de son propre cerveau et aussi, bien sûr, de ses limites. Les sciences cognitives contemporaines, par la dissection systématique qu'elles pratiquent de nos algorithmes mentaux et de leurs mécanismes cérébraux, revisitent le célèbre adage socratique « Connais-toi toi-même ». Aujourd'hui, il ne s'agit plus de pratiquer l'introspection, mais de mieux connaître la subtile mécanique neuronale qui engendre nos pensées, afin de mieux la maîtriser et de la mettre au service de nos goûts et de nos besoins.

Et je pense aussi, bien entendu, aux professionnels de l'apprentissage que sont les enseignants. Je suis profondément convaincu qu'on ne peut pas enseigner convenablement sans posséder, implicitement ou explicitement, un modèle mental de ce qui se passe dans la tête de l'enfant : quelles sont ses intuitions, correctes ou erronées, quelles sont les étapes par lesquelles il doit passer pour progresser, et quel facteur l'aide à développer ses compétences. […]

Quatre mécanismes essentiels modulent massivement notre capacité d'apprendre.

En premier vient l'attention : un ensemble de circuits neuronaux qui sélectionnent, amplifient et propagent les signaux auxquels nous accordons de l'importance – et multiplie par cent ou par mille leur représentation en mémoire.

En deuxième, l'engagement actif : un organisme passif n'apprend pratiquement rien, car l'acte d'apprendre exige que le cerveau génère activement des hypothèses, avec curiosité.

Troisième volet, et complément naturel de l'engagement actif : les signaux d'erreur et de surprise. Ce sont eux qui, en se propageant dans tout le cerveau, viennent corriger nos modèles mentaux, éliminer les hypothèses inappropriées et stabiliser les plus justes.

Enfin, quatrième facteur, la consolidation : au fil du temps, notre cerveau compile ce qu'il a acquis et le transfère en mémoire à long terme, afin de libérer les ressources pour d'autres apprentissages. La répétition joue un rôle essentiel dans cette consolidation, et même le sommeil, sans être une période d'inaction, constitue un moment privilégié au cours duquel le cerveau se répète et recode les acquis de la journée.

Ces facteurs sont universels : bébé, enfant ou adulte, quel que soit notre âge, ils continuent d'exercer leur pouvoir sur notre capacité d'apprendre. C'est pourquoi nous devons apprendre à les maîtriser. Dans la conclusion, je reviendrai sur les conséquences pratiques de ces avancées scientifiques. Changer nos pratiques, à l'école, en famille ou au bureau n'est pas forcément aussi compliqué qu'on le pense. Des idées très simples, sur le jeu, le plaisir, la curiosité, la socialisation, la concentration ou encore le sommeil, peuvent augmenter encore ce qui est déjà le plus grand talent de notre cerveau : apprendre.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$.

   Par le changement de variable $\sin x = u$, il vient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{du}{u+3} = [\ln(3+u)]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3.$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x+5\cos x - \ln x}{5x+1+\ln(x^2+1)}$.

   La fonction cos est bornée sur $\mathbf{R}$; par ailleurs $\ln x$ et $\ln(x^2+1)$ sont négligeables devant x au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{5}.$$

3. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la même fonction.
   Au voisinage de 0 (à droite pour que f soit définie), $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc le numérateur de f tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend vers 1, donc
$$\lim_{n \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

4. Ecrire le nombre complexe $z = -2\sqrt{3} - 2i$ sous forme trigonométrique.
$$-2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$
   $\sqrt{x^2-1}$ est bien définie si $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. Si $x \geq 1$, $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1 > 0$ et donc f est bien définie ; si $x \leq -1$, en posant $u = -x$, $u > 0$ et $u^2 > u^2 - 1$ donc $u > \sqrt{u^2-1}$. Par suite, $-x > \sqrt{x^2-1}$ et $x + \sqrt{x^2-1} < 0$, donc f n'est pas définie. En définitive, le domaine de définition de f est $[1, +\infty[$.

6. Donner une expression simple de la dérivée de la fonction définie à la question précédente.
   En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, il vient :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

7. Une étude montre qu'après un repas, 1 personne sur 3 prend un café, 1 personne sur 6 en prend 2, et les autres n'en prennent pas du tout. Deux personnes viennent de finir leur repas, et on note X le nombre de cafés consommés : pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.
   Notons d'emblée que d'après l'énoncé, la probabilité pour qu'une personne ne prenne pas de café est égale à $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.
   Le nombre de cafés consommés varie entre 0 et 4. Voici le tableau où on lit ligne à ligne le nombre de cafés consommés par A, le nombre de cafés consommés par B, la probabilité d'avoir cette configuration, et la valeur correspondante pour la variable X.

A	0	0	0	1	1	1	2	2	2
B	0	1	2	0	1	2	0	1	2
P	1/4	1/6	1/12	1/6	1/9	1/18	1/12	1/18	1/36
X	0	1	2	1	2	3	2	3	4

   On en déduit immédiatement que la loi de X est donnée par $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/3$, $P(X = 2) = 5/18$, $P(X = 3) = 1/9$ et $P(X = 4) = 1/36$.

L'espérance de X se calcule alors comme suit :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{3}.$$

8. On considère la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

   On a $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$. Par suite, en éliminant 2 à 2 les termes redondants dans les sommes, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

   On en déduit que (u_n) est une suite croissante. De plus, comme $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$u_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$$

   pour tout entier n.
   (u_n) est donc croissante et majorée par 1, par suite elle est convergente.

9. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour $n \geq 0$. Déterminer la nature de la suite définie par $v_n = u_n - 1$, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme -1 et de raison 3. Par suite, v_n tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$, et il en va de même pour $u_n = v_n + 1$.

10. Résoudre l'equation $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
    Posons $X = x^2$. X est alors solution de l'équation $X^2 + 4X - 1 = 0$. Le discriminant réduit de cette équation du second degré est égal à 5, et ses solutions sont donc $X_1 = -2 + \sqrt{5}$ et $X_2 = -2 - \sqrt{5}$.
    Dans $\mathbf{R}$, on doit avoir $X = x^2 \geq 0$ donc seul X_1 correspond à deux solutions réelles qui sont $\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$.
    Dans $\mathbf{C}$, il faut ajouter aux deux solutions précédentes les deux racines carrées complexes de X_2, à savoir $i\sqrt{2+\sqrt{5}}$ et $-i\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

1. (a) Donner le domaine de définition de f_n, et calculer sa dérivée.
   f_n est définie sur tout $\mathbf{R}$, et sa dérivée vaut $f_n'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

(b) Montrer que toutes les courbes représentatives de f_n ont deux points communs, que l'on déterminera.

Pour tout n, on a $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = e^{-1}$, donc toutes les courbes représentatives passent par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, e^{-1})$.

(c) Etudier les variations des fonctions f_1, f_2 et f_3, et dresser leurs tableaux de variation.

D'après le calcul de dérivée ci-dessus, les fonctions f_n admettent toutes une tangente horizontale et un maximum pour $x = n$, ce maximum valant donc $e^{-1} \simeq 0,37$ pour f_1, $4e^{-2} \simeq 0,54$ pour f_2, et $27e^{-3} \simeq 1,34$ pour f_3. Par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle, il vient immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En outre :

— si n est pair, f'_n s'annule également en 0 et f_n est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]n, +\infty[$, croissante sur $]0, n[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = -\infty$: la courbe de f_n admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$;

— si n est impair et $n \geq 3$, f'_n s'annule également en 0 sans changer de signe, et f_n est décroissante sur $]n, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, n[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = +\infty$: la courbe de f_n admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$;

— si $n = 1$, f'_1 ne s'annule que pour $x = 1$: f_1 est décroissante sur $]1, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, 1[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = +\infty$: la courbe de f_1 admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$.

On en déduit les tableaux de variation de ces trois fonctions.

(d) Représenter graphiquement f_1, f_2 et f_3 sur une même figure. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.

Ces courbes se déduisent également de l'étude précédente, en notant que f_2 et f_3 admettent une tangente horizontale en 0 (qui est en fait un point d'inflexion), alors que la courbe représentative de f_1 admet une pente égale à $1/e$ en ce point.

(e) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente en ce point est de la forme $y = ax + b$. On a $a = f'_n(1) = e^{-1}(n-1)$ et comme la droite passe par le point $(1, e^{-1} = f_n(1))$, il vient que $b = (2-n)e^{-1}$.

(f) On suppose que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4/5, 0)$: quelle est la valeur de n ?

Il suffit d'écrire que $0 = e^{-1}(n-1)(4/5) + (2-n)e^{-1}$ pour conclure que cela n'est possible que pour $n = 6$.

2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

(a) Calculer I_1 et I_2.

Par une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}dx \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \\ &= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 \\ &= 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

De même ;

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x^2e^{-x}dx \\ &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \\ &= -e^{-1} + 2I_1 \\ &= 2 - 5e^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Etudier la monotonie de la suite I_n.
pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier n , $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$. Comme de plus $e^{-x} > 0$, on en déduit que $0 \leq x^{n+1}e^{-x} \leq x^ne^{-x}$, puis que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est donc décroissante.

(c) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $0 < e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq x^ne^{-x} \leq x^n$. Par suite, $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

(d) Conclure quant à la convergence de la suite (I_n).
On a donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, et par le théorème dit "des gendarmes", la suite (I_n) tend vers 0.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
En faisant l'intégration par parties avec $u' = x^n$ et $v = e^{-x}$, il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{n+1}(e^{-1} + I_{n+1}). \end{aligned}$$

(b) En déduire que

$$0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

D'après la question précédente,

$$In - \frac{1}{(n+1)e} = \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Cette quantité est donc positive, et il suffit d'appliquer le résultat de la question 2c pour conclure

(c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) quand $n \to \infty$.
On a donc

$$0 \leq nIn - \frac{n}{(n+1)e} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{e}$$

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, on considère la fonction de la variable réelle f_a définie par

$$f_a(x) = \frac{x+a}{1+x^2+a^2} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

(a) Faire l'étude de cette fonction, dresser son tableau de variations et montrer qu'elle admet un unique maximum, atteint en un point x_a dont on donnera l'expression en fonction de a.
f_a est définie et dérivable sur tout $\mathbf{R}$. On voit immédiatement que sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$ est nulle, et un calcul élémentaire montre que

$$f_a'(x) = \frac{-x^2 - 2ax + a^2 + 1}{(1+x^2+a^2)^2}.$$

$f'a$ est donc du signe de son numérateur, qui est un polynôme de degré 2 en a dont le discriminant réduit vaut $2a^2+1$ et les racines sont $-a-\sqrt{2a^2+1}$ et $-a+\sqrt{2a^2+1}$
f_a est donc décroissante sur $]-\infty, -a-\sqrt{2a^2+1}[$ et $]-a+\sqrt{2a^2+1}, +\infty[$, et croissante sur $]-a-\sqrt{2a^2+1}, -a+\sqrt{2a^2+1}[$. Le tableau de variation s'en déduit immédiatement, et on voit que f_a admet son maximum au point $x_a = -a+\sqrt{2a^2+1}$.

(b) Donner la valeur de ce maximum.

$$\begin{aligned} f_a(x_a) &= \frac{-a+\sqrt{2a^2+1}+a}{1+\left(-a+\sqrt{2a^2+1}\right)^2+a^2} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{1+a^2+2a^2+1-2a\sqrt{2a^2+1}+a^2} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2+4a^2-2a\sqrt{2a^2+1}} \\ &= \frac{1}{2\left(\sqrt{2a^2+1}-a\right)}. \end{aligned}$$

(c) Dessiner la courbe représentative de la fonction f_2.
Elle se déduit simplement de ce qui précède en remarquant que $x_2 = 1$ et $f_2(x_2) = 1/2$.

2. On considère désormais la fonction de la variable y

$$g(y) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)}.$$

(a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$2y = \sqrt{2y^2+1}$$

Remarquons d'emblée que toute solution réelle de cette équation doit être positive. Cela posé, en passant au carré, il s'agit de résoudre l'équation

$$4y^2 = 2y^2 + 1$$

dont la seule solution positive est $y = \sqrt{2}/2$.

(b) Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de g .

Remarquons tout d'abord que $g(y)$ est évidemment bien définie pour tout $y \leq 0$? Si y est positif, $y^2 < y^2 + 1$ et en passant aux racines carrées, $y < \sqrt{y^2+1}$ (puisque y est positif. Par suite g est définie sur tout $\mathbf{R}$.

D'après les formules de dérivation de fonctions composées, on a

$$\begin{aligned} g'(y) = \; &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{4y}{2\sqrt{2y^2+1}} - 1}{\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2y - \sqrt{2y^2+1}}{\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)^2 \sqrt{2y^2+1}}. \end{aligned}$$

(c) Montrer que g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$. En déduire la valeur maximale prise par $g(y)$.

Le signe de g' est donc celui de $-2y + \sqrt{2y^2+1}$; d'après la question précédente, cette quantité s'annule uniquement pour $y = \sqrt{2}/2$. Si elle prenait des signes différents sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$, comme elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait en un point $y_0 < \sqrt{2}/2$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède : donc g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$, et par le même raisonnement, c'est vrai aussi sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$.

Comme $g'(0) = 1/2$, il découle de ce qui précède que $g'(y) > 0$ sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et g est croissante sur cet intervalle.

De même $g'(1)$ est du même signe que $-2+\sqrt{3}$, donc négatif et on en déduit que $g'(y) < 0$ sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$ et g est décroissante sur cet intervalle. De tout ce qui précède, on infère que g admet son maximum pour $y = \sqrt{2}/2$ et ce maximum vaut $g(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2$.

(d) Dresser le tableau de variations de g.

Il se déduit de ce qui précède en notant que la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$ vaut 0.

3. Donner la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

quand x et y décrivent $\mathbf{R}$, et préciser pour quelles valeurs de x et y ce maximum est atteint.

D'après la première partie, le maximum en x de cette expression se trouve au point x_y et vaut $g(y)$. D'après la deuxième partie, le maximum de $g(y)$ vaut $\sqrt{2}/2$ et il est atteint en $y = \sqrt{2}/2$. Donc la valeur maximale de cette expression vaut $\sqrt{2}/2$; elle est atteinte pour $y = \sqrt{2}/2$ et $x = x_{\sqrt{2}/2}$, soit encore

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{2}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

   $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi/2$.

   $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

   En faisant le changement de variables $u = \pi/2 - x$, $du = -dx$, il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 - \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 - \cos^n u du \end{aligned}$$

   d'où le résultat demandé.

   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

   Posons $u(x) = \sin^{n-1} x$ et $v(x) = \sin x$. On a alors $u'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$ et $v(x) = -\cos x$ et l'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right) \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

   On a donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ d'où le résultat demandé.

   (d) En déduire la valeur de I_{2n} et celle de I_{2n+1}.

Partant de $I_0 = \pi/2$, la relation précédente donne

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ I_4 &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ & \textit{etc.} \end{aligned}$$

et par induction,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même, partant de $I_1 = 1$, on arrive à

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \times 1.$$

2. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $\dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

   Comme $0 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ sur cet intervalle, et en passant aux intégrales, on voit que la suite (I_n) est décroissante. On a donc

   $$0 < \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

   d'après la question 1c

   (b) En déduire la limite de $\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ quand $n \to \infty$. L'inégalité précédente prouve, à l'aide du théorème dit "des gendarmes", que la suite (I_n) converge vers 1

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1} \right)^2.$$

D'après la question 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} &= \frac{\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \times 1} \\ &= \frac{\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\times} \frac{2n+1}{2n} \times \frac{2n-1}{2n-2} \cdots \frac{3}{2} \times 1. \end{aligned}$$

Il suffit de simplifier cette fraction et de remarquer qu'elle tend vers 1 quand n tend vers l'infini (question 2) pour obtenir le résultat demandé.

4. Montrer que

$$(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1 = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

et en déduire que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

On a :

$$\begin{aligned}(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1 &= \frac{(2n)!}{(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\cdots\times 2}\\ &= \frac{(2n)!}{(2n)\times(2(n-1))\times(2(n-2))\cdots\times(2\times 1)}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n\times n!}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, le numérateur de la fraction obtenue à la question 3 vaut $2^n \times n!$ et la limite de $2n/(2n+1)$ quand $n \to \infty$ vaut 1. De tout cela on déduit que

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n}\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2,\end{aligned}$$

et passer à la racine carrée dans le résultat ci-dessus donne le résultat demandé.

5. On lance une pièce équilibrée $2n$ fois et on note p_n la possibilité d'obtenir exactement n résultats "pile". Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Le nombre de "pile" obtenu en $2n$ lancers est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $2n$ et $1/2$, donc la probabilité d'obtenir exactement n "pile" en $2n$ lancers vaut

$$p_n = \frac{2n!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Le résultat demandé se déduit alors immédiatement de la question précédente.

Exercice 5

1. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, montrer l'inégalité

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Comme $\sqrt{k} < \sqrt{n+1}$ pour tout entier k compris entre 1 et n, on trouve immédiatement que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$$

2. On considère désormais la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Etudier la monotonie, puis la convergence de cette suite.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

et le résultat de la question précédente prouve que cette quantité est négative : la suite (u_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, il est clair que $u_n > 0$ pour tout n puisqu'il s'agit d'une somme de nombres positifs. Cette suite est donc décroissante et minorée, et par suite elle converge.

3. Prouver l'inégalité

$$u_{2n} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &< \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2n}\frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sqrt{k} > \sqrt{n}$ pour tout $k \geq n+1$, d'où le résultat demandé.

4. En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

On a vu que la suite (u_n) converge : notons l sa limite. En faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente, il vient $l \leq l/2 + 0$, soit $l/2 \leq 0$, et comme on sait déjà que $l \geq 0$, on en déduit que $l = 0$.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $z(z+1) \in \mathbf{R}$ correspond à deux droites du plan complexe que l'on dessinera.

La partie imaginaire de $z(z+1)$ vaut $b(a+1) + ab = b(2a+1)$. Par suite, $z(z+1) \in \mathbf{R}$ si et seulement si cette quantité est nulle, c'est-à-dire si $b = 0$ ou $2a + 1 = 0$. La première égalité correspond à la droite réelle (ce qui n'est pas surprenant !), et la deuxième est la droite des nombres complexes dont la partie réelle vaut $-1/2$.

2. On considère trois points distincts du plan affine A, B et C, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer que les trois points sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.

   Trois points distincts du plan affine A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $z_C - z_B$, celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, et le résultat en découle immédiatement.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des nombres complexes z tels que les images de z, z^2 et z^4 soient alignées.

   D'après ce qui précède, les images de z, z^2 et z^4 sont alignées si et seulement si $\dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbf{R}$. Si $z = 0$ ou $z = 1$, $z = z^2 = z^4$ donc les trois points sont confondus, sinon en simplifiant la fraction ci-dessus par $z(z-1)$, on trouve que les points sont alignés si et seulement si $z(z+1) \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire si l'image de z se trouve sur une des droites déterminées en 1 .

4. Illustrer ce résultat pour le nombre complexe vérifiant la propriété précédente et dont la partie imaginaire est égale à 1 (on pourra utiliser le même graphique qu'à la question 1).

   Le nombre en question est $z = -1/2 + i$: on a alors $z^2 = -3/4 - i$ et $z^4 = -7/16 + 3i/2$, et on vérifie graphiquement l'alignement des trois images.

Exercice 7

Deux personnes A et B jouent aux dés selon la règle suivante : A mise la somme a, B mise la somme b. Si le dé tombe sur 1 ou 2, A récupère sa mise et empoche celle de B ; s'il tombe sur 4, 5 ou 6 B récupère sa mise et empoche celle de A ; et s'il tombe sur 3, chaque joueur récupère sa mise. On suppose que le dé utilisé dans ce jeu n'est pas truqué, donc que chaque face apparaît avec la même probabilité.

On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il obtient après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B. On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il récupère après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances.

   La variable X peut prendre les valeurs b (si le dé tombe sur 1 ou 2), $-a$ (si le dé tombe sur 4, 5 ou 6) ou 0 (si le dé tombe sur 3). Comme le dé n'est pas truqué, la loi de X est donnée par :

$$\begin{aligned} P(X = b) &= \frac{1}{3} \\ P(X = -a) &= \frac{1}{2} \\ P(X = 0) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   et l'espérance de X vaut

$$E(X) = \frac{1}{3}(b) + \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{b}{3} - \frac{a}{2}.$$

   De même, la variable Y peut prendre les valeurs $-b$ (si le dé tombe sur 1 ou 2), a (si le dé tombe sur 4, 5 ou 6) ou 0 (si le dé tombe sur 3). Comme le dé n'est pas truqué, la loi de Y

est donnée par :

$$\begin{aligned} P(Y=-b) &= \frac{1}{3} \\ P(Y=a) &= \frac{1}{2} \\ P(Y=0) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et l'espérance de Y vaut

$$E(Y) = \frac{1}{3}(-b) + \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{a}{2} - \frac{b}{3}.$$

2. Calculer la valeur de la variable $X+Y$ et interpréter le résultat.
   Quelle que soit le résultat du dé, on voit que $X+Y=0$, ce qui traduit le fait que A gagne ce que B perd et inversement : c'est un jeu de somme nulle.
3. Le jeu est dit équitable si l'espérance du gain de chaque joueur est nulle. A quelle(s) condition(s) sur a et b le jeu ainsi défini est-il équitable ?
   On a $E(Y) = -E(X)$, donc il suffit d'avoir $E(X) = 0$, c'est-à-dire que $b = 3a/2$ pour que le jeu soit équitable.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f\ (x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

1. Etudier les variations et la convexité de f.

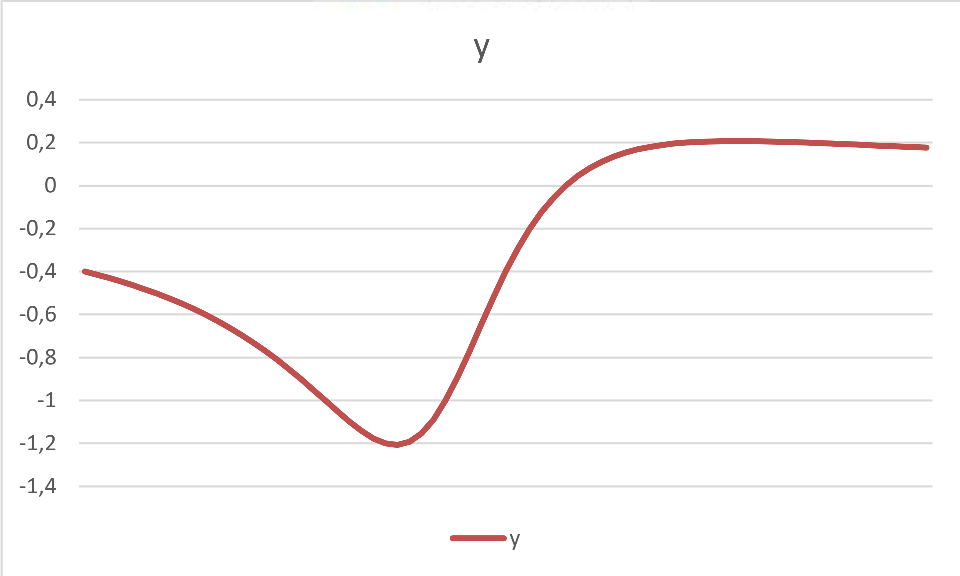
La dérivée de *f* est égale à : $f^{'}(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$. La fonction est donc croissante entre ces deux valeurs et décroissante à l'extérieur. Elle tend vers zéro aux infinis.

La dérivée seconde de *f* est égale à : $f^{"}(x) = \dfrac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}$ qui s'annule pour trois valeurs : $x = -1;\ 2 \pm \sqrt{3}$. La fonction est concave sur les intervalles : $x = \left]-\infty, -1\right]\ et\ \left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$ et convexe sinon.

2. Tracer le graphe de f.

On a les valeurs particulières suivantes :

$f(0) = -1;\ f(1) = 0;\ f(1+\sqrt{2}) = 1/2(1+\sqrt{2});\ f(1-\sqrt{2}) = -1/2(\sqrt{2}-1)$



3. Le graphe de *f* admet-il un centre de symétrie ?

Si le graphe admet un centre de symétrie, alors les deux points des extrema seront symétriques par rapport à ce centre, soit le point (1, 0). On pose $X = x-1; Y = y$ pour obtenir : $Y = \frac{X}{X^2+2X+2}$ et comme cette fonction n'est pas impaire, le graphe n'admet pas de centre de symétrie.

