

# Annales CAPESA

## Recueil des anciens sujets corrigés

**Concours ITS voie B - Mathématiques**

© Mensa Academy



|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| Avant-propos.....                          | 1   |
| Les centres d'examens & écoles.....        | 2   |
| Remarques & recommandations générales..... | 4   |
| Méthodologie en ordre général.....         | 7   |
| Méthodologie en contraction de texte.....  | 11  |
| Un mot sur la statistique.....             | 15  |
| Sujets et corrigés_1998.....               | 22  |
| Sujets et corrigés_1999.....               | 70  |
| Sujets et corrigés_2000.....               | 108 |
| Sujets et corrigés_2001.....               | 153 |
| Sujets et corrigés_2002.....               | 184 |
| Sujets et corrigés_2003.....               | 211 |
| Sujets et corrigés_2004.....               | 239 |
| Sujets et corrigés_2005.....               | 273 |
| Sujets et corrigés_2006.....               | 299 |
| Sujets et corrigés_2007.....               | 322 |
| Sujets et corrigés_2008.....               | 343 |
| Sujets et corrigés_2009.....               | 371 |
| Sujets et corrigés_2010.....               | 397 |
| Sujets et corrigés_2011.....               | 422 |
| Sujets et corrigés_2012.....               | 448 |
| Sujets et corrigés_2013.....               | 474 |
| Sujets et corrigés_2014.....               | 501 |
| Sujets et corrigés_2015.....               | 528 |
| Sujets et corrigés_2016.....               | 553 |
| Sujets et corrigés_2017.....               | 576 |
| Sujets et corrigés_2018.....               | 601 |
| Sujets et corrigés_2019.....               | 628 |
| Sujets et corrigés_2020.....               | 654 |

## Avant-propos

Ce document rassemble, de manière structurée et pédagogique, l'ensemble des informations utiles pour préparer les concours : ISSEA, ENSEA, ENSAE & ENEAM. Il a pour objectif d'aider les candidats à comprendre les formalités d'inscription, le contenu des programmes, les méthodes et conseils pour réussir les différentes épreuves (mathématiques, contraction de texte et ordre général), ainsi qu'un point synthétique sur les notions de statistique nécessaires. En dernière partie, une collection organisée des sujets et leurs corrigés (anciens et récents) sera ajoutée pour s'entraîner.

---

**ATTENTION !!!**



**LE CONCOURS ITS A OPTION  
MATHÉMATIQUES A ÉTÉ SUPPRIMÉ  
PAR LE CAPESA DEPUIS 2020 !!**

**DONC, CE DOCUMENT VOUS DONNE JUSTE L'ACCÈS AUX  
ANCIENS SUJETS CORRIGÉS AFIN DE MIEUX PRÉPARER  
EFFICACEMENT LES AUTRES CONCOURS A JOUR !**

---

## Les centres d'examens et Ecoles

Les coordonnées des centres d'examen sont mises à jour chaque année. Pour rappel, les inscriptions se font auprès des centres d'examen ci-dessous. Le CAPESA ne prend pas d'inscriptions.

|                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>BENIN</b><br>Ecole Nationale d'Economie Appliquée et de Management (ENEAM)<br>03 BP 1079<br>Cotonou<br>eneam.uac@eneam.uac.bj<br>(+229) 21 30 41 68                                                                                                              | <b>BURKINA FASO</b><br>Institut National de la Statistique et de la Démographie (INSD)<br>Avenue Pascal Zagre<br>01 B.P 374<br>Ouagadougou 01<br>insd@insd.bf / insdbf@yahoo.fr<br>(+226) 25 49 85 02 |
| <b>BURUNDI</b><br>Institut National de la Statistique du Burundi (INSBU)<br>Zone Rohero, Quartier INSS, Avenue de l'Aviation, N°06,<br>BP 1156<br>Bujumbura<br>ins.burundi@insbu.bi / ins.burundi2022@gmail.com<br>(+257) 22 22 67 29                               | <b>CAMEROUN</b><br>Institut Sous-Régional de Statistiques et d'Économie Appliquée (ISSEA)<br>rue Pasteur<br>BP 294<br>Yaoundé<br>isseacemac@yahoo.fr / contact@issea-cemac.org<br>(+237) 22 22 01 34  |
| <b>COMORES</b><br>Institut National de la Statistique des Études Économiques et Démographiques (INSEED)<br>Place de France<br>Moroni<br>secrcom@inseed.km<br>(+269) 333 9617 / 334 6974                                                                             | <b>CONGO</b><br>Institut National de la Statistique (INS)<br>22 bis rue Béhangle<br>En face de l'ex radio Congo<br>Brazzaville<br>contact@ins-congo.org / cnsee@hotmail.fr<br>(+242) 282 38 40        |
| <b>COTE D'IVOIRE</b><br>Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée (ENSEA)<br>Avenue des grandes écoles – campus de cocody<br>08 BP 3<br>Abidjan 08<br>ensea@ensea.ed.ci<br>(+225) 22 48 32 00 / 22 48 32 32                                 | <b>DJIBOUTI</b><br>Institut National de la Statistique de Djibouti (INSTAD)<br>Bâtiment Saharion Heron<br>B.P 3201<br>Djibouti<br>insd@insd.gouv.dj<br>(+253) 21 35 16 82 / 21 35 18 25               |
| <b>GABON</b><br>Ministère de l'économie et de la Relance<br>Direction Générale de la Statistique<br>BP 2119 (sise à l'ancien Ministère de la Planification quartier Oloumi)<br>Libreville<br>infodgstat@gmail.com<br>(+241) 01 72 04 55 / 01 72 13 69 / 01 76 06 71 | <b>GUINEE</b><br>Institut National de la Statistique (INS)<br>BP 221<br>Conakry – Kaloum<br>info@insguinee.org<br>(+224) 620 86 13 27                                                                 |
| <b>GUINEE EQUATORIALE</b><br>Instituto Nacional de Estadística de Guinea Ecuatorial (INEGE)<br>Malabo II Edificio Abayak 4a Planta                                                                                                                                  | <b>HAITI</b><br>Université Quisqueya<br>218 Avenue Jean Paul II<br>Haut Turgeau                                                                                                                       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>GUINEA ECUATORIAL</b><br><a href="mailto:info@inege.gq">info@inege.gq</a><br>(+240) 222 196 724                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Port au Prince<br><a href="mailto:uniq.haiti@gmail.com">uniq.haiti@gmail.com</a><br>(+509) 2940 4587                                                                                                                                                                  |
| <b>MADAGASCAR</b><br><b>Institut National de la Statistique (INSTAT)</b><br>Rue Jules Ranaivo BP 485 Anosy<br>Antananarivo 101<br><a href="mailto:communication@instat.mg">communication@instat.mg</a><br>(+261) 32 11 878 79                                                                                                                                                                         | <b>MALI</b><br><b>DGESRS</b><br>Hamdallaye ACI 2000<br>Portes 445/449 Rue 331<br>BP 71<br>Bamako<br><a href="mailto:contact@dg-enseignementsup.ml">contact@dg-enseignementsup.ml</a><br>(+223) 20 22 10 44                                                            |
| <b>MAURITANIE</b><br><b>Ambassade de France à Nouakchott</b><br>Quartier de Tévragh Zeina<br>Rue Ahmed Ould Mohamed<br>BP 231 Nouakchott<br>(+222) 45 29 96 99                                                                                                                                                                                                                                        | <b>NIGER</b><br><b>Ecole Nationale de la Statistique (ENSTAT)</b><br>182 rue de la Sirba<br>BP 13416<br>Niamey<br><a href="mailto:ins@ins.ne">ins@ins.ne</a><br>(+227) 20 72 35 60                                                                                    |
| <b>REPUBLIQUE CENTRAFRICAINE</b><br><b>Institut Centrafricain des Statistiques et des Etudes Economiques et Sociales (ICASEES)</b><br>Rue Gamal Abdel Nasser<br>BP 696 Bangui<br><a href="mailto:contact@icasees.cf">contact@icasees.cf</a> / <a href="mailto:info@icasees.cf">info@icasees.cf</a><br>(+236) 72 05 25 93 / 75 72 47 58                                                                | <b>REPUBLIQUE DEMOCRATIQUE DU CONGO</b><br><b>INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE (INS)</b><br>6ème rue N°12 Limete Industriel<br>Kinshasa<br><a href="mailto:contacts@ins.cd">contacts@ins.cd</a> / <a href="mailto:ins@ins.cd">ins@ins.cd</a><br>(+243) 81 531 9943 |
| <b>SENEGAL</b><br><b>Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique Pierre NDIAYE (ENSAE)</b><br>Immeuble ANSD<br>Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant<br>BP 116<br>Dakar RP<br><a href="mailto:scolarite.ensae@ansd.sn">scolarite.ensae@ansd.sn</a><br>(+221) 33 825 15 19                                                                                                                  | <b>TCHAD</b><br><b>Institut National de la Statistique des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)</b><br>BP 453<br>N'Djamena<br><a href="mailto:info@inseed-td.net">info@inseed-td.net</a><br>(+235) 22 52 31 54 / 52 66 13                                    |
| <b>TOGO</b><br><b>Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)</b><br>Immeuble CENETI 59 rue de la kozah<br>BP 118 Lomé<br><a href="mailto:dgscn_tg@yahoo.fr">dgscn_tg@yahoo.fr</a> / <a href="mailto:inseed@inseed.tg">inseed@inseed.tg</a> / <a href="mailto:inseedtogospdg@gmail.com">inseedtogospdg@gmail.com</a><br>(+228) 22 21 62 24 / 22 21 22 87 | <b>AFRISTAT</b><br><b>Observatoire Économique et Statistique d'Afrique Subsaharienne</b><br>Directeur Général M. Paul Henri NGUEMA MEYE<br>Rue 499, porte 23 Quartier Niaréla<br>Bamako<br>BP E 1600 Bamako<br>MALI                                                   |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p>Tel : 00 223 20 21 55 00 / 20 21 60 71<br/> Fax : 00 223 20 21 11 40<br/> <a href="http://www.afristat.org">www.afristat.org</a></p>                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>ENSAE</b><br/> <b>École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique</b><br/> Directeur M. Pierre BISCOURP<br/> 5 avenue Henry Le Chatelier<br/> 91120 Palaiseau<br/> FRANCE<br/> <br/> Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00<br/> <a href="http://www.ensae.fr">www.ensae.fr</a></p>             | <p><b>ENSAI</b><br/> <b>École Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information</b><br/> Directeur M. Ronan LE SAOUT<br/> Campus de Ker-Lann<br/> 51 Rue Blaise Pascal<br/> 35172 BRUZ CEDEX<br/> FRANCE<br/> <br/> Tel : 00 33 (0)2 99 05 32 32<br/> Fax : 00 33 (0)2 99 05 32 05<br/> <a href="http://www.ensai.com">www.ensai.com</a></p> |
| <p><b>GENES</b><br/> <b>Groupe des Écoles Nationales d'Économie et Statistique</b><br/> Directrice Générale Mme Catherine GAUDY<br/> 5 avenue Henry Le Chatelier<br/> 91120 Palaiseau<br/> FRANCE<br/> <br/> Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00<br/> <a href="http://www.groupe-genes.fr">www.groupe-genes.fr</a></p> | <p><b>INSEE</b><br/> <b>Institut National de la Statistique et des Études Économiques</b><br/> Directeur Général M. Jean-Luc TAVERNIER<br/> 88 avenue Verdier<br/> 92120 Montrouge<br/> FRANCE<br/> <br/> Tel : 00 33 (0)9 72 72 40 00<br/> <a href="http://www.insee.fr">www.insee.fr</a></p>                                                          |
| <p><b>MEAE</b><br/> <b>Ministère de l'Europe et des affaires étrangères</b><br/> <b>Direction Générale de la Mondialisation</b><br/> 37 quai d'Orsay<br/> 75007 PARIS<br/> FRANCE<br/> <br/> Tel : 00 33 (0)1 43 17 53 53<br/> <a href="http://www.diplomatie.gouv.fr">www.diplomatie.gouv.fr</a></p>           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

## Remarques et recommandations générales

### ■ Mathématiques

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : commencer le premier exercice de l'épreuve sans avoir au préalable parcouru le sujet ; se précipiter dans les calculs, ce qui entraîne les erreurs ; utiliser des théorèmes sans leur nom ; utiliser la mauvaise méthode pour une démonstration (une bonne méthode achève rapidement une démonstration) ; utiliser de manière exagérée les quantificateurs ; des résultats non encadrés ou non soulignés et des copies très sales.

## Erreurs fréquentes :

- Copies mal présentées (désordre, illisibilité, exercices commencés en bas de page).
- Calculs remplacés par des approximations numériques sans justification.
- Mauvaise maîtrise des bases :
  - polynômes du second degré (racines, signe, extremum, graphe),
  - équations bicarrées.
- Utilisation de théorèmes hors programme (niveau baccalauréat).
- Étude des limites : factorisations inadaptées, confusion sur les termes dominants, erreurs d'interprétation.
- Raisonnements par récurrence mal structurés (initialisation absente, hérédité mal faite).
- Invocation de théorèmes sans hypothèses vérifiées (ex. valeurs intermédiaires, limite monotone).
- Raisonnements circulaires ou faux (« si  $f(0) > f(1)$  alors  $f$  est décroissante »).
- Suites et fonctions : confusion entre définitions implicites et explicites.
- Non-prise en compte de cas particuliers ;
- Exercices de probabilités souvent négligés, pourtant accessibles.
- Calculs lourds privilégiés au lieu de méthodes simples (ex. matrices : oubli du théorème spectral).
- Résultats arrondis ou incomplets ( $N=30$  au lieu de  $N \geq 31$ ).
- Erreurs fréquentes en dérivation et factorisation.

## Recommandations

- Soigner la présentation : un exercice par page, copie lisible.
- Maîtriser parfaitement les bases : second degré, factorisations, fonctions usuelles.
- Citer et vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés.
- Structurer les preuves par récurrence correctement (hypothèse, initialisation, hérédité, conclusion).
- Justifier clairement les résultats (ne pas seulement aligner des calculs).
- Traiter aussi les probabilités et exercices concrets (modélisation économique).
- Utiliser les méthodes les plus efficaces, pas les calculs lourds.
- Vérifier systématiquement les cas particuliers et la cohérence des résultats.

### ■ Ordre général

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : un mauvais choix du sujet (lire tous les sujets et les analyser est un atout) ; les fautes exagérées (orthographe et grammaire) ; les ratures à outrance, un listing d'idées sans justifications, ni exemples pertinents ; et une conclusion bâclée.

## Erreurs fréquentes :

- Copies trop longues, mal structurées, digressives → hors sujet fréquent.
- Plans annoncés qui ne répondent pas à la question ;



- Plans « à tiroirs » (énumération d'idées sans discussion) ;
- Introduction paraphrasant ou recopiant le sujet ;
- Conclusions négligées (répétitions ou trop brèves) ;
- Citations plaquées, fausses ou mal attribuées ;
- Vocabulaire familier ou expressions grossières (« arnaque », « aller au boulot ») ;
- Fautes d'orthographe, de syntaxe, de ponctuation (phrases trop longues avec point-virgule) ;
- Confusions géographiques ou historiques (ex. Moyen-Orient confondu avec Proche-Orient).

## Recommandations

- Construire un plan solide au brouillon, qui répond à la problématique.
- Respecter la structure intro – développement – conclusion.
- Employer un vocabulaire soutenu, précis.
- Aérer la copie, soigner la lisibilité.
- Éviter la paraphrase et les citations gratuites.
- Rester centré sur le sujet (éviter les hors sujets et extrapolations abusives).
- Illustrer avec des exemples précis et pertinents.

### ■ Contraction de texte

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : inclure dans votre texte multiples illustrations de l'auteur ; comptage de mots erroné ; un niveau de langue bas et des copies très touffues et sales.

## Erreurs fréquentes

- Résumés transformés en analyses partielles (seulement début ou fin du texte) ;
- Omission de données chiffrées, pourtant essentielles ;
- Nombre de mots : oublié, faux ou volontairement manipulé ;
- Résumés trop longs ou trop courts ;
- Énumération d'idées sans enchaînement logique ;
- Développements excessifs sur un exemple secondaire ;
- Orthographe défaillante (y compris sur des mots donnés dans le texte) ;
- Mots écrits phonétiquement (« tôt de natalité », « Plutard »).
- Vocabulaire familier (« les gosses », « en gros »).
- Phrases trop longues, mal ponctuées, avec contresens.

## Recommandations

- Respecter strictement la consigne : contraction fidèle de tout le texte ;

- Conserver au moins deux données chiffrées ;
- Toujours indiquer le nombre exact de mots ;
- Rechercher clarté, concision, enchaînements logiques ;
- Employer un vocabulaire correct et un registre soutenu ;
- Relire attentivement pour éviter fautes et maladresses.

## Méthodologie d'ordre général

La dissertation est un exercice argumentatif et structuré qui consiste à répondre, de manière organisée et problématisée, à une question de culture générale. Elle ne demande pas seulement de réciter des connaissances, mais d'analyser une problématique en mobilisant : des idées claires, des références culturelles solides (historiques, philosophiques, littéraires, scientifiques...), un raisonnement logique et nuancé.

Elle vise à tester :

- ~ La capacité d'analyse : comprendre les enjeux du sujet ;
- ~ La capacité de réflexion : construire un raisonnement rigoureux ;
- ~ La capacité de culture : illustrer par des exemples pertinents ;
- ~ La qualité d'expression : clarté, style soutenu, orthographe correcte.

### Les différentes parties de la dissertation

#### i. L'introduction

C'est une étape cruciale : elle doit capter l'attention et poser le cadre de réflexion. Elle comprend quatre mouvements obligatoires :

- ~ **Amorce (accroche)** : entrée en matière générale qui suscite l'intérêt. Exemple de sujet  
« La technique libère-t-elle l'homme ? »

*« L'homme n'a cessé de développer des outils et des techniques afin de mieux s'adapter à son environnement. De la pierre taillée de la préhistoire à la révolution industrielle, puis à l'ère du numérique et de l'intelligence artificielle, la technique a profondément transformé les conditions de vie. Elle semble avoir toujours été au service d'un idéal : se libérer des contraintes naturelles, de l'effort physique, du temps ou de l'espace. Pourtant, dans nos sociétés contemporaines, cette même technique suscite des interrogations nouvelles : dépendance aux machines, risques environnementaux, ou encore perte d'autonomie individuelle. Dès lors, se pose la question de savoir si la technique libère véritablement l'homme ou si elle ne crée pas d'autres formes de servitude. »*

- ~ **Définition des termes** : préciser le sens exact des notions du sujet.

« Technique » : ensemble des moyens élaborés par l'homme pour agir sur la nature.

« Libérer » : donner plus d'autonomie, réduire les contraintes.

- **Problématisation** : transformer le sujet en question centrale à résoudre. On peut la reformuler comme suit : « La technique est-elle réellement une libération pour l'homme, ou crée-t-elle de nouvelles formes d'asservissement ? »
- **Annonce du plan** : présentation claire des étapes de la réflexion.

« Nous verrons d'abord en quoi la technique libère l'homme, avant d'examiner les limites de cette libération, puis nous proposerons une synthèse nuancée. »

## ii. Le développement

Il est organisé en parties (grandes thèses) et sous-parties (arguments et exemples). On distingue deux grands types de plans selon la nature du sujet.

Chaque partie doit contenir :

Une idée directrice (thèse ou argument majeur).

Des sous-arguments (explications précises).

Des exemples pertinents (historiques, philosophiques, actuels, littéraires).

Une mini-conclusion partielle (bilan de l'argument avant de passer à l'autre partie).

Exemple de sujet : « L'art doit-il être utile ? »

### Partie I : L'art est utile car il a une fonction sociale

**Idée 1** : Il exprime des valeurs et des idéaux communs (exemple : peinture de Delacroix « La liberté guidant le peuple »).

**Idée 2** : Il éduque et transmet (exemple : théâtre de Molière, critique des travers humains).

### Partie II : L'art n'a pas besoin nécessairement d'être utile

**Idée 1** : L'art est d'abord une création gratuite (exemple : art abstrait de Kandinsky).

**Idée 2** : L'art est une fin en soi : « l'art pour l'art » (thèse de Théophile Gautier).

### Partie III : Une synthèse nuancée

**Idée 1** : L'art peut être à la fois gratuit et porteur de sens.

**Idée 2** : Dans nos sociétés modernes, l'art est multiple : il émeut, il instruit, il questionne.

## iii. La conclusion

Elle doit être brève et forte. Elle comporte deux étapes :

- **Bilan de la réflexion** : rappeler la réponse à la problématique.

« L'art n'a pas à être utile au sens pratique du terme, mais il possède néanmoins une fonction sociale et humaine essentielle. »

~ **Ouverture** : élargir vers une perspective plus large.

« L'art interroge finalement notre rapport à la beauté et à la vérité, au-delà de toute utilité immédiate. »

---

### Les transitions

Les transitions sont indispensables pour montrer la logique du raisonnement. Elles doivent :

- rappeler ce qui vient d'être dit,
- annoncer ce qui va suivre.

Exemple : « Si la technique semble avoir libéré l'homme de nombreuses contraintes matérielles, elle peut aussi engendrer de nouvelles formes de dépendance. Il convient donc d'examiner maintenant les limites de cette libération. »

---

### Les types de sujets et de plans

~ **Sujet analytique (on analyse un problème sans nécessairement opposer des thèses)**

Exemple : « Qu'est-ce que le bonheur ? ». Une proposition de plan :

**Partie 1** : Les différentes conceptions du bonheur.

**Partie 2** : Les conditions d'accès au bonheur.

**Partie 3** : Les limites d'une définition universelle du bonheur.

~ **Sujet dialectique (thèse / antithèse / synthèse)**

Exemple : « La technique libère-t-elle l'homme ? »

**Partie 1** : Oui, la technique libère (exemples historiques : médecine, transports).

**Partie 2** : Pas toujours, elle aliène aussi l'homme (dépendance aux machines, pollution).

**Partie 3** : Elle libère et aliène : tout dépend de l'usage (dimension éthique et politique).

Conseil : La plupart des sujets de culture générale sont **dialectiques**, car ils appellent une discussion nuancée.

---

## Exemples pratiques - sujet : « L'homme est-il maître de la nature ? »

- « Dès le XVII<sup>e</sup> siècle, Descartes affirmait que l'homme devait devenir "maître et possesseur de la nature". Mais les crises écologiques contemporaines semblent remettre en cause cette ambition. » (*Amorce du sujet*).
- « Peut-on encore dire que l'homme maîtrise la nature, ou au contraire doit-il reconnaître ses limites face à elle ? » (*Problématique*).
- « Nous montrerons d'abord que l'homme a longtemps affirmé sa maîtrise de la nature, avant de voir comment cette prétention est aujourd'hui mise en question, pour enfin proposer une réflexion sur la possibilité d'un rapport plus équilibré. » (*Annonce du plan*).
- « Après avoir souligné les bienfaits de la technique pour l'humanité, il convient désormais de considérer ses effets pervers. » (*Une transition*).
- « L'homme ne peut être totalement maître de la nature sans se condamner lui-même. L'enjeu aujourd'hui est moins de dominer la nature que de coopérer avec elle. Cela interroge finalement notre conception du progrès. » (*Conclusion et ouverture*).

---

## Réussir sa synthèse dans un sujet de type dialectique

La synthèse n'est pas un résumé mécanique des parties, mais une réponse nuancée à la problématique qui dépasse l'opposition thèse/antithèse. Elle permet de formuler une vision plus large, plus équilibrée, parfois plus originale.

- ✓ **La synthèse doit directement répondre à la question posée.**
- ✓ **Exemple sur le sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?***

« La technique libère l'homme de nombreuses contraintes matérielles, mais elle peut l'asservir lorsqu'il en devient dépendant. »

- **Trouver un point de vue plus élevé qui réconcilie ou reformule autrement le problème.**
- **Exemple (Sujet : *L'art doit-il être utile ?*) :**

« L'art peut sembler inutile par nature, mais cette inutilité apparente est précisément ce qui fait sa valeur et son utilité profonde : il nourrit la sensibilité et la pensée. »

### Exemple de démarche (Sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?*)

- ✓ **Thèse (I) : Oui, la technique libère → elle réduit les efforts, soigne, transporte, connecte.**

✓ **Antithèse (II) : Non, elle aliène → dépendance, pollution, robotisation.**

✓ **Synthèse (III) :**

**« La technique n'est ni pure libération ni simple asservissement : elle est un outil dont les effets dépendent de l'usage que l'homme en fait et des choix de société qui l'accompagnent. »**

---

### **Astuces pratiques :**

- Utilise souvent des formulations équilibrées :
  - « Elle libère autant qu'elle contraint. »
  - « Elle n'est pas en elle-même... mais selon l'usage qu'on en fait. »
- N'introduis pas d'idées nouvelles non traitées dans le développement.
- La synthèse doit préparer naturellement la conclusion finale.

## **Méthodologie de la contraction de texte**

### **Définition et méthodes**

La contraction de texte consiste à réduire un texte à 25% de sa longueur initiale en conservant son énonciation. Je vous explique ici en détails comment faire une contraction de texte. Vous trouverez aussi un sujet corrigé de contraction de texte en PDF.

Le but de l'exercice est de réduire le texte de 75%. Ainsi, sur un texte de 1000 mots (format habituel pour le bac de français), le but est de le reformuler en 250 mots. Vous avez droit à une marge de 10%, donc +/- 25 mots.

Vous devez restituer le point de vue de l'auteur sans émettre le moindre commentaire personnel. En cela, c'est un exercice radicalement différent du commentaire littéraire.

Contrairement à la synthèse, vous devez conserver l'énonciation du texte. Donc si l'auteur dit "je", vous ne devez pas dire "il". Vous devez vous mettre dans la peau de l'auteur du texte contracté et reformuler ce qu'il dit en réduisant le nombre de mots.

Il faut également respecter l'ordre des idées, la séparation en paragraphes et la stratégie argumentative. Vous ne pouvez pas échanger ou modifier des idées pour réduire le nombre de mots.

### **Les étapes à suivre**

- **Comprendre le texte**



La première étape est de vous assurer que vous comprenez parfaitement ce que veut dire l'auteur du texte, et qu'aucune subtilité ne vous échappe. Pour cela, suivez les étapes suivantes :

- Lire attentivement le texte
- Identifier le genre (lettre, essai, discours) ainsi que la discipline (littérature, politique, sociologie).
- Repérer le thème (de quoi il parle) et la thèse (ce qu'il en dit).
- Dégager la structure (souvent identique aux paragraphes) et donner un titre à chaque partie.

Prenez 10 minutes pour vous constituer un aide-mémoire clair au brouillon reprenant les informations ci-dessus

### ~ Annoter le texte

Après avoir lu et compris le texte, vous allez le préparer à être contracté. Pour cela, vous devez en dégager la construction le plus précisément possible. Vous pouvez commencer par les 2 points suivants :

- Souligner ou surligner les idées principales et les mots et expressions clés du texte. (Avec des couleurs différentes pour les idées, arguments et exemples)
- Entourer les connecteurs logiques (lien, cause, conséquence)

Cela devrait vous aider à voir ce que vous pouvez supprimer, ce qu'il faut conserver, et l'ordre de l'enchaînement des idées.

### ~ Le premier jet

Il est maintenant temps de vous lancer dans la contraction en elle-même. Pour cela, essayez de retranscrire les idées principales du texte, paragraphe après paragraphe.

Ne vous souciez pas encore du nombre de mot. Vous devez déjà chercher à réduire, mais vous n'atteindrez pas 25% du premier coup. Après ce premier jet, vérifiez les points suivants :

- Ce premier jet reprend les idées sans les déformer
- Les idées sont toutes reformulées et jamais copiées
- Le système d'énonciation est respecté (je, tu, il ...)
- Le registre de langue est identique (familier, soutenu ...)

Parfois, il est impossible de reformuler certains termes : ce sont les termes clés du texte. Vous pouvez les reprendre sans les modifier, mais il faut veiller à ce que la plus grande partie du texte soit reformulée.

### ~ La mise au propre

Vous avez maintenant de quoi fournir une version aboutie de votre travail. Commencez par compter les mots de votre brouillon pour voir où vous vous situez. Au besoin, reprenez chaque paragraphe et travaillez-le pour en réduire au maximum le nombre de mots.

Vous pouvez utiliser des pronoms, trouver des synonymes pour remplacer les périphrases, et retirer les adjectifs qui n'apportent rien au sens.

Si vous avez de la place, ajoutez des connecteurs logiques pour gagner en fluidité.

Vous devez maintenant effectuer les dernières vérifications :

- La structure en paragraphes met en évidence la structure du texte de départ
- La contraction est parfaitement compréhensible même sans connaître le texte de départ
- Le nombre de mot est respecté à 10% près
- Il n'y a pas de répétition maladroite, faute d'orthographe, phrase trop longue etc.

Une fois que tout est bon, vous n'avez plus qu'à recopier votre texte au propre. Pensez bien à ajouter en rouge en haut de votre copie le nombre final de mots.

### Quelques conseils pour finir

La contraction de texte demande beaucoup d'entraînement. Pour pratiquer, n'hésitez pas à reformuler des textes beaucoup plus courts, cela prend moins de temps mais est tout aussi bénéfique.

Quand vous comptez les mots, pensez bien que tous les mots comptent, même les prépositions et autres petits mots : "j'ai mangé d'innombrables pommes" = 6 mots (j' + ai + mangé + d' + innombrables + pommes). C'est-à-dire = 4 mots ; les années comptent pour un mot (exemple : 1980 = 1 mot) ; 50% = 2 mots (50 + %) ; Portefeuille = 1 mot ; arc-en-ciel = 3 mots ; Socioéconomique = 1 mot (car, Socio n'est pas un mot français et ne veut rien dire). De la même manière, sino-africain = 1 mot (car, sino ne veut rien dire).

La contraction de texte est aussi un exercice de vocabulaire, savoir reformuler et trouver des synonymes est essentiel. Pour développer votre vocabulaire pendant l'année de première, n'hésitez pas à vous faire des fiches de mots sur des sujets proches de l'œuvre au programme que vous étudiez en classe.

Pour terminer, pensez surtout qu'il ne vous est pas demandé de commenter le texte. Simplement d'en produire une version raccourcie mais ayant le même sens et la même énonciation (comme si elle était rédigée par la même personne que l'original).

---

### Exercice d'application : texte de 333 mots à contracter

Il ne peut y avoir de « morale sexuelle » de tous qui s'impose à la « morale sexuelle » de chacun. Chacun connaît la nécessité, pour l'individu, de vivre en accord avec ce qui reste le plus profondément inexprimé, par peur, honte, conditionnement social ou répression, je veux dire sa sexualité.

Et qu'il s'agisse d'hétérosexualité ou d'homosexualité, cette relation à l'autre ne peut jouer comme un facteur d'équilibre que débarrassée de la clandestinité ou de l'autocensure auxquelles contraint bien souvent notre environnement et, en premier lieu, nos lois qui, dans notre culture, provoquent au changement des mentalités, avant de changer elles-mêmes.

Certes, comme toute liberté, ce droit de choisir sa sexualité connaît ses limites, classiques au demeurant.

Premièrement, la loi doit intervenir dans tous les cas pour réprimer la violence. Et il y a violence sexuelle dès qu'il y a absence de consentement d'un partenaire auquel, précisément, on dénie le droit de choisir.

Deuxièmement, la loi doit intervenir pour protéger — en dehors même de la violence — la vulnérabilité de certaines victimes presque désignées : les enfants, les mineurs, les handicapés, les hommes et les femmes « sous influence », c'est-à-dire ne pouvant, en raison de l'autorité ou de l'ascendant qu'ils ou qu'elles subissent, librement se déterminer.

Troisièmement, la loi doit intervenir pour sanctionner un préjudice et non traduire un quelconque impératif moral dans notre société civile.

La morale religieuse, pour laquelle l'amour ne se trouve justifié que dans sa fin de procréation, relève, comme la liberté sexuelle, de la liberté de conscience de chacun.

Elle ne peut donc, même masquée, décider du « bon choix » sexuel. La « norme » n'est, en cette matière et dans notre pays, ni affaire de majorité politique ou sociologique, ni affaire de loi civile. La « norme » sexuelle ne se définit pas. Elle se dessine à l'échelle de chaque corps, de chaque enfance, de chaque culture, de chaque plaisir, à condition — je le répète — de ne blesser, de n'agresser ou de ne violenter personne.

*Discours de Gisèle Halimi à l'Assemblée nationale pour la  
dépénalisation de l'homosexualité (20 décembre 1981).*

### **Contraction au quart : 92 mots**

Une morale sexuelle collective est inconcevable. Il faut suivre sa propre sexualité. L'amour n'est sain que libre ; les changements culturels entraîneront une modification des lois.

Cependant, la sexualité a des limites :

D'abord, la loi doit protéger des violences.

Ensuite, veiller aux plus fragiles : ceux qui ne peuvent choisir.

Enfin, protéger les gens, pas les mœurs. La religion légitime l'amour uniquement pour procréer, elle doit rester personnelle.

Elle ne doit pas imposer de norme sexuelle qui, en France, n'est pas uniforme, mais individuelle tant qu'aucune atteinte à autrui n'est portée.

## La statistique

La statistique est la science des données. Elle consiste à :

- ~ collecter des informations chiffrées (données),
- ~ organiser et résumer ces données (tableaux, graphiques, indicateurs),
- ~ analyser ces informations à l'aide de méthodes mathématiques,
- ~ interpréter les résultats pour aider à la décision.

Exemple : Enquêter sur 1 000 ménages pour savoir combien ont accès à l'eau potable, puis calculer les pourcentages, faire des graphiques, et tirer des conclusions utiles pour les décideurs.

Elle sert à comprendre la réalité à partir des données et à réduire l'incertitude. Elle permet de :

- ~ Décrire un phénomène (ex. taux de chômage, nombre moyen d'enfants par femme).
- ~ Comparer des situations (ex. comparer le niveau de vie entre deux régions).
- ~ Prévoir des tendances (ex. évolution du prix du pétrole).
- ~ Prendre des décisions éclairées (ex. définir une politique publique, lancer un produit sur le marché).

Elle est partout, car toutes les disciplines ont besoin de données :

- ~ Économie et finances : analyse du PIB, inflation, taux de chômage, risques financiers.
- ~ Santé : suivi des épidémies, efficacité d'un vaccin (essais cliniques) ;
- ~ Éducation : taux de réussite aux examens, nombre d'élèves par classe ;
- ~ Sociologie et démographie : enquêtes sur la pauvreté, migrations, structure de la population ;
- ~ Environnement : climat, pollution, gestion des ressources naturelles ;
- ~ Industrie et commerce : sondages de marché, contrôle de qualité, optimisation de la production ;
- ~ Politique : sondages électoraux, évaluation des politiques publiques.

Exemple : L'Institut National de la Statistique (INS) du Cameroun publie des données régulières sur la croissance, l'emploi, la pauvreté. Ces chiffres sont utilisés par le gouvernement, les entreprises et les chercheurs.

La statistique est-elle importante :

- ~ Parce que le monde moderne produit une immense quantité de données : sans statistique, impossible de les comprendre.
- ~ Parce qu'elle permet de transformer des chiffres bruts en informations utiles.
- ~ Parce qu'elle aide à anticiper et à planifier (ex. prévoir la population d'un pays en 2050 pour planifier les écoles et hôpitaux).
- ~ Parce qu'elle constitue un outil objectif d'aide à la décision, contrairement aux simples opinions.

La statistique joue un rôle central dans presque tous les domaines que tu as cités, car elle permet d'analyser les données, de prendre des décisions éclairées et de prévoir l'avenir. Voici une explication détaillée domaine par domaine :

### **Éducation**

- Mesure des performances scolaires des élèves (examens, taux de réussite, abandon) ;
- Évaluation de l'efficacité des politiques éducatives ;
- Prévisions des besoins en enseignants, infrastructures, manuels ;
- Classements d'universités et comparaisons internationales (comme PISA).

### **Santé**

- Suivi de l'évolution des maladies (épidémiologie, Covid-19, paludisme, VIH) ;
- Évaluation de l'efficacité des traitements médicaux (essais cliniques) ;
- Statistiques hospitalières : taux de mortalité, durée moyenne d'hospitalisation ;
- Prévision des besoins en infrastructures sanitaires et en médicaments.

### **Finance**

- Analyse des risques de placement et d'investissement ;
- Prévision des tendances boursières ;
- Gestion des portefeuilles financiers et évaluation des performances ;
- Modélisation des taux d'intérêt et des fluctuations monétaires.

### **Économie**

- ✓ Calcul des agrégats (PIB, inflation, chômage, balance commerciale) ;
- ✓ Suivi des politiques économiques et de leur efficacité ;
- ✓ Prévisions macroéconomiques ;
- ✓ Comparaisons internationales du développement.

### **Démographie**

- Mesure de la population (recensements, enquêtes) ;
- Études sur la fécondité, mortalité, migrations ;
- Prévisions démographiques utiles à la planification (santé, écoles, emploi) ;
- Analyse des structures par âge, sexe, zones urbaines/rurales.

### **Banque et assurances**

- ✓ Évaluation des risques de crédit (probabilité de défaut) ;
- ✓ Fixation des primes d'assurance (assurance vie, automobile, santé) ;
- ✓ Détection de fraudes bancaires ;
- ✓ Analyse de la rentabilité et satisfaction client.

### **Sociologie**

- Études d'opinion et de comportements sociaux ;
- Analyse des inégalités sociales ;

- Mesure de l'impact des politiques sociales ;
- Études sur la pauvreté, les conditions de vie, la criminalité.

### **Psychologie**

- Expérimentations pour comprendre les comportements humains ;
- Études statistiques sur la mémoire, la motivation, les émotions ;
- Évaluation des tests psychométriques ;
- Préviation des réactions humaines face à des situations données.

### **Anthropologie**

- Analyse des populations anciennes (restes osseux, ADN) ;
- Études de la diversité culturelle et linguistique ;
- Modélisation des dynamiques de groupes ;
- Mesure de l'évolution des pratiques et coutumes.

### **Compagnies de téléphonie mobile**

- ✓ Analyse du trafic d'appels, SMS et Internet ;
- ✓ Étude du comportement des abonnés (prépayé vs postpayé) ;
- ✓ Détection des fraudes téléphoniques ;
- ✓ Optimisation des réseaux (zones blanches, congestion).

### **Aviation civile**

- Études de sécurité aérienne (accidents, incidents) ;
- Prévisions du trafic passagers et fret ;
- Optimisation des horaires et itinéraires de vol ;
- Mesure de la performance des compagnies aériennes.

### **Sport**

- Analyse de la performance des athlètes (statistiques de match, vitesse, endurance) ;
- Prévisions de résultats (big data et paris sportifs) ;
- Optimisation de la préparation physique ;
- Études d'audience des événements sportifs.

### **Politique**

- Sondages électoraux ;
- Mesure de la popularité des dirigeants ;
- Évaluation des politiques publiques ;
- Analyse des comportements électoraux.

### **Météorologie**

- ✓ Prévisions du temps : les modèles statistiques et probabilistes (régressions, séries chronologiques, modèles ARIMA) permettent de prédire la pluie, la température, la vitesse du vent, etc. ;



- ✓ Études climatiques : suivi des tendances à long terme (réchauffement global, élévation du niveau des mers) ;
- ✓ Alerte précoce : prédictions de phénomènes extrêmes (cyclones, sécheresses, inondations) pour sauver des vies ;
- ✓ Analyse de données massives : traitement d'énormes volumes de données provenant de satellites, radars, stations météo ;
- ✓ Impact socio-économique : les prévisions météo guident l'agriculture, le transport aérien, maritime et terrestre.

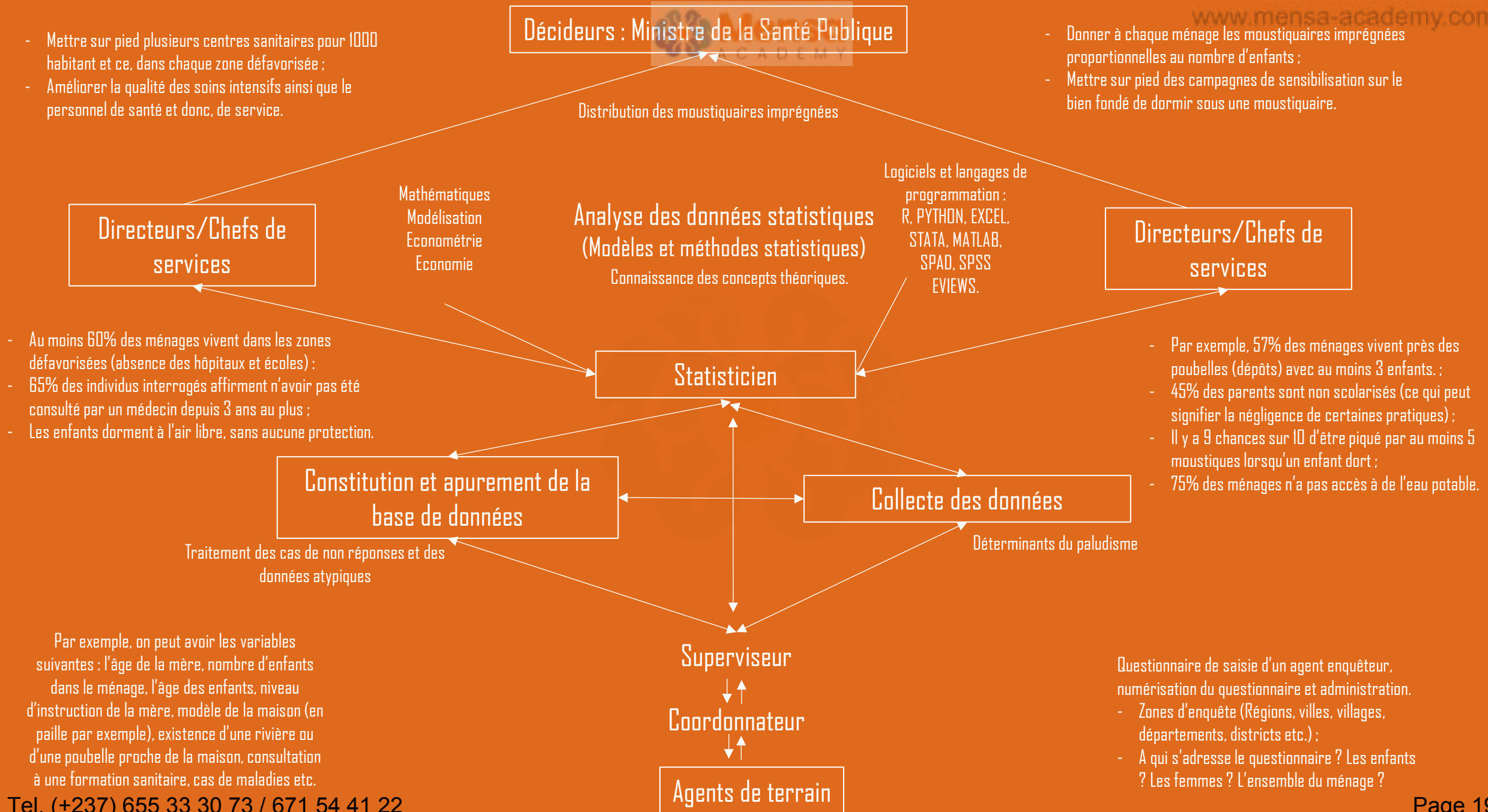
### **Intelligence artificielle (IA)**

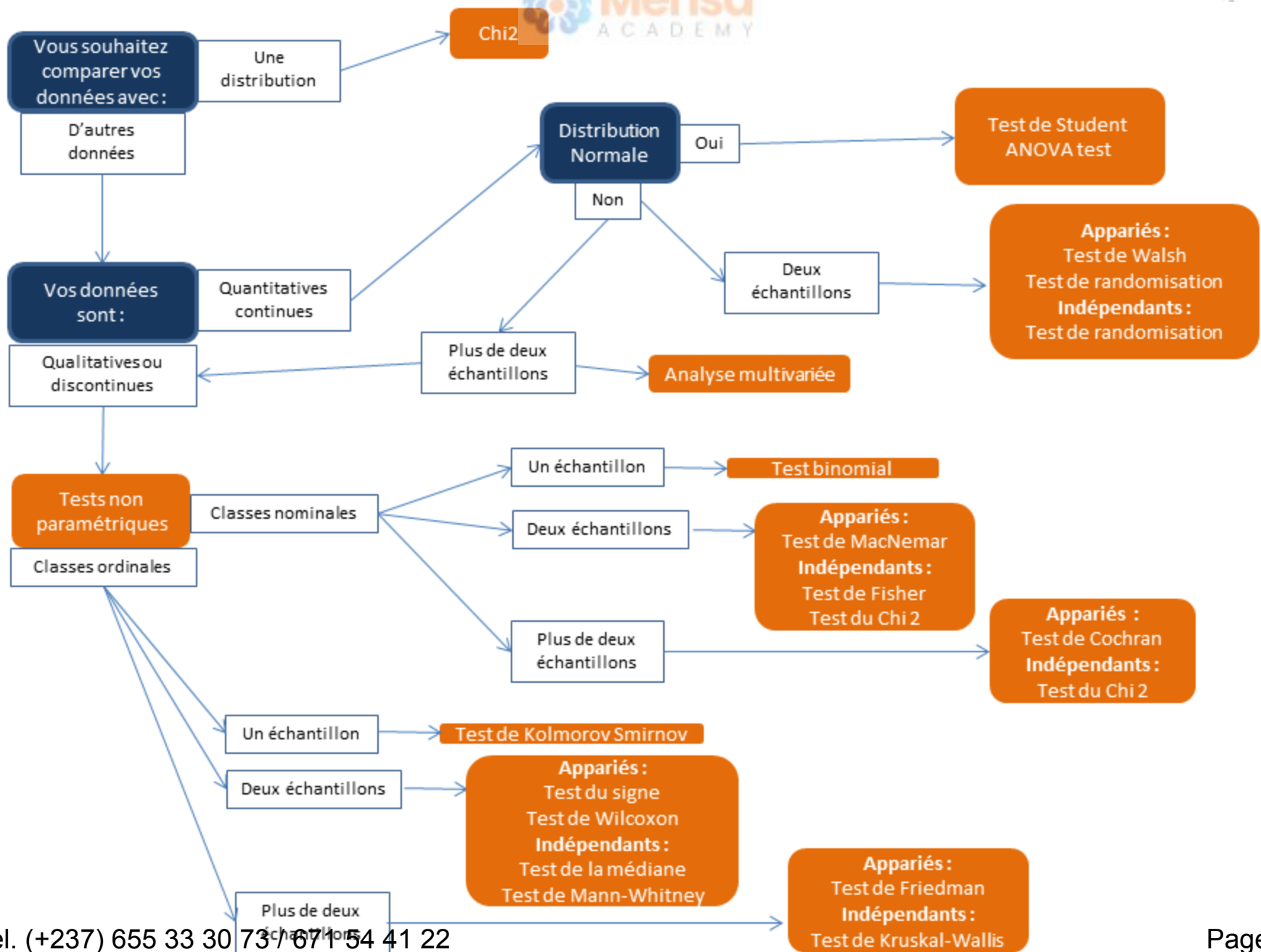
- Apprentissage automatique (machine learning) : les algorithmes (régression logistique, arbres de décision, réseaux de neurones) sont tous basés sur la statistique ;
- Reconnaissance d'images et de voix : calcul de probabilités pour classer ou identifier correctement un objet ou une parole ;
- Traitement du langage naturel : utilisation de modèles statistiques pour comprendre, prédire et générer du texte ;
- Big Data et Data Science : analyse statistique de données massives pour trouver des corrélations et faire des prédictions ;
- Évaluation et optimisation des modèles : statistiques utilisées pour mesurer les performances (précision, rappel, F1-score) et éviter le sur-apprentissage (overfitting).

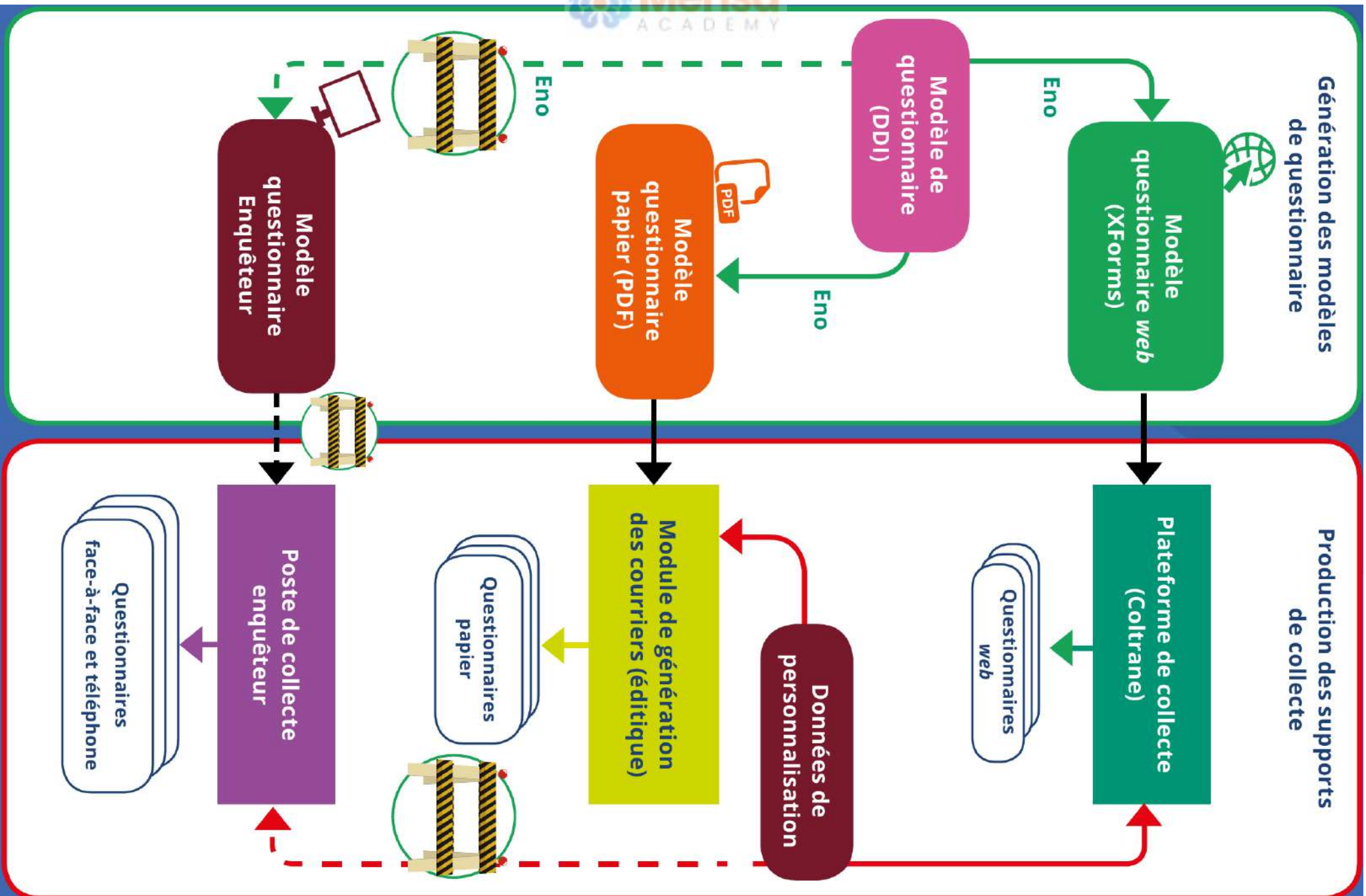
### **Astronomie & exploration spatiale**

- Observation astronomique : analyse des données massives issues de télescopes terrestres et spatiaux (Hubble, James Webb) ;
- Détection d'exoplanètes : utilisation de modèles statistiques pour confirmer la présence d'une planète autour d'une étoile (méthode des transits, vitesses radiales) ;
- Astrophysique : estimation de la masse des étoiles, des galaxies, de la matière noire.
- Sécurité spatiale : calculs de probabilité de collision entre satellites, débris spatiaux et engins spatiaux ;
- Exploration spatiale : planification et modélisation des trajectoires de fusées et sondes interplanétaires (mécanique orbitale appuyée par statistiques et probabilités) ;
- Analyse d'images spatiales : traitement statistique des signaux pour réduire le bruit et améliorer la précision des observations.

### **ILLUSTRATION & QUELQUES ELEMENTS A SAVOIR :**







**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**PROBLEME N° 1**

❶ Soit  $V(x, y)$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . On pose :  $N_1(V) = |x| + |y|$ . Montrer que  $N_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ . Dessiner la « sphère unité »  $S_1$ , ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $N_1(V) = 1$ .

❷ On pose  $N_\infty(V) = \sup(|x|, |y|)$ . Montrer que  $N_\infty$  est une norme sur  $E$ . Dessiner la « sphère unité »  $S_\infty$ , ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $N_\infty(V) = 1$ .

❸ Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif  $A$  et le plus petit nombre réel strictement positif  $B$  tels que, pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'on ait :  $A.N_\infty(V) \leq N_1(V) \leq B.N_\infty(V)$  (1).

❹ Existe-t-il des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  pour lesquels les deux inégalités de (1) soient une égalité ? Si oui, préciser ces vecteurs.

❺ Soit  $N$  une norme **quelconque**.

❶ Montrer qu'il existe un nombre  $\beta$  strictement positif tel que, pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'on ait :

$$N(V) \leq \beta.N_\infty(V)$$

❷ Montrer que pour tout  $V$  non nul appartenant à  $S_\infty$ , l'on a  $N(V) > 0$ .

On admettra alors qu'il existe au moins un vecteur  $V_0$  appartenant à  $S_\infty$  tel que l'on ait, pour tout  $V$  appartenant à  $S_\infty$ ,  $N(V) \geq N(V_0)$ .

En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif  $\gamma$  tel que, pour tout  $V$  appartenant à  $S_\infty$ , l'on ait  $N(V) \geq \gamma$ .

③ Montrer qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  strictement positif tel que l'on ait, pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\alpha \cdot N_\infty(V) \leq N(V).$$

⑥ Soient  $N$  et  $N'$  deux normes distinctes quelconques sur  $\mathbb{R}^2$ . Déduire des questions précédentes qu'il existe deux nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'on ait :

$$a \cdot N'(V) \leq N(V) \leq b \cdot N'(V) \quad (2)$$

⑦ Pour tout  $V(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $H(V) = \sup_{t \in [0;1]} |x + ty|$ .

Montrer que  $H$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  et tracer sa « sphère unité »  $S$ , ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $H(V) = 1$ .

⑧ Mêmes questions pour  $H'(V) = \int_0^1 |x + ty| dt$  et la « sphère unité » correspondante  $S'$ .

⑨ Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif  $p$  et le plus petit nombre réel strictement positif  $q$  tels que l'on ait, pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$p \cdot H'(V) \leq H(V) \leq q \cdot H'(V)$$

On pourra utiliser les sphères unités  $S$  et  $S'$ .

Pour quels vecteurs  $V$  y a-t-il égalité ?

On pourra s'aider d'un raisonnement géométrique pour résoudre cette question.



**PROBLEME N° 2**
**Première partie**

❶ Montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ .

❷ En déduire que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$  où  $\ln$  est le logarithme népérien.

❸ Déterminer alors la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n}$  et la nature de la suite  $\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ .

**Deuxième partie**

On dit que deux suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont équivalentes s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  convergeant vers zéro et un entier naturel  $N$  tels que, pour tout  $n > N$ ,  $\alpha_n = \beta_n(1 + \varepsilon_n)$ . On écrit alors  $\alpha_n \approx \beta_n$ .

❶ ① Soit  $(a_n)$  une suite convergeant vers zéro. Montrer que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier naturel  $p$  tel que pour tout  $n$  supérieur à  $p$ , on ait :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k|$$

② En déduire que la suite  $(a_n)$  converge en moyenne vers zéro.

❷ ② Soit  $(b_n)$  une suite convergeant vers  $b$ . Montrer que la suite  $(b_n)$  converge en moyenne vers  $b$ .

❸ ③ La suite  $(\mu_n)$  définie par  $\mu_n = (-1)^n$  est-elle convergente ? Est-elle convergente en moyenne ? Qu'en déduit-on ?

**④** ① Soit  $(c_n)$  une suite. Soit  $(\delta_n)$  la suite définie par  $\delta_n = c_{n+1} - c_n$ . On suppose que  $(\delta_n)$  converge vers  $c$ . Montrer que la suite  $\left(\frac{c_n}{n}\right)$  converge aussi vers  $c$ .

② On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $u_{n+1} = \sin u_n$ .

**(i)** Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?

**(ii)** Déterminer le nombre réel  $r$  strictement négatif tel que la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_{n+1}^r - u_n^r$  converge vers une limite non nulle  $l$ . On pourra utiliser un développement limité au voisinage de zéro de la fonction sinus.

**(iii)** En déduire que  $u_n \approx \sqrt{\frac{3}{n}}$ .



1

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR -SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIES A et B***

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

**SUJET N° 1**

Comparez l'enquête policière et l'expérience scientifique.

**SUJET N° 2**

Que signifie et quelle valeur faut-il donner à l'expression : «L'histoire jugera» ?

**SUJET N° 3**

Le philosophe ALAIN affirme que «la plus haute valeur humaine, c'est l'esprit libre». (Les vigiles de l'Esprit).

**Vous commenterez cette affirmation et ferez apparaître les difficultés qui peuvent surgir dans cette conquête.**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 3 HEURES**

**EXERCICE**

On pose,  $x$  désignant un nombre réel,

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt.$$

❶ Déterminer les réels  $x$  pour lesquels l'intégrale ci-dessus existe.

On note  $D_f$  l'ensemble correspondant.

❷ Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $D_f$ . Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in D_f$ .

On étudiera soigneusement la dérivabilité de  $f$  en 1.

❸ Montrer que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt$  et  $\int_{-\infty}^0 \left( 1 - \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} \right) dt$  convergent.

On pose :  $a = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt$  et  $b = \int_{-\infty}^0 \left( 1 - \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} \right) dt$ .

④ Montrer que la droite d'équation  $y = x + a$  (resp.  $y = x + b$ ) est asymptote à la courbe représentative de  $f$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (resp. quand  $x \rightarrow -\infty$ ).

On écrira, pour  $x \in D_f$ ,  $f(x) - x = \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt + \int_0^x \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt$ .

⑤ Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative.

### PROBLEME n° 1

① Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose :  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien).

En étudiant, par exemple, la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

On note  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ .

② Soit  $t \in ]0,1[$  et  $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}$ .

Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0,1]$ .

On note  $I = \int_0^1 f(t) dt$  et l'on souhaite montrer que  $\gamma = I$ .

③ A l'aide du changement de variable :  $t = 1 - e^{-u}$ , montrer l'égalité

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \times h(u)}{1 - e^{-u}} du$$

où  $h$  est une fonction réelle définie sur des réels strictement positifs.

① Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} du$  converge et vaut  $\ln \frac{\beta}{\alpha}$ .

② En déduire que  $\gamma = I$ .

**PROBLEME n° 2**

On pose,  $x$  désignant un nombre réel et  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 :

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

On se propose de montrer que la série de fonctions de terme général  $u_n(x)$  converge sur  $\mathbb{R}$  tout entier et de calculer sa somme.

On note :  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} - \{0\}).$

*Question préliminaire :* montrer que l'on peut limiter l'étude aux valeurs de  $x$  situées dans l'intervalle  $]0, \pi]$ .

Dans la suite du problème, on désigne par  $x$  un réel quelconque situé dans cet intervalle.

❶ On note  $f_n$  l'application définie par :

$$(\forall t \in ]0, x]) \quad f_n(t) = \frac{\cos(n+1)\frac{t}{2} \times \sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

❶ Montrer que  $f_n$  se prolonge par continuité en 0. On désigne encore par  $f_n$  l'application ainsi prolongée.

❷ Montrer alors l'égalité :

$$(\forall t \in [0, x]) \quad \sum_{k=1}^n \cos kt = f_n(t).$$

❸ En déduire que l'on a  $S_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

❹ A l'aide du changement de variable  $t = 2u$ , montrer l'égalité :

$$S_n(x) = \int_0^{x/2} \frac{\sin 2nt \times \cos t}{\sin t} dt - \frac{x}{2} + \frac{\sin nx}{2n}.$$



② On note :  $I_n = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin 2nt \times \cos t}{\sin t} dt .$

Soit  $g$  l'application définie par :

$$\left( \forall t \in \left] 0, \frac{x}{2} \right[ \right) \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} .$$

① Montrer que  $g$  se prolonge par continuité sur l'intervalle  $\left[ 0, \frac{x}{2} \right]$ .

On désigne encore par  $g$  l'application ainsi prolongée.

② Vérifier l'égalité :

$$I_n = \int_0^{\frac{x}{2}} \sin 2nt \times g(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin 2nt}{t} dt .$$

③ Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ( $a < b$ ). Soit  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application *continue*. On souhaite montrer le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin nt \times h(t) dt = 0 .$$

① Montrer le résultat lorsque  $h$  est constante sur  $[a, b]$ , puis lorsque  $h$  est une fonction en escaliers.

② Dans le cas général ou  $h$  est supposée continue sur  $[a, b]$ , on admettra le résultat suivant :

« Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe une fonction  $\varphi$  en escaliers sur  $[a, b]$  telle que l'on ait :

$$\left( \forall t \in [a, b] \right) \quad |h(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \quad .$$

On utilisera alors la question 3) a).

- ④ ① Montrer la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

On admettra que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

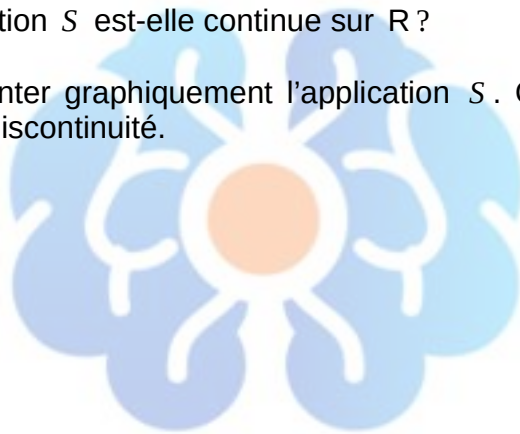
② Dédurre des questions 3) et 4) a) que la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  converge. Quelle est sa limite ?

- ⑤ ① Montrer que la suite  $(S_n(x))_{n \geq 1}$  converge et calculer sa limite.

On note :  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(x)) \quad \left( = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \right)$ .

② L'application  $S$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

③ Représenter graphiquement l'application  $S$ . On mettra notamment en évidence ses points de discontinuité.



**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE****ABIDJAN****AVRIL 1998****CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES****VOIE B****OPTION MATHEMATIQUES****EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE****DUREE : 2 HEURES****PROBLEME N° 1**

❶ Soit la suite  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^5}$ . Montrer que cette suite est majorée et convergente.  
Quelle est sa limite ?

On cherche à calculer une approximation de  $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$  avec 5 décimales exactes.

On pose  $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$ .

❷ Vérifier que  $\int_i^{i+1} \frac{1}{x^5} dx \leq \frac{1}{i^5} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{x^5} dx$ .

❸ ① Dédurre de la deuxième question un majorant de  $R_n$ .

② Combien de décimales faut-il garder pour chaque terme dans le calcul de  $S_n$  ?

③ Si on veut approcher la valeur de  $S$  par  $S_n$  quelle est la précision ?

④ En déduire la valeur de  $n$  qu'il faut choisir pour calculer  $S$  avec 5 décimales exactes (on ne demande pas de calculer  $S$  dans cette question).

④ ① Dédurre de la deuxième question un encadrement de  $R_n$ , soit  $m_n \leq R_n \leq M_n$ .

② On choisit comme valeur approchée de  $R_n$  le milieu du segment  $[m_n, M_n]$ .

Quelle valeur approchée de  $S$  en déduit-on ?

③ Quelle est la précision de l'encadrement sans tenir compte des arrondis sur les termes de  $S_n$ , puis en en tenant compte ?

④ Quelle valeur de  $n$  doit-on choisir pour que cette approximation ait 5 décimales exactes ?

⑤ Calculer le valeur approchée ainsi obtenue en présentant les résultats sous forme d'un tableau, et en calculant les termes de  $S_n$  avec le nombre de décimales adéquat.

| Rang | Terme de $S_n$  | minimum | maximum | valeur approchée | précision       |
|------|-----------------|---------|---------|------------------|-----------------|
| I    | $\frac{1}{i^5}$ |         |         |                  |                 |
| 1    |                 |         |         |                  |                 |
| 2    |                 |         |         |                  |                 |
| ...  |                 |         |         |                  |                 |
| N    |                 |         |         |                  |                 |
|      | $S_n$           | $m_n$   | $M_n$   | $S$              | $\varepsilon_n$ |

**PROBLEME N° 2**

On cherche à résoudre l'équation  $P(x) = 0$ , où  $P(x) = x^3 + 3x - 2$ .

❶ Montrer que  $P(x) = 0$  admet une solution unique  $s$ , qui appartient à  $[0;1]$ .

Par la suite on cherche à calculer une valeur approchée de  $s$  avec 6 décimales exactes.

❷ On pose  $\varphi_\lambda(x) = x + \lambda \cdot P(x)$ , avec  $\lambda \neq 0$ .

Montrer que  $\varphi_\lambda(x) = x \Leftrightarrow P(x) = 0$ .

❸ On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_{n+1} = \varphi_\lambda(u_n)$  et  $u_0 \in ]0;1[$ .

❶ Pour  $\lambda = -1/4$ , calculer  $\varphi_\lambda(x)$  et représenter graphiquement cette fonction sur  $[-1;2]$ .

❷ Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. Quelle est sa limite ?

❸ On choisit  $u_0 = 0,6$ . Représenter sur le graphique précédent les 4 premiers termes sans calcul.

❹ Déterminer les premiers termes de la suite  $(u_n)$  jusqu'au rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  soit une approximation de  $s$  avec 6 décimales exactes.

❺ Montrer que si  $\lambda \in [-1/3;0[$ , la suite  $(u_n)$  est convergente.

❻ Représenter graphiquement la fonction  $P(x)$  sur  $[-1;2]$ .

❼ On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_{n+1} = v_n - \frac{1-v_n}{P(1)-P(v_n)} P(v_n)$  et  $v_0 = 0,6$ .

❶ Sur le graphique précédent, donner une représentation géométrique décrivant la façon de passer de  $v_n$  à  $v_{n+1}$ .

② Calculer les premiers termes de la suite  $(v_n)$  jusqu'à ce que la valeur calculée ait 6 décimales exactes (présenter les calculs sous forme de tableau).

③ Que constate-t-on ? Comment s'explique ce résultat ?

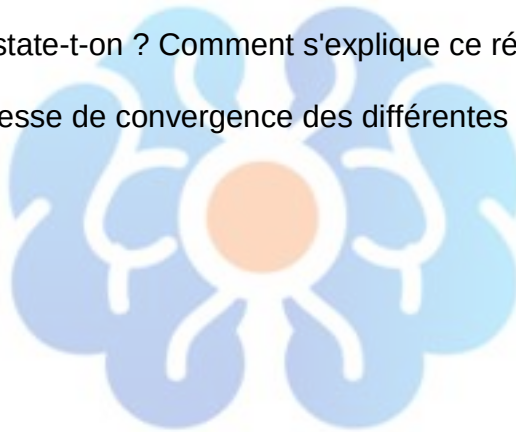
⑥ On définit la suite  $(w_n)$  par  $w_{n+1} = w_n - \frac{P(w_n)}{P'(w_n)}$  et  $w_0 = 0,6$ .

① Sur le graphique précédent, donner une représentation géométrique décrivant la façon de passer de  $w_n$  à  $w_{n+1}$ .

② Calculer les premiers termes de la suite  $(w_n)$  jusqu'à ce que la valeur calculée ait 6 décimales exactes (présenter les calculs sous forme de tableau).

③ Que constate-t-on ? Comment s'explique ce résultat ?

⑦ Comparer la vitesse de convergence des différentes suites utilisées.



|



**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A**

*et*

**B OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

Le texte ci-joint sous forme d'interview est tiré du livre d'Albert JACQUARD : «Petite philosophie à l'usage des non-philosophes», paru aux éditions Calmann-Lévy en 1997.

Ce texte peut être résumé en 250 mots environ (plus ou moins 10%)

\*\*\*

*Vous dites que, sans la présence d'autrui, y être objet du discours d'un observateur.*

Certes l'homme n'est pas le seul observateur ; les animaux dotés d'une vue voient, tout comme lui, la tache brillante qui, chaque matin, monte dans le ciel ; mais seul l'homme est capable d'aller au-delà de cette constatation et de faire de cette tache un objet, le Soleil. Cette étoile, comme toutes les étoiles, est une création du discours humain. Sans l'homme, l'univers n'est qu'un continuum sans structure.

Ce regard créateur d'objets, chaque humain est capable de le diriger sur lui-même. Il fait alors de sa personne l'objet de son discours. Du coup, non seulement il est, mais *il se sait être*. C'est cela la conscience, c'est une performance qui nous permet de nous savoir être.

*Performance que Descartes, disant «Je pense donc je suis<sup>1</sup>», plaçait à l'entrée de la philosophie,. Qu'y a-t-il d'intéressant, selon vous, dans sa démarche ?*

Descartes n'est pas à la recherche d'une définition de la conscience ; ce qu'il lui faut, c'est une évidence capable de résister à toute mise en doute, y compris la mise en doute du message de nos sens. Il n'en trouve qu'une : le fait même qu'il est en train de faire cette recherche. Il va donc fonder sa philosophie non sur un objet dont l'existence soit indubitable, il n'en trouve pas, mais sur un processus dont l'existence est assurée : le cheminement de sa propre pensée.

A vrai dire, je ne trouve pas son argument convaincant. Ce qu'il peut tenir pour certain est l'existence de cette pensée, non pas nécessairement l'existence du *je qui pense*.

Je préfère m'en tenir à l'idée que tout objet ne peut être amené à l'existence que par le discours qui l'évoque. Or ce discours s'adresse à quelqu'un. Lorsque l'objet de mon discours est moi, je deviens conscient d'être et, simultanément, je m'affirme existant face à un autre, celui à qui j'adresse mon discours.

Si je devais tirer une leçon de l'oeuvre de Descartes, ce serait essentiellement sa méthode d'analyse de chaque problème en parties aussi élémentaires que possible. Mais à *loin encore, conçoivent la conscience comme une sorte de «revanche» de l'esprit sur la matière*.

Pourquoi imaginer une revanche ? Il y a eu tout simplement, au cours de l'évolution du cosmos, continuité dans l'apparition de pouvoirs toujours plus grands des structures matérielles peu à peu mises en place, pouvoirs liés à leur complexité. Ce processus s'est poursuivi jusqu'à l'apparition du champion de la complexité qu'est le cerveau humain. Parmi les pouvoirs qu'a reçu ce cerveau, le plus décisif a été la création de la communication entre les hommes, ce que nous avons appelé «le discours». Chacun a pu alors se prendre soi-même pour objet de son propre discours, c'est-à-dire développer sa conscience d'être. Mais ce discours ne pouvait prendre place que dans un réseau d'échanges. Ce réseau collectif est donc le point de départ de la conscience individuelle. Ce que j'aime résumer par la formule que j'ai déjà employée : «Je dis *je* parce que d'autres m'ont dit *tu*». L'esprit n'est que l'aboutissement de l'aventure de la matière. Il n'a pas une origine autre que l'ensemble du cosmos.

---

<sup>1</sup> 1 DESCARTES René, Méditations Métaphysiques, Premières méditations (1641) et Discours de la Méthode, IV<sup>e</sup> partie (1637).

*Ce qui semble vouloir dire que la conscience serait une réalité matérielle...*

Je n'en dis pas autant. La conscience a seulement besoin pour se manifester d'un support matériel. Faisons une comparaison avec le langage. Celui-ci ne peut se produire que grâce aux cordes vocales (ou aux gestes pour ceux qui parlent avec les mains), mais le langage est autre chose que les cordes vocales. Vous pouvez tout savoir sur les cordes vocales, et ne même pas imaginer ce qu'est le langage. Voilà un exemple de l'insuffisance de la méthode cartésienne d'analyse.

Autre exemple que cette même insuffisance : à quel moment la conscience apparaît-elle ? demande-t-on parfois. Avant la naissance ? Après ? La réponse est cruciale pour le débat sur l'avortement.

Mais elle ne peut être donnée. L'ovule fécondé n'a pas de conscience, mais tout est présent en lui pour qu'un processus se déroule, qui aboutira à être conscient. On jette à la poubelle, sans état d'âme, un ovule ou un spermatozoïde ; pourquoi pas le fœtus qui succède à l'embryon ? Pourquoi pas le bébé qui vient de naître ? Avec ce raisonnement par continuité on justifie tous les crimes !

Mais le même raisonnement en sens inverse conduit à l'absurdité : je respecte évidemment la vie d'un bébé, donc je dois respecter la vie d'un fœtus, donc la vie d'un embryon, donc celle d'un oeuf juste fécondé, donc un ovule, donc un spermatozoïde ! Il semble pourtant difficile de se lamenter sur le sort des centaines d'ovules, des centaines de millions de spermatozoïdes auxquels un couple n'accorde pas la vie.

Ce n'est pas en ces termes qu'on peut poser le problème de l'avortement. La biologie ne peut que décrire la réalité, non proposer une règle morale. C'est à chacun de prendre position. La mienne est fondée sur le respect de la jeune femme qui, toute réflexion faite, décide que l'avortement est pour elle la solution la moins mauvaise. Je fais passer ce respect avant celui, pourtant très grand, du futur bébé qu'elle porte.

Cette réflexion, je ne peux la faire seul. A ce propos, comme à propos des questions essentielles, la conscience personnelle ne peut prendre racine que dans une conscience collective ; car ma conscience est le cheminement fait au contact des autres.

*Ce qui suppose aussi la temporalité, la capacité d'anticiper le futur.*

Le principal apport des hommes, ce qui les distingue initialement des animaux, est certainement leur capacité à imaginer demain. Certes les ours, les écureuils, voyant venir le froid, prennent des précautions, accumulent de la graisse ou des provisions qui leur permettront de supporter l'hiver ; mais ce réflexe est déclenché par la température ; ils font des provisions *parce qu'il fait* froid, non *pour* passer l'hiver. Etre conscient que demain existera et que je peux avoir une influence sur lui est le propre de l'homme.

*Vous aussi, vous considérez donc la conscience comme le «sommet des phénomènes», pour reprendre l'expression de Lacan. N'est-ce pas de l'anthropomorphisme ?*

Si j'étais un noyau d'hélium, je m'émerveillerais des pouvoirs d'un atome de carbone, si j'étais un atome de carbone, je m'émerveillerais de..., et ainsi de suite. En bout de chaîne, on arrive à l'homme qui peut s'émerveiller du seul objet plus complexe que lui, et donc disposant de plus de pouvoirs que lui : la communauté humaine. Par la conscience, qui ne m'est donné que grâce à mon appartenance à elle, je participe à l'élan cosmique vers la complexité ; cet élan qui est le sens apparent de l'évolution de l'univers. Du coup, c'est par la conscience qu'un sens est apporté aux événements quotidiens.

Finalement ce qui me gêne dans le «donc je suis» de Descartes, c'est l'autonomie du «je pense». Car cette pensée n'a pu apparaître et se développer que dans le rapport à l'autre. Il n'y a pas de conscience sans apport extérieur. Je me fais grâce aux autres. D'une certaine façon, lorsque je pense, je quitte mon moi ; mon moi n'est plus à l'intérieur de ma peau. Je est l'ensemble des liens que je tisse avec les autres.

*Vous n'aurez donc aucune difficulté à souscrire au propos de Freud qui disant dans les Essais de psychanalyse appliquée : «Le moi n'est pas maître dans sa propre maison.»*

La formule est excellente, mais Freud aurait pu donner à ce constat une tonalité plus réjouissante. Je n'ai pas à être triste de ne pas «être maître dans ma propre maison». Prétendre l'être serait faire preuve de vanité arrogante d'Auguste, «maître de lui comme de l'univers». Fort heureusement, l'univers n'est pas organisé comme une armée avec sa hiérarchie et sa discipline ; fort heureusement ma «maison» n'est pas une caserne avec ses murs d'enceinte, ses lits au carré et ses adjudants gardiens de l'ordre.

Ma maison est un lieu ouvert, dans le temps comme dans l'espace. Des personnages du passé, restés longtemps oubliés, y resurgissent sans prévenir, des inconnus parfois étranges y pénètrent et y déposent des richesses inattendues ; même la poussière accumulée par le hasard devient nuage, source de rêve, lorsqu'un courant d'air la soulève. Personnages et objets s'y heurtent et mettent en place spontanément ici un coin tranquille, harmonieux, là une zone de cri et de contestation. De temps à autres la tentation de l'ordre se manifeste, mais qui saurait l'imposer, sinon la mort ?

«Je» m'y déplace avec un bonheur d'autant plus vif que chaque pièce me réserve un accueil qui me surprend. La cave et le grenier doivent receler des objets que je préfère ne pas voir, quelques cadavres peut-être. Qu'importe, «je» suis face à la fenêtre ; elle est ouverte.

Du coup, mon moi n'a pas de propre maison, il est dans les échanges que j'entretiens, dans les liens que je tisse.

*Il dépend aussi de son héritage ; le moi est d'autant moins maître chez lui qu'il ignore le passé de son espèce.*

Depuis notre naissance, et même avant, notre cerveau s'est structuré en créant des circuits supports de nos diverses facultés «intellectuelles», mémoire, imagination, émotion... Tout a laissé des traces dans cette structure riche et quelques cent milliards de neurones, reliés par un million de milliards de connexions. Une combinatoire inépuisable est disponible, que n'arriveront pas à saturer les événements de nos cent années de vie (soit seulement trois milliards de seconde). A chaque instant, une partie infime de ces circuits neuronaux est utilisée pour ressentir et exprimer. Cette partie «consciente» nous apparaît comme la seule réellement vivante ; en fait notre activité cérébrale se poursuit souterrainement, marquée par tous les apports engrangés au cours de notre parcours antérieur.

L'inconscient c'est l'ensemble des activités cérébrales qui, à un instant donné, échappent à ce qui est ressenti et exprimé.

*Puisque le moi n'est pas maître chez lui, direz-vous qu'il est l'esclave de son inconscient ?*

Non, l'erreur souvent commise, sur laquelle Alain attire l'attention, est de faire de l'inconscient un personnage ayant ses propres caractéristiques, disposant d'une certaine autonomie. Le fait de donner un nom à ce concept nous incite à voir en lui quelqu'un. Une erreur semblable est rencontrée dans le domaine scientifique à propos du mot «hasard». En l'opposant à la nécessité, c'est-à-dire aux jeu des forces déterministes, on fait de lui l'équivalent d'un petit génie venant brouiller les cartes, rendant la prévision moins sûre. Il devient un acteur du processus de passage d'un état à l'état suivant ; ce qui ne correspond nullement au rôle que la science attribue à cette notion.

*De même l'inconscient n'est pas en soi un acteur, encore moins un monstre ; il est un facteur supplémentaire de complexité.*



Soit l'exemple de la sexualité : quelques doses d'hormones, adrénaline ou hormones sexuelles, en plus ou en moins, et toute notre activité neuronale est transformée. Mais l'hyper-complexité du cerveau lui permet de ne pas laisser une chaîne causale simple entre glandes endocrines sécrétant leurs hormones et neurones émettant leur influx nerveux. Un mâle voit une femelle, ses glandes endocrines réagissent, son cerveau reçoit des signaux et provoquent une succession de gestes, l'enchaînement des causes et effets aboutit à la copulation. Le jeu des organes se mêlent de l'affaire, notamment le cerveau qui apporte sa charge de souvenirs, d'émotions, d'interdits, de projets, d'imagination. La copulation n'est plus centrale, elle n'est qu'un détail, à la limite un prétexte, pour déclencher un torrent que certains appellent «amour».

*Autrement dit, contrairement à Alain ou à Sartre, vous ne cherchez pas à atténuer la portée de l'inconscient sous prétexte qu'il mettrait en cause la souveraineté du sujet. Mais vous ne vous en affectez pas.*

Pas plus que je ne m'affecte de l'imprévisibilité dont il frappe mes comportements. Le temps qu'il fera demain m'intéresse, mais je suis fort heureux de ne pas être capable de le prévoir. Les réactions que j'ai face à un tel événement m'étonnent parfois ; je cherche l'explication ; mais je sais que, le plus souvent, je n'aurai accès qu'à des arguments partiels ou même mensongers. J'irai voir dans le grenier où se cache mon inconscient, mais je sais être incapable de l'explorer. Et j'en suis satisfait. N'exagérons pas : je suis comme le pilote d'une barque chahutée par des remous imprévisibles, inexplicables ; mais j'en reste le pilote. Le brouillard apporté autour de mes décisions par l'indécidable, ne restreint que bien peu ma responsabilité.

Mon inconscient peut bien manigancer dans son coin, en cachette, des réactions qu'il me proposera, des idées qu'il me suggérera ; il ne me fait pas vraiment peur ; pas plus que tous ces «autres» qui m'agressent, me contredisent, m'aiment, me font, me dérangent, et dont je ne peux me passer.

AVRIL 1998

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE**

**PROBLEME N° 1**

1) On a :

$$S_n - S_{n-1} = 1/n^5 > 0$$

donc la suite est croissante et on a la majoration :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n dx/x^5$$

Le membre de droite est fini car l'intégrale est convergente.  $(S_n)$  est une suite croissante et majorée donc convergente. Sa limite est la somme de la série  $S = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^5 < +\infty$

2) On a :

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} dx/x^5 &= [1/i^4 - 1/(i+1)^4]/4 \\ &= [(i+1)^4 - i^4]/[4i^4(i+1)^4] \\ &= [1 + 4i + 6i^2 + 4i^3]/[4i^4(i+1)^4] \leq 1/i^5 \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \int_{i-1}^i dx/x^5 &= [1/(i-1)^4 - 1/i^4]/4 \\ &= [i^4 - (i-1)^4]/[4i^4(i-1)^4] \\ &= [-1 + 4i - 6i^2 + 4i^3]/[4i^4(i-1)^4] \geq 1/i^5 \end{aligned}$$



3.1) D'après 2) on a  $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} i^5 \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4$

3.2) Pour approximer S avec 5 décimales exactes, il faut garder pour chaque terme de  $(S_n)$  5 décimales.

3.3) Comme :

$$S - S_n = R_n \leq 1/4n^4,$$

on peut approximer S par  $S_n$  avec une précision inférieure à  $1/4n^4$ .

3.4) Pour calculer S avec 5 décimales exactes, il faut que :

$$1/4n^4 \leq 10^{-5},$$

c'est à dire  $4n^4 \geq 10^5$ , soit  $n \geq 10^{5/4}/4^{1/4}$ . D'où  $n \geq 13$ .

4.1) On a :

$$\int_{n+1}^{\infty} dx/x^5 \leq R_n \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4,$$

c'est à dire

$$1/4(n+1)^4 \leq R_n \leq 1/4n^4$$

4.2) Si on approxime  $R_n$  par  $(M_n + m_n)/2$ , la valeur approchée de S est  $S_n + R_n = S_n + (M_n + m_n)/2$ , c'est à dire que S est encadrée par  $S_n + m_n$  et  $S_n + M_n$ .

4.3) La précision de l'encadrement en tenant compte des arrondis sur les termes de  $S_n$  est 10 fois supérieure à celle obtenue en n'en tenant pas compte.

4.4) Il faut choisir n de façon à ce que  $S - (S_n + R_n) \leq 10^{-5}$ . Or  $(S - S_n) \leq 1/4n^4$  et l'encadrement de  $R_n$  montre que

$$-R_n \leq -1/4(n+1)^4.$$

On a donc :

$$(S - S_n) - R_n \leq 1/4n^4 - 1/4(n+1)^4$$

Comme on a  $1/4n^4 - 1/4(n+1)^4 \leq 1/(n+1)^5$ , il faut choisir n tel que

$$(n+1)^5 \leq 10^5, \text{ c'est à dire } n+1 \geq 10, \text{ ou encore } n \geq 9$$

4.5) On calcule S de proche en proche comme dans le tableau suivant :

| i  | $1/i^5$  | $1/4(n+1)^4$ | $1/4n^4$ | $S_n$    | $R_n$    | Valeur approchée<br>$S = S_n + R_n$ |
|----|----------|--------------|----------|----------|----------|-------------------------------------|
| 1  | 1,000000 | 0,015625     | 0,250000 | 1,000000 | 0,132813 |                                     |
| 2  | 0,031250 | 0,003086     | 0,015625 | 1,031250 | 0,009356 | 1,040606                            |
| 3  | 0,004115 | 0,000977     | 0,003086 | 1,035365 | 0,002031 | 1,037397                            |
| 4  | 0,000977 | 0,000400     | 0,000977 | 1,036342 | 0,000688 | 1,037030                            |
| 5  | 0,000320 | 0,000193     | 0,000400 | 1,036662 | 0,000296 | 1,036958                            |
| 6  | 0,000129 | 0,000104     | 0,000193 | 1,036790 | 0,000149 | 1,036939                            |
| 7  | 0,000059 | 0,000061     | 0,000104 | 1,036850 | 0,000083 | 1,036932                            |
| 8  | 0,000031 | 0,000038     | 0,000061 | 1,036880 | 0,000050 | 1,036930                            |
| 9  | 0,000017 | 0,000025     | 0,000038 | 1,036897 | 0,000032 | 1,036929                            |
| 10 | 0,000010 | 0,000017     | 0,000025 | 1,036907 | 0,000021 | 1,036928                            |
| 11 | 0,000006 | 0,000012     | 0,000017 | 1,036914 | 0,000015 | 1,036928                            |
| 12 | 0,000004 | 0,000009     | 0,000012 | 1,036918 | 0,000010 | 1,036928                            |
| 13 | 0,000003 | 0,000007     | 0,000009 | 1,036920 | 0,000008 | 1,036928                            |
| 14 | 0,000002 | 0,000005     | 0,000007 | 1,036922 | 0,000006 | 1,036928                            |
| 15 | 0,000001 | 0,000004     | 0,000005 | 1,036923 | 0,000004 | 1,036928                            |

## PROBLEME N° 2

1) On a :

$$P'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad \forall x$$

donc la fonction  $P$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et donc sur le segment  $[0; 1]$ . On en déduit que  $P$  est bijective et comme  $P(0) = -2 < 0$  et  $P(1) = 2$ , il existe un unique réel  $s$  de  $[0; 1]$  tel que  $P(s) = 0$

2) Il est facile de voir que :

$$\varphi_\lambda(x) = x + \lambda P(x) = x \Leftrightarrow \lambda P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda P(x) = 0 \text{ puisque } \lambda \text{ est non nul.}$$

3.1)

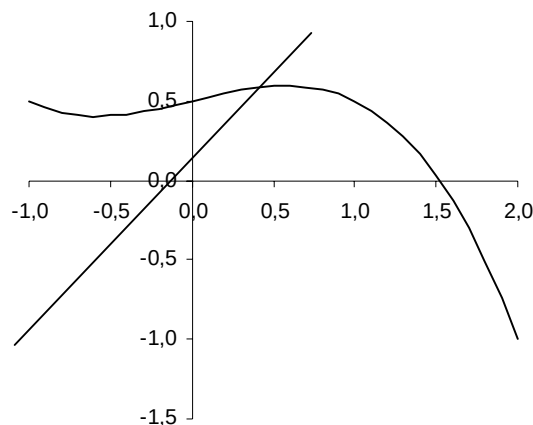
$$\begin{aligned} \varphi_{-1/4}(x) &= x - (x^3 + 3x - 2)/4 \\ &= (-x^3 + x + 2)/4. \end{aligned}$$

La dérivée est :

$$\varphi'_{-1/4}(x) = (-3x^2 + 1)/4$$

qui est positive dans le segment  $[-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}]$ . D'où le tableau de variation :

| x                    | -1  | $-1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | 2  |
|----------------------|-----|---------------|--------------|----|
| $\varphi'_{-1/4}(x)$ | -   | 0             | +            | 0  |
| $\varphi_{-1/4}(x)$  | 1/2 | ↓             | ↑            | ↓  |
|                      |     |               |              | -1 |



3.2) Comme la fonction  $\phi_{-1/4}$  est continue, elle est bornée pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$ .

donc la suite  $(u_n)$  est minorée. Pour  $u_0=0.6$ , la suite est décroissante donc convergente et sa limite  $\rho$  vérifie  $\rho = \phi_{-1/4}(\rho)$  soit  $P(\rho)=0$ , c'est à dire  $\rho$  est égale à la racine  $s$  de  $P$  compris entre 0 et 1.

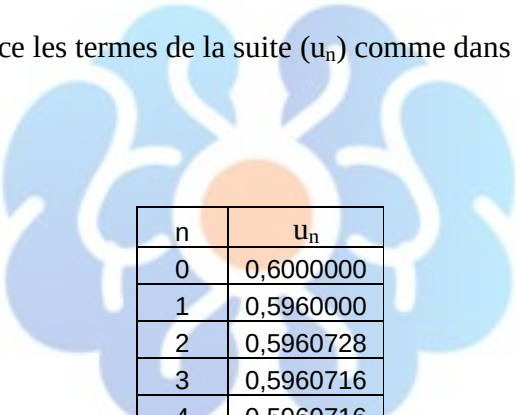
3.3) Pour passer de  $u_n$  à  $u_{n+1}$ , on procède de la manière classique suivante :

a) On trace la droite  $y=x$  (1<sup>ère</sup> bissectrice des axes)

b) On détermine sur le graphique l'image  $\phi_{-1/4}(u_n)$  de  $u_n$  que l'on projette sur l'axe  $Oy$ .

c)  $u_{n+1}$  n'est autre que le symétrique de cette projection par rapport à la 1<sup>ère</sup> bissectrice, c'est à dire le point de  $Ox$  qui a pour abscisse  $\phi_{-1/4}(u_n)$ .

3.4) On obtient par récurrence les termes de la suite  $(u_n)$  comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de  $u_n$  :

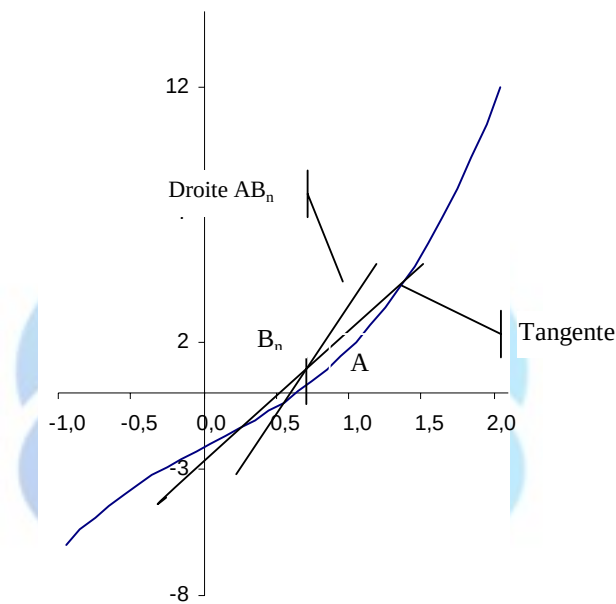


| $n$ | $u_n$     |
|-----|-----------|
| 0   | 0,6000000 |
| 1   | 0,5960000 |
| 2   | 0,5960728 |
| 3   | 0,5960716 |
| 4   | 0,5960716 |
| 5   | 0,5960716 |
| 6   | 0,5960716 |
| 7   | 0,5960716 |
| 8   | 0,5960716 |
| 9   | 0,5960716 |

On voit que  $u_n$  a 6 décimales exactes à partir du rang  $n_0 = 3$  et  $u_3 = 0,596\,071$  avec 6 décimales exactes.

4) On a  $P'(x)=3x^2+3>0 \forall x$ , d'où le tableau de variation de P :

|       |    |    |
|-------|----|----|
| x     | -1 | 2  |
| P'(x) | +  |    |
| P(x)  | -6 | 12 |



5.1)  $[P(1)-P(v_n)]/(1-v_n)$  n'est autre que la pente de la droite qui passe par les points A et  $B_n$  de la courbe représentative de P qui ont pour coordonnées :  $A[1, P(1)]$  et  $B_n[v_n, P(v_n)]$ . Cette droite a pour équation :

$$y - P(v_n) = (x - v_n)[P(1) - P(v_n)] / (1 - v_n).$$

Cette droite coupe l'axe Ox au point d'abscisse

$$x = v_n - P(v_n)(1 - v_n) / [P(1) - P(v_n)]$$

obtenu en faisant  $y=0$  dans l'équation de la droite. On passe donc de  $v_n$  à  $v_{n+1}$  de la façon suivante :

a) on trace le point  $B_n$  de la courbe représentative de P qui a pour coordonnées  $v_n$  et  $P(v_n)$  et la droite qui joint A et  $B_n$ .

b)  $v_{n+1}$  n'est autre que l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses Ox.

5.2) On obtient par récurrence les termes de la suite  $(v_n)$  comme dans le tableau suivant, en utilisant l'expression de  $v_n$  et de  $P(v_n)$  :

| $n$ | $v_n$     | $P(v_n)$  |
|-----|-----------|-----------|
| 0   | 0,6000000 | 0,0160000 |
| 1   | 0,5967742 | 0,0028574 |
| 2   | 0,5961973 | 0,0005109 |
| 3   | 0,5960941 | 0,0000914 |
| 4   | 0,5960757 | 0,0000163 |
| 5   | 0,5960724 | 0,0000029 |
| 6   | 0,5960718 | 0,0000005 |
| 7   | 0,5960717 | 0,0000001 |
| 8   | 0,5960716 | 0,0000000 |
| 9   | 0,5960716 | 0,0000000 |

5.3) On voit que  $v_n$  a 6 décimales exactes à partir du rang  $n_0 = 6$  et  $v_6 = 0,596\ 071$  avec 6 décimales exactes.

5.4) On constate que la suite  $v_n$  converge vers la racine de  $P$  compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite  $v$  qui vérifie forcément l'équation de récurrence définissant  $v_n$ , c'est à dire :

$$v = v - P(v)(1 - v) / [P(1) - P(v)] \Leftrightarrow P(v) = 0$$

et  $v$  n'est autre que la racine de  $P$  compris entre 0 et 1.

6.1)  $P'(w_n)$  est la pente de la droite tangente au point  $B_n[v_n, P(v_n)]$  de la courbe représentative de  $P$ . Cette droite tangente a pour équation :

$$y - P(w_n) = P'(w_n)(x - w_n)$$

et coupe l'axe  $Ox$  au point d'abscisse  $x = w_n - P(w_n)/P'(w_n)$  en faisant  $y=0$  dans l'équation de la droite. On passe donc de  $w_n$  à  $w_{n+1}$  de la façon suivante :

a) on trace le point  $B_n$  de la courbe représentative de  $P$  qui a pour coordonnées  $w_n$  et  $P(w_n)$  et la droite tangente à la courbe  $P$  au point  $B_n$ .

b)  $w_{n+1}$  n'est autre que l'intersection de cette droite tangente avec l'axe des abscisses  $Ox$ .

6.2) On obtient par récurrence les termes de la suite  $(w_n)$  comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de  $w_n$ , de  $P(w_n)$  et de  $P'(w_n)$  :

| n | $w_n$     | $P'(w_n)$  | $P(w_n)$  |
|---|-----------|------------|-----------|
| 0 | 0,6000000 | 4,08       | 0,0160000 |
| 1 | 0,5960784 | 4,06592849 | 0,0000276 |
| 2 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 3 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 4 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 5 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 6 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 7 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 8 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |
| 9 | 0,5960716 | 4,06590419 | 0,0000000 |

6.3) On voit que  $w_n$  a 6 décimales exactes à partir du rang  $n_0 = 2$  et  $w_2 = 0,596\ 071$  avec 6 décimales exactes.

6.4) On constate que la suite  $w_n$  converge vers la racine de  $P$  compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite  $\omega$  qui vérifie l'équation de récurrence définissant  $w_n$ , c'est à dire :

$$\omega = \omega - P(\omega)/P'(\omega).$$

et  $\omega$  n'est autre que la racine de  $P$  compris entre 0 et 1.

7) On constate que la suite  $(w_n)$  converge plus vite que la suite  $(u_n)$ , qui elle-même converge plus vite que la suite  $(v_n)$ , résultat classique en analyse numérique.



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN

AVRIL 1998

*CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES*

*VOIE B Option Mathématiques*

**CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**PROBLÈME N°1**

1. Pour tout  $V = (x, y)$ , on définit  $N_1(V) = |x| + |y|$ .

- Il est clair que pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $N_1(V) \geq 0$ .
- Soit  $V = (x, y)$ . Si  $N_1(V) = 0$ , alors  $x = y = 0$  d'où  $V = 0$ .
- Soit  $V = (x, y)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$N_1(\lambda V) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda|N_1(V).$$

- Soient  $V = (x, y)$  et  $V' = (x', y')$ . Alors :

$$N_1(V + V') = |x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = N_1(V) + N_1(V').$$

$N_1$  est donc une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. On vérifie de même pour la fonction définie pour  $V = (x, y)$  par  $N_\infty(V) = \sup(x, y)$ .

- $\forall V \in \mathbb{R}^2$ ,  $N_\infty(V) \geq 0$ .
- Il est clair que si  $N_\infty(V) = 0$ , alors  $V = 0$ .
- Soit  $V = (x, y)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$N_\infty(\lambda V) = \sup(|\lambda x|, |\lambda y|) = |\lambda| \sup(|x|, |y|) = |\lambda|N_\infty(V).$$

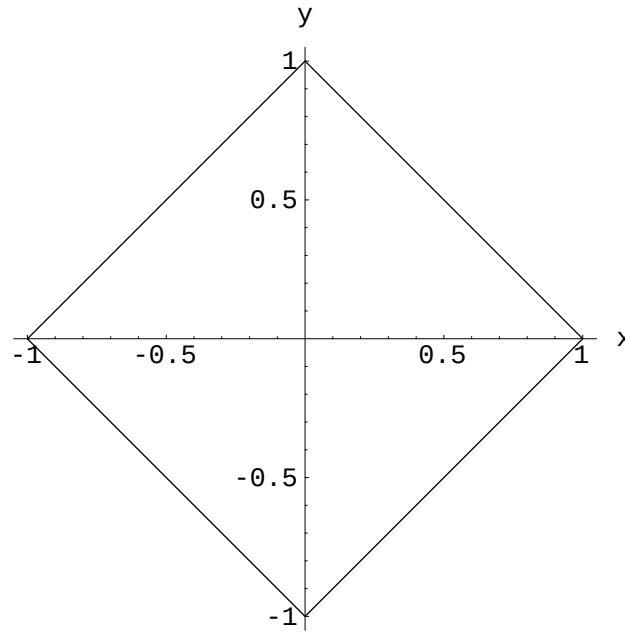


Figure 1: Sphère unité  $S_1$

- On rappelle la propriété  $\sup(a+b, a'+b') \leq \sup(a,b) + \sup(a',b')$ .

Soient  $V = (x, y)$  et  $V' = (x', y')$  :

$$\begin{aligned} N_\infty(V + V') &= \sup(|x+x'|, |y+y'|) \\ &\leq \sup(|x|+|x'|, |y|+|y'|) \\ &\leq \sup(|x|, |y|) + \sup(|x'|, |y'|) = N_\infty(V) + N_\infty(V'). \end{aligned}$$

3.  $\sup(|x|, |y|) \leq |x| + |y|$  et  $|x| + |y| \leq 2 \sup(|x|, |y|)$ . Donc :

$$N_\infty(V) \leq N_1(V) \leq 2N_\infty(V).$$

4. On prouve que  $A = 1$  et  $B = 2$  sont bien les nombres recherchés par des vecteurs réalisant les inégalités.

- Pour  $V = (1, 0)$  on a  $N_1(V) = 1$  et  $N_\infty(V) = 1$ .
- Pour  $V = (1, 1)$ , on a  $N_1(V) = 2$  et  $N_\infty(V) = 1$ .

5. (1) Pour  $V = (x, y)$ , on peut écrire :

$$V = (x, 0) + (0, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1).$$

L'inégalité triangulaire pour  $N$  permet d'écrire :

$$N(V) \leq |x|N(1, 0) + |y|N(0, 1).$$

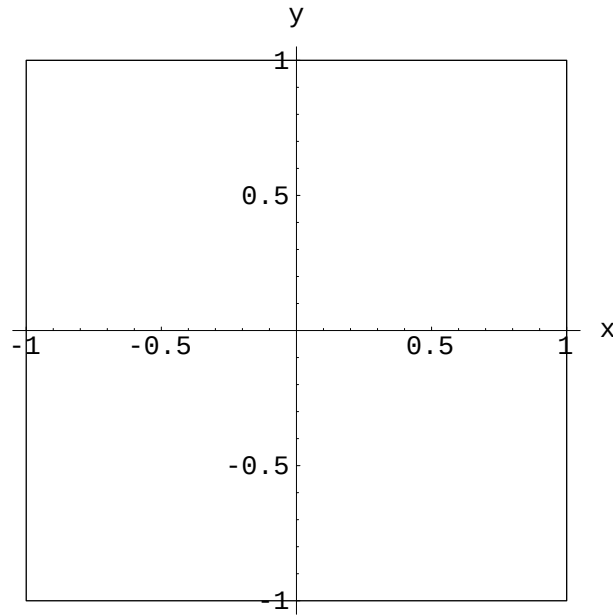


Figure 2: Sphère unité  $S_\infty$

Par conséquent :

$$N(V) \leq \sup(|x|, |y|) (N(1, 0) + N(0, 1)) = \beta N_\infty(V),$$

avec  $\beta = N(1, 0) + N(0, 1)$ .

- (2)  $N$  étant, on a, par définition,  $\forall V \in \mathbb{R}^2$ ,  $N(V) \geq 0$  et  $N(V) = 0$  si et seulement si  $V = 0$ . Donc  $\forall V \neq 0$ ,  $N(V) > 0$ . Comme  $0 \notin S_\infty$ , on en déduit :

$$\forall V \in S_\infty, \quad N(V) > 0.$$

**On admet qu'il existe au moins un vecteur  $V_0 \in S_\infty$  tel que pour tout  $V \in S_\infty$ ,  $N(V) \geq N(V_0)$ .** D'après ce qui précède,  $N(V_0) > 0$  donc en posant  $\gamma = N(V_0)$  on obtient le résultat escompté.

- (3) Pour  $V \neq 0$ ,  $\frac{V}{N_\infty(V)} \in S_\infty$ . Donc :

$$\gamma \leq N\left(\frac{V}{N_\infty(V)}\right) \leq \beta.$$

Par suite :

$$\forall V \neq 0, \quad \gamma N_\infty(V) \leq N(V) \leq \beta N_\infty(V).$$

Pour  $V = 0$  cette inégalité est évidemment réalisée. Finalement :

$$\forall V, \quad \alpha N_\infty(V) \leq N(V) \leq \beta N_\infty(V), \quad \text{avec } \alpha = \gamma.$$

6. D'après la question précédente,  $\exists \alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$  tels que pour tout  $V$  :

$$\begin{cases} \alpha N_{\infty}(V) \leq N(V) \leq \beta N_{\infty}(V) \\ \alpha' N_{\infty}(V) \leq N'(V) \leq \beta' N_{\infty}(V) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\frac{\alpha}{\beta'} N'(V) \leq N(V) \leq \frac{\beta}{\alpha'} N'(V),$$

ce qui est la propriété demandée avec  $a = \frac{\alpha}{\beta'}$  et  $b = \frac{\beta}{\alpha'}$ .

7. Pour  $V = (x, y)$ , on définit  $H(V) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$ .

- $\forall V \in \mathbb{R}^2, H(V) \geq 0$ .
- Si  $H(V) = 0$ , alors  $\forall t \in [0, 1], |x + ty| = 0$ . Pour  $t = 0$  on en déduit  $x = 0$ . Par suite pour  $t = 1$  on trouve  $y = 0$ . Donc  $V = 0$ .
- Soit  $V = (x, y)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $|\lambda x + t\lambda y| = |\lambda| |x + ty|$  donc  $H(\lambda V) = |\lambda| H(V)$ .
- Soient  $V = (x, y)$  et  $V' = (x', y')$ . L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

$$H(V + V') = \sup_{t \in [0,1]} |x + x' + t(y + y')| \leq \sup_{t \in [0,1]} (|x + ty| + |x' + ty'|).$$

En utilisant que le sup de la somme de deux fonctions est inférieur à la somme du sup des deux mêmes fonctions, on trouve :

$$H(V + V') \leq \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| + \sup_{t \in [0,1]} |x' + ty'| = H(V) + H(V').$$

8. Soit  $H'(V) = \int_0^1 |x + ty| dt$  pour  $V = (x, y)$ .

- Il est clair que pour tout  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $H'(V) \geq 0$ .
- Soit  $V$  tel que  $H'(V) = 0$ . La fonction  $t \mapsto |x + ty|$  étant continue et positive sur  $[0, 1]$ , son intégrale est nulle si et seulement si c'est la fonction nulle. Pour  $t = 0$ , on en déduit  $x = 0$ . Par suite on tire  $y = 0$  pour  $t = 1$  et donc  $V = 0$ .
- Enfin, il est clair par linéarité de l'intégrale et du fait que le module est une norme sur  $\mathbb{R}$  que pour tout vecteur  $V$  et tout réel  $\lambda$ ,  $H'(\lambda V) = |\lambda| H'(V)$  et pour  $V$  et  $V'$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $H'(V + V') \leq H'(V) + H'(V')$ .

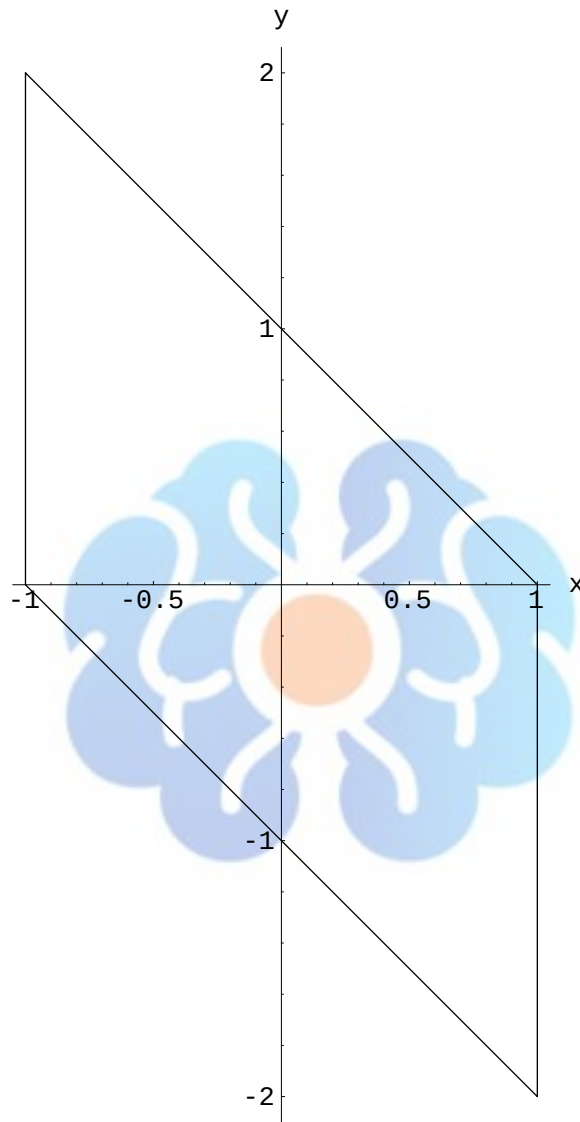


Figure 3: Sphère unité  $S$

9. Il est clair que :

$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V).$$

De plus, on se rend compte graphiquement que la sphère  $S'$  contient la sphère centrée en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  pour la norme  $H$ . Donc :

$$\forall V, \quad \frac{1}{2}H(V) \leq H'(V).$$

Finalement :

$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V) \leq 2H'(V).$$

$H(1, 0) = H'(1, 0) = 1$  donc le vecteur  $(1, 0)$  réalise l'égalité de gauche.

$H(0, 1) = 1$  et  $H'(0, 1) = \frac{1}{2}$  donc le vecteur  $(0, 1)$  réalise l'égalité de droite.

## PROBLÈME N°2

### Première partie

1. On a pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$  :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Comme l'intégration sur une intervalle croissant conserve le sens des inégalités, en intégrant sur  $[k, k+1]$ , on trouve :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En sommant l'inégalité de droite sur  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En calculant alors l'intégrale de gauche, on trouve :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En sommant maintenant l'inégalité de gauche sur  $k$  variant de 1 à  $n-1$ , on trouve :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_2^n \frac{dt}{t}.$$

Le calcul de l'intégrale permet alors d'écrire :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n.$$

En rajoutant 1 aux deux membres de l'inéquation ci-dessus, on tire donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

Finalement, on a bien l'inégalité demandée :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

3. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ , on déduit de l'inégalité précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Toujours à l'aide de la même inégalité, on trouve :

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1 + \ln n}{n}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln n}{n} = 0$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0.$$

## Deuxième partie

1. (a) L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^p |a_k| + \sum_{k=p+1}^n |a_k| \right).$$



Comme  $a_n \rightarrow 0$ , on peut affirmer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $p$  tel que pour tout  $n > p$ ,  $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Cette propriété injecté dans l'inégalité ci-dessus donne :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| + \frac{n-p}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| + \frac{\varepsilon}{2},$$

qui est le résultat demandé.

(b)  $p$  étant fixé, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| = 0.$$

On en déduit l'existence de  $N > p$  tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En remplaçant cette inégalité dans celle de la question précédente, on trouve que pour tout  $n \geq N$  :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Enfin,  $\varepsilon$  a été fixé arbitrairement. On a donc montré le résultat demandé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| = 0.$$

2. En posant  $a_n = b_n - b$  et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (b_k - b) \right| = 0,$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right| = b.$$

3. La suite  $\mu_n = (-1)^n$  est divergente car (par exemple)  $|\mu_{n+1} - \mu_n| = 2$  qui ne tend pas vers 0.

$\sum_{k=1}^n \mu_k$  vaut -1 si  $n$  est impair et 0 si  $n$  est pair. Dans tous les cas, on a donc :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il est clair alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \right| = 0.$$

La suite  $(\mu_k)$  est donc convergente en moyenne.

On a montré qu'une suite qui converge est convergente en moyenne mais que la réciproque est fausse!

4. (a) On a vu que la convergence entraîne la convergence en moyenne. Puisque

$$\delta_n \rightarrow c, \text{ on a également } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k \rightarrow c.$$

$$\text{Mais } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k = \frac{c_{n+1} - c_1}{n} \text{ donc } \frac{c_{n+1} - c_1}{n} \rightarrow c.$$

On en déduit alors que  $\frac{c_{n+1}}{n+1} \rightarrow c$ , car  $\frac{c_1}{n} \rightarrow 0$ . Cela équivaut naturellement à  $\frac{c_n}{n} \rightarrow c$ .

(b)  $u_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $u_{n+1} = \sin u_n$ .

i. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .  
 Or, il est connu que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \sin x \leq x.$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers  $l \in [0, 1]$ .

Comme la fonction sinus est continue et que 0 est la seule solution à l'équation  $\sin x = x$ , on en conclut que  $l = 0$ .

ii.  $u_n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . On peut donc utiliser les développements limités au voisinage de 0. Soit  $r < 0$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1}^r - u_n^r &= (\sin u_n)^r - u_n^r \\ &= \left( u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^r - u_n^r \\ &= u_n^r \left( \left( 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^r - 1 \right) \\ &= u_n^r \left( 1 - r \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1 \right) \\ &= -r \frac{u_n^{r+2}}{6} + o(u_n^{r+2}) \end{aligned}$$

Pour  $r = -2$ , on trouve donc :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \longrightarrow \frac{1}{3} \neq 0.$$

iii. En posant  $c_n = \frac{1}{u_n^2}$ , on déduit de la question 4.(a) que  $c_n \rightarrow \frac{1}{3}$ . Par suite

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n} \text{ et comme } u_n \geq 0, \text{ finalement } u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$



|

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**EXERCICE**

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt.$$

1. La fonction  $\frac{1}{x}$  n'est pas définie pour  $x = 0$  donc  $0 \notin D_f$ .

- Si  $x < 0$ , il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale car le dénominateur est défini, ne s'annule jamais et l'intervalle d'intégration reste borné.
- Si  $x > 0$ , 1 est dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{x}, x\right]$  (pas forcément ordonné). Or :

$$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} = \frac{t}{\sqrt[3]{(t-1)(t^2+t+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(t-1)}} \quad \text{quand } t \rightarrow 1,$$

dont l'intégrale converge en 1.

2. Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt.$$

Par les mêmes arguments que précédemment, il est clair que  $D_g = \mathbb{R}$ . Montrons que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et calculons sa dérivée.

- Si  $x < 1$ , il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale. La fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$  étant continue,  $g$  est donc dérivable en  $x$  et  $g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ .

- Si  $x > 1$ , on écrit  $g(x) = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt + \int_2^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt$ .

L'intervalle (non forcément ordonné)  $[2, x]$  ne contient pas 1. À nouveau, il est facile de conclure que  $g$  est dérivable et que  $g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ .

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

On écrit maintenant :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt + \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right).$$

En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}} + \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}}.$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2 \sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2}.$$

$f'$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et on a clairement :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0.$$

$f'$  est donc prolongeable par continuité en 1. On sait alors que  $f$  est dérivable en 1 et que  $f'(1) = 0$ .

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2 \sqrt[3]{x^3-1}} \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

3. Soit  $a = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt$ .

On a déjà vu que cette intégrale convergeait en 1.

En  $+\infty$ , on peut écrire :

$$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 = \left( 1 - \frac{1}{t^3} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \sim 1 + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) - 1 = \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

ce qui prouve également la convergence en  $+\infty$ .

Comme 1 et  $+\infty$  sont les seuls problèmes, l'intégrale  $a$  est convergente. On montre de manière analogue que  $b$  est convergente.

4. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt - \int_{\frac{1}{x}}^x dt + \frac{1}{x} \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Cela prouve donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = a,$$

ce qui montre que  $x + a$  est asymptote à  $f$  en  $+\infty$ .

On montre de même que  $x + b$  est asymptote à  $f$  en  $-\infty$ .

5.  $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}{x^2}$ . Il est donc clair que  $f'$  est positive.  $f$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}^*$ .

L'intégrale  $a$  est convergente et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt = -a$ .

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^x 1 \cdot dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

De la même façon :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

Enfin  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 0$ . On a donc un point d'inflexion en  $(1, 0)$  (car  $f$  est strictement croissante).

On a alors tous les éléments pour tracer le graphe de  $f$ .

### **PROBLÈME n°1**

1. Pour  $n \geq 1$ , on définit  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Pour tout  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ , donc  $x + \ln(1-x) \leq 0$ . On en conclut que  $(u_n)$  est décroissante.

On constate également classiquement que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}.$$

On en tire pour tout  $k \geq 1$  :

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t},$$

et par suite, en sommant sur  $k$  variant de 1 à  $n$  :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Cette dernière inégalité prouve que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

$(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 0. Il existe donc  $0 \leq \gamma \leq 1$  tel que :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

2. On définit la fonction  $f$  par :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}.$$

On peut écrire :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad f(t) = \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{t}{\ln(1-t)} \right).$$

En développant le  $\ln$  à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{t}{\ln(1-t)} = \frac{t}{-t - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{2}\right)} = -\frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)} \stackrel{!}{=} -1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a alors :

$$f(t) = \frac{1}{t} \left( \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{quand } t \rightarrow 0,$$

ce qui montre que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) = -\infty$ . Donc :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1.$$

Finalement, on peut prolonger  $f$  par continuité sur  $[0, 1]$  en  $\tilde{f}$  définie par :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad \tilde{f}(t) = f(t), \quad \tilde{f}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(1) = 1.$$



3. Soit  $I = \int_0^1 f(t)dt$ .

En posant  $t = 1 - e^{-u}$  qui est bien un changement de variable bijectif, on trouve :

$$I = \int_{+\infty}^0 f(1 - e^{-u})e^{-u}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \left(1 + \frac{e^{-u} - 1}{u}\right) du.$$

On a donc bien la forme recherchée avec  $h(u) = 1 + \frac{e^{-u} - 1}{u}$ .

(a) Soit  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} du$ .

En 0,  $\frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} \sim \beta - \alpha$ , il n'y a donc pas de problème.

En  $+\infty$ , la décroissance rapide de l'exponentielle vers 0 fournit la convergence de l'intégrale.

Il est clair que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} du = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \int_0^X \frac{e^{-\alpha u} - 1}{u} du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u} - 1}{u} du \right).$$

En faisant les changements de variable  $v = \alpha u$  dans la première intégrale et  $v = \beta u$  dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{e^{-\alpha u} - 1}{u} du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u} - 1}{u} du &= \int_0^{\alpha X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du - \int_0^{\beta X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du \\ &= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{\alpha X}^{\beta X} \frac{1}{u} du \\ &= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u} du + \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

La convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  permet d'affirmer que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u} du = 0.$$

On trouve finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} du = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

(b) On a montré précédemment que  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \left(1 + \frac{e^{-u} - 1}{u}\right) du$ .

Remarquons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = \frac{e^{-u}(1 - e^{-nu} + e^{-nu})}{1 - e^{-u}} = \sum_{k=1}^n e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}}.$$

En remplaçant cette expression dans l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} \right) \left( 1 + \frac{e^{-u} - 1}{u} \right) du \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-ku} du + \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)u} - e^{-ku}}{u} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{k+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du \\ &= u_n + \ln \frac{n}{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du. \end{aligned}$$

Soit maintenant la suite  $J_n$  définie, pour  $n > 0$ , par :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-nu} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du.$$

$h$  étant une fonction positive, on peut écrire, pour tout  $\delta > 0$  :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\delta} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}} h(u) du \\ &\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du \\ &\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} I. \end{aligned}$$

$I$  étant convergente en 0, on sait que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du = 0$ . Donc, pour  $\varepsilon_0 > 0$  donné, il existe  $\delta_0 > 0$  tel que :

$$\int_0^{\delta_0} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du < \varepsilon_0.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\delta_0} = 0$ , il existe  $N_0$  tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad e^{-n\delta_0} I < \varepsilon_0.$$

Donc il existe  $N_0$  tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad J_n < 2\varepsilon_0.$$

$\varepsilon_0 > 0$  ayant été fixé arbitrairement, on a en fait montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ .

Or on avait montré que :

$$I = u_n + \ln \frac{n}{n+1} + J_n.$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans cette expression, on trouve finalement que  $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$  qui est ce que l'on devait démontrer.

## PROBLÈME n°2

*Question préliminaire :*  $S_n(x)$  est impaire et périodique de période  $2\pi$ , on peut donc restreindre l'étude sur  $[0, \pi]$ .

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  :

$$\forall t \in ]0, x], \quad f_n(t) = \frac{\cos \frac{(n+1)t}{2} \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

(a) Il est clair que  $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = n$ .  $f_n$  est donc prolongeable par continuité en 0.

(b) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikt} &= \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} e^{it} \\ &= \frac{(e^{it} - e^{i(n+1)t})(1 - e^{-it})}{2(1 - \cos t)} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}} (e^{-in\frac{t}{2}} - e^{in\frac{t}{2}}) (e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \left(-2i \sin n\frac{t}{2}\right) \left(2i \sin \frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

En prenant alors la partie réelle de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\cos(n+1)\frac{t}{2} \sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

(c) Il est clair que  $\int_0^x \cos(kt)dt = \frac{\sin(kx)}{k}$ , d'où l'égalité recherchée.

(d) En faisant le changement de variable  $t = 2u$ , on trouve :

$$S_n(x) = 2 \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos((n+1)u) \sin(nu)}{\sin u} du.$$

Mais  $\cos((n+1)u) = \cos(nu)\cos u - \sin(nu)\sin u$ , ce qui remplacé dans l'intégrale donne :

$$S_n(x) = 2 \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos(nu) \sin(nu) \cos u}{\sin u} du - 2 \int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2(nu) du.$$

D'une part  $2 \cos(nu) \sin(nu) = \sin(2nu)$  et d'autre part,

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2(nu) du = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1 - \cos(2nu)}{2} du = \frac{x}{4} - \frac{\sin(nx)}{4n}.$$

On en déduit alors :

$$S_n(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu) \cos u}{\sin u} du - \frac{x}{2} + \frac{\sin(nx)}{2n}.$$

2. On pose  $I_n = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu) \cos u}{\sin u} du$  et on définit l'application  $g$  par :

$$\forall t \in \left]0, \frac{x}{2}\right], \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

(a) Développons la fonction  $g$  au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t} \left( \frac{t \cos t}{\sin t} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t} \left( \frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)} - 1 \right), \\ &= \frac{1}{t} \left( -\frac{t^2}{3} + o(t^2) \right) \\ &= -\frac{t}{3} + o(t) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0.  $g$  est donc bien prolongeable par continuité en 0.

(b) Immédiat.

3. On s'intéresse à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt)h(t)dt$ .

(a) Si pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ ,  $h(t) = \alpha$  où  $\alpha$  est une constante, on a :

$$\int_a^b \sin(nt)h(t)dt = \alpha \frac{\cos na - \cos nb}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

La généralisation à  $h$  en escalier se fait en découpant l'intégrale sur les intervalles où  $h$  est constante et en utilisant ce résultat sur chacun des intervalles.

(b) On suppose connu que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $\varphi$  en escalier sur  $[a, b]$  telle que :

$$\forall t \in [a, b], \quad |h(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\left| \int_a^b \sin(nt)h(t)dt - \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |\sin(nt)||h(t) - \varphi(t)|dt \leq \varepsilon(b-a).$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt = 0.$$

Donc il existe  $N$  tel que pour  $n > N$  on ait :

$$\left| \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

Donc pour  $n > N$ ,

$$\left| \int_a^b \sin(nt)h(t)dt \right| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$  étant arbitrairement petit, on a en fait montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt)h(t)dt = 0.$$

4. (a) Soit l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

En 0,  $\frac{\sin t}{t} \sim 1$ , il n'y a donc pas de problème.

Soit l'intégrale :

$$I_X = \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt.$$

On intègre par parties en dérivant  $\frac{1}{t}$  et en intégrant le sinus :

$$I_X = - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt - \frac{\cos X}{X} + \cos 1.$$

D'une part, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$  est clairement absolument convergente et d'autre part,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ .

On déduit de ces deux propriétés la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est donc convergente et on admet qu'elle vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

(b) On a vu que  $I_n = \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu)g(u)du + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du.$

D'après la question 3.(a) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu)g(u)du = 0.$$

En faisant le changement de variable  $t = 2nu$  dans la deuxième intégrale, on trouve :

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du = \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du.$$

D'après la question 4.(a), si  $x > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement,  $I_n(0) = 0$  et si  $x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{\pi}{2}$ .

(c) On a de manière évidente :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad S(x) = I(x) - \frac{x}{2}.$$

Donc :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{et} \quad S(0) = 0.$$

L'application  $S$  est donc discontinue en 0 et continue sur  $]0, \pi]$ .

Comme  $S$  est  $2\pi$ -périodique,  $S$  est discontinue en tout point de la forme  $2k\pi$  où  $k$  est un entier relatif et continue sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

(d) On trace aisément le graphe de  $S$ .

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1999**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**PROBLEME N° 1**

**Rappel** : le développement en série entière de  $\ln(1-x)$  est pour  $|x| < 1$  :  $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

- ❶ Démontrer que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k}$  est convergente et calculer sa somme

(on pourra songer à poser  $x = e^{-1}$  et utiliser le développement en série entière de  $\ln(1-x)$ )

- ❷ ① Soit  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < e; \ln x < y < 2 \ln x\}$  et  $A_1 = \iint_{D_1} dx dy$

Représenter  $D_1$  et montrer que son aire  $A_1 = 1$ .

- ② Soit  $D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < e^k; \ln x < y < 2 \ln x\}$  et  $A_k = \iint_{D_k} dx dy$

Calculer l'aire  $A_k$  de  $D_k$

- ③ Etudier la nature de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-1}$

**PROBLEME N° 2**

**Rappels :**

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + u^3 \mathcal{E}(u); \lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{E}(u) = 0$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^4 \mathcal{E}(u); \lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{E}(u) = 0$$

❶ ① En utilisant les développements limités de  $\cos u$  et  $\sin u$ , discuter selon les valeurs de  $a, b$  et  $c$  la nature de la série de terme général  $u_n = a \cos \frac{1}{n} + b \sin \frac{1}{n} + c \cos \frac{1}{n+1}$

② Sachant que  $a+c=0$  et  $b=0$ , montrez que la somme de cette série est  $S=a(\cos 1 - 1)$

❷ On pose  $u_n = (-1)^n \sin \left[ \frac{\sqrt{n+1}}{n} \right]$  pour  $n > 0$

Démontrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est semi-convergente

❸ On considère la série de terme général  $u_n = \frac{x^n}{2n+1}$

① Quel est son rayon de convergence  $R$  ?

② Etudier le cas  $|x| = R$

❹ On pose  $u_n = (-1)^n n^{-(1+\frac{1}{n^\alpha})}$  pour  $n > 0$  et  $\alpha > 0$

① Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$  et en déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  n'est pas absolument convergente

② Etudier les variations de la fonction de la variable réelle  $x > 0$  par  $f(x) = e^{-(1+\frac{1}{x^\alpha}) \ln x}$  et en déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est semi-convergente



**PROBLEME N° 3**
**Rappels:**

*Lemme de Riemann-Lebesgue : si  $g$  est une fonction continue sur*

$$[a ; b], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cdot \sin nt \cdot dt = 0$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

**On considère la fonction  $f : x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$**

- ❶ Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- ❷ Montrer que  $f$  est une fonction impaire
- ❸ Etudier les variations de  $f$
- ❹ Montrer que  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

(Pour cela ,on pourra songer à une intégration par parties de manière à pouvoir comparer  $I$  à une intégrale convergente)

On cherche à présent à calculer la limite de cette intégrale convergente.

Pour cela ,on considère les intégrales

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel.}$$

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$$

- ❺ Calculer  $J_{n+1} - J_n$  et en déduire la valeur de  $J_n$  pour tout  $n$  entier naturel.

- ❻ Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$  en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue

avec la fonction  $g : t \rightarrow \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ .

En déduire la limite de  $K_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$

⑦ Montrer enfin que  $I = \frac{\pi}{2}$ .

En déduire le comportement asymptotique de  $f$  en  $\mp \infty$

⑧ Tracer la courbe représentative de  $f$ .

#### PROBLEME N° 4

**Rappel :**

D'après les formules d'Euler :  $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

① Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :  $f(x) = e^{2j\pi x}$  est périodique de période 1 où  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels et  $\mathbb{C}$  l'ensemble des complexes.

② Calculer le module et l'argument du nombre complexe :  $z_1 = a + ae^{4j\pi x}$  ;  $a \in \mathbb{R}^*$  ;  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $z_1 = 0$  ?

③ Calculer le module et l'argument du nombre complexe :  $z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2}$

④ On considère le nombre complexe  $z$  défini par :

$$z = a_0 + a_1 e^{2j\pi x} + a_2 e^{4j\pi x} + a_3 e^{6j\pi x} + \dots + a_k e^{2jk\pi x} + \dots + a_{n-1} e^{2(n-1)j\pi x}$$

Les  $n$  coefficients réels  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sont tels que :  
 $a_0 = a_{n-1}$  ;  $a_1 = a_{n-2}$  ; ... ;  $a_k = a_{n-k-1}$

quelque soit le nombre entier  $k$  compris entre 0 et  $\frac{n}{2}$ .

Par ailleurs, on supposera que  $n$  est un nombre pair.

Démontrer que l'argument de  $z$  est une fonction affine de  $x$ .

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR -SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1999**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIES A et B***

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

**SUJET N° 1**

Commentez ces phrases de Simone WEIL tirées de «L'enracinement».  
«Cela n'a pas de sens de dire que les hommes ont, d'une part des droits, d'autre part des devoirs... Un homme qui serait seul dans l'univers n'aurait aucun droit mais il aurait des obligations»

**SUJET N° 2**

Le droit doit-il se contenter de suivre l'évolution des moeurs ?

**SUJET N° 3**

Commentez ces phrases d'Ernest RENAN dans «qu'est-ce qu'une nation ?». «Une grande agrégation d'hommes, saine d'esprit et chaude de coeur, crée une conscience morale et s'appelle une nation».

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1999**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 3 HEURES**

L'épreuve est composée de deux exercices et de d'un problème, tous indépendants.

« Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe ».

**EXERCICE n° 1**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur le corps des réels (noté  $\mathbb{R}$ ) de dimension finie  $n$  et  $H$  un sous espace vectoriel de  $E$ .

❶ Soit  $\varphi$  une application linéaire non identiquement nulle de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  appelée aussi **forme linéaire**.

On suppose que  $H = \text{Ker}\varphi$  où  $\text{Ker}\varphi$  désigne le noyau de  $\varphi$ .

Montrer qu'il existe  $a \in E$  non nul tel que  $E = H \oplus \text{Vect}(a)$  où  $\oplus$  est le symbole de la somme directe et  $\text{Vect}(a)$  désigne le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur  $a$ .

En déduire que la dimension de  $H$  vaut  $n-1$  c'est-à-dire que  $H$  est un **hyperplan** de  $E$ .

② Soit  $L$  un sous espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n-1$ . Montrer qu'il existe une forme linéaire dont  $L$  est le noyau.

On pourra appliquer le théorème de la base incomplète et considérer la base duale associée.

### EXERCICE n° 2

On désigne par  $GL(n, \mathbb{C})$  l'ensemble des matrices inversibles d'ordre  $n$  à coefficients complexes.

Soit  $G$  un sous-groupe multiplicatif, borné et commutatif de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Montrer qu'il existe  $P$  appartenant à  $GL(n, \mathbb{C})$  telle que pour tout  $A$  appartenant à  $G$ ,  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

### PROBLEME

#### Partie 1

Soit le déterminant  $V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$  où  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

① Calculer  $V_2(a_1, a_2)$  et  $V_3(a_1, a_2, a_3)$ .

② Que vaut  $V_n(a_1, \dots, a_n)$  si il existe un couple  $(i, j)$  tel que  $a_i = a_j$  et  $i \neq j$  ?

On supposera dans toute la suite que  $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$

③ On se propose de montrer par récurrence que  $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k < l} (a_l - a_k)$

① Montrer que la propriété est vraie au rang 2.

② On suppose la propriété vraie au rang  $n$ .

Soit le polynôme  $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}$ .

Quelles sont ses racines ? En déduire son degré.

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, en déduire le coefficient du terme de plus haut degré de  $P(x)$ .

Conclure.

## Partie 2

Soit le déterminant  $\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \dots & \dots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & \dots & \dots & \dots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \dots & \dots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$

où  $P_k$  est un polynôme de degré  $k$ .

① Calculer  $\Delta_n$  lorsque pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ , on a  $P_k(x) = x^k$ .

② On se replace dans le cas général où  $P_k$  est un polynôme de degré  $k$  à coefficients réels.

① Montrer que  $B = (P_0, \dots, P_{n-1}, x^{n-1})$  est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $(n-1)$ .

② En déduire une écriture de  $P_{n-1}$  dans cette base.

③ Remplacer la dernière colonne du déterminant par l'expression de  $P_{n-1}$  dans la base  $B$ .

Montrer alors que  $\Delta_n$  peut se mettre sous la forme :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où  $\lambda_{n-1}$  est un coefficient réel que l'on définira.

④ Montrer que :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_{n-2} x_1^{n-2} & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-2} x_2^{n-2} & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \cdots & \lambda_{n-2} x_n^{n-2} & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où  $\lambda_{n-1}$  et  $\lambda_{n-2}$  sont des coefficients réels que l'on définira.

En déduire que  $\Delta_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} V_n(x_1, \dots, x_n)$  où  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  sont des coefficients réels que l'on définira.

③ Application :

$$\text{Calculer } C_n = \begin{vmatrix} C_0^{x_1} & C_1^{x_1} & \cdots & \cdots & C_{n-1}^{x_1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C_0^{x_n} & C_1^{x_n} & \cdots & \cdots & C_{n-1}^{x_n} \end{vmatrix} \quad \text{avec } C_k^x = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

### Partie 3

Soit  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

On se propose de calculer  $\Omega_n = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin(2\theta_1) & \cdots & \sin(n\theta_1) \\ \sin \theta_2 & \sin(2\theta_2) & \cdots & \sin(n\theta_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin(2\theta_n) & \cdots & \sin(n\theta_n) \end{vmatrix}$

❶ Montrer que pour tout  $k$ , entier naturel, il existe un polynôme  $T_k$  de degré  $k$  tel que  $\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$ . Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?

❷ En dérivant les deux termes de l'égalité  $\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$ , donner une expression de  $\sin(k\theta)$  en fonction de  $\sin \theta$  et  $T'_k(\cos \theta)$  ( $T'_k$  désigne la dérivée du polynôme  $T_k$ ).

❸ En déduire la valeur de  $\Omega_n$ .



1



**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1999**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**EXERCICE n° 1**

Chaque jour, une machine outil produit de 0 à 10 pièces défectueuses. On suppose que les probabilités d'avoir 0, 1, ... ou 10 pièces défectueuses sont égales de sorte que si le nombre de pièces défectueuses est  $X$ , cette variable aléatoire suit la loi de probabilité suivante :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 10\} \quad \text{Prob}(X = k) = \frac{1}{11}$$

❶ Calculer l'espérance mathématique  $EX$  et la variance  $VX$  de cette variable aléatoire.

❷  $X_1, \dots, X_n$  représentent le nombre de pièces défectueuses  $n$  jours consécutifs. On suppose que les  $X_i$  ont indépendantes. On note  $Z_n$  la variable aléatoire définie par :

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Calculer l'espérance mathématique  $EZ_n$  et la variance  $VZ_n$  de cette variable aléatoire. Que représente cette quantité ?

③ Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer la probabilité suivante :

$$P_n = \text{Prob}\left(|Z_n - EZ_n| > \frac{1}{2}\right)$$

④ Déterminer  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$  on ait certainement  $P_n < 0,01$ . Que représente cette quantité ?

⑤ Soit  $W$  la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses produites en deux jours. Quel est l'ensemble des valeurs que  $W$  est susceptible de prendre ? Quelle est sa loi de probabilité ? Calculer son espérance  $EW$  et tracer sa fonction de répartition.

## EXERCICE n° 2

Un marchand va de ville en ville, achetant des marchandises, les revendant à l'étape suivante. Cette revente se fait avec bénéfice, on suppose dans un premier temps que le prix de vente est le double du prix d'achat. A chaque étape, il doit déboursier 12 F de frais.

① Fabriquer un exemple numérique montrant le déroulement du processus, en commençant de la manière suivante :

|                                |      |               |
|--------------------------------|------|---------------|
| 1. avoir initial pour l'achat  | 15 F | (Opération 1) |
| 2. doublement lors de la vente | 30 F |               |
| 3. après règlement des frais   | 18 F | (Opération 2) |
| 4. étape suivante              | 36 F |               |

Poursuivre le calcul et faire un graphique sur les dix premières opérations.

② Le marchand part de la ville A et va à la ville B où il réussit à doubler son capital ; il paie ensuite ses frais (12 F). Puis il va à la ville C où il réussit à doubler son capital ; il paie de nouveau les frais et revient à la ville A où il recommence l'opération (vente, paiement des frais). Il constate alors que sa bourse est vide. Quel était son capital initial ?

### ③ Généralisation

On note  $x_0$  l'avoir initial et  $x_t$  le capital à l'étape  $t$ , on suppose que chaque vente multiplie le capital par  $q$ , les frais sont constants égaux à  $c$ . ( $q > 1$ ,  $c > 0$ )

① Calculer  $x_t$  en fonction de  $x_{t-1}$ .

② Calculer  $x_t$  en fonction de  $x_0$ ,  $q$ ,  $c$  et  $t$ .