4. Calculer $I_n = \int_0^1 \frac{x^n-1}{x^2+1}\,dx$, pour tout $n \in N^*$.

Pour commencer, on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}Ln(x^2+1) - Arctg\,x\right]_0^1 = Ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} \quad \text{et}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{2}{x^2+1}\,dx = \left[x - 2Arctg\,x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

De façon générale : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n-1}{x^2+1}\,dx = J_n - \frac{\pi}{4}$, avec $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$. On distingue les indices pairs et impairs.

- Pour $n=2p$

$$\frac{x^{2p}}{x^2+1} = x^{2p-2} - x^{2p-4} + \ldots + (-1)^{p+1} + \frac{(-1)^p}{x^2+1} \quad \text{et}$$

$$J_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \ldots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{\pi}{4};\ I_{2p} = J_{2p} - \frac{\pi}{4}$$

- Pour $n=2p+1$

$$\frac{x^{2p+1}}{x^2+1} = x^{2p-1} - x^{2p-3} + \ldots + (-1)^{p+1} + \frac{(-1)^p x}{x^2+1} \quad \text{et}$$

$$J_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{2} + (-1)^p Ln(\sqrt{2});\ I_{2p+1} = J_{2p+1} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $(3+u_n)u_{n+1} + 1 = 0$.

1. Calculer u_1 *et* u_2. Montrer que la suite est monotone.

On trouve $u_1 = -\frac{1}{4}$ *et* $u_2 = -\frac{4}{11}$.

Soit la fonction *f* correspondante à la récurrence, à savoir $f(x) = -\frac{1}{3+x}$. Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{1}{(3+x)^2} > 0$. La fonction est croissante et donc la suite est monotone. Comme $u_2 < u_1 < u_0$, la suite est décroissante.

2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite si elle existe.

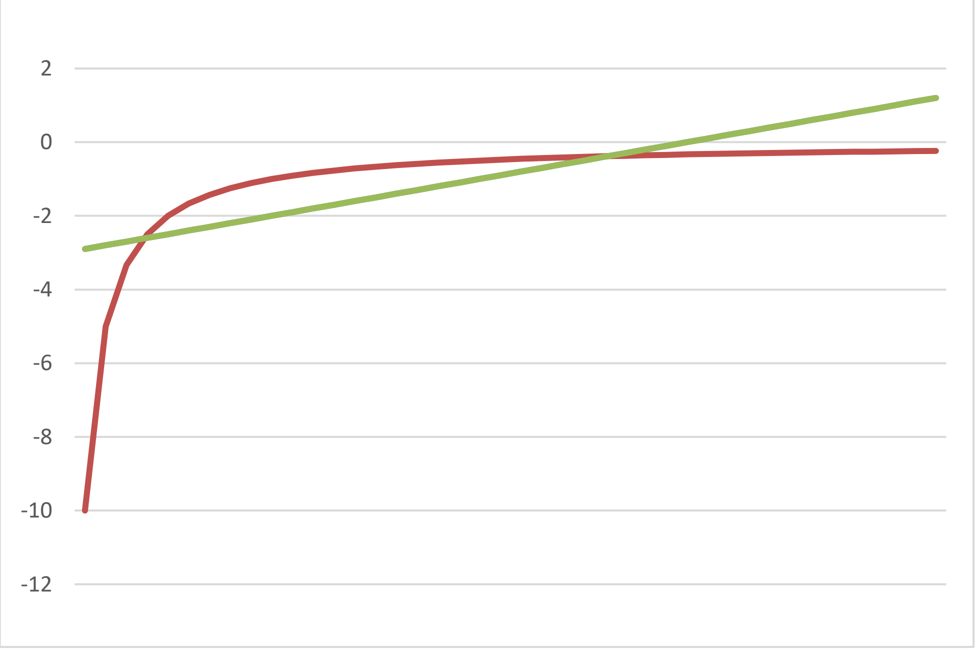
Si la suite converge vers une limite l, cette dernière est solution de l'équation de récurrence : $(3+l)l + 1 = 0$, soit $l = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

On montre par récurrence que : $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < u_n < 0$ pour $n \geq 1$.

La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

3. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.

Le schéma représente le graphe de la fonction *f* et le tracé de la première bissectrice. Les points d'intersection correspondent aux deux valeurs trouvées candidates pour être la limite. L'interprétation se fait conformément au cours sur la convergence des suites récurrentes.



Exercice n° 3

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls par :

$$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

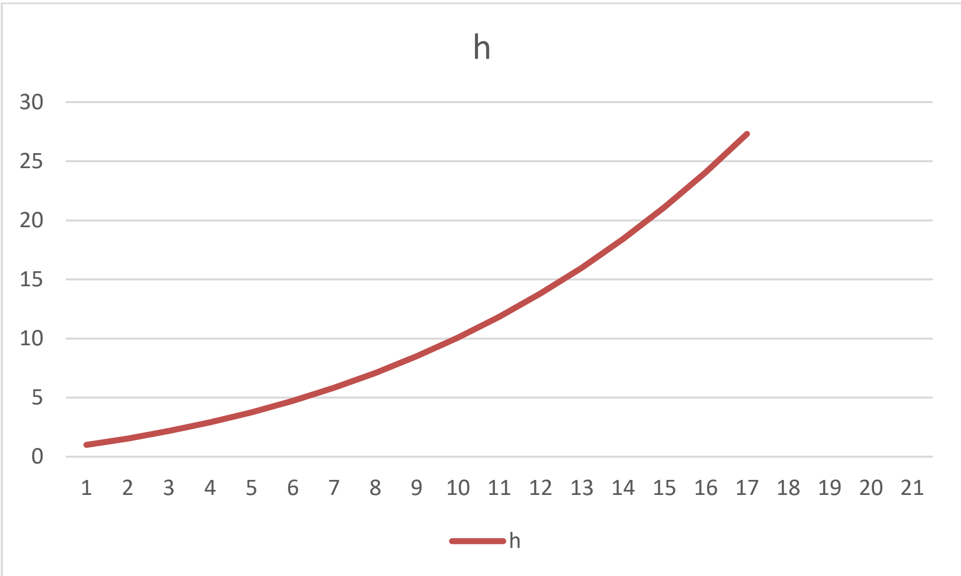
et la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

1. Etudier les variations de h et tracer son graphe (on précisera la pente de la demie tangente en zéro).

La dérivée est égale à : $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2}) > 0$ et

$h_d'(0) \approx \dfrac{1}{4\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x} + x/2 - (1 - \sqrt{x} + x/2) \approx 1/2$. Le graphe de la fonction admet une branche parabolique dans la direction verticale.



2. Calculer $I = \int_0^1 h(x)\ dx$

On pose $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\,dt = dx$ pour obtenir : $I = \int_0^1 (e^t + e^{-t})\,t\,dt$. On fait alors classiquement une intégration par parties et on obtient : $I = \left[(e^t - e^{-t})t\right]_0^1 - \int_0^1 (e^t - e^{-t})\,t\,dt$

$I = \left[(e^t - e^{-t})t - (e^t + e^{-t}\right]_0^1 = 2 - \dfrac{2}{e}$.

3. Soit la fonction numérique f définie par : $f\ x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ h(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f ainsi que de ses dérivées premières et secondes.

La fonction est indéfiniment dérivable en dehors de zéro, la question se pose uniquement en x=0.

- Continuité de f en 0 :

On a $f(x) = g(0) = 0$ et $\underset{0^+}{Lim}\ f\ x) = \underset{0^+}{Lim}\ h(x) = 1$, donc f est continue.

- Continuité de la dérivée f' en 0 :

On a $f_g^{'}(0) = g^{'}(0) = \dfrac{1}{2}$ car $g^{'}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})$, donc f' est continue (cf. question 1).

- Continuité de la dérivée seconde f'' en 0 :

On a $f_g''(0) = g''(0) = \frac{1}{12}$ car $g''(x) = -\dfrac{1}{4x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x} - \cos\sqrt{-x}\right)$ et

$\underset{0^+}{Lim} f''(x) = \underset{0^+}{Lim} h''(x) = \underset{0^+}{Lim} \frac{1}{8x}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})\right)$, d'où en utilisant les développements limités de l'exponentiel au voisinage de zéro :

$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x^2)$ et $e^{-\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x^2)$

$$\underset{0^+}{Lim}\, f''(x) = \underset{0^+}{Lim}\, \frac{1}{8x}\left(-2 - \frac{2x}{3!} + 2 + x\right) = \frac{1}{12} \text{ donc } f'' \text{ est continue.}$$

Exercice n° 4

On note $P = \{z \in C \ / \ \text{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in C \ / \ |z| < 1\}$, où $\text{Im}(z)$ désigne la partie réelle de z et $|z|$ son module. On considère l'application *f* définie sur *C* par : $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que *f* est une bijection de *P* sur *D*.

La fonction est bien définie puisque $-i \notin P$. Il faut montrer que : $\forall Z \in D, \exists! z \in D \ / \ Z = f(z)$

$Z \in D \Rightarrow |Z| < 1 \Rightarrow |z-i| < |z+i| \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow 4y > 0$ en posant $z = x + iy$

Par conséquent $z \in P$, et l'unicité est évidente donc l'application est bijective.

2. Déterminer le lieu géométrique des points d'affixe $f(z)$

Soit $z = x + iy$, alors $f(z) = \dfrac{(x^2 + y^2 - 1) + i(-2x)}{x^2 + (y+1)^2}$

Soit $Z = f(z) = X + iY \Rightarrow X = \dfrac{(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + (y+1)^2}$; $Y = \dfrac{(-2x)}{x^2 + (y+1)^2}$.

On pose $x = \cos\alpha$; $y + 1 = \sin\alpha$ pour obtenir : $X = -2\sin\alpha + 1$; $Y = -2\cos\alpha$.

Par conséquent : $(X-1)^2 + Y^2 = 4$. Le lieu géométrique est donc un cercle de centre A(1,0) et de rayon 2.

Exercice n° 5

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. On note *X* cette variable aléatoire. Par exemple si on obtient 3 et 4, le produit est égal à 12 et *X*=2.

1. Déterminer la loi de probabilité de X ?

Pour répondre aux différentes questions, on va présenter tous les cas possibles dans le tableau suivant :

Dé 1 /Dé 2	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	0
3	0	3	6	9	2	5
4	0	4	8	2	6	0
5	0	5	0	5	0	5

On peut remarquer que le tableau est symétrique puisque la multiplication est commutative.

La loi de probabilité est donc :

X	0	1	2	3	4	5	6	8	9
36 $P(X)$	15	1	4	2	3	5	3	2	1

2. Calculer la probabilité que X=0.

On obtient : $\text{Prob}\ (X = 0) = \frac{15}{36}$

3. Calculer la probabilité que X soit strictement supérieure à 4.

On obtient : $\text{Prob}\ (X > 4) = \frac{11}{36}$

4. Sur ce jeu (lancement de ces deux dés), un joueur mise 10 euros.
La règle du jeu est la suivante :
- Si X=0, le joueur perd sa mise,
- Si X est pair et différent de zéro, le joueur gagne 2 euros,
- Si X est impair, non nul et strictement inférieur à 9, le joueur gagne 4 euros,
- Si X=9, le joueur gagne 60 euros.
Calculer l'espérance de gain pour ce jeu. Commenter le résultat obtenu.

Soit Y cette fonction de gain, on a : $E(Y) = -10\times\frac{15}{36} + 2\times\frac{12}{36} + 4\times\frac{8}{36} + 60\times\frac{1}{36} = -\frac{34}{36}$.

Ce jeu est tout à fait réaliste, car d'une part les gains augmentent quand la probabilité diminue et d'autre part, l'espérance est négative, ce qui est toujours le cas des jeux d'argent (sinon pourquoi organiser de tels jeux !). De plus la redistribution (avec cette espérance) est de l'ordre de 9%., ce qui correspond à un chiffre moyen (ou inférieur) aux situations rencontrées dans différents jeux dans la réalité.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel non nul *n*, on considère la suite (u_n) définie par :

$u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$, où $n! = 1\times 2\times \ldots \times n$

1. Calculer u_1

On a : $u_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)e^t \, dt = \left[e^t\right]_0^1 - \int_0^1 t\,e^t \, dt = (e-1) - e + (e-1) = e-2$

2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n, en déduire l'expression de u_n.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

En conclusion : $u_{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)!} + u_n$ et par conséquent : $u_n = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} + e - 2$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \to e-2$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE PIERRE NDIAYE ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.
2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x \sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.
3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.
4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.
5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \tan(x/2)\cos(2x),$$

   expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.
6. Dériver la fonction définie à la question précédente.

7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B, on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal au résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + \cdots + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a, et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x)$$

1. Donner le domaine de définition de f_a, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a, $a \in \mathbf{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.
3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a.
4. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f_a à droite de 0.
5. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f'_a à droite de 0.
6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a.
8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

Exercice 3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$.
   (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1, $-1/2$, 0 et 1.
   (d) Tracer la courbe représentative de f.
2. On considère désormais la fonction de la variable réelle

$$g : x \mapsto \frac{\tan x}{1 + 2\cos x}.$$

   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.

(c) Étudier les branches infinies de g.

(d) Calculer la dérivée de g, et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.

(e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.

(f) Dresser le tableau de variations de g.

(g) Donner l'allure de la courbe représentative de g.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout n,
$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$
4. Conclure quant à la convergence de I_n.
5. Montrer que
$$\ln 2 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx.$$
6. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx = 0$$
et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1. (a) Montrer que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

   (b) En déduire que
   $$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\frac{\sqrt{2n-2}}{n}}$$
   et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

2. (a) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n}.$$

   (b) Montrer que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6

On considère l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe a tel que $|a| \neq 1$.

1. Montrer que l'application f_a donnée par

$$f_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

   est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.
2. Montrer que, si $z \in \mathbf{U}$, alors $\bar{z} = 1/z$.
3. En déduire que si $z \in \mathbf{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbf{U}$.
4. Réciproquement, montrer que tout élément t de $\mathbf{U}$ est l'image par f_a d'un unique élément z de $\mathbf{U}$ que l'on déterminera.
5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ et préciser sa bijection réciproque.
6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $a = 2$;
   (b) $a = 2i$;
   (c) $a = 1 + i$.

Exercice 7

On joue suivant la règle suivante : on est en possession d'un pion initialement placé au point 0 sur une règle graduée ; à chaque lancer du dé, on avance de 3 cases si le résultat est un multiple de 3, et on recule de 2 cases dans le cas contraire. Le joueur ou la joueuse gagne si, au bout de 5 lancers, le pion est sur une case positive ou nulle.

1. Soit X_k la variable aléatoire égale à 3 si le résultat du $k-$ième lancer est un multiple de 3, et à -2 sinon. Donner la loi de X_k.
2. Pour tout entier k, on pose $Y_k = (X_k + 2)/5$. Donner la loi de Y_k ainsi que la loi de la variable

$$S = \sum_{k=0}^{5} Y_k.$$

3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.
4. Pouvez-vous étendre votre raisonnement :
   (a) au cas où on avance de 3 cases si le résultat est 6, et on recule de 2 cases dans le cas contraire ?
   (b) au cas où on gagne si le pion est sur une case positive après 10 lancers ?
   Donner la probabilité de gain dans chacune de ces situations.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La reconfiguration des équilibres internationaux à l'œuvre actuellement, une guerre aux portes de l'Europe, la résurgence de multiples conflits locaux, sont autant de signes préoccupants de bouleversements dont on ne maitriserait que partiellement l'issue. La relance d'une gouvernance mondiale suffirait-elle selon vous à apaiser ces tensions ? Quelles autres mesures d'accompagnement à mettre en place s'avéreraient nécessaires selon vous ?

Sujet n° 2

La dépendance de nos pays à la production étrangère dans des secteurs stratégiques, la forte augmentation des coûts de l'énergie et ses effets sur les transports, ont posé la question d'une remise en cause partielle de la mondialisation au profit d'une relocalisation d'activités et d'une réindustrialisation dans les pays concernés. Quelles stratégies devraient-elles être mise en place par les Etats dans cette configuration selon vous en tenant compte d'une révision des échanges mondiaux dans un sens plus équilibré ?

Sujet n° 3

La planète compte actuellement 8 milliards d'individus répartis dans des zones géographiques dont certaines sont régulièrement soumises aux effets du changement climatique provoquant à terme le déplacement probable des populations concernées. Quelles mesures pourrait-on prendre au sein de la communauté des Etats pour anticiper le mieux possible les conséquences du changement climatique sur les populations localisées dans les zones géographiques touchées ? Quelles solutions pourrait-on apporter au nécessaire déplacement de populations dans les zones qui subiront les conséquences les plus graves du changement climatique ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Le graphe de f admet-il un centre de symétrie ?
3. Calculer $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx$.
4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par :
$u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\,(u_n)$.

Exercice n° 2

On considère l'application *f* définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$, où *a* est un paramètre réel strictement positif.
1. Etudier les variations et la convexité de *f*.
2. Montrer que *f* admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f\,(x) = x$.
4. Calculer $I(a) = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice n° 3

Soit $f :]0,+\infty[\to R$ définie par : $f(t) = \dfrac{Ln\,t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$.

Soit $F :]0,+\infty[\to R$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$

1. Etudier la continuité de *f* sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de *f* et celui de *F* sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que *F* est dérivable et calculer sa dérivée.
4. La fonction dérivée F' est-elle continue ?
5. Etudier les variations de *F* sur $]0,+\infty[$.

Exercice n° 4

1. Dans une tombola de 100 billets, deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à ½ d'obtenir au moins un billet gagnant ?

2. Dans une autre tombola composée également de 100 billets, sachant que le prix d'un billet est de 1 euro et qu'un billet gagnant rapporte 20 euros, combien faut-il de billets gagnants dans cette loterie pour que l'espérance de gain des joueurs soit la plus proche de zéro.

3. Dans une troisième tombola contenant 1000 billets, il y a 3 billets gagnants qui rapportent chacun 50 euros et 20 autres billets gagnants qui rapportent chacun 20 euros. Les autres billets sont perdants.
Sachant que le prix d'achat d'un billet est toujours d'un euro, calculer l'espérance de gain pour cette tombola.

Exercice n° 5

Les trois questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans R l'équation : $Ln\,(x^2-1)-Ln\,(2x-1)+Ln\,2=0$.

2. Résoudre dans R^2, le système : $\begin{cases} x+y+1=-4 \\ (x+2)(y-1)=-45 \end{cases}$

3. Résoudre dans R l'inéquation : $(m-3)x^2-2\,m\,x+12\geq 0$, où m est un paramètre réel.

Exercice n° 6

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x)=-1-\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre de Monsieur Mathieu Farina et Madame Elena Pasquinelli : « L'Art de faire confiance. Pour un nouveau contrat entre la science et les citoyens » paru en 2020 aux éditions Odile Jacob.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

La confiance est un ingrédient indispensable dans la vie d'une société et de chacun de ses membres. Au moment de prendre une décision, nous nous laissons guider par notre jugement ou par les conseils d'autres personnes. Pour se forger une opinion, nous nous appuyons sur des informations collectées par nous ou d'autres, et nous accordons notre confiance à ces données et à leurs sources. Nous sommes conscients que nous pouvons nous tromper, ou que les autres peuvent nous tromper, par ignorance ou par malveillance ; mais nous faisons néanmoins confiance, et même plus souvent que nous le pensons. Comment pourrait-il en être autrement ? Nos sociétés se sont construites grâce à la capacité à exploiter les connaissances produites par d'autres. C'est la confiance qui nous permet de bénéficier des avancées de notre culture. Nous faisons confiance à l'ingénieur qui planifie le pont, au boulanger qui fabrique notre pain, à l'enseignant qui nous délivre son savoir… Nous *devons* faire confiance.

Si cette confiance est indispensable, des outils de vigilance sont nécessaires, car nous ne pouvons pas accorder notre confiance de manière aveugle. Comment discerner le bon grain de l'ivraie dans l'ensemble des informations – parfois divergentes – auxquelles nous sommes confrontés ?

La question se fait aujourd'hui plus pressante du fait d'une profusion d'informations faciles d'accès. En tant que citoyens curieux et responsables, consommateurs quotidiens d'Internet, nous sommes submergés d'informations de qualité variable. Ces informations sont obtenues à très bas coût : un clic. Téléphones et tablettes les ont rendues omniprésentes : une bibliothèque et un kiosque à presse dans votre poche, partout, tout le temps. Pour autant, sommes-nous réellement capables d'en tirer profit ?

Le domaine de la santé nous offre quantité d'exemples qui illustrent la difficulté à discerner le vrai du faux dans la masse d'informations que le Web place à portée de nos doigts. Imaginons, par exemple, que nous cherchions à vérifier l'affirmation selon laquelle consommer de la vitamine C permettrait d'écourter, prévenir ou soigner le rhume. Direction Internet : Nous commençons donc par écrire dans l'espace dédié du moteur de recherche les mots suivants : « rhume » et « vitamine C ». En 0,41 seconde 569 000 résultats s'affichent.

Pour les anglophones, l'attente est encore moins longue – 0,38 seconde - et la pêche encore plus riche : 201 millions de pages Web prêtes à répandre leurs lumières sur notre interrogation. Quand la question qui nous taraude présente un enjeu réel, nous pouvons nous sentir désemparés, perdus au milieu d'une jungle d'informations souvent contradictoires. Comment reconnaître dans cet enchevêtrement d'opinions la connaissance fiable sur laquelle fonder ses décisions ?

Le problème du tri des informations n'est cependant pas nouveau. Par le passé, déjà, nous devions faire face à des rumeurs, à des vérités assenées par certains et rejetées par d'autres. Ainsi les saignées (1) ont-elles continué à être pratiquées jusqu'au XXème siècle bien que leurs bases théoriques aient été mises à mal depuis la Renaissance, et que leur manque d'efficacité ait été prouvé au début du XIXème siècle. Tout comme nous aujourd'hui, les femmes et les hommes de l'époque avaient des idées bien arrêtées sur mille sujets, et ils les relayaient sans s'être assurés de leur bien-fondé. Le citoyen du XIXème siècle, soucieux de se forger une opinion, aurait certainement éprouvé toutes les difficultés à accéder à la meilleure connaissance disponible.

Dans notre contexte moderne, le problème des *fake news* a certainement pris une forme et une ampleur nouvelles, mais ses racines sont plutôt à rechercher dans notre nature et notre façon de penser le monde. Le succès immédiat d'une idée ne dépend pas uniquement des preuves qui la sous-tendent. Les informations capables d'évoquer des émotions négatives – comme la peur d'un attentat ou d'une maladie - ou qui se révèlent surprenantes - comme celles révélées par des légendes urbaines – sont par exemple plus à même de capter notre attention et de rester dans notre mémoire. Elles sont également plus largement partagées *via* les réseaux sociaux ou le bouche-à-oreille. Les faits objectifs ne sont pas forcément ceux qui circulent le mieux. Certaines informations étayées ne font pas le poids face à des affabulations concurrentes. Ces dernières résistent aux preuves et se diffusent.

Développer l'esprit critique dans notre société ne peut donc se résumer à rassembler quelque part les *bonnes* informations que l'on mettrait à la disposition de tout un chacun. Un effort supérieur est requis. Voilà pourquoi nous avons décidé de vous inviter à réfléchir aux mécanismes cognitifs qui sous-tendent la construction d'une idée ou l'évaluation d'une information afin de découvrir dans quelles situations nos attitudes spontanées se révèlent insuffisantes et limitées. Une fois que vous serez sensibilisés à certaines limites de notre cognition, nous partirons en quête des outils et solutions que notre culture a apportés pour les dépasser. Ces solutions que nous évoquerons, ce sont celles de la science. […]

L'esprit critique est une quête de confiance bien placée

En tant que citoyens curieux et responsables, consommateurs quotidiens d'internet, nous sommes submergés d'informations de qualité variable, que nous recherchons ou qui, simplement nous tombent dessus. Comment se sortir de cette jungle d'informations ? Comment distinguer entre, d'un côté les déclarations qui relèvent de simples opinions et, de l'autre, les affirmations qui s'appuient sur des connaissances scientifiques bien établies ?

Nous sommes capables au quotidien de construire des connaissances simples par nos propres moyens. Cependant, l'accès à la grande masse des connaissances produites et accumulées par notre espèce au cours de son histoire exige de notre part un effort supplémentaire : faire confiance aux autres. Au fil de ces chapitres, nous avons cherché à convaincre le lecteur que faire preuve d'esprit critique ne signifie pas s'armer comme des Don Quichotte pour courir après tous les moulins à vent du monde de l'information. L'esprit critique est une forme de confiance éclairée qui doit guider une prise de décision plus juste. Dans cette quête de confiance bien placée, la science doit jouer un rôle clé.