③ Montrer que  $x_t$  augmente ou diminue avec le temps selon la valeur de  $x_0$ .

④ Dans le cas où  $x_t$  diminue, calculer la date  $t$  où  $x_t$  s'annule.

⑤ Prendre, comme dans l'exemple,  $c=12$  et  $q=2$  et représenter en fonction de  $x_0$  le nombre maximum d'étapes que peut parcourir le marchand sans s'endetter.



|

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 1999**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A**

*et*

**B OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard «La légende de demain», paru aux éditions Flammarion en octobre 1997. Il devra être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

\*\*\*

La planète bleue, les satellites nous la montrent, magnifique dans l'espace. Nous sommes en droit de l'admirer avec la satisfaction d'un propriétaire, elle est à nous. C'est notre propriété de famille. Personne ne viendra nous la disputer. Si l'on en croit la Bible, c'est le créateur qui nous l'a offerte. Elle est la Terre promise, promise aux hommes.

Longtemps nous l'avons crue immense, quasi illimitée, inépuisable, apte à nous procurer tout ce que nous exigeons d'elle. Soudain, nous venons de comprendre qu'elle est petite. Certes, les scientifiques l'avaient mesurée, pesée, analysée ; ils avaient tout décrit d'elle, mais ils ne nous avaient pas fait comprendre l'essentiel : l'espace où restera confiné le destin de l'homme est limité. *Dans Regards sur le monde actuel*, Paul Valéry, dès 1945, nous a mis face à cette évidence : «Le temps du monte fini commence ». Oui, notre domaine est marqué par des limites infranchissables, nous ne le quitterons pas - du moins pas «demain».

Sans doute, parmi les milliards d'étoiles, nombreuses sont celles qui sont entourées de planètes ; et parmi ces planètes, nombreuses sont celles qui offrent un milieu semblable au nôtre. Pourquoi ne pas aller s'installer sur un de ses astres de rechange lorsque la Terre sera épuisée ? L'obstacle apparemment incontournable est la structure de l'espace-temps. Qui rend impossible tout déplacement plus rapide que la lumière. Or, il faut quatre années à cette lumière pour venir de la plus proche étoile, et cent mille années pour venir des étoiles les plus éloignées de la Voie Lactée. Même si l'éventuelle «Terre bis» n'était située qu'à quelques milliers d'année lumière, les reconnaissances préliminaires puis le transport de l'humanité poseraient des problèmes dont on imagine mal la solution. L'installation de l'humanité ailleurs que sur la Terre fait partie des utopies non réalisables, dans notre exploration des demain possibles, il est raisonnable d'admettre que nous sommes, sinon prisonniers, du moins pour longtemps assignés à résidence. Nos ancêtres, pour qui la planète abondait en *Terra Incognita*, pouvaient rêver d'un ailleurs quand leur environnement leur semblait déplaisant ; les hommes d'aujourd'hui n'ont plus d'ailleurs.

Ce constat n'est pas triste ; il définit les «conditions aux limites», comme disent les physiciens, permettent de rendre les projets d'avenir compatibles avec les contraintes imposées par la nature. Que pouvons-nous demander à la Terre ? Il nous fait connaître la réponse non seulement pour aujourd'hui et le futur proche, mais pour les générations plus lointaines. La solidarité entre les hommes ne doit pas s'arrêter à nos contemporains, elle doit s'étendre à tous nos descendants (...)

Face aux perspectives démographiques - huit milliards d'hommes dans vingt ans, sans doute neuf ou dix milliards avant la fin de XXI<sup>e</sup> siècle -, la question immédiate est la suivante : la Terre pourra-t-elle fournir aux hommes la nourriture dont ils ont besoin ? Par bonheur, la réponse est positive, mais au prix de grands changements dans nos habitudes.

La superficie consacrée aux productions alimentaires est de l'ordre de 1,5 milliards d'hectares, qui produisent en moyenne deux tonnes qu'équivalentes céréales par hectare. Malgré l'avancée de la désertification dans certaines régions comme le Sahel, cette surface pourra être maintenue sans trop de difficultés et le rendement moyen pourra être accru par l'emploi de variétés plus productives, d'engrais et de méthodes de conservation des sols ; le maintien de l'alimentation des hommes au niveau d'aujourd'hui ne posera donc guère de problème, même si la population dépasse dix milliards d'individus. Mais ce niveau moyen n'a guère de signification, car l'accès à la nourriture est très différent suivant les régions, et bien inférieur au souhaitable dans de nombreux pays.

La consommation totale d'énergie végétale, aussi bien pour les semences, l'alimentation du bétail que pour la nourriture des humains, représente l'équivalent de 6 000 calories par jour et par personne en moyenne ; les écarts selon les Etats sont considérables : 3 000 calories pour les plus démunis, 15 000 pour les plus gaspilleurs. L'amélioration nécessaire des ressources alimentaires des premiers porterait cette moyenne à environ 9 000 calories. Autrement dit, les dix milliards d'humains de demain consommeraient autant que si nous étions quinze milliards aujourd'hui. L'évolution des rendements ne permettra pas - ou difficilement - de faire face à de tels besoins ; des changements des habitudes alimentaires s'imposeront donc.

Manger de la viande, boire du lait, c'est indirectement consommer les céréales absorbées par les animaux d'élevage. Le poids total de ces derniers étant supérieur à celui de l'ensemble des humains, il sont donc leurs véritables concurrents dans l'accès à la nourriture produites par la Terre. Or, un niveau de vie meilleur s'accompagne d'un recours accru aux nourritures les plus coûteuses en équivalent céréale. La véritable solution des problèmes que posera l'alimentation réside donc moins dans une amélioration des rendements agricoles - souvent obtenus au détriment de la conservation des sols ou d'un gaspillage inconsidéré des ressources en eau - que dans une orientation nouvelle des normes de l'alimentation. Les Occidentaux devront s'habituer à consommer moins de viande - leur santé y trouvera son compte.

La satisfaction des besoins en nourriture se heurtera aussi à un double obstacle : l'utilisation croissante des surfaces arables pour des productions non vivrières. Mises devant l'obligation de rembourser leurs dettes envers les pays développés, les nations du tiers monde s'efforcent de produire des biens exportables au détriment parfois des ressources nécessaires à leur survie. Ainsi, au début des années 80, les pays du Sahel ont produit des quantités record de coton destinées à l'exportation alors que la famine sévissait, ce qui les a contraint à importer une quantité accrue de céréales. Le caractère fondamentalement immoral de ce mécanisme est manifeste si l'on songe que les cours mondiaux du coton s'effondraient à mesure que la production en augmentait, tandis que ceux des céréales montaient à mesure que la demande s'accroissait. Bel exemple d'un mécanisme libéral qui préserve en effet fort bien la liberté du renard dans le poulailler.

En fait, la nourriture de l'humanité pose moins un problème technique qu'un problème économique, donc politique. De même est politique la question posée par les ressources en eau. Lors de la campagne aux élections présidentielles de 1974, l'agronome René Dumont s'est rendu célèbre en montrant à la télévision un verre d'eau et en ajoutant : « Cette eau sera dans vingt ans une denrée rare ». Bien peu l'ont pris au sérieux ? Mais aujourd'hui, selon lui, plus de deux milliards d'hommes ne disposent pas d'eau potable, et ce chiffre va toujours croissant. La nature, pourtant, n'est guère avare en ce domaine, mais l'eau qu'elle nous fournit à profusion est dilapidée, gaspillée, polluée sans égard pour sa prochaine rareté. Sa répartition sur la planète est modifiée par l'effet de serre, qui provoque sécheresse ici et inondations là ; or, cet effet est la conséquence des activités humaines, notamment l'utilisation inconsidérée des combustibles fossiles, en premier lieu le pétrole.



(...) Le constat que la Terre pourra nourrir les hommes, sans trop de difficultés, même si leur effectif atteint dix milliards, a conduit à mettre en doute la nécessité d'une limitation de la fécondité. En fait, la vraie question n'est pas «Combien la Terre peut-elle nourrir d'hommes ?» mais «Combien peut-elle supporter d'hommes ?». Ce qui implique de répondre d'abord à la question : «Quelle sorte d'hommes ?». Si ce sont des paysans traditionnels qui ne demandent à la Terre que leur nourriture, le maximum, dans les conditions actuelles, est supérieur à dix milliards. Si ce sont des occidentaux moyens aux exigences multiples en richesses non renouvelables, la réponse est fort différente. Sans doute un milliard serait-il déjà beaucoup trop.

Il est raisonnable de consommer le produit d'une récolte ; le prochain été en apportera une autre ; La Terre, régulièrement, renouvelle ce cadeau. Mais il est des cadeaux qu'elle ne renouvellera pas. Ainsi a-t-elle constitué, au cours de centaines de millions d'années, un trésor sous forme de pétrole, résultat d'une lente décomposition des cadavres d'une multitude de bactéries. Il nous est si précieux que nous avons cherché partout les endroits où il peut être enfoui ; nous en avons tant découvert qu'il reste aujourd'hui 150 milliards de tonnes de réserve prouvée. Nous sommes conscients que de nouvelles découvertes permettront d'accroître ce trésor, mais elles exigeront des moyens toujours plus coûteux. Le maximum réellement accessible ne dépasse sans doute pas 450 milliards de tonnes. Or, chaque année nous en brûlons 4,5 milliards de tonnes.

A ce rythme, si optimiste soit-on quant aux découvertes à venir, ce trésor sera presque dilapidé avant la fin du prochain siècle. Et peut-être avant, car les pays dont l'économie est en difficulté - c'est-à-dire presque tous - cherchent l'issue de leurs problèmes dans la «croissance», ce qui entraîne une augmentation de la consommation de pétrole, rapprochant l'échéance finale.

Un problème semblable se pose pour le gaz naturel et le charbon, de façon toutefois moins importante car les réserves sont immenses. Il se pose aussi pour les richesses renouvelables dont le rythme de production est plus lent que le rythme de consommation, par exemple les forêts ou les nappes phréatiques profondes. Dans les déserts des Etats-Unis, d'Arabie ou de Libye, des oasis ont été créées en pompant dans ces nappes ; mais celles-ci seront épuisées dans quelques générations. Nos petits-enfants regarderont avec une certaine rancœur ces lieux que leurs ancêtres ont rendus provisoirement verdoyants pour leur profit ; ils les contempleront avec la même tristesse que nous quand nous regardons l'emplacement de la mer d'Aral aujourd'hui disparue.

Si nous poursuivons dans l'absurde direction que nous avons baptisé «croissance», dans quelques centaines d'années, c'est-à-dire très bientôt, nous vivrons dans un jardin qui n'aura plus rien d'édénique tant nous l'aurons ravagé. Est-ce digne d'une espèce supposée raisonnable ?

Pour préparer demain, il ne suffit pas de constater le résultat des erreurs commises, il faut essayer d'en préciser les causes. Pour le gaspillage des ressources, c'est le respect abusif de la propriété qui a mené dans une impasse. Tant que la Terre était considérée comme illimitée, il était normal, pour celui qui avait défriché et ensemencé un terrain, de s'approprier ses récoltes, puis le terrain lui-même, enfin les richesses qu'il recelait. Les autres hommes pouvaient trouver un équivalent ailleurs ; ils n'étaient pas spoliés. Aujourd'hui que nous ne disposons plus d'un ailleurs, cette attitude est devenue déraisonnable. Toute appropriation, qu'elle soit individuelle ou collective, d'une richesse limitée offerte aux hommes par la nature est nécessairement un vol. La seule collectivité qui puisse à bon droit s'en déclarer propriétaire est l'ensemble de l'humanité.

A la question «A qui appartient tel gisement de pétrole ?» notre société a répondu, sans réfléchir, comme s'il s'agissait d'un champ labouré ou d'un pâturage figurant au patrimoine d'un paysan. L'émir du Koweït ou celui du Brunei se sont ainsi trouvés à la tête d'une fortune colossale, donc d'un pouvoir exorbitant, sans avoir eu d'autre peine que de naître au-dessus de quelques milliards de barils. La seule réponse sensée est : «Chaque gisement appartient à tous les hommes, non seulement à ceux d'aujourd'hui, mais à ceux de toutes les générations à venir». Autrement dit, le pétrole, comme toutes les richesses non renouvelables ou trop lentement renouvelables offertes par la planète, doit être considéré comme patrimoine commun de l'humanité.

Ce concept a été forgé par l'Unesco à propos des richesses culturelles offertes par les hommes aux hommes. Le temple de Borobudur, la cathédrale d'Amiens, la ville de Venise n'appartiennent plus à des églises ou à des Etats, qui en ont été, avec leur accord, dépossédés. Cette renonciation à l'appropriation a été étendue à tous les objets extérieurs à la planète : ni la lune ni un astéroïde ne peut être accaparé par une nation qui y planterait son drapeau. De même, le danger d'une détérioration du continent antarctique a conduit les vingt-six pays qui s'y étaient implantés à renoncer, en 1957 puis en 1991, à différer leurs revendications territoriales et à n'y exercer que des activités pacifiques. L'Antarctique commence à être considéré comme un patrimoine commun.

Ce ne sont là que les premiers pas dans la seule direction compatible avec les limites de la planète. Ils sont encourageants, mais n'ont été accomplis qu'en raison de leur bien faible impact économique. Les pas suivants seront autrement difficiles, lorsqu'il sera proposé, par exemple, de déclarer le pétrole patrimoine commun de l'humanité. Pourtant, l'urgence est grande.



Pour préparer un demain viable tout en sauvegardant après-demain, trois objectifs doivent être simultanément poursuivis : ne pas épuiser les ressources énergétiques de la planète ; produire de l'énergie sans détériorer le climat ; réduire les écarts entre les nations dans l'accès à l'énergie.

Il est clair que le «laisser faire» cher aux néolibéraux ne permettra d'atteindre aucun de ces objectifs. Il ne peut aboutir qu'à une concurrence exacerbée et à une fuite en avant accélérée qui précipitera la catastrophe. Le scénario d'un tel «laisser faire» a été étudié par le Conseil mondial de l'énergie. Il a fait l'hypothèse que les pays les plus riches (l'Amérique du Nord et l'Europe) poursuivaient leur croissance à un rythme un peu inférieur à 2% par an et que le rapport des niveaux de vie entre eux et les plus pauvres (l'Inde et l'Afrique), ne seraient plus, en 2060 que de 5 à 1 contre 20 à 1 aujourd'hui. L'égalité serait donc encore loin d'être réalisée. Pour nourrir cette croissance et parvenir à ce début de rattrapage, il aurait fallu épuiser les réserves de pétrole, réduire de trois-quarts celles du gaz et doubler la teneur en CO<sub>2</sub> de l'atmosphère, ce qui aurait eu de graves effets sur le climat. Nous serions loin d'une gestion «en bon père de famille» de notre propriété.

Une autre attitude s'impose ; un autre scénario est possible. Il tire les conséquences d'une évidence : la source d'énergie la plus importante réside dans l'économie d'énergie. Une politique volontariste qui s'efforcerait d'exploiter au mieux cette source pourrait aboutir à une humanité de l'an 2060 bien différente de celle du «laisser faire». Le scénario alternatif admet que la consommation d'énergie des Américains, loin de progresser, serait divisée par 3, celle des Européens par 2, tandis que celle des Africains et des Asiatiques serait multipliée par plus de 2 ; les écarts seraient donc véritablement réduits. La conséquence serait une augmentation de seulement 20% de la teneur en CO<sub>2</sub>, ce qui n'irait pas sans inconvénients, mais resterait acceptable. L'équilibre de notre planète serait durablement préservé.

Une telle évolution n'est nullement utopique. Elle suppose des mesures législatives et fiscales ayant pour effet de restreindre les transports routiers, d'améliorer l'isolation de l'habitat, d'accroître le recours aux énergies renouvelables, d'orienter les procédés de fabrication vers ceux qui sont les moins coûteux en énergie. Ce sont là des réponses technologiques. Leur apport sera précieux, mais il sera, à coup sûr, insuffisant; c'est une nouvelle finalité donnée à nos sociétés qui s'impose.

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*

\* \*

**PROBLEME n° 1**

❶ On peut utiliser le critère de convergence de Cauchy :  $\left(\frac{1}{ke^k}\right)^{\frac{1}{k}} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$

ce qui prouve la convergence de la série

Par ailleurs ,en utilisant le développement en série de  $\ln(1-x)$ ,il vient aisément que

$$\sum_1^{+\infty} \frac{(e^{-1})^k}{k} = -\ln(1-e^{-1}) = 1 - \ln(e-1)$$

❷ ① On a :  $A_1 = \int_1^e \left( \int_{\ln x}^{2 \ln x} 1 dy \right) dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$  C.Q.F.D.

Voir la représentation du domaine  $D_1$  ci-dessous.

$$② A_k = \int_1^{e^k} \left( \int_{\ln x}^{2 \ln x} 1 dy \right) dx = [x \ln x - x]_1^{e^k} = 1 + e^k (k-1)$$

③  $A_k^{-1} \approx \frac{1}{ke^k}$  d'où la convergence de la série d'après 1-

**PROBLEME n° 2**

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{1} \quad u_n = a \left( 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) + c \left( 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= a + c + \frac{b}{n} + \left( -\frac{a}{2n^2} - \frac{c}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

→ Si  $a+c$  est différent de 0, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge

→ Si  $a+c=0$ ,  $u_n \approx \frac{b}{n}$  et la série diverge si  $b$  différent de 0

→ Si  $a+c=0$  et  $b=0$  la série est convergente car  $u_n \approx \frac{K}{n^2}$

$$\textcircled{2} \quad S_n = \sum_1^n u_p = a \left( \left( \cos 1 - \cos \frac{1}{2} \right) + \dots + \left( \cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right) \right) = a \left( \cos 1 - \cos \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a(\cos 1 - 1)$$

C.Q.F.D.

$$\textcircled{2} \quad |u_n| = \sin \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \text{ décroît quand } n \text{ augmente puisque } \sin x \text{ est croissante.}$$

$|u_n| \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini  
et  $\sum$  une série alternée.

Il s'agit donc d'une série convergente mais semi-convergente car  $|u_n| \approx \frac{1}{n^{1/2}}$  qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

$\textcircled{3} \quad \textcircled{1}$  Utilisons le théorème de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \text{ et donc } R=1$$

② si  $x=1$   $u_n = \frac{1}{2n+1}$  et la série est divergente car équivalente à une série harmonique

si  $x=-1$   $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$  est le terme général d'une série alternée dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant et la série est alors convergente.

④ ①  $n^{1/n^\alpha} = e^{\frac{1}{n^\alpha} \ln n}$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ln n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha} \ln n} = 1$

Par conséquent,  $|u_n| \approx \frac{1}{n}$  qui est le terme général de la série harmonique divergente

②  $f(x) = e^{-\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right) \ln x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} (1 - \alpha \ln x)\right) < 0$  ce qui prouve la décroissance de la fonction donc aussi celle de la suite vers 0 et la série alternée est donc convergente.

### PROBLEME n° 3

① La fonction  $\varphi : t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$  définie si  $t$  différent de 0 est prolongeable par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 1$ . Donc l'intégrale est définie en 0. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  est la primitive de  $\varphi$  qui s'annule pour 0.

②  $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t} dt$ . Le changement de variable  $u = -t$  nous

donne :  $f(-x) = \int_0^x \frac{\sin(-u)}{(-u)} (-du) = -\int_0^x \frac{\sin u}{u} du = -f(x)$  donc  $f$  est une fonction impaire et on l'étudiera sur  $[0; +\infty[$

③  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ .  $f'$  a le même signe que  $\sin x$  pour  $x$  positif  
c'est-à-dire :

$$f'(x) = 0; x = k\pi$$

$$f'(x) > 0; x \in ]2k\pi; (2k+1)\pi[$$

$$f'(x) < 0; x \in [(2k+1)\pi; (2k+2)\pi[$$

On en déduit que les valeurs  $k\pi$  correspondent aux extrêmes de  $f$

**Tableau de variations :**

| X       | 0   | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi \dots$ |
|---------|-----|-------|--------|--------------|
| $F'(x)$ | 1 + | 0 -   | 0 +    | 0 -          |
| $f(x)$  |     |       |        |              |

④ Pour montrer la convergence de  $I$ , on intègre par parties l'intégrale  
 $I_a = \int_1^a \frac{\sin t}{t} dt$  en posant  $u = \frac{1}{t}$ ;  $dv = \sin t \cdot dt \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2} dt$ ;  $v = -\cos t$

$$\text{On obtient alors } I_a = \left[ \frac{\cos t}{-t} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\text{Or, } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ qui est une intégrale convergente.}$$

$$\text{Comme, de plus, } \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_1^a = \cos 1 - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\cos a}{a} = \cos 1 \text{ alors } I \text{ est convergente.}$$

⑤ Pour calculer  $J_{n+1} - J_n$ , on utilise la relation  $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2 \sin t \cos(2n+2)t$

$$\text{Alors : } J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)t \cdot dt = 0$$

**On en déduit que**  $J_{n+1} = J_n = \dots = J_0 = \frac{\pi}{2}$

Rappelons le lemme de Riemann-Lebesgue : si  $g$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cdot \sin nt \cdot dt = 0$

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} - \frac{\sin(2n+1)t}{t} \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cdot \sin(2n+1)t \cdot dt$$

Il nous faut alors montrer que  $g$  est continue sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Il suffit pour cela d'étudier le problème en 0.

On utilise un développement limité de  $\sin t$  en 0 :

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t \cdot \sin t} = \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon_1(t)}{t[t + t \varepsilon_2(t)]} = \frac{\frac{t}{6} + t \varepsilon_{1(t)}}{1 + \varepsilon_{2(t)}} \rightarrow 0$$

Lorsque  $t$  tend vers 0. On prolonge par continuité la fonction  $g$  en posant  $g(0)=0$

L'application du lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction  $g$  nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

⑦ Dans l'intégrale  $K_n$  on effectue le changement de variable  $u=(2n+1)t$

On obtient alors :

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du$$

Et comme I est convergente, on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

donc:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

En conséquence,  $y = \frac{\pi}{2}$  est asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de f

⑧ Courbe représentative de f(x) :

#### PROBLEME n° 4

① La fonction f est périodique de période 1 si et seulement si : pour tout x réel,  $f(x+1)=f(x)$ .

$$\text{Or, } f(x+1) = e^{2j\pi(x+1)} = e^{2j\pi x} \cdot e^{2j\pi} = e^{2j\pi x} = f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad z_1 = a + ae^{4j\pi x} = a(1 + e^{4j\pi x}) = ae^{2j\pi x} (e^{-2j\pi x} + e^{2j\pi x}) = 2a \cos(2\pi x) e^{2j\pi x}$$

$$\text{-Si } x = \frac{1}{4}, 2\pi x = \frac{\pi}{2}; z_1 = 0$$

$$\text{-Si } x \neq \frac{1}{4} :$$

$$\text{Le module de } z_1 : |z_1| = |2a \cos(2\pi x)|$$

L'argument de  $z_1$  dépend des signes de  $a$  et de  $\cos(2\pi x)$

Sachant que  $x$  est compris entre 0 et 0.5 en étant différent de  $\frac{1}{4}$  et donc que  $(2\pi x) \in [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ , il faut envisager 4 cas :

|         |                                                                                                                    |                                                                                                                                |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|         | $x \in \left[ 0; \frac{1}{4} \right[ \Rightarrow 2\pi x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$<br>$\cos(2\pi x) > 0$ | $x \in \left] \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \Rightarrow 2\pi x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$<br>$\cos(2\pi x) < 0$ |
| $a > 0$ | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$                                                                                 | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$                                                                                       |
| $a < 0$ | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$                                                                           | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$                                                                                             |

③

$$z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{4j\pi x}) + e^{2j\pi x} = \frac{1}{2}e^{2j\pi x}(2\cos 2\pi x) + e^{2j\pi x} = e^{2j\pi x}(\cos 2\pi x + 1)$$

$$= [\cos(2\pi x) + 1; 2\pi x]$$

④ On regroupe les termes ayant des coefficients égaux puis on factorise ce coefficient :

$$z = a_0(1 + e^{2j(n-1)\pi x}) + a_1(e^{2j\pi x} + e^{2j(n-2)\pi x}) + \dots + a_{\frac{n}{2}}(e^{2j\frac{n}{2}\pi x} + e^{2j(n-\frac{n}{2}-1)\pi x})$$

Le calcul des expressions entre parenthèses nécessite une factorisation comme précédemment

$$a_k(e^{2jk\pi x} + e^{2j(n-1-k)\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x} (e^{(2k-n+1)j\pi x} + e^{-(2k-n+1)j\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x} \cdot 2\cos((2k-n+1)\pi x)$$

$$\text{Donc, } z = 2e^{j(n-1)\pi x} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos((2k-n+1)\pi x) \right]$$

$$|z| = 2 \left| \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n+1)\pi x \right|$$



Quant à l'argument de  $z$ , il est égal à  $(n-1)\pi x + 2k\pi$  si  $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k - n - 1)\pi x > 0$

Et à  $(n-1)\pi x + \pi + 2k\pi$  si  $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k - n - 1)\pi x < 0$

**Dans les deux cas,  $\text{Arg}(z)$  est une fonction affine de  $x$**



1

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*

\* \*

**EXERCICE n° 1**

❶ Soit  $a$  vecteur de  $E$  tel que  $\varphi(a) \neq 0$  ( $a$  existe et est non nul si  $\varphi$  non identiquement nulle).

Alors, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x = (x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ . On vérifie aisément que le premier terme de la somme appartient à  $H$  et que le second appartient à  $\text{Vect}(a)$  où  $\text{Vect}(a)$  désigne l'espace vectoriel engendré par le vecteur  $a$ .

Donc  $E = H + \text{Vect}(a)$ . En outre, pour tout vecteur non nul  $c$  de  $\text{Vect}(a)$ , il existe  $k$  réel non nul tel que  $c = ka$  donc  $\varphi(c) = k\varphi(a) \neq 0$ . Donc  $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$  donc  $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ .

On en déduit que  $\dim E = \dim H + \dim \text{Vect}(a)$  d'où  $\dim H = n - 1$ .

❷ Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $H$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur  $e_n$  tel que  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  base de  $E$ .

Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  la base duale associée alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) e_i$  et  $x \in H \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$  i.e.  $H = \text{Ker} \varphi_n$ .

## EXERCICE n° 2

Pour tout  $A$  de  $G$ , on considère l'ensemble  $F = \{A^k, k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Comme  $G$  est borné,  $F$  est borné.

Montrons qu'alors, pour tout  $A$  de  $G$ ,  $A$  est diagonalisable et les éléments de son spectre sont de module 1.

Comme le corps des complexes  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  i.e. il a toutes ses racines dans  $\mathbb{C}$ .

On sait alors qu'il existe  $P \in GL(n, \mathbb{C}) / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{l_1} + N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s I_s + N_s \end{pmatrix}$  où  $\lambda_i$  désigne

la  $i$ ème valeur propre,  $I_i$  la matrice identité de taille l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  et  $N_i$  une matrice nilpotente de même taille.

Alors,  $P^{-1}A^k P = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{l_1} + N_1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_s I_s + N_s)^k \end{pmatrix}$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ .

Comme l'application de l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre  $n$  dans lui-même qui à tout  $U$  de associe  $P^{-1}UP$  est bijective et continue, dire que les  $A^k$  sont bornées équivaut à dire que les  $P^{-1}A^k P$  le sont aussi.

De plus, montrer que les  $P^{-1}A^k P$  sont bornées équivaut à montrer que pour tout  $i = 1, \dots, s, (\lambda_i I_{l_i} + N_i)^k$  bornée.

Si pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , et pour tout  $i = 1, \dots, s, (\lambda_i I_{l_i} + N_i)^k$  cela est en particulier vrai pour tout  $k$  entier naturel. Donc pour tout  $i = 1, \dots, s, |\lambda_i| < 1$  ou  $\{|\lambda_i| = 1 \text{ et } N_i = 0\}$ .

De même, si on raisonne sur  $A^{-1}$ , il existe  $Q \in GL(n, \mathbb{C})$  /  $Q^{-1}A^{-1}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} I_1 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_s} I_s + M_s \end{pmatrix}$

et on doit donc avoir pour tout  $i=1, \dots, s$ ,  $\left| \frac{1}{\lambda_i} \right| < 1$  ou  $\left\{ \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| = 1 \text{ et } M_i = 0 \right\}$ .

D'où, nécessairement, pour tout  $i=1, \dots, s$ ,  $|\lambda_i| = 1$  et  $N_i = 0$  i.e.  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Comme  $G$  est commutatif et que tous ses éléments sont diagonalisables, on peut appliquer le théorème de diagonalisation simultanée.

## PROBLEME

### Partie 1

❶  $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$  et  $V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$ .

❷ Si  $\exists i, j / a_i = a_j$  alors le déterminant a 2 lignes identiques, il est donc nul.

❸ ① D'après 1) la propriété est vraie au rang 2.

② Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Les racines du polynôme sont  $a_1, \dots, a_n$ . Le polynôme a  $n$  racines distinctes, il est donc de degré  $n$ .

③ En développant le déterminant  $P(x)$  par rapport à sa dernière colonne, on trouve que le coefficient de  $x^n$  vaut  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ .

Le polynôme  $P(x)$  s'écrit donc :  $V_n(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (x - a_i)$  soit en remplaçant  $x$  par  $a_{n+1}$ , comme la propriété est supposée vraie au rang  $n$ , on en déduit que :

$$P(x) = V_n(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (x - a_i) = \prod_{1 \leq k < l \leq n+1} (a_l - a_k).$$

La propriété est vraie au rang 2. Si elle est vraie au rang  $n$ , alors elle est vraie au rang  $n+1$ . La propriété est donc vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2.

## Partie 2

❶ Si pour tout  $k$ ,  $P_k(x) = x^k$ ,  $\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = V_n(x_1, \dots, x_n)$ .

❷ ①  $B$  est une famille de  $n$  polynômes échelonnée. C'est donc une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .

② On en déduit que  $P_{n-1}(x) = \lambda_{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x)$

③ En remplaçant dans le déterminant  $\Delta_n$ , on trouve que :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_1) + \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_2) + \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_n) + \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \text{ soit en enlevant à la dernière}$$

colonne la somme de  $n-1$  premières colonnes pondérée par les coefficients  $\alpha_i$ , on trouve :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

avec  $\lambda_{n-1}$  le coefficient de  $P_{n-1}(x)$  affecté au vecteur  $x^{n-1}$  dans sa décomposition dans la base  $B$  i.e. le coefficient du terme de plus haut degré de  $P_{n-1}(x)$ .

De même, si  $\lambda_i, i = 0, \dots, n-2$  désigne le coefficient du terme de plus haut degré de

$$P_i, i = 0, \dots, n-2, \text{ on en déduit que } \Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_{n-2} x_1^{n-2} & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \dots & \dots & \lambda_{n-2} x_2^{n-2} & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \dots & \lambda_{n-2} x_n^{n-2} & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \text{ Soit en factorisant}$$

la  $i$ ème colonne par  $\lambda_{i-1}$ , on trouve que  $\Delta_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} V_n(x_1, \dots, x_n)$ .

③  $C_k^x$  est un polynôme de degré  $k$  et son terme de plus haut degré vaut  $\frac{1}{k!}$ .

$$\text{Donc, } C_n = \frac{1}{1!} \frac{1}{2!} \dots \frac{1}{(n-1)!} V_n(x_1, \dots, x_n).$$

### Partie 3

① Montrons par récurrence que pour tout  $k$ , entier naturel, il existe un polynôme  $T_k$  de degré  $k$  tel que  $\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$  et que le terme de plus haut degré vaut  $2^k$ .

$\cos(0 \cdot \theta) = 1$  : la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie jusqu'au au rang  $n$ , alors :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta) = T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta) - \sin \theta \frac{1}{n} \sin \theta \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta)$$

$$\text{car } \sin(n\theta) = -\frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (\cos(n\theta)) = -\frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (T_n(\cos \theta)) = -\frac{1}{n} \sin \theta \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta)$$

$$\text{d'où } \cos((n+1)\theta) = T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta) - \frac{1}{n} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta),$$

donc  $\cos((n+1)\theta)$  s'écrit comme somme et produit de polynômes en  $\cos \theta$ . C'est donc un polynôme en  $\cos \theta$ .

De plus, le terme de plus haut degré est le terme de plus haut degré du produit  $T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta)$ , soit d'après l'hypothèse de récurrence  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .

La propriété est vraie au rang 0.

Si elle est vraie jusqu'au rang  $n$  alors elle est vraie au rang  $n+1$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n$  entier naturel.



|

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE L'EPREUVE DU CALCUL NUMERIQUE**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*  
\* \*

**EXERCICE N° 1**

$$\textcircled{1} \quad EX = \sum_{k=0}^{10} k \cdot \frac{1}{11} = 5 \quad VX = \sum_{k=0}^{10} k^2 \frac{1}{11} - (EX)^2 = 10$$

$\textcircled{2} \quad EZ_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = 5 \quad VZ_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n VX_i = \frac{10}{n}$  car les variables sont indépendantes.

Cette variable représente le nombre moyen de pièces défectueuses par jour sur  $n$  jours.

$$\textcircled{3} \quad P_n < \frac{VZ_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donc } P_n < \frac{40}{n}.$$

$\textcircled{4}$  D'après l'inégalité ci-dessus on a  $n_0 = 3999$ .  $P_n$  est la probabilité pour que la moyenne empirique  $Z_n$  diverge de plus de 0,5 de sa moyenne théorique  $EZ_n$ . Il suffit donc d'effectuer cette moyenne sur 4000 jours ou plus pour qu'il y ait moins de 1% de chances que cette différence soit plus grande que 0,5.

$\textcircled{5}$   $W$  peut prendre toutes les valeurs entières dans  $\{0, 1, \dots, 20\}$ . Sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(W = k) = \sum_{\substack{i \in \{0, 1, \dots, 20\} \\ tq \ k-i \in \{0, 1, \dots, 20\}}} P(X_1 = i)P(X_2 = k - i)$$

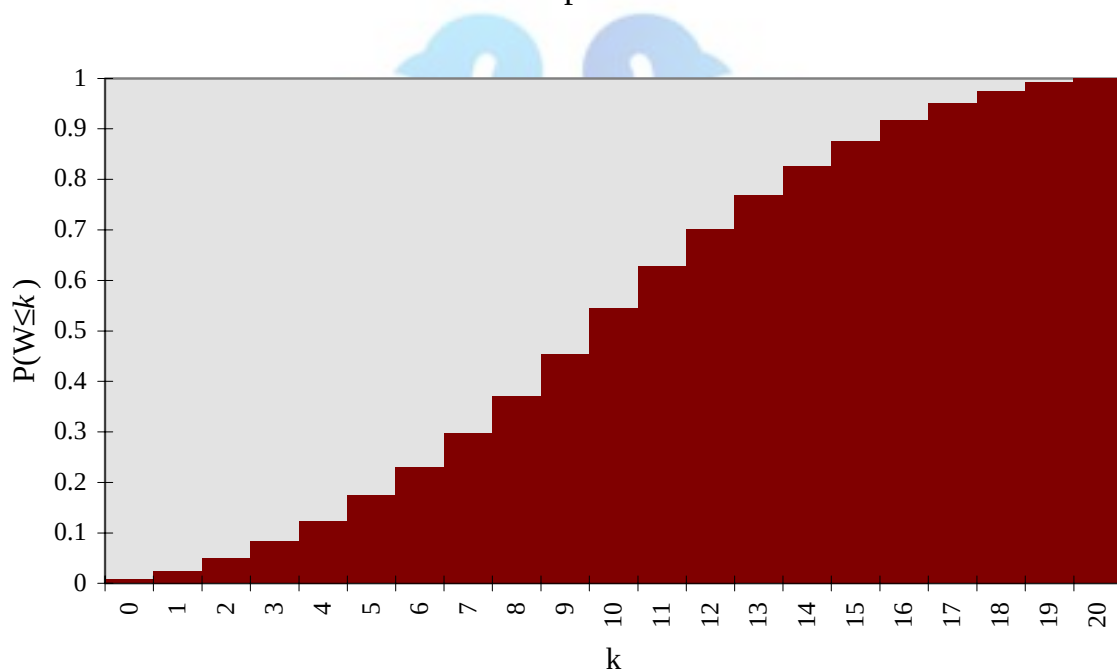


donc :

| $k$ | $P(W=k)$ | $K$ | $P(W=k)$ | $K$ | $P(W=k)$ |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|
| 0   | 1/121    | 7   | 8/121    | 14  | 7/121    |
| 1   | 2/121    | 8   | 9/121    | 15  | 6/121    |
| 2   | 3/121    | 9   | 10/121   | 16  | 5/121    |
| 3   | 4/121    | 10  | 11/121   | 17  | 4/121    |
| 4   | 5/121    | 11  | 10/121   | 18  | 3/121    |
| 5   | 6/121    | 12  | 9/121    | 19  | 2/121    |
| 6   | 7/121    | 13  | 8/121    | 20  | 1/121    |

$$EW = \sum_{k=0}^{k=20} k \cdot P(W = k) = 10 = EX_1 + EX_2$$

Fonction de répartition de W

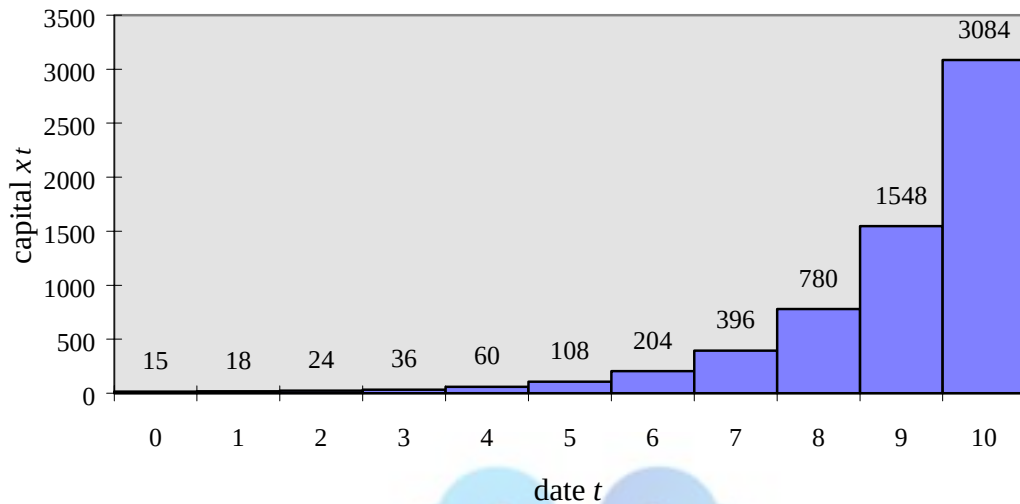


### EXERCICE N° 2

❶ Tableau représentant le capital du marchand :

| $t$                          | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9    | 10   |
|------------------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $X_{t-1}$                    | 15 | 18 | 24 | 36 | 60  | 108 | 204 | 396 | 780  | 1548 |
| $2 \cdot X_{t-1}$            | 30 | 36 | 48 | 72 | 120 | 216 | 408 | 792 | 1560 | 3096 |
| $X_t = 2 \cdot X_{t-1} - 12$ | 18 | 24 | 36 | 60 | 108 | 204 | 396 | 780 | 1548 | 3084 |

### Capital à chaque étape



② On a  $x_3 = 12 + 2^3(x_0 - 12) = 0$  donc  $x_0 = 10,5$ .

③ ① Avec les notations :

$$x_t = q \cdot x_{t-1} - c$$

② On reconnaît une série géométrique de raison  $q > 1$ . On a donc :

$$x_t = q^t \left( x_0 - \frac{c}{q-1} \right) + \frac{c}{q-1}$$

③ Si  $x_0 < \frac{c}{q-1}$  alors  $x_t$  est une fonction décroissante de  $t$ .

Si  $x_0 > \frac{c}{q-1}$  alors  $x_t$  est une fonction croissante de  $t$ .

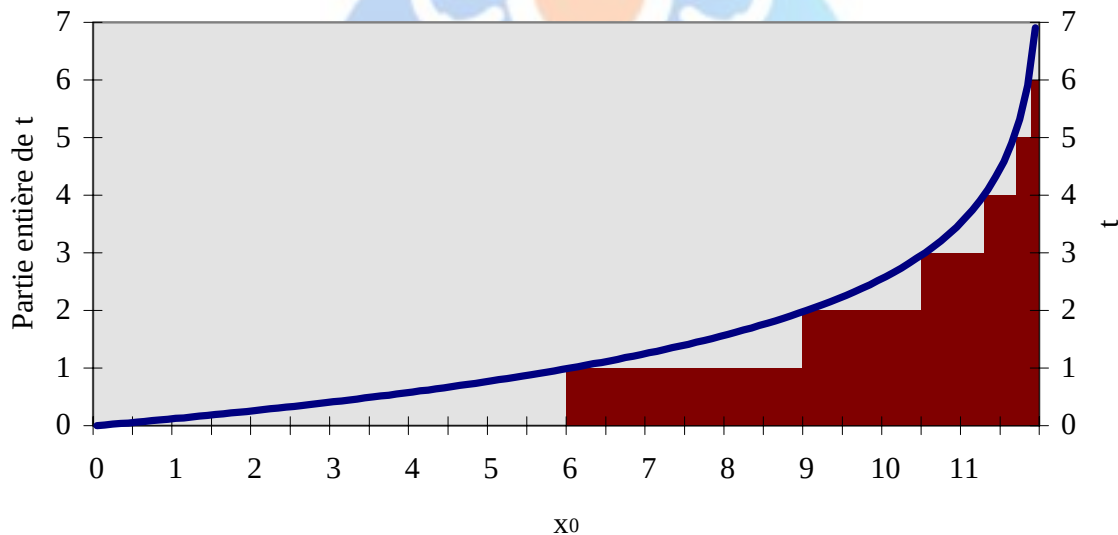
④ Dans le cas où  $x_0 < \frac{c}{q-1}$ , la relation du b) donne

$$: q^t = \frac{-\frac{c}{q-1}}{x_0 - \frac{c}{q-1}} \text{ donc } t \log(q) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{q-1}{c}x_0}\right) \text{ d'où : } t = -\frac{\log\left(1 - \frac{q-1}{c}x_0\right)}{\log(q)}$$

⑤ Avec  $c=12$  et  $q=2$  cela donne  $t = -\frac{\log\left(1 - \frac{x_0}{12}\right)}{\log 2}$  ; comme  $t$  est un nombre d'étapes, il reste encore à prendre la partie entière de cette valeur.

$t$  est donc une fonction croissante de  $x_0$  quand  $0 < x_0 < 12$  et la droite  $x_0 = 12$  est une asymptote. Un capital de départ de 12 F entraîne un cycle infini où le capital vaut 12 F tout le temps.

Nombre d'étapes parcourues en fonction du capital initial





**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2000**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**PROBLEME N° 1**

Pour tout  $n$  entier naturel , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x . dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x . dx$$

- ❶ Montrer que pour tout  $n$  entier naturel  $I_n = J_n$
- ❷ Montrer que  $I_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$
- ❸ Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$
- ❹ Calculer  $I_0$  et  $I_1$  et en déduire les expressions de  $I_n$  pour  $n$  pair et  $n$  impair

⑤ Montrer sans utiliser les expressions trouvées de  $I_n$  que pour tout  $n$  entier naturel  $I_{n+1} \leq I_n$  et que

$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Donner un équivalent de  $I_n$

⑥ Montrer que pour tout  $t$  élément de  $[0; \sqrt{n}]$ ,  $0 \leq (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$  et que pour tout  $t$  réel ,

$$e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}.$$

Déduire à l'aide de ce qui précède  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

## PROBLEME N° 2

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$

① Montrer que  $f$  est strictement monotone

② En supposant que  $f$  est strictement croissante , montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En déduire que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$

③ On suppose ici qu'il existe  $(a, b)$  appartenant à  $\mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  tel que  $f([a, b]) \subset [a, b]$

a - Montrer qu'il existe  $c$  élément de  $[a, b]$  tel que  $f(c) = c$

b - On suppose  $f$  croissante ,montrer que  $f(a) = a$  et que  $f(b) = b$  et en déduire la forme de  $f|_{[a, b]}$

c - On suppose  $f$  décroissante ,déterminer  $f|_{[a, b]}$

④ On suppose dorénavant que  $f$  est croissante

a - On suppose que pour tout  $x$  réel,  $f(x) < x$

b - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Montrer que et que  $f(x) - x$  a une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$

Que peut-on dire si pour tout  $x$  réel,  $f(x) > x$  ?

c - Soit  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$  montrer que si  $A = \emptyset$  alors on est dans un des cas a) ou b)

### PROBLEME N° 3

On considère une fonction impaire  $f$ , de période  $2\pi$ , définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  si  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $f(x) = 0$  si  $x \in \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

❶ Calculer les coefficients de Fourier  $b_1$  et  $b_2$

❷ On rappelle que  $\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos px = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$

a - Calculer  $\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n (-1)^p \cos px$

b - En déduire que  $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}) + \sum_{p=1}^n (1 + (-1)^{n+1+p}) \cos px$

c - On pose  $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos px dx$ ; calculer cette intégrale selon la parité de  $p$

d - Démontrer que  $b_{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k I_{2q}$  pour  $k \geq 1$  ; Calculer  $b_{2k}$

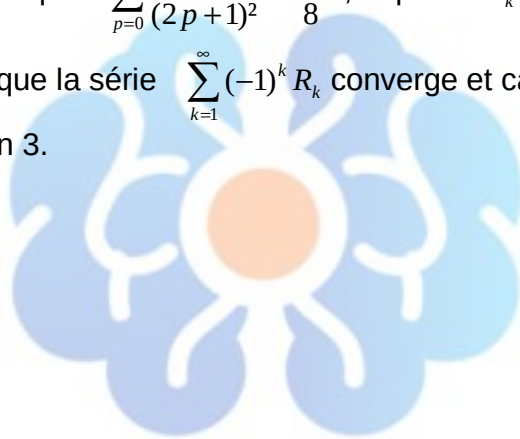
③ -

a - Etudier la convergence de la série de Fourier de f

b - En déduire que  $\frac{\pi}{4} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_{2k+1}$

c - On admet que  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  ; on pose  $R_k = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2p+1)^2}$

Démontrer que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_k$  converge et calculer sa somme en utilisant la question 3.





**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR -SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2000**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIES A et B***

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

***Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.***

**SUJET N° 1**

«Par quels critères peut-on distinguer une oeuvre d'art d'un objet quelconque ?».

**SUJET N° 2**

«Est-il facile de penser librement ?».

**SUJET N° 3**

«La certitude d'avoir raison est-elle un indice suffisant de vérité ? »  
(baccalauréat 1994).

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2000**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 3 HEURES**

*L'épreuve est composée de deux exercices et de d'un problème, tous indépendants.*

*« Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe ».*

**EXERCICE n° 1**

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ .

Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts.

Montrer que  $P(X + a_0), P(X + a_1), \dots, P(X + a_n)$  forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $n$  à coefficients réels.

**EXERCICE n° 2**

❶ Soit  $A = (a_{ij})_{i=1..n, j=1..n}$  une matrice à coefficients complexes telle que  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .  
Montrer que  $A$  est inversible.

❷ Si  $B$  matrice inversible à coefficients complexes, montrer que son inverse  $B^{-1}$  s'écrit  $B^{-1} = \sum_{k=0}^K b_k B^k$ .

❸ Soit  $C = \begin{pmatrix} a & -2c & -2b \\ b & a+6c & 6b-2c \\ c & b & a+6c \end{pmatrix} = C(a, b, c)$  où  $a, b, c$  sont trois complexes.

Montrer que si  $C$  est inversible, son inverse  $C^{-1}$  est de la même forme, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  complexes tels que  $C^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -2\gamma & -2\beta \\ \beta & \alpha+6\gamma & 6\beta-2\gamma \\ \gamma & \beta & \alpha+6\gamma \end{pmatrix} = C(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Indication : on pourra calculer  $J = C(0, 1, 0)$  et  $J^2$ .

**Problème**

Dans tout le problème qui suit,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace vectoriel euclidien et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire associé. On note  $L(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Partie I**

❶ Soit  $f$  élément de  $L(E)$ , montrer qu'il existe un unique  $f^*$  élément de  $L(E)$  tel que pour tout  $(x, y)$  éléments de  $E$ ,  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ .  $f^*$  est appelé adjoint de  $f$ .

❷ Montrer que si  $f$  admet comme matrice  $A$  dans une base orthonormée, alors  $f^*$  admet comme matrice la transposée de  $A$  (notée  ${}^t A$ ) dans cette même base.

③ Montrer que pour tout  $(f, g)$  de  $L(E)$  et pour tout  $\lambda$  réel :

$$(f + g)^* = f^* + g^*$$

$$(\lambda f)^* = \lambda f^*$$

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

④ Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $F^\circ$  désigne son orthogonal dans  $E$  c'est-à-dire  $F \oplus F^\circ = E$ . Montrer que  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $F^\circ$  est stable par  $f^*$ .

⑤ Montrer que  $\text{Ker}(f^*) = (\text{Im } f)^\circ$  et  $\text{Im}(f^*) = (\text{Ker } f)^\circ$  où  $\text{Ker } f$  désigne le noyau de  $f$  et  $\text{Im } f$  désigne l'image de  $f$ .

⑥ Montrer que  $f$  et  $f^*$  ont même polynôme caractéristique.

## Partie II

On rappelle qu'un endomorphisme normal  $f$  d'un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un endomorphisme tel que  $f \circ f^* = f^* \circ f$ .

① Soit  $f$  un endomorphisme normal, montrer que pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels,  $P(f)$  est normal.

② Montrer que si  $f$  est un endomorphisme normal, alors  $f$  et  $f^*$  ont les mêmes sous espaces propres.

③ Montrer que les sous espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.

④ Montrer que si  $F$  est un sous espace de  $E$  stable par  $f$  alors  $F$  est également stable par  $f^*$ . On pourra raisonner matriciellement.

⑤ Montrer que si  $F$  est un sous espace de  $E$  stable par  $f$  alors  $F^\circ$  est stable par  $f$  et  $f^*$ .

⑥ En déduire que les restrictions de  $f$  à  $F$  et à  $F^\circ$  sont deux endomorphismes normaux.

### Partie III

❶ Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels. A quelle(s) condition(s)  $A$  est la matrice associée à un endomorphisme normal ?

❷ Soit  $f$  un endomorphisme normal de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , montrer qu'il existe une base orthonormée de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  telle que  $f$  admet comme matrice dans  $E$  la matrice diagonale par blocs  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_s \end{pmatrix}$  où chaque bloc diagonal  $A_i$  s'écrit  $\lambda_i I_2$  ou  $\rho_i \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ . On pourra raisonner par récurrence.

❸ En déduire la forme générale du polynôme caractéristique d'un endomorphisme normal.

❹ Inversement, si  $A$  est la matrice d'un endomorphisme normal telle que son polynôme caractéristique soit  $\chi_A(T) = (T-2)^2 (T-1)(T^2+T+1)^2 (T^2+1)$ , donner la matrice diagonale par blocs à laquelle  $A$  est orthogonalement semblable.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2000**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**Problème**

On considère la fonction  $f$  telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = |x \ln x| \end{cases} \quad (x > 0)$$

A)

❶ Etudier  $f$  et construire sa courbe représentative (C) dans un repère  $(o, i, j)$  orthonormé (unités : 3 cm sur chaque axe)

Construire dans ce repère la droite (D) d'équation :  $y = x$

Trouver les coordonnées des points de :  $(C) \cap (D)$ .

❷ Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique de  $]1, e[$  tel que :  $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ .

Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .

Placer  $M(\alpha, \frac{1}{e})$  sur le graphique de A)1).

B) On étudie la suite  $(u_n)$  telle que :  $u_0 \geq 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$   
On conseille d'utiliser le graphique de A)1).

❶ Quelles sont les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles  $(u_n)$  est constante ?

❷ Soit  $u_0 \in ]0, 1/e[$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < \frac{1}{e}$$

Montrer que  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite.

❸ Soit :  $u_0 \in ]1/e, 1[$ . Encadrer  $u_1$ . Etudier  $(u_n)$ .

❹ Etudier le cas :  $u_0 = 1$ .

❺ Soit  $u_0 \in ]1, \alpha[$ . Etudier  $(u_n)$ .

❻ Soit :  $u_0 \in ]\alpha, e[$ . Montrer que ,  $0 < u_n < e$ .

Montrer que :  $u_1 < u_0$ .

Décrire les variations possibles de la suite  $(u_n)$  et les limites correspondantes.

❼ Soit  $u_0 > e$

Montrer que  $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

En déduire que  $(u_n)$  est divergente.

### Exercice

Soient A et B, deux matrices carrées.

❶ Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas  
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

❷ Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $A^p, p \in \mathbb{N}^*$ , est inversible et dans ce cas  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ .

❸ Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^n$  par récurrence.

❹ Vérifier que  $A^{-1}$  s'obtient en changeant  $\theta$  en  $-\theta$  dans  $A$ .

❺ Vérifier que  $(A^n)^{-1}$  existe.





**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL2000**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A**

*et*

**B OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

**Ce texte est tiré du livre intitulé «Le Sentiment même de soi , *corps, émotions, conscience*» d'Antonio R.Damasio, paru aux éditions Odile Jacob en octobre 1999. Il peut être résumé en 250 mots, plus ou moins 10 %.**

**\*\*\***

Les émotions et les sentiments d'émotions sont respectivement le début et le terme d'une progression, mais le caractère relativement public des émotions et l'aspect complètement privé des sentiments qui en découlent montrent bien que les mécanismes situés tout au long de ce continu sont extrêmement différents. Il est utile de respecter une distinction entre émotion et sentiment, si nous voulons enquêter à fond sur ces mécanismes. J'ai proposé de réserver le terme de *sentiment* à l'expérience mentale et privée d'une émotion, et d'utiliser au contraire le terme d'émotion pour désigner l'ensemble de réponses qui, pour bon nombre d'entre elles, sont publiquement observables. En termes pratiques, cela veut dire que l'on ne peut observer un sentiment chez quelqu'un d'autre, même si l'on peut observer un sentiment chez soi lorsque, en tant qu'être conscient, on perçoit ses propres états émotionnels. Pareillement, personne ne peut observer ses propres sentiments, mais certains aspects des émotions qui donnent lieu à vos propres sentiments, d'autres que vous pourrez manifestement les observer. En outre, à titre d'exemple, les mécanismes fondamentaux qui sous-tendent l'émotion ne nécessitent pas la conscience, même s'ils finissent par y avoir recours : on peut être à l'origine des processus en cascade qui conduisent à une manifestation émotionnelle, sans être conscient de ce qui a pu servir d'induction à l'émotion et encore moins des étapes intermédiaires qui y ont conduit. En effet, on peut même concevoir qu'un sentiment se produise dans la fenêtre temporelle limitée du ici et maintenant sans que l'organisme sache effectivement que tel est le cas. Assurément, à ce stade de l'évolution et à ce moment de notre vie adulte, les émotions se produisent dans un contexte où la conscience est présente. Nous pouvons constamment ressentir nos émotions et nous savons que nous les ressentons. L'étoffe dont sont faits nos esprits et nos comportements se tisse autour de cycles émotionnels continus, auxquels succèdent des sentiments dont on prend connaissance, et qui engendrent à leur tour de nouvelles émotions, en une polyphonie continue qui met en évidence et ponctue notre esprit de pensées spécifiques, et d'actions notre comportement. Mais même si l'émotion et le sentiment font désormais partie d'un continuum fonctionnel, il est utile de distinguer les étapes qui jalonnent ce continu, si l'on veut étudier les sous-basements biologiques avec quelques chances de succès. Par ailleurs, comme on l'a suggéré plus haut, il est possible que les sentiments se tiennent au seuil même qui sépare l'être du connaître, bénéficiant ainsi d'un lien privilégié avec la conscience.

Pourquoi suis-je aussi prêt à affirmer que les rouages biologiques sous-tendant l'émotion ne sont pas dépendant de la conscience ? Après tout, dans notre expérience quotidienne, nous connaissons souvent, semble-t-il, les circonstances qui sont à l'origine d'une émotion. Mais connaître souvent n'est pas connaître toujours. De nombreux éléments plaident en faveur de la nature cachée de l'induction émotionnelle, et je vais illustrer ce point en m'appuyant sur certains résultats expérimentaux obtenus dans mon laboratoire.

David souffre de l'un des déficits les plus graves de l'apprentissage et de la mémoire qui aient jamais été rapportés ; il est absolument incapable d'apprendre quelque fait nouveau que ce soit. Par exemple, il ne peut apprendre aucune apparence, aucun son, aucun lieu ou mot physique nouveau. En conséquence, il ne peut apprendre à reconnaître une personne nouvelle, à partir de son visage, de sa voix ou de son nom, pas plus qu'il ne peut se souvenir de quoi que ce soit se rapportant à l'endroit où il a rencontré une certaine personne ou les événements qui se sont déroulés entre lui et cette personne. Le problème de David a pour cause une lésion importante des deux lobes temporaux, qui comprend des lésions dans une région qu'on appelle l'hippocampe (dont l'intégrité est nécessaire pour créer des souvenirs de faits nouveaux) et la région qu'on appelle l'amygdale (un groupement sous-cortical de noyaux concernés par l'émotion et que je mentionnerai quelques pages plus loin).

Il y a de nombreuses années de cela, j'ai entendu dire que David semblait manifester, dans sa vie de tous les jours, des préférences et des aversions constantes envers certaines personnes. Par exemple, dans le lieu où il a vécu pendant près des vingt dernières années, il y avait des gens bien précis auprès desquels il choisissait fréquemment de se rendre s'il voulait une cigarette ou une tasse de café, et il y avait des gens vers lesquels il n'allait jamais. La constance de ces comportements était des plus curieuses, si l'on garde à l'esprit 1/ que David était absolument incapable de reconnaître l'un quelconque de ces individus ; 2/ qu'il n'avait pas la moindre idée de ce qu'il avait vu ou non l'un quelconque d'entre eux ; et 3/ qu'il était incapable de produire le nom d'aucun d'entre eux ou même de désigner aucun d'entre eux une fois qu'on lui en avait donné le nom. Se pouvait-il que cette histoire fascinante soit plus qu'une curieuse anecdote ? Je décidai de le vérifier et me mis à procéder à des tests empiriques. À cette fin en collaboration avec mon collègue Daniel Tranel, je mis au point une expérience

qu'on appelle depuis, dans notre laboratoire, l'expérience du " bon garçon " et du " mauvais garçon ".

Sur une période d'une semaine, nous pûmes entraîner David, en des circonstances entièrement contrôlées, dans trois types distincts d'interaction humaine. Dans l'une d'elles, il s'agissait d'entrer en interaction avec quelqu'un qui était extrêmement agréable et qui récompensait toujours David, qu'il ait ou non demandé quelque chose ( c'était le " bon garçon "). Une autre interaction faisait intervenir quelqu'un qui était émotionnellement neutre et qui entraînait David dans des activités qui n'étaient ni plaisantes, ni déplaisantes (c'était le " garçon neutre "). Un troisième type d'interaction impliquait un individu dont les manières étaient brusques, qui répondait toujours non à quelque requête que ce fût, et qui entraînait David dans une tâche psychologique très fastidieuse qui serait venue à bout de la patience d'un saint ( le " mauvais garçon "). (...)

La mise en scène de ces différentes situations fut programmée sur une durée de cinq jours consécutifs, mais toujours pendant un laps de temps bien spécifié pour qu'on puisse bien mesurer et comparer l'exposition globale au bon, au mauvais et à l'indifférent. La mise en scène élaborée de ce ballet nécessitait des pièces variées et plusieurs assistants, qui, incidemment, n'étaient pas les mêmes, et qui incarnaient respectivement le bon garçon, le mauvais garçon, et le garçon neutre.

Une fois que toutes ces rencontres purent faire leur effet, nous demandâmes à David de participer à deux tâches distinctes. Au cours de l'une d'entre elles, on demandait à David de regarder deux séries de quatre photographies qui comportaient le visage de l'un des trois individus de l'expérience, puis on lui demandait : " Auprès de qui te rendrais-tu si tu avais besoin d'aide ? ", et pour que les choses soient plus claires : " Qui, selon toi, est ton ami dans ce groupe ? ".

David se comporta de la manière la plus spectaculaire qui soit. Lorsque l'individu qui avait été positif à son égard faisait partie du groupe des quatre, David choisissait le bon garçon dans 80% des cas, ce qui indiquait que son choix ne se faisait manifestement pas de manière aléatoire - seul le hasard aurait fait choisir à David chacun des quatre dans 25% des cas. L'individu neutre était choisi avec une probabilité qui n'était pas supérieure au hasard. Quand au mauvais garçon, il n'était jamais choisi, ce qui, ici encore, s'opposait à un comportement aléatoire.

Dans une seconde tâche, on demandait à David de regarder les visages des trois individus, et de dire ce qu'il savait à leur sujet. Comme à l'ordinaire, pour lui, rien ne lui venait à l'esprit. David était incapable de se souvenir les avoir jamais rencontrés et n'avait aucune mémoire du moindre cas où il ait interagi avec eux. Inutile de dire qu'il était incapable de nommer l'un quelconque de ces individus, incapable d'indiquer l'un quelconque d'entre eux, une fois qu'on lui en avait donné le nom, et il n'avait pas non plus la moindre idée de ce dont nous parlions lorsque nous l'interrogeons sur les événements de la semaine précédente. Mais lorsqu'on lui demandait lequel, parmi les trois, était son ami, il choisissait constamment le bon garçon.

Les résultats montrent que l'anecdote méritait d'être étudiée. De toute évidence, il n'y avait rien dans l'esprit conscient de David qui lui donnât une raison explicite de choisir le bon garçon de façon correcte et de rejeter le mauvais garçon de façon correcte. Il ignorait pourquoi il choisissait l'un et il rejetait l'autre ; il le faisait, tout simplement. La préférence non consciente qu'il manifestait, cependant est probablement liée aux émotions qui avaient été induites en lui durant l'expérience, ainsi qu'à la ré-induction non consciente d'une certaine partie de ces émotions au moment où il se trouvait soumis au test. David n'avait pas appris une connaissance nouvelle du type de celle qui peut se manifester dans l'esprit de quelqu'un sous la forme d'une image. Mais quelque chose était demeuré dans son cerveau, et ce quelque chose pouvait produire des résultats sous une forme non imagée : sous la forme d'actions et de comportement. Le cerveau de David pouvait produire des actions proportionnées à la valeur émotionnelle des rencontres originelles, qu'elles aient été causées par la récompense ou l'absence de récompenses. Pour que cette idée soit bien claire, je vais décrire une observation que j'ai pu faire lors d'une des séances d'exposition, au cours de l'expérience du bon et du mauvais garçon.

On était en train de conduire David à une rencontre avec le mauvais garçon quand voici qu'au moment d'entrer dans le corridor menant à la pièce où l'attendait le mauvais garçon, quelques mètres plus loin, il flanche, s'arrête un instant, et seulement alors se laisse conduire gentiment jusqu'à la salle d'examen. Je sautai sur l'occasion et lui demandai immédiatement si quelque chose n'allait pas, s'il y avait quelque chose que je pouvais faire pour lui. Mais, comme c'était à prévoir, il me dit que non, que tout allait bien - après tout, rien ne lui venait à l'esprit, si ce n'est, peut-être, un sens émotionnel isolé mais sans qu'une cause sous-tende cette émotion. Il ne fait pour moi aucun doute

que la vue du mauvais garçon avait induit une réponse émotionnelle brève et un sentiment bref, ici et maintenant. Toutefois, en l'absence d'un ensemble convenablement lié d'images, qui auraient pu lui expliquer la cause de la réaction, l'effet resta isolé, déconnecté, et par là même, immotivé. ( ... )

La situation qui vient d'être décrite nous permet de faire quelques autres remarques. Premièrement, la conscience centrale de David est intacte, point sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant. En second lieu, alors que dans le contexte de l'expérience du bon et du mauvais garçon, les émotions de David ont été induites de façon non consciente, dans d'autres contextes, il se met à avoir des émotions en connaissance de cause. Lorsqu'il n'a pas à invoquer en mémoire quelque chose de nouveau, il sent qu'il est heureux parce qu'il goûte à un plat favori ou qu'il assiste à une scène agréable. En troisième lieu, compte tenu de la destruction remarquable qu'ont subie plusieurs régions corticales et sous-corticales de son cerveau qui sont liées à l'émotion, (...), il est manifeste que ces territoires ne sont indispensables ni à l'émotion, ni à la conscience. (...)

Je terminerai ces commentaires en disant que celle qui jouait le rôle du mauvais garçon, dans notre expérience, était une jeune neurologue fort belle et agréable. Nous avons conçu l'expérience de la sorte, en la faisant jouer à contre-emploi. (...) . Comme vous pouvez le voir, notre petite stratégie légèrement perverse fut payante. Toute la beauté du monde aurait été incapable de compenser l'émotion négative induite par les manières du mauvais garçon et par la maigre distraction procurée par la tâche.

Nous n'avons pas à être conscients de l'inducteur d'une émotion, et bien souvent, nous ne le sommes pas, et nous ne pouvons pas contrôler les émotions à volonté. On peut se trouver dans un état triste ou heureux, tout en étant absolument incapable de dire on se trouve en ce moment même dans cet état. Une recherche minutieuse peut mettre au jour des causes possibles, et telle cause peut être plus probable que telle autre, mais bien souvent, il est impossible d'être certain. La cause réelle peut avoir été l'image d'un événement, une image qui avait la potentialité d'être consciente, mais qui ne l'a tout bonnement pas été, parce que vous n'y avez pas fait attention alors que vous faisiez attention à une autre. Ou bien il se peut qu'il n'y ait pas eu d'image du tout, mais qu'il s'est plutôt produit un changement transitoire dans le profil chimique de votre milieu interne, lequel a été provoqué par des facteurs aussi divers que votre état de santé, le régime, le temps, le cycle hormonal, le nombre, grand ou petit,



d'exercices que vous avez pratiqués ce jour là, ou même la quantité de soucis que vous vous étiez faits sur un certain sujet. Le changement serait assez substantiel pour produire certaines réponses et modifier votre état corporel, mais il ne serait pas possible à mettre en image, au sens où peuvent l'être une personne ou une relation ; en d'autres termes ; il ne produirait pas une configuration sensorielle dont vous pourriez jamais avoir une connaissance immédiate dans l'esprit. En d'autres termes, les représentations qui induisent les émotions et donnent lieu, par la suite, à des sentiments, n'ont pas besoin d'être l'objet de l'attention, qu'elles signifient quelque chose d'extérieur à l'organisme ou quelque chose qu'on se rappelle en son for intérieur. Qu'elles soient de l'extérieur ou de l'intérieur, les représentations peuvent se produire à un niveau infra-conscient et induire néanmoins des réponses émotionnelles. Les émotions peuvent être induites d'une manière non consciente et apparaître ainsi au Soi conscient comme étant apparemment immotivées.



# CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

## VOIE B

### OPTION MATHEMATIQUES

#### CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

#### PROBLEME I

1 - En effectuant dans  $J_n$  le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - x$ ;  $du = -dx$ , on a

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \cdot du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \cdot du = I_n \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2 - Soit  $\alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $0 \leq I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}} \sin^n x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx$

$x \rightarrow \sin^n x$  est croissante sur  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  donc :

$$0 \leq I_n \leq \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx \leq \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \text{ en majorant le sinus par}$$

1 dans la deuxième intégrale.

Or,  $0 \leq \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} / \forall n \geq M, \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \leq \frac{\alpha}{2}$   
donc  $\forall n \geq M, I_n \leq \alpha$  c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  C.Q.F.D.

3 - A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \times \sin x \cdot dx = \left[ -\cos x \cdot \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cdot \cos x \cdot \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$\text{d'où } I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \Rightarrow (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$$



4 -

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 1$$

Si n est pair alors  $n=2p$  et on a

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2(p-1)} I_{2p-4} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \dots \times 1}{2p \times 2(p-1) \times \dots \times 2} I_0$$

Soit, en multipliant le numérateur par  $(2p) \cdot (2p-2) \dots 2$  le numérateur devient alors  $(2p)!$  et le dénominateur  $(2p \cdot 2(p-1) \dots 2)^2 = (2^p \cdot p!)^2$  donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

De même, on a  $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dots = \frac{2p \times 2(p-1) \times \dots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 1} I_1$  soit :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

5 - pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  on a :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

La suite de terme général  $(n+1)I_{n+1}I_n$  est donc une constante égale à sa valeur initiale

$$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs, on a  $0 \leq I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$  Or,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$  (en utilisant la formule

de récurrence entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ ) et donc, d'après le théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$  c'est-à-dire

$$I_{n+1} \approx I_n$$

$$\text{Donc, } \frac{\pi}{2(n+1)} = I_{n+1} I_n \approx I_n^2 \Rightarrow I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

**6** -  $t \rightarrow e^{-t^2}$  étant continue et positive sur  $R^+$  et  $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$  et sachant que  $t \rightarrow e^{-t}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  alors  $t \rightarrow e^{-t^2}$  est intégrable sur  $R^+$

Par ailleurs,  $e^x > 1 + x$  sur  $R$ . On en déduit donc en particulier  $\forall t \in [0; \sqrt{n}] 0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$  et

$$\forall t \in R, 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{\frac{t^2}{n}} \Rightarrow \forall t \in [0; \sqrt{n}] 0 \leq (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \text{ et}$$

$$\forall t \in R, (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq e^{t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow K_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

$$\text{En posant } t = \sqrt{n} \sin u \text{ dans } K_n, \text{ il vient : } K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^n \sqrt{n} \cdot \cos u \cdot du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1} \cdot du$$

$$\text{donc d'après ce qui précède } K_n \approx \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \text{ est continue et positive sur } R^+ \text{ et } \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \approx \frac{n^n}{t^{2n}}, \text{ fonction qui est intégrable en } +\infty$$

$$\text{donc } t \rightarrow \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \text{ est intégrable sur } R^+$$

$$\text{D'où } e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} dt = l_n$$

$$\text{En effectuant dans } l_n \text{ le changement de variable } t = \sqrt{n} \tan u, dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u} \cdot du, \text{ il vient}$$

$$l_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 u)^n} \frac{\sqrt{n} \cdot du}{\cos^2 u} = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n-1} \cdot du \approx \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ donc}$$

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq l_n, \text{ le théorème d'encadrement donne alors :}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## PROBLEME II

**1 -** Soit  $(x, y)$  élément de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f(x)=f(y)$  alors on a  $|x - y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$  donc  $x = y$ .

Donc  $f$  est injective, comme elle est continue et définie sur un intervalle, elle est strictement monotone.

**2 -** La fonction  $f$  étant croissante on sait que soit  $f$  a une limite en  $+\infty$  soit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Supposons que  $f$  converge vers une limite  $l$  réelle

Soit  $x$  un réel, alors on a  $|f(x+1) - f(x)| \geq |x+1 - x| = 1$

En passant à la limite dans cette inéquation on obtient  $0 = l - l \geq 1$  ce qui est faux donc il y a contradiction

avec l'hypothèse et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le même type de raisonnement tenu en  $-\infty$  donne  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

On en déduit que  $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$  et que  $f$  est bijective

**3 -**

**a-** On a donc  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$

Soit  $g$  l'application définie sur  $[a, b]$  telle que  $g(x)=f(x)-x$

$g$  est continue,  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un réel  $c$  sur l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $g(c)=0$  c'est à dire tel que  $f(c)=c$  C.Q.F.D.

**b-** On a, du fait de la croissance de  $f$  :  $f(c) - f(a) = |f(c) - f(a)| \geq |c - a| = c - a$

Or,  $f(c)=c$  donc  $f(a) \leq a$  et donc  $f(a)=a$

De même,  $f(b) - c = f(b) - f(c) = |f(b) - f(c)| \geq |b - c| = b - c \Rightarrow f(b) \geq b$  ce qui entraîne  $f(b)=b$

Soit  $x$  un élément de  $[a, b]$ , alors  $f(x) - a = |f(x) - f(a)| \geq |x - a| = x - a$  donc  $f(x) \geq x$

De même,  $b - f(x) = |f(b) - f(x)| \geq |b - x| = b - x$  d'où  $f(x) \leq x$

Par conséquent  $f(x)=x$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$

**c-** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x)=a+b-f(x)$

Dans ces conditions,  $g$  est continue et pour tout  $(x, y)$  élément de  $\mathbb{R}^2$ ,  $|g(x) - g(y)| \geq |x - y|$

Par ailleurs,  $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a+b-f(x) \leq b \Rightarrow g([a, b]) \subset [a, b]$

Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question b) on a donc pour tout  $x$  de  $[a, b]$   $g(x)=x$  soit, pour tout  $x$  de  $[a, b]$   $f(x)=a+b-x$

**4-**

**a-** Soit  $x$  un réel strictement positif, alors  $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x$  donc

$x + f(0) \leq f(x) < x$

On en déduit que pour tout  $x$  strictement positif,  $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement, on a bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Soit  $(x, y)$  un élément de  $\mathbb{R}^2$ ,  $x \leq y$  alors

$$f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)| \geq |y - x| = y - x \Rightarrow f(x) - y \geq f(x) - x$$

On en déduit que la fonction qui à  $x$  associe  $f(x) - x$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et comme elle est majorée par 0, elle admet donc une limite en  $+\infty$

**b-** Soit  $x$  un réel strictement négatif, alors  $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$  donc  $x < f(x) \leq x + f(0)$

On en déduit que pour tout  $x$  réel strictement négatif,  $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Comme précédemment, on montre que la fonction qui à  $x$  associe  $f(x) - x$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est minorée par 0, elle a une limite en  $-\infty$

**c-** Si  $A = \emptyset$ , alors la fonction qui à  $x$  associe  $f(x) - x$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et comme elle est continue, elle doit rester de signe constant  
Donc, pour tout  $x$  réel soit  $f(x) < x$  (cas a), soit  $f(x) > x$  (cas b))

### PROBLEME III

1 -

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \sin 2x \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{4}{\pi} \left( [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2 - \frac{4}{\pi}$$

2 -

$$\text{a-} \quad \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos p(x + \pi) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x + \pi)}{2 \sin \frac{x + \pi}{2}} = (-1)^n \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

**b-**

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos px - (-1)^n \left( \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n (-1)^p \cdot \cos px \right)$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{n+1}) + \sum_{p=1}^n \cos px (1 + (-1)^{n+p+1})$$

**c-** On a , pour tout entier  $p > 0$  :

$$I_p = \left( \left[ x \frac{\sin px}{p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{p} dx \right) = \frac{\pi}{2p} \sin p \frac{\pi}{2} + \frac{\cos p \frac{\pi}{2} - 1}{p^2}$$

Si  $p=2q$  , on a  $I_{2q} = \frac{(-1)^q - 1}{4q^2}$

Si  $p=2q+1$  ,  $I_{2q+1} = \pi \frac{(-1)^q}{2(2q+1)} - \frac{1}{(2q+1)^2}$

**d-** On utilise la question b) et on obtient

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x} \cdot dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} (1 + (-1)^{n+1}) dx + \sum_{p=1}^n (1 + (-1)^{n+p+1}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos px \cdot dx \right)$$

$$b_n = \frac{\pi}{8} (1 + (-1)^{n+1}) + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^n (1 + (-1)^{n+p+1}) I_p$$

Si  $n=2k+1$  ,  $b_{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{2k+1} (1 + (-1)^p) I_p = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k I_{2q}$  car  $1 + (-1)^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2q+1 \\ 2 & \text{si } p = 2q \end{cases}$  et si

Si  $n=2k$  ,  $b_{2k} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{2k} (1 + (-1)^{p+1}) I_p = \frac{4}{\pi} \sum_{q=0}^{k-1} I_{2q+1}$

3 -

a- La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ ; sa série de Fourier est convergente en tout point  $x$  de ces intervalles vers  $f(x)$

Au point  $0$ ,  $f$  admet une limite à droite :  $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$  et admet une limite à gauche  $f(0^-) = -1$  puisque la fonction est impaire.

$$\text{De } \frac{f(x) - f(0^+)}{x} = \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} \approx \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}, \text{ on déduit que } f'_d(0^+) = 0$$

On obtient facilement que  $f'_d(0^-) = 0$  pour des raisons de symétrie.

Alors, la série de Fourier converge vers  $\frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = 0$

Au point  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $f(\frac{\pi^+}{2}) = 0$ ;  $f(\frac{\pi^-}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$ ;  $f'_g(\frac{\pi^-}{2}) = 1$ ;  $f'_d(\frac{\pi^+}{2}) = 0$

La série de Fourier converge vers  $\frac{1}{2}(0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$

Au point  $\pi$ , aucun problème car la fonction est nulle sur  $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

b- On a  $\frac{x}{\sin x} = b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \sin 2kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)x$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Si  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin 2k \frac{\pi}{2} = 0$ ; il reste  $b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

c-  $(R_k)$  est une suite positive, décroissante, de limite nulle car c'est le reste d'une série convergente. On a :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k I_{2q} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k \frac{(-1)^q - 1}{4q^2}$$

$$0 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=2p+1}^k \frac{-2}{(2p+1)^2} \right) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2p+1)^2} \right)$$

$$0 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k R_k$$

# CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

## VOIE B

### OPTION MATHEMATIQUES

#### CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

#### EXERCICE I

On applique la formule de Taylor :

$$\begin{cases} P(X + a_0) = P(X) + \frac{a_0}{1!} P'(X) + \dots + \frac{a_0^n}{n!} P^{(n)}(X) \\ \vdots \\ P(X + a_n) = P(X) + \frac{a_n}{1!} P'(X) + \dots + \frac{a_n^n}{n!} P^{(n)}(X) \end{cases}$$

On sait que les polynômes  $P(X), \dots, P^{(n)}(X)$  forment une base de l'espace  $R_n[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré  $n$  car ils constituent une famille échelonnée.

Donc  $(P(X + a_0), \dots, P(X + a_n))$  forment une base de  $R_n[X]$  si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas car son déterminant est un déterminant de Vandermonde (non nul si et seulement si les  $a_i$  sont deux à deux distincts).

#### EXERCICE II

1) Par l'absurde :

si  $A$  non inversible, alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que  $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$  (1) où  $C_1, \dots, C_n$  sont

les colonnes de  $A$ . Il existe  $i_0$  tel que pour tout  $j \neq i_0, |\lambda_j| \leq |\lambda_{i_0}|$  (2)

Alors la relation (1) donne  $\lambda_1 a_{i_0 1} + \dots + \lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} + \dots + \lambda_n a_{i_0 n} = 0$  d'où

$$\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} = - \sum_{j \neq i_0} \lambda_j a_{i_0 j} \Rightarrow |\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |\lambda_j a_{i_0 j}| \leq |\lambda_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \text{ contradiction avec l'hypothèse}$$

$$\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

- 2) On sait que  $I, B, \dots, B^{n^2}$  est une famille à  $n^2 + 1$  éléments dans l'espace des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes donc elle est liée. Donc il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que  $\lambda_0 I + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$ . Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $\lambda_k \neq 0$  alors  $\lambda_k B^k + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$ . Comme  $B$  inversible, on peut multiplier la dernière équation par  $B^{-k-1}$  d'où  $B^{-1} = -\frac{1}{\lambda_k} (\lambda_{k+1} I + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2-k})$ . Ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit  $J = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C(0,0,1)$

$$C(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -12 \\ 6 & -2 & 36 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -2I + 6J$$

Donc, par récurrence immédiate,  $\forall k \in \mathbb{N}, J^k \in \text{Vect}(I, J, J^2)$

Donc comme  $C^{-1}$  est un polynôme en  $J$ ,  $C^{-1} \in \text{Vect}(I, J, J^2)$  donc  $C^{-1}$  est de la forme cherchée.

## PROBLEME

### Partie I :

L'espace  $E$  est euclidien donc pour toute forme linéaire  $\varphi$  de  $E$ , il existe un unique vecteur  $v / \forall u \in E, \varphi(u) = \langle u, v \rangle$ . Alors pour tout  $y \in E, \langle f(u), y \rangle$  est une forme linéaire donc il existe un unique vecteur noté  $f^*(y)$  tel que  $\langle f(u), y \rangle = \langle u, f^*(y) \rangle$ .

Il reste à montrer la linéarité de l'application  $f^*$  ainsi définie :

$$\langle x, f^*(y+y') \rangle - \langle f^*(y) + f^*(y'), x \rangle = \langle f(x), y+y' \rangle - \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y' \rangle = 0$$

De même, pour tout  $a$  réel et pour tout  $y$ ,  $\langle x, f^*(ay) \rangle - \langle af^*(y), x \rangle = \langle f(x), ay \rangle - a \langle f(x), y \rangle = 0$ .

- 2) si  $f^*$  admet comme matrice dans une base orthonormée  $B$  alors  $(B)_{ij}$  est la composante de  $f^*(e_j)$  sur le vecteur  $e_i$  i.e.  $B_{ij} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_j), e_i \rangle = (A)_{ji}$ . Où  $A$  est la matrice de  $f$  dans cette même base orthonormée.

$$\langle x, (f+g)^*(y) \rangle = \langle (f+g)(x), y \rangle = \langle x, (f^*+g^*)(y) \rangle$$

$$3) \langle x, (\lambda f)^*(y) \rangle = \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle$$

$$\langle x, (f \circ g)^*(y) \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle g(x), f^*(y) \rangle = \langle x, g^* \circ f^*(y) \rangle$$

$$4) \text{ Si } f(F) \subset F, \forall y \in F^\circ, \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = 0 \text{ car } f(x) \in F \text{ donc } f^*(y) \in F^\circ$$

Inversement, si  $F^\circ$  stable, alors  $F^{\circ\circ} (\supset F)$  est stable par  $f^{**} = f$  et comme  $\begin{cases} E = F \oplus F^\circ \\ E = F^{\circ\circ} \oplus F^{\circ\circ\circ} \end{cases}$  avec l'égalité des dimensions, on a  $F = F^{\circ\circ}$

- 6) On sait qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique. On a montré que la matrice de l'adjoint d'une application dans une base orthonormée est égale à la transposée de cette application d'où la conclusion.



## Partie II

- 1) Soit  $f$  un endomorphisme normal et soit  $P(f) = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n$  alors il est évident que  $P(f) \circ P(f^*) = P(f^*) \circ P(f)$  donc  $P(f)$  est normal.
- 2) Pour tous les sous-espaces propres de  $f$  endomorphisme normal, il existe un polynôme  $P$  tel que ce sev propre est un noyau de  $P(f)$  or  $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \langle P(f)(x), P(f)(x) \rangle = 0$  et
- $$\langle P(f)(x), P(f)(x) \rangle = \langle x, P(f^*) \circ P(f)(x) \rangle = \langle x, P(f) \circ P(f^*)(x) \rangle = \langle P(f^*)(x), P(f^*)(x) \rangle$$
- d'où  $\langle P(f^*)(x), P(f^*)(x) \rangle = 0$   
d'où  $P(f^*)(x) = 0$

- 3) Soit  $x$  et  $y$  tels que 
$$\begin{cases} f(x) = \lambda x \\ f(y) = \mu y, \langle f(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \mu y \rangle \text{ d'où } (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0 \text{ et comme } \lambda \neq \mu, \langle x, y \rangle = 0. \end{cases}$$

4), 5) et 6) soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$  sous espace stable par  $f$ . Complétons cette base par une base orthonormée  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  alors dans cette base la matrice de  $f$  peut s'écrire :  $\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$  donc celle

de  $f^*$  dans cette même base s'écrit  $\begin{pmatrix} {}^t A & 0 \\ {}^t D & {}^t C \end{pmatrix}$ . Comme  $f$  est normale, matriciellement (1)

$$A^t A + D^t D = {}^t A A \text{ et } {}^t D D = C^t C + D^t D \text{ alors } (1) \Rightarrow \text{tr}(D^t D) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} d_{ij}^2 = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Donc la matrice de  $f$  dans la base considérée est  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  et celle de  $f^*$  est  $\begin{pmatrix} {}^t A & 0 \\ 0 & {}^t C \end{pmatrix}$  avec  $A^t A = {}^t A A$  et  ${}^t D D = D^t D$  ce qui implique que  $F$  et  $F^\circ$  sont stables par  $f$  et  $f^*$  et que les restrictions de  $f$  à  $F$  et  $F^\circ$  sont des endomorphismes normaux.

## Partie III

- 1) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matrice d'un endomorphisme normal. Alors,  $A^t A = {}^t A A \Rightarrow b^2 - c^2 = 0$  et  $(a-d)(b-c) = 0$

Si  $b = c$  les 2 équations sont vérifiées

$$\text{Si } b \neq c, \begin{cases} a = d \\ b = -c \neq 0 \end{cases}$$

d'où 2 écritures possibles pour  $A$  :  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $b$  non nul dans la seconde expression.

Cette seconde expression peut aussi s'écrire  $\rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  si on pose  $a - ib = \rho e^{i\theta}, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

La première expression est celle d'une matrice symétrique donc cette matrice est diagonalisable.

2) Par récurrence sur n dimension de E.\*

C'est évident si  $n=1$ .

On suppose la propriété vraie au rang  $n-1$ .

En dimension  $n$ , on sait que  $f$  admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. En effet, le polynôme caractéristique de  $f$  peut se factoriser en produit de polynômes de degrés 1 ou 2. Si il existe un facteur de degré 1, on a une droite vectorielle stable par  $f$ , sinon, on aura un plan vectoriel stable par  $f$ .

Soit  $F$  un sous-espace stable par  $f$  de dimension 1 ou 2 et soit  $F^\circ$  son orthogonal dans  $E$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $F$  et  $F^\circ$  : il existe 2 bases orthonormées de  $F$  et  $F^\circ$  telles que dans chacune de ces bases  $f$  a la forme exigée. Il ne reste plus qu'à considérer la base orthonormée constituée de la réunion de chacune de ces bases.

3) Le polynôme caractéristique s'écrit alors :  $\chi_A(T) = \prod_i (\lambda_i - T)^{a_i} \prod_j (T^2 - 2\rho_j \cos \theta_j T + \rho_j^2)$

4)  $A$  est orthogonalement semblable à

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \\ & 0 & & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

# CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

## VOIE B

### CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

#### PROBLEME

A)

1) Etude de  $f$

$f(x)$  est définie continue sur  $]0, +\infty[$ .

Son domaine de définition est donc  $D = \mathbb{R}^{+*}$

- Dérivée de  $f(x)$

$$f'(x) = (|x \ln x|)'$$

- Si  $x > 1$ ,  $|x \ln x| = x \ln x$

$$f'(x) = \ln x + 1 ; f'(x) > 0$$

- Si  $0 < x < 1$ ,  $|x \ln x| = -x \ln x$

$$f'(x) = -\ln x - 1 ; f'(x) < 0 \text{ si } x < \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{e}$$

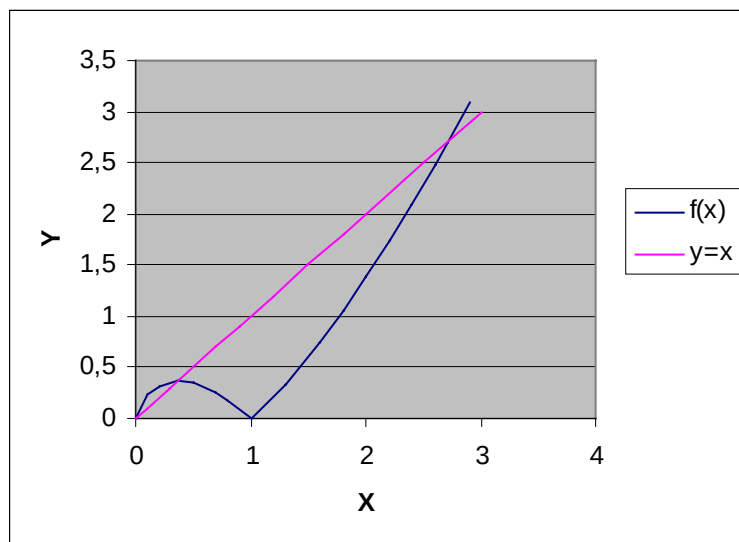
Tableau de variation :

| x       | 0 | 1/e        | 1            | e          | $+\infty$  |
|---------|---|------------|--------------|------------|------------|
| $f'(x)$ | + | 0          | -            | 0          | +          |
| $f(x)$  | 0 | croissante | décroissante | croissante | croissante |

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x \ln x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x \ln x| = 0$$

Courbe représentative :



- Coordonnées des points  $(C) \cap (D)$  :

$$|x \ln x| = x$$

$$\text{pour } x > 1, \quad x \ln x = x$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ d'où } x = e$$

$\Rightarrow$  Premier point d'intersection :  $A(e, e)$

$$\text{Pour } 0 < x < 1, \quad -x \ln x = x$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ d'où } x = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$  Deuxième point d'intersection :  $B(1/e, 1/e)$ .

$$\text{Puisque } f(0) = 0$$

$\Rightarrow$  troisième point d'intersection :  $C(0, 0)$ .

2° - Montrons que  $\alpha$  unique sur  $]1, e[$  tel que :  $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ .

Soit  $I = ]1, e[$

$f(x)$  est continue et strictement croissante sur  $]1, e[$ ,

par conséquent il existe un  $\alpha$  unique sur  $]1, e[$  tel que :  $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ .

$$f(1) = 0$$

$$f(e) = e \ln e = e$$

$\Rightarrow \forall u \in ]0, e[, \exists! a \in I$  tel que  $f(a) = u$  (Théorème des valeurs intermédiaires)

Ici, on prend  $u = 1/e$

$\Rightarrow \exists! \alpha \in ]1, e[$  tel que  $f(\alpha) = 1/e$

Déterminons une valeur approchée  $\alpha$ , à  $10^{-1}$  près par encadrements successifs :

On a :

$$f(2) = 1,38 > 0,367$$

$$f(1,1) = 0,104 < 0,367$$

$$f(1,5) = 0,608 > 0,367$$

$$f(1,3) = 0,3410 < 0,367$$

$$f(1,4) = 0,47 > 0,367$$

On a donc  $\alpha \approx 1,3$

**B)**

1° Les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles  $(u_n)$  est constante

Pour que  $(u_n)$  soit constante, il faut que  $u_1 = f(u_0) = u_0$

On obtient :

$$u_0 = \frac{1}{e}, u_0 = e, u_0 = 0$$

2°

$$u_0 \in ]0, 1/e[$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = |u_n \ln u_n|, \text{ ici } f(u_n) = -u_n \ln u_n$$

$$u_1 = f(u_0) < 1/e$$

$$u_0 \in ]0, 1/e[ \text{ et } u_1 \in ]0, 1/e[ \quad \text{donc cette relation est vraie pour } u_0 \text{ et } u_1,$$

Montrons que si elle est vraie pour  $u_n$  elle est vraie pour  $u_{n+1}$ .

$$\text{Supposons } 0 < u_n < \frac{1}{e}$$

sur  $]0, 1/e[$ ,  $f$  est strictement croissante donc

$$f(0) < f(u_n) < f(1/e)$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < |1/e \ln 1/e|$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1/e$$

$$\text{donc si } u_n \in ]0, 1/e[, \quad u_{n+1} \in ]0, 1/e[ \quad \text{donc } u_n \in ]0, 1/e[.$$

Donc on vient de montrer que si la relation  $0 < u_n < 1/e$  était vraie pour  $u_n$  elle était vraie pour  $u_{n+1}$  donc elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_{n+1} - u_n = |u_n \ln u_n| - u_n$$

$$\text{or, } 0 < u_n < \frac{1}{e}$$

$$u_{n+1} - u_n = -u_n \ln u_n - u_n = -u_n (\ln u_n + 1)$$

$$-u_n < 0 \text{ et } \ln u_n + 1 < 0 \quad \text{donc } u_{n+1} - u_n > 0$$

Sur  $]0, 1/e[$ ,  $(u_n)$  est croissante et l'on vient de montrer qu'elle est bornée (majorée et minorée) donc elle est convergente et a pour limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$$

3°

$$u_0 \in ]1/e, 1[$$

- Encadrement de  $u_1$

$$\frac{1}{e} \langle u_0 \rangle 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{e} \langle \ln u_0 \rangle \ln 1$$

$$\Leftrightarrow -u_0 \ln \frac{1}{e} - u_0 \ln u_0 - u_0 \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \langle u_1 \rangle u_0$$

$$u_0 \in ]1/e, 1[, \text{ donc, } u_1 = f(u_0) \in f(]1/e, 1[)$$

$$\text{Sur } ]1/e, 1[, f \text{ décroît donc } f(]1/e, 1[) \in ]0, 1/e[ \text{ donc } u_1 \in ]0, 1/e[$$

On se retrouve dès le rang 1 dans le cas précédent, on aura alors  $u_n$  tend vers  $1/e$ .

4)  $u_0 = 1$

$$\Rightarrow f(u_0) = f(1) = 0$$

La suite est « constante » si on pose par prolongement  $f(0) = 0$ .

5)

$$u_0 \in ]1, \alpha[ \quad F(\alpha) = 1/e$$

$f$  croît ainsi que  $u_n$

$$u_1 \in f(]1, \alpha[) = [0, 1/e]$$

On se ramène au cas n°1 et  $u_n$  a pour limite  $1/e$ .

6)

$$u_1 \in f(\alpha, e] = ]1/e, e[$$

Si  $u_1 \in ]1/e, 1[$  alors  $u_n$  tend vers  $1/e$

Si  $u_1 \in ]1, e[$ ,  $u_1 < e$

Si  $\forall n$ ,  $u_n < e$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) < e$  oui car

- si  $u_n \in ]0, \alpha[$ ,  $f(u_n) < 1/e < e$

- si  $u_n \in ]\alpha, e[$ , on revient au cas

$u_0 \in ]\alpha, e[$  et  $u_1 < e$

donc  $0 < u_n < e$

Montrons que  $u_1 < u_0$

Montrons donc que  $f(u_0) < u_0$  sur  $]\alpha, e[$

$$f(u_0) = u_0 \ln u_0$$

$$u_0 \in ]\alpha, e[ \Rightarrow \frac{f(u_0)}{u_0} = \ln u_0 < \ln e < 1 \text{ donc } f(u_0) < u_0 \text{ donc } u_1 < u_0.$$

$$u_0 \in ]\alpha, e[ \Rightarrow u_1 \in ]1/e, e[$$

Si  $u_1 \in ]1/e, 1[$ , alors  $u_n$  tend vers  $1/e$ , cela nous ramène au cas 1.

Si  $u_1 \in ]1, \alpha[$ , alors  $u_n$  tend vers  $1/e$ , cela nous ramène au cas 1.

Si  $u_1 \in ]\alpha, e[$ , alors  $u_2 < u_1 \dots \dots \dots$

Par récurrence, si  $\exists n$  tel que  $u_n \in ]1/e, \alpha[$ ,  $u_n$  tend vers  $1/e$

si  $\forall n, u_n \in ]\alpha, e[$ , la suite est bornée décroissante donc elle converge.

La seule limite possible est  $l = 1/e$

(La suite sort de  $]\alpha, e[$  à partir d'un certain rang.



7)  $u_0 > e$

Montrons que  $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$$\Leftrightarrow f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 2(u_n - u_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow f(u_n) - 2u_n \geq f(u_{n-1}) - 2u_{n-1}$$

Or  $u_n > u_{n-1}$  car la suite est croissante.

Montrons que  $f(u) - 2u$  croît sur  $]e, +\infty[$

$$f(u) - 2u = u \ln u - 2u = u(\ln u - 2) = \ln u - 2 + 1 = \ln u - 1$$

$$f'(u) > 0 \quad \text{si} \quad \ln u > 1 \quad \text{donc si} \quad u > e$$

Donc,  $\forall u > e$ ,  $f(u) - 2u$  est croissante

Donc  $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$  (cqfd)

Notons  $v_n = u_n - u_{n-1}$   $v_n > 0$ ,  $\forall n$

On a montré que  $v_{n+1} \geq 2v_n$

$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 2$ , c'est une suite de termes positifs, croissante, non bornée donc divergente.

## EXERCICE

1)

- Si A et B sont inversibles alors, il existe  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$  tels que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$   
 et  $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ .  
 $\Rightarrow AB * B^{-1} * A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ , donc AB est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

- Si AB inversible alors il existe  $(AB)^{-1}$  tel que :  $AB * (AB)^{-1} = (AB)^{-1} * AB = I$   
 $\Rightarrow AB * B^{-1} * A^{-1} = AA^{-1} = I$ , avec  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Donc A est inversible si (AB) est inversible avec  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

La démonstration est identique pour B.

2)  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

A est inversible si  $A^p$  est inversible

1) Supposons A inversible, donc  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\begin{aligned} \text{Soit } A^p &= A * A * \dots * A \text{ (p fois)} \\ A^p * (A^p)^{-1} &= (A * A * \dots * A) * (A^{-1} * A^{-1} * \dots * A^{-1}) \\ &\quad \text{(p fois) \hspace{10em} (p fois)} \end{aligned}$$

Par associativité des matrices, on obtient :

$$\begin{aligned} A^p * (A^p)^{-1} &= (A * A * \dots * (A * A^{-1}) * A^{-1} * \dots * A^{-1}) \\ &= A^{p-1} (AA^{-1}) (A^{p-1})^{-1} = A^{p-1} I (A^{p-1})^{-1} \\ &\text{et de proche en proche } AA^{-1} = I \end{aligned}$$

donc  $A^p * (A^p)^{-1} = I$ , donc  $A^p$  est inversible.

Comme l'inverse d'une matrice est unique, on a,  $A^p * (A^p)^{-1} = A^p * (A^{-1})^p = I$

Donc  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$



Supposons :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrons que  $A^{n+1}$  vraie

$$A^{n+1} = A^n * A = \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin \theta \sin n\theta & \cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos \theta - \sin \theta \cos n\theta & -\sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

donc  $\cos(n\theta + \theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin \theta \sin n\theta$

de même,

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$  donc,

$\sin(n\theta + \theta) = \sin(n+1)\theta = \sin \theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos \theta$

donc

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & 0 \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $A^n$  est vrai.

4)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

5) Si  $(A^n)^{-1}$  existe, alors  $(A^n)(A^n)^{-1} = I$

$$(A^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Admettons  $(A^n)^{-1}$

$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et démontrons } (A^{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{n+1})^{-1} = (A^n * A^1)^{-1} = A^{-1} * (A^n)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta & -\cos \theta \sin n\theta - \sin \theta \cos n\theta & 0 \\ \sin \theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos \theta & -\sin \theta \sin n\theta + \cos n\theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } (A^n)^{-1} \text{ est vraie.}$$

Si  $(A^n)^{-1}$  existe alors  $(A^n) * (A^n)^{-1} = I$

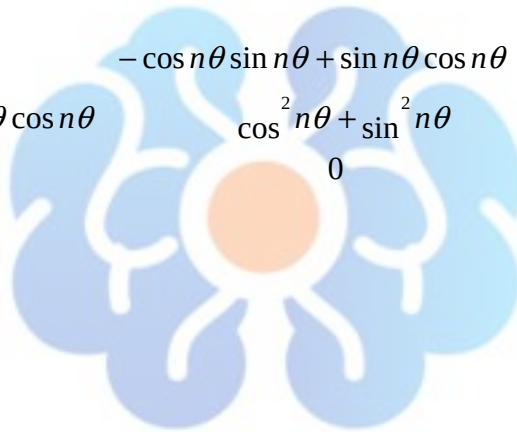
Vérification :

$$(A^n) * (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta & -\cos n\theta \sin n\theta + \sin n\theta \cos n\theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos n\theta & \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

donc  $(A^n)^{-1}$  existe.



**ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN****AVRIL 2000****CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES****VOIE B****OPTION MATHEMATIQUES****DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES****DUREE : 3 HEURES****Exercice 1**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie. On note  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\phi_u$  l'application de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{L}(E)$  qui à tout endomorphisme  $v$  de  $\mathcal{L}(E)$  associe

$$\phi_u(v) = uv - vu.$$

1. Montrer que si  $u$  est diagonalisable alors  $\phi_u$  est diagonalisable.
2. Prouver la réciproque si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos.

**Exercice 2**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $q$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$$

et

$\forall (x, y) \in E^2$  l'application  $t \rightarrow q(x + ty)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est continue .

1. Montrer que l'application  $f$  de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{1}{4}[q(x + y) - q(x - y)]$$

est bilinéaire symétrique. Que peut-on dire de  $q$  ?

2. On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel normé tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Montrer que la norme est euclidienne (c'est-à-dire associée à un produit scalaire).

## Problème

Dans tout le problème, on s'intéresse à l'ensemble  $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$  des matrices  $(3, 3)$  à coefficients réels :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est dite **symétrique** si  $a_{ij} = a_{ji}$  pour tout  $(i, j)$ . Elle sera dite **antisymétrique** si  $a_{ij} = -a_{ji}$  pour tout  $(i, j)$ . Elle sera dite **magique** si  $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, 3,$

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{31} + a_{22} + a_{13}.$$

On donne les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = {}^t A; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

## Partie I

1. Montrer que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$  est la somme d'une matrice symétrique  $M'$  et d'une matrice antisymétrique  $M''$  et que cette décomposition est unique.



2. Montrer que l'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ .
3. Montrer que la transposée d'une matrice magique est magique.
4. Montrer que si  $M$  est magique,  $M'$  et  $M''$  le sont aussi.
5. Vérifier que  $A, B$  et  $C$  sont magiques.
6. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques.
7. Construire toutes les matrices magiques symétriques.
8. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel des matrices magiques de  $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ . Vérifier que  $A, B, C$  est une base du sous-espace vectoriel des matrices magiques.

## Partie II

1. Calculer  $A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB$ .
2. Montrer que  $AB + BA$  est une combinaison linéaire de  $C$  et de  $I_3$  où  $I_3$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ .
3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ?
4. En déduire toutes les matrices magiques produits de deux matrices magiques.
5. Montrer que le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de  $C$  et de  $I_3$  est magique.
6. Montrer que les puissances paires des matrices magiques ne sont pas magiques (sauf dans un cas particulier que l'on précisera), mais que les puissances impaires d'une matrice magique sont toujours magiques.
7. Quand une matrice magique est-elle inversible ? Quelle est alors son inverse ? Est-elle magique ? Peut-on étendre aux exposants négatifs le résultat obtenu à la question précédente sur les exposants positifs ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2001**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**EXERCICE n° 1**

Notation : Dans l'exercice ,on notera  $\int f(x)dx$  l'ensemble des primitives de  $f(x)$  sur l'intervalle  $I$  donné

Soit  $I_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  une fonction définie sur  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

**I-** Calculer la dérivée de la fonction de la variable réelle  $x$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$

**II-** Calculer  $I_0(x), I_1(x), I_2(x)$

**III-** A l'aide d'une intégration par parties , établir une relation de récurrence entre  $I_n(x)$  et  $I_{n-2}(x)$

**IV-** En déduire  $I_3(x)$

**PROBLEME I**

**I-** Former le développement limité , à l'ordre 3 quand  $x$  tend vers 0 de :  $e^x \tan x$

**II-** On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  par  $f(x) = e^x \tan x$

1-Montrer que sur  $I$ ,  $f$  est indéfiniment dérivable et  $f'(x)$  toujours positif.

2-En déduire que  $f$  admet une fonction réciproque notée  $g(t)$  indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et admettant des développements limités de tous ordres lorsque  $t$  tend vers 0.

3-Former le développement de  $g$  à l'ordre 3

**III-** Soit  $n$  un entier naturel.

1-Montrer que sur l'intervalle  $\left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ , l'équation  $e^x \tan x = 1$  admet une racine et une seule que l'on notera  $n\pi + \alpha_n$ .

2-Exprimer  $\alpha_n$  à l'aide de la fonction définie ci-dessus.

3-Montrer que  $\alpha_n \approx e^{-n\pi}$  quand  $n \rightarrow \infty$

On pose  $\beta_n = e^{2n\pi} (\alpha_n - e^{-n\pi})$ .

4-Montrer que  $\beta_n$  a une limite finie  $l$  que l'on calculera .Trouver un équivalent de  $\beta_n - l$

**IV-** Plus généralement , soit  $f$  une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle  $I = ]a, b[$  ,  $a < 0 < b$  et telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ .

1-Montrer que  $f$  admet , sur un intervalle  $J = ]\alpha; \beta[$  ,  $\alpha < 0 < \beta$  , une fonction réciproque  $g$  et que cette dernière admet des développements limités de tous ordres au voisinage de 0.

2-Indiquer une méthode permettant d'obtenir le développement limité à l'ordre  $n$  de  $g(t)$  , connaissant celui de  $f(x)$  au même ordre  $n$ .

**PROBLEME II**

**I-** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$  où  $u_1$  est donné avec  $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

1-Montrer que pour tout  $n > 0$ , on a :  $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$

2-Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente et trouver sa limite.

**II-** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$  pour  $n > 0$ .

1-Montrer que la suite de terme général  $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  tend vers  $+\infty$ .

2-Montrer que  $v_n \leq \frac{2}{1-2u_1^2} u_n$  et en déduire le comportement de la suite de terme général  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

**III-** Montrer que la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $w_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$  converge vers 4.

**IV-**

1-Montrer que si une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge vers une limite  $l$ , la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  converge aussi vers  $l$ .

2-En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} \cdot u_n = 1, (\Leftrightarrow u_n \approx \frac{1}{2\sqrt{n}})$

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2001**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A et B**

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

*Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.*

**SUJET N° 1**

Comparez la Passion et la Volonté.

**SUJET N° 2**

Peut-on qualifier d'inhumaines certaines actions de l'homme et pourquoi ?

**SUJET N° 3**

L'inégalité des hommes rend-elle impossible l'égalité des citoyens ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2001**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**PROBLEME**

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction définie sur  $]0;+\infty[$  par  $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$   
On note  $C$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0;+\infty[$  par  $g(x) = 1 + x - x \ln x$ .

- Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son intervalle de définition.
- Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation (on ne demande pas de construire la courbe représentative de  $g$ ).
- Prouver que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\beta$  unique dans  $]0;+\infty[$ .
- Déterminer le signe de  $g$  sur son ensemble de définition.
- Montrer que  $3,5 < \beta < 3,6$ .

## 2. Etude de $f$

- Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.
- Exprimer la dérivée  $f'$  de  $f$  à l'aide de  $g$  et en déduire les variations de  $f$ .
- Construire la courbe  $C$  (unité graphique : 2 cm); on déterminera les coordonnées du point A d'intersection de  $C$  avec la droite  $D$  d'équation  $y = 2$  et on indiquera la position de  $C$  par rapport à  $D$ .

## 3. Encadrement d'une intégrale

Pour tout élément  $t$  de  $[1; +\infty[$ , on pose  $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$ .

On ne cherchera pas à calculer  $I(t)$ .

- Interpréter géométriquement cette intégrale à partir de la courbe  $C$ .
- Calculer l'intégrale  $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$ , où  $t \geq 1$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale  $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$ , où  $t \geq 1$ .  
Montrer que  $0 \leq K(t) \leq 1$ .
- Vérifier que pour tout élément  $x \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$ . En déduire que  $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$ .
- Déterminer la limite de  $\frac{I(t)}{(\ln t)^2}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**EXERCICE**

Dans cet exercice, le jeu de cartes contient 52 cartes. Toutes sont distribuées entre 4 joueurs, chacun d'entre eux en recevant 13. Chaque ensemble de 13 cartes est appelé une main. On rappelle que les cartes sont réparties en 4 couleurs (carreau, coeur, pique, trèfle). Chaque couleur contient un As, un roi, une dame, un valet, un 10, un 9,...,un 2.

- a) Quelle est la probabilité d'avoir les 4 As dans une main ?
- b) Quelle est la probabilité d'avoir 2 As dans une main ?
- c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un As dans une main ?



1



**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2001**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A**

*et*

**B OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

*Ce texte est tiré du livre intitulé "Université de tous les savoirs", tome 1 "Qu'est-ce que la vie ?", (auteurs collectifs), l'auteur en est Michel Juvet et le titre : "L'évolutions des états du sommeil". Ce livre est paru aux éditions Odile Jacob en Juillet 2000. Il peut être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.*

**\*\*\***

*(... ) Pourquoi l'homme dort-il la nuit ?*

On pourrait penser que la raison en est que cela revient moins cher, car on a pas à s'éclairer ni à se chauffer la nuit, si l'on dort. Pendant très longtemps, cette explication a été acceptée mais elle est fausse. Le fait que l'homme dorme la nuit n'est pas dû au cycle soleil/obscurité.

Comment savoir si l'homme s'endort la nuit en fonction de l'alternance lumière/obscurité ? des expériences ont été réalisées pour le savoir. On place quelqu'un dans un bunker complètement fermé, sans aucun contact avec le soleil, sans montre, en lui permettant d'allumer et d'éteindre la lumière électrique quand il veut, ou bien, tout simplement dans une grotte (expérience de Michel Siffre, le spéléonaute). On observe les moments où il est endormi et les moments où il est éveillé. Dans ces conditions de *free-running*, ou de totale désynchronisation, ou encore hors du temps, le soleil ne peut plus jouer son rôle de "donneur du temps" ou de *Zeitgeber* (*Zeitgeber* signifiant en Allemand "qui donne le temps"). Donc, en dehors de tout *Zeitgeber*, le sujet se couche chaque jour un peu plus tard, si bien qu'après une dizaine de jours, il a manqué un jour. Pour les gens qui sont en dehors de la grotte, il est resté 20 jours dans celle-ci ; pour lui, il n'y est demeuré que 19 jours. Comment expliquer cela ?

Première explication le cycle soleil/obscurité ne joue aucun rôle dans l'entretien de ce rythme. Deuxième élément d'explication : le rythme n'est pas tout à fait de 24 heures, il est d'un peu plus de 24 heures. Il varie selon les sujets, mais on admet actuellement que la période endogène d'un sujet que l'on met dans une grotte ou dans un bunker est de 24,3 heures, ce qui n'est pas exactement un jour. En latin, on dit "à peu près un jour" : *circa diem*. Le qualificatif de "circadien" est en fait apparu dans la littérature récemment, dans les années 1960, sous la plume de Halberg. Comment expliquer ce rythme "circadien" ?

La raison en est la suivante : nous avons une horloge dans la tête. Cette idée d'avoir une horloge dans la tête est née au XVIII<sup>e</sup> siècle, dans l'esprit de l'astronome François Ortous de Mairan. Cet amoureux des plantes possédait chez lui un *Mimosa pudica*. Les feuilles de mimosa ont ceci de particulier qu'elles se redressent le jour et se replient la nuit, d'une façon tout à fait remarquable. L'astronome eut un jour l'idée d'enfermer son mimosa dans un placard obscur : lorsqu'il l'ouvrit à midi, il constata que le mimosa *savait* qu'il y avait du soleil à cette heure-là, puisque ses feuilles étaient ouvertes ; il l'ouvrit à nouveau à minuit, et remarqua que les feuilles étaient fermées. Il décrivit cette expérience dans une note d'une page parue dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, en 1729, dans laquelle il concluait : "il y a une horloge à l'intérieur du mimosa". Personne ne l'a cru. Il a fallu attendre 100 ans, en 1820, pour que l'un des meilleurs botanistes, de Candolle, enregistre les mouvements des feuilles de mimosa la nuit et le jour, puis dans l'obscurité totale, et constate les mêmes mouvements des feuilles. La seule explication, conclut-il également, c'est qu'il se trouve une sorte d'horloge dans la plante. Cette horloge, qui nous permet d'aller nous coucher le soir, même sans connaître l'heure, joue un rôle fondamental.

Où se trouve cette horloge dans notre cerveau ? Et pourquoi a-t-on une horloge ? Cette horloge est présente en effet dans tous les êtres vivants, de l'unicellulaire à l'homme ; c'est sans doute une des plus grandes inventions de l'évolution, car elle est responsable de ce qu'on appelle "l'homéostasie prédictive". Où se trouve l'horloge ? On s'est aperçu, en travaillant sur les plantes ou les animaux, que lorsqu'ils avaient un rythme de 23 ou 24,3 heures, il suffisait de leur projeter un bref éclair de lumière pour que leur horloge vienne se remettre à 24 heures. Autrement dit, le rôle du *Zeitgeber* solaire, de la lumière, est très important pour que pour que l'horloge que nous avons dans la tête vienne se remettre à un rythme de 24 heures. L'horloge est donc en rapport avec la lumière, et surtout avec la lumière bleue chez l'homme. L'horloge se trouve dans les yeux de la mouche. Chez les oiseaux, l'horloge est situé dans la "glande pinéale" ou l'*épiphyse*, qui est juste sous l'os du crâne, lequel laisse passer suffisamment de photons pour que le soleil vienne agir sur l'horloge. Le chat, pour sa part, a une horloge qui fonctionne très mal, il n'a pas de rythme *circadien*, et il dort autant le jour que la nuit.

L'horloge, chez l'homme, n'a été découverte que dans les années 1970. En regardant certaines projections de la rétine, on s'est aperçu qu'il y avait deux systèmes dans le cerveau : un *système visuel*, qui passe par la rétine, qui va dans le cerveau, et se termine au niveau du cortex occipital : c'est le système dit *visuel*, qui fait que je vois que vous êtes là. Mais depuis on a découvert le *système photique* : certaines cellules ganglionnaires de la rétine se projettent au niveau du noyau supra-chiasmatique (qui est l'horloge chez l'homme et les mammifères). A partir de ce noyau, tout un système va prévenir le cerveau qu'il fait jour. Ce n'est pas parce que nous sommes conscients qu'il fait jour, grâce à notre système visuel, que notre cerveau, lui le sait. Il y a même un rat complètement aveugle, mais à qui il reste quelques petites cellules sous la peau, qui forment un système suffisant pour venir activer son noyau suprachiasmatique. On peut donc être totalement aveugle, et avoir notre cerveau capable de savoir qu'il fait jour. Certains se demandent même si certaines maladies psychiatriques ne pourraient pas être dues à l'inverse : on peut très bien voir, mais avoir notre système photique défectueux, de telle sorte que l'horloge se recale mal le matin. Ainsi, à certains moments, tandis qu'il sera 3 heures de l'après-midi, elle peut dire à l'organisme qu'il est trois heures du matin. C'est pourquoi, pour traiter certaines maladies dépressives, on fait regarder aux patients, le matin, des tubes fluorescents pour exciter leur système photique. En dehors du système photique, la glande pinéale, (ou épiphyse), est reliée aux noyaux supra-chiasmatiques. A l'obscurité, elle secrète une hormone, la mélatonine, qui favorise l'endormissement. En conclusion, il faut retenir que l'horloge circadienne organise notre sommeil dans le temps, mais elle n'est pas responsable du sommeil. La preuve en est donnée par l'expérience suivante. Un rat est placé dans l'obscurité continue, son noyau *supra-chiasmatique* lui "dit" d'être éveillé ou de dormir toutes les 24 heures. Ensuite,

si on détruit l'horloge des noyaux supra-chiasmatiques (par coagulation avec des électrodes), le rythme circadien est détruit, puisqu'on a plus d'horloge ; et le rat va dormir selon un rythme *plus rapide* que le rythme circadien, c'est à dire selon un rythme ultradien (à peu près toutes les trois heures). L'explication de ce rythme ultradien dans la physiologie du sommeil, n'a pas encore été apportée. Le sommeil est un mystère dans lequel il reste encore beaucoup à découvrir.

Maintenant que l'on sait où est l'horloge et que l'on sait que ce n'est pas le centre du sommeil, et qu'elle sert à installer des périodes de sommeil, posons-nous la question suivante : pourquoi a-t-on une horloge ? A quoi cela peut-il servir ? Permettez-moi la métaphore suivante : au commencement du monde, dans l'océan primitif, il n'y avait que des algues bleues. Elles se groupent dans le fond de l'océan et montent à la surface de la mer pour absorber des photons, c'est à dire à la lumière du soleil, déclenchant une chaîne de réactions chimiques produisant des sucres. Supposons que certaines d'entre elles, "pas très intelligentes", mettent en jeu les synthèses protéiques lorsque le soleil est au zénith, pendant 5 ou 6 heures pour fabriquer des sucres à partir du soleil : lorsque tout sera prêt pour qu'elles fabriquent des sucres, le soleil sera malheureusement couché. Ce sera donc un échec lamentable. C'est après bien des essais et des erreurs de cette sorte, que les algues se sont enfin mises à fabriquer tous les mécanismes de synthèses *avant 6 heures du matin* (prenant ainsi en compte l'aspect très prédictif de la courbe de la Terre autour du soleil), afin que, le soleil étant à son zénith, toutes les choses soient prêtes, et que tout marche. Cette invention, on lui a donné le nom d'*homéostasie prédictive*. Sans ce système, la vie serait impossible. Tout système vivant entre en réaction avec les milieux extérieurs, et il se produit des réactions chimiques plus ou moins rapides, et si elles ne sont pas préparées par la synthèse des protéines qui doit avoir lieu avant, le système ne peut pas fonctionner, en particulier le système qui dépend du jour et de la nuit.

L'*homéostasie prédictive* a également lieu chez l'homme : le matin, il faut que notre système corticosurrénalien, nos muscles, soient en parfait état. Or, cela ne peut pas se faire instantanément le matin : ça doit être mis en jeu la nuit. Sous l'influence de notre horloge circadienne, vers 2 h du matin, l'hypothalamus, se met à libérer certains facteurs (CRF), qui vont agir sur l'ACTH, lequel va agir sur la corticosurrénale, laquelle va augmenter le taux de cortisone trop faible le matin. Ainsi, c'est au cours du sommeil le plus profond, vers 2-3 heures du matin, que se met en route le véritable mécanisme dont on a besoin lorsqu'on se réveille.

Quittons maintenant les algues bleues pour remonter l'arbre de l'Evolution jusqu'aux *Ectothermes*, c'est à dire les lézards, les batraciens, certains reptiles. Qu'est-ce que le sommeil pour ces animaux là ? A vrai dire, les physiologistes n'osent pas parler de "sommeil", chez une grenouille, chez un lézard; ils parlent plutôt de "repos", de "cycle activité/repos". La température ambiante est le principal facteur qui va entretenir le repos et l'activité. La température, lorsqu'elle monte, rend l'animal actif, lorsqu'elle redescend, le rend inactif. On peut très bien aller chercher une vipère dans le bois de Saint-Cloud à minuit : elle ne mordra pas, parce qu'il fait froid.

Tout ceci résulte de l'application d'un principe : le principe du Q10. Admettons que la fréquence cardiaque de l'animal à 37° C soit de 100; à 27° C, elle sera de 50 ; et le Q10 sera le quotient de 37/27 : ce sera 2. Chez tous les animaux, tous les phénomènes biologiques quels qu'ils soient ont un Q10 compris entre 2 et 3. Une baisse de température de l'ordre de 5° est suffisante pour que ces animaux qui dépendent de la température extérieure, ne puissent pas être éveillés et restent dans leur abri. L'homéostasie prédictive joue toujours un jeu : l'horloge circadienne vers 5 heures de l'après-midi, "dit" au lézard : "mets-toi vite à l'ombre, autrement, plus tard, tu ne pourras pas rentrer car il fera trop froid". Avec les oiseaux et les autres mammifères, nous sommes des animaux *homéothermes*. Nous possédons suffisamment de mitochondries pour que notre chaleur animale nous permette de nous promener lorsqu'il fait froid. Les variations de la température extérieure ne sont donc pas suffisantes pour expliquer le rythme éveil-sommeil.

*Il faut maintenant essayer d'expliquer pourquoi on est inconscient pendant le sommeil.*

Pourquoi le ronfleur ne sait-il pas qu'il ronfle ? Que se passe-t-il dans le sommeil des oiseaux et des mammifères que nous sommes, pour que nous perdions conscience au cours du sommeil ?

C'est facile à comprendre pour une grenouille : si elle est à basse température, son système nerveux ne marche pas très bien. Mais, chez les mammifères, chez l'homme, la température reste la même, donc il faut chercher une autre explication. Qu'est-ce que, chez les mammifères et les oiseaux ont acquis de plus par rapport aux reptiles et aux batraciens ? Ils ont acquis le manteau cortical - le cortex cérébral avec lequel on pense -, et un système qui est le thalamus, il y a une espèce de "machine automatique" qui nous rend inconscients lorsque nous dormons.



Que se passe-t-il quand nous sommes éveillés ? Ce cortex cérébral est excité par un réseau de neurones (comme le Web). Cette excitation provoque une activité électrique rapide qui est nécessaire à la conscience.. Comment s'endort-on ? Normalement : lorsque l'horloge - le noyau supra-chiasmatique - va envoyer le signal "il est 10 heures du soir", on va bâiller, avoir sommeil. Des mécanismes compliqués vont commencer à baisser notre température centrale. Elle descend avant que l'on dorme. Ordre est alors donné à un nouveau système situé dans l'hypothalamus - le système du sommeil - d'entrer en jeu. Ce système va venir bloquer les systèmes de l'éveil, avec un neurotransmetteur qui est le "GABA". Etant donné que les systèmes de l'éveil bloquent cette machine automatique qui est situé au coeur du thalamus, le thalamus envoie alors cette activité vers le cortex où elle vient "brouiller" les processus de la conscience. On a donné à cette activité électrique le nom de "fuseaux", ou, comme elle a été découverte par les Américains, de *spindle*.

Voilà les grandes acquisitions des homéothermes : ce n'est pas la baisse de la température centrale, qui est minime, qui fait qu'ils ne peuvent pas réagir au bruit, et qu'ils ne savent pas qu'ils ronflent. C'est le système de sommeil qui bloque les informations de l'éveil, libère le système thalamo-cortical responsable des "fuseaux". L'apparition de ces "fuseaux" au niveau du cortex est l'indice du sommeil et de la perte de conscience. Les fuseaux sont ensuite suivis par l'apparition d'ondes lentes qui sont l'indice d'un sommeil très profond. ( ... )

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**
**VOIE B**
**AVRIL 2001**
**OPTION MATHEMATIQUES**
**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**
**EXERCICE**

**I-** En utilisant les formules de dérivées relatives au logarithme et à la tangente , il vient immédiatement :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

**II-**

$$I_0(x) = \int dx = x + C$$

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

**III -** Pour  $n > 1$  , on écrit  $I_n(x) = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$

Intégrons par parties en posant

$$u(x) = \cos^{2-n} x, v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u'(x) = (n-2) \cos^{1-n} x \cdot \sin x, v(x) = \tan x$$

Ainsi :

$$I_n(x) = \cos^{2-n} x \tan x - (n-2) \int \tan x \cos^{1-n} x \sin x dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) [I_n(x) - I_{n-2}(x)]$$

$$\Leftrightarrow I_n(x) = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}(x)$$

$$\text{IV- } I_3(x) = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

## PROBLEME I

### I-

Au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow e^x \tan x = x + x^2 + \frac{5}{6} x^3 + o(x^3)$$

### II-

1-  $f'(x) = e^x \tan x + e^x (1 + \tan^2 x) > 0$  puisque  $u^2 + u + 1$  n'a pas de racine réelle et est toujours positif.

$f$  est donc strictement croissant de  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$

Nous savons alors que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie et croissante sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(0)=0$

Par ailleurs,  $f$  étant formée de fonctions indéfiniment dérivables sur  $I$  est elle-même indéfiniment dérivable sur  $I$ .



2-Nous avons vu que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$ .

Si  $t = f(x) \leftrightarrow x = g(t)$  on a  $g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))}$  définie sur  $\mathbb{R}$  puisque  $f'(x) > 0$ ,  $g''(t) = -\frac{f''(g(t))}{f'(g(t))^2} \frac{1}{f'(g(t))}$ , elle même encore dérivable, et ainsi de suite :  $g(t)$  est donc indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  puisqu'il en est ainsi de  $f'(x)$  par rapport à  $x$ .

Donc  $g(t)$  admet des développements limités de tous ordres quand  $t$  tend vers 0, donnés théoriquement par la formule de Mac Laurin Young :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2!} g''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} g^{(n)}(0) + o(t^n)$$

On a  $g(0)=0$ ,  $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ , le développement de  $g$  est donc de la forme :  $g(t) = t + at^2 + bt^3 + o(t^3)$

Plus simplement que la formule Mac-Laurin, nous obtiendrons  $a$  et  $b$  en écrivant que  $f(g(t))=t$  d'où :

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= g(t) + g^2(t) + \frac{5}{6} g^3(t) + o(t^3) \\ &= t + at^2 + bt^3 + (t^2 + 2at^3) + \frac{5}{6} t^3 + o(t^3) \\ &= t + (a+1)t^2 + (b+2a+\frac{5}{6})t^3 + o(t^3) = t \end{aligned}$$

d'où par identification :  $g(t) = t - t^2 + \frac{7}{6}t^3 + o(t^3)$  (1)

### III-1- et 2-

$$e^{n\pi + \alpha_n} \tan \alpha_n = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha_n} \tan \alpha_n = e^{-n\pi} \Leftrightarrow \alpha_n = g(e^{-n\pi}) \text{ puisque } \alpha_n \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

3-Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-n\pi} \rightarrow 0$ ,  $\alpha_n \approx e^{-n\pi}$  d'après (1)

$$4- \text{ Si on pose } t = e^{-n\pi} \text{ alors } \beta_n = e^{2n\pi} (\alpha_n - e^{-n\pi}) = \frac{1}{t^2} [g(t) - t]$$

Si  $t = e^{-n\pi} \rightarrow 0$ ,  $g(t) - t \approx -t^2$  d'après (1) et  $\beta_n \rightarrow -1 = l$

$$\text{Enfin, } \beta_n - l = \beta_n + 1 = \frac{1}{t^2} [g(t) - t + t^2] \approx \frac{1}{t^2} \frac{7}{6} t^3 = \frac{7}{6} t \Leftrightarrow \beta_n - l \approx \frac{7}{6} e^{-n\pi}$$

### IV-

1-Si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$  et  $f'(0)$  différent de 0,  $f'$  est continue sur  $I$  et il existe un voisinage de 0, soit  $J = ]\alpha, \beta[$ ,  $a \leq \alpha < 0 < \beta \leq b$  sur lequel  $f'$  garde un signe constant, celui de  $f'(0)$

Donc  $f$  est strictement monotone sur  $J$  et admet une fonction réciproque  $g$ .

En raisonnant comme précédemment ,

$$g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$$

... et ainsi de suite.

$$g''(t) = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

g est donc indéfiniment dérivable sur  $]f(\alpha); f(\beta)[$ , g(0) est nul puisque f(0)=0 implique que 0=g(0) et g admet des développements limités de tous ordres :

$$g(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n + o(t^n)$$

2-Pour obtenir les coefficients du développement de g , il suffit d'identifier avec les coefficients du développement limité de f(g(t)), d'où

$$f(g(t)) = a_1(b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n) + a_2(b_1^2 t^2 + 2b_1 b_2 t^3 + \dots) + \dots + a_n b_1^n t^n + o(t^n) = t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_1 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{a_1} \\ b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3} \\ \vdots \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer de proche en proche :

$$\begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

**PROBLEME II**

**I-**La relation de récurrence donne pour  $n=1$  :  $u_2 = u_1 - 2u_1^3 = u_1(1 - 2u_1^2)$

Puisque  $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$  on a  $0 < 1 - 2u_1^2 < 1$  donc  $0 < u_2 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En raisonnant par récurrence et en supposant  $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}, n \geq 1$ , on a donc  $0 < u_n^2 < \frac{1}{2}, 0 < 1 - 2u_n^2 < 1$

d'où encore  $0 < u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n^2) < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante, minorée par 0 et majorée par  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Elle est convergente et a pour limite

$$l \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

La fonction  $f$  telle que  $f(x) = x - 2x^3$  étant continue, la relation de récurrence nous donne pour  $n \rightarrow +\infty$   
 $l = l - 2l^3$  soit  $l=0$

**II-**

1-

$$V_n = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1}$$

Quand  $n \rightarrow +\infty, u_{n+1} \rightarrow 0^+, \frac{1}{u_{n+1}} \rightarrow +\infty, V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \rightarrow +\infty$

$$2- v_n = \frac{1}{u_n - 2u_n^3} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 - (1 - 2u_n^2)}{u_n(1 - 2u_n^2)} = \frac{2u_n}{1 - 2u_n^2}, \text{ puisque } u_n \neq 0.$$

On sait que  $0 < u_n < u_1 \Rightarrow 0 < u_n^2 < u_1^2, -u_n^2 > -u_1^2, 1 - 2u_n^2 > 1 - 2u_1^2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 - 2u_n^2} < \frac{1}{1 - 2u_1^2}$  et

$$0 < v_n < \frac{2}{1 - 2u_1^2} u_n.$$

On en déduit  $u_n > kv_n$  avec  $k = \frac{1 - 2u_1^2}{2} > 0$  d'où  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > kV_n$  avec  $V_n \rightarrow +\infty$ .

Il s'ensuit que  $S_n \rightarrow +\infty$ .

$$\text{III- } w_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{u_n^2 - u_n^2(1-2u_n^2)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{1 - (1-2u_n^2)^2}{u_n^2(1-2u_n^2)^2} = 4 \frac{(1-u_n^2)}{(1-2u_n^2)^2}$$

Pour  $n \rightarrow +\infty, u_n \rightarrow 0 \Rightarrow w_n \rightarrow 4$ .

#### IV-

1-Rappelons :

Si  $a_n = l + \alpha_n$  alors  $b_n = l + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k$ . Or  $\alpha_k \rightarrow 0$  et il suffit de démontrer que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow 0$

Pour  $n \geq n_0 + 1, S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \alpha_k$

$$|S_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |\alpha_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |\alpha_k|$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ , alors  $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |\alpha_k| < \frac{n-n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\exists n_1 / n \geq n_1 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}, n_0$

étant fixé.

Donc  $n \geq n_2 = \sup(n_0, n_1) \Rightarrow |S_n| < \varepsilon$  et  $S_n \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow l$$

2-Appliquons ce résultat à la suite  $(w_n)$  ; puisque  $w_n \rightarrow 4, z_n = \frac{1}{n} (w_1 + w_2 + \dots + w_n) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n^2 - u_1^2} \right) \rightarrow 4$

Or  $u_{n+1}^2 \rightarrow 0^+, \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \approx \frac{1}{u_{n+1}^2}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc  $nu_{n+1}^2 \approx \frac{1}{4}, u_{n+1}^2 \approx \frac{1}{4n} \approx \frac{1}{4(n+1)}$  ou  $u_n^2 \approx \frac{1}{4n}$

Comme  $u_n > 0$ , on en déduit :  $u_n \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}, n \rightarrow +\infty$

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**
**VOIE B**
**AVRIL 2001**
**OPTION MATHEMATIQUES**
**CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE**
**PROBLEME**

 1. Soit  $g(x) = 1 + x - x \ln x$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x - x \ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} 1 + x \rightarrow 1 \\ x \ln x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x} + 1 - \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 \rightarrow 1 \\ \ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

b)  $g'(x) = 1 - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

$$g'(x) = -\ln x$$

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \text{ et } 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$$

 Tableau de variation de  $g$ 

| $x$     | 0          | 1            | $+\infty$ |
|---------|------------|--------------|-----------|
| $g'(x)$ |            | +            | -         |
| $g(x)$  |            | 2            |           |
|         | croissante | décroissante |           |
|         | 1          |              | $-\infty$ |

c) pour  $x \in ]0;1]$ ,  $g(x) > 0$

pour  $x \in ]1;+\infty[$ ,  $g$  est continue et strictement décroissante avec  $g(1) = 2$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\beta$  unique dans  $]0;+\infty[$ .

d) pour  $x \in ]0;\beta[$ ,  $g(x) > 0$

pour  $x \in ]\beta;+\infty[$ ,  $g(x) < 0$

e)  $g(3,5) \approx 0,115$

$$g(3,6) \approx -0,011$$

donc  $3,5 < \beta < 3,6$

2. Soit  $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$  définie sur  $]0;+\infty[$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 + \frac{1}{1+x} \cdot \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{1+x} \rightarrow 1 \\ \ln x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ car } \begin{cases} \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$b) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{1+x - x \ln x}{x(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est le même que celui de  $g(x)$  car  $x(1+x)^2 > 0$  sur  $]0;+\infty[$ .

**Tableau de variation de  $f$** 

| $x$     | 0 | $\beta$                                              | $+\infty$ |
|---------|---|------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ |   | +                                                    | 0 -       |
| $f(x)$  |   | $f(\beta)$<br>croissante décroissante<br>$-\infty$ 2 |           |

c) L'abscisse du point A intersection de  $C$  et de la droite  $D$  d'équation  $y = 2$  est

solution de l'équation  $\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \in ]0; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{\ln x}{1+x} = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Le point A a donc pour abscisse 1 et pour ordonnée 2.

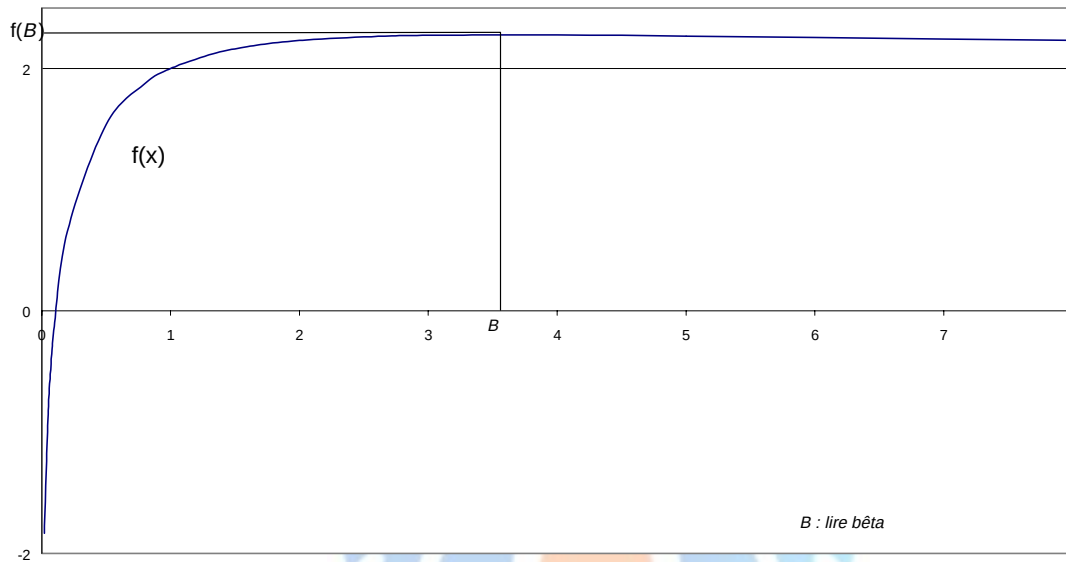
Pour déterminer la position de  $C$  par rapport à  $D$ , étudions le signe de  $f(x) - 2$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

$$f(x) - 2 = \frac{\ln x}{1+x}$$

Comme  $1+x > 0$ , le signe de  $f(x) - 2$  est le même que celui de  $\ln x$ .

| $x$        | 0 | 1                   | $+\infty$        |
|------------|---|---------------------|------------------|
| $f(x) - 2$ |   | - 0 +               |                  |
|            |   | C en dessous de D A | C au-dessus de D |

On peut noter que  $D$  est asymptote à  $C$  au voisinage de l'infini car  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2) = 0$ .



3. Soit  $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$  pour  $t \geq 1$

a) Comme  $\ln(x) \geq 0$  sur  $[1, +\infty[$ ,  $I(t)$  représente l'aire en unités d'aire de la portion de plan définie par  $\begin{cases} 1 \leq x \leq t \\ 2 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

b) Soit  $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$  pour  $t \geq 1$

Posons  $p = \ln x$  ou  $x = e^p$

La fonction  $p \mapsto e^p$  est dérivable et strictement croissante d'où

$$J(t) = \int_{\ln 1}^{\ln t} \frac{p}{e^p} e^p dp = \int_0^{\ln t} p dp = \left[ \frac{1}{2} p^2 \right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2} (\ln t)^2$$



c) Soit  $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$  pour  $t \geq 1$

Intégrons par parties en posant  $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$  d'où  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$K(t) = \left[ -\frac{1}{x} \ln x \right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x^2} dx$$

$$K(t) = -\frac{1}{t} \ln t - \left[ \frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$K(t) = -\frac{1}{t} \ln t - \frac{1}{t} + 1$$

$$K(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t}$$

•  $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$  avec  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  positive sur  $[1; t]$ ,  $\forall t \geq 1$ .