Science et cognition

Pendant que l'humanité inventait de nouveaux outils pour observer la réalité qui nous entoure de manière plus rigoureuse, elle acquérait dans le même temps une meilleure connaissance de son propre fonctionnement. En appliquant les outils de la science à nos propres comportements, nous avons ainsi construit une *science de nous-mêmes.* Nous sommes passés de l'autre côté du miroir. Les chercheurs savent maintenant que nous possédons des capacités, des limites, des préférences et des tendances qui sont universelles et qui caractérisent notre nature humaine. Celles-ci sont le fruit de millions d'années d'évolution. Notre capacité d'observation sommaire, notre rapidité à suspecter la cause d'un malheur, notre tendance à nous accrocher à nos idées et à convaincre nos pairs de leur bien-fondé ont dû nous nous sauver maintes fois lorsqu'il s'agissait de survivre, dans un monde incertain, changeant et déjà social. Aujourd'hui, nous avons besoin d'outils supplémentaires pour nous en sortir dans un monde qui a tant changé et que nous avons contribué à changer.

Des outils et des stratégies pour une confiance éclairée

C'est avec cette considération en tête que nous nous sommes embarqués dans un voyage d'épistémologie de terrain. Nous avons contacté des laboratoires de recherche scientifique, dialogué avec ses acteurs et essayé de comprendre leur quotidien et les outils qu'ils mobilisent pour répondre à un objectif de connaissance fiable. Ces outils ne sont pas toujours à notre portée. Nous avons cependant appris à les employer pour reconnaître une information fiable fondée sur des méthodes rigoureuses. Une telle expertise nous offre la possibilité de fonder nos choix les plus importants sur la meilleure information disponible à un instant donné.

Mais voilà que survient un événement polémique, un scandale, un incident qui touche de trop près la science… et la confiance de nouveau vacille. Et si cette fois les scientifiques se trompaient ? A moins qu'ils ne soient sciemment en train de nous tromper ? Certes notre méfiance peut naître pour des raisons légitimes – l'histoire nous offre malheureusement des exemples qui ont alimenté cette méfiance et de tels événements restent gravés dans notre mémoire collective… Pourtant chaque faille devrait être mise en balance avec l'ensemble des bénéfices produits par la science, sur le long terme, et domaine par domaine. De son côté, la science a le devoir de veiller à ce que ses principes soient respectés dans la pratique et ses outils améliorés Elle doit mériter notre confiance. Si celle-ci est perdue, nos opinions et nos décisions risquent de se retrancher dans l'horizon restreint de nos intuitions individuelles ou de groupe, sans garantie de succès.

Entre nous et la science

Si nous voulons vraiment profiter de la richesse des connaissances produites par notre société, nous ne pouvons pas faire l'économie d'une compréhension suffisante de la science. Cependant, même une alphabétisation scientifique avancée ne peut pas suffire. Confrontés à des débats d'experts, à une information trop technique ou contradictoire sur Internet, nous serons dépassés si nous ne pouvons compter que sur nous-mêmes. Nous avons donc besoin de nous appuyer sur une couche d'experts de proximité, jouant le rôle d'intermédiaires entre la science et la société.

L'expert de proximité – médecin, journaliste, enseignant, scientifique vulgarisateur, etc. – serait celui qui possède l'expertise nécessaire pour comprendre, évaluer l'information avec l'aide de critères, et transmettre le savoir de la science. Il porterait aussi la responsabilité d'interroger la science et de lui demander des comptes quand celle-ci s'écarte de ses principes. On constate cependant que le déficit de connaissance de la méthode scientifique n'affecte pas uniquement les citoyens, mais aussi certains de ceux qui pourraient les informer et les éclairer. C'est donc une condition à améliorer pour établir une chaîne de confiance qui relie la science au grand public. […]

Eloge de la lente amélioration des choses

La science n'est pas certes parfaite, et les scientifiques, dans leur vie quotidienne comme dans leur travail, sont des êtres humains qui montrent les mêmes limites et les mêmes « mauvaises » habitudes que tout un chacun – ou presque. Ils commettent des erreurs, leurs résultats sont susceptibles de biais. Ils disposent cependant d'un ensemble d'outils fournis par la science pour contrôler ces biais. Aucune entreprise humaine ne sera jamais totalement exempte d'erreur. Nous ne pouvons pas en demander autant. La science poursuit pourtant l'objectif de construire des connaissances objectives. Elle n'est pas le mieux mais le meilleur possible. Ses stratégies nous permettent de faire mieux qu'une observation improvisée, qu'un pressentiment ou une explication basée sur des faits anecdotiques. La méthode scientifique non plus, n'est pas parfaite, pas plus que les connaissances qu'elle permet de produire. Elle est pourtant le seul bouclier que nous possédons contre les arnaques pseudoscientifiques, les charlatans et autres douces illusions… Nous associons les progrès de la science à des instruments technologiques comme le microscope, le télescope ou les ordinateurs de plus en plus puissants et rapides. Nous en venons à oublier les outils d'ordre épistémologiques que nous avons rencontrés tout au long de cet ouvrage. De la grille d'observation aux protocoles expérimentaux les plus complexes – comme les essais randomisés, contrôlés et effectués en double ou triple aveugle -, des statistiques pour calculer les erreurs aux outils mathématiques pour prédire le futur… toutes ces stratégies et artéfacts ont eux aussi participé à une marche en avant de la science vers toujours plus de fiabilité. […]

Même si les moyens intellectuels et matériels de la science augmentent sans cesse, les défis auxquels l'humanité se confronte sont toujours plus grands. La recherche scientifique a toujours été et restera difficile. Et pour cela, on ne peut rien. Si ce n'est développer notre patience. La science se doit – et nous doit – de ne pas courir vers de nouvelles découvertes, mais de prendre le temps de répliquer les études, de multiplier les données et de croiser les méthodes d'investigation. Cela peut être dur à accepter, notamment quand on attend de la science qu'elle nous aide à sauver des vies, mais courir ne rend pas nécessairement service : se précipiter donne des solutions apparentes mais qui ne sont pas nécessairement les bonnes. Il y a un facteur temps incompressible dans la phase de recherche puis dans celle de validation d'une connaissance nouvelle. La science est donc lente et doit le rester. C'est à ce prix qu'elle produit des découvertes solides et fiables, que l'on pourra appliquer et utiliser pour mieux décider en connaissance de cause.

Exercer son esprit critique : le kit de survie

[…] Faire preuve d'un esprit critique relève d'un ensemble d'attitudes à adopter, de compétences à développer et de connaissances à acquérir. La tâche n'est pas facile. Il ne s'agit pas de baisser la confiance en soi-même ou envers les autres et devenir plus méfiants. Bien au contraire, il s'agit d'apprendre à calibrer sa confiance pour qu'elle soit en adéquation avec les circonstances. Pour cela, nous avons besoin, en premier lieu, de penser à rendre explicite notre évaluation des informations : pourquoi faisons-nous confiance à cet informateur ? Pourquoi cette information suscite-t-elle en nous une réaction de rejet ou d'incrédulité ? Pourquoi nous sentons-nous si sûrs de l'affirmation que nous venons de formuler ? En somme, faire l'effort d'apprendre à s'autoévaluer et à se poser des questions sur ce qu'on sait ou sur ce qu'on ne sait pas. Tout cela nous rendra un peu plus lents mais un peu plus justes dans nos jugements. […]

Nous demandons aux scientifiques plus de transparence dans la production de leurs résultats. Nous devrions nous engager à notre tour à être des citoyens informés, exigeants envers nos sources d'information, attentifs à ne pas répandre inutilement des informations douteuses, actifs dans la correction de celles qui nous tombent sous la main. C'est le prix à payer pour avoir le droit de profiter du monde d'Internet et d'une société de la connaissance.

(1) - Saignée : prélèvement de sang pratiqué sur un malade pour améliorer son état.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE PIERRE NDIAYE ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

   On fait le changement de variable $t = \ln x$, $dt = dx/x$ et il vient :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx &= \int_0^{\ln 2} \cos t dt \\ &= [\sin t]_0^{\ln 2} \\ &= \sin(\ln 2).\end{aligned}$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{x \sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$. On a

$$f(x) = \frac{\sin x - 1/\sqrt{x}}{x - 1/x}.$$

   Quand x tend vers $+\infty$, le numérateur reste borné et le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.

   Quand x tend vers 1, le numérateur de la fonction tend vers $\sin 1 - 1 < 0$, et le dénominateur tend vers 0 par valeurs inférieures ou supérieures selon que x est plus petit ou plus grand que 1.
   Par suite, la limite à gauche de f en 1 est $+\infty$, et sa limite à droite est $-\infty$.

4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \tan(x/2)\cos(2x),$$

   expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

   La fonction $x \mapsto \tan(x/2)$ est impaire, périodique de période 2π et n'est pas définie au points multiples impairs de π. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est paire et de période π. La fonction f est donc impaire et de période 2π, avec le même ensemble de définition que $x \mapsto \tan(x/2)$. Par suite on étudie cette fonction sur l'intervalle $[0, \pi[$, on fait ensuite la symétrie par rapport à l'origine sur l'intervalle $]-\pi, 0]$ et on reproduit la courbe obtenue par translation périodique à tout l'ensemble de définition.

6. Dériver la fonction définie à la question précédente.

   En combinant les formules de dérivation d'un produit et de dérivation des fonctions composées, il vient :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x/2))\cos(2x) - 2\tan(x/2)\sin(2x).$$

7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B, on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal au résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?

   Le joueur A fait un score égal à 5 avec probabilité 1/6, un score égal à 6 avec probabilité 1/6, et un score égal à 0 avec probabilité 4/6. L'espérance de son score est donc égale à $0 \times 4/6 + 5/6 + 6/6 = 11/6$.
   Le joueur B fait un score égal à k, $2k$, $3k$ ou $4k$ avec probabilité 1/6, et un score égal à 0 avec probabilité 2/6. L'espérance de son score est donc égale à $0 \times 2/6 + k/6 + 2k/6 + 3k/6 + 4k/6 = 10k/6$.
   Le jeu est équitable si les deux espérances de gain sont égales, soit si $k = 11/10$.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + \cdots + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

$u_{n+1}^2 = u_0^2 + \cdots + u_n^2$, donc $u_{n+1}^2 > u_n^2$, et comme tous les termes de la suite sont évidemment positifs, $u_{n+1} > u_n$ et la suite est croissante. Par ailleurs, pour $n \geq 1$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 > u_0^2$ et cette différence ne tend donc pas vers 0 quand $n \to +\infty$: la suite (u_n^2) n'est donc pas convergente, elle tend vers l'infini, et il en est donc de même de la suite (u_n).

9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

   A l'évidence, on a $u_n > 0$ pour tout entier n. La fonction $f(x) = x^2 + 1/4$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$, donc la suite (u_n) est monotone. Comme $u_1 > 1/4 = u_0$, elle est croissante.
   Si la suite converge ce sera vers une solution de l'équation $f(l) = l$, soit $l^2 + 1/4 = l$. La seule racine positive de cette équation est $l = 1/2$, et comme $u_0 < 1/2$, la croissance de f implique par une récurrence immédiate que $u_n < 1/2$ pour tout n. La suite est donc croissante, majorée par $1/2$, donc elle converge et sa limite est la seule possible, c'est-à-dire $1/2$.

10. Résoudre l'equation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

    $x_1 = 1$ est solution évidente de cette équation, et on peut donc factoriser l'expression de l'énoncé par $x - 1$.
    Un calcul immédiat montre que $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 = (x-1)(x^2 + 5x + 1)$. Il reste donc à calculer les solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$. Le discriminant de cet équation du deuxième degré est égal à $25 - 4 = 21$, les solutions cherchées sont donc $(x_2 = -5 - \sqrt{21})/2$ et $(x_3 = -5 + \sqrt{21})/2$.
    Les solutions réelles de l'équation donnée par l'énoncé sont donc x_1, x_2 et x_3, et ce sont aussi ses solutions complexes.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a, et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x)$$

1. Donner le domaine de définition de f_a, et calculer sa dérivée.

   $f_a(x)$ est définie pour tout $x > 0$ et dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition. Si $a \neq 0$, sa dérivée vaut

   $$f_a'(x) = \left(ax^{a-1} \ln x + x^{a-1}\right) \exp(x^a \ln x) = x^{a-1} \left(a \ln x + 1\right) \exp(x^a \ln x).$$

   Si $a = 0$, $f_0(x) = x$ donc $f_0'(x) = 1$.

2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a, $a \in \mathbf{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.

   Pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f_a(1) = \exp(0) = 1$. Donc toutes les courbes passent par le point de coordonnées $(1, 1)$.

3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a.

   — si $a \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$; de plus, si $a > 0$, $f_a(x)/x = \exp((x^a - 1) \ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp((x^a - 1) \ln x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)/x = +\infty$ et la courbe représentative de f_a admet une branche parabolique d'axe $y'y$ en $+\infty$; enfin, $f_0(x) = x$ et donc la courbe représentative de f_0 est confondue avec son asymptote d'équation $y = x$;

— si $a < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 1$; dans ce cas, la courbe représentative de f_a admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

4. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f_a à droite de 0.

— si $a > 0$, $\lim_{x\to0^+} x^a \ln x = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to0^+} f_a(x) = 1$;
— si $a \leq 0$, $\lim_{x\to0^+} x^a \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to0^+} f_a(x) = 0$.

5. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f'_a à droite de 0.

— si $a > 1$, $\lim_{x\to0^+} x^{a-1}\,(a\ln x + 1)\exp(x^a \ln x) = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = 0$;
— si $a = 1$, $f'_1(x) = (\ln x + 1)\exp(x \ln x)$; le premier terme de ce produit tend vers $-\infty$ et le second vers 1 quand x tend vers 0 par la droite ; donc $\lim_{x\to0^+} f'_1(x) = -\infty$.
— si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to0^+} x^{a-1}\,(a\ln x + 1)\exp(x^a \ln x) = -\infty$ comme produit de trois fonctions tendant respectivement vers $= \infty$, $-\infty$ et 1, donc $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = -\infty$;
— si $a = 0$, $f'_0(x) = 1$ en tout point, donc également par limite à droite de 0 ;
— si $a < 0$, par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle (ou en passant aux logarithmes, en mettant $\ln x$ en facteur et en faisant tendre x vers 0 à droite) il vient que $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = 0$.

6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

On sait déjà que $f_a(1) = 1$ pour tout réel a, et un calcul rapide montre qu'on a également $f'_a(1) = 1$ pour tout réel a : par suite, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est, pour tout a, $y = x$.

7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a

$f'_a(x)$ est, pour tout $x > 0$, du signe de $(a\ln x + 1)$. Si $a > 0$, on a donc $f'_a(x) < 0$ ssi $x < \exp(-1/a)$ et $f'_a(x) > 0$ ssi $x > \exp(-1/a)$: f_a est donc successivement décroissante puis croissante et atteint son minimum en un point x_a compris entre 0 et 1. Si $a < 0$, c'est le contraire qui se produit : f_a est successivement croissante puis décroissante, et atteint son maximum en un point x_a supérieur à 1.

Dans tous les cas, $x = \exp(-1/a)$ correspond à un extremum local dont la valeur est $f_a(\exp(-1/a)) = \exp(-1/ae)$.

Les tableaux de variations se déduisent alors des considérations précédentes.

8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.

Les courbes se déduisent sans peine des informations contenues dans les tableaux correspondants.

9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

$$\begin{aligned} f_{-0,1}(10^{10}) &= \exp\left(\left(10^{10}\right)^{-0.1}\ln\left(10^{10}\right)\right) \\ &= \exp\left(10^{-1}\times 10\ln 10\right) \\ &= \exp(\ln 10) \\ &= 10. \end{aligned}$$

On a vu plus haut que comme $-0.1 < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_{-0.1}(x) = 1$. Le calcul ci-dessus montre que la convergence vers l'asymptote est lente, d'autant que la fonction décroit depuis l'instant $x = \exp(10)$...

Exercice 3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$.
   (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.

   On trouve par un calcul immédiat : $f(-1) = 1/2$, $f(-1/2) = 3/8$, $f(0) = -1/2$ et $f(1) = -3/2$.

   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.

   $f'(x) = 3x^2 - 2$. f' s'annule donc aux points $x = -\sqrt{2/3}$ et $x = \sqrt{2/3}$. Par suite, f est croissante entre $-\infty$ et $-\sqrt{2/3}$ ainsi qu'entre $\sqrt{2/3}$ et $+\infty$, et décroissante entre $-\sqrt{2/3}$ et $\sqrt{2/3}$. On en déduit le tableau de variations de f.

   (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1, $-1/2$, 0 et 1.

   On a $f(1) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; par ailleurs, $\sqrt{2/3} < 1$ donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty]$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule une unique fois sur cet intervalle.

   De même, $-\sqrt{2/3} < -1/2 < 0 < \sqrt{2/3}$ donc f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1/2, 0]$. Comme $f(-1/2) > 0$ et $f(0) < 0$, le même argument montre que f s'annule une unique fois sur cet intervalle.

   De ce qui précède, on tire également que $f(-\sqrt{2/3}) > f(-1/2) > 0$. Comme par ailleurs $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, on déduit de la croissance et de la continuité de f entre $-\infty$ et $-\sqrt{2/3}$ que f s'annule une unique fois sur cet intervalle. Enfin, $f(-1) > 0$ montre que cette dernière solution est inférieure à -1.

   En résumé, f s'annule donc 3 fois : une fois en un point x_1 situé à gauche de -1, une fois en un point x_2 situé entre $-1/2$ et 0, et une fois en un point x_3 situé à droite de 1.

   (d) Tracer la courbe représentative de f.

   Elle se déduit aisément de ce qui précède.

2. On considère désormais la fonction de la variable réelle

$$g : x \mapsto \frac{\tan x}{1 + 2\cos x}.$$

(a) Donner le domaine de définition de g.

$g(x)$ est bien définie si $\tan x$ est bien définie et $1+2\cos x \neq 0$. La première condition est satisfaite ssi $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; la deuxième est satisfaite ssi $\cos x \neq -1/2$, c'est-à dire que $x \neq -2\pi/3 + 2k\pi$ et $x \neq 4\pi/3 + 2k\pi$, toujours avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit le domaine de définition de g.

(b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.

Il est clair que si x est dans le domaine de définition de g, c'est aussi le cas de $-x$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{\tan(-x)}{1+2\cos(-x)} \\ &= \frac{-\tan x}{1+2\cos x} \end{aligned}$$

et il s'ensuit que la fonction g est impaire. De plus, g est clairement périodique de période 2π. On étudiera donc g sur l'intervalle $[0,\pi]$ privé des points $\pi/2$ et $2\pi/3$ où elle n'est pas définie.

(c) Étudier les branches infinies de g.

Sur l'intervalle considéré, il suffit de regarder les limites à droite et à gauche en $\pi/2$ et en $2\pi/3$. Il vient facilement que $\lim_{x\to\pi/2^-} = +\infty$; $\lim_{x\to\pi/2^+} = -\infty$; $\lim_{x\to 2\pi/3^-} = -\infty$; et $\lim_{x\to 2\pi/3^+} = +\infty$: on a donc deux asymptotes verticales d'équations $x = \pi/2$ et $x = 2\pi/3$ sur notre intervalle d'étude.

(d) Calculer la dérivée de g, et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1+2\cos x}{\cos^2 x} + 2\tan x \sin x}{(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{1+2\cos x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{1+2\cos x + 2(1-cos^2 x)\cos x}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{-2\cos^3 x + 4\cos x + 1}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2}. \end{aligned}$$

(e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.

D'après l'expression précédente, le signe de g' est donc celui de $-2\cos^3 x + 4\cos x + 1 = -2f(\cos x)$.

Quand x parcourt l'intervalle d'étude $[0,\pi]$, $\cos x$ décroît continûment de 1 à -1. Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il passe une unique fois par x_2, qui est la seule valeur annulant $f(x)$ entre -1 et 1. Plus précisément, l'étude faite à la question 1 montre que cette valeur est comprise entre $-1/2$ et 0, et pour avoir $-1/2 \leq \cos x \leq 0$ avec $x \in [0,\pi]$, il faut avoir $\pi/2 \leq x \leq 2\pi/3$, ce qui achève la démonstration.

(f) Dresser le tableau de variations de g.

Il résulte de la question précédente que $g'(x) > 0$ ssi $f(\cos x) < 0$ ce qui implique que $\cos x \geq \cos x_0$ et finalement, étant donné la décroissance de cos sur $[0, \pi]$, que $x \leq x_0$, x_0 désignant le point de $[0, \pi]$ tel que $\cos x_0 = x_2$

(g) Donner l'allure de la courbe représentative de g.

Elle se déduit des questions précédentes sans oublier de compléter par symétrie par rapport à l'origine (g est impaire), puis par translations horizontales de vecteur $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx = \ln 3 - \ln 2.$$
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2x}dx = \frac{1}{2}\ln 3.$$

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Si $0 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $x^n \geq x^{n+1}$ donc $1+x+x^n \geq 1+x+x^{n+1}$ donc $\frac{1}{1+x+x^n} \leq \frac{1}{1+x+x^{n+1}}$ et finalement $I_n \leq I_{n+1}$. La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante.

3. Montrer que pour tout n,

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$

Ce résultat provient immédiatement du fait que si $0 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $x^n \geq 0$ donc $\frac{1}{1+x+x^n} \leq \frac{1}{1+x}$.

4. Conclure quant à la convergence de I_n.

On a donc

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante et majorée par $\ln 2$, donc convergente.

5. Montrer que

$$\ln 2 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx.$$

$$\begin{aligned}\ln 2 - I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)(1+x+x^n)}dx.\end{aligned}$$

6. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx = 0$$
et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Pour tout $x\in[0,1]$, $(1+x+x^n)(1+x)\geq 1$ donc $0\leq \dfrac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}\leq x^n$ et finalement
$$0\leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$
Le théorème dit "des gendarmes" permet alors de conclure au résultat demandé, d'où on déduit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1}$ pour tout $n\geq 0$.

1. (a) Montrer que $\sqrt{n}\leq u_n\leq\sqrt{2n}$ pour tout entier $n\geq 1$.

Il est clair que, pour tout entier n, $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$ d'où la première inégalité.
On montre la deuxième inégalité par récurrence : $u_1 = \sqrt{2}$ permet d'initialiser, et si $u_n\leq\sqrt{2n}$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1}\leq\sqrt{\sqrt{2n}+n+1}$.
Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $2n\leq n^2+2n+1 = (n+1)^2$. En passant à la racine carrée, il vient $\sqrt{2n}\leq n+1$ ce qui, reporté dans l'équation de récurrence, montre que $u_{n+1}\leq\sqrt{2(n+1)}$, ce qui conclut la démonstration.

(b) En déduire que
$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{1+\frac{\sqrt{2n-2}}{n}}$$
et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n\to\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{\sqrt{n}} &\leq \frac{\sqrt{u_{n-1}+n}}{\sqrt{n}}\\ &\leq \sqrt{\frac{\sqrt{2n-2}}{n}+1}.\end{aligned}$$
Le membre de droite de cette inégalité converge vers 1, et comme on sait que $u_n\geq\sqrt{n}$, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} u_n/\sqrt{n} = 1$.

2. (a) Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}.$$

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{n-1}}{n}.$$
La première fraction de cette expression tend vers 1 d'après la question précédente, tandis que la deuxième tend vers 0. Par suite,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

On peut soit multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur (c'est-à-dire $\sqrt{1+x}+1$) pour lever l'indétermination, soit reconnaître la dérivée au point 0 de l'application $x\mapsto\sqrt{1+x}$: les deux méthodes amènent directement au résultat demandé.

(c) Déduire des questions précédentes la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}.$$

Il suffit en effet de coupler les résultats des deux questions précédentes pour trouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n-\sqrt{n}=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
u_n-\sqrt{n} &= \sqrt{u_{n-1}+n}-\sqrt{n}\\
&= \sqrt{n}\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right]\\
&= \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{n}\frac{\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right]}{\frac{u_{n-1}}{n}}\\
&= \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right]}{\frac{u_{n-1}}{n}}.
\end{aligned}$$

Le second terme de ce produit tend vers 1/2 d'après la question 2c ; quant au premier terme, il vaut

$$\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

et tend donc vers 1 d'après la question 1b : cela conclut la démonstration.

Exercice 6

On considère l'ensemble **U** des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe a tel que $|a|\neq 1$.

1. Montrer que l'application f_a donnée par

$$f_a(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.