Donc  $K(t) \geq 0$  pour  $t \geq 1$ .

$$\bullet 1 - K(t) = 1 - 1 + \frac{1 + \ln t}{t} = \frac{1 + \ln t}{t}$$

pour  $t \geq 1$ ,  $1 + \ln t \geq 0$  donc  $1 - K(t) \geq 0$  d'où  $K(t) \leq 1$

Pour  $t \geq 1$ , on a donc bien  $0 \leq K(t) \leq 1$

d) • Pour  $x \geq 1$ , on a  $1 + x \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \geq 0$

$$\bullet \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

Pour  $x \geq 1$ , on a  $x^2 + x \geq x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$

Pour  $x \geq 1$ , on a donc  $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$

Pour  $x \geq 1$ , nous avons  $\ln x \geq 0$  d'où

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}$$

Les fonctions  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$ ,  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  étant intégrables sur  $[1; +\infty[$ , nous avons

$$0 \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Donc  $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$

$$\text{e) } 0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t) \leq 1$$

$$0 \leq J(t) - I(t) \leq 1$$

$$-J(t) \leq -I(t) \leq 1 - J(t)$$

$$J(t) - 1 \leq I(t) \leq J(t)$$

$$\text{Pour } t \geq 1, (\ln t)^2 \geq 0$$

$$\frac{J(t) - 1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{J(t)}{(\ln t)^2}$$

$$\text{Or, } J(t) = \frac{(\ln t)^2}{2} \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} = 0, \text{ on en déduit } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}$$

## EXERCICE

a) L'espace des tirages de 13 cartes parmi 52 comprend

$$C_{52}^{13} = \frac{52 \times 51 \times \dots \times 41 \times 40}{13!} \text{ événements élémentaires.}$$

L'événement « avoir 4 As dans une main » comprend  $C_{48}^9 = \frac{48 \times 47 \times \dots \times 41 \times 40}{9!}$  événements élémentaires.

$$p(4 \text{ As}) = \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,00264$$

b) L'événement «avoir 2 As dans une main» comprend

$$C_4^2 \times C_{48}^{11} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{48 \times 47 \times \dots \times 39 \times 38}{11!} \text{ événements élémentaires.}$$

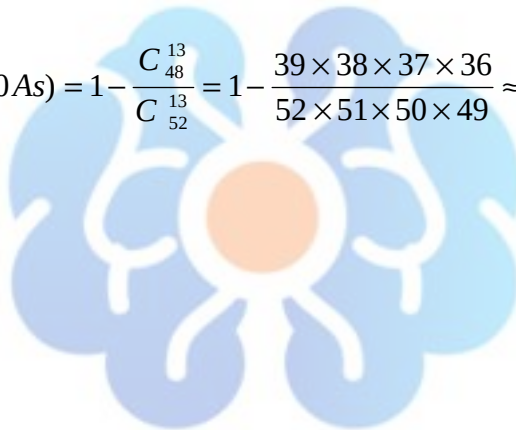
$$p(2 \text{ As}) = \frac{C_4^2 \times C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}} = 6 \times \frac{39 \times 38 \times 13 \times 12}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,213$$

c) Calculons la probabilité de ne pas avoir d'As  $p(0As)$  et nous en déduisons la probabilité d'avoir au moins un As  $1 - p(0As)$ .

L'événement « ne pas avoir d'As dans une main » comprend

$$C_{48}^{13} = \frac{48 \times 47 \times \dots \times 37 \times 36}{13!} \text{ événements élémentaires.}$$

$$p(\text{au moins 1 As}) = 1 - p(0As) = 1 - \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} = 1 - \frac{39 \times 38 \times 37 \times 36}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,696$$



# CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

## VOIE B

### OPTION MATHEMATIQUES

### CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

#### Exercice 1

1. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $u : u(e_i) = \lambda_i e_i$  où  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ . Notons  $E_{ij}$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$$

avec  $\delta_{jk}$  symbole de Kronecker. Alors  $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  forme une base de  $\mathcal{L}(E)$ .

On a :

$$\phi_u(E_{ij})(e_k) = (\lambda_i - \lambda_k) \delta_{jk} e_i = (\lambda_i - \lambda_k) E_{ij} e_k.$$

Donc  $u$  diagonalisable  $\Rightarrow \phi_u$  diagonalisable.

2. Supposons  $\phi_u$  diagonalisable et  $\mathbb{K}$  algébriquement clos.  $u$  admet donc un vecteur propre :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \exists x (x \neq 0_E) \in E, u(x) = \lambda x.$$

L'application de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $E$  qui à tout endomorphisme  $f$  associe  $f(x)$  est linéaire surjective car  $x \neq 0_E$ . Cette application transforme donc une base de  $\mathcal{L}(E)$  en une famille génératrice de  $E$ . Cette famille génératrice contient une sous-famille qui forme une base de  $E$ . par hypothèse,  $\mathcal{L}(E)$  admet une base de vecteurs propres pour  $\phi_u$ , il existe donc une famille libre  $(f_1, \dots, f_n)$  de vecteurs propres de  $\phi_u$  telle que :  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  forme une base de  $E$ .

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \phi_u(f_i) = \lambda_i f_i = u f_i - f_i u$  donc

$$\lambda_i f_i(x) = u(f_i(x)) - \lambda f_i(x)$$

donc

$$u(f_i(x)) = (\lambda_i + \lambda) f_i(x).$$

$(f_1(x), \dots, f_n(x))$  forme donc une base de vecteurs propres pour  $u$ . Donc  $u$  est diagonalisable.

## Exercice 2

1. En appliquant la première propriété de  $q$  à  $x = y = 0$ , on trouve  $q(0) = 0$  et en l'appliquant à  $x = 0, y \in E$  on trouve  $q(y) = q(-y)$ . On en déduit que  $f$  est symétrique.

Soit  $(x, x', y) \in E^3$ ,

$$f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} [q(x' + 2y) - q(x' - 2y)] - q(x' + y) + q(x' - y) \right].$$

Ce résultat est indépendant de  $x$  donc :

$$f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = f(x', y) - f(0, y) - f(x', y) = 0.$$

Par un argument classique, on en déduit que  $f$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire par rapport à sa première variable.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in E^2$ . L'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\lambda \rightarrow f(\lambda x, y) - \lambda f(x, y)$$

est nulle sur  $\mathbb{Q}$  et continue d'après la seconde propriété de  $q$ . Elle est donc nulle sur  $\mathbb{R}$ .

En conclusion,  $f$  est une forme bilinéaire symétrique et

$$x \rightarrow \frac{1}{4} q(2x) = q(x)$$

est une forme quadratique.

2.

$$\|x + (t + h)y\|^2 + \|x + (t - h)y\|^2 = 2\|x + ty\|^2 + 2h^2\|y\|^2.$$

Donc  $t \rightarrow \|x + ty\|^2$  est une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et on applique le résultat de la question précédente avec  $q(x) = \|x\|^2$ .

## Problème

### Partie I

1. Toute matrice carrée peut s'écrire sous la forme demandée, il suffit pour cela de prendre

$$M' = \frac{1}{2}(M + {}^t M), M'' = \frac{1}{2}(M - {}^t M).$$

On vérifie aisément que  $M'$  est symétrique et  $M''$  est antisymétrique.

En outre, si on cherche les matrices  $M'$  et  $M''$  qui vérifient  $M = M' + M''$ , en transposant, on obtient

$${}^t M = M' - M''$$

et les relation

$$M = M' + M'', {}^t M = M' - M''$$

donnent une solution unique.

2. Déjà, la matrice nulle est magique.

Soit  $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$ , on vérifie facilement que si  $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, 3$ ,

$$l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} = l_{11} + l_{22} + l_{33} = l_{31} + l_{22} + l_{13}$$

et

$$n_{i1} + n_{i2} + n_{i3} = n_{1j} + n_{2j} + n_{3j} = n_{11} + n_{22} + n_{33} = n_{31} + n_{22} + n_{13}$$

alors  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + \lambda(n_{i1} + n_{i2} + n_{i3}) = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} + \lambda(n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) = l_{11} + l_{22} + l_{33} + \lambda(n_{11} + n_{22} + n_{33}) = l_{31} + l_{22} + l_{13} + \lambda(n_{31} + n_{22} + n_{13})$ .

L'ensemble des matrices magiques est donc un sous - espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

3. La transposée d'une matrice magique est magique. En effet, les diagonales restent inchangées et comme la transposition revient à permuter ligne et colonne d'une matrice, les égalités entre somme des éléments des lignes et somme des éléments des colonnes est toujours valable.
4. Des égalités et d'après la question précédente,  $M' = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$  et  $M'' = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ , il est immédiat que si  $M$  est magique,  $M'$  et  $M''$  le sont aussi.

5. Vérification immédiate

6. Toute matrice antisymétrique d'ordre 3 s'écrit  $M'' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ . La vérification des matrices magiques d'ordre 3 conduit au système suivant :

$$-\gamma + \beta = -\alpha + \gamma = -\beta + \alpha = \gamma - \beta = \alpha - \gamma = \beta - \alpha = 0.$$

De là, on en déduit que

$$M'' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Traitons le cas où la somme des éléments diagonaux est nulle. Dans ce cas, les matrices magiques symétriques sont de la forme :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On traite le cas où la somme des termes diagonaux n'est pas nulle et vaut  $s$  en ajoutant à chacun des 9 éléments de la matrice trouvée  $\frac{s}{3}$ . Ceci fournit l'écriture :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Ainsi, comme toute matrice peut s'écrire comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique, toute matrice magique s'écrit de la forme :

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit,

$$M = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)A - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)B + \nu C = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

On en déduit ainsi que  $A, B, C$  est une famille génératrice de l'espace des matrices magiques. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est libre, ce qui est immédiat. La dimension est donc 3.

## Partie II

- 1.

$$A^2 = B^2 = AC = CA = BC = CB = 0, \\ C^2 = 3C,$$

- 2.

$$AB + BA = 12I - 4C.$$

3.  $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\lambda A + \mu B + \nu C)$  peut s'écrire sous la forme

$$3\gamma\nu C + \begin{pmatrix} 2\beta\lambda + 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda - 6\alpha\mu \\ -4\beta\lambda & -8\beta\lambda & -4\beta\lambda \\ 2\beta\lambda - 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda + 6\alpha\mu \end{pmatrix}$$

Ce produit est magique si et seulement si  $\beta\lambda$  et  $\alpha\mu$  sont nuls.

4. On en déduit tous les produits magiques de matrices magiques :

$$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \gamma C(\lambda A + \mu B + \nu C) = 3\gamma \nu C,$$

$$\alpha = 0, \lambda = 0 \Rightarrow (\beta B + \gamma C)(\mu B + \nu C) = 3\gamma \nu C,$$

$$\beta = 0, \mu = 0 \Rightarrow (\alpha A + \gamma C)(\lambda A + \nu C) = 3\gamma \nu C,$$

$$\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \gamma C(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 3\gamma \nu C.$$

La matrice  $C$  est la seule qui soit magique et produit de deux matrices magiques.

5.  $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\alpha' C + \beta' I_3) = \alpha \beta' A + \beta \beta' B + (3\gamma \alpha' + \gamma \beta') C$  qui est bien magique.

6.  $M^2 = (\alpha A + \beta B + \gamma C)^2$  est magique si et seulement si  $\alpha \beta = 0$ .

Si  $\alpha \beta \neq 0$ ,

$$M^2 = 12\alpha \beta I_3 + (3\gamma^2 - 4\alpha \beta) C = aI_3 + bC$$

et donc

$$M^{2n} = (M^2)^n = hI_3 + kC.$$

Par conséquent,  $M^{2n+1} = M^{2n}.M$  est magique en tant que produit d'une matrice magique et d'une combinaison linéaire de  $I_3$  et de  $C$  ce qui établit le résultat demandé concernant les puissances impaires.

7. Le déterminant d'une matrice magique est  $D(M) = -36\alpha\beta\gamma$ . Donc  $M$  est inversible si et seulement si les trois scalaires  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont non nuls. Alors on trouve

$$M^{-1} = \frac{1}{36} \left[ \frac{3}{\beta} A + \frac{3}{\alpha} B + \frac{4}{\gamma} C \right]$$

qui est magique ( $\alpha' = \frac{1}{12\beta}, \beta' = \frac{1}{12\alpha}, \gamma' = \frac{1}{9\gamma}$ ). De plus,  $\alpha'\beta'$  est toujours différent de 0 : les résultats de la question précédente subsistent

$$M^{-2p} = (M^{-1})^{2p} \text{ n'est pas magique ;}$$

$$M^{-2p+1} = (M^{-1})^{2p+1} \text{ est magique .}$$

Les expressions données à la question précédente pour  $M^{2n}$  ou  $M^{2n+1}$  subsistent même si  $n < 0$ .



ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE  
APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN

AVRIL 2002

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A et B**

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

*Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.*



**SUJET N° 1**

Pourquoi suffit-il d'un tableau noir et d'un morceau de craie pour établir des vérités mathématiques, alors que le physicien a besoin d'observer et d'expérimenter ?

**SUJET N° 2**

Expliquer et apprécier cette assertion que "la liberté d'indifférence est le plus bas niveau de la Liberté".

Descartes "Méditations"

**SUJET N° 3**

Un philosophe a défini l'intelligence "la fonction qui adapte des moyens à des fins". Cette formule vous paraît-elle présenter les conditions d'une bonne définition ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**Exercice N° 1**

On considère tous les nombres entiers naturels que l'on peut écrire en permutant les chiffres : 1, 2, 3, 4, 5.

- 1) Combien peut-on former de nombres de cette manière ?
- 2) On range ces nombres dans l'ordre croissant.
  - a) Quel est le plus petit de ces nombres ? Quel est le plus grand ?
  - b) Quel est le 40<sup>ième</sup> ?
  - c) Quel rang occupe 43251 ?
- 3) Quelle est la somme de tous ces nombres ?

## Exercice N° 2

$\mathbf{R}^{*+}$  désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Soit la fonction numérique définie sur  $\mathbf{R}^{*+}$  par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|$$

où  $\ln$  est la fonction logarithme népérien.

1) Montrer que l'équation  $f(x)=0$  admet, dans  $\mathbf{R}^{*+}$ , une solution unique  $m$  telle que  $3 < m < 4$

2) Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbf{R}^{*+}$  par :

$$g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln|x|$$

a) Etudier les variations de  $g$  et montrer que l'image par  $g$  de l'intervalle  $[3,4]$  est contenue dans l'intervalle  $[3,4]$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  de  $[3,4]$ , on a  $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

3) On considère la suite  $(u_n)$ ,  $n$  appartenant à l'ensemble des entiers naturels  $\mathbf{N}$ , définie par  $u_0=3$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $u_{n+1}=g(u_n)$ .

a) Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ , on a  $3 \leq u_n \leq 4$

b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{12} |u_n - m|$ . En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $|u_n - m| \leq \frac{1}{12^n}$

c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

d) En déduire une valeur approchée de  $m$  à 0,01 près.

**Exercice N° 3**

On calcule la valeur actuelle nette à la période  $t=0$  sous la forme :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{f_t}{(1+a)^t}$$

où :  $I_0$  est la mise de fonds initiale,  $n$  la durée de vie de l'équipement et  $f_t$  le flux de liquidités net de l'investissement à la période  $t$ . Le taux d'actualisation noté « $a$ » dans la formule constate une différence de valeur entre une somme disponible aujourd'hui et la même somme disponible dans le futur. L'actualisation permet alors de comparer des sommes disponibles à des périodes différentes, en ramenant chacune d'entre elles à sa valeur actuelle, en  $t=0$ .

Une entreprise dispose de 175.000 euros qu'elle peut utiliser pour investir.

En matière d'investissement, l'entreprise a le choix entre les deux projets A et B, dont la mise de fonds initiale, en  $t=0$ , est la même : 175.000 euros. Les résultats comptables attendus par l'entreprise sur les périodes suivantes sont donnés dans le tableau suivant :

| Périodes | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Projet A | 130.000 | 120.000 | 120.000 | 40.000  | 20.000  |
| Projet B | 30.000  | 30.000  | 100.000 | 120.000 | 150.000 |

En supposant que le taux d'actualisation est nul, puis est égal à 12%, calculez la valeur actuelle nette de chaque projet.

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)  
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE  
BP 5084  
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE  
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIES A**

*et*

**B OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

**\*\*\***

Ce texte est tiré du livre "LA SCIENCE à l'usage des non-scientifiques", par Albert Jacquard, paru aux éditions Calmann-Lévy, en septembre 2001. Il peut être résumé en 240 mots plus ou moins 10%.

Depuis que Jacques Monod en a fait le titre d'un livre retentissant, l'association du "hasard" et de la "nécessité" est présente dans tous les esprits. Ces deux mots forment un couple indissociable et antagoniste aussi définitivement lié, par la vertu d'un titre sur une couverture, que "le Rouge et le Noir", "l'Etre et le Néant" ou "Dr Jekyll et Mr. Hyde". Cette accointance nous incite à définir chacun des membres du couple par référence à l'autre, au risque d'un cheminement circulaire semblable à celui des dictionnaires lorsqu'ils définissent, par exemple, la vie comme "le propre des êtres qui sont nés et ne sont pas encore morts" et la mort comme "la cessation de la vie". Le *hasard* serait-il seulement ce qui reste lorsqu'on a épuisé la liste des facteurs participant à la *nécessité*, et la *nécessité* ce qui reste lorsque le *hasard* n'intervient plus ? Une définition moins tautologique est évidemment nécessaire ; elle va mettre en évidence l'intervention d'un troisième terme, la *finalité*.

Ces concepts s'introduisent à propos des attitudes possibles lorsque nous cherchons à expliquer les événements dont nous sommes les témoins. Nous pouvons admettre qu'ils sont la conséquence *nécessaire* de l'état du monde à l'instant où ils se produisent, état qui résulte de son histoire antérieure ; le présent est alors le produit du passé. Nous pouvons aussi renoncer à chercher un rapport entre ces événements et les conditions de leur survenue ; le présent n'est alors que le produit sans cause de lui-même, l'oeuvre du *hasard*. Nous pouvons enfin admettre qu'ils ont eu lieu pour rendre possible un événement futur, qu'ils sont au service d'une *fin*, le présent est alors le produit de l'avenir.

Ces trois termes : nécessité, hasard, finalité, sont donc la traduction de notre opinion sur le sens dans lequel agit la flèche du temps.

### *De la pensée magique à Démocrite*

La réponse la plus simple, lorsque nous essayons de comprendre ce qui se passe autour de nous, est d'admettre que tout événement est le résultat des décisions d'un être puissant et inconnu. Nous ne sommes plus intrigués par la tempête si nous l'attribuons à une colère de Poséïdon, par la foudre si elle est une manifestation de la puissance de Zeus. Tout ce qui survient dépend des volontés ou des caprices des dieux. Ceux-ci sont décrits comme des personnages semblables aux humains ; ils sont animés par des intentions, par le désir de parvenir à un résultat. La pensée magique est donc fondamentalement finaliste : elle admet que le présent est au service d'un futur choisi par une divinité.

L'avantage de cette vision est de fournir une explication de tout ; il suffit, lorsque les divinités déjà en place dans le panthéon collectif ne sont pas suffisantes, d'ajouter de nouveaux personnages. Le prix à payer est d'accepter une attitude de soumission, car si tout dépend des dieux, chacun de nous en est le jouet.

C'est le refus de cette soumission qu'exprime la phrase de Démocrite qui a inspiré son titre à Jacques Monod : " Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité ". Que pouvaient signifier ces mots pour un philosophe grec quatre siècles avant Jésus-Christ ?

Le sens de cette affirmation doit être cherché moins dans les deux termes énoncés que dans l'absence du troisième. En fait, en omettant de citer la finalité, Démocrite recuse l'influence des dieux.

Il propose de rendre compte de la succession des événements en admettant certaines régularités, les "lois de la nature", qui à chaque instant transforment l'état du monde, et qui participent à la *nécessité* ; mais il reconnaît que ces lois n'expliquent pas tout ; force est de constater qu'une part des faits échappe à leur rigueur ; cette part est attribuée au *hasard*.

De l'action des dieux, de la finalité qu'ils introduisent, il n'est plus question. Ce faisant, Démocrite fonde l'attitude scientifique.

Celle-ci consiste à tenir compte d'une évidence : l'avenir n'a pas d'existence, il est donc exclu de tenir compte de lui pour expliquer le présent. Les efforts de compréhension produits par les scientifiques seraient rendus stériles au départ s'ils admettaient qu'un fait se produisant aujourd'hui puisse être expliqué par la réalité de demain.

Il ne s'agit pas là d'une croyance à imposer, mais d'une règle du jeu à respecter. Il est parfaitement possible d'admettre que tout fait résulte de la volonté d'un Dieu (ou de dieux) veillant à la réalisation du programme qu'il a (ou qu'ils ont) adopté, et intervenant, en permanence ou par impulsions, pour atteindre la fin, qu'il a (qu'ils ont) décidée. Rien ne peut prouver que cette hypothèse "finaliste", est fausse. Mais l'accepter est rendre vaine toute tentative d'explication rationnelle des faits observés. Entrer dans le cheminement scientifique, c'est prendre pour règle de ne pas y recourir.

Cette attitude consiste à regarder le monde réel avec la volonté de le déchiffrer, à se sentir simultanément immergé en lui et face à lui, à lui poser des questions en sachant que les réponses seront souvent provisoires et toujours partielles. Choisir cette voie manifeste une orgueilleuse volonté d'autonomie. Certes, il faut en payer le prix de doutes, de tâtonnements, de frustrations, mais elle procure aussi (à vrai dire depuis peu) de magnifiques récompenses. Comprendre l'enchaînement des causes et des effets permet parfois de modifier leur succession et d'engager la suite des événements dans une direction que la nature n'aurait pas spontanément suivie. L'exemple le plus clair est celui des maladies ; comprendre leur cause permet de plus en plus souvent de les guérir, alors que nous en étions autrefois réduits aux incantations et aux remèdes empiriques. Nous savons, grâce à la science, sauver des vies : si le roi est à l'agonie, une piqûre d'antibiotiques (attitude se référant à la nécessité) peut être plus efficace que l'attitude finaliste des chants implorant " God save the King ".

On comprend l'émotion ressentie par Jacques Monod en découvrant Démocrite : c'est le programme de la science que celui-ci a tracé il y a vingt-quatre siècles.



### *Les déguisements de la finalité*

Certains raisonnements scientifiques donnent, à vrai dire, l'impression de suivre une démarche finaliste. Tel est le cas lorsque le processus étudié est présenté comme tendant vers un certain objectif, notamment vers l'optimisation de tel ou tel paramètre. Ainsi, selon la mécanique classique, le cheminement d'un système matériel pour passer d'un état initial à un état final est expliqué par le *principe de moindre action* : la trajectoire suivie par les différents éléments de ce système est celle qui rend minimale la somme des actions nécessaires. (ce concept d'action est défini à partir de celui d'impulsion, c'est à dire du produit de la masse par la vitesse : un objet de masse  $m$  et de vitesse  $v$  a une impulsion  $p = mv$  ; lorsque cet objet parcourt la longueur  $l$ , son action  $A$  est définie  $A = pl = mvl$ .)

Tout se passe comme si, face aux multiples possibilités de changement qui s'offrent à elle, la structure concrète choisissait la trajectoire correspondant à l'action globale la plus faible. L'introduction d'un choix dans le raisonnement est équivalente à l'acceptation d'un objectif, donc au recours à la finalité.

L'exemple classique est celui de la réfraction d'un rayon lumineux lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre ; son parcours rectiligne est alors brisé. Ce changement d'orientation est expliqué en recourant au concept d'indice de réfraction : les angles d'incidence et de réfraction ( c'est à dire les angles  $i$  et  $r$  du rayon lumineux avec la perpendiculaire à la surface de séparation) sont tels que

$$\sin i / \sin r = n_r / n_i$$

ou  $n_i$  et  $n_r$  sont les indices de réfraction des deux milieux. mais une telle présentation est plus une définition des indices de réfraction qu'une explication des causes du phénomène.

Ces causes peuvent être recherchées dans le fait que la lumière n'a pas la même vitesses dans les deux milieux et que le parcours choisi est celui qui rend minimal le temps total du parcours.

Pour comprendre le comportement du rayon lumineux, le physicien Richard Feynman imagine un homme assis sur une plage et qui voit soudain dans la mer un enfant en difficulté ; il faut vite lui porter secours, sinon il risque de se noyer. Pour être efficace, cet acteur ne doit pas se précipiter en ligne droite vers l'enfant, ce qui est le trajet le plus court, mais faire un détour de façon à allonger son trajet sur le sable, où il peut courir vite, et raccourcir celui dans l'eau , où sa nage est lente. De même, un rayon lumineux allant d'un point A dans l'air à un point B dans l'eau ne suit pas la ligne droite AB, mais fait un détour par le point C, car sa vitesse  $c_i$  dans l'air est plus grande que sa vitesse  $c_r$  dans l'eau.



Un calcul simple (...), permet de caractériser la position du point C minimisant la durée totale du parcours par la relation

$$\sin i / \sin r = c_i / c_r$$

On constate ainsi que les indices de réfraction, introduits empiriquement pour expliquer le phénomène observé, sont en fait reliés à une réalité physique : la vitesse de la lumière qui varie selon les milieux.

Mais l'important pour notre propos est que le raisonnement tenu est parfaitement finaliste, et la métaphore imaginée par Feynman le montre à l'évidence : l'homme à la plage a un objectif, arriver le plus vite possible. Faut-il admettre que la lumière a une attitude semblable et que les photons, avant de quitter le point A, font les calculs définissant le point C vers lequel ils doivent se diriger, pour ensuite obliquer vers B ? Telle n'est évidemment pas l'intention du physicien ; il constate que tout se passe comme si la nature avait un objectif, mais cette apparence n'est que le résultat de la multiplicité des causes en action.

De même, Newton se gardait d'affirmer que " les masses s'attirent ", il se contentait de constater que tout se passe comme si elles s'attiraient. Avec la théorie de la relativité d'Einstein, cette apparence trouve une explication qui ne fait plus appel à une quelconque " attirance ", mais à une courbure de l'espace.

Chaque fois qu'un processus est expliqué par la recherche d'un optimum, le "péché de finalisme" est effectivement commis, car le raisonnement revient à admettre que la nature fait un choix entre plusieurs attitudes possibles et qu'elle dispose d'un critère faisant référence à l'état futur de la réalité. Pour rester fidèle à la règle du jeu de la science, il est essentiel de ne pas oublier le "tout se passe comme si", qui est un aveu d'ignorance, donc une incitation à poursuivre la recherche.

### *De Démocrite à Laplace*

Malgré la tentation permanente d'une attitude finaliste, la recherche de processus ne faisant appel qu'au déterminisme a obtenu de remarquables succès. Ils ont incité non seulement à récuser la finalité, mais aussi à réduire autant que possible le rôle du hasard. Celui-ci n'est vu que comme une conséquence de notre ignorance, une *terra incognita* provisoire dans notre description des enchaînements de cause à effet. Nous sommes enclins à n'attribuer d'importance qu'au seul acteur véritablement sérieux, le déterminisme qui fait, sans état d'âme, se succéder les événements dans une séquence rigoureuse. Le hasard n'est qu'un trublion dont la disparition est souhaitée. La nécessité fait penser à l'excellent Dr Jekyll, le hasard à l'abominable Mr. Hyde.

Un tel regard sur la réalité a été poussé à son paroxysme par le physicien et mathématicien Simon de Laplace au début du XIX<sup>e</sup> siècle.

Dans un texte célèbre, il imagine un personnage (un démon, comme on disait alors) informé de toutes les lois de la nature et connaissant l'état, à un instant donné, de toutes les particules qui constituent l'Univers. Utilisant les formules mathématiques qui traduisent ces lois, ce démon serait en mesure de décrire ce que sera l'Univers à l'instant suivant, et, de proche en proche, tous ses états futurs, ; puis par des calculs semblables, de reconstituer tous ses états passés.

Dans la pensée de Laplace, l'Univers est réellement semblable à l'horloge dont Voltaire cherchait l'horloger ; chaque rouage en est dépendant de tous les autres, que se soit dans l'espace ou dans la durée. Connaître un lieu ou connaître un instant du cosmos, c'est être capable de connaître la totalité de son déploiement dans l'espace et la totalité de son histoire passée et à venir. La réalité d'aujourd'hui contient celle d'aujourd'hui et celle de demain ; l'Univers est comme enfermé dans une trajectoire préétablie dont il ne peut s'échapper ; le passage du temps ne fait que révéler ce qui était jusqu'alors caché sans rien apporter de fondamentalement nouveau.

Cette vision correspond assez bien à celle que nous retirons d'un premier regard sur ce qui nous entoure. À quelques détails près, l'univers semble immuable. "Il n'y a jamais rien de nouveau sous le soleil ? Tout est vanité et poursuite du vent", dit l'Ecclésiaste.

Que l'Univers soit stable, figé dans un état définitif, paraît en un premier temps, plutôt rassurant, tout au moins dans la mesure où nous nous regardons nous-mêmes comme simplement de passage, d'une autre nature que le monde réel. Mais, dès que nous admettons que nous en sommes un élément, il nous faut assumer le même statut et, par conséquent, perdre tout espoir de liberté.

Cette vision d'un monde sur lequel le temps n'a aucune prise, dont l'avenir est contenu dans le présent, est homogène à celle de la " prédestination " développée dans le domaine spirituel par Jean Calvin. Pour ce théologien, tout, y compris le salut éternel de chacun, a été décidé dès le jour de la Création. Pour le physicien qu'est Laplace, ce n'est pas du salut des âmes qu'il est question, mais son raisonnement aboutit au même constat pour le devenir du monde concret, dont chaque individu fait partie. Faut-il alors, au nom de la lucidité scientifique, accepter que la liberté tant célébrée ne soit qu'une chimère de poète ?

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
DURÉE : 4 HEURES**

**PROBLÈME N°1**

On considère les deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0, \\ x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}, & y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier  $n$  :

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leq y_n \leq \sqrt{14}.$$

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 2 = \frac{3 - y_n}{x_{n+1} + 2}.$$

3. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$|x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|.$$

4. Montrer de la même manière que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |x_n - 2|.$$

5. Dédurre de tout ce qui précède que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 3.$$

**PROBLÈME N°2**

Pour  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ , lorsque cette intégrale existe.

1. Donner le domaine de définition de  $F$ .
2. (a) Montrer que  $F$  est continue et dérivable sur son domaine de définition.  
 (b) Montrer, par récurrence, que  $F$  est indéfiniment dérivable.
3. (a) On note  $\ln$  le logarithme népérien. Étudier le signe de  $F(x) - \ln x$ . (On écrira  $\ln x$  sous la forme d'une intégrale).  
 (b) En déduire  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .  
 (c) Dresser le tableau de variation de  $F$ .
4. (a) Vérifier que,  $e^t > te^{\frac{t}{2}}$ , si  $t > 0$ .  
 (b) En déduire l'étude de la branche infinie de  $F$ .  
 (c) Quels sont les points d'inflexion de  $F$ .  
 (d) Tracer la courbe représentative de  $F$ .

**PROBLÈME N°3**

1. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Montrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} (f_1(x) + f_2(x)) \leq \sup_{x \in [0,1]} f_1(x) + \sup_{x \in [0,1]} f_2(x).$$

2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[0, 1]$  et soit  $u$  un réel. Montrer que  $\sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$  est fini.

Dans la suite de ce problème, on pose  $h(u) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$ , où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ , et on cherche à étudier  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

3. On suppose en outre que  $g$  est positive ou nulle sur  $[0, 1]$ .

(a) Montrer que pour tout  $u \in [0, +\infty[$  :

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x) \leq h(u).$$

Indication : On pourra remarquer que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,

$$\inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \leq f(x) + ug(x).$$

(b) Montrer que pour tout  $u \in [0, +\infty[$  :

$$h(u) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

(c) Déduire de (a) et (b) que  $\frac{h(u)}{u}$  a une limite en  $+\infty$  que l'on calculera.

(d) A quelle condition  $h$  est-elle bornée sur  $[0, +\infty[$ . Que vaut alors  $h$ ?

4. On suppose toujours que  $g$  est positive ou nulle sur  $[0, 1]$ .

(a) Montrer que  $h$  est croissante.

(b) Soit  $u \leq u'$ . Montrer que :

$$h(u') \leq h(u) + (u' - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Indication : On pourra utiliser la question 1, avec deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  bien choisies.

(c) Conclure que  $h$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN

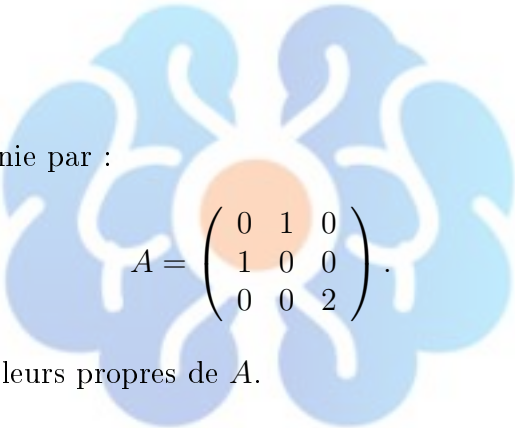
AVRIL 2002

*CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES*  
*VOIE B Option Mathématiques*

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
DURÉE : 3 HEURES

**EXERCICE N°1**

Soit la matrice  $A$  définie par :


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer les valeurs propres de  $A$ .  
(b) Déterminer les espaces propres de  $A$ .  
(c) En déduire que  $A$  est diagonalisable.  $A$  est-elle inversible?
2. (a) Exhiber une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.  
(b) Calculer  $P^{-1}$ .
3. (a) Soit  $n$  un entier strictement positif. Montrer que  $A$  et  $A^n$  sont diagonalisables dans la même base.  
(b) Calculer  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
(c) Calculer  $A^{-1}$ .

**EXERCICE N°2**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe un entier  $p \geq 2$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ .

1. Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . Montrer que  $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  est une famille libre de  $E$  si et seulement si  $f^{p-1}(x) \neq 0$ .
2. En déduire que  $p \leq n$ .
3. Établir que  $\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^{p-1} \subset \text{Ker } f^p = E$ .
4. Démontrer que toutes les inclusions précédentes sont strictes.

## PROBLÈME

### Partie I

Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. On définit la trace d'une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Montrer que la trace est une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Établir que  $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A)$ , pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , où  ${}^t A$  désigne la transposée de  $A$ .
3. (a) Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .  
(b) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A {}^t A - {}^t A A = I$ , où  $I$  désigne la matrice identité. (On pourra calculer  $\text{tr}(A {}^t A - {}^t A A)$  pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

### Partie II

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (applications linéaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ ).

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit l'application :

$$\varphi_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \text{tr}(AX).$$

1. Montrer que  $\varphi_A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ .

2. On définit maintenant l'application :

$$f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*.$$

(a) Montrer que  $f$  est une application linéaire.

(b) Montrer que  $f$  est injective. (On pourra penser à utiliser les matrices  $E_{lm}$  dont tous les éléments sont nuls hormis celui situé à l'intersection de la  $l$ -ième ligne et de la  $m$ -ième colonne qui est égal à 1).

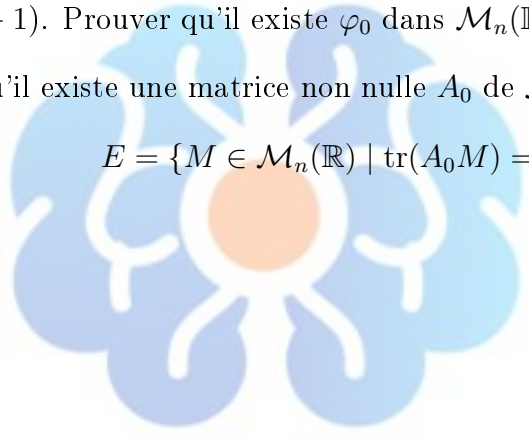
(c) Quelles sont les dimensions de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ ?

(d) En déduire que l'application  $f$  est bijective.

3. (a) Soit  $E$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\dim E = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1$ ). Prouver qu'il existe  $\varphi_0$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  telle que  $E = \text{Ker } \varphi_0$ .

(b) En déduire qu'il existe une matrice non nulle  $A_0$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A_0 M) = 0\}.$$





ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
 ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
 ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**PROBLÈME N°1**

1. Le résultat est vrai pour  $n = 0$ . Supposons que :

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leq y_n \leq \sqrt{14}.$$

On a alors :

$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \leq \sqrt{7},$$

et :

$$y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \leq \sqrt{7 + \sqrt{7}} \leq \sqrt{7 + 7} = \sqrt{14}.$$

2. Comme  $x_{n+1}^2 = 7 - y_n$ , on a bien le résultat demandé.

3.  $x_{n+1}$  est positif donc  $x_{n+1} + 2 = |x_{n+1} + 2| \geq 2$ . D'où :

$$|x_{n+1} - 2| = \left| \frac{3 - y_n}{x_{n+1} + 2} \right| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|.$$

4. On remarque d'abord que :

$$y_{n+1} - 3 = \frac{x_n - 2}{y_{n+1} + 3},$$

puis que  $|y_{n+1} + 3| \geq 3$ , ce qui donne le résultat.

5. De 3. et 4., on déduit :

$$|x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{6} |x_{n-1} - 2|.$$

Comme  $\frac{1}{6} < 1$ , on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ . En remplaçant dans l'expression de  $y_n$ , on déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sqrt{9} = 3$ .

**PROBLÈME N°2**

1. En 0,  $\frac{e^t}{t} \sim \frac{1}{t}$  dont l'intégrale diverge en 0.  $F$  n'est donc pas définie pour  $x \leq 0$ .  $\frac{e^t}{t}$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'intégrale est définie pour tout  $x > 0$ . Finalement, le domaine de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. (a) On montre par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $F^{(n)}(t) = \frac{e^t P_n(t)}{t^n}$  où  $P_n(t)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ .  
(b) On sait, par définition, que :

$$\forall x > 0, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Donc :

$$F(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

$e^t - 1$  est positif pour tout  $t$  positif. Donc  $F(x) - \ln x$  est strictement positive sur  $[1, +\infty[$  (intégration d'une fonction positive sur un intervalle croissant non réduit à un point), strictement négative sur  $]0, 1[$  (intégration d'une fonction positive sur un intervalle décroissant non réduit à un point) et nulle en 1.

- (c) On en déduit aisément  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

- (d)  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $\frac{e^t}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa dérivée vaut donc  $F'(t) = \frac{e^t}{t}$ , qui est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $F$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

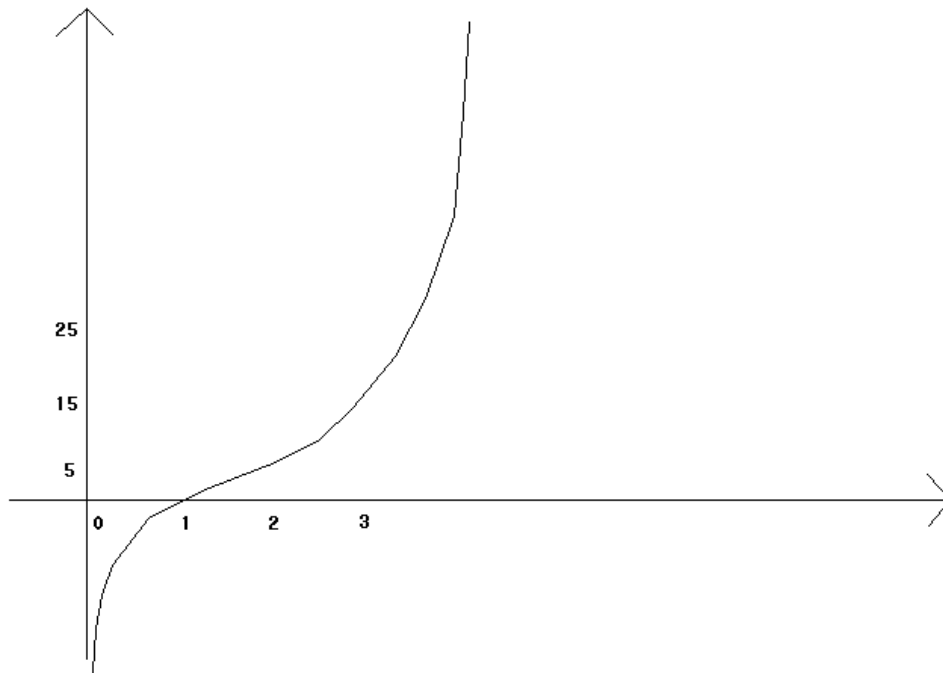
3. (a)  $e^{\frac{t}{2}} > t$  dès que  $t > 0$  d'où le résultat.

- (b) On en déduit que :

$$F(x) \geq \int_1^x e^{\frac{t}{2}} dt = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{2}}).$$

$F$  a donc une branche infinie parabolique de direction  $Oy$ .

- (c)  $F''(t) = e^t \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right)$ . (1,0) est donc le seul point d'inflexion de  $F$  (points dont les abscisses sont les zéros de  $F''$ ).



(d)

Figure 1: Graphe de  $F$

### PROBLÈME N°3

1. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Il est clair que

$$f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in [0,1]} f_1(x) + \sup_{x \in [0,1]} f_2(x).$$

En passant alors au sup, on a le résultat.

2. Soit  $u \geq 0$ .  $f(x) + ug(x)$  est une fonction continue de la variable  $x$ . Cette fonction est donc bornée sur  $[0, 1]$ , ce qui implique que  $\sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$  est fini.

3. (a) Par définition de l'inf, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\inf_{y \in [0,1]} f(y) \leq f(x)$ . Donc pour tout  $u \geq 0$ ,  $\inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \leq f(x) + ug(x)$ . En passant au sup dans cette dernière expression, on trouve :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left( \inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \right) \leq h(u).$$

Mais  $\inf_{y \in [0,1]} f(y)$  est indépendant de  $x$  donc :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left( \inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \right) = \inf_{y \in [0,1]} f(y) + \sup_{x \in [0,1]} (ug(x)).$$

Comme  $u$  et  $g$  sont positifs :

$$\sup_{x \in [0,1]} (ug(x)) = u \sup_{x \in [0,1]} (g(x)).$$

Finalement :

$$\inf_{y \in [0,1]} f(y) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x) \leq h(u),$$

qui est le résultat demandé (puisque  $x$  et  $y$  sont des variables muettes).

(b) Il est clair que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$  et tout  $u \geq 0$  :

$$f(x) \leq \sup_{y \in [0,1]} f(y) \quad \text{et} \quad ug(x) \leq u \sup_{y \in [0,1]} g(y).$$

En ajoutant ces deux inégalités, on trouve :

$$f(x) + ug(x) \leq \sup_{y \in [0,1]} f(y) + u \sup_{y \in [0,1]} g(y).$$

En passant enfin au sup sur  $x$ , on obtient bien, pour tout  $u \in [0, +\infty[$  :

$$h(u) \leq \sup_{y \in [0,1]} f(y) + u \sup_{y \in [0,1]} g(y).$$

(c) D'après (a) et (b), on a :

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x) \leq h(u) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Il est alors clair que :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{h(u)}{u} = \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

(d) Pour que  $h$  soit bornée sur  $[0, +\infty[$ , il est nécessaire que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{h(u)}{u} = 0$ . Si  $h$  est bornée, on a donc  $\sup_{x \in [0,1]} g(x) = 0$ , soit encore (puisque  $g$  est continue)  $g$  est nulle sur  $[0,1]$ . Réciproquement, si  $g$  est nulle sur  $[0,1]$ ,  $h$  est constante égale à  $\sup_{x \in [0,1]} f(x)$ , elle est donc bornée.

4. (a) Soit  $u' \geq u \geq 0$ .  $g$  étant positive, il est clair que pour tout  $x$  de  $[0,1]$  :

$$f(x) + ug(x) \leq f(x) + u'g(x).$$

En passant au sup sur  $x$ , on trouve alors  $h(u') \geq h(u)$ , ce qui est la croissance de  $h$ .

- (b) Soit  $u \leq u'$ . Posons  $f_1(x) = f(x) + u g(x)$  et  $f_2(x) = (u' - u)g(x)$ . En appliquant le résultat du 1. on trouve bien :

$$h(u') \leq h(u) + (u' - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

- (c) Soit  $u$  et  $u_0$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Si  $u \geq u_0$ , on sait d'après 4.(a) et 4.(b) que :

$$0 \leq h(u) - h(u_0) \leq (u - u_0) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

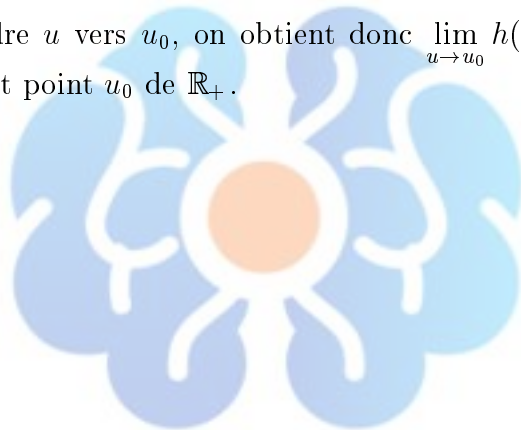
Si  $u \leq u_0$ , on a alors :

$$0 \leq h(u_0) - h(u) \leq (u_0 - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$0 \leq |h(u) - h(u_0)| \leq |u - u_0| \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

En faisant tendre  $u$  vers  $u_0$ , on obtient donc  $\lim_{u \rightarrow u_0} h(u) = h(u_0)$ .  $h$  est donc continue en tout point  $u_0$  de  $\mathbb{R}_+$ .



**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**EXERCICE N°1**

1. (a) Les valeurs propres (réelles) sont -1, 1 et 2.  
 (b)  $E_{-1} = \text{Vect} \{ {}^t(-1, 1, 0) \}$ ,  $E_1 = \text{Vect} \{ {}^t(1, 1, 0) \}$  et  $E_2 = \text{Vect} \{ {}^t(0, 0, 1) \}$   
 (c)  $A$  a 3 valeurs propres distinctes elle est donc diagonalisable. Elle est également inversible car 0 n'est pas valeur propre.
2. (a) On connaît une base de vecteur propre. Une matrice de passage possible est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Il est clair que  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ . Comme  $P^{-1}AP$  est diagonale, cela prouve que  $A^n$  est diagonalisable dans la même base que  $A$ .  
 (b) On en déduit alors :

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 & 0 \\ (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^n + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Il est facile de voir que  $P^{-1}A^{-1}P$  est également diagonale. En fait, la forme précédente est valable pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ . On a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## EXERCICE N°2

$f$  est un endomorphisme de  $E$  de dimension  $n$  tel qu'il existe un entier  $p \geq 2$  vérifiant  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ .

1. Comme  $f^{p-1} \neq 0$ , il existe  $x$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$ . Soit alors  $p$  réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0. \quad (1)$$

L'image par  $f^{p-1}$  de cette expression est également nulle. Or :

$$f^{p-1} \left( \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \lambda_0 f^{p-1}(x),$$

car  $f^k = 0$  dès que  $k \geq p$ . Comme, par hypothèse,  $f^{p-1}(x) \neq 0$ , on a donc  $\lambda_0 = 0$ . On recommence alors en prenant l'image par  $f^{p-2}$  de l'expression (1) et on obtient de même  $\lambda_1 = 0$ . De proche en proche, on prouve alors que :

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0,$$

ce qui permet d'affirmer que la famille  $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  est libre.

Réciproquement, si la famille  $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  est libre, tous les éléments qui la composent sont non nuls et en particulier  $f^{p-1}(x) \neq 0$ .

2.  $E$  étant de dimension  $n$ , une famille libre de  $E$  ne peut pas comporter plus de  $n$  éléments ce qui montre que  $p \leq n$ .
3. Soit  $x \in \text{Ker } f^k$ .  $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker } f^{k+1}$ . En particulier on a bien  $\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^{p-1} \subset \text{Ker } f^p = E$ .

4. Montrons que toutes ces inclusions sont strictes.

Soit  $x$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$  et soit  $1 \leq k \leq p$ . Posons  $y = f^{p-k}(x)$  (avec par convention  $f^0 = Id$ ). On a alors  $f^k(y) = f^p(x) = 0$  et  $f^{k-1}(y) = f^{p-1}(x) \neq 0$ . Donc  $y \in \text{Ker } f^k$  et  $y \notin \text{Ker } f^{k-1}$ , ce qui prouve que l'inclusion de  $\text{Ker } f^{k-1}$  dans  $\text{Ker } f^k$  est stricte.

## PROBLÈME

### Partie I

1. Il est clair que la trace est linéaire.

2. Les éléments diagonaux étant invariants par l'opération de transposition, on a bien  $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A)$ .

3. (a) Le terme générique de  $AB$  est  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$  donc :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}.$$

De même, terme générique de  $BA$  est  $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$  d'où :

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}.$$

En permutant les sommes sur  $i$  et sur  $k$  on obtient le résultat.

(b) Si  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP$ . On peut alors écrire d'après le 3.(a) :

$$\text{tr} B = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr} A.$$

4. Il est clair que  $\text{tr}(A {}^t A - {}^t A A) = 0$  et  $\text{tr} I = n$ .  $n$  étant non nul, le résultat est acquis.

### Partie II



1. La trace étant une application linéaire, on a bien le résultat.
2. (a)  $f$  est linéaire pour les mêmes raisons que précédemment.
- (b) Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  telle que  $f(A) = 0$ . Cela signifie donc que pour tout  $X$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(AX) = 0$ . Soit la matrice  $E_{lm}$  dont tous les éléments sont nuls sauf celui au croisement de la  $l$ -ième ligne et de la  $m$ -ième colonne qui vaut 1. Les terme diagonaux de  $AE_{lm}$  sont :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_{ki} = a_{il} e_{li},$$

Car  $e_{ki}$  est nul si  $k$  est différent de  $l$ . Mais  $e_{li}$  est nul si  $i$  est différent de  $m$ , donc le seul terme diagonal éventuellement non nul est  $c_{mm}$  qui vaut alors  $a_{ml}$ . Comme  $\text{tr}(AE_{lm}) = 0$ , on a en fait  $a_{ml} = 0$ . En faisant varier  $l$  et  $m$  entre 1 et  $n$ , on trouve donc que tous les éléments de  $A$  sont nuls. On a finalement prouvé que :

$$(f(A) = 0) \Rightarrow (A = 0),$$

ce qui est exactement l'injectivité de  $f$ .

- (c)  $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2$ .
- (d)  $f$  est une application linéaire injective de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ , qui sont de même dimension, donc  $f$  est bijective.
3. (a) Soit  $e_1, \dots, e_{n^2-1}$  une base de  $E$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe  $u$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $(e_1, \dots, e_{n^2-1}, u)$  forment une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La forme linéaire  $\varphi_0$  définie par  $\varphi_0(u) = 1$  et  $\varphi_0(e_1) = \dots = \varphi_0(e_{n^2-1}) = 0$  répond alors à la question.
- (b) L'application  $f$  est bijective, donc pour tout  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ , il existe  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\varphi = f(A).$$

Donc, il existe  $A_0$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi_0$  est l'application  $M \mapsto \text{tr}(A_0 M)$ . On alors bien :

$$E = \text{Ker } \varphi_0 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A_0 M) = 0\}.$$

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES****VOIE B****AVRIL 2002****OPTION MATHEMATIQUES****CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE**

-----

**EXERCICE n° 1**

- 1) On forme 5 ! nombres de cette manière, soit 120 nombres.
- 2) Le plus petit de ces nombres est 12345 et le plus grand 54321. Le 40<sup>ème</sup> nombre est 24351 et le rang occupé par le nombre 43251 est le rang 88.
- 3) En utilisant le fait qu'à chaque position (il y en a 5), chaque nombre (1,2,3,4,5) est utilisé 24 fois et que  $(1+2+3+4+5) \times 24 = 360$ , on trouve le total de 3.999.960

**EXERCICE n° 2**

- 1) La fonction  $f$  est continue et dérivable sur l'ensemble de définition. Comme la limite en 0 de cette fonction est  $-\infty$  et comme la limite en  $+\infty$  est  $+\infty$ , la fonction  $f$  passe par 0 en un point unique.

Comme  $f(3)$  est strictement négatif et  $f(4)$  strictement positif, la solution unique est comprise entre 3 et 4.

- 2) La fonction  $g$  est également continue dérivable sur l'ensemble de définition. Sa dérivée est strictement négative, donc  $g$  est une fonction décroissante, donc bijective. En calculant  $g(3)$  et  $g(4)$ , on constate que l'image de l'intervalle  $[3,4]$  est contenue dans l'intervalle  $[3,4]$

Pour montrer b), il suffit de calculer la dérivée seconde de  $g$  sur l'intervalle  $[3,4]$ , de constater que celle-ci est strictement positive, donc la fonction  $g'$  est croissante sur cet intervalle, puis de calculer  $g'(3)$  qui est égal à  $-1/12$  et  $g'(4)$  qui est égal à  $-1/16$ .

- 3) le a) se démontre par récurrence. Pour b), on se sert de  $g(m)=m$  et du résultat démontré au 2-b en utilisant le théorème des accroissements finis.

Pour c), il est évident, compte tenu du résultat précédent 3-b, que la limite de la suite est  $m$ ,

On sait que  $u_0=3$ , on sait que  $u_1=g(u_0)=3,725$  et que  $u_2=g(u_1)=3,67121$ . Comme  $u_2-m$  (en valeur absolue) est inférieur à  $(1/12)^2$ , on obtient une approximation de  $m$  à 3,67 à 0,01 près.

### EXERCICE n° 3

Si  $a=0$ , alors  $VAN(\text{projet A})=VAN(\text{projet B}) = 255.000$  euros

Si  $a=12\%$ , alors  $VAN(\text{projet A})=158.918$  euros et  $VAN(\text{projet B}) = 108.256$  euros

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

*Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.*

**SUJET n° 1**

Pourquoi revenir sur le passé ?

**SUJET n° 2**

La parole suffit-elle à faire échec à la violence ?

**SUJET n° 3**

Quels peuvent être les effets de la mondialisation sur les spécificités socio-culturelles ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

**ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

*L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.*

**Exercice n° 1**

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression :

$$y = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} - \frac{3}{2}$$

**Exercice n° 2**

A l'aide de la formule du binôme, calculer les nombres suivants :  $998^2$  ;  $13^4$

### Exercice n° 3

Le chef du personnel d'une entreprise vient d'embaucher 18 ouvriers interchangeables qu'il doit répartir entre les quatre ateliers de l'usine. Sachant qu'il doit affecter au moins quatre ouvriers à l'atelier 1, au moins deux ouvriers aux ateliers 2 et 3 et au moins un ouvrier à l'atelier 4, de combien de façons peut-il le faire ?

### Exercice n° 4

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur la longévité sur le thème : « pas de grosse réparation avant 100.000 kilomètres ». Le service des études techniques du constructeur a cependant fourni au service commercial les probabilités d'apparition avant 100.000 kilomètres des cinq plus grosses pannes :

Pour les cardans, cette probabilité est de 0,001  
 Pour le moteur, cette probabilité est de 0,05  
 Pour l'embrayage, cette probabilité est de 0,01  
 Pour les freins, cette probabilité est de 0,013  
 Pour la boîte de vitesse, cette probabilité est de 0,03

Quelle est la probabilité pour que le banc d'essai des revues spécialisées de l'automobile prenne à défaut la publicité de ce nouveau véhicule, après étude d'une seule voiture ?

### Exercice n° 5

A partir des données du tableau ci-dessous, calculer l'indice de Laspeyre des prix de l'année 2001 par rapport à 1995, ainsi que l'indice de Paasche des quantités de l'année 2001 par rapport à 1995 :

| I | Modèle    | Quantités |      | Prix |      |
|---|-----------|-----------|------|------|------|
|   |           | 1995      | 2001 | 1995 | 2001 |
| 1 | Produit A | 50        | 55   | 18   | 22   |
| 2 | Produit B | 69        | 62   | 23   | 25   |
| 3 | Produit C | 96        | 115  | 28   | 25   |
|   | Ensemble  |           |      |      |      |

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

*Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard dont le titre est «DE L'ANGOISSE A L'ESPOIR, leçons d'écologie humaine», paru aux éditions Calmann-Lévy en mars 2002.*

*Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.*

Jusqu'au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, nous avons considéré tout nouveau pouvoir nous permettant de transformer notre environnement comme un progrès humain. Nous avons rarement remis cette évidence en question; nous y sommes maintenant obligés devant le développement extraordinaire de nos capacités d'action, et ce nouveau regard constitue un changement profond du parcours de l'aventure humaine.

A la façon de Prométhée découvrant le feu, nous nous sommes réjouis de chaque progrès. Selon la mythologie grecque, Zeus, créant le monde, avait prudemment caché aux hommes le secret du feu. Prométhée le leur a dévoilé et en a été puni. Nous pourrions métaphoriquement identifier les scientifiques à Zeus et les techniciens à Prométhée ; les premiers proposent des concepts permettant d'expliquer le cosmos, les seconds apportent la capacité à le transformer. Pour le philosophe Francis Bacon, au XVII<sup>e</sup> siècle, le but de la science et de la technique était de réaliser tout ce qui était rendu possible par notre compréhension. A cette philosophie optimiste, nous sommes obligés de substituer celle d'Einstein, affirmant, le soir d'Hiroshima : « il y a des choses qu'il faudrait mieux ne pas faire ». Nous ne devons plus nous permettre d'utiliser aveuglément les moyens que nous nous donnons. La bombe nucléaire en est un exemple extrême. En découvrant le mystère de l'énergie présente dans la matière, nous nous sommes donnés des pouvoirs que nous ne devons utiliser qu'en les maîtrisant. Il en est de même pour la découverte du mystère des processus qui se déroulent chez les êtres vivants. Comment résoudre les problèmes éthiques posés par la manipulation du patrimoine génétique ?

Au cours de l'histoire, une des rares occasions où, face à un progrès technique, la question a été posée de renoncer à l'utiliser a été provoquée par la mise au point de l'arbalète, arme beaucoup plus efficace que l'arc. Au cours d'un concile, en 1139, l'Eglise romaine a interdit son usage dans les guerres entre chrétiens, mais l'a permis contre des ennemis non chrétiens. Même si la réponse nous fait sourire, constatons que la question a du moins été posée.

L'important aujourd'hui n'est pas d'accélérer les avancées techniques, mais de les orienter en fonction d'objectifs éthiques. Prenons l'exemple controversé du clonage. La célèbre brebis Dolly a montré qu'il est possible de faire agir la totalité des gènes présents dans le noyau d'une cellule, donc de ramener ce patrimoine à l'état qui était le sien lors de la conception, et de réaliser un double de l'individu. La compréhension des mécanismes en action au sein des êtres vivants nous permet d'intervenir à tous les niveaux : ce qui se produit dans le secret des organes sexuels est maintenant observé dans tous les détails. Nous avons le pouvoir de prendre en main, de transformer la réalité biologique des êtres vivants, y compris nous-mêmes. Nous sommes passés du rôle passif de spectateurs au rôle actif d'acteurs ; nous devenons des cocréateurs.

Des phénomènes évolutifs qui nécessitaient des milliers de générations, des innovations que la nature ne produisait que par erreur sont maintenant réalisables à volonté et rapidement dans les laboratoires. Les êtres vivants ne sont que des choses, la frontière entre l'inanimé et le vivant s'estompe, que devient alors la spécificité humaine ?



Cette spécificité ne peut guère être définie par notre dotation génétique, si proche de celle des autres primates. C'est en s'interrogeant sur l'origine de la conscience qu'une réponse peut être proposée.

Cette conscience nous est permise par la richesse fabuleuse de notre cerveau. Il représente l'objet le plus complexe et jouit de ce fait de performances inouïes, notamment la capacité de comprendre et de transformer le monde.

Mais surtout, cette complexité nous a permis de mettre en place un réseau de communication entre les hommes qui fait de leur ensemble, l'humanité, la seule structure qui soit plus complexe que chaque individu, et qui peut, par conséquent, avoir des performances supérieures. Parmi ces performances, la plus décisive est de permettre à chacun, non seulement d'être, mais de se savoir être, d'être conscient, de parvenir à dire « je ».

La clé de la spécificité humaine est donc l'utilisation de nos performances intellectuelles pour créer le surhomme qu'est la communauté des hommes. Cette communauté opère en chacun une métamorphose plus étrange que celle de la chenille devenant papillon : le passage de l'individu créé par la nature en une personne créée par la rencontre des autres.

Pour qu'un individu devienne un homme, pour qu'en lui émerge une personne, il faut qu'il soit immergé dans une collectivité. C'est grâce aux autres que chacun devient lui-même et est en droit d'exiger le respect. Nous devons donc mettre en place une société où chacun regardera tout autre, non comme un obstacle, mais comme une source.

### *Le rôle du projet*

Dans notre univers, seuls interviennent le présent et le passé ; l'avenir n'existe pas. A chaque instant, les événements se déroulent en fonction de l'état actuel des choses, non en vue de réaliser un état futur. Seuls les hommes font exception : ils ont découverts que demain sera et prennent des décisions aujourd'hui en fonction de ce qu'ils désirent pour demain. Ce faisant, ils ont inversé le rôle du temps. Alors que tout ce qui peuple l'Univers subit les contraintes de l'état de choses présent, les hommes, grâce à la richesse fabuleuse de leur système nerveux central, ont eu l'idée fantastique d'inventer le concept d'avenir.

Du coup, leur statut dans le cosmos a été transformé. Au lieu de seulement subir les forces en action, ils ont pour rôle de les orienter, de choisir, de décider ce qui est bien et ce qui est mal, de construire une éthique. La morale est nécessitée par la possibilité du projet.

Ce constat doit être d'autant plus pris au sérieux que les avancées techniques ont rendues solidaires tous les hommes de la planète. Les choix collectifs doivent maintenant être « mondialisés ». La véritable mondialisation ne doit pas être celle de la finance ou du commerce, elle doit être celle de la culture, à condition de préserver la diversité et le respect des différences. Autrement dit, il faut mettre en place une démocratie planétaire de l'éthique.

Parmi les devoirs nouveaux qui s'imposent aux hommes aujourd'hui, l'un des plus urgents est la gestion raisonnée de leur effectif. Jusqu'à il y a quelques siècles, la nécessité était de préserver la survie de l'espèce en luttant contre l'excès de la mortalité. Cette lutte est maintenant victorieuse, du coup, le danger s'est inversé, c'est l'excès de naissances qui est devenu une menace. Le nombre des hommes, relativement stable jusqu'à la renaissance, a connu depuis une croissance exponentielle, qui s'est accélérée durant la seconde moitié du XX<sup>e</sup> en raison des succès remportés dans la lutte contre la mortalité infantile. Notre attitude envers la procréation doit désormais être inversée : elle était un devoir, elle devient un droit limité.

Un tel retournement, une telle révolution, s'impose dans de multiples domaines ; nous n'y sommes guère prêts, mais l'effort intellectuel qu'implique le raisonnement scientifique peut nous y aider. La science consiste en effet à aller au-delà des informations fournies par nos sens. Imaginer que la boule de feu qui se lève chaque matin est une étoile autour de laquelle nous tournons a exigé des siècles de réflexion. Ce n'est que bien récemment que nous avons compris la source de l'énergie qu'elle rayonne. Le soleil est un concept inventé par les hommes ; de même les protons, les quarks ou les trous noirs ; leur existence, définitivement cachée à ceux qui se contentent de leurs sensations, nous est révélée par notre capacité de raisonner. La connaissance est la naissance, en nous, d'une représentation du monde.

Pour la construire, la science s'impose quelques règles ; notamment, elle récuse les raisonnements finalistes expliquant ce qui se passe aujourd'hui en fonction de ce qui se passera demain, pour la bonne raison que demain n'existe pas. Tout doit être expliqué par des « parce que », et non pas par des « pour que ».

La connaissance toujours améliorée du cosmos est la grande tâche humaine, sa prouesse. Mais l'invention la plus extraordinaire est celle de l'Homme. Quoi de plus prodigieux que l'auto-construction qui nous permet, en nous regardant nous-mêmes, de nous transformer. La réponse de la science à la question de toujours « qu'est-ce qu'un être humain ? » est plus que jamais source d'émerveillement.

### *Le point d'arrivée : la personne humaine*

Nous devons aujourd'hui non seulement être conscients de nos pouvoirs et nous interroger sur le droit de les exercer en assumant notre rôle de cocréateurs du cosmos, mais aussi comprendre comment notre hypercomplexité cérébrale nous permet d'échapper collectivement au sort commun des objets produits par l'Univers.

Rappelons que la « complexité » est la caractéristique d'une structure dont les éléments sont nombreux, sont divers, et sont reliés entre eux par de multiples interactions. Lorsque cette complexité est suffisante, la structure manifeste des performances qui ne peuvent être déduites de la connaissance de chacun de ses éléments. Appliquons ce constat à « l'objet » qu'est l'humanité. Elle est riche de six milliards d'individus, tous différents ; les conditions de nombre et de diversité sont donc remplies. Mais les interactions sont-elles suffisamment subtiles et intenses ? Cela dépend d'eux. S'ils sont capables de mettre en commun non seulement des projets, des angoisses, des espoirs, alors ils ne sont plus une foule, mais un ensemble intégré capable de performances inaccessibles à chacun des humains isolés, et chacun d'eux peut en profiter.

L'important est de comprendre que mettre en relation est différent d'additionner ; deux plus deux font quatre, mais deux et deux peuvent donner tout autre chose que quatre ; cela est vrai en permanence dans notre cosmos, et cette émergence de l'inattendu est particulièrement spectaculaire avec l'aventure de l'humanité. La richesse de notre cerveau nous a permis de manifester une merveilleuse intelligence, mais c'est la complexité du réseau que nous établissons avec les autres qui nous fait accéder à la conscience d'être.

Pour expliquer cette conscience, on peut évoquer une décision spécifique du Créateur ; mais c'est là une affirmation que l'on peut ni prouver, ni démontrer fausse ; elle repose sur une foi, elle n'entre donc pas dans le discours scientifique. Une autre explication est que notre capacité à dire « je » n'a pas été donnée à chacun par la nature, mais a été apportée par les « tu » venant des autres. Grâce à ce réseau, tout homme est plus que lui-même. Chacun le ressent dans le secret et dans le doute ; pour progresser, la meilleure voie est de comprendre que mon « plus », ce sont les autres, et d'en tirer les conséquences.

Pour appartenir à l'humanité, il ne suffit pas d'avoir reçu la dotation génétique caractéristique de l'espèce, il faut aussi avoir été immergé dans une communauté humaine. Il faut distinguer la définition de l'individu de celle de la personne. Le premier est fait de particules associées en cellules, réunies en organes, la seconde est constituée de liens. Il s'agit de deux univers du discours différents ; le premier est de l'ordre des objets, le second de l'ordre des valeurs.

Les liens que nous tissons constituent la meilleure définition de nous-mêmes. Etre un humain signifie être capable de sortir de soi, de dire « je » comme si l'on parlait d'un autre ; Arthur Rimbaud l'a osé : dans son œuvre, « je » se conjugue à la troisième personne.

Cette conscience a été donnée aux hommes au prix d'un long effort qui a sans doute nécessité la succession de milliers de générations ; elle est un cadeau que les hommes se sont faits à eux-mêmes. Nous avons fait l'humanité, et elle nous a transformés. Il ne s'agit pas d'un cercle vicieux constamment recommencé, mais d'une spirale vertueuse faisant toujours apparaître des possibilités nouvelles. La nature a produit, au terme provisoire d'une longue évolution, des individus ; nous avons créé les personnes.

En tant qu'individus, chacun est un objet parmi d'autres ; il est défini par ses caractéristiques biologiques résultant de son patrimoine génétique ; son histoire peu à peu le façonne, lui donnant une personnalité spécifique ; mais il ne devient véritablement une personne que lorsque la communauté humaine lui reconnaît des droits. Ce concept de droit est inconnu du cosmos ; rien parmi tous les objets qui le constituent, n'est source de droits ; chacun est aveuglément soumis aux forces qui s'exercent sur lui. Evoquer des droits, c'est changer d'univers. L'individu, le sujet, la personnalité appartiennent à l'ordre des réalités que nous pouvons constater et décrire ; la personne appartient à l'ordre du sacré, de l'infiniment respectable, de l'inviolable, défini collectivement par une décision humaine.