$f_a(z)$ est bien définie ssi $1+\bar{a}z \neq 0$, c'est-à-dire $\bar{a}z \neq -1$. Mais comme $z \in \mathbf{U}$, $|\bar{a}z| = |\bar{a}| = |a| \neq 1$ par hypothèse. Comme $|-1| = 1$, on ne peut donc pas avoir $\bar{a}z = -1$, et $f_a(z)$ est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.

2. Montrer que, si $z \in \mathbf{U}$, alors $\bar{z} = 1/z$.

   Si, $z \in \mathbf{U}$ z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et donc $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$. En multipliant et divisant par la quantité conjuguée, on trouve que

$$\bar{z} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{z}.$$

3. En déduire que si $z \in \mathbf{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbf{U}$.

   Si $z \in \mathbf{U}$, alors

$$\begin{aligned} f_a(z) &= \frac{z+a}{z\left(\frac{1}{z}+\bar{a}\right)} \\ &= \frac{z+a}{z\left(\bar{z}+\bar{a}\right)} \\ &= \frac{z+a}{z\left(\overline{z+a}\right)}. \end{aligned}$$

   Comme $|z| = 1$ et $|\overline{z+a}| = |z+a|$, le module d'un produit étant le produit des modules, on en conclut que $|f_a(z)| = 1$ d'où le résultat demandé.

4. Réciproquement, montrer que tout élément t de $\mathbf{U}$ est l'image par f_a d'un unique élément z de $\mathbf{U}$ que l'on déterminera.

$$\begin{aligned} t = f_a(z) \quad &\Leftrightarrow \quad t = \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \\ &\Leftrightarrow \quad t + \bar{a}zt = z + a \\ &\Leftrightarrow \quad z(1-\bar{a}t) = t - a \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{t-a}{1-\bar{a}t}. \end{aligned}$$

   Notons que comme $|-a| \neq 1$, le dénominateur de cette dernière expression n'est pas égal à 0 comme nous l'avons vu à la question 1. Par suite on a bien déterminé l'unique nombre complexe z tel que $f_a(z) = t$. Par ailleurs, $z = f_{-a}(t)$, et comme $t \in \mathbf{U}$, on déduit de la question 3 que $z \in U$, ce qui achève le raisonnement.

5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ et préciser sa bijection réciproque.

   Nous venons de montrer que pour tous z et t dans $\mathbf{U}$, $t = f_a(z)$ ssi $z = f_{-a}(t)$, ce qui prouve que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ dont la bijection réciproque est f_{-a}.

6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :

(a) $a = 2$;

D'après ce qui précède, il suffit de calculer les images par f_{-2} des points considérés, et on trouve respectivement les valeurs de z égales à -1, 1, $(-4-3i)/5$ et $(-4+3i)/5$.

(b) $a = 2i$;

De même, en calculant les images par f_{-2i} des points considérés, on trouve respectivement les valeurs de z égales à $(3-4i)/5$, $(-3-4i)/5$, i et $-i$.

(c) $a = 1+i$.

Le même procédé donne les résultats $(-3-4i)/5$, -1, $-i$ et $(-4-3i)/5$.

Exercice 7

On joue suivant la règle suivante : on est en possession d'un pion initialement placé au point 0 sur une règle graduée ; à chaque lancer du dé, on avance de 3 cases si le résultat est un multiple de 3, et on recule de 2 cases dans le cas contraire. Le joueur ou la joueuse gagne si, au bout de 5 lancers, le pion est sur une case positive ou nulle.

1. Soit X_k la variable aléatoire égale à 3 si le résultat du $k-$ième lancer est un multiple de 3, et à -2 sinon. Donner la loi de X_k.

   X_k est égal à 3 si le dé tombe sur 3 ou 6. La loi de X_k est donc donnée par $P(X_k = 3) = 2/6 = 1/3$ et $P(X_k = -2) = 1 - P(X_k = 3) = 2/3$.

2. Pour tout entier k, on pose $Y_k = (X_k + 2)/5$. Donner la loi de Y_k ainsi que la loi de la variable
$$S = \sum_{k=0}^{5} Y_k.$$

   Si $X_k = -2$, $Y_k = 0$; si $X_k = 3$, $Y_k = 1$. Y_k est donc une variable de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$, qui vaut 1 quand le $k-$ième lancer fait avancer le pion (on appellera cette situation un succès).
   On en déduit que S, qui représente le nombre de succès en 5 lancers indépendants, est de loi binomiale de paramètres $(5, 1/3)$.

3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.

   La position du pion au bout de 5 lancers est égale à $\sum_{k=1}^{5} X_k$. On a $X_k = 5Y_k - 2$, donc $\sum_{k=1}^{5} X_k = 5S - 10 = 5(S-2)$.
   On en déduit qu'on a gagné si et seulement si $S \geq 2$. Or
$$\begin{aligned} P(S \geq 2) &= 1 - P(S=0) - P(S=1) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\simeq 0,54 \end{aligned}$$

4. Pouvez-vous étendre votre raisonnement :

   (a) au cas où on avance de 3 cases si le résultat est 6, et on recule de 2 cases dans le cas contraire ?

(b) au cas où on gagne si le pion est sur une case positive après 10 lancers ?
Donner la probabilité de gain dans chacune de ces situations.

Pour le cas (a), On fait exactement le même raisonnement, si ce n'est que S est de loi binomiale de paramètres $(5, 1/6)$. On trouve alors une probabilité de gain égale à $0,20$. Pour le cas (b), S est de loi binomiale de paramètres $(10, 1/6)$ et un calcul analogue au précédent montre que l'on gagne si $S \geq 4$. Après calculs, on trouve que la probabilité de gagner est égale à $0,44$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
Cette hyperbole admet les droites y=1 et x=0 comme asymptotes. La fonction et décroissante.

2. Le graphe de f admet-il un centre de symétrie ?
Le point de coordonnées (0, 1) est un centre de symétrie (fonction impaire dans le changement de repère).

3. Calculer $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx$.
On a : $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} [x + Ln\, x]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} (1 - \epsilon - Ln\, \epsilon) = +\infty$.

4.Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par : $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\,(u_n)$.
On vérifie aisément par récurrence que la suite est toujours à termes strictement positifs.
Si la suite converge, elle converge vers un point fixe l de la fonction, à savoir : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Comme la fonction est décroissante, la suite n'est pas monotone, donc on étudie la suite des termes de rang pair et celle de rang impair.
Si $u_0 > l$, on vérifie que l'on a : $u_{2n} > l$ et que la suite est décroissante, donc elle converge vers l. Raisonnement analogue avec la suite des termes de rang impair, les deux suites sont adjacentes et la suite $(u_n)_{n \in N}$ converge vers l.
Raisonnement du même ordre si $u_0 < l$ (dans le cas où $u_0 = l$, la suite est stationnaire).

Exercice n° 2

On considère l'application f définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$, où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.
La dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{a\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})(1+e^{-ax})} > 0$, la fonction est donc croissante avec deux asymptotes horizontales en 0 et 1.
La fonction est convexe sur les réels négatifs et concave sur les réels positifs.

2. Montrer que *f* admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
Le point A(0, ½) est un centre de symétrie. On vérifie avec le changement de variables X=x et Y=y-1/2 que la fonction est impaire.

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f\,(x) = x$.
Résoudre cette équation est équivalent à : $x + x\,e^{-ax} - 1 = 0$
On étudie la fonction $z = x + x\,e^{-ax} - 1$ pour $x>0$.
Avec le tableau des variations, la fonction *z* est croissante de -1 à plus l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution comprise entre zéro et 1.

4. Calculer $I(a) = \int_0^1 f(x)dx$
On effectue le changement de variable : $u = \ e^{ax}$ pour obtenir

$$I(a) = \frac{1}{a}[Ln\,(1+u)]_1^{e^a} = \frac{1}{a}Ln\,(\frac{1+e^a}{2})$$

Exercice n° 3

Soit $f:]0,+\infty[\to R$ définie par : $f(t) = \frac{Ln\,t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$ (où Ln désigne le logarithme népérien).

Soit $F:]0,+\infty[\to R$ définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$

1. Etudier la continuité de *f* sur $]0,+\infty[$

Le seul problème est au point 1.

$\lim_{t\to1} f(t) = \lim_{t\to1}\frac{Ln\,t}{t-1} = \lim_{u\to0}\frac{Ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to0}\frac{u}{u} = 1 = f(1)$, donc *f* est continue sur $]0,+\infty[$

2. Déterminer le signe de *f* et celui de *F* sur $]0,+\infty[$.

Si $t>1$, $t-1>0$ et $Ln\,t>0$, donc la fonction *f* est positive et
Si $0<t<1$, $t-1<0$ et $Ln\,t<0$, donc la fonction *f* est encore positive.
Comme $x>0$ et *f* positive, *F* est positive.

3. Montrer que *F* est dérivable et calculer sa dérivée.

F est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour *x* différent de 1 :
$F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = 2x.\frac{Ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{Lnx}{x-1} = \frac{(3x-1)Lnx}{x^2-1}$, et
$F'(1) = \lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x^2-x)f(c(x))}{(x-1)} = \lim_{x\to1} x.f(c(x)) = 1$, car *f* est continue.

4. La fonction dérivée F' est-elle continue ?

La question ne se pose qu'en *x*=1. On a :
$\lim_{x\to1} F'(x) = \lim_{x\to1}\frac{(3x-1)Ln\,x}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{Ln\,x}{(x-1)} = \lim_{u\to0}\frac{Ln\,(1+u)}{u} = 1 = F'(1)$, la fonction est donc continue.

5. Etudier les variations de F sur $\left]0,+\infty\right[$.

Pour $0 < x < 1/3$, $3x - 1 < 0$, $Lnx < 0$ et $x - 1 < 0$, donc F est décroissante.
Pour $1/3 < x < 1$,$3x - 1 > 0$, $Lnx < 0$ et $x - 1 < 0$, donc F est croissante.
Pour $x > 1$, $3x - 1 > 0$, $Lnx > 0$ et $x - 1 > 0$, donc F est croissante.

Exercice n° 4

1. Dans une tombola de 100 billets, deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à ½ d'obtenir au moins un billet gagnant ?
Soit n le nombre de billets et p_n la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.
On a : $p_n = 1 - \frac{C_{98}^n}{C_{100}^n} = 1 - \frac{(100-n)(99-n)}{100\times 99}$.
L'inéquation : $p_n \geq 1/2$ revient à résoudre : $n^2 - 199\,n + (50 \times 99) \leq 0$ et on obtient 29 billets.

2. Dans une autre tombola composée également de 100 billets, sachant que le prix d'un billet est de 1 euro et qu'un billet gagnant rapporte 20 euros, combien faut-il de billets gagnants dans cette loterie pour que l'espérance de gain des joueurs soit la plus proche de zéro.
L'espérance est égale à : $E(X) = (-1)(100 - p) + 20\,p = 0$, où p est le nombre de billets gagnants. Il faut 5 billets.

3. Dans une troisième tombola contenant 1000 billets, il y a 3 billets gagnants qui rapportent chacun 50 euros et 20 autres billets gagnants qui rapportent chacun 20 euros. Les autres billets sont perdants.
Sachant que le prix d'achat d'un billet est toujours d'un euro, calculer l'espérance de gain pour cette tombola.

On a : $E\,(X) = (-1)\,\frac{977}{1000} + \frac{3\times 50}{1000} + \frac{20\times 20}{1000} \;= -0{,}427$

Exercice n° 5

Les trois questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans R l'équation : $Ln\,(x^2 - 1) - Ln\,(2x - 1) + Ln\,2 = 0$.
L'équation est définie pour x>1 et équivalente à : $\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}$
On obtient : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2. Résoudre dans R^2, le système : $\begin{cases} x + y + 1 = -4 \\ (x + 2)(y - 1) = -45 \end{cases}$
Le système s'écrit aussi : $\begin{cases} (x + 2) + (y - 1) = -4 \\ (x + 2)(y - 1) = -45 \end{cases}$
En posant X=x+2 et Y=y-1, il s'agit de trouver deux nombres connaissant la somme et le produit. On obtient -9 et 5. Par conséquent on a deux solutions : (x=-11, y=6) et (x=3, y=-8).

3. Résoudre dans R l'inéquation : $(m-3)x^2 - 2\,m\,x + 12 \geq 0$, où m est un paramètre réel.
On obtient les résultats suivants :
- Si m=3, alors $S =]-\infty, 2]$
- Si m=6, alors $S = R$
- Si m<3, alors $S = \left[\frac{6}{m-3}, 2\right]$
- Si 3<m<6, alors $S =]-\infty, 2] \cup \left[\frac{6}{m-3}, +\infty\right[$
- Si m>6, alors $S = \left]-\infty, \frac{6}{m-3}\right] \cup [2, +\infty[$

Exercice n° 6

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f'(x) = -\int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f'(x) + \int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on obtient l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG/ ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

Première composition de mathématiques
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- **Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1 à 4.**
- **L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est <u>éliminatoire</u>. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.**

NOTATIONS.

— On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*.

— On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*.

— On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* — il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi qu'un élément i qui vérifie : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.
4. Déterminer les limites à gauche et à droite en 2 de la fonction de la question précédente.
5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)\ln(\cos(x))$ définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
7. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux boules avec le numéro 1, une boule avec le numéro 5 et une boule avec le numéro 8. On pioche au hasard *sans remise* une première boule, puis une deuxième. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Calculer l'espérance de X.
8. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Étudier la monotonie de la suite, puis déterminer sa limite.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{3\ln(n)^4 - n^3 + \mathrm{e}^{-n}}{1+\cos(n)+2n^3}$. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Résoudre l'équation : $\dfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

1. **Question préliminaire.** Montrer que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Dans cet exercice, on note I l'intervalle $[-1,+\infty[$, et on appelle f la fonction définie par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

On note g la réciproque de la fonction f, c'est-à-dire la fonction définie par la relation :

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = g(y).$$

4. Donner sans démonstration le tableau de variations complet de la fonction g, et préciser $g(0)$.
5. Montrer que pour tout $x \in J$: $g(x)\mathrm{e}^{g(x)} = x$.

Pour tout réel $a > 0$, on note h_a la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + ax^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $a > 0$.
   (a) Montrer que la fonction h_a admet un minimum.
   On note m_a le point en lequel ce minimum est atteint.
   (b) Exprimer m_a en fonction de a et à l'aide de la fonction g.
   (c) Montrer que : $h_a(m_a) = \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a+2)$.
7. Montrer que la fonction $a \mapsto m_a$ définie sur $]0,+\infty[$ est décroissante, puis calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition.
8. (a) Montrer que la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.
   (b) Déterminer la limite de la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On note φ la fonction $x \mapsto 3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Le but de cette question est de trouver un intervalle d'étude *intelligent* de φ permettant de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.
   (a) Expliquer pourquoi l'étude de φ sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ permet de tracer entièrement $\mathscr{C}$.
   (b) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (c) Montrer que la droite d'équation : $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (d) Expliquer finalement pourquoi l'étude de φ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ permet de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

2. On note ψ la fonction $x \mapsto 3x^5 - 5x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\psi(0)$, $\psi(1)$ et $\psi(-1)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction ψ.
   (c) En déduire les variations de φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 4

On note B la fonction définie pour tous $a, b \in [0, +\infty[$ par : $\quad B(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b \mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction B est bien définie.
2. Le but de cette question est de calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   (a) En effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)^2$, montrer que :
   $$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$
   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}$.
   (c) En déduire la valeur de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Soient $a, b \in [0, +\infty[$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\quad B(a+1,b) = \frac{a+1}{b+1}B(a,b+1)$.
   (b) Vérifier que : $\quad B(a+1,b) + B(a,b+1) = B(a,b)$.
   (c) En déduire une expression de $B(a+1,b)$ en fonction de $B(a,b)$.
   (d) Au moyen d'un changement de variable, montrer que : $\quad B(a,b) = B(b,a)$.
   (e) En déduire la valeur de $B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exercice 5

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = u_n - u_n^3$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in]0,1[$.
   (b) Montrer que la suite converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

2. Exprimer v_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
3. On note f la fonction $x \mapsto \frac{2-x}{(1-x)^2}$ définie sur l'intervalle $]0,1[$.
   (a) Montrer que f est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad x_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \dfrac{v_0 + \cdots + v_n}{n+1}$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_0 \geq x_n \geq v_n$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge, puis que sa limite L vérifie : $\quad L \geq 2$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2x_{2n+1} - x_n \leq v_{n+1}$. $\quad$ En déduire que $L = 2$.
   (d) Exprimer simplement x_{n-1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) En déduire la limite de $(nu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

1. **Question de cours.** Dans cette question, on fixe deux nombres réels a et b.
   (a) Montrer que : $\quad \big(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big) = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$.
   (b) Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\big)^n = \cos(na) + \mathrm{i}\sin(na)$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation : $\quad z^6 + (7-\mathrm{i})z^3 - 8 - 8\mathrm{i} = 0 \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que : $\quad (a + \mathrm{i}b)^2 = 80 + 18\mathrm{i}$.
   (b) En déduire les racines de l'équation : $\quad x^2 + (7-\mathrm{i})x - 8 - 8\mathrm{i} = 0 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
3. (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
   (b) En déduire les *racines cubiques* complexes de -8, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels : $\quad z^3 = -8$.
4. (a) Écrire $1 + \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
   (b) En déduire les solutions de l'équation : $\quad z^3 = 1 + \mathrm{i} \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Vous écrirez les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 7

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% des casques ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Afin de détecter les casques défaillants, l'entreprise met en place un contrôle qualité : ce contrôle permet de rejeter 96% des casques défaillants, mais rejette malheureusement également 7% des casques en état de marche.

Dans la suite, on note R l'évènement « le casque est rejeté », et D l'évènement « le casque est défaillant ».

1. On choisit un casque au hasard dans cette production.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{R} \cap D\right)$, c'est-à-dire la probabilité que le casque ne soit pas rejeté au contrôle qualité et qu'il soit défaillant.
   (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rejeté par ce contrôle ?

À la suite du test, les casques qui sont détectés défaillants sont détruits, et ne sortent donc pas de l'usine. L'entreprise fabrique 10000 casques chaque jour.

2. Combien de casques sortent effectivement chaque jour de l'entreprise en moyenne ?

La production d'un casque coûte 20 euros. Chaque casque sortant de l'usine est vendu 80 euros, et on suppose que tous les casques sont vendus. Cependant, l'entreprise, qui tient à sa réputation, promet de payer 160 euros aux malheureux clients qui auraient acheté un casque défectueux.

3. Combien rapporte en moyenne un casque à l'entreprise ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

De nombreuses polémiques se font jour actuellement au sujet du développement de l'intelligence artificielle. Quels rôles ce nouveau champ de développement de la technologie peut-il jouer dans notre société ? Quels progrès cette technologie pourrait-elle engendrer, quels dangers pourrait-elle entraîner ?

Sujet n° 2

Les pays du Moyen-Orient semblent jouer progressivement un rôle différent que celui qui leur était habituellement connu en tant que principaux producteurs de ressources d'hydrocarbures. Comment voyez-vous l'évolution de cette nouvelle zone émergente au niveau de la région considérée et au sein du concert des nations ?

Sujet n° 3

Nos cultures et nos traditions sont de plus en plus confrontées à une sorte d'uniformisation portée par la mondialisation. Quelles initiatives pourrait-on engager ou poursuivre afin que nos pays, nos régions, voire des ensembles supranationaux, valorisent leur patrimoine culturel tout en restant ouverts aux transformations apportées par les échanges entre des espaces culturels différents ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R^+ par : $f\ (x) = x^2 Ln\ (x) - \frac{x^2}{2}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* à droite en zéro.
2. Etudier les variations de *f* et donner l'allure de son graphe.
3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\, dx$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur R^+ dont l'une est comprise entre $\sqrt{e}$ et e.

Exercice n° 2

Soit la fonction g définie sur R^+ par : $g\ (x) = e^{-2x}\ (2x^2 + 1)$.

1. Etudier les variations de g et tracer son graphe.
2. Etudier la convexité de g.
3. Calculer $I = \int_0^1 g(x)\, dx$.

Exercice n° 3

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormé. On note *A* le point de *P* d'affixe 2*i*.
Soit $f: P - \{A\} \rightarrow P$ définie par : $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble *E* des points de *P* dont l'image par *f* est un nombre réel non nul.
2. Déterminer l'ensemble *F* des points de *P* dont l'image par *f* a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

Exercice n° 4

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Une entreprise de location de voitures particulières propose à sa clientèle deux tarifs :
Tarif A : prise en charge 60 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,40 dollar.
Tarif B : prise en charge 80 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,30 dollar.
Un automobiliste va effectuer un voyage d'affaires de 3 jours.
Déterminer le tarif le plus avantageux pour l'automobiliste en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

2. La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p :

$$q = Q(p) \text{ où } Q(p) = \begin{cases} 4 & si \quad 0 < p < 2 \\ 8(6-p)^{-1/2} & si \quad 2 \leq p < 5 \\ (p-3)^3 & si \quad p \geq 5 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la convexité de Q sur chaque intervalle (de la définition) et tracer son graphe.

Exercice n° 5

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 boules portent le chiffre 1, 3 boules le chiffre 2, 1 boule le chiffre 3 et 1 boule le chiffre 4. On tire au hasard simultanément deux boules et on note x et y les deux chiffres obtenus.
On considère la variable aléatoire X définie par : $X = |x - y|$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
2. Calculer la variance de X.
3. Soit la variable aléatoire Y= - 2X+1. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice n° 6

Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n.
2. Tracer le graphe de f_1 et celui de f_2.
3. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

- Calculer I_1 et I_2.
- Calculer I_n pour tout n (on distinguera selon que n est pair ou impair).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre de Monsieur YVES AGID, intitulé « LE CERVEAU, MACHINE A INVENTER *Comment naissent les grandes découvertes* » paru en avril 2023 aux éditions Albin Michel.

(Il comporte quelques illustrations graphiques qui n'ont pas été reproduites.)

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

POURQUOI FAIRE DES DECOUVERTES

Pourquoi, à la différence des autres animaux, l'homme a-t-il une telle soif de progrès ? L'histoire montre qu'une civilisation survit si elle progresse et s'éteint faute de progrès. Le progrès semble donc inhérent à l'idée de civilisation. Encore faut-il s'entendre sur la notion de progrès. Le progrès n'est pas seulement social, économique, politique, scientifique ou philosophique. Il est tout à la fois, chacun de ces domaines favorisant les autres. Les avancées se font lentement par accumulation de connaissances, à partir de l'existant, rarement par sauts successifs. C'est ainsi que l'Humanité a passé son temps à progresser dans une direction ou dans une autre, aujourd'hui de manière exponentielle. Des petits pas dans le passé, des grands pas récemment.

Progresser, c'est bien, mais comment ? Le progrès ne peut se faire qu'à partir de ce qui est disponible. Avant de savoir pourquoi c'est ainsi, il faut commencer par savoir comment ça marche. *Homo sapiens* dispose pour cela d'une faculté où il excelle, celle de comprendre, et d'une faculté qui lui est quasiment spécifique, celle de créer. La créativité, cette insatiable soif de progresser, permet d'œuvrer au bien de la société, et si possible, d'éviter les dérives sociales, politiques et morales.

Créer – mot qui a la même origine que croître -, c'est apporter du *nouveau,* souvent avec la connotation d'inhabituel, d'inattendu. Mais, faire du nouveau, ce n'est pas seulement faire différemment, il faut aussi que la nouveauté soit *originale,* singulière, comme la création artistique, ou qu'elle apporte une solution à laquelle on n'aurait pas pensé auparavant. Il faut, de plus, qu'elle ait une *valeur*, petite (un dessin d'enfant) ou grande (la théorie de la sélection naturelle), et qu'elle soit adaptée au contexte (qu'elle tienne compte des besoins, par exemple la réduction de la production d'oxyde de carbone pour lutter contre le réchauffement climatique). Le processus de créativité, loin d'être continu, est constitué de différentes phases qui alternent, d'idées qui se multiplient et qui sont sélectionnées pour aboutir à la création. C'est donc le contraire du banal, du conforme, du classique, de l'académique et du routinier. Mais alors, comment fait-on pour créer ? Il y a trois façons de créer : inventer, innover, découvrir. […]

La vie de tous les jours donne-t-elle souvent l'occasion de faire des découvertes ? En l'absence de difficultés personnelles ou de cataclysme, ne suffit-il pas de « vivre sa vie » en se contentant des habitudes héritées, des routines apprises, ce qu'on pourrait appeler une « bonne vie », celle à laquelle aspire l'immense majorité des habitants de cette planète ? Pourquoi en faire plus si tout va bien ? Ce serait oublier qu'*Homo sapiens* est avide de connaissances. Mais comment connaître, car, si l'on sait, il est inutile de chercher, et, si l'on ne sait pas, on ignore ce qu'il faudrait chercher puisqu'on ne connaît pas la nature de ce que l'on cherche. Telle est la leçon du *Menon,* un dialogue de Platon. Heureusement, l'homme est créatif. Il a en lui ce besoin étrange de rendre maitrisable ce qui l'entoure et, si possible de le rendre calculable. Il veut tout comprendre, tout maîtriser, tout prévoir. Incroyable désir ! Comme le monde avance à toute vitesse, il se sent obligé de trouver des solutions pour ne pas stagner, pour ne pas dépérir. Ce comportement s'impose à lui quand tout va mal, mais aussi quand tout va bien –comme à cet industriel qui disait : « tout marche bien, c'est le moment de changer. » […]

LA RECHERCHE : UNE CONSTRUCTION LABORIEUSE, CONSCIENTE ET SUBCONSCIENTE

L'activité de recherche est une construction, une construction longue, laborieuse, souvent décourageante. […] Ainsi va la science, qui est une accumulation d'innombrables expériences s'échelonnant dans le temps. Mais il ne suffit pas d'accumuler des expériences pour faire des découvertes, car, comme disait Henri Poincaré : « une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison. »

Certains, souvent les meilleurs, s'accrochent alors à l'hypothèse qu'ils ont formulée et feront tout pour la démontrer envers et contre tous. L'exemple le plus connu est celui de la découverte des hiéroglyphes par Jean-François Champollion, incroyable érudit qui commença à étudier la Pierre de Rosette en 1808, à l'âge de dix-huit ans, et qui trouva la clé du déchiffrement de cette écriture inconnue en 1822. Nous en avons une illustration plus récente avec la découverte du vaccin contre le Covid-19.

LA DECOUVERTE DU VACCIN A ARN :

LA SCIENTIFIQUE QUI LUTTE, QUI CHUTE, QUI REUSSIT

Tout débute en 2005. Une scientifique d'origine hongroise, Katalin Karikö, a passé sa vie à travailler sur une molécule : l'ARN. Emigrée aux Etats-Unis, elle rencontra un immunologiste Drew Weissman, qui la convainquit d'utiliser son savoir-faire pour produire un vaccin. Ces substances que l'on inocule à une personne sont habituellement constituées de microbes, de protéines, d'ADN. *A priori,* aucune raison de collaborer avec Madame K. qui est une spécialiste de l'étude de l'ARN messager (ARNm), une substance qui, dans la cellule, permet à l'ADN de fabriquer des protéines et ne devrait donc pas être envisagée comme support de vaccin. Depuis les années 1985, cette scientifique n'a rencontré que suspicion, voire moquerie, chaque fois qu'elle exposait son projet d'utiliser l'ARNm comme moyen thérapeutique, en particulier parce que la molécule se dégrade rapidement et crée des réactions inflammatoires. Pour empêcher cette dégradation, la chercheuse s'est acharnée à modifier la molécule d'ARNm à l'aide de diverses combinaisons chimiques. « Etre tenace n'est pas s'entêter » dit-elle après avoir été rejetée par un grand nombre de laboratoires. Pourtant, au bout de trente ans, ses recherches aboutirent à la création d'un vaccin contre le virus Covid-19, avec le succès planétaire que l'on connaît. […]

Pour découvrir, il faut voir ce qui est couvert, ce qu'on ne voit pas. Nos cinq sens ont des limites pour ce qui est de voir et de comprendre le monde. L'homme ne peut appréhender qu'une partie infime du réel. Son ingéniosité lui a heureusement permis d'inventer des instruments toujours plus performants, capables d'augmenter le champ de ce qui est perceptible. D'où la production de microscopes de plus en plus pointus pour voir le plus petit, de télescopes de plus en plus puissants pour voir le plus grand, de synchrotrons(1) qui révèlent la structure de la matière, de microscopes à force atomique et autres spectromètres qui révèlent la signature d'un objet, etc. Les scientifiques ont même réussi à voir l'invisible à l'aide des méthodes de la physique corpusculaire (nature des atomes) et de la chimie (structure des molécules). Cette segmentation en objets de plus en plus petits, apparemment dépourvus de signification, prend du sens lorsqu'on les assemble : ils finissent par donner une image cohérente du tout. L'identification d'un phénomène n'est pas suffisante, il faut encore quantifier, expliquer, réunir les données pour les généraliser si possible en un concept ou une loi. Après avoir mis en pièce tous les éléments d'un objet, il faut lui donner du sens … […]

L'irruption de l'informatique.

Par le passé le chercheur pouvait aisément dominer son sujet; la littérature scientifique était maigre, avec un petit nombre de journaux dont il fallait photocopier les articles. Aujourd'hui, le scientifique noyé dans le magma des connaissances de sa spécialité subit le bombardement continu d'informations de valeur inégale. Comment isoler l'information pertinente ? Par le biais de l'intelligence artificielle et de l'informatique. L'ordinateur, grâce à sa mémoire et à sa rapidité colossale fait tout à notre place. Il peut classer, former de nouvelles combinaisons, proposer des probabilités ; bref, il peut trouver toutes les solutions de manière rétrospective parmi les milliards d'informations qu'il a emmagasinées. Encore faut-il qu'il choisisse la bonne. Comment reconnaître le résultat digne d'intérêt à partir de la gigantesque quantité de data qui s'accroît de façon quasi exponentielle ? L'ordinateur est une simple prothèse à l'intelligence humaine…

Mais l'ordinateur peut-il créer ? Comme les performances informatiques s'accroissent, il est à prévoir que les découvertes seront plus nombreuses. Verra-t-on bientôt un *Homo sapiens* augmenté, comme les transhumanistes le prédisent ? Ce sera peut-être le cas pour les organes du corps dont la physiologie est relativement simple, mais probablement pas pour le cerveau, que l'on commence seulement à comprendre et que l'on n'est pas prêt de reproduire ou d'améliorer (sauf peut-être dans un avenir lointain).

L'« homme-machine » n'est pas pour demain, car ce qui fait l'homme, c'est son cerveau. Or, le cerveau humain, cette masse gélatineuse de moins d'un kilo et demi, vivante, malléable, adaptable, capable d'émotions, de conscience et de créativité, est d'une complexité qui dépasse l'imagination.

Il y a pourtant quelque analogie entre le cerveau et l'outil numérique qu'est Internet. Comme le cerveau, la toile est un immense réseau possédant des centaines de milliards de ramifications liées entre elles. Comme le cerveau, Internet apprend de manière continue, c'est ce que nous enseigne le mathématicien Etienne Ghys : chaque page a un classement qui augmente en fonction du nombre de pages consultées, si bien que, lorsqu'on cherche une information en tapant des mots-clés, on est amené à choisir un petit nombre de pistes de recherche dans l'immensité des possibles. Dans ces conditions, pourquoi une machine du futur ne pourrait-t-elle pas créer ?

Pour créer, comme on l'a vu plus haut, il convient de faire du nouveau, de l'original, quelque chose qui soit adapté au contexte et qui ait de la valeur. N'est-ce pas ce qu'a fait le programme de Google AlphaZero en 2017 en battant aux échecs le programme Stockfish 8, qui était champion du monde (28 victoires, 72 parties nulles) ? C'est d'autant plus surprenant qu'AlphaZero n'avait appris à jouer aux échecs que quatre heures plus tôt, que ses capacités étaient plus faibles que celles de l'adversaire […]

FAIRE UNE DECOUVERTE, C'EST UN TRAVAIL COLLECTIF

A l'échelle mondiale, la communication scientifique est confrontée au paradoxe d'une gigantesque quantité de publications scientifiques issues des quatre coins du monde : un nombre incalculable d'articles sont publiés mais présentent un intérêt limité (pourtant nécessaire pour compléter l'immense puzzle de la connaissance), la plupart se perdent dans le néant (certains seront peut-être redécouverts sur le tard), face à un petit nombre d'articles innovants (qui lancent les nouvelles pistes de recherche). Avec ses milliers de journaux scientifiques distribués dans le monde et autant de colloques nationaux et internationaux ubiquitaires(2) qui permettent les échanges et la confrontation, la science est devenue collective. La pullulation de l'information, qui rend de plus en plus difficile la détection de celle qui est pertinente, a fait émerger une nouvelle catégorie de scientifiques : ceux qui savent identifier l'information utile ou déterminante pour avoir l'idée que les autres n'ont pas encore eue.

Y a-t-il encore aujourd'hui des découvreurs isolés qui font seuls des découvertes comme on le faisait au temps passé ? Si tant est qu'il y en ait jamais eu, car l'historiographie(3) est souvent trompeuse. Aujourd'hui, en tout cas, s'il y a découverte, elle n'est jamais le fait d'un seul individu. Selon la personnalité, selon la formation, selon la discipline, les uns apportent de nouveaux outils, les autres une conception différente du questionnement ; un dernier qui s'était tu jusque-là pose soudain la question inattendue ou jette une idée qui change la donne.

La meilleure preuve en est la diversité des profils psychologiques et des potentiels des chercheurs. La réalité scientifique est là : les découvertes sont collectives, dans le laboratoire ou dans le monde, étalées dans le temps et dans l'espace. Bien souvent, les idées sont dans l'air, mais on n'y pense pas et c'est dans l'échange qu'on saisit l'idée nouvelle.

La découverte n'est donc pas une jubilation solitaire. C'est un engouement collectif tel que l'équipe scientifique entre véritablement en communion. Il est ainsi des moments rares dans un *cursus* scientifique où l'équipe de recherche ressent une sorte de ferveur, comme probablement seuls les religieux en connaissent. Ce qui n'empêche pas le rire, communicatif, entrainant. Et, à cet instant non prévu, sans raison apparente, tout d'un coup émerge une force collective capable d'imaginer, de concevoir, d'aboutir, de trouver, de découvrir. L'entente de plusieurs participants aux compétences complémentaires devient soudainement productive. Comme une même recette de cuisine dont l'un tirera un frichti insipide, un autre un mets délicieux, un troisième une nouvelle recette. Il est vrai qu'en cuisine il ne suffit pas de travailler au sein d'une brigade pour être créatif. Combien d'équipes de recherche et autres comités ne sont que des foyers d'idées reçues sinon d'obscurantisme trompeur ou d'hystérie collective futile. C'est la raison pour laquelle la réflexion collective impose un leader qui écoute, suscite les échanges, entraîne, résume les idées, restitue la synthèse, conclut, instille un certain état d'esprit.

Finalement le nombre et l'importance des découvertes dépendent aussi de la disposition de la société dans laquelle se déroule la recherche. Ce n'est pas dans les pays en situation de misère que peut s'effectuer une recherche de haut niveau, laquelle se concentre donc dans les pays les plus développés, qui ne sont du reste pas nécessairement les plus puissants, mais qui sont ceux où la quête de progrès est prioritaire. […]

La mise en place d'une politique scientifique, nécessairement lente, ne donne pas toujours les résultats escomptés, car la science progresse de plus en plus vite. Il est donc difficile d'anticiper la bonne science de demain, et *à fortiori*, la science qui permettra de faire des découvertes.

Que sera le bon scientifique du futur, étouffé par la routine, asphyxié par des techniques de plus en plus sophistiquées ? Le chercheur scientifique deviendra-t-il un bricoleur ou un ingénieur. Oui, certainement les deux à la fois. Il devra travailler en collectivité, avec l'ensemble de la communauté scientifique, en apportant des idées simples et nouvelles – idées qu'il restera à mettre en œuvre, ce qui implique de la liberté, du temps, de l'ambition, et de la confiance en soi.

(1) – **synchrotron** : instrument électromagnétique de grande taille.

(2) – **ubiquitaire** : présent partout.

(3) – **historiographie** : travail de l'écrivain qui était chargé officiellement d'écrire l'histoire de son temps ou d'un souverain.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA-ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE PIERRE NDIAYE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA-YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG/ ANALYSTE STATISTICIEN

ISE cycle long / AS

Première composition de mathématiques
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x^2)}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = 1.$$

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

   Dressons d'abord le tableau de signes de l'expression $\dfrac{x^3}{x-1}$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^3}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

   On en déduit que la fonction est définie sur $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.

   Pour tout $x > 2$: $\dfrac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x} = \dfrac{x^2-5x+7}{x(x-2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, puis :

$$\frac{x^2-5x+7}{x-2} - x = \frac{-3x+7}{x-2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -3.$$

   Ainsi, la droite d'équation : $y = x-3$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

4. Déterminer les limite à gauche et à droite en 2 de la fonction de la question précédente.

Par quotient : $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = -\infty$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)\ln(\cos(x))$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction est dérivable par composition et par produit, de dérivée

$$x \mapsto \cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}.$$

6. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

On a : $-3+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

7. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux boules avec le numéro 1, une boule avec le numéro 5 et une boule avec le numéro 8. On pioche au hasard *sans remise* une première boule, puis une deuxième. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Calculer l'espérance de X.

Notons a le résultat du premier tirage, et b le résultat du second tirage, puis $X = (a,b)$ le couple formé par ces deux tirages, et enfin $G = a+b$ le gain. À l'aide d'un arbre, il vient :

X	$(1,1)$	$(1,5)$	$(1,8)$	$(5,1)$	$(5,8)$	$(8,1)$	$(8,5)$
$\mathbb{P}[X=(a,b)]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
G	2	6	9	6	13	9	13

Ainsi : $\mathbb{E}[G] = 2\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{3} + 9\times\frac{1}{3} + 13\times\frac{1}{6} = \frac{45}{6}$.

8. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Étudier la monotonie de la suite, puis déterminer sa limite.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n$.
Mais par récurrence immédiat : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En vertu du théorème de la limite monotone, elle possède une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Supposons $\ell\in\mathbb{R}$. Alors en passant à la limite : $\ell = \ell^2 + 2\ell$, donc : $\ell = 0$ ou $\ell = -1$.
C'est absurde, car pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n \geq u_0 > 0$. Donc la suite diverge vers $+\infty$.

9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{3\ln(n)^4 - n^3 + \mathrm{e}^{-n}}{1+\cos(n)+2n^3}$. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n = -\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{3\ln(n)^4}{n^3} - \frac{1}{\mathrm{e}^n n^3}}{1+\frac{\cos(n)}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ par croissance comparée.

10. Résoudre l'équation : $\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, puis d'inconnue $x\in\mathbb{C}$.

On reconnaît une équation du second degré homogène en x^2, dont le discriminant est 10 :

$$\forall x\in\mathbb{C}, \quad \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3 = \frac{1}{2}\left(x^2 - (2+\sqrt{10})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{10})\right).$$

Mais : $2-\sqrt{10} < 2-\sqrt{9} = -1 < 0$, donc les solutions réelles sont $\sqrt{2+\sqrt{10}}$ et $-\sqrt{2+\sqrt{10}}$, tandis que les solutions complexes sont $\sqrt{2+\sqrt{10}}$, $-\sqrt{2+\sqrt{10}}$, $\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{10}-2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{10}-2}$.

Exercice 2

1. **Question préliminaire.** Montrer que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

   Soient E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$, $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f croissante et g décroissante.
   Méthode 1. Pour tous $a, b \in E$, si : $a < b$, alors : $f(a) < f(b)$ car f est croissante, puis : $g\big(f(a)\big) > g\big(f(b)\big)$ car g est décroissante. Conclusion : $g \circ f$ est décroissante.
   Méthode 2. Si f et g sont supposées dérivables, alors $f \circ g$ est aussi dérivable, et pour tout $x \in E$: $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'\big(g(x)\big)$. Par produit, on a : $(f \circ g)'(x) \leq 0$ pour tout $x \in F$, donc $f \circ g$ est décroissante.

Dans cet exercice, on note I l'intervalle $[-1, +\infty[$, et on appelle f la fonction définie par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.

   Par produit, f est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
   Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

   La fonction f est continue et strictement croissante sur I, donc d'après le théorème de la bijection (ou celui des valeurs intermédiaires strictement monotone), elle réalise une bijection de I sur son intervalle image : $J = [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

On note g la réciproque de la fonction f, c'est-à-dire la fonction définie par la relation :

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = g(y).$$

4. Donner sans démonstration le tableau de variations complet de la fonction g, et préciser $g(0)$.

   On a : $f(0) = 0$, donc : $g(0) = 0$, et :

x	$-\mathrm{e}^{-1}$		$+\infty$
g	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrer que pour tout $x \in J$: $g(x)\mathrm{e}^{g(x)} = x$.

   Soit $x \in J$. Posons : $y = g(x)$.
   Alors : $x = f(y) = f\big(g(x)\big)$, c'est-à-dire : $g(x)\mathrm{e}^{g(x)} = x$.

Pour tout réel $a>0$, on note h_a la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}+ax^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $a>0$.

   (a) Montrer que la fonction h_a admet un minimum.

   La fonction h_a est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée première $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}+2ax$ et de dérivée seconde $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}+2a$. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h_a''(x)$		$+$	
h_a'	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction h_a' s'annule donc une unique fois, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, disons en α. La conclusion découle du tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h_a'(x)$		$-$	0	$+$	
h_a	??	$\searrow$	$h_a(\alpha)$	$\nearrow$	??

   On note m_a le point en lequel ce minimum est atteint.

   (b) Exprimer m_a en fonction de a et à l'aide de la fonction g.

   D'après la question précédente, m_a est l'unique solution de l'équation : $\quad -\mathrm{e}^{-x}+2ax=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or :

$$-\mathrm{e}^{-m_a}+2am_a=0 \iff 2am_a=\mathrm{e}^{-m_a} \overset{a\neq 0}{\iff} \underbrace{m_a\mathrm{e}^{m_a}}_{f(m_a)}=\frac{1}{2a} \iff m_a=g\left(\frac{1}{2a}\right).$$

   (c) Montrer que : $\quad h_a(m_a)=\dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a+2)$.

   On a : $\quad 2am_a=\mathrm{e}^{-m_a}, \quad$ donc : $\quad am_a=\dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}, \quad$ et :

$$h_a(m_a)=\mathrm{e}^{-m_a}+am_a^2=\mathrm{e}^{-m_a}+\frac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}\times m_a=\frac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(2+m_a).$$

7. Montrer que la fonction $a \mapsto m_a$ définie sur $]0,+\infty[$ est décroissante, puis calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition.

   Par composition, la fonction $a \mapsto g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ est décroissante, et par continuité de g sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{a\to 0^+} g\left(\frac{1}{2a}\right)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty} g\left(\frac{1}{2a}\right)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=0.$$

8. (a) Montrer que la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.

Pour tout $a > 0$: $h_a(m_a) = \dfrac{e^{-m_a}}{2}(m_a+2)$.

Méthode 1. La fonction $x \mapsto (x+2)\dfrac{e^{-x}}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, car de dérivée $x \mapsto -(x+1)\dfrac{e^{-x}}{2}$, donc par composition la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.

Méthode 2. La fonction $a \mapsto \dfrac{e^{-m_a}}{2}(m_a+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $a \mapsto -\dfrac{m_a' e^{-m_a}}{2}(m_a+1)$, donc elle est croissante.

(b) Déterminer la limite de la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

On a : $m_a \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$ donc par composition $h_a(m_a) = \dfrac{e^{-m_a}}{2}(m_a+2) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\times 2 = 1$.

Exercice 3

On note φ la fonction $x \mapsto 3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Le but de cette question est de trouver un intervalle d'étude *intelligent* de φ permettant de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

(a) Expliquer pourquoi l'étude de φ sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ permet de tracer entièrement $\mathscr{C}$.

La fonction φ est 2π-périodique, donc $\mathscr{C}$ est invariante par translation de vecteur $(2\pi,0)$.

(b) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(-x) - 1 = -\big(\varphi(x) - 1\big)$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(-x) - 1 &= 3\sin(-x)^5 - 5\sin(-x)^3 + 1 - 1 = -3\sin(x)^5 + 5\sin(x)^3 \\ &= -\big(3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1 - 1\big) = -\big(\varphi(x) - 1\big).\end{aligned}$$

(c) Montrer que la droite d'équation : $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^5 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 + 1 = 3\cos(x)^5 - 5\cos(x)^3 + 1 \\ &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^5 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^3 + 1 = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\end{aligned}$$

(d) Expliquer finalement pourquoi l'étude de φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ permet de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

Supposons construite la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors on déduit la courbe sur $[0,\pi]$ par symétrie axiale d'axe : $x = \dfrac{\pi}{2}$, puis sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie centrale de centre $I(0;1)$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation de vecteur $(2\pi,0)$.

2. On note ψ la fonction $x \mapsto 3x^5 - 5x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer $\psi(0)$, $\psi(1)$ et $\psi(-1)$.

Immédiatement : $\psi(0) = 1, \quad \psi(1) = -1 \quad$ et $\quad \psi(-1) = 3$.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction ψ.

La fonction ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, de dérivée

$$x \mapsto 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1).$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire les variations de φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad \varphi(x) = \psi\big(\sin(x)\big)$.

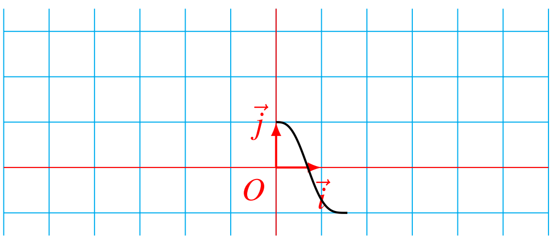
Méthode 1. Or la fonction sin est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Comme la fonction ψ est décroissante sur $[0,1]$, la fonction φ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par composition.

Méthode 2. Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad \varphi'(x) = \cos(x)\psi'\big(\sin(x)\big) \geq 0 \quad$ car $\sin(x) \in [0,1]$.

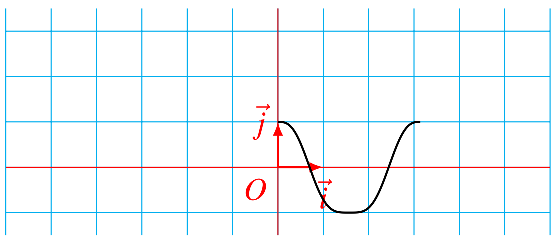
Enfin : $\quad \varphi(0) = \psi(0) = 1 \quad$ et $\quad \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \psi(1) = -1$.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

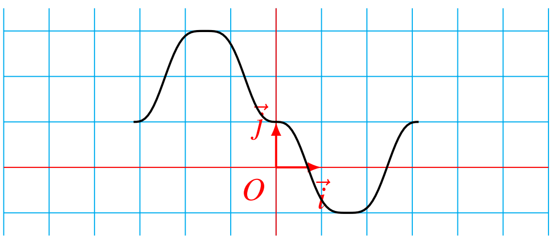
On construit le graphe de ϕ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$…



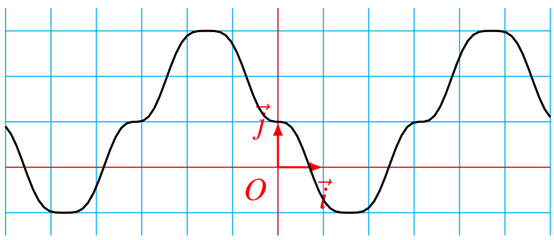
… qu'on complète sur $[0, \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe : $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$…



… qu'on complète sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie centrale de centre O…



… qu'on complète sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.



Exercice 4

On note B la fonction définie pour tous $a, b \in [0, +\infty[$ par : $\quad B(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b \mathrm{d}t.$

1. Justifier que la fonction B est bien définie.

   Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto t^a(1-t)^b$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale définissant $B(a,b)$ est bien définie.

2. Le but de cette question est de calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   (a) En effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)^2$, montrer que :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$

   Si on pose : $\quad t = \cos(\theta)^2, \quad$ alors :

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos(\theta)^2(1-\cos(\theta)^2)} \times (-2\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)| \times |\sin(\theta)| \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}.$

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, $\quad$ donc : $\quad \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 = \dfrac{\sin(2\theta)^2}{4}$,

   puis : $\quad \sin(\theta)^2 = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, $\quad$ donc : $\quad \dfrac{\sin(2\theta)^2}{4} = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}.$

   (c) En déduire la valeur de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   Enfin : $\quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{4}\left[\theta - \dfrac{\sin(4\theta)}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{8}.$

3. Soient $a, b \in [0, +\infty[$.

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\quad B(a+1,b) = \dfrac{a+1}{b+1}B(a,b+1).$

   En intégrant par parties, les fonctions $t \mapsto t^{a+1}$ et $t \mapsto (1-t)^b$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
B(a+1,b) &= \int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b \mathrm{d}t \\
&= \left[t^{a+1} \times \left(-\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}\right)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (a+1)t^a \times \left(-\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{a+1}{b+1}B(a,b+1).
\end{aligned}$$

(b) Vérifier que : $B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b)$.