A quel stade de son histoire un individu devient-il une personne ? A cette question, il n'y a de réponse qu'arbitraire. Tout au plus pouvons nous évoquer des problèmes liés aux deux extrémités du parcours de vie : la conception, d'où l'interrogation concernant l'avortement, la mort, d'où l'interrogation concernant l'euthanasie.

Un ovule, un spermatozoïde ne sont pas, isolés, le support d'une personne, mais ils se fondent l'un dans l'autre, multiplient les cellules et commencent à former un individu ; celui-ci est alors capable de devenir une personne par l'échange des liens avec les autres. Le lien mère-fœtus introduit la réalité d'une personne dans l'amas de cellules qui se forment et qui, dans l'esprit de la mère, est l'équivalent de « quelqu'un ». Elle a conscience du fait qu'un enfant se forme, et cette conscience rend cet enfant sacré. Dans cette voie, le problème de l'avortement est affronté en admettant que l'embryon devient une personne en fonction de l'attitude de sa mère.

De même, la fin de la vie pose des problèmes nouveaux dus au développement de nos moyens techniques. Autrefois, la mort était la conséquence de processus naturels. Aujourd'hui, dans la plupart des cas, l'instant précis de la mort est le résultat d'une décision technique. Une possibilité de réflexion est de recourir au concept de «mourir», défini comme cette période de la vie qui est ressentie comme ultime. Le rôle de ceux qui assistent le mourant est de lui permettre de vivre son mourir en respectant un équilibre difficile entre la conscience, la lutte contre la douleur et la durée. Une mort plus sereine peut parfois être obtenue au prix d'une vie moins longue.

Entre une conception imprécise et une mort mal définie, il y a toute une vie qui consiste à multiplier les liens, à sortir de soi-même, ce qui est l'objectif dans l'éducation.

Il nous faut maintenant poursuivre cette construction de l'humanité et adopter un projet digne de ce que nous pouvons réaliser.



I

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

**PROBLÈME N°1**

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et strictement positive.  
(b) Étudier la fonction  $g(x) = x - \ln(1 + x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .  
(c) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et qu'elle converge vers une limite  $l$  que l'on déterminera .
2. (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .  
(b) En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ .  
(c) Étudier la nature de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ .
3. Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \geq 1$  par  $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ .  
(a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et à termes strictement positifs.



(b) Montrer que :

$$v_n = 1 + \frac{u_n}{2}(1 + \varepsilon(n)), \quad \text{où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

(c) En déduire que les deux séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln v_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  sont de même nature.

(d) Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln \left( \frac{u_0}{u_n} \right)$ .

(e) Conclure quant à la nature de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

## PROBLÈME N°2

Dans tout le problème,  $f$  désigne une fonction définie sur  $]0, +\infty[$ .

1. On suppose que  $f$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

(a) Soit  $a > 0$  quelconque. Montrer qu'il existe  $A_a > 0$  tel que :

$$\forall x > A_a, \quad f(x) - ax < 0.$$

(b) En déduire que si  $b > a$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

(c) Prouver finalement que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

2. On suppose que  $f$  est positive sur  $]0, +\infty[$  et vérifie, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(a) Donner un exemple simple d'une telle fonction.

(b) Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque. Montrer qu'il existe  $A_\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

3. On suppose maintenant que  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  et vérifie, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(a) Montrer que  $f(x) = \ln x$  est une telle fonction.

(b) Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque. Montrer qu'il existe  $A_\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

4. Soit  $f(x) = -x$ .

(a) Montrer que l'on a bien, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Quelle est la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

(c) Qu'en concluez-vous?

### PROBLÈME N°3

Pour  $x$  réel, on pose, lorsque ces intégrales existent :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u} du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} du.$$

1. (a) Montrer que  $f$  et  $g$  ne sont pas définies en  $x = \pi$ .
- (b) Montrer que  $f$  et  $g$  sont impaires sur leur domaine de définition.
- (c) Déduire de (a) et (b) que le domaine de définition de  $f$  et  $g$  est  $] -\pi, \pi[$ .
- (d) Montrer que  $f$  et  $g$  sont indéfiniment dérivables sur  $] -\pi, \pi[$ .
2. (a) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre  $f(x)$  et  $g(x)$ , pour tout  $x$  appartenant à  $] -\pi, \pi[$ .



(b) Montrer que :

$$\forall x \in ]-\pi, \pi[, \quad \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} du = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} du.$$

(c) Dédire des deux questions précédentes que l'on a pour tout  $x$  dans  $] - \pi, \pi[$  :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ 2f(x) + g(x) = x \end{cases}$$

(d) En déduire les valeurs respectives de  $f(x)$  et  $g(x)$  sur  $] - \pi, \pi[$ .



1

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN

AVRIL 2003

*CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES*

*VOIE B*

*Option Mathématiques*

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

**EXERCICE N°1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$  vérifiant  $f \circ f = f$ .

1. Montrer que  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$ .
2. Montrer que  $\text{Im } f = \text{Ker } (f - \text{Id})$ , où  $\text{Id}$  désigne l'application identité de  $E$ .
3. Dédurre de tout ce qui précède que  $f$  est diagonalisable.

**EXERCICE N°2**

Soit  $q$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz.$$

1. Montrer que  $q$  est une forme quadratique.
2. Quelle est la matrice associée du produit scalaire associé à  $q$ ?
3. Montrer que  $q$  est définie positive.

## PROBLÈME

### Définitions et notations :

- $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n > 1$ .
- On appelle endomorphisme de  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $E$ .
- On désigne par  $\mathcal{L}(E)$  l'espace des endomorphismes de  $E$ .
- Pour un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$ , on appelle **commutant de  $f$** , l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f\}.$$

- On désigne par  $\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
- Si  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  et  $f$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ , on définit l'endomorphisme  $P(f)$  par :

$$P(f) = a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_n f^n,$$

où  $\text{Id}$  désigne l'application identité de  $E$  et  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ .

- On notera  $\mathcal{P}(f) = \{P(f), P \in \mathbb{C}[X]\}$ .

**Partie I.** Soit  $f$  un endomorphisme quelconque de  $E$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Montrer que  $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{C}(f)$ .
3. Montrer, par un exemple très simple, que l'inclusion précédente peut être stricte.
4. Montrer que  $\dim \mathcal{C}(f) \geq 2$ .

**Partie II.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ . L'objectif de cette partie est de trouver la forme de  $f$ .

1. Supposons que  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ . On veut montrer que  $f$  est l'endomorphisme nul.
  - (a) Montrer que si  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul, alors on peut trouver deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  tels que :

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(y) \neq 0.$$

- (b) Montrer que  $(x, y)$  est un système libre.
- (c) Montrer que l'on peut construire  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $g(x) = y$ .

- (d) Montrer que  $f$  et  $g$  ne commutent pas.
  - (e) Conclure que si  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ , alors  $f$  est forcément l'endomorphisme nul.
2. Supposons dorénavant que  $\text{Ker } f = \{0\}$ . On veut montrer que  $f$  est nécessairement une homothétie.
- (a) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . Montrer que si  $(x, f(x))$  est une famille libre, on peut construire un endomorphisme  $g$  qui ne commute pas avec  $f$ .
  - (b) En déduire que pour tout vecteur non nul  $x$  de  $E$ , il existe  $\lambda(x)$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $f(x) = \lambda(x)x$ .
  - (c) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$  et soit  $\mu$  dans  $\mathbb{C}^*$ . En écrivant  $f(\mu x)$  de deux façons, montrer que  $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$ .
  - (d) Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs libres. En écrivant  $f(x + y)$  de deux façons, montrer que  $\lambda(x) = \lambda(y)$ .
  - (e) En déduire que  $f$  est nécessairement une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$  tel que  $f = \lambda \text{Id}$ , où  $\text{Id}$  est l'application identité de  $E$ .
3. Donner finalement tous les endomorphismes  $f$  de  $E$  qui vérifient  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ .

**Partie III.** Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . On suppose que  $f$  possède  $p$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  respectivement d'ordre de multiplicité  $n_1, \dots, n_p$ .

1. Soit  $g$  appartenant à  $\mathcal{C}(f)$ . Montrer que les espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ .
2. Réciproquement, montrer que si  $g$  conserve tous les espaces propres de  $f$  alors  $g$  est dans  $\mathcal{C}(f)$ .

Indication : on montrera que, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de vecteurs propres de  $f$ , alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$ .

3. En déduire que  $\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{i=1}^p n_i^2$ .

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**PROBLÈME N°1**

1. (a) On le montre par récurrence.  $u_0 > 0$ . Supposons que pour un entier  $n$  positif, on a  $u_n > 0$ . On a alors  $\ln(1 + u_n) > 0$ , soit  $u_{n+1} > 0$ .

- (b) Soit  $g(x) = x - \ln(1 + x)$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et on a :

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

$g$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g(0) = 0$ .  $g$  est donc positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

- (c)  $g$  étant positive, on en déduit que pour tout entier  $n$ , on a :

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \geq 0.$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant alors une suite décroissante. Comme, d'après 1.(a), elle est minorée par 0, elle converge vers  $l$  tel que  $g(l) = 0$ . Or 0 est le seul point qui vérifie cela, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

2. (a) On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ , ce qui est le résultat demandé.

- (b) D'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  est 1.

- (c)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite qui décroît vers 0, donc d'après le théorème des séries alternées,  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$  converge.

3. (a) Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite à termes positifs, il est clair que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi.

(b) On a  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , quand  $x$  tend vers 0. Donc :

$$v_n = \frac{u_n}{\ln(1+u_n)} = \frac{u_n}{u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)} = \frac{1}{1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)} = 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n),$$

qui est le résultat demandé.

(c) D'après ce qui précède :

$$\ln v_n = \ln \left( 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n) \right) = \frac{u_n}{2} + o(u_n).$$

Ces deux suites étant à termes positifs, on en déduit que  $\sum \ln v_n$  et  $\sum \frac{u_n}{2}$  sont de même nature. Comme il est clair que  $\sum \frac{u_n}{2}$  et  $\sum u_n$  sont de même nature, on obtient le résultat.

(d) On a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln(v_0 v_1 \cdots v_{n-1}) = \ln \left( \frac{u_0 u_1 \cdots u_{n-1}}{u_1 u_2 \cdots u_n} \right) = \ln \left( \frac{u_0}{u_n} \right).$$

(e) Comme  $u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{u_n} = +\infty$ . On déduit donc de 3.(d) que  $\sum \ln v_n$  diverge. Donc  $\sum u_n$  diverge puisque ces deux séries sont de même nature.

## PROBLÈME N°2

1. (a) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, \forall x > A_\varepsilon, \quad -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Pour  $\varepsilon = a$  on a en particulier :

$$\exists A_a > 0, \forall x > A_a, \quad \frac{f(x)}{x} < a.$$

Comme  $x$  est positif, on a bien :

$$\exists A_a > 0, \forall x > A_a, \quad f(x) < ax.$$

(b) Soit  $b > a$ . On peut écrire :

$$f(x) - bx = f(x) - ax + (a - b)x.$$

D'après (a), pour  $x > A_a$ ,  $f(x) - ax$  est négatif, d'où :

$$\forall x > A_a, \quad f(x) - bx < (a - b)x.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a - b)x = -\infty$ , on a bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

(c) Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque. En prenant  $a = \frac{\varepsilon}{2}$  et  $b = \varepsilon$ , on a bien  $b > a > 0$ , le résultat est alors donné par ce qui précède.

2. (a) Soit  $f(x) = 1$  pour tout  $x \geq 0$ .  $f$  est alors positive sur  $]0, +\infty[$  et vérifie bien, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$ , en particulier  $f(x) - \varepsilon x$  est négatif pour  $x$  assez grand, soit :

$$\exists A_\varepsilon > 0, \quad \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) - \varepsilon x < 0.$$

Enfin, comme  $f$  est positive, on a bien le résultat demandé.

(c) D'après 2.(b), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A_\varepsilon > 0, \quad \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

$x$  étant positif, on conserve le sens de l'inégalité en divisant par  $x$  et on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A_\varepsilon > 0, \quad \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon,$$

qui signifie exactement que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

3. (a)  $\ln x$  est bien une fonction croissante vérifiant la propriété demandée.

(b) En refaisant le même raisonnement qu'au 2.(b), on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A_\varepsilon > 0, \quad \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) < \varepsilon x.$$

Comme  $f$  est croissante, on a pour tout  $x$  positif,  $f(0) \leq f(x)$ . On a alors le résultat demandé :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A_\varepsilon > 0, \quad \forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En divisant par  $x$ , on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, \forall x > A_\varepsilon, \quad \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Il est clair que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)}{x} = 0$ . On déduit donc aisément de ce qui précède que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

4.  $f(x) = -x$ .

(a) Il est clair que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \varepsilon x) = -\infty$ .

(b) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1 \neq 0$ .

(c) On en conclut que si  $f$  n'est ni positive ni croissante, le fait que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$  n'entraîne pas nécessairement que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Cette dernière propriété est donc plus forte puisque l'implication réciproque est toujours vraie.

### PROBLÈME N°3

On définit lorsque c'est possible :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u} du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} du.$$

1. (a) Soit  $u = \pi - y$ . On a :

$$\cos u = \cos(\pi - y) = -\cos y = -1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Donc  $\frac{\cos u}{1 + \cos u} \sim \frac{2}{y^2}$  quand  $y = \pi - u$  tend vers 0. Or l'intégrale de  $\frac{2}{y^2}$  diverge en 0, donc  $f$  n'est pas définie en  $\pi$ . On procède de la même manière pour  $g$ .

(b) Les intégrantes étant paires, on vérifie aisément que  $f$  et  $g$  sont impaires.

(c) Il est clair que  $f$  et  $g$  ne sont pas définies pour  $x \geq \pi$ , puisque l'on ne peut pas définir une intégrale sur un intervalle contenant un point où elle diverge. En tout point de  $]0, \pi[$  les intégrales sont définies puisque les intégrantes sont continues. Enfin, par parité, on en déduit que le domaine de définition de  $f$  et  $g$  est  $] -\pi, \pi[$ .



(d) On sait classiquement que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $] - \pi, \pi[$  et on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}.$$

Ces fonctions étant des composées de fonctions indéfiniment dérivables sur  $] - \pi, \pi[$  (fractions rationnelles et sin et cos), elles sont donc indéfiniment dérivables sur  $] - \pi, \pi[$ .

2. (a) On part de  $f$ . On intègre par parties en dérivant le terme  $\frac{1}{1 + \cos u}$  et en intégrant  $\cos u$ . On trouve alors :

$$f(x) = -g(x) + \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(b) On a, pour tout  $u$  dans  $] - \pi, \pi[$ ,  $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u = (1 - \cos u)(1 + \cos u)$ . Donc :

$$\forall u \in ] - \pi, \pi[, \quad \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u},$$

d'où le résultat.

(c) La question 2.(a) donne la première ligne du système. On a :

$$\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = 1 - 2 \frac{\cos u}{1 + \cos u}.$$

La question 2.(b) donne donc :

$$\forall x \in ] - \pi, \pi[, \quad g(x) = \int_0^x du - 2f(x) = x - 2f(x),$$

qui est bien la deuxième ligne du système.

(d) En soustrayant la première ligne à la deuxième, on trouve :

$$\forall x \in ] - \pi, \pi[, \quad f(x) = x - \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

En remplaçant cette valeur dans une des deux lignes, on obtient :

$$\forall x \in ] - \pi, \pi[, \quad g(x) = \frac{2 \sin x}{1 + \cos x} - x.$$

On remarquera que les fonctions  $f$  et  $g$  ne sont définies que sur l'intervalle  $] - \pi, \pi[$  alors que, par exemple  $x - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  est définie pour tout  $x$  non congru à  $\pi$  modulo  $2\pi$ .

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**EXERCICE N°1**

$f$  est un endomorphisme de  $E$  espace vectoriel de dimension finie, qui vérifie  $f \circ f = f$ .

1. Soit  $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ .  $x$  étant dans l'image de  $f$ , il existe donc  $y$  dans  $E$  tel que  $x = f(y)$ . Mais  $x$  est également dans le noyau, donc  $f(x) = 0$ . Puisque  $f^2 = f$ , on a donc :

$$0 = f(x) = f(f(y)) = f(y) = x.$$

On en déduit donc que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ . Le théorème du rang nous indique que :

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E,$$

on a donc bien :

$$\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E.$$

2.

$$\begin{aligned} x \in \text{Im } f &\iff \exists y, f(y) = x \\ &\iff f(x) = x \quad (\text{car } f \circ f = f) \\ &\iff x \in \text{Ker } (f - \text{Id}). \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède,  $\text{Ker } (f - \text{Id}) \oplus \text{Ker } f = E$ . Comme  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $f$ ,  $f$  est donc diagonalisable.

**EXERCICE N°2**

$q$  est l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$ .

1.  $q$  est une forme quadratique en tant que polynôme homogène de degré 2.
2. La matrice du produit scalaire associé à  $q$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On peut écrire  $q(x, y, z) = 2\left(x + \frac{y}{2} + z\right)^2 + 3\frac{y^2}{2} + 3z^2$ . On voit alors que  $q$  est bien définie positive.

## PROBLÈME

**Partie I.**  $f$  est un endomorphisme quelconque de  $E$ .

1. Soient  $g_1$  et  $g_2$  dans  $\mathcal{C}(f)$  et soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux complexes. On a :

$$f \circ (\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda f \circ g_1 + \mu f \circ g_2 = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f = (\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f,$$

ce qui prouve que  $\mathcal{C}(f)$  est bien un espace vectoriel.

2. Soit  $g$  dans  $\mathcal{P}(f)$ .  $g$  s'écrit donc sous la forme :

$$g = a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n) \circ f \\ &= a_0 f + a_1 f^2 + \cdots + a_n f^{n+1} \\ &= f \circ (a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

3. Si  $f = 0$ , il est clair que  $\mathcal{P}(f) = \{0\}$  alors que  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ .
4. Supposons qu'il existe un complexe  $\lambda$  tel que  $f = \lambda \text{Id}$ . Alors  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ , donc  $\dim \mathcal{C}(f) = n^2 \geq 2$ . Sinon,  $f$  et  $\text{Id}$  forment une famille libre dans  $\mathcal{L}(E)$ . On a alors :

$$\dim \mathcal{C}(f) \geq \dim \mathcal{P}(f) \geq \dim (\text{Vect} (\text{Id}, f)) \geq 2.$$

**Partie II.**  $f$  est maintenant un endomorphisme de  $E$  tel que  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ .

1. On suppose que  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ .

(a) Si  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul, alors il existe un vecteur  $y$  tel que  $f(y) \neq 0$ .  
Mais, puisque  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ , il existe  $x$  non nul dans  $\text{Ker } f$ , d'où le résultat.

(b) Si  $\lambda x + \mu y = 0$ , alors  $f(\lambda x + \mu y) = 0$ . Mais  $f(x) = 0$ , donc :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \mu f(y).$$

D'où  $\mu f(y) = 0$ , ce qui donne  $\mu = 0$  car  $f(y) \neq 0$ .

On a alors  $\lambda x = 0$ , donc  $\lambda = 0$  car  $x$  est non nul.  $\{x, y\}$  est donc bien une famille libre.

(c) Le théorème de la base incomplète nous permet maintenant d'affirmer qu'il existe des vecteurs  $e_3, \dots, e_n$  tels que  $(x, y, e_3, \dots, e_n)$  forment une base de  $E$ .  
Soit alors l'endomorphisme  $g$  défini par :

$$g(x) = y \quad \text{et} \quad g(y) = g(e_3) = \dots = g(e_n) = 0.$$

(d) On a alors :

$$f \circ g(x) = f(y) \neq 0 \quad (\text{par hypothèse}) \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

(e) Ce dernier résultat est contradictoire avec le fait que  $g$  et  $f$  commutent donc  $f$  est forcément l'endomorphisme nul si son noyau est non réduit à  $\{0\}$ .

2. On suppose maintenant que  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

(a) Soit  $x$  quelconque. Si  $\{x, f(x)\}$  est une famille libre, le théorème de la base incomplète nous dit que l'on peut trouver des vecteurs  $e_3, \dots, e_n$  tels que  $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$  soit une base de  $E$ . On définit alors l'endomorphisme  $g$  par :

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad g(f(x)) = g(e_3) = \dots = g(e_n) = 0.$$

On a donc :

$$f \circ g(x) = f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = 0.$$

Cela contredit donc le fait que  $f$  et  $g$  commutent. Donc  $x$  et  $f(x)$  sont liés quel que soit  $x$ .

(b) Si  $x \neq 0$ ,  $(x, f(x))$  est une famille liée. Donc il existe un complexe  $\lambda(x)$  tel que  $f(x) = \lambda(x)x$ . Si  $x$  est nul, le résultat est évident.

(c) D'après la question précédente :

$$f(x) = \lambda(x)x \quad \text{et} \quad f(\mu x) = \lambda(\mu x)(\mu x).$$

Mais  $f(\mu x) = \mu f(x)$ , d'où  $\mu f(x) = \lambda(\mu x)\mu x$ .  $\mu$  étant non nul, on a donc  $f(x) = \lambda(\mu x)x$ . Comme on avait déjà  $f(x) = \lambda(x)x$  et que  $x$  est non nul, on a donc bien  $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$ .

- (d) Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs libres. On écrit  $f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$ . Mais  $f(x+y) = \lambda(x+y)(x+y)$ . En égalant les deux expressions, on trouve :

$$\lambda(x)x + \lambda(y)y = \lambda(x+y)(x+y),$$

soit encore :

$$[\lambda(x) - \lambda(x+y)]x + [\lambda(y) - \lambda(x+y)]y = 0.$$

$x$  et  $y$  étant libres, on a forcément  $\lambda(x) - \lambda(x+y) = \lambda(y) - \lambda(x+y) = 0$  ce qui prouve finalement que  $\lambda(x) = \lambda(y)$ .

- (e) On déduit des deux questions précédentes que, pour tous  $x$  et  $y$ ,  $\lambda(x) = \lambda(y)$ . Donc pour tout  $x$ ,  $\lambda(x) = \lambda(0) = \lambda$  indépendant de  $x$ .

3. On a donc prouvé que si  $\text{Ker } f = \{0\}$ , alors il existe  $\lambda$  tel que, quel que soit  $x$ ,  $f(x) = \lambda x$ . Si  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ , alors  $f = 0$ , qui est sous la même forme que précédemment avec  $\lambda = 0$ . Dans tous les cas, si  $f$  commute avec tous les endomorphismes, alors  $f$  est une homothétie (i.e.  $f(x) = \lambda x$ ). A l'inverse, il est clair que si  $f(x) = \lambda x$  alors  $f$  commute avec tous les endomorphismes.

**Partie III.** Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . On suppose que  $f$  possède  $p$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  respectivement d'ordre de multiplicité  $n_1, \dots, n_p$ .

1. On considère  $g$  dans  $\mathcal{C}(f)$ . Soit  $x$  dans  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$  pour un  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$ . Comme  $f$  et  $g$  commutent, on peut écrire :

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x).$$

Donc  $g(x)$  est dans  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ , ce qui signifie que  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$  est stable par  $g$ . Donc tous les espaces propres de  $f$  sont bien stables par  $g$ .

2. Soit  $x$  un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda_i$ . Par hypothèse,  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$  est stable par  $g$ .  $g(x)$  est donc dans  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ , ce qui signifie  $f \circ g(x) = \lambda_i g(x)$ . D'autre part,  $g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$ . Donc, pour tout vecteur propre  $x$ , on a  $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ .

$f$  étant diagonalisable, il existe  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $f$ . D'après ce qui précède :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i).$$

$f \circ g$  et  $g \circ f$  sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base, elles sont donc égales.

3. On vient de montrer que  $g$  commute avec  $f$  si et seulement si  $g$  conserve tous les espaces  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ . On a donc :

$$\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{i=1}^p \dim \mathcal{L}(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})) = \sum_{i=1}^p n_i^2,$$

où  $\mathcal{L}(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}))$  désigne l'ensemble des endomorphismes de  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ .

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES****VOIE B****AVRIL 2003****OPTION MATHEMATIQUES****CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE****EXERCICE n° 1**

En posant  $u=x-2$ , on se positionne au voisinage de 0 et on peut alors appliquer les développements limités connus. On trouve alors comme équivalent :  $-(5/96)u$

**EXERCICE n° 2**

$$998^2 = (1000-2)^2 = 996004 ;$$
$$13^4 = (10+3)^4 = 28561$$

**EXERCICE n° 3**

Sur les 18 ouvriers à répartir entre les quatre ateliers de l'usine, 9 sont affectés sur contrainte (quatre ouvriers à l'atelier 1, deux ouvriers aux ateliers 2 et 3 et un ouvrier à l'atelier 4). Il reste 9 ouvriers à affecter dans 4 ateliers, ce qui revient à répartir 9 éléments dans 12 cases (les cases laissées vides correspondant à un changement d'atelier). Ceci donne 220 façons.

**EXERCICE n° 4**

Soit A, l'évènement « l'automobile a une panne des cardans au cours du banc d'essai ». La probabilité de A est de 0,001 ;

Soit B, l'évènement « l'automobile a une panne de moteur au cours du banc d'essai ». La probabilité de B est de 0,05

Soit C, l'évènement « l'automobile a une panne de l'embrayage au cours du banc d'essai ». La probabilité de C est de 0,01

Soit D, l'évènement « l'automobile a une panne des freins au cours du banc d'essai ». La probabilité de D est de 0,013

Soit E, l'évènement « l'automobile a une panne de la boîte de vitesse au cours du banc d'essai ». La probabilité de E est de 0,03

La probabilité demandée s'obtient en utilisant l'évènement contraire ; le véhicule ne tombe pas en panne. En utilisant l'indépendance des évènements, on trouve  
 $1-p=(1-0,001)(1-0,05)(1-0,01)(1-0,013)(1-0,03)=0,8995$ , donc p est égal à 10,05%

**EXERCICE n° 5**

| i | Modèle    | Quantités |      | Prix |      | Ventes |      |
|---|-----------|-----------|------|------|------|--------|------|
|   |           | 1995      | 2001 | 1995 | 2001 | 1995   | 2001 |
| 1 | Produit A | 50        | 55   | 18   | 22   | 900    | 1210 |
| 2 | Produit B | 69        | 62   | 23   | 25   | 1587   | 1550 |
| 3 | Produit C | 96        | 115  | 28   | 25   | 2688   | 2875 |
|   | Ensemble  |           |      |      |      | 5175   | 5635 |

En utilisant la définition des indices de Laspeyre et de Paasche, on obtient :

$$L_{\%} = \frac{\sum Q_0 P_1}{\sum Q_0 P_0} = \frac{5225}{5175} = 1,0097$$

$$P_{\%} = \frac{\sum Q P_1}{\sum Q P_0} = \frac{5635}{5225} = 1,0785$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 4 HEURES)

Calculatrice permise.

Les exercices et le problème sont indépendants et de difficultés diverses.

**Exercice 1:**

On considère la fonction

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

1) Etudier rapidement cette fonction sur  $\mathbb{R}$  (Continuité, dérivabilité). La représenter (approximativement) sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .

2) On pose pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

et

$$h(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x)) = 0$ . En déduire que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que pour  $x > 0$ ,

$$g(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |h(x)|.$$

En déduire la limite de  $g(x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

c) Déterminer la dérivée de  $g(x)$ .

**Exercice 2 :**

Soit la fonction définie de  $]-\pi/2, \pi/2[$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\phi(x) = \tan(x) - x.$$

a) Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $0 < x < \varepsilon$  on a

$$\phi(x) \leq x^3.$$

b) Montrer que  $\phi$  est bijective : on note  $\psi = \phi^{-1}$  son inverse définie de  $\mathbb{R}$  dans  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

c) Etudier la limite des suites  $u_n = \psi\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$  et  $v_n = \psi\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

d) Les séries  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sont-elles convergentes?

e) Soit la suite à double indice définie par

$$u_{m,n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m - \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m.$$

Montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = -1/2$ . Que vaut  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}$ ?



## Problème :

On utilise dans tout le problème les notations suivantes:

$P_n^0$  est l'ensemble des polynômes de  $[-1,1]$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ ,

$P_n$  est la partie de  $P_n^0$  composée des polynômes de degré  $n$ ,

$F[0,1]$  l'ensemble des fonctions de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour  $f \in F$  dérivable  $m$  fois,  $f^{(m)}$  désigne la dérivée d'ordre  $m$ .

$\|.\|$  est la norme sur  $P_n^0$  définie par , pour  $P \in P_n^0$ ,  $\|P\| = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$ .

## Préliminaire :

1) Montrer par récurrence, que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n$  entier positif, on a

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$$

En déduire que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{1}{n}.$$

## Première partie : Les polynômes de Féjer-Tchebichev

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $T_n$  et  $U_n$  dans  $F[0,1]$  par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T_{n+1}^{(1)}(x).$$

a) Calculer  $T_0$  et  $T_1$

b) Montrer que  $T_n$  satisfait l'équation de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [-1,1]$ ,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(x)$  appartient à  $P_n$ , de coefficient dominant égal à  $2^{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

d) Calculer explicitement  $T_1, T_2, T_3, T_4, U_0, U_1, U_3, U_4$ .

2) Montrer que les zéros de  $T_n$  sont exactement les réels ordonnés par ordre strictement croissant,

$$\alpha_{k,n} = \cos\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi\right)\right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

3) Montrer que  $U_n(x)$  est un polynôme de  $P_n$ . Quel est son coefficient dominant? Montrer que  $U_n$  vérifie pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}.$$

4) Montrer que  $T_n$  est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n^{(1)}(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

En déduire une équation différentielle satisfaite par  $U_n(x)$ .

5) Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_{k,l} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_l(x) dx.$$

Montrer que ces intégrales impropres sont bien définies et que  $I_{k,l} = 0$  pour  $l \neq k$ .

Calculer  $I_{k,k}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

6) Déduire de ce qui précède une base orthonormée de  $P_n^0$  pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle_M = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P(x) Q(x) dx.$$

## 2ème Partie : Théorème de la Norme de Markov.

1) Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T_n\|$  et  $\|U_n\|$ . Préciser en quels points le suprémum est atteint, respectivement pour  $T_n$  et  $U_n$ .

2) En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} \right| \leq n^2.$$

(Aide : on calculera la dérivée de  $\log(T_n(x)) = \frac{T_n'(x)}{T_n(x)}$ ).

3) Pour  $0 \leq i \leq n-1$ , on définit le ième polynôme interpolateur de Lagrange  $L_{i,n-1}$  associé à  $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n-1,n})$  comme l'unique polynôme de degré  $n-1$  tel que  $L_{i,n-1}(\alpha_{j,n}) = 0$ , pour tout  $i \neq j$  et  $L_{i,n-1}(\alpha_{i,n}) = 1$ . Expliciter sa forme et exprimer  $\frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}}$  en fonction de  $L_{k,n-1}$ .

On rappelle que si les réels  $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n-1,n-1})$  sont tous différents  $L_{0,n-1}, \dots, L_{n-1,n-1}$  forme une base de  $P_{n-1}^0$ .

4) Montrer les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) &= 2^n \prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}) \\ &= (-1)^{k-n+1} \frac{n}{\sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}}. \end{aligned}$$

5) Montrer que, pour tout polynôme  $P$  dans  $P_{n-1}^0$ , on a la décomposition

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2} P(\alpha_{k,n}) \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}}.$$

6) Dédurre de ce qui précède que, pour tout  $P$  dans  $P_{n-1}^0$  tel que  $\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1$  on a  $\|P\| \leq n$ .

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

**ORDRE GÉNÉRAL****(Durée de l'épreuve : 3 heures)****Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.****Sujet n° 1**

Dans une société, quelles sont les conditions de la réduction des inégalités entre les hommes et les femmes ?

**Sujet n° 2**

L'homme moderne s'est-il trop éloigné de la nature ?

**Sujet n° 3**

Les découvertes techniques contribuent-elles à renouveler les questions morales ?

AVRIL 2004

## CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 3 HEURES)

Les deux problèmes sont indépendants.

### Problème 1 : L'Algorithme de Fletcher-Powell

On note  $M_{n,k}(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices  $n$  lignes,  $k$  colonnes sur  $\mathbb{R}$ ,  
 $SDP_n(\mathbb{R})$  le sous ensemble de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ , des matrices symétriques, définies positives.  
 $Y^*$  désigne la transposée de  $Y$ ,  $I_n$  la matrice identité de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ .

**Préliminaire :** Soit  $D$  une matrice de  $SDP_n(\mathbb{R})$  diagonale. On pose pour  $Y$  et  $Z$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle Y, Z \rangle_D = Y^* D Z.$$

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  est un produit scalaire de norme associée  $\|\cdot\|_D$  et montrer l'inégalité

$$\langle Y, Z \rangle_D \leq \|Y\|_D \|Z\|_D.$$

1) Soit  $A$  et  $B$  dans  $SDP_n(\mathbb{R})$  et  $X \neq 0$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que pour tout  $Y$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  on a

$$Y^* B A X X^* A B Y \leq (X^* A B A X)(Y^* B Y).$$

b) On pose

$$C = B + \frac{X X^*}{X^* A X} - \frac{B A X X^* A B}{X^* A B A X}.$$

Montrer que  $C \in SDP_n(\mathbb{R})$ .

2) Soit maintenant  $A$  dans  $SDP_n(\mathbb{R})$  et  $H_0 = I_n$ ,  $X_0$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On définit par induction

$$H_{k+1} = H_k + \frac{X_k X_k^*}{X_k^* A X_k} - \frac{H_k A X_k X_k^* A H_k}{X_k^* A H_k A X_k}$$

et

$$X_{k+1} = H_{k+1} Y_{k+1},$$

où  $Y_{k+1}$  est tel que  $Y_{k+1} \neq 0$  et vérifie  $X_j^* Y_{k+1} = 0$  pour  $0 \leq j \leq k$ , pour  $k = 0, \dots, n-1$  (c'est à dire  $Y_{k+1}$  est un vecteur orthogonal aux  $X_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ ).

Montrer (par récurrence sur  $k$ ) que pour tout  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $H_{k+1} A X_j = X_j$  et  $X_{k+1}^* A X_j = 0$ .

3) En déduire que  $H_n = A^{-1}$ .

## Problème 2 : Sur les sous-groupes des matrices unitaires.

Soit  $M_{n,n}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices à valeurs sur  $\mathbb{C}$ , muni de produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*),$$

où  $B^* = \overline{B}^t$  (conjuguée de la transposée). On note  $I$  la matrice identité,  $0$  la matrice nulle. On dit que deux matrices  $A$  et  $B$  commutent si l'on a

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

1) Montrer que  $M_{n,n}(\mathbb{C})$  est un espace vectoriel hermitien, de norme hermitienne

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$$

En donner une base orthonormée.

2) Soit  $U_n(\mathbb{C})$  le sous-espace des matrices unitaires (c'est à dire telles que  $UU^* = I$ ). Montrer que si  $U \in U_n(\mathbb{C})$  et  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  on a

$$\|UA\| = \|AU\| = \|A\|.$$

3) Soit  $A$  une matrice diagonale et  $B$  dans  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ , montrer que

$$\|AB - BA\| \leq \sqrt{2}\|A\| \|B\|$$

En déduire que ce résultat est vrai pour toute matrice  $A$  de  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ .

4) Soient  $A$  et  $B$  dans  $U_n(\mathbb{C})$  telles que  $\|I - A\| < 1/\sqrt{2}$ . On considère la suite définie par

$$B_0 = B$$

$$B_{k+1} = AB_k A^{-1} B_k^{-1}$$

Montrer que cette suite est bien définie et que l'on a

$$\|I - B_{k+1}\| \leq \sqrt{2}\|B_k\|$$

et

$$\|I - B_{k+1}\| \leq \sqrt{2}\|I - A\| \|I - B_k\|.$$

En déduire la limite de la suite  $B_k$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Que peut-on dire de la suite  $B_k$ , si  $A$  et  $B$  engendrent un sous-groupe fini de  $U_n(\mathbb{C})$ .

**On suppose pour le reste du problème que  $A$  et  $B$  sont dans  $U_n(\mathbb{C})$ . On rappelle le résultat suivant : si  $[A, B] = 0$  alors  $A$  et  $B$  sont diagonalisables simultanément (c'est à dire il existe  $U$  dans  $U_n(\mathbb{C})$  tel que  $UAU^{-1}$  et  $UBU^{-1}$  soient diagonales).**

5) Montrer que si  $A$  et  $AB^{-1}A$  sont diagonales alors il existe une matrice  $V$  de  $U_{n,n}(\mathbb{C})$  à coefficients dans  $\{0,1\}$  telle que

$$BAB^{-1} = V^{-1}AV.$$

6) Montrer que si  $C$  est inversible  $[A, C] = 0$  implique  $[A, C^{-1}] = 0$

7) On suppose désormais dans toute la suite que  $[A, ABA^{-1}B^{-1}] = 0$ . Montrer que  $A$  et  $BAB^{-1}$  sont diagonalisables simultanément.

8) Montrer que si  $M$  est une matrice unitaire de terme générique  $m_{i,j}$  telle que  $\|I - M\| < 2$  alors  $\sum_{i=1}^n |m_{ii}| > n - 2$ . Montrer que au moins  $(n - 1)$  termes de sa diagonale sont non nuls.

9) Dédurre de tout ce qui précède que si  $\|I - B\| < 2$  alors  $A$  et  $B$  sont diagonalisables simultanément.

10) Soit  $V_n(\mathbb{C})$  un sous-groupe fini de  $U_n(\mathbb{C})$ . Montrer que pour tout élément  $A$  et  $B$  de  $V_n(\mathbb{C})$  tels que

$$\|I - A\| < 1/\sqrt{2} \text{ et } \|I - B\| < 1/\sqrt{2},$$

on a  $[A, B] = 0$ .

11) Dédurre de ce qui précède le théorème suivant :

Si  $V_n(\mathbb{C})$  est un sous-groupe de  $U_n(\mathbb{C})$  engendré par des éléments  $A$  tels que  $\|I - A\| < 1/\sqrt{2}$ , et si tout sous-groupe de  $V_n(\mathbb{C})$  à deux générateurs est fini, alors  $V_n(\mathbb{C})$  est abélien (commutatif).



1

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CALCUL NUMÉRIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

**Exercice n° 1**

Dans le comité pédagogique d'une école composé de 8 membres, on souhaite représenter les quatre filières de recrutement. Aussi doit-il comporter 1 membre de la filière A, 2 membres de la filière B, 2 membres de la filière C, 3 membres de la filière D.

Sachant que la population de la filière A est de 10, celle de la filière B de 18, celle de la filière C de 22 et celle de la filière D de 30, calculer :

- a) de combien de façons peut-on composer la représentation de la filière A ?
- b) même question pour la filière B
- c) même question pour la filière C
- d) même question pour la filière D
- e) de combien de manières peut-on constituer ce comité pédagogique ?

**Exercice n° 2**

Etudier suivant les valeurs des paramètres réels  $m$  et  $p$  la limite,

pour  $x \rightarrow +\infty$ , de  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - mx\sqrt{x+p}$

**Exercice n° 3**

Le prix du ticket de restaurant étudiant était de 1 euro au 1<sup>er</sup> octobre 1982. Au 1<sup>er</sup> octobre 2002, il était de 3 euros, et au 1<sup>er</sup> octobre 2003 de 3,2 euros.

- De combien le prix du ticket a-t-il augmenté en % entre le 1/10/1982 et le 1/10/2002 ?
- Quel est le taux moyen annuel de variation entre 1982 et 2002 ?
- De combien en % a augmenté le prix du ticket entre le 1/10/2002 et le 1/10/2003 ?
- Si, dans l'avenir, l'augmentation moyenne annuelle observée entre 1982 et 2002 est reconduite chaque année, dans combien d'années le prix du ticket dépassera-t-il la somme de 5 euros ?

**Exercice n° 4**

A partir du tableau ci-dessous, calculer le nombre moyen d'habitants par médecin dans l'ensemble du pays constitué par les cinq régions étudiées.

| Région | Nombre d'habitants pour un médecin | Population (en milliers) |
|--------|------------------------------------|--------------------------|
| A      | 200                                | 450                      |
| B      | 150                                | 570                      |
| C      | 180                                | 360                      |
| D      | 300                                | 510                      |
| E      | 210                                | 420                      |

**Exercice n° 5**

- Mettre sous la forme  $a + ib$  le nombre complexe  $z = \frac{(4i^{22} - i)^2}{(1 + 2i)^2}$
- Utiliser la formule de Moivre pour exprimer  $\cos 3a$  et  $\sin 3a$  sous la forme de polynômes en  $\cos a$  et en  $\sin a$ .



### Exercice n° 6

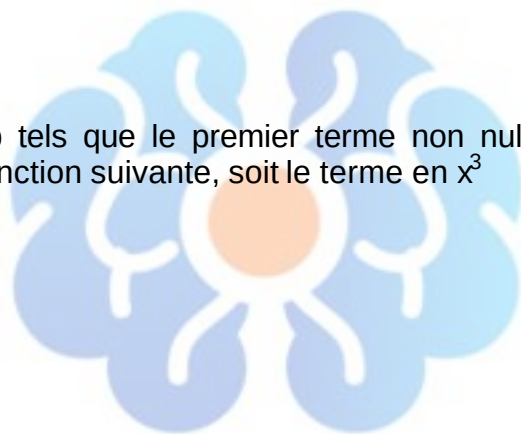
Un contrôle de fabrication sur un article devant répondre à des normes assez sévères, est tel que si l'article est correct, il y a 99% de chances de le déclarer comme tel au contrôle. A l'inverse, un article défectueux aura 90% de chances d'être reconnu comme tel au contrôle. Une étude poussée a montré par ailleurs que 95% des articles sont conformes aux normes exigées.

- Quelle est la probabilité pour que le contrôleur déclare un article quelconque défectueux ?
- Quelle est la probabilité pour que le contrôleur se trompe en déclarant qu'un article est défectueux ?
- Quelle est la probabilité pour que le contrôleur prenne une décision erronée ?

### Exercice n° 7

Déterminer a et b tels que le premier terme non nul du développement limité, au voisinage de 0, de la fonction suivante, soit le terme en  $x^3$

$$f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$$



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Ce texte est tiré du livre d'Antonio R. Damasio dont le titre est «*Spinoza avait raison*» – Joie et tristesse, le cerveau des émotions – paru aux éditions Odile Jacob en mai 2003. Il sera résumé en 240 mots, plus ou moins 10%.

Qu'est-ce qu'un sentiment ?

Pour tenter d'expliquer ce que sont les sentiments, je voudrais commencer par poser une question au lecteur : quand vous envisagez n'importe quel sentiment que vous avez éprouvé, agréable ou non, intense ou non, quels en sont selon vous les contenus ? Remarquez bien que je ne vous interroge pas sur la cause du sentiment ; sur son intensité, sur sa valeur positive ou négative, ou encore sur les pensées qui vous sont venues à l'esprit à son occasion. Je vise plutôt les contenus mentaux, les ingrédients, le matériau qui font un sentiment. Afin de faire avancer cette expérience de pensée, voici quelques suggestions : imaginez que vous êtes allongé sur la plage, en fin de journée, que le soleil vous dore doucement la peau, que l'océan vient lécher vos pieds ; imaginez le bruissement des aiguilles de pin quelque part derrière vous, une légère brise estivale souffle, il fait 28°, et il n'y a pas un nuage dans le ciel. Prenez votre temps ; savourez cette expérience. Je suppose que rien ne vient vous contrarier, que vous vous sentez très bien, excessivement bien même, comme aime à dire un ami à moi. La question est : en quoi consiste ce sentiment de bien-être ? Voici quelques indices : votre peau a chaud, et c'est agréable. Vous respirez facilement, vous ne ressentez pas de gêne aux poumons ou à la gorge. Vos muscles sont si détendus que vous n'éprouvez aucun tiraillement aux articulations. Votre corps se sent léger, bien posé mais avec nonchalance. Si vous passez en revue votre organisme, vous pouvez sentir sa machinerie qui fonctionne doucement, sans anicroches, sans douleur, une vraie perfection. Vous avez l'énergie pour bouger mais, d'une certaine manière, vous préférez rester tranquille, combinaison paradoxale entre aptitude et inclination à agir d'un côté, et délectation à rester calme, de l'autre.

Bref : votre corps se sent différent, selon un grand nombre de dimensions. Certaines sont assez apparentes, et vous pouvez les situer en vous. D'autres sont plus impondérables. Par exemple, vous ressentez du bien-être et une absence de douleur ; bien que le lieu de ce phénomène soit le corps et ses opérations, cette sensation est si diffuse qu'il est difficile de décrire de façon précise où elle se situe dans le corps.

Cet état a des conséquences mentales. Si vous détournez votre attention du simple bien-être lié à ce moment, si vous parvenez à stimuler les représentations mentales qui ne renvoient pas directement à votre corps, vous découvrez que votre esprit est occupé par des pensées dont les thèmes créent une nouvelle vague de sentiment agréable. L'image d'événements dont vous anticipez ardemment qu'ils seront agréables vous vient à l'esprit, de même que des scènes que vous avez vécues avec plaisir dans le passé. Vous découvrez aussi que votre tournure d'esprit est bienheureuse. Vous avez adopté un mode de pensée dans lequel les images sont précises et s'écoulent en abondance et sans effort. Cela a deux conséquences sur votre sentiment de bien-être. Des pensées apparaissent dont les thèmes correspondent à l'émotion que vous éprouvez ; votre mode de pensée, votre style de processus mental augmente la vitesse avec laquelle les images surgissent et les multiplie. Tel Wordsworth à Tintern Abbey, vous avez «des sensations délicieuses qui cour[ent] dans [votre] sang jusqu'au fond de [votre] cœur» et ces sensations «pass[ent] même dans [votre] esprit le plus pur, calmement retrouvées». Ce que vous considérez d'habitude comme votre «esprit» et comme votre «corps» se mêlent en harmonie. Tout conflit semble désormais s'apaiser. Toutes les oppositions paraissent désormais moins tranchées.

Je dirais que ce qui définit le sentiment agréable lié à ces moments, ce qui fait que le sentiment mérite seul ce terme et qu'il est différent de toutes les autres pensées, c'est la représentation mentale des parties du corps ou de tout le corps opérant d'une certaine manière. Le sentiment, au sens pur et étroit du mot, est l'idée du corps qui est d'une certaine manière. Dans cette définition, on peut remplacer «idée» par «pensée» ou par «perception». Dès qu'on va au-delà de l'objet qui a causé le sentiment, les pensées et le mode de pensée qui s'ensuit on atteint le cœur même du sentiment. Son contenu consiste en une représentation d'un état donné du corps.

La même remarque vaut pour les sentiments de tristesse, pour les sentiments liés à n'importe quelle autre émotion, pour les sentiments liés aux appétits et pour ceux qui sont liés à n'importe quel ensemble de réactions régulatrices se déroulant dans l'organisme. Les sentiments, au sens employé dans ce livre, proviennent de n'importe quel ensemble de réactions homéostatiques, pas seulement des émotions. Ils traduisent l'état vécu actuellement dans le langage de l'esprit. Il me semble qu'il existe des «modes corporels» distincts qui résultent de différentes réactions homéostatiques, depuis l'état de douleur simple jusqu'à son équivalent complexe, et donc des sentiments fondamentaux distincts. Il existe aussi des objets déclencheurs distincts, des pensées correspondantes distinctes et des modes de pensée assortis. Par exemple, la tristesse s'accompagne d'une faible production d'images, mais d'une hyperattention aux images, alors que le bonheur va de pair avec des images qui changent vite et auxquelles on prête peu d'attention. Les sentiments sont des perceptions, et il me semble que leur soubassement se trouve dans les cartes corporelles du cerveau. Celles-ci renvoient à des parties du corps et à des états du corps. Une variation dans le plaisir ou la douleur est un contenu correspondant de la perception que nous appelons sentiment.

La perception du corps s'accompagne de celle de pensées dont les thèmes correspondent à l'émotion et d'une perception d'un certain mode de pensée, d'un style de processus mental. Comment cette perception apparaît-elle ? Elle résulte de la construction de métareprésentations de notre processus mental, opération sophistiquée grâce à laquelle une partie de l'esprit en représente une autre. Cela nous permet d'enregistrer le fait que nos pensées ralentissent ou s'accélèrent selon qu'on leur accorde plus ou moins d'attention ; ou bien le fait que les pensées représentent des objets et des événements de près ou à distance. Mon hypothèse, exprimée sous la forme d'une définition provisoire veut donc qu'un sentiment soit la perception d'un certain état du corps ainsi que celle d'un certain mode de pensée et de pensées ayant certains thèmes. Les sentiments apparaissent lorsque la simple accumulation des détails encartés atteint un certain stade. Dans une perspective différente, la philosophe Suzanne Langer restitue bien la nature de ce moment d'apparition lorsqu'elle dit que, lorsque l'activité d'une partie du système atteint un «pic critique, le processus est ressenti». Le sentiment est une conséquence du processus homéostatique en cours, c'est une étape suivante du cycle.

Cette hypothèse n'est pas compatible avec la conception selon laquelle l'essence des sentiments (ou bien celle des émotions lorsque émotions et sentiments sont pris comme synonymes) serait une collection de pensées pourvues de thèmes allant de pair avec un certain type de sentiment, comme les pensées qui portent sur des situations de perte dans le cas de la tristesse. Je crois que cette conception vide désespérément le concept de sentiment. Si les sentiments étaient seulement des ensembles de pensées ayant certains thèmes, comment pourrait-on les distinguer de n'importe quelles autres pensées ? Comment pourraient-ils posséder l'individualité fonctionnelle qui justifie leur statut en tant que processus mentaux spécifiques ? J'estime plutôt que les sentiments sont fonctionnellement distincts parce que ce sont par essence des pensées qui représentent le corps impliqué dans un processus réactif. Sans cela, la notion de sentiment disparaît. Sans cela, on ne pourrait jamais se permettre de dire : «Je me sens heureux» ; on devrait plutôt dire : «Je pense heureux». Mais cela pose une question légitime : qu'est-ce qui rend «heureuses» des pensées ? Si nous ne vivons pas un certain état du corps ayant une certaine qualité que nous appelons plaisir et que nous trouvons «bonne» et «positive» dans la vie en général, nous n'avons aucune raison de considérer une pensée comme heureuse. Ou comme triste.

L'origine des perceptions qui constituent l'essence du sentiment me semble claire : il existe un objet général, le corps, et il existe de nombreuses parties de cet objet qui sont sans cesse encartées dans un certain nombre de structures cérébrales. Les contenus de ces perceptions sont clairs eux aussi : ce sont divers états du corps dépeints par les cartes représentant le corps selon toute une gamme de possibilités. Par exemple, la micro- et la macrostructure des muscles tendus sont différentes de celles des muscles au repos. C'est vrai également de l'état du cœur lorsqu'il bat vite ou lentement, et pour la fonction d'autres systèmes — respiratoire, digestif — dont le travail peut être tranquille et harmonieux ou difficile et mal coordonné. Autre exemple, le plus important peut-être : la composition du sang relativement à certaines molécules chimiques dont dépend notre vie et dont la concentration, à tout instant, est représentée dans certaines régions du cerveau. L'état particulier de ces composants du corps, représentés dans les cartes corporelles du cerveau, est le contenu des perceptions qui constituent les sentiments. Les substrats immédiats des sentiments sont les encartages de tous ces états du corps dans les régions sensorielles du cerveau conçues pour recevoir les signaux venus du corps.

On pourrait objecter qu'il ne semble pas que nous enregistrions consciemment la perception de tous ces états des parties de notre corps. Et heureusement que nous ne les enregistrions pas tous. Nous avons une expérience de certains qui est assez spécifique et pas toujours plaisante — rythme cardiaque irrégulier, contraction douloureuse du ventre, etc. Cependant, pour la plupart des autres composants, j'émetts l'hypothèse que nous en faisons l'expérience sous forme «composite». Certaines structures de notre chimie interne, par exemple, enregistrent des sentiments généraux d'énergie, de fatigue ou de gêne. Nous vivons aussi tout un ensemble de changements comportementaux qui deviennent des appétits et des besoins. Évidemment, nous n'avons pas d'«expérience» de notre niveau sanguin de glucose lorsqu'il descend en dessous d'un certain seuil, mais nous faisons rapidement l'expérience des conséquences de cette diminution à travers la façon dont d'autres systèmes opèrent (la musculature, par exemple) et dont certains comportements s'engagent (la faim par exemple).

Vivre un certain sentiment, le plaisir par exemple, c'est percevoir que le corps est d'une certaine manière et percevoir le corps de la manière qui exige des cartes sensorielles dans lesquelles des structures neurales sont en jeu et dont des images mentales peuvent dériver. Je reconnais que l'apparition d'images mentales à partir de structures neurales est un processus qu'on ne comprend pas parfaitement (...). Mais nous en savons assez pour émettre l'hypothèse que ce processus repose sur des substrats qu'on peut identifier — dans le cas des sentiments, plusieurs cartes de l'état du corps situées dans diverses régions du cerveau — et par conséquent qu'il implique des interactions complexes entre régions cérébrales. Ce processus n'est pas localisé dans une aire du cerveau.

En bref, le contenu essentiel des sentiments est l'encartage d'un état donné du corps ; le substrat des sentiments est l'ensemble des structures neurales qui dressent la carte de l'état du corps et dont une image mentale de l'état du corps peut émerger. Un sentiment est par essence une idée — à savoir une idée du corps et plus précisément encore une idée d'un certain aspect du corps, de son intérieur, dans certaines circonstances. Un sentiment d'émotion est une idée du corps lorsqu'il est perturbé par le processus émotionnel. Comme nous le verrons plus loin, cependant, il est peu probable que l'encartage du corps qui constitue l'élément décisif de cette hypothèse soit aussi direct que William James l'imaginait.

Un sentiment est-il davantage qu'une perception d'un état du corps ?

Quand je dis que les sentiments sont en grande partie constitués par la perception d'un certain état du corps ou que la perception d'un état du corps forme une essence d'un sentiment, mon usage des mots «en grande partie» et «essence» n'est pas fortuit. On trouvera la raison de cette subtilité dans l'hypothèse-définition du sentiment qui vient d'être discutée. En maintes circonstances, en particulier lorsqu'on dispose de peu de temps ou qu'on n'en a pas du tout pour examiner les sentiments, ils sont seulement la perception d'un certain état du corps. Toutefois, dans d'autres circonstances, le sentiment implique la perception d'un certain état du corps et celle d'un certain état d'esprit l'accompagnant — soit les changements dans le mode de pensée auxquels je me référais plus haut en tant qu'ils font partie des conséquences du sentiment. Dans ces circonstances, nous avons des images du corps qui est ceci ou cela et, parallèlement, des images de notre style de pensée.



Dans certaines circonstances, peut-être dans la variété la plus avancée du phénomène, le processus est tout sauf simple. Il comporte ceci : les états du corps qui sont l'essence du sentiment et lui confèrent un contenu distinct ; le mode altéré de pensée qui accompagne la perception de cet état du corps essentiel ; et la forme de pensée qui va, en termes de thème, avec la sorte d'émotion ressentie. Dans ces occasions, si on prend l'exemple d'un sentiment positif, on pourrait dire que l'esprit se représente davantage que le bien-être. Il se représente aussi le bien-penser. La chair opère de façon harmonieuse ou du moins l'esprit le dit, et notre puissance de penser est à son sommet ou peut s'y élever. De même, le sentiment de tristesse ne porte pas sur une maladie du corps ou sur un manque d'énergie pour continuer à vivre. Il renvoie souvent à un mode inefficace de pensée suscitant un nombre limité d'idées de perte.



1

AVRIL 2004

**CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B OPTION Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUE**

**Exercice 1**

1)  $f(t)$  est continûment infiniment différentiable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Comme  $\sin(t) = t + O(t^2)$  pour  $t \rightarrow 0$ ,  $f(t)$  peut se prolonger par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ . Ainsi définie  $f(t)$  est continue dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée

$$f^{(1)}(t) = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f^{(1)}(0) = 0$$

$f(t)$  est paire donc il suffit de l'étudier sur  $[0, 2\pi]$ . Sur  $[0, 2\pi]$ ,  $t \cos(t) - \sin(t)$  s'annule pour  $t = 0$  et de façon unique sur  $]0, 2\pi]$  en  $t_0 \neq 0$  tel que  $\tan(t_0) = t_0$  ( $t_0 \simeq 4.49$ ) d'où le tableau de variation

| $t$          | $-2\pi$ | $-t_0$     | $0$        | $t_0$      | $2\pi$     |
|--------------|---------|------------|------------|------------|------------|
| $f^{(1)}(t)$ | $-$     | $0$        | $+$        | $0$        | $+$        |
| $f(t)$       | $0$     | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

avec  $\cos(t_0) \simeq -0.22$ .

2) a) D'après ce qui précède l'intégrale est faussement impropre en 0. Par ailleurs on a clairement  $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1$  d'où

$$|g(x)| = \left| \int_x^{x^2} f(t) dt \right| \leq x^2 + |x| \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

On en déduit immédiatement la continuité et la différentiabilité de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) On a par intégration par partie ( $u(t) = \frac{1}{t}$  et  $v^{(1)}(t) = \sin(t)$ ,  $x$  étant supposé strictement positif tous les termes sont bien définis)

$$\int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t} dt = [-\cos(t)/t]_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

2

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \left| \int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \left| \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \right| \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |h(x)| \\
 &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt \\
 &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{1}{t^2} dt \\
 &= \frac{2}{x}.
 \end{aligned}$$

On en conclue que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)) = 0$ .

c) Par composition, la dérivée de  $g(x)$  vaut

$$g^{(1)}(x) = 2x \frac{\sin(x^2)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} (2 \sin(x^2) - \sin(x)).$$

Pour  $x \rightarrow 0$ , on a  $g^{(1)}(x) \rightarrow -1$  et  $g^{(1)}$  se prolonge par continuité en 0.

## Exercice 2

a) On a par un développement limité élémentaire pour  $u$  petit positif

$$\tan(u) \leq u + u^3$$

d'où le résultat.

b) On a

$$\phi^{(1)}(x) = \tan(x)^2 \geq 0$$

et  $\phi^{(1)}(x) = 0$  seulement en  $x = 0$ . On en déduit que  $\phi$  est continue, strictement croissante de  $] -\pi/2, -\pi/2[$  dans  $] -\infty, \infty[$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\phi(x)) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} (\phi(x)) = -\infty$ ,  $\phi$  est bijective d'où l'existence de  $\psi(x) = \phi^{-1}(x)$ , qui de plus est continue.

c) On remarque que  $\phi$  est impaire donc  $\psi$  est impaire. Par ailleurs  $\psi$  est croissante nulle en 0. On en déduit que

$$u_n = (-1)^n \psi\left(\frac{1}{n}\right)$$

où  $\psi\left(\frac{1}{n}\right)$  est une suite décroissante vers 0. Par continuité de  $\psi$ , nulle en 0,  $u_n$  et  $v_n$  convergent vers 0.

d) D'après c) et le théorème sur les suites alternées, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est convergente.

D'après a) on a

$$\phi(x) \leq x^3$$

Donc par croissance de  $\psi$ ,

$$x \leq \psi(x^3)$$

On en déduit que

$$v_n \geq \frac{1}{n}$$

donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  est divergente.

e) Un contre-exemple montrant qu'il ne faut pas permuter les sommes doubles!!!



Pour  $n \geq 1$  fixe on a d'après les résultats classiques sur les séries géométriques

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m - \frac{1}{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{n}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} - \frac{1}{n+2} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{1 - \frac{n+1}{n+2}} \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $N > 0$

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{N+1}{N+2}$$

Donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$  est convergente et vaut  $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ .

Maintenant, à  $m$  fixe on a pour tout  $N > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^N u_{n,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^m - \frac{1}{N+2} \left(\frac{N+1}{N+2}\right)^m$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = \frac{1}{2^{m+1}}$$

On en déduit toujours en utilisant les propriétés des suites géométriques

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \frac{1}{2}.$$

|

4

## Problème

Préliminaire :

L'inégalité est clairement vraie pour  $n = 0$ !

Maintenant supposons qu'elle est vraie pour  $n$ , on a

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)t)| &\leq |\sin(nt)| |\cos(t)| + |\sin(t)| |\cos(nt)| \\ &\leq |\sin(nt)| + |\sin(t)| \end{aligned}$$

soit en utilisant la relation pour  $n$ ,

$$|\sin((n+1)t)| \leq n|\sin(t)| + |\sin(t)| = (n+1)|\sin(t)|.$$

On note également que l'inégalité est stricte pour  $n \geq 2$  et pour  $t \in ]0, \pi/2[$ .

Pour  $x = \frac{\pi}{2n}$  on obtient

$$1 = |\sin(n \frac{\pi}{2n})| \leq n |\sin(\frac{\pi}{2n})| = n \sin(\frac{\pi}{2n})$$

d'où l'inégalité

$$\sin(\frac{\pi}{2n}) \geq \frac{1}{n}.$$

## Première partie

1) a) On a de façon évidente sur  $[-1, 1]$

$$T_0(x) = \cos(0) = 1 \text{ et }$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

b) Posons  $t = \arccos(x)$  alors  $x = \cos(t)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2)t) + \cos(nt) \\ &= 2 \cos((n+1)t) \cos(t) \\ &= 2x T_{n+1}(x) \end{aligned}$$

et la relation de récurrence

$$(I) \quad T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x)$$

s'ensuit.

c) On en déduit immédiatement par récurrence que  $T_n$  est dans  $P_n$ . De même, soit l'hypothèse  $H(n)$ :  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  ayant pour coefficient dominant  $2^{n-1}$ .

On a clairement  $H(1)$ . Par ailleurs en utilisant (I),  $T_2(x) = 2x^2 - 1$  donc  $H(2)$  est vérifiée, supposant  $H(n)$  et  $H(n+1)$ , on déduit de la relation de récurrence (I), que  $T_{n+2}$  est un polynôme de degré  $n+1$  et de coefficient dominant  $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ .

d) On a par un calcul immédiat

|                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| $T_0(x) = 1$                  |                              |
| $T_1(x) = x$                  | $U_0(x) = 1$                 |
| $T_2(x) = 2x^2 - 1$           | $U_1(x) = 2x$                |
| $T_3(x) = 4x^3 - 3x$          | $U_2(x) = 4x^2 - 1$          |
| $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$    | $U_3(x) = 8x^3 - 4x$         |
| $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ | $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$ |

2) Par définition, les 0 de  $T_n$  sont les solutions de

$$n \arccos(x) = \frac{\pi}{2}(\pi)$$

pour  $x$  dans  $[0, 1]$ . On vérifie aisément que, pour  $k = 0, \dots, n-1$ ,

$$\alpha_{k,n} \in [0, 1] \text{ et } T_n(\alpha_{k,n}) = 0.$$

Comme  $\cos$  est strictement décroissant sur  $[0, \pi]$ , on a également

$$\alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \dots < \alpha_{n-1,n}$$

donc les  $\alpha_{k,n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  sont  $n$  racines distinctes du polynôme  $T_n$ . Comme  $T_n$  est de degré  $n$ , ce sont les seules possibles.

3) D'après 1)  $T_{n+1}$  est un polynôme de degré  $n+1$  donc  $U_n$  qui est sa dérivée à une constante près est un polynôme de degré  $n$ . Son coefficient est donc

$$(n+1)2^n/(n+1) = 2^n.$$

Par ailleurs, on a

$$T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$$

d'où

$$-\sin(t)T_{n+1}'(\cos(t)) = -(n+1)\sin((n+1)t)$$

et

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)},$$

pour  $t \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$T_n^{(1)}(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos(x))$$

donc

$$\sqrt{1-x^2} T_n^{(1)}(x) = n \sin(n \arccos(x)),$$

soit par dérivation

$$\sqrt{1-x^2} T_n^{(2)}(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} T_n^{(1)}(x) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos(x))$$

et donc

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n^{(1)}(x) = -n^2 T_n(x).$$

Comme  $T_n$  est un polynôme, il est infiniment continûment différentiable donc cette relation est aussi valide sur  $[-1, 1]$ .

L'équation différentielle en  $U_n$  se déduit simplement par différentiation de cette relation : on obtient

$$(1-x^2)U_n^{(2)}(x) - 3xU_n^{(1)}(x) + n(n+2)U_n(x) = 0.$$

5) Comme  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est intégrable en  $-1$  et  $1$ , toutes les intégrales sont faussement impropres. Plus précisément pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  et  $-1 < \alpha < \beta < 1$ , posons

$$I_{k,l}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_l(x) dx.$$

On a par changement de variable,

$$I_{k,l}(\alpha, \beta) = \int_{\arccos(\alpha)}^{\arccos(\beta)} \cos(kt) \cos(lt) dt$$

6

donc  $I_{k,l} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \pi}} I_{k,l}(\alpha, \beta)$  est parfaitement définie et vaut

$$I_{k,l} = \int_0^\pi \cos(kt) \cos(lt) dt.$$

Si  $k \neq l$ , on a aussi  $k + l > 0$  et donc

$$I_{k,l} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k+l)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k-l)t) dt = 0.$$

Maintenant pour  $k = l \neq 0$ , on a

$$I_{k,k} = \int_0^\pi \cos(kt)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2kt)) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin

$$I_{0,0} = \pi.$$

On en déduit que tous les polynômes sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

6) Si, l'on pose

$$E_0(x) = \frac{T_0(x)}{\pi}$$

et

$$E_k(x) = 2 \frac{T_k(x)}{\pi}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$(E_0, E_1, \dots, E_n)$  est alors une base orthonormée de  $P_n^0$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ .

Deuxième partie

1) Par définition, on a pour tout  $n$ ,

$$|T_n(x)| \leq 1$$

et  $T_n(1) = 1$  donc  $\|T_n\| = 1$ . Pour  $n \geq 1$ , cette valeur est atteinte ssi

$$n \arccos(x) \in \pi \mathbb{Z} \cap [0, n\pi] \iff \arccos(x) \in \{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \pi\}$$

$$\iff x \in \{1, \cos(\frac{\pi}{n}), \dots, \cos(\frac{k\pi}{n}), \dots, -1\}$$

D'après 3) on a

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$$

donc en utilisant le préliminaire

$$\|U_n\| \leq (n+1)$$

et on note que  $|U_n(1)| = |U_n(-1)| = (n+1)$  donc

$$\|U_n\| = (n+1).$$

En utilisant la remarque que l'inégalité du préliminaire est stricte en dehors des points terminaux, on en déduit que les seuls points atteignant le maximum sont  $\{-1, 1\}$ .

2) Comme suggérer dans l'énoncé, considérons  $\log(T_n(x))$ . D'après la partie précédente  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  de racine  $\alpha_{k,n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , d'où à un constante  $C$  près, en prenant le log complexe,

$$\log(T_n(x)) = C + \sum_{k=0}^{n-1} \log(x - \alpha_{k,n})$$

et par dérivation

$$\frac{T_n^{(1)}(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \alpha_{k,n}}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} = nU_{n-1}.$$

Cette égalité est vrai pour tout  $x \in [-1, 1]$  par prolongement par continuité aux points  $\alpha_{k,n}$ . On en déduit

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} \right| \leq n \|U_{n-1}\| = n^2.$$

3) On a par un résultat classique l'expression suivante du polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre  $k$

$$L_{k,n-1}(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - \alpha_{j,n})}{\prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})}.$$

On vérifie directement que  $L_{k,n-1}$  est un polynôme de degré  $n-1$ , et est tel que  $L_{k,n-1}(\alpha_{k,n}) = \frac{\prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})}{\prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})} = 1$  et  $L_{k,n-1}(\alpha_{j,n}) = 0$ ,  $j \neq k$ .

D'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2^n \prod_{j=1}^n (x - \alpha_{j,n}) \\ &= (x - \alpha_{k,n}) 2^n \frac{\prod_{j \neq k} (x - \alpha_{j,n})}{\prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})} \prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})} = 2^n \prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}) L_{k,n-1}(x),$$

soit en posant  $\lambda_{k,n} = 2^n \prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})$

$$\frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})} = \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(x),$$

soit  $\frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})}$  est proportionnel au polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre  $k$ .