Par linéarité de l'intégrale :

$$B(a+1,b)+B(a,b+1)=\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b\mathrm{d}t+\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 \underbrace{t^{a+1}(1-t)^b+t^a(1-t)^{b+1}}_{\substack{=t^a(1-t)^b(t+1-t)\\ =t^a(1-t)^b}}\mathrm{d}t=B(a,b).$$

(c) En déduire une expression de $B(a+1,b)$ en fonction de $B(a,b)$.

Ainsi : $B(a+1,b)\overset{\text{Q 3.a)}}{=}\dfrac{a+1}{b+1}B(a,b+1)\overset{\text{Q 3.b)}}{=}\dfrac{a+1}{b+1}\big(B(a,b)-B(a+1,b)\big)$, donc :

$$\left(1+\frac{a+1}{b+1}\right)B(a+1,b)=\frac{a+1}{b+1}B(a,b),$$

d'où : $B(a+1,b)=\dfrac{a+1}{a+b+2}B(a,b)$.

(d) Au moyen d'un changement de variable, montrer que : $B(a,b)=B(b,a)$.

Effectuons le changement de variable : $u=1-t$, il vient :

$$B(a,b)=\int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t=\int_1^0(1-u)^a u^b(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^b(1-u)^a\mathrm{d}u=B(b,a).$$

(e) En déduire la valeur de $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Il vient : $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, puis :

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

et : $B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.d)}}{=}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Finalement :

$$B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{32}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{256}.$$

Exercice 5

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in]0,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n-u_n^3$.

1. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in]0,1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_n$ la propriété : « $u_n\in]0,1[$ ».
Initialisation. Par hypothèse, $\mathscr{H}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $u_n\in]0,1[$. Alors $1-u_n^2\in]0,1[$, donc par produit : $u_{n+1}=u_n(1-u_n^2)\in]0,1[$. C'est exactement $\mathscr{H}_{n+1}$.

(b) Montrer que la suite converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 < 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Décroissante et minorée, elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. Sa limite $\ell \in [0,1]$ vérifie l'équation : $\ell = \ell - \ell^3$, donc $\ell = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

2. Exprimer v_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2(1-u_n^2)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1-(1-u_n^2)^2}{u_n^2(1-u_n^2)^2} = \frac{2u_n^2 - u_n^4}{u_n^2(1-u_n^2)^2} = \frac{2-u_n^2}{(1-u_n^2)^2}.$$

Mais : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par composition : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2-0}{(1-0^2)^2} = 2$.

3. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ définie sur l'intervalle $]0,1[$.

(a) Montrer que f est croissante.

Par quotient, la fonction f est définie et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{(-1)\times(1-x)^2 - (2-x)\times\big(-2(1-x)\big)}{(1-x)^4} = \frac{3-x}{(1-x)^3} > 0.$$

Donc f est croissante.

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Méthode 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} < u_n < 1$, donc : $0 < u_{n+1}^2 < u_n^2 < 1$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $]0,1[$, donc par croissance de f : $f(u_{n+1}^2) < f(u_n^2)$, c'est-à-dire : $v_{n+1} < v_n$.

Méthode 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{1-u_n^2} \times \left(1 + \dfrac{1}{1-u_n^2}\right) \geq 2$ car $u_n \in]0,1[$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0,1[$, donc : $u_n^2 \in]0,1[$, donc par croissance de f :

$$v_n = f(u_n^2) \geq f(0) = 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \dfrac{v_0 + \cdots + v_n}{n+1}$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_0 \geq x_n \geq v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a : $v_0 \geq v_k \geq v_n$, car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En sommant, il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_0 \geq \sum_{k=0}^{n} v_k \geq \sum_{k=0}^{n} v_n$, c'est-à-dire : $(n+1)v_0 \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \geq (n+1)v_n$. Par suite : $v_0 \geq x_n \geq v_n$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge, puis que sa limite L vérifie : $L \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2}\big(v_{n+1} + (n+1)x_n\big) \leq \frac{1}{n+2}\big(v_n + (n+1)x_n\big) \leq \frac{1}{n+2}\big(x_n + (n+1)x_n\big) = x_n.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 2, elle converge et : $L \geq 2$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2x_{2n+1} - x_n \leq v_{n+1}$. En déduire que $L = 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2x_{2n+1} - x_n = \frac{2}{2n+2} \sum_{k=0}^{2n+1} v_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} v_k \overset{\text{simplification}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} v_k$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \times (2n+1-(n+1)+1) v_{n+1} = v_{n+1}.$$

En passant à la limite : $2L - L \leq 2$, c'est-à-dire : $L \leq 2$.
Or : $L \geq 2$, donc : $L = 2$.

(d) Exprimer simplement x_{n-1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \overset{\text{télescopage}}{=} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$.

(e) En déduire la limite de $(nu_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $nu_n^2 = \dfrac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{nu_0^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6

1. **Question de cours.** Dans cette question, on fixe deux nombres réels a et b.

(a) Montrer que : $\big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$.

Il suffit de développer et de reconnaître les formules d'addition :

$$\big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$
$$= \underbrace{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}_{=\cos(a+b)} + i \underbrace{\big(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\big)}_{=\sin(a+b)}$$
$$= \cos(a+b) + i\sin(a+b).$$

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_n$ la propriété : « $\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$ ».
Initialisation. On a : $\cos(0a) + i\sin(0a) = 1 = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^0$, donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$. Aussitôt :

$$\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^{n+1} = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n \times \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)$$
$$\overset{\text{HR}}{=} \big(\cos(na) + i\sin(na)\big) \times \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)$$
$$\overset{\text{Q 1.a)}}{=} \cos\big((n+1)a\big) + i\sin\big((n+1)a\big).$$

C'est exactement $\mathscr{H}_{n+1}$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation : $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que : $(a+\mathrm{i}b)^2 = 80+18\mathrm{i}$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$.
On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $a^2 - b^2 = 80$ et $2ab = 18$.
Les nombres : $a = 9$ et $b = 1$ conviennent, et on peut vérifier que :

$$(9+\mathrm{i})^2 = 81 + 18\mathrm{i} - 1 = 80 + 18\mathrm{i}.$$

(b) En déduire les racines de l'équation : $x^2 + (7-\mathrm{i})x - 8 - 8\mathrm{i} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
Le discriminant de l'équation est :

$$(7-\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times (-8-8\mathrm{i}) = 49 - 14\mathrm{i} - 1 + 32 + 32\mathrm{i} = 80 + 18\mathrm{i} = (9+\mathrm{i})^2.$$

Les solutions sont donc : $\dfrac{-(7-\mathrm{i})+(9+\mathrm{i})}{2} = 1+\mathrm{i}$ et $\dfrac{-(7-\mathrm{i})-(9+\mathrm{i})}{2} = -8$.

3. (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
En développant : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

(b) En déduire les *racines cubiques* complexes de -8, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels : $z^3 = -8$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + 8 \overset{-8=(-2)^3}{=} (z+2)(z^2-2z+4) \overset{\Delta=-12}{=} (z+2)\big(z-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\big)\big(z-(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\big) = 0$. Les racines cubique de -8 sont donc -2, $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

4. (a) Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(b) En déduire les solutions de l'équation : $z^3 = 1+\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Vous écrirez les solutions sous forme trigonométrique.
Soit $z = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$ une solution de l'équation écrite sous forme trigonométrique.
Alors : $z^3 = 1+\mathrm{i} \iff \rho^3\big(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)\big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, donc :

$$\rho^3 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

et donc : $\rho = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
Les solutions sont donc :

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$\text{et} \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Exercice 7

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% des casques ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Afin de détecter les casques défaillants, l'entreprise met en place un contrôle qualité : ce contrôle permet de rejeter 96% des casques défaillants, mais rejette malheureusement également 7% des casques en état de marche.

Dans la suite, on note R l'évènement « le casque est rejeté », et D l'évènement « le casque est défaillant ».

1. On choisit un casque au hasard dans cette production.

   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)$, c'est-à-dire la probabilité que le casque ne soit pas rejeté au contrôle qualité et qu'il soit défaillant.

   On a : $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)=\mathbb{P}\left(\overline{R}|D\right)\times\mathbb{P}(D)=0,04\times 0,05=0,002.$

   (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

   Il y a une erreur de contrôle lorsque le casque n'est pas défaillant et qu'il est rejeté, ou bien lorsque le casque est défaillant et qu'il n'est pas rejeté. On cherche donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((\overline{R}\cap D)\sqcup(R\cap\overline{D})\right)=\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)+\mathbb{P}\left(R\cap\overline{D}\right)&=\mathbb{P}\left(\overline{R}|D\right)\times\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}\left(R|\overline{D}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{D}\right)\\&=0,04\times 0,05+0,07\times 0,95=0,0685.\end{aligned}$$

   (c) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rejeté par ce contrôle ?

   Un casque n'est pas rejeté s'il n'est pas défaillant et qu'il n'est pas rejeté, ou bien s'il est défaillant et qu'il est rejeté. On cherche donc :

$$\mathbb{P}\left((\overline{R}\cap D)\sqcup(\overline{R}\cap\overline{D})\right)=\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)+\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap\overline{D}\right)=0,95\times 0,93+0,05\times 0,04=0,8855.$$

À la suite du test, les casques qui sont détectés défaillants sont détruits, et ne sortent donc pas de l'usine. L'entreprise fabrique 10000 casques chaque jour.

2. Combien de casques sortent effectivement chaque jour de l'entreprise en moyenne ?

   Le nombre de casques suit une loi binomiale de paramètres 10000 et $0,8855$, dont l'espérance vaut : $10000\times 0,8855=8855.$

La production d'un casque coûte 20 euros. Chaque casque sortant de l'usine est vendu 80 euros, et on suppose que tous les casques sont vendus. Cependant, l'entreprise, qui tient à sa réputation, promet de payer 160 euros aux malheureux clients qui auraient acheté un casque défectueux.

3. Combien rapporte en moyenne un casque à l'entreprise ?

   Les casques détruits coûtent 20 euros à l'entreprise (perte sèche), les casques conformes qui sortent de l'usine rapportent 60 euros, tandis que les casques non conformes qui sortent de l'usine coûtent 100 euros. Si on note G le gain d'un casque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G]&=60\times\mathbb{P}\left(\overline{D}\cap\overline{R}\right)-20\times\mathbb{P}\left((\overline{D}\cap R)\sqcup(D\cap R)\right)-100\times\mathbb{P}\left(D\cap\overline{R}\right)\\&=60\times 0,95\times 0,93-20\times(0,95\times 0,07+0,05\times 0,96)-100\times 0,05\times 0,04\\&=50,52.\end{aligned}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

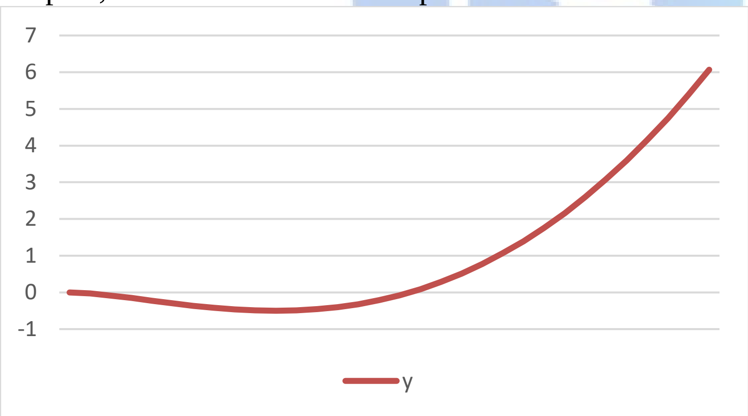
Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R^+ par : $f\ (x) = x^2 Ln\ (x) - \frac{x^2}{2}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* à droite en zéro.
La fonction est bien continue en zéro à droite : $\underset{0}{Lim}\ f(x) = \underset{0}{Lim}\ x^2\,(Ln\ x - \frac{1}{2}) = 0 = f(0)$
Pour la dérivée à droite en zéro, on a : $\underset{0}{Lim} \frac{f(x))}{x} = 0$.

2. Etudier les variations de *f* et donner l'allure de son graphe.
La dérivée de *f* est égale à : $2\ x\ Ln\ x$ qui s'annule pour 0 (avec la condition *f(0)=0)* et en 1. La fonction est décroissante entre 0 et 1, puis croissante. Elle vaut -1/2 en *x*=1. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy.
De plus, la fonction est convexe pour *x*>1/e. La fonction s'annule en racine de e.



3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\ dx$.
On a : $I = \int_1^e x^2 Ln\ (x)\ dx - \int_1^e \frac{x^2}{2}\ \ dx = J - \frac{(e^3-1)}{6}$
Puis on intègre *J* par parties, pour obtenir : $J = \left[\frac{x^3}{3}\ \ Ln\ x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3}\ - \left[\frac{x^3}{9}\ \right]_1^e$.
Par conséquent : $I = \frac{1}{18}(5 + e^3)$

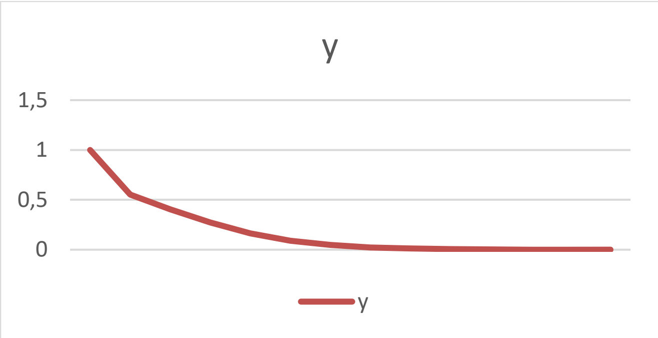
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur R^+ dont l'une est comprise entre $\sqrt{e}$ et e.

x=0 est une solution triviale. Pour x>0, on étudie les variations de $y=x\,Ln\,x-x/2\,-1$: cette fonction est décroissante et négative pour $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ et strictement croissante pour $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$. Elle vaut de plus -1 en $x = \sqrt{e}$ et $\frac{e}{2} - 1 \approx 0.65$ en $x = e$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet donc une unique racine comprise entre $\sqrt{e}$ et e.

Exercice n° 2

Soit la fonction g définie sur R^+ par : $g\,(x) = e^{-2x}\,(2x^2 + 1)$.

1. Etudier les variations de g et tracer son graphe.
La dérivée est égale à : $e^{-2x}\,(-4x^2 + 4x - 2) < 0$, la fonction est donc décroissante de 1 à 0.



2. Etudier la convexité de g.
La dérivée seconde est égale à : $8e^{-2x}\,(x^2 - 2x + 1) > 0$ et la fonction est strictement convexe.

3. Calculer $I = \int_0^1 g(x)\,dx$.
Une primitive de g sera de la forme : $G\,(x) = e^{-2x}\,(ax^2 + bx + c)$. On calcule sa dérivée et on identifie les polynômes pour obtenir : $G\,(x) = -e^{-2x}\,(x^2 + x + 1)$, d'où la valeur de l'intégrale : $I = 1 - \frac{3}{e^2}$

Exercice n° 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé.
Soit A le point de P d'affixe $2i$.
Soit $f: P - A \rightarrow P$ définie par : $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble E des points de P dont l'image par f est un nombre réel non nul.
On doit résoudre : $\frac{z+1}{z-2i} = a$, où a est un nombre réel non nul, soit le système :
$x + 1 = ax; y = a(y - 2)$ et en éliminant a entre les deux équations, on obtient : $y = 2x + 2$ (à l'exception du point A).

2. Déterminer l'ensemble F des points de P dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

On procède de façon analogue pour obtenir le système : $x+1=-a(y-2); y=ax$ et en éliminant a entre les deux équations, on obtient : $(x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$.

Il s'agit donc d'un cercle de centre A(-1/2,1) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice n° 4

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

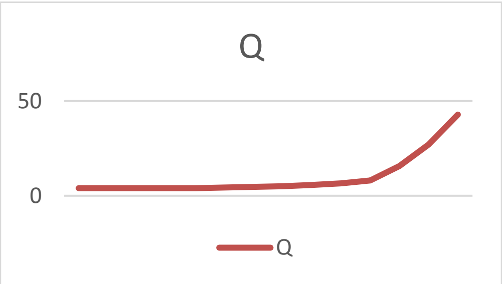
1. Une entreprise de location de voitures particulières propose à sa clientèle deux tarifs :
Tarif A : prise en charge 60 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,40 dollar.
Tarif B : prise en charge 80 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,30 dollar.
Un automobiliste va effectuer un voyage d'affaires de 3 jours.
Déterminer le tarif le plus avantageux pour l'automobiliste en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

Pour le tarif A : $y=3*60+0{,}4x$ et pour le tarif B : $y=3*80+0{,}3x$. Ces deux droites se coupent pour x=600. Par conséquent, si l'automobiliste parcourt plus de 600 kms, le tarif B est préférable, sinon c'est le tarif A.

2. La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p :

$$q=Q(p) \text{ où } Q(p)=\begin{cases} 4 & si \quad 0<p<2 \\ 8(6-p)^{-1/2} & si \quad 2\leq p<5 \\ (p-3)^3 & si \quad p\geq 5 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la convexité de Q sur chaque intervalle (de la définition) et tracer son graphe.
La fonction est continue, car les fonctions ont les mêmes valeurs en 2 et 5.
La fonction n'est pas dérivable en 2, car la dérivée à gauche est nulle et celle à droite vaut ½.
De même, la fonction n'est pas dérivable en 5, car la dérivée à gauche est égale à 4 et celle à droite vaut 12.
La fonction est convexe sur chaque sous intervalle car les dérivées secondes sont positives ou nulles. Et même la fonction est convexe sur son ensemble de définition.



Exercice n° 5

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 boules portent le chiffre 1, 3 boules le chiffre 2, 1 boule le chiffre 3 et 1 boule le chiffre 4. On tire au hasard simultanément deux boules et on note x et y les deux chiffres obtenus.

On considère la variable aléatoire X définie par : $X=|x-y|$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Le nombre total de cas est : $C_8^2 = \frac{8\times7}{2} = 28$. La loi de probabilité est :

X	0	1	2	3
P (X)	6/28	13/28	6/28	3/28

L'espérance est :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} p_i x_i = \frac{13+12+9}{28} = \frac{17}{14}.$$

2. Calculer la variance de X.

On a : $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} p_i x_i^2 = \frac{13+24+27}{28} = \frac{16}{7},$$

d'où $Var(X) = \frac{16}{7} - \left(\frac{17}{14}\right)^2 = \frac{159}{196}$.

3. Soit la variable aléatoire $Y = -2X+1$. Calculer son espérance et sa variance.

On obtient : $E(Y) = -2E(X)+1 = -10/7$ et $Var(Y) = 4Var(X) = 159/49$

Exercice n° 6

Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n.

Si n est pair, la fonction est également paire et si n est impair, la fonction est impaire. On fera donc l'étude que sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(n+(n-2)x^2)}{(1+x^2)^2}$

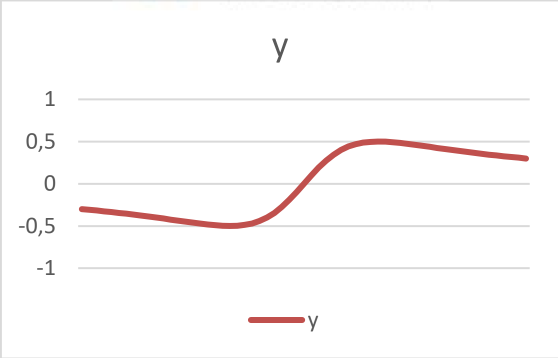
- Si n=1, la dérivée est égale à : $f'_1(x) = \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour x=1. La fonction est croissante entre 0 et 1 puis décroissante.

- Si n=2, la dérivée est égale à : $f'_2(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour x=0. La fonction est croissante sur les réels positifs et son graphe admet une asymptote horizontale y=1.

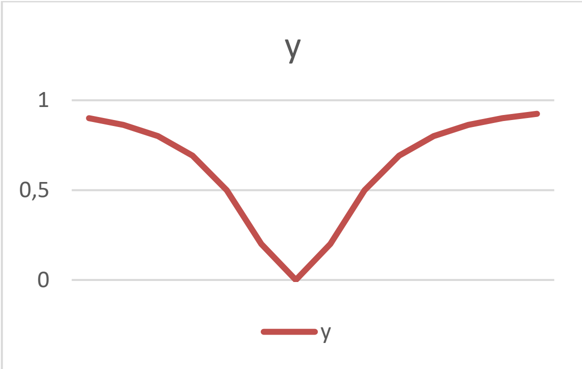
- Si n>2, la fonction est strictement croissante sur les réels positifs.

2. Tracer le graphe de f_1 et celui de f_2.

- Graphe de f_1



- Graphe de f_2



3. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

- Calculer I_1 et I_2

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[Ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{Ln2}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})\,dx = \left[x - Arctgx\right]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

- Calculer I_n pour tout n (on distinguera selon que n est pair ou impair).

Pour n pair $(n = 2p)$:

$$\frac{x^{2p}}{1+x^2} = x^{2p-2} - x^{2p-4} + \cdots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \cdots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{\pi}{4}.$$

Pour n impair $(n = 2p+1)$:

$$\frac{x^{2p+1}}{1+x^2} = x^{2p-1} - x^{2p-3} + \cdots + (-1)^{p+1}x + (-1)^p \frac{x}{1+x^2}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{2} + (-1)^p \frac{Ln\,2}{2}.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN	ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- **Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5.**
- **L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.**

Notations

— On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*, et on pose : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et on pose : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* — il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi qu'un élément i qui vérifie : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction numérique $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+x-1)}$.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+7x-1}{x+3}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.
4. Étudier la limite de $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4\mathrm{e}^x-1}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\big(\cos(3x)\big)$ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.
6. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2} - \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $(u_n + u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser sa raison.
7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite une pièce équilibrée, et l'on note P lorsque la pièce tombe sur « pile », et F lorsque la pièce tombe sur « face ». Le résultat est alors donné par une liste de n lettres P ou F. Par exemple, pour $n = 4$, on note $PFPP$ pour indiquer qu'on a tiré « pile » au premier lancer, puis « face » au deuxième, puis « pile » au troisième et au quatrième.
   (a) Combien y a-t-il de listes possibles ?
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux « pile » lors des n lancers.
8. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
9. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n}$.
10. Résoudre l'équation : $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La fonction f_n est-elle continue en 0 ? Justifier.
   (b) Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer f_n'.
   (d) Dresser le tableau de variation complet de f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f_n(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, qu'on note u_n.
3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
   On pourra commencer par calculer et simplifier $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \ln(u_n) = n$.
   (b) Étudier la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)}$.
   En déduire la limite de $\dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que la suite $\left(u_n \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et préciser la limite.

Exercice 3

On note (E) l'équation : $x^3 + 3x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que (E) possède une unique solution.
   Vous n'essaierez pas de la calculer, c'est l'objectif de la suite de l'exercice.

   On note ρ l'unique solution de (E).

   (b) Justifier que : $\rho \in]0,1[$, puis que : $\rho = \dfrac{1}{\rho^2+3}$.

On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$, et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\rho_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad \rho_{n+1} = f(\rho_n) = \frac{1}{\rho_n^2+3}.$$

On **admet** que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n \in [0,1]$.

2. Donner $f(0)$ et $f(1)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
3. (a) Déterminer un réel $k \in]0,1[$ pour lequel : $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq k$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_{n+1} - \rho| \leq k|\rho_n - \rho|$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_n - \rho| \leq k^n$.
5. (a) Montrer finalement que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ.

   (b) Déterminer un entier N pour lequel : $|\rho_N - \rho| \leq 10^{-20}$. *Vous détaillerez votre raisonnement.*

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Résoudre l'équation : $\cos(n\theta) = -1$ d'inconnue $\theta \in [0, 2\pi[$. Combien y a-t-il de solutions à cette équation ?

   (b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $z = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) \in \mathbb{C}$.
   Donner sans démonstration une forme trigonométrique de z^n.

   (c) En déduire les solutions de l'équation : $z^n = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation : $\bar{z}(z-1) = z^n(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Résoudre l'équation (E_0), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = \bar{z} - 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Résoudre l'équation (E_1), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = z(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$.

3. (a) Montrer que 0 est solution de (E_n).

   Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une solution **non nulle** de (E_n).

   (b) Montrer que : $|z_0| = 1$.

   (c) Montrer que : $\overline{z_0} = \dfrac{1}{z_0}$, puis que : $(z_0 - 1)(z_0^n + 1) = 0$.

   (d) En déduire les valeurs possibles pour z_0.

   (e) En déduire toutes les solutions de (E_n) lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question, $y_0, \ldots, y_n$ sont des nombres **réels positifs**, et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\{y_0, \ldots, y_n\}$.
   (a) Montrer l'*inégalité de Markov* : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{E}(Y) \geq \varepsilon \mathbb{P}(Y \geq \varepsilon)$.
   Indication. Vous pourrez partir de la définition de l'espérance.

   Dans la question suivante, on note m l'espérance de Y, et σ^2 sa variance.

   (b) En déduire l'*inégalité de Bienaymé-Chebychev* : $\mathbb{P}(|Y - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Une population de personnes présente une maladie avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de n personnes, et on pose $X_i = 1$ si le i-ième individu est malade, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? Rappeler l'espérance et la variance de S_n.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
   Vous pourrez appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.
4. Pour $\varepsilon = 0,01$, quelle taille N de l'échantillon doit-on choisir pour que S_N/N soit voisin de p à ε-près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;5)$ et $C(3;-3)$.

1. Donner les coordonnées du centre de gravité [1] du triangle ABC. On le notera G dans la suite.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
   (c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre [2] de ABC. On le notera H dans la suite.
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble d'équation cartésienne : $x^2 - \dfrac{12}{5}x + y^2 - \dfrac{8}{5}y - \dfrac{78}{5} = 0$.
   (a) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - \dfrac{12}{5}x = (x-\alpha)^2 + \beta$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle, dont on précisera son centre Ω et son rayon R.
   (c) Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit [3] au triangle ABC.
4. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

---

1. On rappelle que le *centre de gravité* du triangle ABC est le point de concours des médianes. C'est aussi le barycentre du système $\{(A,1), (B,1), (C,1)\}$.
2. On rappelle que l'*orthocentre* du triangle ABC est le point de concours des hauteurs.
3. On rappelle que le *centre du cercle circonscrit* du triangle ABC est le point de concours des médiatrices. C'est aussi le centre de l'unique cercle passant par A, B et C.

Exercice 7

On pose : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier que I est bien définie.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = x$.

   Vous commencerez par montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ *est dérivable sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$*, et calculerez sa dérivée.*

   (c) En déduire la valeur de I.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

   (b) En déduire que : $I = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}J_{2n+2}$.

   (c) Expliquer comment obtenir une approximation rationnelle de π à 10^{-10} près.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Selon vous quelles conséquences pourraient entraîner l'élection de M. Donald Trump à la présidence des Etats-Unis d'Amérique pour l'équilibre des relations internationales ?

Sujet n° 2

L'omniprésence des réseaux sociaux et la diffusion en continu de l'information peuvent conduire à une certaine manipulation des esprits. Quels moyens nos sociétés pourraient-elles mettre en œuvre afin que la parole des gouvernants, des experts, des scientifiques puisse être mieux entendue par la population noyée dans un flot d'informations contradictoires et de qualité très inégale ?

Sujet n° 3

Dans un proche avenir, on estime qu'un tiers de la population mondiale sera confronté à la raréfaction de la ressource en eau en raison du changement climatique tandis que sa répartition inégale entre les pays devrait renforcer les tensions internationales. Selon vous, comment pourrions-nous mieux gérer la ressource en eau aussi bien au niveau local que transnational afin que tous les pays et leurs populations puissent y avoir accès équitablement ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce sujet se compose de six exercices indépendants. Dans toute l'épreuve, Ln désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper, R l'ensemble des nombres réels, R^+ l'ensemble des nombres réels positifs, C l'ensemble des nombres complexes et N l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R^+ par : $f\ (x) = \sqrt{x} - x$.

1. Étudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

2. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$, où n est un entier naturel non nul.

3. Calculer $J = \int_2^3 \frac{1}{f(x)}\, dx$.

Exercice n° 2

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Étudier les variations de f et g sur $[1, +\infty[$.

2. Pour $k \in N$, non nul, on pose : $I_k = [-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty[$ et $J_k =]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}\,]$.

Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

3. Pour $k \in N$, non nul, on pose : $f_k(x) = \sqrt{x^2 + 2kx + 1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction numérique φ_n définie par : $\varphi_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2 + 2kx + 1}\right) - \sqrt{n^2x^2 + 1}$, où n est un entier naturel strictement supérieur à 1.

4. Calculer $\underset{x \to +\infty}{Lim} \left[f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right]$ et en déduire $\underset{x \to +\infty}{Lim}\, \varphi_n(x)$.

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur $R - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x}$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $f(z) = 1 + i$, où la fonction *f* est prolongée sur $C - \{-1\}$.

Exercice n° 4

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\leq n}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :
$u_{n+1} = u_n \sin(u_n)$ et $0 < u_1 < 1$.

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\leq n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice n° 5

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x) = Ln(x + e)$ et $g(x) = \sqrt{x + 1}$. On note x_0 la solution de l'équation $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} = 1$ et on admet que $x_0 \approx 3{,}7$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Dans une course à pied de 15 kms, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête (A et B) se trouvent sur une même ligne. On note x la distance restante à parcourir (en kms), que l'on suppose supérieure à x_0. On fait alors l'hypothèse H suivante :

H : La probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et la probabilité que ce soit B est égale à $\frac{1}{g(x)}$.

L'hypothèse H a-t-elle un sens ? Sous cette hypothèse, qui a le plus de chance de gagner la course entre A et B ?

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé (représenté) par une fonction f définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x)=(ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels. On donne $e \approx 2{,}7$; $e^{-1} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$.

1. Seulement dans cette question a=3 et b=1. Étudier les variations de f et sa convexité. Tracer son graphe.

2. Déterminer la valeur de b pour que la demie tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de a et représenter ce tobogan.

4. Le mur de soutènement du toboggan (partie entre le sol et le toboggan) sera peint par un artisan sur une seule face. Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après est tiré du livre d'Evelyne Heyer intitulé « La vie secrète des gènes » paru en novembre 2022 aux éditions Flammarion. L'autrice est professeure d'anthropologie génétique au Muséum national d'histoire naturelle, établissement français de recherche, d'enseignement et musée.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Toujours plus nombreux.

L'espèce humaine s'est multipliée à une vitesse folle depuis deux siècles. Mais la population finira vraisemblablement un jour par se stabiliser, voire par diminuer, à cause du phénomène de transition démographique.

Les chiffres de la démographie mondiale donnent le tournis. Chaque seconde, l'air que nous respirons s'emplit des cris de 4 nouveau-nés supplémentaires (la moyenne statistique exacte est de 4,66 nouvelles naissances par seconde). Chaque année, la planète héberge147 millions d'êtres humains en plus. Ce nombre descend à 90 millions si l'on tient compte du nombre de morts (1,81 décès par seconde). Il n'empêche : au total depuis l'aube de l'humanité, on estime que nous avons été 80 milliards d'individus. Cette croissance démographique est vertigineuse ! Nous sommes actuellement 7,8 milliards d'humains sur la planète, or nous étions moins d'un milliard il y a 200 ans ! Quand je suis née, nous étions presque moitié moins sur la planète.

Où nous mène cette augmentation si rapide et comment l'expliquer ? Par un phénomène bien connu des démographes : la transition démographique. Les Européens franchissent cette étape ces derniers siècles. Au XVIIe siècle, en France, les gens avaient beaucoup d'enfants, mais ceux-ci mouraient fréquemment : seule la moitié des enfants atteignaient quinze ans ! Avec l'amélioration de l'alimentation et de l'hygiène, ajoutées à la vaccination, cette mortalité a chuté rapidement. Ce recul est la première phase de la transition démographique. La seconde est la baisse de la fertilité. En somme, schématiquement, les familles basculent d'un modèle avec beaucoup d'enfants, mais qui meurent souvent, à peu d'enfants, mais qui survivent.

Pourquoi ce revirement explique-t-il la croissance exponentielle de la population mondiale ? En réalité, les pays qui s'engagent dans la transition démographique ne voient pas immédiatement le nombre d'enfants baisser. Aussi, pendant quelques décennies, conservent-ils une natalité solide sans contrepartie négative. Les mères continuent d'avoir des familles nombreuses sans qu'elles soient grevées par une santé fragile. C'est durant cette période que la croissance démographique est extrêmement forte. Par exemple, l'Angleterre est passée de 7 millions d'habitants en 1750 à 40 millions en 1900, soit 6 fois plus en 150 ans tout juste. Et c'est sans compter les quelques millions d'individus qui sont partis coloniser l'Amérique du Nord, l'Afrique du Sud ou l'Australie. Par comparaison, pendant ce temps, la France, qui avait déjà fait sa mue, s'est contentée d'une augmentation de 5 millions d'habitants, montant de 25 à 30 millions.

La transition démographique a commencé en Europe à la moitié du XVIIIe siècle et a fait son chemin partout à la surface du globe. Aujourd'hui, tous les pays du monde ont entamé ou on finit la leur. A l'échelle mondiale, le taux de natalité est passé de 5 enfants par femme en 1800 à 2,4 actuellement. Par rapport à notre propre histoire européenne, les choses s'accélèrent un peu partout ailleurs. Là où il a fallu à l'Europe plus de 150 ans pour passer le cap, l'Iran y est arrivé en seulement 20 ans ! Les pays d'Amérique du Sud et d'Afrique du Nord ont aussi vécu une transition rapide, en seulement 30 à 50 ans. Les pays d'Afrique subsaharienne sont les derniers à être entrés dans cette transition démographique et la font à des rythmes variables. Pour preuve, actuellement, à l'échelle mondiale, la fécondité varie entre 4,4 en Afrique, 2,1 en Asie et seulement 1,6 en Europe.

L'amélioration des conditions de santé n'est pas le seul facteur déclencheur. Dans certains pays comme la Chine, c'est une volonté forte de l'État qui a imposé la politique de l'enfant unique. Cette décision accélère un virage qui était déjà entamé. Dans les autres pays, amorcée grâce à de meilleurs soins, la baisse de la natalité s'est vue renforcée par l'élévation du niveau de vie et, surtout, par l'éducation des femmes. Mais qu'advient-il du nombre de naissances une fois la transition démographique achevée ? Plusieurs pays sont allés encore plus loin que le taux de natalité minimum requis pour que la population se renouvelle, qui correspond à 2,1 enfants par femme. Par exemple, à Singapour, on compte 1,1 enfant par femme, en Chine 1,6, en Corée du Sud 1,27. Et en Europe, tous les pays sont au-dessus de 2 enfants par femme. L'Italie et l'Allemagne affichent seulement 1,4 contre autour de 1,9 pour l'Irlande et la France.

D'ailleurs, la faiblesse de ces taux de natalité a conduit certains pays à s'alerter de la décroissance attendue de leur population, en l'absence d'immigration. Pour l'éviter, ces nations mettent en place des politiques incitant les femmes à avoir plus d'enfants. Ainsi, Singapour accorde une prime aux femmes qui font un enfant, et le gouvernement a même ajouté en 2021 une prime spéciale Covid pour rassurer les futurs parents sur leur avenir financier.

Vers quel futur nous amènent ces transitions en cascade, qui se réalisent aux quatre coins de la planète ? Les projections démographiques s'accordent toutes sur une croissance de la population humaine qui durera encore 30 ans, grimpant jusqu'à 9, voire 10 ou 11 milliards d'humains. Ensuite, certains démographes prédisent une décroissance de la population humaine. Tous les pays auraient alors terminé leur transition, et nous devrions commencer à être moins nombreux sur la planète. Ce qui ne dit rien de la pression que nous exercerons alors sur l'environnement. […]

Le hasard, à la source de la vie.

Sur la côte ouest de l'Australie, le golf de Shark Bay est une fenêtre vers les origines de la vie. Ce qui ressemble à des rochers parsemant le sable est en réalité … vivant. Les centaines de grosses boules noires sont des stromatolithes, c'est à dire des concrétions[1] minérales bâties par des algues microscopiques. Les biologistes pensent qu'elles offrent un aperçu des tous premiers organismes qui ont fleuri sur Terre, il y a 3,5 milliards d'années.

L'instant zéro de la vie sur notre planète a pu être bien antérieur (certains évoquent la date de -4,29 milliards d'années), mais une chose est avérée : entre ces espèces pionnières et toute la variété de formes de vie existantes aujourd'hui, tout a reposé sur le hasard. En quoi a-t-il joué dans l'arbre de la vie ? En fait, nous sommes les descendants des premières cellules qui contenaient de l'ADN[2] (ou de l'ARN[3] au sein des cellules, mais qui aurait pu jouer un rôle majeur lors de l'apparition de la vie). Or, avec ce type de molécule, le hasard est devenu la base de l'évolution biologique.

En effet, à chaque division cellulaire, l'ADN se voit recopié afin de fournir deux exemplaires d'ADN qui habiteront les cellules filles. Pour autant, cette copie n'est jamais parfaite : de façon aléatoire, des erreurs se glissent lors de la reproduction. Imaginez si l'on devait recopier lettre à lettre un livre : inévitablement, même le copiste le plus talentueux ferait quelques coquilles. Pour vous donner un ordre d'idée du défi que relèvent constamment les cellules, voici quelques chiffres : notre ADN contient 3 milliards de lettres, or seules entre 30 et 40 mutations entachent en moyenne sa copie à chaque génération. 30 à 40 mutations vous séparent donc à la naissance de l'ADN de chacun de vos parents – vous êtes en somme porteur de 70 « coquilles ».

Une trentaine d'erreurs sur 3 milliards de lettres, c'est vraiment très peu. En d'autres termes, notre ADN est super-robuste et fichtrement bien copié ! Ce n'est pas le cas de tous les organismes. Par exemple, le fameux virus SARS-CoV-2, dont le génome[4] est beaucoup plus petit (30 000 lettres), affiche un taux de mutations environ mille fois plus élevé. Quant au virus de la grippe, il mute encore deux fois plus.

Pourquoi ces mutations aléatoires sont-elles fondamentales à la vie ? Parce qu'elles sont les moteurs de l'évolution. Les mutations chez l'humain sont pour la plupart neutres, et, pour une minorité, néfastes, c'est-à-dire que leurs porteurs survivent moins bien ou ne se reproduisent pas aussi efficacement. Toutefois, dans quelques très rares cas, le hasard fait bien les choses, et ces mutations dotent l'individu d'un avantage dans son milieu. Elles peuvent être immédiatement bénéfiques ou révéler leur intérêt lors de l'émergence d'une nouvelle maladie,

---

[1] Réunion de parties en un corps solide ; ce corps.
[2] Abréviation de « acide désoxyribonucléique ». La molécule d'ADN se trouve dans toutes nos cellules et contient toutes les informations nécessaires au développement et au fonctionnement du corps.
[3] Abréviation de « acide ribonucléique ». Cette molécule biologique a une structure moléculaire très proche de l'ADN.
[4] Ensemble de l'information génétique d'un organisme contenu dans chacune de ses cellules sous la forme de chromosomes.

par exemple. Les mutations sont en quelque sorte un réservoir de potentialités pour des adaptations futures.

Ainsi les Bajo en Indonésie ont eu la chance de voir apparaître dans le génome de leurs ancêtres une mutation qui allait devenir fort avantageuse : elle permet de nager en apnée plus de 10 minutes ! Cette mutation n'a certainement aucun intérêt pour la plupart d'entre nous et est dite neutre. Chez les Bajo, pêcheurs d'éponges, elle s'est en revanche révélée un sacré avantage !

L'aléa génétique est le carburant de toutes les grandes inventions évolutives depuis l'origine de la vie : la respiration des premières bactéries qui a enrichi l'atmosphère en oxygène, le passage d'organismes unicellulaires à des individus constitués de plusieurs cellules, l'apparition du cerveau comme système nerveux central… Dans des temps plus proches, nos ancêtres ont eu la chance de porter des mutations favorisant le développement d'un cerveau particulièrement efficace, de la bipédie, du langage, etc. Bref, nous sommes les descendants de tous ces heureux gagnants à la loterie des mutations. […]

<u>Notre évolution va-t-elle se poursuivre ?</u> […]

Il serait faux de croire que, puisque l'essentiel d'entre nous ne vit plus comme des chasseurs-cueilleurs soumis aux aléas de la nature, nous ne nous émanciperons pas de ce grand principe universel qui veut que toutes les espèces vivantes évoluent : à chaque fois que deux être humains engendreront un enfant, des mutations, des nouveautés génétiques apparaitront par hasard dans notre ADN. Pour l'essentiel, ces altérations ne changeront pas grand-chose, mais une infime partie d'entre elles se révèleront positives et seront retenues par la sélection naturelle.

Mais de quelle sélection s'agit-il ? L'amélioration incessante de la qualité de vie depuis 200 ans, dans les pays riches, donne l'impression que la sélection naturelle s'est presque tarie : quasiment tous les enfants atteignent l'âge adulte, alors que presque la moitié mourait il y a deux siècles. En fait, la sélection joue à présent sur la fertilité et la reproduction. On voit déjà que, dans certaines régions polluées, les chromosomes Y, plus fragiles que le reste du génome, entrainent une infertilité masculine. La sélection naturelle dépend du milieu dans lequel nous vivons, celui que nous créons.

Dans quelles directions ira l'évolution ? Question épineuse. Cela dépendra du hasard des mutations et, justement, de l'environnement dans lequel nous habiterons. Deux éléments bien difficiles à prédire ! Inutile de lorgner vers des hypothèses fantasques de science-fiction : nous n'aurons pas les jambes plus courtes car nous marcherions moins, ni un sixième doigt pour mieux utiliser les smartphones. Et s'il est difficile d'anticiper à long terme où nous amènera le jeu de la vie, il y a au moins un aspect humain qui ne changera pas.

Lequel ? Nos incessantes migrations. Nous sommes une espèce qui a la bougeotte. En cela, nous nous distinguons de nos cousins, les grands singes non humains, qui sont restés rivés à leur berceau, l'Afrique tropicale et l'Asie du Sud-Est pour les orangs-outans. La migration fait partie du succès de notre espèce. Un futur sans ces échanges de gènes me semble irréaliste. Cela peut vous paraître étrange, mais c'est la leçon que retient la généticienne anthropologue que je suis. Vous songez certainement davantage à un futur empli de fusées vers Mars ou de voitures volantes. Moi, j'imagine les déplacements humains. Et un ticket pour Mars, n'est-ce pas déjà une forme de migration ?

Une chose que l'on peut prédire dans un futur proche avec une quasi-certitude, c'est l'envolée de notre démographie. Nous atteindrons un pic de population d'environ 10 milliards d'humains dans 30 à 50 ans. L'essentiel de ce boom aura lieu en Afrique. Or notre impact sur la planète varie d'un facteur 100 selon que l'on est européen ou américain, ou qu'on habite en Afrique. Donc, pour que nous puissions vivre bien et plus nombreux sans détruire davantage notre biotope[5], il est indispensable que les pays riches basculent vers des modes de consommation plus en adéquation avec le futur de la planète. Nous sommes les héritiers des générations passées, soyons maintenant solidaires des générations futures !

[5] Milieu de vie, environnement avec des caractéristiques physiques spécifiques (sol et ses constituants, air, température, humidité, lumière, climat, etc.)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- **Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5.**
- **L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.**

Notations

— On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*, et on pose : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et on pose : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* — il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi qu'un élément i qui vérifie : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1-\mathrm{e}^{-4}}{2}.$$

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction numérique $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+x-1)}$.
   La fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $x^2+x-1>0$ et : $\ln(x^2+x-1) \geq 0$, c'est-à-dire tel que : $x^2+x-1>0$ et : $x^2+x-1 \geq 1$.

   Or le discriminant de x^2+x-1 est : $1^2-4\times 1\times(-1)=5$, donc les racines sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,

   donc : $x^2+x-1>0 \iff x \in]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.

   De même : $x^2+x-1 \geq 1 \iff x^2+x-2 \geq 0 \iff x \in]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$.

   Mais : $2<\sqrt{5}<3$, donc : $-2<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$, donc la fonction est définie sur $]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$.

3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+7x-1}{x+3}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.

   Pour tout $x>0$: $\dfrac{\frac{3x^2+7x-2}{x+3}}{x} = \dfrac{3x^2+7x-2}{x^2+3x} = \dfrac{3x^2}{x^2}\times\dfrac{1+\frac{7}{3x}-\frac{2}{3x^2}}{1+\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3\times 1=3$, puis :

$$\frac{3x^2+7x-2}{x+3}-3x = \frac{3x^2+7x-2}{x+3}-\frac{3x(x+3)}{x+3} = \frac{-2x-2}{x+3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2.$$

   Donc la fonction possède la droite d'équation cartésienne : $y=3x-2$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la limite de $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

   On a : $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1} = 3x^3\times\dfrac{1-\frac{1}{3x}}{1-x^4e^x}$.

   Par croissance comparée : $x^4e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc par produit : $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\big(\cos(3x)\big)$ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

   La dérivée de la fonction est $x \mapsto \dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)} = -3\tan(3x)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

6. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n+u_n^2}-\dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $(u_n+u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser sa raison.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}+u_{n+1}^2 &= \sqrt{1+u_n+u_n^2}-\frac{1}{2}+\left(\sqrt{1+u_n+u_n^2}-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \sqrt{1+u_n+u_n^2}-\frac{1}{2}+1+u_n+u_n^2-\sqrt{1+u_n+u_n^2}+\frac{1}{4} \\ &= u_n+u_n^2+\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

   La suite est arithmétique de raison $\dfrac{3}{4}$.

7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite une pièce équilibrée, et l'on note P lorsque la pièce tombe sur « pile », et F lorsque la pièce tombe sur « face ». Le résultat est alors donné par une liste de n lettres P ou F. Par exemple, pour $n = 4$, on note $PFPP$ pour indiquer qu'on a tiré « pile » au premier lancer, puis « face » au deuxième, puis « pile » au troisième et au quatrième.
   (a) Combien y a-t-il de listes possibles ?
   Il y a 2^n possibilités.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux « pile » lors des n lancers.
   Il y a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ possibilités.
   Comme elles sont toutes équiprobables, la probabilité est : $\dfrac{n(n-1)}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$.
8. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   On a : $a = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2 \times \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.
9. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc : $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
10. Résoudre l'équation : $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
   On reconnaît une équation homogène en x^2.
   Or pour tout $z \in \mathbb{C}$: $2z^2 - 3z - 2 = 2(z-2)\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$, donc pour tout $x \in \mathbb{C}$:
$$2x^4 - 3x^2 - 2 = 2(x^2-2)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right) \\ 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$
   Les solution réelles sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et les solutions complexes sont $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La fonction f_n est-elle continue en 0 ? Justifier.
   Par produit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ donc f_n est continue à gauche, et par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x) = -\infty$, donc f_n n'est pas continue à droite.
   Conclusion : f_n n'est pas continue en 0.

(b) Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.
Par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer f_n'.
Par produit et composée, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_n'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}.$$

(d) Dresser le tableau de variation complet de f_n sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_n'(x) = \dfrac{x+n}{x} \times \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f_n	$-\infty$	↗	$-n\mathrm{e}$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f_n(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, qu'on note u_n.
La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc l'équation possède au plus une solution.
Mais : $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, et comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'équation possède au moins une solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Conclusion : l'équation possède exactement une solution.
En fait, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(1) = \mathrm{e}^{-n} < 1$, et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $u_n \geq 1$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
On pourra commencer par calculer et simplifier $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{u_n}} = u_n\mathrm{e}^{-\frac{n}{u_n}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} = f_n(u_n) \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} < 1 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, c'est que : $u_n < u_{n+1}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
La suite est strictement croissante, donc possède une limite $\ell \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone.
Si $\ell \in [1, +\infty[$, alors en passant à la limite dans la relation : $u_n\mathrm{e}^{-\frac{n}{u_n}} = 1$, et par composition, il vient : $0 = 1$, ce qui est absurde.
Donc : $\ell = +\infty$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \ln(u_n) = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la relation : $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$, il vient : $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, et donc : $u_n \ln(u_n) = n$.

(b) Étudier la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)}$.

En déduire la limite de $\dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $x > 1$: $\dfrac{\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par croissance comparée.

Ainsi : $\dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \dfrac{\ln\big(u_n \ln(u_n)\big)}{\ln(u_n)} = \dfrac{\ln(u_n) + \ln\big(\ln(u_n)\big)}{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par composition des limites.

(c) Montrer que la suite $\left(u_n \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et préciser la limite.