4) L'égalité précédente donne

$$T_n(x) = \lambda_{k,n} (x - \alpha_{k,n}) L_{k,n-1}(x)$$

soit par dérivation

$$T_n^{(1)}(x) = \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(x) + \lambda_{k,n} (x - \alpha_{k,n}) L_{k,n-1}^{(1)}(x)$$

8

donc

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) &= \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(\alpha_{k,n}) + 0 \\ &= \lambda_{k,n} \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité.

Par ailleurs par définition de  $T_n$

$$T_n^{(1)}(\cos(x)) \sin(x) = n \sin(nx),$$

soit d'après I.2 pour  $\alpha_{k,n} = \cos(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi))$  ( en posant  $x = \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)$ ,

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) \sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)) \\ = n \sin(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi) = n(-1)^{k-n+1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs comme  $\sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi))^2 + \cos(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi))^2 = 1$  et  $\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi) \in [0, \pi]$  on a

$$\sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)) = \sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}$$

et on en déduit

$$T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) = \frac{n(-1)^{k-n+1}}{\sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}}.$$

5) Soit  $P$  une polynôme dans  $P_{n-1}^0$ . D'après 3) il se décompose dans la base des polynômes d'interpolation de Lagrange sous la forme,

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j L_{j,n-1}(x),$$

avec  $P(\alpha_{k,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j L_{j,n-1}(\alpha_{k,n}) = a_k$ .

On déduit de 3) que

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} P(\alpha_{k,n}) \lambda_{k,n}^{-1} \frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})}$$

avec en utilisant les égalités du 4)

$$\lambda_{k,n} = \frac{n(-1)^{k-n+1}}{\sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}}.$$

d'où la décomposition

$$P(x) = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{k-n+1} P(\alpha_{k,n}) \sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2} \frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})}.$$

6) En utilisant l'égalité du 5) on a pour  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})} \right|.$$

On ne peut directement utiliser l'inégalité 2) à cause de la valeur absolue à l'intérieure de la somme.

Il suffit cependant de remarquer que si  $x \in ]\alpha_{n-1,n}, 1]$  alors  $\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \geq 0$  (car alors  $x \geq \cos(\frac{\pi}{2n})$ ) donc

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \leq \frac{1}{n} n^2 = n,$$

d'après l'inégalité 2).

De même pour  $x \in [-1, \alpha_{0,n}]$  on a également  $\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \geq 0$  et la même inégalité s'ensuit.

Enfin pour  $x \in [\alpha_{0,n}, \alpha_{n-1,n}]$  on a par définition de  $\alpha_{0,n}, \alpha_{n-1,n}$ ,

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

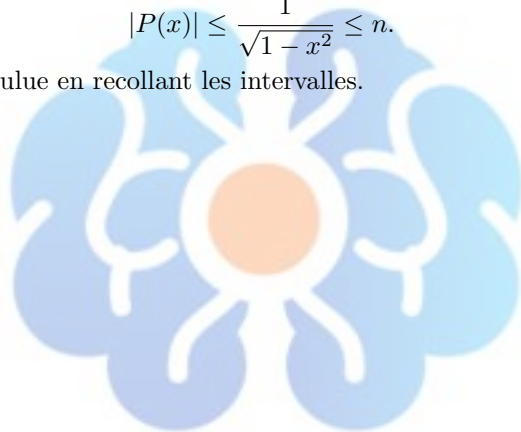
soit en utilisant l'inégalité du préliminaire

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{\pi}{2n} \frac{2}{\pi} = \frac{1}{n},$$

donc par hypothèse sur  $P$

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq n.$$

D'où l'inégalité voulue en recollant les intervalles.



AVRIL 2004

**CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B OPTION Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUE**

**Problème 1**

**Préliminaire :**

$\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  est clairement bilinéaire symétrique. Comme  $D$  est définie positive toutes ses valeurs propres sont positives et donc

$$\|Y\|_D = \langle Y, Y \rangle_D \geq 0,$$

nulle ssi  $Y = 0$ . L'inégalité est une conséquence directe de Cauchy-Schwarz. On peut la vérifier en posant  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Si on pose  $Y = (y_1, \dots, y_n)^*$  et  $Z = (z_1, \dots, z_n)^*$  l'inégalité devient

$$\begin{aligned} \langle Y, Z \rangle_D &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i z_i \right) = \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} y_i) (\sqrt{\lambda_i} z_i) \right) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} y_i)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} z_i)^2 \right)^{1/2} = \|Y\|_D \|Z\|_D \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz.

1) a) Soit  $A$  et  $B$  dans  $SDP_n(\mathbb{R})$  et  $X \neq 0$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . Posons  $Z = AX$ , il suffit de prouver

$$Y^* B Z Z^* B Y \leq (Z^* B Z)(Y^* B Y).$$

On notera que les deux membres de cette inégalité sont réels.

$B$ , étant dans  $SDP_n(\mathbb{R})$ , est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  strictement positive. On pose  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Il existe donc  $O$  dans  $O_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices orthogonales tel que

$$B = O^* D O$$

Si l'on pose  $Z_1 = OZ$  et  $Y_1 = OY$  il suffit donc de montrer que

$$(Y_1^* D Z_1)^2 \leq (Z_1^* D Z_1)(Y_1^* D Y_1),$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du préliminaire pour le produit scalaire  $\langle Y_1, Z_1 \rangle_D = Y_1^* D Z_1$ .

b) On note que  $X^* A X$  et  $X^* A B A X$  sont réels et que les matrices  $XX^*$  et  $B A X X^* A B$  sont des matrices symétriques de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  donc  $C$  est une matrice symétrique. Pour montrer que  $C$  est définie positive, il suffit de montrer que pour  $Y \neq 0$ ,  $Y^* C Y > 0$ . D'après a) on a

$$(1) \quad (Y^* B A X X^* A B Y) \leq (X^* A B A X)(Y^* B Y)$$



2

donc

$$\begin{aligned} Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - \frac{Y^*BAXX^*ABY}{X^*ABAX} &\geq Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - Y^*BY^* \\ &= \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} \geq 0. \end{aligned}$$

$C$  est donc positive. L'égalité à 0 impose l'égalité dans (1) ainsi que  $Y^*XX^*Y = 0$  donc d'après ce qui précède que  $0 = (Z_1^*DZ_1)(Y_1^*DY_1)$ . Comme  $D$  est définie positive, on a  $\|Z_1\|_D > 0$  et donc nécessairement  $(Y_1^*DY_1) = 0$  d'où  $Y_1^* = 0$  et donc  $A$  étant définie positive (donc étant inversible)  $Y = 0$ .  $C$  est donc définie positive.

2) En utilisant le résultat précédent, on obtient immédiatement par récurrence que chaque  $H_{k+1}$  est dans  $SDP_n(\mathbb{R})$  et  $X_k \neq 0$ .

On pose  $H(k) : \forall j \in \{0, \dots, k\}, H_{k+1}AX_j = X_j$  et  $X_{k+1}^*AX_j = 0$ .

On vérifie d'abord  $H(0)$  qui se ramène à  $H_1AX_0 = X_0$  et  $X_1^*AX_0$ .

Or on a par définition avec  $H_0 = I_n$

$$\begin{aligned} H_1AX_0 &= (I_n + \frac{X_0X_0^*}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*A}{X_0^*AAX_0})AX_0 \\ &= AX_0 + X_0 \frac{X_0^*AX_0}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*AAX_0}{X_0^*AAX_0} \\ &= AX_0 + X_0 - AX_0 = X_0. \end{aligned}$$

Par ailleurs  $X_1^*AX_0 = 0$  signifie  $Y_1^*H_1AX_0 = 0 \iff Y_1^*X_0 = 0$  (d'après l'égalité précédente) et donc comme c'est un scalaire

$$X_0^*Y_1 = 0.$$

Supposons maintenant que  $H(k-1)$  est vérifiée et montrons  $H(k)$ .

Tout d'abord en raisonnant comme pour  $H(0)$  on a, en utilisant la récurrence,

$$\begin{aligned} H_{k+1}AX_j &= (H_k + \frac{X_jX_j^*}{X_j^*AX_j} - \frac{H_kAX_jX_j^*A}{X_j^*AAX_j})AX_j \\ &= H_kAX_j + X_j - AX_j \\ &= X_j \end{aligned}$$

pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ . Pour  $j = k$ , on a aussi cette identité directement.

Il suffit donc de montrer maintenant que  $X_{k+1}^*AX_j = 0$ . Mais on a

$$X_{k+1}^*AX_j = Y_{k+1}^*(H_{k+1}AX_j) = Y_{k+1}^*X_j = 0$$

par définition de  $Y_{k+1}$ , d'où  $H(k)$ .

3) Pour tout  $(j, k) \in \{0, \dots, n-1\}^2$ ,  $j \neq k$ , 2) implique que  $X_k^*AX_j = 0$ , soit,  $A$  étant définie positive, les vecteurs  $X_k^*$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  sont deux à deux orthogonaux pour le produits scalaires  $\langle, \rangle_A$ . Comme ils sont non nuls et au nombre de  $n$ , ils forment donc une base orthogonale de  $M_n(\mathbb{R})$ . Donc, tout  $X$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  s'écrit de manière unique

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_j.$$

On a alors en utilisant la relation  $H_n A X_j = X_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$

$$H_n A X = \sum_{j=1}^{n-1} a_j H_n A X_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j = X$$

donc

$$H_n A = I_n$$

$A$  étant définie positive, ceci implique que  $H_n = A^{-1}$ .

## Problème 2

1)  $M_{n,n}(\mathbb{C})$  est bien un espace vectoriel...

On a clairement la linéarité en  $A$  et l'antilinearité en  $B$ . Pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,  $A, B, C$  dans  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ,

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + \mu C, B \rangle &= \text{tr}((\lambda A + \mu C)B^*) \\ &= \lambda \text{tr}(AB^*) + \mu \text{tr}(CB^*) = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle C, B \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle A, \lambda B + \mu C \rangle &= \text{tr}(A(\lambda B + \mu C)^*) \\ &= \text{tr}(A(\bar{\lambda} B^* + \bar{\mu} C^*)) = \bar{\lambda} \text{tr}(AB^*) + \bar{\mu} \text{tr}(AC^*) \\ &= \bar{\lambda} \langle A, B \rangle + \bar{\mu} \langle A, C \rangle. \end{aligned}$$

Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est sesquilineaire et l'on a

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr}(AB^*) = \text{tr}((BA^*)^*) \\ &= \overline{\text{tr}(BA^*)} = \overline{\langle B, A \rangle}, \end{aligned}$$

donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme hermitienne sur  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ . Et comme pour tout  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\begin{aligned} \langle A, A^* \rangle &= \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \overline{a_{i,j}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c'est un produit scalaire hermitien.

Soit la matrice  $E_{i,j} = (\delta_{k,l})_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}}$  avec  $\delta_{k,l} = 0$  si  $1 \leq (k,l) \neq (i,j)$  et  $\delta_{k,l} = 1$  si  $(k,l) = (i,j)$ . Les matrices  $(E_{i,j})$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, n$  sont au nombre de  $n^2$ .

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \langle E_{i,j}, E_{l,m} \rangle &= 0 \text{ si } (i,j) \neq (l,m) \\ \langle E_{i,j}, E_{i,j} \rangle &= \delta_{i,j}^2 = 1 \end{aligned}$$

donc les  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  forment une base orthonormée de  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ .

2) C'est évident car pour tout  $A, B$  dans  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

4

On a donc directement

$$\begin{aligned} \|UA\|^2 &= \text{tr}(UAA^*U^*) = \text{tr}(AA^*UU^*) \\ &= \text{tr}(AA^*) = \|A\|^2, \end{aligned}$$

$$\|AU\|^2 = \text{tr}(AUU^*A) = \text{tr}(AA^*) = \|A\|^2.$$

3) Posons  $A = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ . On a alors

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b_{1,2} & (\lambda_1 - \lambda_3)b_{1,3} & \dots & (\lambda_1 - \lambda_n)b_{1,n} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)b_{2,1} & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)b_{2,3} & \dots & (\lambda_2 - \lambda_n)b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1)b_{n,1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\|AB - BA\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\lambda_i - \lambda_j|^2 |b_{i,j}|^2.$$

On a par ailleurs

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \text{ et } \|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |b_{i,j}|^2.$$

On déduit de l'inégalité  $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ ,

$$\begin{aligned} \|AB - BA\|^2 &\leq 2 \sum_{i,j=1}^n (|\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2) |b_{i,j}|^2 \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \right) |b_{i,j}|^2 \\ &= 2 \left( \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \right) \sum_{i,j=1}^n |b_{i,j}|^2 \\ &= 2\|A\|^2\|B\|^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de l'énoncé, lorsque  $A$  est diagonale.  $\square$

Maintenant, si  $A$  est une matrice quelconque de  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ , les théorèmes de réductions assurent l'existence d'une matrice unitaire  $U$  tel que  $A = UDU^*$  avec  $D$  diagonale.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|AB - BA\| &= \|UDU^*B - BU^*DU\| \\ &= \|U(DU^*BU - U^*BUD)U^*\| \end{aligned}$$

soit en utilisant 2)

$$\|AB - BA\| = \|DU^*BU - U^*BUD\|.$$

Si on pose  $B_U = U^*BU$ , on a en appliquant l'inégalité du 3,

$$\|AB - BA\| \leq \sqrt{2}\|D\| \|B_U\|$$

et il suffit de remarquer  $\|B_U\| = \|B\|$  et  $\|A\| = \|D\|$  (en appliquant 2)).

4) Par récurrence, chaque  $B_k$  est un produit de matrices unitaires donc inversible : la suite est donc bien définie.

Maintenant on a

$$\begin{aligned}\|I - B_{k+1}\| &= \|I - AB_k A^{-1} B_k^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}(AB_k - B_k A^{-1})B_k^{-1}\| \\ &= \|AB_k - B_k A\| \leq \sqrt{2}\|A\| \|B_k\| = \sqrt{2}\|B_k\|\end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire  $AB_k - B_k A = (I - A)(I - B_k) - (I - B_k)(I - A)$  de sorte que l'on a également

$$\begin{aligned}\|I - B_{k+1}\| &= \|(I - A)(I - B_k) - (I - B_k)(I - A)\| \\ &\leq \sqrt{2}\|I - A\| \|I - B_k\|,\end{aligned}$$

ce qui est plus intéressant pour l'étude de la suite. En effet, comme  $\sqrt{2}\|I - A\| < 1$ , on en déduit que la suite des  $\|I - B_{k+1}\|$  décroît vers 0. Plus précisément si on pose  $a = \sqrt{2}\|I - A\| < 1$  on a

$$\|I - B_{k+1}\| \leq a^{k+1}\|I - B\|$$

et le théorème de d'Alembert implique que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|I - B_{k+1}\| = 0$  donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_{k+1} = I.$$

Si  $A$  et  $B$  engendrent un sous-groupe fini de  $U_n(\mathbb{C})$ , alors les  $B_k$  sont dans ce sous-groupe fini et ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs donc la suite des  $B_k$  stationne et vaut  $I$  au bout d'un nombre fixe d'itérations.

5) On a

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix},$$

donc les  $\{a_i\}$  et les  $\{b_j\}$  sont simultanément les valeurs propres de  $A$  donc il existe  $\sigma$  une permutation de permettant de passer des  $\{a_i\}$  aux  $\{b_j\}$ , c'est à dire il existe telle que  $b_i = a_{\sigma(i)}$ . On pose  $P$  la matrice associée à cette permutation : tous ses coefficients sont dans  $\{0,1\}$ . Plus précisément cette matrice est donnée par

$$P = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}},$$

où  $\delta_{k,l} = 0$  si  $k \neq l$  et  $\delta_{k,l} = 1$  si  $k = l$ . On a évidemment  $P \in O_n(\mathbb{R})$  donc  $P$  est dans  $U_n(\mathbb{C})$ . Il suffit maintenant de vérifier que  $P^{-1}AP = BAB^{-1}$ .

La matrice  $P^{-1}AP = [c_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est donnée par

$$c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} a_{k,l} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

donc

$$\begin{aligned}c_{i,j} &= 0 \text{ si } i \neq j \\ c_{i,i} &= a_{\sigma(i),\sigma(i)} = a_{\sigma(i)} \text{ pour } i = j.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

6

6) On remarque simplement que

$$AC^{-1} - C^{-1}A = C^{-1}(CA - AC)C^{-1} = 0,$$

car  $CA = AC \dots$

7) On écrit à nouveau

$$\begin{aligned} A(BA^{-1}B) &= A(BAB^{-1}A^{-1})A \\ &= (BAB^{-1}A^{-1})A^2 \quad \text{car } A \text{ et } BAB^{-1}A^{-1} \text{ commutent} \\ &= BAB^{-1}A. \end{aligned}$$

Donc  $A$  et  $BA^{-1}B$  commutent et donc sont simultanément diagonalisables d'après le théorème de Schurr rappelé dans l'énoncé.

8) Si  $\|I - M\| < 2$  alors en posant  $M = (m_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$

$$\begin{aligned} 4 &> \|I - M\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |1 - m_{ii}|^2 + \sum_{i \neq j} |m_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que la matrice  $M$  est unitaire. Mais on a

$$\begin{aligned} |1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2 &= 1 + |m_{ii}|^2 - 2\operatorname{Re}(m_{ii}) + 1 - |m_{ii}|^2 \\ &= 2(1 - \operatorname{Re}(m_{ii})). \end{aligned}$$

On en déduit

$$4 > 2 \sum_{i=1}^n (1 - \operatorname{Re}(m_{ii})).$$

Mais comme

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(m_{ii}) \leq \sum_{i=1}^n |m_{ii}|,$$

on obtient en combinant les deux inégalités précédentes le résultat

$$\sum_{i=1}^n |m_{ii}| > n - 2.$$

Maintenant comme  $M$  est unitaire, chaque  $|m_{ii}| \leq 1$  donc forcément  $n - 1$  sont non nuls (sinon on aurait  $\sum_{i=1}^n |m_{ii}| \leq n - 2$  ce qui est impossible d'après l'inégalité précédente).

9) On va essayer de montrer que  $A$  et  $B$  commutent. Pour cela, on a d'après 7) l'existence de  $U$  unitaire telle que

$$A_D = UAU^{-1},$$

$$B_D = U(BAB^{-1})U^{-1},$$

où  $A_D$  et  $B_D$  sont des matrices diagonales. On remarque par ailleurs que

$$\begin{aligned} B_D &= (UBU^{-1})(UAU)(U^{-1}B^{-1}U) \\ &= (UBU^{-1})A_D(U^{-1}B^{-1}U) \\ &= (UBU^{-1})A_D(UBU^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Comme  $U$  et  $B$  sont unitaires,  $UBU^{-1}$  est unitaire donc d'après le résultat obtenu en 5), il existe  $P$  matrice de permutation telle que

$$B_D = P^{-1}A_DP = M^{-1}A_DM,$$

en posant  $M = UBU^{-1}$ .

Si on pose également  $B_D = \text{diag}[b_i]_{1 \leq i \leq n}$ , on a, d'après la première égalité, l'existence d'une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $A_D = \text{diag}[b_{\sigma(i)}]_{1 \leq i \leq n}$ . Par ailleurs la dernière égalité implique que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$m_{ii}b_i = b_{\sigma(i)}m_{ii}.$$

Mais on a  $\|I - B\| = \|I - M\| < 2$  par hypothèse et en utilisant les résultats de 8) on sait que au moins  $n - 1$  éléments de la diagonales parmi les  $m_{i,i}$  sont non nuls. On en déduit que la permutation  $\sigma$  vaut l'identité sur au moins  $n - 1$  composantes. DONC sur toutes les composantes (sinon elle ne serait plus bijective). On en déduit donc  $P = I = M$  et

$$\begin{aligned} B_D &= A_D \\ \Leftrightarrow UAU^{-1} &= U(BAB^{-1})U^{-1} \\ \Leftrightarrow A &= BAB^{-1} \\ \Leftrightarrow AB &= BA. \end{aligned}$$

En conclusion  $A$  et  $B$  commutent et sont donc simultanément diagonalisables.

10) D'après 4) on peut construire une suite de la forme  $B_k$  qui converge et même stationne en  $I$ . Eliminons d'abord le cas trivial  $B = I$  auquel cas  $A$  et  $B$  commutent. Il existe alors d'après 4)  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $B_k \neq I$  et tel que  $B_{k+1} = I$

Supposons que  $k \geq 1$  alors on a d'après 4)

$$\|I - B_{k-1}\| \leq a^{k-1}\|I - B\| \leq \|I - B\| < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$$

Donc si on pose  $C = AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}$  on a

$$\begin{aligned} CA - AC &= (AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1})A - A(AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}) \\ &= B_kA - AB_k = (I - AB_kA^{-1}B_k^{-1})B_kA \\ &= (I - B_{k+1})B_kA \\ &= 0 \end{aligned}$$

par définition de  $k$ .

On en déduit que  $A$  et  $C$  commutent mais d'après les résultats de 7) et 9) on en déduit que  $[A, B_{k-1}] = 0$  ce qui implique  $B_k = I$ , ce qui est contraire à la définition de  $k$ .

On en déduit donc que forcément  $k = 1$  ce qui signifie  $B_1 = I$  soit  $AB = BA$ .

11) Tout élément de  $V_n(\mathbb{C})$  s'écrit sous la forme d'un produit fini de la forme

$$A_1A_2\dots A_p$$

avec  $\|I - A_j\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Si on prend deux matrices quelconques intervenant dans de telles décompositions, elles engendrent un sous-groupe fini par hypothèse donc d'après 10) elles commutent. On en déduit de manière itérative que toutes les matrices intervenant dans la décomposition des éléments du groupe commutent et donc que tout élément commute.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DU CALCUL NUMÉRIQUE**

**Exercice n° 1**

- a)  $C_{10}^1 = 10$
- b)  $C_{18}^2 = 153$
- c)  $C_{22}^2 = 231$
- d)  $C_{30}^3 = 4060$
- e)  $1.434.925.800 = 10 \times 153 \times 231 \times 4060$

**Exercice n° 2**

Un équivalent de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est  $(1-m)x^{\frac{3}{2}}$  lorsque  $m$  est différent de 1.

On en déduit que si  $m < 1$ , la limite cherchée est  $+\infty$  et que si  $m > 1$ , la limite cherchée est  $-\infty$

Lorsque  $m$  est égal à 1, un équivalent de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est  $(1-\frac{p}{2})x^{\frac{1}{2}}$  lorsque  $p$  est différent de la valeur 2.

On en déduit que si  $p > 2$ , la limite cherchée est  $-\infty$  et que si  $p < 2$ , la limite cherchée est  $+\infty$

Dernier cas :  $m = 1$  et  $p = 2$ . L'équivalent de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est  $\frac{3}{2}x^{\frac{-3}{2}}$ .

On trouve alors une limite nulle.

### Exercice n° 3

- a) Soit  $g$  le taux de variation entre 1982 et 2002, alors on a par définition de celui-ci :  
 $3 = 1 (1 + g)$   
D'où  $g = 200 \%$
- b) Soit  $g_m$  le taux moyen annuel de variation entre 1982 et 2002, on doit avoir :  
 $(1 + g_m)^{20} = 3$   
D'où  $g_m = 5,647 \%$
- c) De la même façon qu'au a) , on trouve  $6,67 \%$
- d) Soit  $n$  le nombre d'années cherché, on a :  $3,2 \times (1 + g_m)^n = 5$   
D'où  $n = 8,26$  soit 9 ans.

### Exercice n° 4

Nous sommes en présence d'une moyenne harmonique. Soit  $H$  le résultat, on a :

$$\frac{2310}{H} = \frac{450}{200} + \frac{570}{150} + \frac{360}{180} + \frac{510}{300} + \frac{420}{210}$$

D'où  $H = 196,6$  habitants/médecin

### Exercice n° 5

- a) En utilisant le fait que  $i^2 = -1$ , on trouve  $z = \frac{(4i^{22} - i)^2}{(1+2i)^2} = -\frac{13}{25} - \frac{84}{25}i$
- b) D'après la formule de Moivre, on a :  
 $(\cos a + i \sin a)^3 = \cos 3a + i \sin 3a$   
D'où  $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$  et  $\sin 3a = -4 \sin^3 a + 3 \sin a$



**Exercice n° 6**

|                       | Décision correcte           | Décision défectueuse        | Total |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------|
| Correct en réalité    | $0,99 \times 0,95 = 0,9405$ | $0,01 \times 0,95 = 0,0095$ | 0,95  |
| Défectueux en réalité | $0,10 \times 0,05 = 0,0050$ | $0,90 \times 0,05 = 0,0450$ | 0,05  |
| <b>Total</b>          | 0,9455                      | 0,0545                      | 1     |

- La probabilité pour que le contrôleur déclare un article quelconque défectueux est donc 5,45 %
- La probabilité pour que le contrôleur se trompe en déclarant qu'un article est défectueux est une probabilité conditionnelle qui vaut 17,43 %
- Le contrôleur prend une décision erronée dans  $0,0095 + 0,0050 = 1,45$  % des cas.

**Exercice n° 7**

A partir des développements limités connus, on trouve le développement limité suivant pour la fonction  $f$  :

$$f(x) = (1+b-a) x + (1/2-b^2+ab) x^2 + (1/6+b^3-ab^2) x^3 + o(x^3)$$

Pour déterminer  $a$  et  $b$  tels que le premier terme non nul soit le terme en  $x^3$ , il faut que  $(1+b-a)$  soit nul ainsi que  $(1/2-b^2+ab)$ . La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne comme résultat  $a=1/2$  et  $b=-1/2$

Pour conclure, il faut vérifier que le terme en  $x^3$  ne soit pas nul. Ceci est vérifié puisque l'on trouve  $-1/12$ .

AVRIL 2005

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Calculatrice permise.  
Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Soit  $f$  une fonction continue bornée de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$I_n(f) = \int_0^{+\infty} f(x) \frac{n}{1+n^2x^2} dx.$$

- a) Montrer que cette suite est bien définie et est bornée par  $\pi/2 \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x))$ .
- b) On pose  $f_0(x) = 1$ , pour  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ . Calculer  $I_n(f_0)$  et  $I_n(f_1)$ .
- c) Déterminer les limites respectives de  $I_n(f_0)$  et  $I_n(f_1)$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- d) On pose  $S_n(f) = \sum_{k=1}^n I_k(f)$ . Calculer explicitement  $S_n(f_0)$  et sa limite quand  $n \rightarrow \infty$ .
- e) La série  $S_n(f_1)$  est-elle convergente ou divergente?
- f) Montrer que de manière générale  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \frac{\pi}{2} f(0)$ . En déduire une condition nécessaire pour que la série  $S_n(f)$  soit convergente.
- g) On pose  $f_2(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . Vérifier que  $f_2$  est bien continue bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . Calculer  $I_n(f_2)$  et en déduire la limite de  $S_n(f_2)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- h) Trouver une fonction  $f$  telle que  $S_n(f)$  soit convergente.

Exercice 2

- a) Etudier la fonction de  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}.$$

On précisera en particulier si cette fonction est continue dérivable en 0.

- b) On pose

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie et que

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2}|x|.$$

c) Montrer que  $F$  est dérivable, de dérivée

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt.$$

Aide : on reviendra à la définition de la dérivabilité.

d) Montrer que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$  dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

e) Montrer que  $G$  n'est pas dérivable en 0.

f) Expliciter cette dérivée et montrer que, pour  $x > 0$ ,  $F$  vérifie l'équation différentielle,

$$F(x) - F''(x) = \pi/2.$$

En déduire l'expression de  $F(x)$ ,  $x > 0$ . On rappelle que  $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

g) Même question que f) pour  $x < 0$ . En déduire la forme analytique de  $F(\cdot)$  et  $G(\cdot)$ .

## Problème

**Préliminaire:** Dans tout le problème,  $\phi$  est une fonction convexe de  $]0,1[$  dans  $\mathbb{R}$ . On rappelle que  $\phi$  est alors continue, dérivable à droite sur  $]0,1[$  et on a, pour tout  $x, c$  dans  $]0,1[$ ,

$$\phi(x) \geq \phi(c) + (x - c)\phi'_d(c),$$

où  $\phi'(c^+)$  est la dérivée à droite en  $c$ .

En déduire l'inégalité de Jensen suivante :

soit  $f$  continue de  $[0,1]$  dans  $]0,1[$  alors

$$\phi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leq \int_0^1 \phi(f(t))dt.$$

### Première partie

a) Comparer  $\phi(1/2)$  et  $\int_0^1 \phi(t)dt$ .

b) Soit  $q$  un entier strictement positif. Soit  $f_q$  l'application définie de  $] -1/2, \infty[$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f_q(x) = \frac{1}{(x + q + 1)\sqrt{x + 1/2}}.$$

Montrer que  $f_q$  est strictement convexe (pour cela, calculer sa dérivée seconde). En déduire que pour tout  $m \in \mathbb{N}^+$ ,

$$f_q(m) \leq \int_{m-1/2}^{m+1/2} f_q(t)dt.$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour  $m = 0$  (on vérifiera que l'intégrale est faussement impropre en  $-1/2$ ).

c) On pose  $S_N(q) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}}$ . Dédurre des résultats précédents l'inégalité suivante

$$0 < S_N(q) \leq \int_0^{\sqrt{N+1}} \frac{2}{(t^2 + q + 1/2)} dt < \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}}.$$

En déduire que  $S_N$  est convergente et donner un encadrement (non-trivial) de sa limite.

## Deuxième partie

Soit  $u_n, n \in \mathbb{N}$  telle que la série  $\sum_{m=0}^N u_m^2$  soit convergente de limite  $A$ . On se propose de démontrer, à l'aide de la partie précédente, l'inégalité dite de Hilbert

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{u_n u_m}{m+n+1} < A \pi. \quad (1)$$

On pose pour cela, pour  $a = (a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ ,

$$F(a) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{a_n a_m}{m+n+1},$$

$$G(a) = \sum_{m=0}^N a_m^2.$$

a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}^{N+1}$  dans  $\mathbb{R}^+$ . En déduire que l'ensemble  $\{a, G(a) = \lambda\}$  avec  $\lambda \geq 0$  est un compact de  $\mathbb{R}^{N+1}$ .

b) Montrer que, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$M_\lambda = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^{N+1} \\ G(a) = \lambda}} \{F(a)\}, \quad (2)$$

existe et est atteint.

c) En déduire que, au maximum,  $a^* = (a_0^*, \dots, a_N^*)$ , il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $p \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,

$$\sum_{m=0}^N \frac{a_m^*}{m+p+1} = \mu a_p^*.$$

et

$$M_\lambda = \mu \lambda.$$

d) Montrer que, si  $\sum_{m=0}^N u_m^2 = 0$ , alors l'inégalité de Hilbert (1) est vérifiée.

e) Montrer qu'il existe  $q$  tel que

$$\mu \leq \sqrt{q+1/2} \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}}.$$

*Aide : Pour cela, on considérera  $a^*$  une solution de (2). Puis on supposera que l'un des termes de la série  $a^*$ , disons  $a_k^*$ , est strictement positif (quitte à échanger les signes) et on posera*

$$\sqrt{(q+1/2)a_q^*} = \max_{m \in \{0, \dots, N\}} (\sqrt{m+1/2}a_m^*) > 0.$$

f) En déduire l'inégalité de Hilbert (1).



1

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

De quelle vérité l'opinion est-elle capable ?

**Sujet n° 2**

Dans quelle mesure l'école est-elle aujourd'hui un facteur d'intégration sociale ?

**Sujet n° 3**

Les hommes ont-ils besoin d'être gouvernés ?

AVRIL 2005

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.  $L(E)$  est l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ .  $E^*$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Préliminaire :** Soit  $f$  dans  $L(E)$ . Montrer que si  $(x, f(x))$  sont liés pour tout  $x \in E$ , alors  $f$  est une homothétie (Théorème de Schur).

*Aide : on montrera d'abord que  $f$  est une homothétie sur des droites, puis sur tout système libre.*

a) On suppose désormais que  $E = M_{n,n}(K)$  est l'espace vectoriel des matrices de taille  $n$  sur le corps  $K$ .  $GL_n(K)$  est l'ensemble des matrices inversibles. Quelle est la dimension de  $E$ ? Donner une base de  $E$ . Montrer que, si  $C$  est une matrice qui commute avec toute matrice  $A$  de  $M_{n,n}(K)$ , alors  $C$  est une homothétie.

b) Montrer que l'application *trace* :

$$tr : M_{n,n}(K) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \rightarrow tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

est une application linéaire de  $E^*$  et rappeler pourquoi

$$tr(AB) = tr(BA).$$

c) Montrer que l'application

$$\phi : E \rightarrow E^*$$

$$A \mapsto \phi_A,$$

où  $\phi_A(B) = tr(AB)$ , est une isométrie de  $E$  dans  $E^*$ .

*Aide : on montrera que cette application est linéaire et bijective.*

d) Déterminer l'ensemble des fonctions linéaires  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\psi(AB) = \psi(BA).$$

## Exercice 2

- a) Soit  $M_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice. Cette matrice est-elle diagonalisable dans  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ? inversible?
- b) Déterminer dans  $\mathbb{C}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\alpha/n)^n$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n^n)$ .

## Problème

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie, de base  $(e_1, \dots, e_n)$ , muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

lorsque  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ .

Un endomorphisme autoadjoint de  $E$  est une application  $V$  de  $L(E)$  telle que

$$V = V^*.$$

On rappelle que tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable. On note  $\mathcal{A}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

### Première partie

Si  $U$  et  $V$  sont dans  $\mathcal{A}(E)$ , on introduit la relation

$$U \preceq V,$$

si et seulement si

$$V - U \text{ est semi-définie positive,}$$

c'est-à-dire, pour tout  $x$  dans  $E$

$$\langle x, (V - U)x \rangle \geq 0.$$

- a) La relation  $\preceq$  est-elle une relation d'ordre sur  $\mathcal{A}(E)$ ? d'ordre total?
- b) Montrer que, pour tout  $B \in L(E)$ ,

$$U \preceq V \implies BUB^* \preceq BVB^*.$$

c) Montrer que, pour  $V \in \mathcal{A}(E)$ ,  $0 \preceq V$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $V$  sont positives.

d) Soit  $V \in \mathcal{A}(E)$  tel que  $0 \preceq V$ , montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{A}(E)$ ,  $0 \preceq C$  telle que  $V = C^2$ .  $C$  est appelé racine carrée positive de  $V$ .

e) Montrer que les sous-espaces propres de  $V$  et ceux de  $C$ , une racine carrée positive, sont identiques. En déduire l'unicité de la racine carrée positive de tout endomorphisme autoadjoint, notée désormais  $V^{1/2}$ .

f) Montrer que  $V$  inversible  $\iff V^{1/2}$  inversible et que

$$(V^{1/2})^{-1} = (V^{-1})^{1/2}$$



## Deuxième partie

Pour tout  $V \in \mathcal{A}(E)$ , on appelle spectre de  $V$ , le  $n$ -uplet des valeurs propres ordonnées de  $V$ , que l'on note

$$sp(V) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Pour  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{A}(E)$ , on pose

$$sp(V) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \geq sp(U) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \\ \iff \lambda_i \geq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le but de cette partie est de comparer cette relation d'ordre sur les valeurs propres avec la relation d'ordre  $U \preceq V$ .

a) Soient  $(u_1, \dots, u_p)$  des vecteurs propres orthogonaux associés à  $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_p})$ , une sélection ordonnée de valeurs propres,  $\lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_2} \geq \dots \geq \lambda_{i_p}$ . On note  $F_p = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$ , l'espace vectoriel engendré par  $(u_1, \dots, u_p)$ . Déterminer

$$M_p = \sup_{x \in F_p \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Vx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

et

$$m_p = \inf_{x \in F_p \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Vx \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

b) Soient  $V$  et  $U$  dans  $\mathcal{A}(E)$  tels que  $U \preceq V$ . Soit  $F_{n-p+1}^V$  l'espace vectoriel engendré par les  $n - p + 1$  vecteurs propres associés aux  $n - p + 1$  plus petites valeurs propres de  $V$ , et soit  $F_p^U$  l'espace vectoriel engendré par les  $p$  vecteurs propres associés aux  $p$  plus grandes valeurs propres de  $U$ . Déterminer

$$M_{V,p} = \sup_{x \in F_{n-p+1}^V \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Vx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

et

$$m_{U,p} = \inf_{x \in F_p^U \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Vx \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

c) Dédurre de ce qui précède que

$$U \preceq V \implies sp(U) \leq sp(V).$$

Aide : on montrera qu'il existe un point  $x_0 \neq 0 \in F_{n-p+1}^V \cap F_p^U$  et on comparera alors  $\frac{\langle x_0, Vx_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle}$  à  $M_{V,p}$ ,  $m_{U,p}$ .

d) Vérifier que la réciproque est fautive pour  $n = 2$  en prenant

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Donner un contre-exemple dans le cas général où  $n > 2$ .

e) Montrer que  $sp(V) \geq sp(U)$  si et seulement si il existe un endomorphisme orthogonal  $A$  tel que

$$V \succeq AUA^*.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Ce texte est tiré du livre de Mihaly Csikszentmihalyi dont le titre est: "VIVRE, la psychologie du bonheur" paru aux éditions Robert Laffont en janvier 2004. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.



**La qualité de l'expérience vécue**

**Bonheur et expérience vécue**

Il y a deux mille trois cents ans, Aristote déclarait que par dessus tout, les femmes et les hommes cherchent le bonheur. Tandis que le bonheur est convoité pour lui-même, tout autre but - santé, beauté, richesse ou puissance - est désiré tant qu'il est censé nous rendre heureux. Bien des choses ont changé depuis Aristote et notre compréhension du monde s'est considérablement élargie ; les dieux des Grecs semblent bien impuissants face aux pouvoirs que détient l'humanité actuelle. Pourtant, pour ce qui a trait au bonheur, peu de changements sont apparus au cours des siècles, notre compréhension en la matière a peu progressé et nous n'avons rien appris concernant les façons d'accéder à cette bienheureuse condition.

De nos jours, nous sommes en bien meilleure santé, nous pouvons espérer vivre plus longtemps, nous sommes entourés d'objets de luxe et de commodités inexistantes autrefois (il n'y avait pas de toilettes dans le palais du Roi-Soleil, les chaises étaient rares dans les châteaux médiévaux, et l'empereur romain ne pouvait regarder la télé), nous disposons de connaissances scientifiques stupéfiantes, mais si la majorité des gens se dit heureuse, bon nombre d'individus considèrent que leur vie se passe dans l'anxiété ou l'ennui.

Est-ce que le sort de l'humanité est qu'elle demeure insatisfaite, chacun désirant plus qu'il ne peut avoir ? Est-ce que le malaise qui gâte souvent de précieux moments provient du fait que l'individu cherche le bonheur au mauvais endroit ?

Les connaissances de la psychologie moderne ont pour objectif d'explorer cette question ancienne : *Quand les gens se sentent-ils le plus heureux ?* Il y a vingt-cinq ans, j'ai fait une "découverte" à propos du bonheur. Elle est maintenant assez connue mais demeure inexpliquée. Aussi ai-je passé ce quart de siècle à examiner ce phénomène insaisissable. Cette découverte est fort simple : le bonheur n'est pas quelque chose qui arrive à l'improviste ; il n'est pas le résultat de la chance ; il ne s'achète pas et ne se commande pas ; il ne dépend pas des conditions externes mais plutôt de la *façon dont elles sont interprétées*. Le bonheur est une condition qui doit être préparée, cultivée et protégée par chacun. Les gens qui apprennent à maîtriser leur expérience intérieure deviendront capables de déterminer la qualité de leur vie et de s'approcher aussi près que possible de ce qu'on appelle être heureux.

Nous ne pouvons pas atteindre le bonheur en le cherchant consciemment. Comme le disait le grand philosophe anglais J. S. Mill (1806 - 1873) :

"Demandez-vous si vous êtes heureux et vous cessez de l'être". C'est par le plein engagement dans chaque détail de sa vie qu'il est possible de trouver le bonheur et non par une recherche directe. Le psychologue autrichien Victor Fran le formule joliment :

"Ne visez pas le succès - plus vous le cherchez, plus vous courez le risque de le rater. On ne peut pas pourchasser le succès, pas plus que le bonheur ; il doit s'ensuivre ou survenir... comme l'effet non recherché d'un engagement personnel dans un projet plus grand que soi".

Alors, comment parvenir à ce but insaisissable qui ne peut être atteint par une route directe ? Mes vingt-cinq années de recherche m'ont convaincu qu'il existe un moyen : c'est un chemin circulaire qui commence par le *contrôle du contenu de sa conscience*.

Les perceptions qui arrivent au cerveau sont le produit de plusieurs forces qui façonnent l'expérience vécue ; elles influencent l'humeur et l'individu. La plupart des forces en question sont hors du contrôle de la personne. Peut-on changer son tempérament ? Peut-on influencer sa taille ou son intelligence ? Peut-on choisir ses parents ou son lieu de naissance ? Les instructions contenues dans les gènes, la loi de la gravité ou la qualité de l'air font également partie des innombrables choses qui influencent ce que nous voyons, la façon dont nous nous sentons et ce que nous faisons. Il n'est donc pas surprenant qu'autant de gens croient que notre sort est déterminé par des agents externes.

Pourtant, il nous est arrivé à tous, à certains moments, de nous sentir, non pas assaillis par des forces anonymes, mais dans le plein contrôle de nos actions, dans la parfaite maîtrise de notre vie. Dans ces rares occasions, nous éprouvons un enchantement profond longtemps vénéré qui devient une référence, un modèle indiquant ce que notre vie devrait être.

Voilà ce que nous entendons par *expérience optimale*. C'est ce que ressent le navigateur quand le vent fouette son visage et que le bateau fend la mer - les voiles, la coque, le vent et la mer créent une harmonie qui vibre dans ses veines ; c'est ce qu'éprouve l'artiste peintre quand les couleurs s'organisent sur le canevas et qu'une nouvelle oeuvre (une création) prend forme sous la main de son créateur ébahi ; c'est le sentiment d'un père ou d'une mère) face au premier sourire de son enfant. De pareilles expériences intenses ne surviennent pas seulement lorsque les conditions externes sont favorables. Des survivants des camps de concentration qui ont connu des conditions terribles et frôlé la mort se rappellent souvent, qu'au milieu de leurs épreuves, ils ont vécu de riches et intenses expériences intérieures en réaction à des événements aussi simples que le chant d'un oiseau, la réussite d'une tâche difficile, la création d'une poésie ou le partage d'un croûton de pain.

Contrairement à ce que croient bien des gens, des expériences comme celles-là, les meilleurs moments de la vie n'arrivent pas lorsque la personne est au repos (même si le repos peut être fort agréable après l'effort). Ces grands moments surviennent quand le corps ou l'esprit sont utilisés jusqu'à leurs limites dans un effort volontaire en vue de réaliser quelque chose de difficile et d'important.

L'expérience optimale est donc quelque chose que l'on peut provoquer, l'enfant qui place avec des doigts tremblants le dernier bloc sur la haute tour qu'il a construite, le nageur qui fait ses longueurs en essayant de battre son propre record, le violoniste qui maîtrise un passage difficile. Pour chacun, il y a des milliers de possibilités ou de défis susceptibles de favoriser le développement de soi (par l'expérience optimale).

De telles expériences intenses ne sont pas nécessairement plaisantes au moment où elles se produisent. Le nageur peut avoir les muscles endoloris, les poumons brûlants et être lui-même écrasé de fatigue ; pourtant, ces moments peuvent compter parmi les meilleurs de son existence. Le contrôle de sa vie n'est jamais facile et peut même être douloureux ; mais l'expérience optimale que produisent ces instants donne un sentiment de maîtrise qui s'approche d'aussi près que l'on puisse l'imaginer de ce qu'on appelle le bonheur.

Au cours de mes recherches, j'ai essayé de comprendre le mieux possible *comment* les gens se sentent quand ils sont au maximum de l'enchantement et *pourquoi* ils le sont. Au cours des premières études, nous avons interrogé des centaines "d'experts" - artistes, athlètes, musiciens, joueurs d'échec, et chirurgiens - qui consacraient la majeure partie de leur temps à leurs activités de prédilection. Dans le but de rendre compte de leur expérience intime, j'ai développé la théorie de l'expérience optimale qui correspond à l'état dans lequel se trouvent ceux qui sont fortement engagés dans une activité pour elle-même ; ce qu'ils éprouvent alors est si agréable et si intense qu'ils veulent le revivre à tout prix, uniquement pour le simple plaisir généré par l'activité elle-même.

Le modèle théorique a été mis à l'épreuve auprès de milliers de personnes interrogées par les membres de mon équipe (de l'université de Chicago) et, ensuite, par des collègues à travers le monde. Les résultats ont démontré que l'expérience optimale était décrite de la même façon par les femmes et les hommes, les jeunes et les moins jeunes, les gens de différentes conditions sociales et de différentes cultures.

L'expérience optimale n'est pas un privilège propre aux sociétés riches et industrialisées ; elle est rapportée essentiellement dans les mêmes termes par des femmes âgées de Corée, des adultes de l'Inde et de la Thaïlande, des adolescents de Tokyo, des bergers navajos, des bergers des Alpes italiennes et des ouvriers assignés aux lignes d'assemblage à Chicago. (...)

### **Les caractéristiques de l'expérience optimale**

La première surprise révélée par les études, fut la similitude existant entre des activités très différentes lorsque tout se déroule particulièrement bien. Selon toute apparence, ce qu'éprouve un nageur qui traverse la Manche est à peu près identique à l'expérience intérieure d'un joueur d'échecs en plein tournoi ou d'un alpiniste qui gravit la montagne. Ces mêmes sentiments sont également partagés, pour une large part, par des musiciens qui composent une pièce et des adolescents qui participent à un championnat de basket.

La seconde surprise fut de découvrir que les gens décrivent leur enchantement à peu près de la même façon, sans égard à la culture, à la classe sociale, à l'âge et au sexe. *Ce qu'ils font* lorsqu'ils éprouvent l'expérience intense varie considérablement - le vieux Coréen médite, le jeune Japonais fait de la moto avec sa bande, etc. - , mais, lorsqu'ils décrivent *comment ils se sentent*, c'est à peu près dans les mêmes termes. Les raisons pour lesquelles ils éprouvent de l'enchantement se ressemblent également. Bref, l'expérience optimale semble être la même partout dans le monde et pour un grand nombre d'activités.

La phénoménologie de l'expérience optimale comporte huit caractéristiques majeures :

1. la tâche entreprise est réalisable mais constitue un défi et exige une aptitude particulière
2. l'individu se concentre sur ce qu'il fait
3. la cible visée est claire
4. l'activité en cours fournit une rétroaction immédiate
5. l'engagement de l'individu est profond et fait disparaître toute distraction
6. la personne exerce le contrôle sur ses actions
7. la préoccupation de soi disparaît, mais, paradoxalement, le sens du soi est renforcé à la suite de l'expérience optimale
8. la perception de la durée est altérée

La combinaison de ces éléments produit un sentiment d'enchantement profond qui est si intense que les gens sont prêts à investir beaucoup d'énergie afin de le ressentir à nouveau. Nous allons considérer chacun des éléments afin de mieux comprendre ce qui rend cette expérience si gratifiante. Cette connaissance devrait nous aider à mieux contrôler notre conscience et à convertir la monotonie de la vie quotidienne en expériences contribuant à l'accroissement de soi.



### *Défi et habileté*

Quelqu'un peut éprouver une grande joie, une extase sans grande raison apparente : elle est déclenchée par une mélodie qui survient, par un beau panorama ou encore provient simplement d'un sentiment de bien-être. Cependant, dans la grande majorité des cas, l'expérience optimale se produit quand une activité est dirigée vers un but et gouvernée par des règles, une activité qui représente une certaine difficulté (un défi), qui exige l'investissement de l'énergie psychique et qui ne peut être réalisée sans les aptitudes requises. Il convient également de noter tout de suite que l' "*activité*" et l' "*aptitude*" dont il est question ne doivent pas être comprises seulement au sens physique. Par exemple, une activité très fréquemment mentionnée est la lecture. Cette dernière requiert de l'attention, elle a un but et requiert la connaissance du langage écrit. Elle n'exige pas seulement de savoir lire mais aussi de savoir lire les mots en images, d'avoir de l'empathie à l'endroit des personnages fictifs, de reconnaître le contexte historique et culturel, d'anticiper les tournants de l'intrigue, d'évaluer le style de l'auteur, etc.

La capacité de manipuler l'information symbolique est une "*aptitude*" comme l'est celle du mathématicien qui façonne les relations quantitatives ou logiques et celle du musicien qui combine les sons. La relation à autrui est une autre activité agréable, universellement reconnue. A première vue, il peut sembler qu'aucune aptitude ne soit nécessaire pour profiter d'une activité aussi simple que bavarder ou plaisanter avec d'autres personnes. Mais, de toute évidence, celle-ci est indispensable et les personnes qui sont avant tout préoccupées d'elles-mêmes, comme peuvent l'être les timides, redoutent les contacts informels et évitent la compagnie des autres.

Toute activité comporte un ensemble de possibilités d'action ou un "*défi*" qui requièrent des aptitudes appropriées. Pour ceux qui n'ont pas les aptitudes requises, l'activité ne représente pas un défi, elle n'est pas intéressante ou n'a tout simplement pas de sens. L'échiquier qui intéresse tant le joueur d'échecs, laisse indifférent celui qui n'en connaît pas les règles ; les montagnes ne sont que d'immenses masses rocheuses pour la plupart des gens, mais elles représentent pour l'alpiniste, un ensemble complexe de défis physiques et mentaux.

La compétition fournit des défis ; d'où l'intérêt des jeux et des sports qui opposent deux personnes ou deux équipes. "*Celui qui lutte contre nous, écrit Edmund Burke, renforce nos muscles et aiguise nos aptitudes ; notre adversaire est notre complice.*" Les défis de la compétition peuvent donc être très stimulants et très agréables. Cependant lorsque le désir de bien puer est remplacé par celui de gagner (et parfois à tout prix), l'agrément tend à disparaître. La compétition est agréable lorsqu'elle tend à perfectionner ses aptitudes ; elle ne procure plus grand plaisir lorsque la victoire devient une fin en elle-même.

Les défis ne se limitent pas aux activités physiques ou compétitives ; ils procurent des enchantements même dans des situations où on ne s'y attendait pas. Bien des gens pensent, par exemple, que le plaisir artistique provenant de la vue d'une toile est le simple fruit d'un processus immédiat ou intuitif, mais, pour un expert en matière d'art, c'est autre chose : *"certaines toiles sont si peu complexes qu'elles ne vous donnent aucune émotion, mais il y en a d'autres qui vous offrent une sorte de défi... ce sont celles-là, qui vous restent à l'esprit, qui sont vraiment intéressantes."* En d'autres termes, même le plaisir que l'on peut tirer d'une oeuvre dépend du défi que l'oeuvre contient.

Les activités qui procurent plaisir et enchantement ont souvent été inventées à cet effet. Les jeux, les sports, la lecture, n'existent-ils pas depuis des siècles en vue de favoriser justement les expériences plaisantes et enrichissantes ? Cependant, il ne faudrait pas penser que, seuls, les loisirs et les arts procurent des expériences optimales. Même le travail productif et la routine quotidienne peuvent être satisfaisants. C'est justement un des objectifs de ce livre de transformer les activités de la vie quotidienne en des "jeux" pleins de sens qui donnent lieu à des expériences optimales. Tondre le gazon, attendre chez le dentiste, faire un gâteau peuvent devenir des activités agréables si elles sont restructurées de façon à fournir un but, des règles, et autres éléments déjà signalés.

Chacun de nous a mis au point ses routines, afin de combler ses attentes ou aime se rappeler une expérience positive quand l'anxiété survient ; certains se tournent les pouces compulsivement, mâchonnent le bout de leur stylo, fument, tournent une mèche de leurs cheveux, fredonnent un air tandis que d'autres inventent des rituels plus ou moins ésotériques dans le même but : imposer un certain ordre à la conscience. Ces activités peuvent aider à passer des moments pénibles, à combler des vides, mais elles apportent assez peu d'agréments car elles sont peu complexes. Pour augmenter la qualité de la vie, il faut des tâches qui font appel à des aptitudes plus élaborées.

Les témoignages indiquent que l'expérience optimale survient lorsqu'il y a une correspondance adéquate entre les exigences de la tâche et les capacités de l'individu. Par exemple il n'est pas plaisant de jouer au tennis contre un adversaire trop fort, car on se sent anxieux et dévalorisé, ou un adversaire trop faible, car on s'ennuie.

L'expérience optimale apparaît entre le défi et l'ennui, lorsque le défi correspond aux capacités de l'individu. Même mon chien Hussar semble avoir compris cette règle d'or. Comme les enfants, il aime jouer à "fuite et poursuite" . Au début, il fait de grands cercles autour de moi et j'essaie de le toucher. Plus je suis fatigué, plus il se rapproche de façon à me faciliter la tâche.

Il a bien appris à faire durer son plaisir et le mien.

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN  
ECONOMISTE  
OPTION MATHEMATIQUES**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

Exercice 1 (très facile)

a) On a trivialement

$$\begin{aligned} I_n(f) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x)) \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} dx \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x)) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x)) \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}(0) \right) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x)) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) On a par simple changement de variable

$$\begin{aligned} I_n(f_0) &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \\ I_n(f_1) &= \int_0^1 \frac{xn}{1+n^2x^2} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2n} \log(1+n^2) \end{aligned}$$

c) On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f_1) &= 0 \end{aligned}$$

d) On a donc

$$S_n(f_0) = n \frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f_0) = \infty.$$

e) Le terme générique de la série  $S_n(f_1)$  est  $I_n(f_1)$  qui est positif et tel que

$$I_n(f_1) \geq \frac{1}{n}.$$

Donc  $S_n(f_1)$  diverge.

f) On va montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$ , tel pour tout  $n > N$

$$|I_n(f) - \frac{\pi}{2} f(0)| \leq \varepsilon$$



2

On a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
 |I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| &= \left| \int_0^{+\infty} f(x) \frac{n}{1+n^2x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} dx \right| \\
 &= \left| \int_0^{+\infty} (f(x) - f(0)) \frac{n}{1+n^2x^2} dx \right| \\
 &\leq \int_0^\delta |f(x) - f(0)| \frac{n}{1+n^2x^2} dx + \int_\delta^\infty |f(x) - f(0)| \frac{n}{1+n^2x^2} dx \\
 &= I(\delta) + II(\delta), \text{ pour tout } \delta > 0
 \end{aligned}$$

Par continuité de  $f(x)$  en 0, on a pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$I(\delta) \leq \varepsilon/2.$$

On a

$$II \leq 2 \sup(f(x)) \int_{n\delta}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc pour  $\delta$  fixé précédemment, il existe  $N$  tel que pour tout  $n > N$ ,  $II(\delta) \leq \varepsilon/2$  d'où finalement

$$|I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour que la série converge, il faut nécessairement que la limite soit nulle c'est à dire ici

$$f(0) = 0.$$

g) On a  $f_2(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ , qui est bien définie continue comme quotient bien définie de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^+$ . On a  $f_2'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $f_2$  est positive, croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et sa limite en  $\infty$ , vaut 1, soit

$$0 \leq f_2(x) \leq 1.$$

$$I_n(f_2) = n \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)} dx,$$

mais

$$\frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)} = \frac{1}{1+n^2} \left( \frac{-1}{1+x} + \frac{n^2x+1}{1+n^2x^2} \right).$$

On en déduit pour tout  $A > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^A \left( \frac{-1}{1+x} + \frac{n^2x+1}{1+n^2x^2} \right) &= -\log(1+A) + \frac{1}{2} \log(n^2A^2+1) + \frac{1}{n} \operatorname{Arctg}(nA) \\
 &= \log\left(\frac{n\sqrt{1+A^2}}{A+1}\right) + \frac{1}{n} \operatorname{Arctg}(nA)
 \end{aligned}$$

d'où

$$I_n(f_2) = \frac{n}{1+n^2} \left( \log(n) + \frac{\pi}{2n} \right).$$

Comme  $I_n(f) \sim \frac{\log(n)}{n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on en déduit immédiatement que la série  $S_n(f_2)$  est divergente.

h) Un exemple trivial est  $f(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . On a alors  $I_n(f) = 0$  et  $S_n(f) = 0...$   
Question subsidiaire: est ce la seule solution possible?

## Exercice 2

a) On a  $f(t) = \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}$  qui est clairement paire. Elle est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Comme en 0,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$  on peut clairement prolonger la fonction par continuité en posant  $f(0) = 0$ .  $f$  est alors continue sur  $\mathbb{R}$  donc en particulier sur  $[-\pi, \pi]$ . Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(\cdot)$  est infiniment dérivable et on a

$$f'(x) = (x(1+x^2)) \cos(x) - (1+3x^2) \sin(x) / x^2(1+x^2)^2.$$

Quand  $x \rightarrow 0$ , on a clairement  $f'(x) \sim (x(1+x^2) - (1+3x^2)x) / x^2 = -2x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ . Donc  $f'(x)$  est prolongeable par continuité en 0 et  $f'(x)$  est donc dérivable sur  $[-\pi, \pi]$

b) On a

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt.$$

En  $t = 0$ ,  $\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \sim \frac{tx}{t(1+t^2)} \sim x$  donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Par ailleurs en  $+\infty$ ,  $|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}| \leq \frac{1}{t(1+t^2)}$  qui est bien intégrable. On notera par ailleurs que  $F$  est impaire, il suffit donc de l'étudier pour  $x \geq 0$ , ce que l'on suppose dans la suite.

On a par ailleurs

$$|\sin(tx)| \leq |tx|$$

d'où

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty \frac{|x|}{(1+t^2)} dt = |x| \frac{\pi}{2}.$$

c) On pose

$$\Delta_h F = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)$$

on veut montrer que  $\Delta_h F \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . On a

$$\Delta_h F = \int_0^\infty \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th \cos(tx)}{ht(1+t^2)} dt$$

On peut remarquer par un développement de Taylor que

$$\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th \cos(tx) = -t^2 h^2 / 2 \sin(\theta_{x,t})$$

pour  $\theta_{x,t} \in (t(x+h), tx)$  et donc que

$$|\Delta_h F| \leq h/2 \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} dt$$

qui malheureusement diverge en  $\infty$ . Il faut donc couper en deux bouts : on a pour tout  $A > 0$

$$I(A) = \left| \int_0^A \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th \cos(tx)}{ht(1+t^2)} dt \right| \leq h/2 \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt$$

mais par ailleurs, en remarquant que

$$|\sin(t(x+h)) - \sin(tx)| = |2 \cos(tx + th/2) \sin(th/2)|$$

4

$$\begin{aligned}
 II(A) &= \int_A^\infty \left| \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th \cos(tx)}{ht(1+t^2)} \right| dt \\
 &\leq \int_A^\infty \left| \frac{th/2}{ht(1+t^2)} \right| dt + \int_A^\infty \left| \frac{1}{(1+t^2)} \right| dt \\
 &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(A)\right) = \arctan(1/A) \rightarrow 0, \text{ quand } A \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

D' où pour tout  $\varepsilon > 0$ , il va exister  $A > 0$  tel que

$$II(A) \leq \varepsilon/2.$$

Pour un tel  $A$  on a alors  $I(A) \leq \varepsilon/2$  pour  $h$  suffisamment petit.

d)  $G$  est non seulement continue mais uniformément continue car elle est bornée par  $\pi/2$ . En effet on a

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt \\
 &= \int_0^A \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt + \int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt
 \end{aligned}$$

et  $|\int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt| \leq \arctan(1/A)$ . La première partie est continue par définition de l'intégrale, bornée par  $\pi/2$ .

Si  $G(\cdot)$  est dérivable on peut s'attendre à ce que

$$G'(x) = \int_0^\infty -\frac{t \sin(tx)}{1+t^2} dt$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout  $B$  (et en particulier lorsque  $B \rightarrow \infty$ ) on a par le théorème de la moyenne,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_A^B -\frac{t \sin(tx)}{1+t^2} dt \right| &\leq \frac{A}{1+A^2} \int_A^C \sin(tx) dt \\
 &\leq \frac{2A}{x(1+A^2)} \text{ pour } x \neq 0
 \end{aligned}$$

On procède alors comme dans c) en découpant la différence entre les accroissements et la valeur supputée de la dérivée en deux bouts. Cela marche bien si  $x \neq 0$ .

e) On remarque que  $G$  est paire, bornée. Aussi, si  $G'(0)$  existe, on a nécessairement  $G'(0) = 0$ . On a alors par changement de variable,

$$\frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(th)}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u)}{h^2 + u^2} du,$$

qui est décroissante en  $h$ . Comme sa limite vaut 0 en  $\infty$ , on aurait alors  $\int_0^\infty \frac{1 - \cos(u)}{h^2 + u^2} du = 0$  pour tout  $h > 0$  ce qui est impossible (prendre par exemple  $h=1$ ). Donc  $G$  n'est pas dérivable en 0.

f) D'après ce qui précède pour  $x > 0$ , on a

$$F''(x) = \int_0^\infty \frac{-t \sin(tx)}{1+t^2} dt$$

soit en utilisant la décomposition

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t} dt + F''(x) \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt + F''(x) \\ &= \pi/2 + F''(x). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour  $x > 0$ ,

$$F(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x) + \pi/2$$

Comme on sait  $F(x) \leq \pi/2x$ , il vient immédiatement  $\alpha = 0$  (prendre la limite quand  $x \rightarrow \infty$ ). Comme  $F$  est continue nulle en 0, on obtient

$$F(x) = \frac{\pi}{2}(1 - \exp(-x)), \quad x > 0.$$

g) Un raisonnement similaire conduit pour  $x < 0$  à

$$F(x) = -\frac{\pi}{2}(1 - \exp(x)), \quad x < 0$$

On déduit de ces deux résultats que

$$G(x) = F'(x) = \frac{\pi}{2} \exp(-|x|),$$

qui n'est effectivement pas dérivable en 0.

## Problème

### Préliminaire :

Si on note  $I = \int_0^1 f(t)dt$  alors, d'après le théorème de la moyenne, il existe  $a \in [0, 1]$ ,  $I = f(a) \in ]0, 1[$ . On peut dès lors appliquer l'inégalité donnée en  $c = I$  et au point  $f(x) \in ]0, 1[$  et on obtient, pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\phi'(I^+)(f(x) - I) + \phi(I) \leq \phi(f(x))$$

soit en intégrant entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \phi'(I^+)(\int_0^1 f(x)dx - I) + \phi(I) \int_0^1 dx &\leq \phi(\int_0^1 f(x)dx) \\ \Leftrightarrow \phi(I) &\leq \phi(\int_0^1 f(x)dx), \end{aligned}$$

qui est le résultat cherché.

### Première partie

a) Il suffit de prendre  $f(x) = x$ , alors  $\int_0^1 xdx = 1/2$  et d'utiliser le résultat précédent :

$$\phi(1/2) = \phi(\int_0^1 xdx) \leq \int_0^1 \phi(t)dt.$$

b) Soit  $f_q(x) = \frac{1}{(x+q+1)\sqrt{x+1/2}}$ , infiniment dérivable sur  $] -1/2, \infty[$ . On a

$$f'_q(x) = -\frac{1}{(x+q+1)^2\sqrt{x+1/2}} - \frac{1}{2(x+q+1)(x+1/2)^{3/2}} < 0,$$

d'où par un calcul immédiat

$$f''_q(x) > 0,$$

donc  $f_q$  est strictement convexe.

6

Mais, pour  $g$  convexe, on a simplement par translation du résultat a)

$$g(m) \leq \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt, \text{ pour } m \geq 1.$$

Il suffit en effet de poser  $f(x) = g(x + (m - 1/2))$ , alors  $f$  est aussi convexe et l'inégalité a) s'écrit

$$\begin{aligned} f(1/2) = g(m) &\leq \int_0^1 g(x + (m - 1/2))dx \\ &= \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt. \end{aligned}$$

En  $m = 0$ , il suffit de reprendre le a) lorsque l'intégral de  $f$  est faussement impropre en 0. On a alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi'(I^+)(\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx - I) + \phi(I) \int_{\varepsilon}^1 dx &\leq \phi(\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx) \text{ soit} \\ \phi(I)(1 - \varepsilon) + \phi'(I^+)(\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx - I) &\leq \phi(\int_{\varepsilon}^1 f(x)dx) \end{aligned}$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, si  $\int_{->0}^1 f(x)dx$  existe alors on a encore

$$\phi(1/2) \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx)$$

et on peut appliquer le même argument que précédemment (translation).

c) On a donc

$$S_N(q) = \sum_{m=0}^N f_q(m).$$

On remarque  $\int_{->-1/2} f_q(x)dx$  est faussement impropre en  $-1/2$ . D'après b) et en remarquant que tous les termes de la somme sont positifs

$$0 < S_N(q) \leq \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx$$

On a alors par changement de variable  $u = \sqrt{x + 1/2}$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx &= \int_0^{\sqrt{N+1}} \frac{2}{u^2 + q + 1/2} du \\ &< \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2 + q + 1/2} du \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}. \end{aligned}$$

Pour avoir un encadrement un peu plus précis que  $[0, \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}}]$  et une borne inférieure non triviale, on peut, par exemple, conserver les premiers termes de la somme. On a par exemple

$$\frac{\sqrt{2}}{q+1} + \frac{\sqrt{2/3}}{q+2} < \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N(q)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}}$$

**Deuxième partie**

a) A  $N$  fixe,  $F$  et  $G$  sont visiblement continues car composée de fonction continues...

Donc, par continuité de  $G$ , l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{N+1}, G(a) = \lambda\} = \{G^{-1}(\{\lambda\})\}$$

est compact car  $\{\lambda\}$  est un compact de  $\mathbb{R}$ .

b) Par continuité de  $F$ ,  $F$  atteint forcément son maximum sur un compact...

c)  $F$  et  $G$  étant également dérivables, le théorème des extrémums liés implique qu'il existe  $\lambda_0$  tel que

$$\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda_0 \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}.$$

( $\lambda_0$  s'interprète comme le multiplicateur de Lagrange associé au Lagrangien  $L = F(a) - \lambda_0 G(a)$  et la condition précédente est simplement la condition au premier ordre du théorème de Kuhn et Tucker). En effet, on a clairement (pour pouvoir appliquer ce théorème)  $G'(a^*) \neq 0$  car

$$\frac{\partial G(a^*)}{\partial a_p} = 2a_p,$$

donc  $G'(a) = 0 \implies a = 0$ .

L'égalité  $\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}$  s'exprime alors sous la forme

$$\sum_{m=0}^N \frac{a_m^*}{m+p+1} = 2\lambda_0 a_p^*.$$

On pose  $\mu = 2\lambda_0$ . On remarque alors que

$$\begin{aligned} M_\lambda &= \sum_{p=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{a_p^* a_m^*}{m+p+1} = \mu \sum_{p=0}^N a_p^* a_p^* \\ &= \mu G(a^*) = \mu \lambda. \end{aligned}$$

d) Evident.

e) Quitte à échanger les signes, on peut supposer que au moins un  $a_i^*$  est strictement positif. Comme indiqué, on considère  $q$  l'entier tel que

$$\sqrt{q+1/2} a_q^* = \max_{r=0, \dots, N} (\sqrt{r+1/2} a_r^*) \neq 0.$$

D'après c) on a

$$\begin{aligned} \mu a_q^* &= \sum_{m=1}^N \frac{a_m^*}{m+q+1} \leq \sum_{m=1}^N \frac{a_m^* \sqrt{m+1/2}}{(m+q+1) \sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2} a_q^* \sum_{m=1}^N \frac{1}{(m+q+1) \sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2} a_q^* \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}} = a_q^* \pi. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mu \leq \pi$ .

f) En rassemblant tous les résultats on obtient donc que pour tout  $a \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$F(a) \leq M_\lambda = \mu G(a) \leq \pi G(a)$$

soit l'inégalité de Hilbert.