Enfin : $u_n \times \dfrac{\ln(n)}{n} = \dfrac{u_n \ln(u_n)}{n} \times \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par produit.

Exercice 3

On note (E) l'équation : $x^3 + 3x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que (E) possède une unique solution.

Vous n'essaierez pas de la calculer, c'est l'objectif de la suite de l'exercice.

La fonction $x \overset{\varphi}{\mapsto} x^3 + 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 3 > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$ et : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, et comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique racine.

On note ρ l'unique solution de (E).

(b) Justifier que : $\rho \in]0,1[$, puis que : $\rho = \dfrac{1}{\rho^2 + 3}$.

On a : $\varphi(0) = -1 < 0$ et : $\varphi(1) = 3 > 0$, donc $\rho \in]0,1[$.

Par ailleurs : $\rho^3 + 3\rho - 1 = 0 \iff \rho(\rho^2 + 3) = 1 \overset{\rho^2+3\neq 0}{\iff} \rho = \dfrac{1}{\rho^2 + 3}$.

On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$, et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\rho_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad \rho_{n+1} = f(\rho_n) = \frac{1}{\rho_n^2 + 3}.$$

On **admet** que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n \in [0,1]$.

2. Donner $f(0)$ et $f(1)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

   On a : $f(0) = \dfrac{1}{3}$ et $f(1) = \dfrac{1}{4}$.

   La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

3. (a) Déterminer un réel $k \in]0,1[$ pour lequel : $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq k$.

   Par quotient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|f'(x)| = \dfrac{2x}{(x^2+3)^2} \leq \dfrac{2 \times 1}{(0+3)^2} = \dfrac{2}{9}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_{n+1} - \rho| \leq k|\rho_n - \rho|$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\rho_n, \rho \in [0,1]$, l'inégalité des accroissements assure que :

$$|\rho_{n+1} - \rho| = |f(\rho_n) - f(\rho)| \leq \frac{2}{9} \times |\rho_n - \rho|.$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_n - \rho| \leq k^n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|\rho_n - \rho| \leq k^n$ ».

   Initialisation. On a : $|\rho_0 - \rho| = \rho < 1 = k^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Aussitôt :

$$|\rho_{n+1} - \rho| \overset{\text{Q3.}}{\leq} k|\rho_n - \rho| \overset{\text{HR}}{\leq} k \times k^n = k^{n+1}.$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\rho_n - \rho| \leq k^n$.

5. (a) Montrer finalement que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ.

   Comme : $0 \leq k < 1$, on a : $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Par encadrement : $\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho$.

   (b) Déterminer un entier N pour lequel : $|\rho_N - \rho| \leq 10^{-20}$. *Vous détaillerez votre raisonnement.*

   Un entier N tel que : $k^N \leq 10^{-20}$ convient. Or :

$$k^N \leq 10^{-20} \iff N\ln(k) \leq -20\ln(10) \iff N \geq \frac{-20\ln(10)}{\ln(k)}.$$

   On a : $\dfrac{-20\ln(10)}{\ln(k)} \approx 30,6$, donc : $N = 31$ convient.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Résoudre l'équation : $\cos(n\theta) = -1$ d'inconnue $\theta \in [0, 2\pi[$. Combien y a-t-il de solutions à cette équation ?

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(n\theta) = -1 \iff n\theta \equiv \pi \ (2\pi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}/ \quad \theta = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$.

   Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $\dfrac{\pi}{n}, \dfrac{3\pi}{n}, \ldots, \dfrac{(2n-1)\pi}{n}$ — il y en a n.

(b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $z = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) \in \mathbb{C}$.
Donner sans démonstration une forme trigonométrique de z^n.
On a : $z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big)$.

(c) En déduire les solutions de l'équation : $z^n = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^n = -1 &\iff \rho^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big) = 1 \times \big(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\big) \\ &\iff \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta \equiv \pi \quad (2\pi) \\ &\iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\} / \quad z = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation : $\bar{z}(z-1) = z^n(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Résoudre l'équation (E_0), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = \bar{z} - 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} \bar{z}(z-1) = \bar{z} - 1 &\iff (a - ib)(a + ib - 1) = a - ib - 1 \\ &\iff a^2 + b^2 - a + ib = a - ib - 1 \\ &\iff a^2 + b^2 - 2a + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2b = 0 \\ &\iff b = 0 \quad \text{et } a^2 - 2a + 1 = 0 \\ &\iff z = 1. \end{aligned}$$

(b) Résoudre l'équation (E_1), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = z(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\bar{z}(z-1) = z(\bar{z}-1) \iff \bar{z}z - \bar{z} = z\bar{z} - z \iff z - \bar{z} = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$.

3. (a) Montrer que 0 est solution de (E_n).
On a : $\bar{0}(0-1) = 0$ et $0^n(\bar{0}-1) = 0$, donc 0 est solution de (E_n).

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une solution **non nulle** de (E_n).

(b) Montrer que : $|z_0| = 1$.
En prenant le module : $|\bar{z}_0(z_0 - 1)| = |z_0^n(\bar{z}_0 - 1)|$.
Or pour tout $Z, Z' \in \mathbb{C}$: $|\bar{Z}| = |Z|$ et $|ZZ'| = |Z| \times |Z'|$, donc on obtient :

$$|z_0| \times |z_0 - 1| = |z_0|^n \times |z_0 - 1| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |z_0| \times |1 - z_0| \times (1 - |z_0|^{n-1}) = 0.$$

Donc, comme $n \geq 2$, : $\underbrace{z_0 = 0}_{\text{exclu}}$ ou $z_0 = 1$ ou $|z_0|^{n-1} = 1$, donc : $|z_0| = 1$.

(c) Montrer que : $\overline{z_0} = \dfrac{1}{z_0}$, puis que : $(z_0 - 1)(z_0^n + 1) = 0$.
On a : $|z_0| = 1 \iff |z_0|^2 = 1$. Or : $|z_0|^2 = z_0\overline{z_0}$.

Ainsi :

$$\bar{z_0}(z_0-1)=z_0^n(\bar{z_0}-1) \overset{\bar{z_0}=\frac{1}{z_0}}{\iff} \frac{1}{z_0}(z_0-1)=z_0^n\left(\frac{1}{z_0}-1\right)$$
$$\overset{\times z_0\neq 0}{\iff} (z_0-1)=z_0^n(1-z_0)$$
$$\iff (z_0-1)(z_0^n+1)=0.$$

(d) En déduire les valeurs possibles pour z_0.
Ainsi : $z_0=1$ ou $z_0^n=-1$, donc d'après la question 1 :

$$z_0\in\left\{1,\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right\}_{k=0,\ldots,n-1}.$$

(e) En déduire toutes les solutions de (E_n) lorsque $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.
On a vu que 0 est solution, et que toute autre solution est nécessairement soit égale à 1 soit de la forme $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ pour $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Or on vérifie que réciproquement toutes ces possibilités sont solutions de (E_n). On a donc bien identifié toutes les solutions : 0, 1 et $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ pour $k\in\{0,\ldots,n-1\}$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on fixe un entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question, $y_0,\ldots,y_n$ sont des nombres **réels positifs**, et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\{y_0,\ldots,y_n\}$.

(a) Montrer l'*inégalité de Markov* : $\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{E}(Y)\geq\varepsilon\mathbb{P}(Y\geq\varepsilon)$.
Indication. Vous pourrez partir de la définition de l'espérance.
Soit $\varepsilon>0$. On a :

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=0}^{n}y_k\mathbb{P}(Y=y_k)\geq\sum_{y_k\geq\varepsilon}y_k\mathbb{P}(Y=y_k)\geq\sum_{y_k\geq\varepsilon}\varepsilon\mathbb{P}(Y=y_k)=\varepsilon\mathbb{P}(Y\geq\varepsilon).$$

Dans la question suivante, on note m l'espérance de Y, et σ^2 sa variance.

(b) En déduire l'*inégalité de Bienaymé-Chebychev* : $\mathbb{P}(|Y-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Pour commencer : $\mathbb{P}[|Y-m|\geq\varepsilon]=\mathbb{P}[(Y-m)^2\geq\varepsilon^2]$.
Appliquons à présent l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(Y-m)^2$:

$$\mathbb{P}\big((Y-m)^2\geq\varepsilon^2\big)\leq\frac{\mathbb{E}\big((Y-m)^2\big)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Une population de personnes présente une maladie avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de n personnes, et on pose $X_i = 1$ si le i-ième individu est malade, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? Rappeler l'espérance et la variance de S_n.
   On a : $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc : $\mathbb{E}(S_n) = np$ et $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
   Par produit : $\forall x \in [0,1],\quad x(1-x) \geq 0$.
   Pour tout $x \in [0,1]$:
$$x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
   Vous pourrez appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.
   On a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right)$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : $\mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right) \leq \frac{np(1-p)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.
   D'après la question précédente : $\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

4. Pour $\varepsilon = 0,01$, quelle taille N de l'échantillon doit-on choisir pour que S_N/N soit voisin de p à ε-près avec une probabilité supérieure à 95% ?
   On cherche un entier N tel que : $\frac{1}{4N \times 0,01^2} \leq 0,05$, c'est à dire $N \geq \frac{1}{4 \cdot 10^{-4} \times 0,05} = 500$.
   Par exemple $N = 500$ convient.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, et on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;5)$ et $C(3;-3)$.

1. Donner les coordonnées du centre de gravité [1] du triangle ABC. On le notera G dans la suite.
   On a : $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$, d'où $G\left(\frac{1}{3};1\right)$.

2. (a) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
   Pour tout $M(x;y)$:
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff \begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 4y + 7 = 0.$$

1. On rappelle que le *centre de gravité* du triangle ABC est le point de concours des médianes. C'est aussi le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
Pour tout $M(x;y)$:

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}=0 \iff 3x-2y+7=0.$$

(c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre [2] de ABC. On le notera H dans la suite.
Pour tout $M(x;y)$:

$$\begin{cases} x-4y=-7\\ 3x-2y=-7\end{cases} \overset{\text{substitution}}{\iff} \begin{cases} x=4y-7\\ 3(4y-7)-2y=-7\end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{7}{5}\\ x=-\dfrac{7}{5}\end{cases}$$

D'où $H\left(-\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$.

3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble d'équation cartésienne : $x^2-\frac{12}{5}x+y^2-\frac{8}{5}y-\frac{78}{5}=0$.

(a) Déterminer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2-\frac{12}{5}x=(x-\alpha)^2+\beta$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(x-\alpha)^2+\beta=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta$.
On peut choisir α,β tels que : $2\alpha=\frac{12}{5}$ et $\alpha^2+\beta=0$, c'est-à-dire : $\alpha=\frac{6}{5}$ et $\beta=-\frac{36}{25}$.

(b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle, dont on précisera son centre Ω et son rayon R.
Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^2-\frac{12}{5}x+y^2-\frac{8}{5}y-\frac{78}{5}=0 &\iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{36}{25}+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}-\frac{78}{5}=0\\ &\iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}.\end{aligned}$$

On reconnaît le cercle de centre $\Omega\left(\frac{6}{5};\frac{4}{5}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{442}}{5}$.

(c) Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit [3] au triangle ABC.
On sait que $\mathcal{E}$ est un cercle. S'il passe par A, B et C, c'est le cercle circonscrit au triangle.
Or on vérifie que : $(-3)^2-\frac{12}{5}\times(-3)+(1)^2-\frac{8}{5}\times(1)-\frac{78}{5}=0$, donc $A\in\mathcal{E}$.
De même, on vérifie que $B,C\in\mathcal{E}$.
Ainsi, $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

On calcule : $[\overrightarrow{\Omega H},\overrightarrow{\Omega G}]=\begin{vmatrix}-\frac{13}{5} & -\frac{13}{15}\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}=0$, donc Ω, H et G sont alignés.

2. On rappelle que l'*orthocentre* du triangle ABC est le point de concours des hauteurs.
3. On rappelle que le *centre du cercle circonscrit* du triangle ABC est le point de concours des médiatrices. C'est aussi le centre de l'unique cercle passant par A, B et C.

Exercice 7

On pose : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier que I est bien définie.

   La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I est bien définie.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = x$.

   Vous commencerez par montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et calculerez sa dérivée.

   D'après le TFCI, la fonction $x \overset{\psi}{\mapsto} \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   Par composition, la fonction $x \mapsto \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \psi\big(\tan(x)\big)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et sa dérivée vaut :

   $$(\psi \circ \tan)'(x) = \tan'(x) \times \psi'\big(\tan(x)\big) = \big(1+\tan(x)^2\big) \times \frac{1}{1+\tan(x)^2} = 1.$$

   Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad (\psi \circ \tan)(x) = x + \lambda$.

   En évaluant en 0, il vient : $\lambda = 0$.

   (c) En déduire la valeur de I.

   Évaluons la dernière expression en $\frac{\pi}{4}$: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$, donc par croissance de l'intégrale :

   $$0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

   (b) En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Par encadrement : $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad -t^2 \neq 1$, $\quad$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2},$$

d'où : $\quad \dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$

(b) En déduire que : $\quad I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}J_{2n+2}.$

On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Q3.a)}}{=} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{simplification}}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}J_{2n+2}.
\end{aligned}$$

(c) Expliquer comment obtenir une approximation rationnelle de π à 10^{-10} près.

D'après ce qui précède : $\quad \left| I - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = J_{2n+2} \leq \frac{1}{2n+3}$, $\quad$ et donc :

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

Pour obtenir une approximation rationnelle de π à 10^{-10} près, il suffit de trouver N tel que : $\quad \dfrac{4}{2N+3} \leq 10^{-10}$, $\quad$ c'est-à-dire : $\quad N \geq 2\cdot 10^{10} - \dfrac{3}{2}$, $\quad$ puis de calculer $4\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

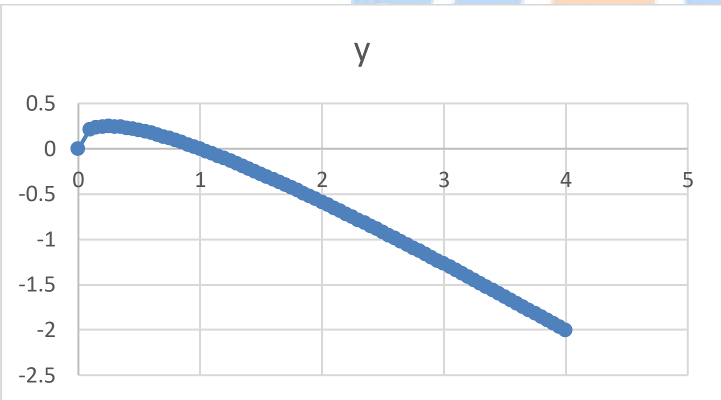
ISE cycle long / AS

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R^+ par : $f\ (x) = \sqrt{x} - x$.

1. Étudier les variations de *f* et donner l'allure de son graphe.
La dérivée de la fonction est égale à : $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ s'annule pour *x*=1/4.
La fonction est croissante entre 0 et ¼, et décroissante après.
On a : $\lim_{x\to\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x\to\to+\infty} (f(x) + x) = +\infty$, par conséquent le graphe admet une branche parabolique dans la direction *y*=-*x*.
De plus la tangente est verticale à l'origine et *f*(0)=*f*(1)=0 et *f*(1/4)=1/4.



2. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$, où *n* est un entier naturel non nul.
On a : $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 \left(x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n+1}\right) dx = \frac{1}{(n+2)(2n+3)}$.

3. Calculer $J = \int_2^3 \frac{1}{f(x)}\, dx$.
On effectue un changement de variable : $t = \sqrt{x}$, et on obtient : $J = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{1-t} dt = 2\, Ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$.

Exercice n° 2

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$f(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$ et $g(x)=-x+\sqrt{x^2-1}$

1. Étudier les variations de *f* et *g* sur $[1,+\infty[$.

La dérivée de *f* est $f'(x)=-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0$ et la fonction est décroissante de -1 à $-\infty$ sur l'intervalle d'étude (la fonction n'est pas dérivable à droite en 1).

La dérivée de *g* est $g'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ et la fonction est croissante de -1 à 0 (la fonction tend vers 0 à plus l'infini).

2. Pour $k\in N$, non nul, on pose : $I_k=\left[-k+\sqrt{k^2-1},+\infty\right[$ et $J_k=\left]-\infty,-k-\sqrt{k^2-1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

Comme *g* est croissante, on a : $I_{k+1}\subset I_k$
Comme *f* est décroissante, on a : $J_{k+1}\subset J_k$

3. Pour *k* entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction numérique $\varphi_n$définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$, où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 1.

La résolution de l'inéquation $x^2+2kx+1\geq 0$, montre que le domaine de définition de $f_k(x)$ est $I_k\cup J_k$ et on en déduit que le domaine de définition de φ_n est $I_n\cup J_n$.

4. Calculer $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi_n(x)$.

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]=k \text{ et } \underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur $R - \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$.

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction peut s'écrire : $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{2}{1+x}$. Cette fonction admet la droite d'équation *y*=*x*-1 comme asymptote oblique et la droite *x*=-1 comme asymptote verticale.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = 1 - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$ et elle s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Par ailleurs, $f(-1-\sqrt{2}) = -\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ et $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Tableau des variations :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

On a une hyperbole non équilatère.

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

On pose $Y = y+2;\ X = x+1$ pour obtenir la fonction impaire : $Y = X + \frac{2}{X}$. Le point de coordonnées (-1,2) est donc un centre de symétrie (point d'intersection des deux asymptotes).

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\,Ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln\,2$$

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1+i$, où la fonction *f* est prolongée sur $C - \{-1\}$.

On pose $z = x + i\,y$, d'où $1 + (x+i\,y)^2 = (1+i)(1+x+i\,y)$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 1+x-y = 1+x^2-y^2 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases}$$

Si $x+y-1=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $-x^2+x-1=0$ qui n'admet pas de racines réelles.

Si $x-y=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $2x^2-2x-1=0$, soit $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}=y$

Exercice n° 4

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\leq n}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=u_n\sin(u_n)$ et $0<u_1<1$.

On vérifie aisément par récurrence que : $0<u_{n+1}<1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sin(u_n)<1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=l\sin(l)$, soit l=0.

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\leq n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1}=Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a : $v_{n+1}=Ln\left(\sin(u_n)\right)\approx Ln\,(u_n)\to-\infty$ (car la suite u_n tend vers zéro).

Exercice n° 5

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x)=Ln(x+e)$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$. On note x_0 la solution de l'équation $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=1$ et on admet que $x_0\approx 3{,}7$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$
On considère la fonction : $h(x)=f(x)-g(x)$, sa dérivée est égale à :
$h'(x)=\dfrac{1}{x+e}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-(x+e)}{2(x+e)\sqrt{x+1}}$. Le dénominateur est positif et on pose $u(x)=2\sqrt{x+1}-(x+e)$, dont la dérivée est strictement négative, et u est à valeurs dans $[2-e,-\infty[$. La dérivée de h est donc négative et la fonction est décroissante négative. Par conséquent, seule x=0 est solution de l'équation.

2. Dans une course à pied de 15 kms, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête (A et B) se trouvent sur une même ligne. On note x la distance restante à parcourir (en kms), que l'on suppose supérieure à x_0. On fait alors l'hypothèse H suivante :

> H : La probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et la probabilité que ce soit B est égale à $\frac{1}{g(x)}$.

L'hypothèse H a-t-elle un sens ? Sous cette hypothèse, qui a le plus de chance de gagner la course entre A et B ?

On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1, donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités. Pour que l'hypothèse H ait un sens, il faut de plus que la somme de ces probabilités soit inférieure à 1. Or la fonction $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$ est décroissante comme somme de deux fonctions décroissantes ($\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont effectivement décroissantes en tant qu'inverse de fonctions croissantes). Ainsi pour tout $x > x_0$,

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{f(x_0)} + \frac{1}{g(x_0)} = 1.$$

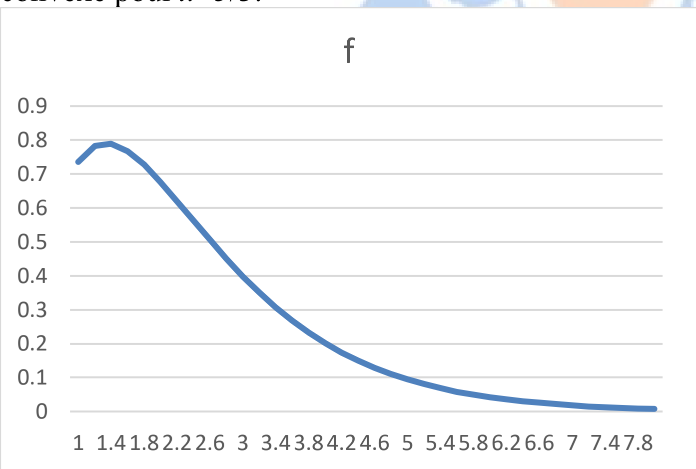
L'hypothèse H a donc bien un sens.
Soit à présent $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, d'après la première question y est décroissante et négative. En conclusion : $f(x) \leq g(x)$ ce qui signifie que A a plus de chances de gagner la course. On peut remarquer que le résultat ne dépend pas de la distance à parcourir, ni de l'instant où les deux coureurs sont sur la même ligne.

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé (représenté) par une fonction f définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels. On donne $e \approx 2{,}7$; $e^{-1} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$.

1. Seulement dans cette question a=3 et b=1. Étudier les variations de f et sa convexité. Tracer son graphe.

On obtient $f'(x) = (2-3x)e^{-x}$. Cette dérivée est toujours négative sur l'intervalle considéré et la fonction est décroissante de $[1,8]$ sur $[4/e, 25/e^8]$
Sa dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (3x-5)e^{-x}$. La fonction est concave pour x<5/3 et convexe pour x>5/3.



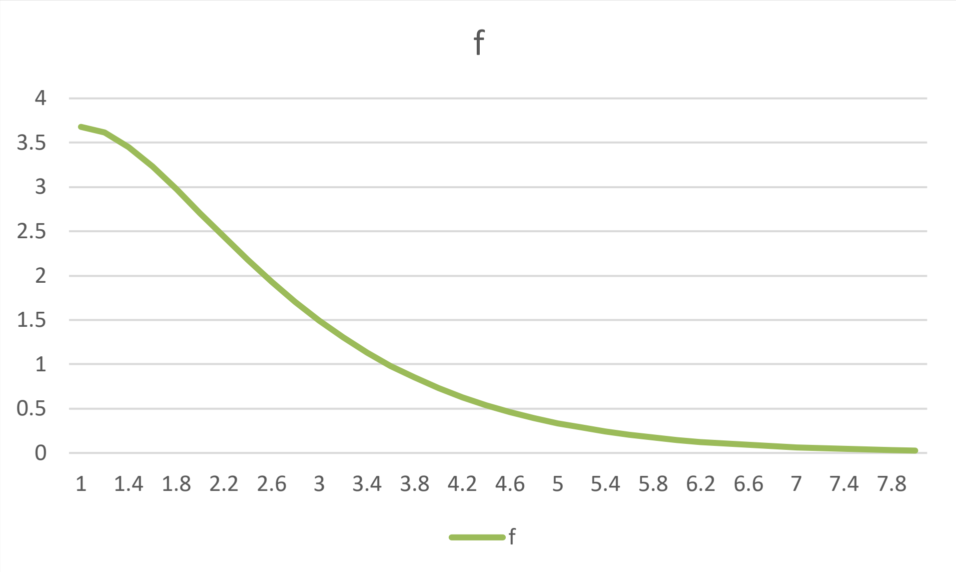
2. Déterminer la valeur de b pour que la demie tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il faut que la dérivée soit nulle en 1, soit $f'(x) = (-ax-b+a)e^{-x}$ et $f'(1) = (-b)e^{-1} = 0$, donc b=0.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de a et représenter ce tobogan.

On a : $f(x) = axe^{-x}$ et pour x=1, $3{,}5 \leq y = f(1) = \frac{a}{e} \leq 4$. Comme $e \approx 2{,}7$, on obtient a=10.

Allure du tobogan :



4. Le mur de soutènement du toboggan (partie entre le sol et le toboggan) sera peint par un artisan sur une seule face. Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis ?

Calculons la surface à peindre, soit $I = \int_1^8 10xe^{-x}\, dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I = [-10xe^{-x}]_1^8 + \int_1^8 10e^{-x}dx = -80e^{-8} + 10e^{-1} + 10[-e^{-x}]_1^8 = -90e^{-8} + 20e^{-1} \approx 7{,}4$$

Donc le devis sera de 200+30*7,4=422 euros.