AVRIL 2005

**CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B OPTION Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUE**

**Exercice 1**

**Préliminaire**

Si  $x \neq 0$ , on a donc par hypothèse l'existence de  $\lambda_x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x = \lambda_x f(x)$ .  
On veut montrer que  $\lambda_x = \lambda$  est constant.

Posons  $y = \alpha x$  alors  $f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$   
donc  $\lambda_x = \lambda_y$ , est constant sur chaque droite.

Soit maintenant  $(x, y) \neq 0$ , libre on a

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

comme  $(x, y)$  libre l'unicité de la décomposition implique  $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$ .

Donc en appliquant ces deux résultats, pour tout  $x \neq 0$ , s'écrivant sur une base  $e_1, \dots, e_p$ ,  $x = \sum_i \alpha_i e_i$

$$\lambda_x = \lambda_{\alpha_i e_i} = \lambda_{e_i} \text{ pour tout } i.$$

a) C'est un espace de dimension  $n^2$  (car en bijection avec  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). La base canonique est formée des matrices  $e_{ij} = [\delta_{kl}(i, j)]_{k=1, \dots, n}^{l=1, \dots, n}$  avec

$$\delta_{kl}(i, j) = 0 \Leftrightarrow (k, l) \neq (i, j).$$

Soit  $C$  qui commute avec tout élément de  $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$  (on dit que  $C$  appartient au centre de  $E$ ). Montrons que  $C$  est une homothétie. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas alors il existe  $x_0 \neq 0$  tel que  $(x_0, Cx_0)$  est libre, donc il existe  $B$  projecteur sur l'espace engendré par  $Cx_0$  tel que  $BCx_0 = Cx_0$  et  $Bx_0 = 0$ . Mais on a alors aussi comme  $C$  commute avec  $B$ ,  $BCx_0 = CBx_0 = Cx_0 = 0$ , ce qui implique que  $(x_0, Cx_0)$  n'est pas un système libre. Donc  $C$  est une homothétie de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  i.e.  $C = \lambda I_E$ .

b) La linéarité est classique et triviale. La trace prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ , c'est donc bien un élément de  $E^*$ . Si  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ,  $AB$  a pour terme générique sur sa diagonale  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$  et pour trace

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j} = \text{tr}(BA).$$

c) La linéarité est évidente. Comme  $\dim E = \dim E^*$ , il suffit de démontrer que  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ . Pour cela soit  $A$  tel que  $\phi_A = 0$  donc pour tout  $M$  en particulier pour tout élément  $e_{i,j}$  de la base canonique de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  on a,  $i, j = 1, \dots, n$

$$\text{tr}(Ae_{i,j}) = 0$$

mais un calcul direct donne

$$\text{tr}(Ae_{i,j}) = a_{j,i} = 0$$

2

d'où  $A = 0$ .

d) On remarque que pour tout  $\lambda > 0$   $\lambda tr(\cdot)$  convient. On va montrer que ce sont les seules fonctions linéaires qui vérifient cette propriété.

Comme  $\psi$  est dans  $E^*$  d'après c) il existe une matrice  $C$  telle que

$$\psi = \phi_C$$

L'égalité  $\psi(AB) = \psi(BA)$  implique donc que, pour tout  $B$

$$tr(CAB) = tr(ABC) = tr(CAB)$$

donc  $tr((CA - AC)B) = 0$  soit  $CA - AC = 0$ . Donc  $C$  commute avec tout élément de  $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$  et c'est une homothétie  $C = \lambda I_E$ . On peut donc conclure que  $\psi$  est de la forme  $\psi = \phi_{\lambda I_E} = \lambda tr(\cdot)$ . Les seules applications linéaires vérifiant la propriété  $\psi(AB) = \psi(BA)$  sont donc des multiples de la trace.

Exercice 2 (facile)

a) Le polynôme caractéristique de  $M_n$  est

$$C_A(x) = x^2 - 2x + 1 + \alpha^2/n^2$$

de racines dans  $\mathbb{C}$

$$\lambda_1 = 1 - i\alpha/n$$

$$\lambda_2 = 1 + i\alpha/n.$$

Ces deux racines qui sont les valeurs propres de  $M_n$  sont distinctes, non nulles, donc  $M_n$  est diagonalisable et inversible dans  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ .

La résolution du système

$$\begin{cases} x - \frac{\alpha}{n}y = (1 + i\alpha/n)x \\ \frac{\alpha}{n}x + y = (1 + i\alpha/n)y \end{cases}$$

conduit au vecteur propre associé à  $\lambda_1$ ,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

et de manière similaire à

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

associé à  $\lambda_2$ .

On a donc pour  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

$$A = P^{-1} \text{Diag}(\lambda_i)P.$$

b) On sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\alpha/n)^n = \exp(i\alpha).$$

Une démonstration simple est de considérer, le log complexe associé à  $\exp$ ,

$$\log((1 + i\alpha/n)^n) = n \log((1 + i\alpha/n)) \rightarrow i\alpha.$$

Sinon (si on ne le connaît pas) on montre respectivement que le module tend vers 1 et que l'angle tend vers  $\alpha$ ... ce qui est aussi immédiat.



c) On a donc d'après a)

$$M_n^n = P^{-1} \begin{pmatrix} (1 + \frac{i\alpha}{n})^n & 0 \\ 0 & (1 - \frac{i\alpha}{n})^n \end{pmatrix} P \\ \rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Problème

**Première partie**

a)  $\preceq$  est une relation d'ordre non total. En effet, pour tout  $U, V, W$  de  $\mathcal{A}(E)$ , on

a

i)  $U \preceq U$

ii)  $U \preceq V$  et  $V \preceq W \Rightarrow U \preceq W$  (*trivial*)

iii) Si  $U \preceq V$  et  $V \preceq U$  alors  $U - V$  est dans  $\mathcal{A}(E)$  et  $\langle (U - V)x, x \rangle = 0$  d'où  $\langle (U - V)x, y \rangle = 0$  pour tout  $x, y$  (appliquer la relation précédente en  $x + y$ ). Donc  $U - V = 0$ .

$\preceq$  est donc une relation d'ordre.

Si  $n = 1$ , alors l'ordre  $\preceq$  se réduit à l'ordre usuel sur  $\mathbb{R}$  et il est donc total.

Si  $n \geq 2$ , il n'est pas total. Il suffit de donner un contreexemple pour  $n = 2$ . On prend pour cela dans une base  $e_1, e_2$ ,

$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui ne sont pas comparables pour cette relation:

en effet, pour  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,  $\langle x, (U - V)x \rangle = x_1^2 - x_2^2$  n'est ni positive ni négative. Pour  $n$  supérieur on peut prendre le même exemple en complétant les matrices avec des zéros partout ailleurs.

b) On remarque d'abord que  $BUB^*, BVB^*$  sont bien dans  $\mathcal{A}(E)$ , lorsque  $U$  et  $V$  le sont. Mais on a

$$\langle x, (BVB^* - BUB^*)x \rangle = \langle x, B(V - U)B^*x \rangle \\ = \langle B^*x, (V - U)B^*x \rangle \geq 0, \text{ car } U \preceq V.$$

donc  $BUB^* \preceq BVB^*$ .

c) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $V$  de vecteur propre associé  $x_0$  alors on a

$$0 \leq \langle x_0, Vx_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2$$

comme  $x_0 \neq 0$ , cela implique  $\lambda \geq 0$ .

La réciproque est évidente il suffit d'écrire dans une base orthonormée de valeur propre  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et

$$\langle x, Vx \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

d) Dans une base orthonormée de v.p. comme précédemment, on pose

$$C = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$$

de sorte que  $\langle x, Cx \rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} x_i^2$ , que ce qui est légitime puisque toutes les valeurs propres de  $V$  sont positives. Alors on a évidemment  $V = C^2$ .

e) On note dans la suite  $\text{vect}(\mu, A)$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\mu$  de la matrice  $A$ . On note tout d'abord que si  $x \in \text{vect}(\sqrt{\lambda}, C)$  alors

$$Vx = C^2x = C\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}Cx = \lambda x$$

4

donc  $x \in \text{vect}(\lambda, V)$ . Ceci montre

$$\text{vect}(\sqrt{\lambda}, C) \subset \text{vect}(\lambda, V)$$

Inversement, soient  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$  les  $p$  valeurs propres distinctes (positives de  $C$ ).  $V$  et  $C$  étant diagonalisable (par construction) on a

$$E = \bigoplus_{i=1, \dots, p} \text{Vect}(\sqrt{\lambda_i}, C) = \bigoplus_{i=1, \dots, p} \text{Vect}(\lambda_i, V)$$

comme on a l'inclusion

$$\text{vect}(\sqrt{\lambda_i}, C) \subset \text{vect}(\lambda_i, V), \quad i = 1, \dots, p,$$

on a alors nécessairement l'égalité (prendre une base...).

Pour l'unicité, si  $C_1$  et  $C_2$  conviennent alors pour tout  $x \in \text{Vect}(\lambda_i, V)$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$(C_1 - C_2)x = \sqrt{\lambda_i}x - \sqrt{\lambda_i}x = 0$$

donc  $C_1$  et  $C_2$  coïncident sur tous les sous espace propres (dont la somme vaut  $E$ ) donc sur  $E$ .

f)  $V$  inversible  $\implies$  toutes les vp. de  $V$  sont strictement positives donc a fortiori celles de  $V^{1/2}$  qui est donc inversible. Inversement si  $(V^{1/2})^{-1}$  existe alors  $V(V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}V = I$  et donc  $V^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}$ . Donc par unicité de la racine carré

$$(V^{-1})^{1/2} = (V^{1/2})^{-1}.$$

### Deuxième partie

a) On peut toujours supposer quitte à renormaliser les  $u_i$  que ceux-ci forment une base orthonormée. On peut s'attendre à ce que  $M_p = \lambda_{i_1}$  la plus grande valeur propre associée et  $m_p = \lambda_{i_p}$ , la plus petite parmi les indices choisis.

Si  $x \in F_p \setminus \{0\}$ ,  $x = \sum_{j=1}^p x_{i_j} u_{i_j}$  on a

$$\begin{aligned} \langle x, V(x) \rangle &= \sum_{i=1}^p \lambda_{i_j} x_{i_j}^2 \\ &\leq \lambda_{i_1} \sum_{i=1}^p x_{i_j}^2 = \lambda_{i_1} \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

donc  $M_p \leq \lambda_{i_1}$ . mais pour  $x = u_{i_1}$  on a  $\langle x, V(x) \rangle / \langle x, x \rangle = \lambda_{i_1}$  d'où

$$M_p = \lambda_{i_1}.$$

La démonstration est similaire (borne inf au lieu de sup) pour  $m_p$ .

b) D'après ce qui précède on a immédiatement

$$M_{V,p} = \lambda_p$$

$$m_{U,p} = \mu_p.$$

c) On a  $\dim(F_{n-p+1}^V) = n-p+1$  et  $\dim(F_p^U) = p$  donc forcément  $F_{n-p+1}^V \cap F_p^U \neq \{0\}$  (sinon on aurait  $\dim(F_{n-p+1}^V) + \dim(F_p^U) \leq n$ ).

Soit donc  $x_0 \neq 0$  dans  $F_{n-p+1}^V \cap F_p^U$  on a alors

$$\mu_p \leq \frac{\langle x_0, U x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leq \frac{\langle x_0, V x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leq \lambda_p$$

la deuxième inégalité provenant du fait que  $U \preceq V$  et les autres du b). Ceci est vrai pour tout  $p$ , ce qui entraîne que

$$sp(U) \leq sp(V)$$

d) On vérifie que  $Sp(U) = \{1, 0\}$ ,  $Sp(V) = \{1, 0\}$  donc  $Sp(U) \leq Sp(V)$ . Mais on a dans une base  $(e_1, e_2)$ ,  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,

$$\langle x, U(x) \rangle = x_1^2$$

$$\langle x, V(x) \rangle = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$$

et  $x_1^2 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$  n'est pas toujours vraie : (prendre  $x_1 = 0$  et  $x_2 > 0$ ).

e) Comme  $A$  est orthogonale, on a  $sp(AUA^*) = sp(U)$  donc d'après c),

$$V \succeq AUA^* \implies sp(U) \leq sp(V).$$

La réciproque est moins évidente.

On se place dans une base orthonormée  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de vecteurs propres de  $V$  associé à  $sp(V)$  et on considère  $W$  défini par

$$Wu_i = \mu_i u_i$$

(où les  $\mu_i$  sont valeurs de  $sp(U)$ ). On a bien évidemment  $sp(U) = sp(W)$ . Pour  $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$

$$\langle x, Vx \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 = \langle x, Wx \rangle$$

soit

$$V \succeq W$$

Mais comme  $S$  et  $U$  sont similaires, il existe une transformation orthogonale (simplement un changement de base) tel que  $W = AUA^*$  et le résultat est démontré.

AVRIL 2006

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Calculatrice autorisée.

Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , étudier si l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$  est définie.

2) Montrer (sans calculer sa limite) que la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  converge.

3) Montrer (par intégration par partie) que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n$$

4) En déduire une expression de  $I_n$  en fonction de  $I_1$ .

5) Déterminer la nature de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{4k-1}{4k}\right)$ . En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

6) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2+t^4} + (-1)^{n+1} B_n$  avec  $B_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(2+t^4)(1+t^4)^n}$ .

7) Montrer que  $0 \leq B_n \leq I_n$ . En déduire la nature et la valeur somme de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_k$  en fonction de  $I_1$ .

Exercice 2

On note  $E_n$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Quel est la dimension de  $E_n$ ? En donner une base. On note  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . On considère la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définis par  $P_0 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1}$  est la primitive de  $P_n$  pour laquelle on a  $\int_{-1}^1 P_{n+1}(t) dt = 0$ .

2. Déterminer  $P_1, P_2$ . Quel est le degré de  $P_n$ ?

3. Montrer que si  $P_n$  est une fonction impaire, il en est de même de  $P_{n+2}$ .

En déduire que pour tout  $n$  impair  $> 1$ ,  $P_n(1) = 0$ .

4. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\int_{-1}^1 t P_n(t) dt = 2 P_{n+1}(1)$

5. On considère l'application de  $E_n \times E_n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\phi : (P, Q) \longmapsto \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire dans  $E_n$ .

6. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers tels que  $m \geq n > 0$ . Montrer que l'on a

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} P_{m+n}(1) = \phi(P_n, P_0) = 0$$

7. On pose  $A_n = \text{vect}\{P_{2k}, 0 \leq 2k \leq n\}$ , l'espace vectoriel engendré par les polynomes  $P_{2k}, 0 \leq 2k \leq n$ . On pose de même  $B_n = \text{vect}\{P_{2k+1}, 0 \leq 2k+1 \leq n\}$ . Montrer que  $A_n$  et  $B_n$  sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de l'ensemble des polynomes de degré inférieur à  $n$ .

## Problème

### Première partie

Soit  $K$  un compact convexe d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $u$  une application linéaire continue de  $E$  dans  $E$  telle que  $u(K) \subset K$ . On note  $u^n$  la  $n^{\text{ième}}$  itération de  $u$  soit  $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$ .

L'objet de cet exercice est de montrer que  $u$  a un point fixe dans  $K$  (c'est à dire il existe  $a$  dans  $K$  tel que  $u(a) = a$ ).

1. Montrer que l'on peut toujours se ramener au cas  $0 \notin K$ .

2. On note  $S_n$  l'application définie sur  $E$  par

$$S_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \dots + u^{n-1}(x)),$$

pour  $n \geq 1$ . Montrer que  $S_n(K) \subset K$ .

3. Montrer que pour tout entier  $n_1, n_2, \dots, n_k$  en nombre  $k$  fini,

$$S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}(K) \subset S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \dots \cap S_{n_k}(K).$$

En déduire que  $A = \bigcap_{n \geq 1} S_n(K)$  est non vide.

4. Montrer que tout  $x$  dans  $A$  est un point fixe de  $u$  (Indication : pour  $a \in A$ , on montrera qu'il existe  $x_n$  tel que  $a = S_n(x_n)$  et on calculera la norme de  $u(a) - a$ .)

### Deuxième partie

5. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E = \mathbb{R}^n$  et  $K$  sa boule unité fermée. Montrer que

- (i)  $K$  est symétrique,
- (ii)  $K$  est convexe
- (iii)  $K$  est compact
- (iv)  $0$  est un point intérieur à  $K$ .

6. Rappelez les conditions pour que, une fonction  $n(x)$  sur  $E = \mathbb{R}^n$  soit une norme.

7. On suppose que  $K$  possède les quatres propriétés (i) à (iv) ci-dessus. Montrer que  $p(x) = \inf\{a > 0 ; \frac{x}{a} \in K\}$  est bien définie et vérifie bien chacune des propriétés d'une norme. La vérification de chacune de ces propriétés peut se faire de manière indépendante.

8. Montrer par inclusion réciproque que  $K$  est le boule unité de la norme  $p(\cdot)$ .

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

La liberté est-elle une donnée ou une conquête ?

**Sujet n° 2**

Faut-il penser que l'accroissement des pouvoirs de la médecine lié aux découvertes de la biologie (clonage, médecine génétique, moléculaire) peut constituer un problème inquiétant ?

**Sujet n° 3**

Qu'est-ce que le développement durable ? Quelles en sont les conditions ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN

AVRIL 2006

**CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**Option Mathématiques**

**DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3 HEURES**

**EXERCICE N°1**

Soit  $G$  un groupe fini (noté multiplicativement), d'élément neutre noté  $e$ . On rappelle que l'ordre de  $G$  est son cardinal (noté  $|G|$ ) et que l'ordre d'un élément  $x$  est le cardinal du sous-groupe qu'il engendre (nous admettrons que c'est le plus petit entier non nul  $n$  tel que  $x^n = e$ ).

Rappels :

- Le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  est noté  $S_n$ , son cardinal est  $n!$ .
- Théorème de Lagrange : Si  $G$  est un groupe fini alors le cardinal de tout sous-groupe de  $G$  divise le cardinal de  $G$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in G$ ,  $x^{|G|} = e$ .

On appelle **exposant** de  $G$  le plus petit entier  $n$  tel que pour tout  $x \in G$ ,  $x^n = e$ .

2. Soit  $x \in G$  et  $m$  un entier non nul tel que  $x^m = e$ . Montrer que l'ordre de  $x$  divise  $m$ .
3. Déterminer l'exposant de  $S_3$  ainsi que  $S_4$  (en particulier dites pourquoi il n'y a dans  $S_4$  que des éléments d'ordres 1, 2, 3 ou 4).

On suppose à présent que  $G$  est un groupe d'exposant 24.

4. Expliquez rapidement pourquoi il existe  $u \in G$  et  $v \in G$  tels que  $u^{12} \neq e$  et  $v^8 \neq e$ .
5. Montrer que  $v^8$  est d'ordre 3 et  $u^3$  est d'ordre 8.
6. Si, de plus,  $G$  est commutatif, montrer qu'il existe dans  $G$  un élément d'ordre 24 (à déterminer).

**EXERCICE N°2**

Soit l'application  $f$  qui à un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $X(P(X) - P(X - 1))$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire qui préserve le degré des polynômes non-constants (effectuer une récurrence). En déduire que c'est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Ecrire la matrice  $M$  représentant  $f$  dans la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .
3. Soit le polynôme  $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$ , pour  $k \geq 1$  et  $P_0 = 1$ . Montrer que pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $P_k$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $k$  puis que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  forme une base. En déduire une matrice diagonale semblable à  $M$ .



## PROBLÈME

Soit  $E$  un espace euclidien muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , défini par rapport à la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{quand } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

On dit qu'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est *symétrique* lorsque  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ . On rappelle que la matrice d'un tel endomorphisme, par rapport à n'importe quelle base orthonormée, est symétrique, et réciproquement.

Le but de ce problème est d'établir le théorème spectral pour les endomorphismes symétriques (première partie), et d'en voir quelques applications (seconde partie).

### Première partie

1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  sont nécessairement réelles.
2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique.

- a) Justifier le fait qu'il existe un plus petit entier  $m \leq n$  et des réels  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  tels que

$$f^m(x) + a_{m-1}f^{m-1}(x) + \dots + a_2f^2(x) + a_1f(x) + a_0x = 0$$

et montrer que si  $x \neq 0$  et  $W$  est le sous-espace vectoriel engendré par les  $f^j(x)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) (où  $f^0 = id$  et  $f^{j+1} = f \circ f^j$ ), alors il existe un vecteur propre de  $f$  dans  $W$ .

- b) Rappeler pourquoi toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est libre.
- c) Montrer que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $f^j$  est symétrique.
- d) Montrer que si  $x_1, \dots, x_r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) sont des vecteurs propres de  $f$  formant un système orthogonal, engendrant le sous-espace noté  $V_r$ , alors il existe un vecteur propre  $x_{r+1}$  de  $f$  dans l'orthogonal de  $V_r$ .

*Indication :* partir d'un élément non-nul  $x$  de  $V_r^\perp$ , exploiter a), et b).

- e) En déduire que  $f$  est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.

3. En déduire que si  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est symétrique, alors il existe une matrice  $\Lambda$  diagonale de taille  $n \times n$  et une matrice  $P$  orthogonale de taille  $n \times n$  ( ${}^tPP = I$ ) telles que  ${}^tPAP = \Lambda$ .

### Seconde partie

Dans toute cette partie  $A$  désigne une matrice symétrique de taille  $n \times n$  à coefficients réels, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On rappelle qu'une matrice  $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  orthogonale est inversible, son inverse est sa transposée, et elle vérifie  $\sum_{i=1}^n (P_{ij})^2 = 1$  ( $\forall i = 1..n$ ). Les questions 1 et 2 sont indépendantes et utilisent la question 3 de la première partie.

1. a) Soit  $R_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto R_A(x) = {}^txAx/{}^txx$ .

Montrer que  $R_A$  a comme valeurs maximum et minimum  $\max_i \lambda_i$  et  $\min_i \lambda_i$  respectivement, et que  $R_A(x) = \lambda_i$  dès que  $Ax = \lambda_i x$ .

- b) Trouver des réels  $(a, b, c)$  qui minimisent la quantité

$$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$



2. a) En utilisant la concavité de la fonction  $\log$ , à savoir

$$\log(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \log(x) + (1 - \lambda) \log(y) \quad \text{pour tous } \lambda \in [0, 1] \text{ et } x, y > 0,$$

montrer la propriété suivante (moyenne géométrique  $\leq$  moyenne arithmétique): si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  désigne des réels  $\geq 0$  de somme 1, et  $(u_1, \dots, u_n)$  des réels strictement positifs, alors

$$\prod_{j=1}^n u_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

- b) En déduire que, si  $\lambda_i > 0$  ( $\forall i \leq n$ ), alors  $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n A_{ii}$ .



|

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****CONTRACTION DE TEXTE****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Daniel Schacter dont le titre est : «Science de la mémoire, oublier et se souvenir» paru aux éditions Odile Jacob (sciences) en septembre 2003. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.**

**Une bénédiction des dieux**

Dans l'étrange nouvelle de Yasunari Kawabata intitulée « Yumiura », un romancier reçoit la visite inattendue d'une femme qui prétend l'avoir rencontré trente ans plus tôt dans l'île de Kyûshu : il s'était rendu dans la ville de Yumiura pour assister à la fête du Port lui dit-elle. Incapable de se souvenir de cette personne et préoccupé par la détérioration de sa mémoire, l'écrivain attribue d'abord cet incident au déclin mental qui le guette puis son embarras se transforme en inquiétude lorsque la visiteuse lui décrit ce qui s'était passé un jour où elle l'avait introduit dans sa chambre : « Vous m'avez même demandé si je ne voulais pas vous épouser », se rappelle-t-elle avec nostalgie. Pris de vertige en prenant conscience de l'ampleur de son oubli, le romancier est encore plus désespéré en entendant la révélation suivante : non seulement cette femme n'a jamais oublié les instants qu'ils auraient passés ensemble, mais le souvenir qu'elle a gardé de cette rencontre lui a rongé le cœur pendant de longues années.

Après cette visite, le romancier ébranlé va chercher dans sa bibliothèque un atlas détaillé du Japon et un répertoire de tous les noms de ville, communes et villages du pays – il espère retrouver ainsi le souvenir de cette ville de Yumiura et des raisons du séjour qu'il y aurait fait. Mais les cartes et les livres qu'il consulte ne font pas mention de cette cité, et il comprend alors qu'il n'aurait pas pu se trouver dans l'île de Kyûshu à l'époque concernée : si émouvant et détaillé qu'ait été le récit de cette femme, ses souvenirs étaient totalement faux.

Cette nouvelle de Kawabata illustre à merveille les divers types de problèmes mnésiques auxquels nous pouvons être sujets. Tantôt nous oublions le passé, tantôt nous le déformons ; et certains souvenirs particulièrement dérangeants nous hantent parfois pendant des années. En même temps, la mémoire est indispensable à l'accomplissement d'un nombre étonnant de tâches quotidiennes : le rappel de conversations amicales ou de vacances familiales, la remémoration de rendez-vous ou de listes de courses, la mobilisation des mots qui nous permettent de parler à autrui et de le comprendre, le souvenir des aliments que nous aimons ou non, l'acquisition des connaissances nécessaires à un nouveau travail, tout cela dépend de cette faculté, d'une façon ou d'une autre. Notre mémoire joue un rôle si omniprésent dans notre vie de tous les jours que nous la tenons le plus souvent pour acquise jusqu'à ce que l'incident d'un oubli ou d'une distorsion quelconque vienne attirer notre attention.

Je me propose tout à la fois d'explorer la nature des imperfections de la mémoire, d'exposer le mode de compréhension nouveau qu'elles appellent et de préciser comment leurs effets pernicioeux peuvent être atténués ou évités. (...)

Si l'ampleur de la distorsion de la mémoire évoquée dans « Yumiura » vous laisse incrédule, sachez que la réalité peut égaler la fiction ou même la dépasser. Pensez par exemple au cas de Benjamen Wilkomirski, auteur d'une autobiographie unanimement célébrée en 1996 pour la description de l'Holocauste qu'elle contient : la vie en camp de concentration est dépeinte ici du point de vue d'un enfant. Non seulement les lecteurs de cet ouvrage ont cru lire les souvenirs toujours vivaces d'un jeune garçon témoin des horreurs de la *Shoah*, mais la prose du narrateur était empreinte de tant de puissance qu'un critique est allé jusqu'à proclamer que les *Fragments...* sont « si importants au plan moral et si dépourvus d'artifices littéraires » qu'il n'était « même pas sûr d'avoir le droit de faire l'éloge d'un tel livre ». Plus remarquable encore est le fait que Wilkomirski affirmait n'avoir retrouvé ses souvenirs d'enfance que sur le tard : il ne s'était confronté à ses traumatismes qu'au cours d'une thérapie suivie à l'âge adulte. L'histoire et les souvenirs de ce personnage ont inspiré tant de vocations littéraires que Wilkomirski est devenu une célébrité internationale et que son héroïsme a été célébré par les survivants de l'Holocauste.

L'affaire a commencé à être démêlée en août 1998 grâce à l'article stupéfiant de Daniel Ganzfried : ce journaliste suisse dont le père avait survécu à l'Holocauste a révélé dans un quotidien de Zurich que Wilkomirski s'appelle en réalité Bruno Dossekker et avait été mis au monde en 1941 par une dénommée Yvonne-Berthe Grosjean, laquelle avait placé son fils dans un orphelinat pour qu'il y soit adopté – le jeune Bruno avait passé toutes les années de guerre avec les Dossekker, ses parents adoptifs établis à proximité de son canton natal. Quelle que soit la source des « souvenirs » traumatiques d'horreurs nazies que prétendait avoir l'auteur des *Fragments...*, ils n'avaient donc rien à voir avec une expérience infantile des camps de concentration. Dossekker, alias Wilkomirski doit-il être rangé pour autant dans la catégorie des menteurs ? Sans doute pas : il reste persuadé que ses souvenirs sont réels.

Nous sommes tous capables de déformer notre passé. Repensez à votre première année de lycée et essayez de répondre aux questions suivantes : vos parents vous encourageaient-ils à pratiquer tel ou tel sport ? La religion vous aidait-elle ? La discipline était-elle maintenue au moyen de châtiments corporels ? Le psychiatre Daniel Offer et ses collaborateurs de la Northwestern University ont posé ces questions et d'autres encore à soixante-sept hommes frisant la cinquantaine, et les réponses qu'ils ont obtenues sont d'autant plus intéressantes qu'Offer avait déjà demandé à ces sujets de répondre à un questionnaire identique au début de leurs études secondaires, soit trente quatre ans plus tôt.

Les souvenirs d'adolescence de ces quadragénaires différaient largement de ceux qu'ils avaient décrits au lycée. Un peu moins de 40% de ces adultes se rappelaient que leurs parents les avaient encouragés à pratiquer assidûment un sport, alors qu'ils avaient été 60% à faire état de tels encouragements à l'adolescence ; un quart d'entre eux, à peine, affirmaient que la religion les avait aidés bien que près de 70% de réponses positives aient été enregistrées pour les adolescents ; et un tiers seulement avaient le souvenir d'avoir reçu des châtiments corporels des décennies plus tôt, au lieu de 90% pour le même groupe, interrogé à l'adolescence.

Les erreurs mnésiques sont aussi fascinantes qu'importantes. Avec quel type de système de mémorisation les distorsions comme celles qui sont dépeintes dans la fiction de Kawabata et documentées par le cas de Wilkomirski ou les imprécisions exemplifiées par l'étude d'Offer sont-elles compatibles ? Pourquoi sommes-nous si souvent incapables de mettre un nom sur un visage qui nous paraît pourtant tout à fait familier ? Comment expliquer les épisodes de clés ou de portefeuilles rangés au mauvais endroit ou les bévues du même ordre ? Pourquoi certaines expériences semblent-elles disparaître de notre esprit sans laisser la moindre trace ? Pourquoi nous souvenons-nous avec autant de constance d'expériences pénibles que nous ferions mieux d'oublier ? Et comment ces particularités fâcheuses de nos systèmes de mémorisation peuvent-elles être évitées, prévenues ou minimisées ?

Si les psychologues et les spécialistes des neurosciences ont publié de très nombreux articles sur tel ou tel aspect spécifique de l'oubli ou des distorsions de la mémoire, il n'en reste pas moins qu'aucun modèle conceptuel assez unifié pour rendre compte des divers types d'erreurs mnésiques auxquels nous sommes couramment exposés n'a encore été élaboré à ce jour. (....)

Mes premières recherches sur la mémoire remontant à plus de vingt ans, je suis intrigué depuis longtemps par les défaillances de cette aptitude. Mais c'est un matin de mai 1998 seulement que j'ai réfléchi à une question toute simple au beau milieu d'une promenade faite sous un soleil radieux. Comment la mémoire s'y prend-elle pour nous égarer ? me suis-je soudain demandé. J'ai compris, tout à la fois, qu'on ne saurait espérer parvenir à une compréhension exhaustive des erreurs mnésiques sans soulever cette question, et qu'elle n'avait pas encore été posée jusqu'alors. Au cours des mois suivants j'ai réuni les connaissances disparates que j'avais accumulées sur les diverses imperfections de la mémoire afin de tenter d'ordonner la vaste collection de pannes, de fautes et de distorsions que j'avais eu l'occasion d'observer : j'ai d'abord été insatisfait par les nombreux schémas explicatifs que j'ai plaqués sur ces observations, puis j'ai fini par découvrir un mode de penser qui a tout remis en place.

J'estime que les dysfonctionnements mnésiques peuvent être divisés en sept transgressions capitales, ou « péchés » fondamentaux, que je baptiserai respectivement fugacité, absence, blocage, méprise, suggestibilité, biais, et persistance. (...)

La fugacité, l'absence et le blocage sont des péchés d'omission ; ils impliquent qu'on ne parvient pas à retrouver le fait, l'événement ou l'idée dont on souhaite se souvenir. La fugacité renvoie à un affaiblissement ou une perte qui s'étale dans le temps. Pour prendre un exemple, il est probable que vous n'aurez aucun mal à vous souvenir aujourd'hui de ce que vous avez fait quelques heures plus tôt ; en revanche si je vous prie de me dire à quelles activités vous vous livriez il y a six semaines, six mois, ou six ans de cela, vos probabilités de remémoration décroîtront à mesure que vous remonterez dans le passé. La fugacité est un trait cardinal de la mémoire qui est à l'origine de nombreux problèmes mnésiques.

L'absence procède de la rupture de l'interface entre intention et mémoire. Les erreurs liées à ce péché (les clés ou les lunettes rangées au mauvais endroit, ou l'oubli d'une invitation à déjeuner) se produisent chaque fois qu'on est préoccupé ou distrait par des soucis qui empêchent de prêter attention à ce dont on a besoin de se souvenir. L'information désirée ne se perd pas à la longue : ou bien elle n'a jamais été mise en mémoire dans un premier temps ou bien elle n'est pas recherchée en temps voulu parce que l'attention se focalise ailleurs.

Le blocage qui est le troisième péché contrarie la recherche d'une information qu'on tente parfois désespérément de retrouver. Il nous est arrivé à tous de ne pas réussir à mettre un nom sur un visage familier : survenant même quand on se concentre soigneusement sur la tâche en cours, cette expérience frustrante ne signifie pas que le nom désiré s'est effacé de l'esprit – la récupération inattendue de noms bloqués pendant des heures ou des jours en fait preuve.

Contrairement à ces trois péchés d'omission, les quatre péchés suivants de méprise, de suggestibilité, de biais, et de persistance sont tous des péchés de commission : une certaine forme de mémoire est préservée mais elle est incorrecte ou involontaire. Le péché de méprise consiste à attribuer un souvenir à une source erronée : le fantasme est confondu avec la réalité, ou on se rappelle à tort qu'un ami a raconté une petite histoire qu'on vient en fait de lire dans un journal. La méprise est beaucoup plus fréquente qu'on ne le croit et elle peut avoir des implications très profondes dans les contextes judiciaires. Quant au péché voisin de suggestibilité, il a trait aux souvenirs implantés : j'entends par là tous ceux consécutifs aux questions, aux remarques ou aux suggestions tendancieuses d'une personne qui veut favoriser le rappel d'une expérience passée. Comme la méprise, la suggestibilité est particulièrement importante pour le système judiciaire : elle fait des ravages au sein des tribunaux.

Le péché de biais montre à quel point les connaissances et croyances actuelles influent puissamment sur les modes de remémoration du passé. Nous avons coutume de remanier ou de réécrire totalement nos expériences antérieures (à notre insu et/ou inconsciemment) pour les faire concorder avec nos connaissances ou convictions présentes : qu'elles se rapportent à un incident isolé ou à de plus longues périodes de notre existence, les interprétations faussées qui résultent de ces révisions en disent plus long sur nos sentiments d'*aujourd'hui* que sur ce qui est advenu *autrefois*.



Le septième péché – celui de persistance – se traduit par le rappel répétitif d'une information ou d'événements perturbants qu'on préférerait chasser à jamais de sa mémoire : on se souvient dans ce cas de quelque chose qu'on voudrait oublier, mais qui s'est gravé dans l'esprit. Nous connaissons tous la persistance à un degré ou à un autre : vous souvenez-vous de la dernière fois où, vous réveillant en sursaut à 3 heures du matin, vous n'avez pu faire autrement que de repenser à la gaffe humiliante que vous veniez de commettre sur votre lieu de travail ou au résultat décevant d'un examen capital. Dans les cas extrêmes de dépression aiguë ou d'expérience gravement traumatique, ce péché peut s'avérer très invalidant, voire mettre les jours en danger.

Les avancées décisives que les neurosciences connaissent depuis quelques années ont débouché sur des découvertes dont il sera souvent question dans ce livre : en permettant de visualiser les activités cérébrales concomitantes de l'apprentissage et de la remémoration, les études de neuro-imagerie ont commencé à éclairer les fondements mêmes des sept péchés. Ces travaux ayant le mérite de jeter une lumière novatrice sur ce qui se passe à l'intérieur de notre tête au moment même où nous sommes sujets à une défaillance ou à une erreur mnésique, je les commenterai tout en montrant aussi en quoi la connaissance de ces péchés peut atténuer les impacts quotidiens de ces incidents si frustrants.

Plus j'ai approfondi ce modèle des sept péchés, plus il m'est apparu qu'on ne peut éviter de se demander pourquoi nos systèmes de mémorisation ont fini par présenter ces propriétés gênantes, sinon dangereuses. Ces péchés attestent-ils que Mère Nature se serait fourvoyée au cours de l'évolution ? Les déficiences de la mémoire humaine feraient-elles courir des dangers inutiles à notre espèce ? Je ne suis pas de cet avis : j'estime au contraire que chacun de ces péchés est le sous-produit de particularités de l'esprit humain bénéfiques à d'autres égards parce que adaptatives.

Mon approche des péchés de la mémoire s'inspirera de cette conception. Plutôt que de les tenir pour des faiblesses ou des défauts inhérents à une organisation systémique, j'indiquerai en quoi les sept péchés ouvrent une fenêtre sur les forces adaptatives de la mémoire : en plus de faire comprendre pour quelles raisons cette aptitude fonctionne sans anicroche la plupart du temps, ils laissent entrevoir pourquoi sa configuration a évolué ainsi. L'importance que j'attacherai aux répercussions quotidiennes potentiellement problématiques ne vise donc pas à ridiculiser ni à dénigrer la mémoire : je la décrirai à l'inverse comme un guide le plus souvent fiable tant pour le passé que pour le futur, si ennuyeuses – en même temps que révélatrices – que soient les contrariétés que ce guide nous crée chaque fois qu'il lui arrive de nous laisser tomber.

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN  
ECONOMISTE  
OPTION MATHEMATIQUES**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

**Exercice 1**

1. La fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et équivalente au voisinage de l'infini à  $1/t^{4n}$  : la règle de Riemann nous dit que l'intégrale converge si et seulement si  $4n > 1$ , donc converge pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

2.  $\forall t \in \mathbb{R}_+, (1+t^4)^{n+1} \geq (1+t^4)^n$ , donc  $I_{n+1} \leq I_n$  et la suite  $(I_n)$  est positive décroissante, donc convergente.

3.  $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t \times t^3 / (1+t^4)^{(n+1)} dt$ . On effectue alors une intégration par parties, en intégrant d'abord sur un segment  $[0, X]$ , puis en faisant tendre  $X$  vers  $+\infty$ . On obtient  $I_{n+1} = I_n(4n-1)/4n$  et par récurrence le résultat s'en déduit immédiatement.

5.  $\ln(4n-1)/4n = \ln(1-1/4n) \sim -1/4n$  est le terme général d'une série divergente. La série proposée étant à termes négatifs, elle est donc divergente vers  $-\infty$ .

6. Soit :  $\ln I_n = \ln I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(4k-1)/4k \rightarrow -\infty$  et donc  $\lim I_n = 0$ .

7. On a  $S_n = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 1/(1+t^4)^k \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (-\frac{1}{1+t^4})^n}{2+t^4} dt$  d'où

$$S_n = \underbrace{\int_0^{+\infty} dt/(2+t^4)}_A + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^{+\infty} dt/\{(1+t^4)^n(2+t^4)\}}_{B_n}$$

Comme  $0 \leq B_n \leq I_n$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$ , on déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A$ . Par changement de variable  $t = 2^{1/4}u$  on obtient  $A = 2^{-3/4}I_1$ .

**Exercice 2**

1. On  $P_1(t) = t + a$  avec  $\int_{-1}^1 (t+a) dt = 0$  d'où  $a = 0$ , donc  $P_1(t) = t$ . De même  $P_2(t) = t^2/2 + b$  et  $\int_{-1}^1 (t^2/2 + b) dt = 0$  d'où  $b = -1/6$  et  $P_2(t) = t^2/2 - 1/6$ .

2. On a pour  $n \geq 2$ ,  $P_n(1) - P_n(-1) = \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) dt = 0$ . Supposons  $P_n$  impair, alors  $P_{n+1}$  (primitive de  $P_n$ ) est pair et  $P_{n+2}$  est de la forme  $Q + b$ , où  $Q$  est un polynôme impair et  $b$  une constante. La nullité de l'intégrale sur  $[-1, 1]$  impose alors  $b = 0$  et  $P_{n+2}$  est impair. Comme  $P_1$  est impair, on conclut par récurrence que, pour tout  $n$  impair,  $P_n$  est impair (et donc si  $n$  est pair  $P_n$ , primitive de  $P_{n-1}$  est pair). Pour  $n$  impair, on a donc  $P_n(-1) = -P_n(1)$  et comme on a remarqué que pour  $n \geq 2$ ,  $P_n(-1) = P_n(1)$ , le résultat s'en suit.

3. Pour  $n \geq 1$ , on a  $n+1 \geq 2$  et en intégrant par parties,

$$\int_{-1}^1 t P_n(t) dt = [t P_{n+1}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{n+1}(t) dt = P_{n+1}(1) + P_{n+1}(-1)$$

2

On en déduit avec le début de la question 2 que

$$\int_{-1}^1 t P_n(t) dt = 2 P_{n+1}(1).$$

4. Cf. cours.

5. On obtient par intégration par parties  $\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = [P_n(t) P_{m+1}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) P_{m+1}(t) dt$ . Si  $n \geq 2$ , alors  $m+1 \geq 2$  et on a donc

$$\phi(P_n, P_m) = -\phi(P_{n-1}, P_{m+1}).$$

D'où, par récurrence, pour  $n, m > 1$

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} \phi(P_1, P_{m+n-1})$$

aussi valable pour  $n = 1$ . D'après la question 3, on a donc pour  $m \geq n \geq 1$ ,  $\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} P_{m+n}(1)$ . Enfin, comme  $n \geq 1$ ,

$$2\phi(P_n, P_0) = \int_{-1}^1 P_n(t) dt = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(-1) = 0.$$

6.  $E_n$  et  $F_n$  sont supplémentaires (car les polynômes  $(P_0, \dots, P_n)$  sont de degrés différents et forme, donc une base de cet espace). Montrons que pour tout  $k$  et tout  $j$ ,  $P_{2k}$  et  $P_{2j+1}$  sont  $\phi$ -orthogonaux. Or d'après ce qui précède,  $\phi(P_0, P_{2j+1}) = 0$  et pour  $k \geq 1$ , d'après 5. et 2., d'où

$$\phi(P_{2k}, P_{2j+1}) = (-1)^{2k-1} P_{2(k+j)+1}(1) = 0.$$

## Problème

### Première Partie

- (1) Si  $0 \in K$ , alors par linéarité  $u(0) = 0$  et l'application  $u$  (linéaire) admet 0 comme point fixe dans  $K$ .
- (2) On suppose désormais  $0 \notin K$ . Si  $x \in K$ ,  $u^j(x) \in K$  pour tout  $0 \leq j \leq n-1$  et il s'ensuit par convexité de  $K$  que  $S_n(x) \in K$ .
- (3) Soit  $x \in K$ . D'après 2,  $S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}(x) \in K$  et s'écrit  $S_{n_1}(S_{n_2} \circ \dots \circ S_{n_k})(x)$  : il appartient donc à  $S_{n_1}(K)$ . Par ailleurs, comme les applications linéaires  $S_{n_j}$  commutent entre elles (ce sont des polynômes en  $u$ ), il en va de même pour  $S_{n_2}, \dots, S_{n_k}$  d'où l'inclusion.

$S_n$  étant continue et  $K$  compact, les ensembles  $S_n(K)$  sont eux aussi compacts et inclus dans  $K$ ; si  $A = \bigcap_{n \geq 1} S_n(K)$  était vide, il existerait  $n_1, n_2, \dots, n_k$  en nombre fini tels que  $S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \dots \cap S_{n_k}(K) = \emptyset$ . Or cette intersection contient l'image de  $K$  par  $S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}$  et ne peut donc pas être vide.



- (4) Soit  $a \in A$ ; pour tout  $n$  il existe  $x_n \in K$  tel que  $a = S_n(x_n)$ . On va montrer que  $u(a) = a$  :

$$\begin{aligned} u(a) - a &= u(S_n(x_n)) - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)}{n} - \frac{x_n}{n} - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n) - nS_n(x_n) - x_n}{n} \\ &= \frac{u^n(x_n) - x_n}{n} \end{aligned}$$

Mais  $\|u^n(x_n) - x_n\| \leq d < +\infty$  puisque  $K$  compact est borné, et  $\|u(a) - a\| \leq \frac{d}{n}$  pour tout  $n$  donc  $\|u(a) - a\| = 0$  et  $u(a) = a$ .

## Deuxième Partie

- (1) (i) si  $x \in K$ ,  $\| -x \| = \| x \| \leq 1$  et  $-x \in K$  ce qui prouve (i).  
(ii)  $K$  est convexe car, si  $x, y \in K$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq 1$  donc  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$ .  
(iii)  $K$  est fermé car toute boule fermée d'un espace métrique est fermée; et  $K$  est borné par définition.  
(iv) 0 est un point intérieur de  $K$  : par ailleurs  $B(0, \frac{1}{2}) \subset K$  et  $K$  contient donc un voisinage de 0.
- (2)  $n$  est définie, positive, homogène, telle que  $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  et satisfait l'inégalité triangulaire  $n(x_1 + x_2) \leq n(x_1) + n(x_2)$  pour tout  $x_1, x_2$ .
- (3) Soit  $K$  vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii), (iv).

Montrons que  $-p(x)$  est bien définie pour tout  $x$  que  $p$  est une norme

que  $K$  est la boule unité fermée qui lui est associée.

• Si  $x = 0$ ,  $\frac{x}{a} \in K$  pour tout  $a > 0$  et  $p(0) = 0$ . Si  $x \neq 0$ , l'ensemble  $\{a > 0 ; \frac{x}{a} \in K\}$  est minoré; s'il est non vide, il admet une borne inférieure. Or 0 est point intérieur à  $K$ ; il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(0, \varepsilon) \subset K$  et pour  $a$  assez grand,  $\frac{\|x\|}{a} \leq \varepsilon$ , en particulier  $\frac{x}{a} \in K$ , et l'ensemble est non vide.

Vérifions maintenant les axiomes d'une norme.

• Par définition d'une borne inférieure,  $p(x) = 0$  alors  $\forall \varepsilon > 0 \exists 0 < a < \varepsilon$  tel que  $\frac{x}{a} \in K$ .  $K$  étant borné, on peut supposer que  $K \subset \overline{B}(0, R)$ , de sorte que pour  $x$  dans  $K$ ,  $\|\frac{x}{a}\| \leq R$  ou  $\|x\| \leq \varepsilon R$ , ceci pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui implique  $x = 0$ .

• Soit  $\lambda > 0$ ;  $p(\lambda x) = \inf\{a > 0 ; \frac{\lambda x}{a} \in K\} = \inf\{\lambda b > 0 ; \frac{x}{b} \in K\}$  en posant  $a = \lambda b$ , et  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ . Il suffit de montrer que  $p(-x) = p(x)$  pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais  $p(-x) = \inf\{a > 0 ; -\frac{x}{a} \in K\} = \inf\{a > 0 ; \frac{x}{a} \in -K\} = p(x)$  car  $K$  est symétrique.

• Fixons  $\varepsilon > 0$  alors il existe  $a > 0$  tel que  $p(x) \leq a < p(x) + \varepsilon$  et  $\frac{x}{a} \in K$ , puis  $b > 0$  tel que  $p(y) \leq b < p(y) + \varepsilon$  et  $\frac{y}{b} \in K$ . Si  $\frac{x+y}{a+b} \in K$ , alors  $p(x+y) \leq a+b$  par propriété de la borne inf et on aura prouvé  $p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ .

4

Mais  $\frac{x+y}{a+b}$  s'écrit  $\frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}$ , qui est la combinaison convexe de  $\frac{x}{a}$  et  $\frac{y}{b}$ , et  $K$  est supposé convexe. L'inégalité triangulaire s'en déduit immédiatement en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

• Il reste à montrer que  $K$  est bien la boule unité pour cette norme  $K = \{x ; p(x) \leq 1\}$ .

Si  $x \in K$  et  $a = 1$ ,  $\frac{x}{a} \in K$  ce qui implique  $p(x) \leq 1$ . Réciproquement si  $p(x) \leq 1$ ; on peut supposer  $x \neq 0$ . Si  $p(x) < 1$ , il existe  $p(x) \leq a < 1$  tel que  $\frac{x}{a} \in K$ ; mais  $x = a \frac{x}{a} + (1-a)0$  est encore dans  $K$ .

Si  $p(x) = 1$  il existe  $(a_n)$  suite de nombres positifs tels que  $\frac{x}{a_n} \in K$  pour tout  $n$  et tendant vers 1. Mais  $K$  étant fermé,  $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$ .



1

AVRIL 2006

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES VOIE B -  
Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES, DURÉE : 3 HEURES

**PROBLÈME**

Soit  $E$  un espace euclidien muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , défini par rapport à la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ quand } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

On dit qu'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique lorsque  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ . On rappelle que la matrice d'un tel endomorphisme, par rapport à n'importe quelle base orthonormée, est symétrique, et réciproquement.

Le but de ce problème est d'établir le théorème spectral pour les endomorphismes symétriques (première partie), et d'en voir quelques applications (seconde partie).

**Première partie**

1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  sont nécessairement réelles.

Considérons  $\lambda \in \mathbb{C}$  une racine du polynôme caractéristique de  $A$  et  $X$  et  $Y$  des matrices  $n \times 1$  à coefficients réels telles que  $A(X + iY) = \lambda(X + iY)$  ( $X + iY$  n'étant pas la colonne nulle).

Si  $M = (M_{ij})_{i \leq I, j \leq J} \in \mathcal{M}_{I,J}(\mathbb{C})$ , on note  $\overline{M}$  la matrice  $(\overline{M_{ij}})_{i \leq I, j \leq J}$ , où la barre désigne la conjugaison. Si  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $M_1$  et  $M_2$  sont des matrices à coefficients complexes pour lesquelles le produit  $M_1 M_2$  a un sens, alors

$$\overline{\mu M} = \overline{\mu} \overline{M} \text{ et } \overline{M_1 M_2} = \overline{M_1} \overline{M_2}.$$

Comme  $A, X, Y$  sont à coefficients réels, on a  $\overline{A} = A, \overline{X} = X, \overline{Y} = Y$ . Ainsi  $A(X - iY) = \overline{\lambda}(X - iY)$  et, par symétrie de  $A$ ,

$$\begin{aligned} \lambda({}^t(X + iY)(X - iY)) &= {}^t(A(X + iY))(X - iY) = {}^t(X + iY)A(X - iY) = {}^t(X + iY)(\overline{\lambda}(X - iY)) \\ &= \overline{\lambda}({}^t(X + iY)(X - iY)). \end{aligned}$$

Mais  ${}^t(X + iY)(X - iY) = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)$  est un réel non nul par hypothèse ( $X + iY \neq 0$ ) donc  $\lambda = \overline{\lambda}$  autrement dit  $\lambda$  est réel.

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique.

a) Montrer que si  $x \neq 0$  et  $W$  est le sous-espace vectoriel engendré par les  $f^j(x)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) (où  $f^0 = \text{id}$  et  $f^{j+1} = f \circ f^j$ ), alors il existe un vecteur propre de  $f$  dans  $W$ .

L'espace  $E$  étant de dimension finie  $n$ , il existe un plus petit entier  $m \leq n$  (et non nul puisque  $x \neq 0$ ) tel que la famille  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^m(x)\}$  soit liée. Il existe donc des réels  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  tels que

$$f^m(x) + a_{m-1}f^{m-1}(x) + \dots + a_2f^2(x) + a_1f(x) + a_0x = 0$$

ce qui peut se réécrire en : il existe des complexes  $\mu_1, \dots, \mu_m$  tels que

$$(f - \mu_1 \text{id}_E) \circ (f - \mu_2 \text{id}_E) \circ \dots \circ (f - \mu_{m-1} \text{id}_E) \circ (f - \mu_m \text{id}_E)(x) = 0.$$

Comme par définition de  $m$  la famille  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{m-1}(x)\}$  est libre, le vecteur

$$y = (f - \mu_2 \text{id}_E) \circ \dots \circ (f - \mu_{m-1} \text{id}_E) \circ (f - \mu_m \text{id}_E)(x)$$

est nécessairement non nul, et il appartient, d'une part à  $W$ , d'autre part à  $\ker(f - \mu_1 \text{id}_E)$  :  $y \in W$  est donc vecteur propre de  $f$  (associé à la valeur propre  $\mu_1$ ). On remarque que  $\mu_1$  est en fait forcément réelle, en vertu de la question 1, puisque  $f$  est symétrique et que le spectre de  $f$  est égal à celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

b) *Rappeler pourquoi toute famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.*

Supposons que  $(u_i)_{i \leq m}$  soit une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, et que  $(\alpha_i)_{i \leq m}$  soient des réels tels que  $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$  soit le vecteur nul. On a donc, pour chaque  $k \leq m$ ,

$$0 = \langle u_k, u \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle u_k, u_i \rangle = \alpha_k \|u_k\|^2$$

(car dans la somme, un seul des produits scalaires est non nul, par hypothèse sur les  $u_i$ ). Ainsi  $\alpha_k = 0$  pour tout  $k \leq m$ .

c) *Montrer que si  $x_1, \dots, x_r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) sont des vecteurs propres de  $f$  formant un système orthogonal, engendrant le sous-espace noté  $V_r$ , alors il existe un vecteur propre  $x_{r+1}$  de  $f$  dans l'orthogonal de  $V_r$ .*

Comme  $r \leq n-1$  et  $n = \dim(E)$ , l'orthogonal de  $V_r$  n'est pas réduit au vecteur nul, donc on considère  $x \neq 0$  qui soit dans  $V_r^\perp$ , autrement dit  $\langle x, x_i \rangle = 0$  ( $\forall i \leq r$ ). En utilisant la question 2.a., on considère alors  $y$  un vecteur propre de  $f$  dans le sous-espace engendré par  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^m(x)$  (où  $1 \leq m \leq n$ ). On note ainsi  $y = \sum_{i=0}^m \alpha_i f^i(x)$ , et on a  $f(y) = \lambda y$  pour un certain réel  $\lambda$  (voir fin de la correction du paragraphe 2.a.).

Maintenant, on veut montrer que  $y$  est orthogonal à chacun des  $x_i$  ( $i \leq r$ ), et on posera alors  $x_{r+1} = y$ . Pour cela, comme

$$\langle y, x_i \rangle = \sum_{j=0}^m \alpha_j \langle f^j(x), x_i \rangle$$

et  $f^j$  est symétrique (voir ci-dessous), on a (en notant  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $x_i$ )

$$\langle y, x_i \rangle = \sum_{j=0}^m \alpha_j \langle x, f^j(x_i) \rangle = \alpha_0 \langle x, x_i \rangle + \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_i^j \langle x, x_i \rangle = 0$$

car par construction  $x$  est orthogonal à chacun des  $x_i$ . La symétrie de  $f^j$  (pour  $j = 1, \dots, m$ , le cas  $j = 0$  étant trivial) s'établit par récurrence :  $f^1 = f$  est symétrique, et si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs, par symétrie de  $f$

$$\begin{aligned} \langle u, f^j(v) \rangle &= \langle u, f(f^{j-1}(v)) \rangle = \langle f(u), f^{j-1}(v) \rangle \\ &= (\text{par hypothèse de récurrence}) \langle f^{j-1}(f(u)), v \rangle \\ &= \langle f^j(u), v \rangle. \end{aligned}$$

d) *En déduire que  $f$  est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.*

Soit  $x \neq 0$  un vecteur arbitraire de  $E$ ; soit  $x_1$  un vecteur propre de  $f$  appartenant au sous-espace engendré par les  $f^j(x)$  où  $j \in \mathbb{N}$ . En utilisant successivement la question précédente  $n-1$  fois, on peut donc considérer  $x_2$  vecteur propre de  $f$  qui soit orthogonal à  $x_1$ , puis  $x_3$  vecteur propre de  $f$  orthogonal à  $x_1$  et à  $x_2$ , etc... jusqu'à avoir  $(x_1, \dots, x_n)$  système orthogonal de vecteurs propres de  $f$ . En normant chacun des  $x_i$  (i.e. en remplaçant chaque  $x_i$  par  $\|x_i\|^{-1} x_i$ ) on a donc construit une base orthonormée de vecteurs propres de  $f$ .

3. *En déduire que si  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est symétrique, alors il existe une matrice  $\Lambda$  diagonale de taille  $n \times n$  et une matrice  $P$  orthogonale de taille  $n \times n$  ( ${}^t P P = I$ ) telles que  ${}^t P A P = \Lambda$ .*

Considérons  $f \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ ;  $f$  est donc symétrique. Nous avons exhibé à la question précédente une base  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs propres,  $f$  est donc diagonalisable. Il en est donc de même pour  $A$ . Notons  $P$  la matrice  $n \times n$  dont la  $i^{\text{ème}}$  colonne est constituée des coordonnées de  $x_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ . La base  $(x_1, \dots, x_n)$  étant orthonormée,  $P$  est une matrice orthogonale (i.e. vérifiant  ${}^t P P = I$ ). On a donc  $P^{-1} = {}^t P$  et  $A = P \Lambda P^t$ , où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , et  $\lambda_i$  est la valeur propre de  $f$  à laquelle le vecteur propre  $x_i$  est associé.

## Seconde partie

Dans toute cette partie  $A$  désigne une matrice symétrique de taille  $n$  à coefficients réels, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On rappelle qu'une matrice  $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  orthogonale est inversible, son inverse est sa transposée, et elle vérifie  ${}^t P P = I$  (en particulier  $\sum_{i=1}^n (P_{ij})^2 = 1$  ( $\forall i = 1..n$ )). Les questions 1 et 2 sont indépendantes et utilisent la question 3. de la première partie.

1. a) Soit  $R_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto R_A(x) = {}^t x A x / {}^t x x$ .

Montrer que  $R_A$  a comme valeurs maximum et minimum  $\max_i \lambda_i$  et  $\min_i \lambda_i$  respectivement, et que  $R_A(x) = \lambda_i$  dès que  $Ax = \lambda_i x$ .

On suppose que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  (sans perte de généralité). Soit  $P$  la matrice orthogonale construite dans le paragraphe I.3., avec  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $y = {}^t P x$ . On a alors,

$$R_A(x) = \frac{{}^t x P \Lambda P^t x}{{}^t x x} = \frac{{}^t y \Lambda y}{{}^t y (P P^t) y} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Comme  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , ce quotient est inférieur ou égal à  $\lambda_1$  et vaut  $\lambda_1$  par exemple lorsque  $y_2 = \dots = y_n = 0$  et  $y_1 \neq 0$ . De même, le quotient est supérieur ou égal à  $\lambda_n$  et vaut  $\lambda_n$  par exemple lorsque  $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$  et  $y_n \neq 0$ . Le fait que  $R_A(x) = \lambda_i$  dès que  $Ax = \lambda_i x$ , est évident.

b) Trouver des réels  $(a, b, c)$  qui minimisent la quantité

$$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On se place dans  $\mathbb{R}^3$  et on note  $x = (a \ b \ c)^t \in \mathbb{R}^3$ . Le numérateur est une forme quadratique en les inconnues  $a, b, c$ , et on reconnaît sans peine que la matrice symétrique qui lui est associée est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{{}^t x A x}{{}^t x x} = R_A(x).$$

Minimiser  $\phi(a, b, c)$  sous la contrainte  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  revient ainsi à minimiser  $R_A(x)$  : il nous suffit donc de trouver  $x$  vecteur propre de  $A$  associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_3$  de  $A$ . On calcule le polynôme caractéristique de  $A$  et on trouve  $\lambda_3 = -2$  et  $x = (a, 0, 0)$  comme vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_3$ , où  $a$  non nul quelconque convient. Des solutions sont donc  $a \in \mathbb{R}, b = c = 0$ .

2. a) Montrer la propriété suivante (moyenne géométrique  $\leq$  moyenne arithmétique) : si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  désigne des réels  $\geq 0$  de somme 1, et  $(u_1, \dots, u_n)$  des réels strictement positifs, alors

$$\prod_{j=1}^n u_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \log(u_j) \leq \log \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right) \quad \text{pour tous } \alpha_j \geq 0 \text{ sommant à } 1, \text{ et } u_j > 0.$$

Il s'agit donc là ni plus ni moins du fait que la fonction  $\log$  est une fonction concave, et donc que le  $\log$  d'une combinaison convexe  $\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$  des  $u_j$  est supérieur ou égal à la même combinaison convexe des  $\log(u_j)$ . Si on ne dispose comme définition de la concavité que de

$$\log(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \log(x) + (1 - \lambda) \log(y) \quad \text{pour tous } \lambda \in [0, 1] \text{ et } x, y > 0$$

alors la propriété plus générale ci-dessus (où  $n \geq 2$ ) se démontre sans peine par récurrence, à l'aide de la décomposition :

$$\log \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right) = \log(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \text{où } \lambda = \alpha_n, x = u_n, y = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j / (1 - \alpha_n)) u_j$$

donc

$$\log \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right) \geq \lambda \log(x) + (1 - \lambda) \log(y) = \alpha_n \log(u_n) + (1 - \alpha_n) \log \left( \sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j u_j \right)$$

où  $\alpha'_j = \alpha_j / (1 - \alpha_n)$  sont  $\geq 0$  et de somme 1, d'où la propriété à l'ordre  $n$  en utilisant l'hypothèse de récurrence à l'ordre  $n - 1$  (remarque : si  $\alpha_n = 0$  alors c'est immédiat et ce qui précède n'a pas lieu d'être).

b) En déduire que, si  $\lambda_i > 0$  ( $\forall i \leq n$ ), alors  $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n A_{ii}$ .

On part de  $A = P \Lambda P^t$ , qui donne

$$A_{ii} = \sum_{j=1}^n P_{ij} (\Lambda P^t)_{ji} = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{ij} (P^t)_{ji} = \sum_{j=1}^n \lambda_j (P_{ij})^2.$$

On pose alors  $u_j = \lambda_j > 0$  (par hypothèse), et  $\alpha_j = (P_{ij})^2$  positifs et de somme 1, de sorte que l'utilisation de l'inégalité donnée en 3.a. permet d'écrire

$$A_{ii} \geq \prod_{j=1}^n \lambda_j^{(P_{ij})^2}.$$

En écrivant cette inégalité pour chaque  $i$ , et en les multipliant ensemble, il vient

$$\prod_{i=1}^n A_{ii} \geq \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \lambda_j^{(P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \lambda_j^{(P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\sum_{i=1}^n (P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

Le terme de droite, produit des valeurs propres de  $A$ , est égal au déterminant de  $A$  (propriété connue).



Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini (noté multiplicativement), d'élément neutre noté  $e$ . On rappelle que l'ordre de  $G$  est son cardinal (noté  $|G|$ ) et que l'ordre d'un élément  $x$  est le cardinal du sous-groupe qu'il engendre (nous admettrons que c'est le plus petit entier non nul  $n$  tel que  $x^n = e$ ).

Rappels :

- Le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  est noté  $S_n$ , son cardinal est  $n!$ .
- Théorème de Lagrange : Si  $G$  est un groupe fini alors le cardinal de tout sous-groupe de  $G$  divise le cardinal de  $G$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in G$ ,  $x^{|G|} = e$ .

Soit  $x \in G$ . Notons  $n$  l'ordre de  $x$ . D'après le théorème de Lagrange,  $n$  (qui est le cardinal du sous-groupe engendré par  $x$ ) divise  $|G|$  (le cardinal de  $G$ ). Il existe donc  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|G| = pn$  et donc  $x^{|G|} = (x^n)^p = e^p = e$ .

On appelle **exposant** de  $G$  le plus petit entier  $m$  tel que pour tout  $x \in G$ ,  $x^m = e$ .

2. Soit  $x \in G$  et  $m$  un entier non nul tel que  $x^m = e$ . Montrer que l'ordre de  $x$  divise  $m$ .

Notons encore  $n$  l'ordre de  $x$ . Il est clair que  $n < m$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$  le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $n$  (il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = nq + r$ ). Alors  $x^m = x^{nq} \cdot x^r = e \cdot x^r = x^r = e$ . Or  $r$  est plus petit que  $n$  et  $n$  est le plus petit entier non nul tel que  $x^n = e$ , donc  $r = 0$ , ce qui veut dire que  $n$  divise  $m$ .

3. Déterminer l'exposant de  $S_3$  ainsi que  $S_4$  (en particulier dites pourquoi il n'y a dans  $S_4$  que des éléments d'ordres 1, 2, 3 ou 4).

$S_3$  est d'ordre  $3! = 6$ , donc les éléments de  $S_3$  sont d'ordre 1, 2, 3 ou 6. Il est clair alors que l'exposant de  $S_3$  est  $\text{ppcm}(2, 3, 6) = 6 = |S_3|$ .

$S_4$  est d'ordre  $4! = 24$ . Mais les éléments ne peuvent être que d'ordre 1, 2, 3 ou 4. En effet, toute permutation de  $S_4$  peut s'écrire comme produit de cycles disjoints et l'ordre d'un cycle de longueur  $p$  est  $p$ , ainsi, les éléments de  $S_4$  s'écrivent, soit comme cycle de longueur 4, ou 3 soit comme produit de deux cycles de longueurs 2 (des transpositions).

Ainsi, l'exposant de  $S_4$  est  $\text{ppcm}(2, 3, 4) = 12 < |S_4|$ .

On suppose à présent que  $G$  est un groupe d'exposant 24.

4. Expliquez rapidement pourquoi il existe  $u \in G$  et  $v \in G$  tels que  $u^{12} \neq e$  et  $v^8 \neq e$ .

Si on suppose que pour tout  $x$  de  $G$   $x^{12} = e$ , l'exposant de  $G$  serait  $\leq 12$ , or c'est 24, donc il existe  $u \in G$  tel que  $u^{12} \neq e$ . On fait le même raisonnement pour  $v$ .

5. Montrer que  $v^8$  est d'ordre 3 et  $u^3$  est d'ordre 8.

On a  $(v^8)^3 = v^{24} = e$  donc l'ordre de  $v^8$  divise 3. C'est donc 1 ou 3. Or  $v^8 \neq e$  donc l'ordre de  $v^8$  est bien 3.

On a de même  $(u^3)^8 = u^{24} = e$ , donc l'ordre de  $u^3$  divise 8, c'est donc 1, 2, 4 ou 8. Or  $u^{12} = (u^3)^4 \neq e$  donc l'ordre n'est pas 4. Si l'ordre était 2 alors on aurait  $u^6 = e$  donc  $(u^6)^2 = u^{12} = e$ , ce qui est faux. Donc l'ordre de  $u^3$  n'est pas 2. Si l'ordre était 1, on aurait également  $u^{12} = e$ , donc l'ordre de  $u^3$  n'est pas 1. C'est donc bien 8.

6. Si, de plus,  $G$  est commutatif, montrer qu'il existe dans  $G$  un élément d'ordre 24 (à déterminer).

Posons  $x = u^3 v^8$ . L'ordre de  $x$  divise 24, c'est donc 1, 2, 3, 4, 6, 12 ou 24. Or,  $x^8 = u^{24} v^{64} = e \cdot v^{16} = (v^8)^2 \neq e$  car l'ordre de  $v^8$  est 3. De même  $x^{12} = (u^3)^8 \cdot (u^3)^4 \cdot (v^8)^{12} = u^{12} \neq e$ , l'ordre n'est donc ni 8 ni 12. Si l'ordre était 1, 2, 3, 4 ou 6, on aurait  $x^{12} = e$  (car 12 est multiple de 1, 2, 3, 4 et 6). Ainsi l'ordre de  $u^3 v^8$  est 24.

Soit l'application  $f$  qui à un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $X(P(X) - P(X-1))$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire qui préserve le degré des polynômes non-constants (effectuer une récurrence). En déduire que c'est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Montrons tout d'abord que  $f$  est bien linéaire : Soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

$$f(\lambda P + Q) = X((\lambda P + Q)(X) - (\lambda P + Q)(X-1)) = X((\lambda P(X) + Q(X)) - (\lambda P(X-1) + Q(X-1))),$$

d'où

$$f(\lambda P + Q) = \lambda X(P(X) - P(X-1)) + XQ(X) - Q(X-1) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Il est clair que les polynômes constants ont pour image 0. Considérons à présent un polynôme de degré 1 de la forme  $P = aX + b$ , alors  $f(P) = X(aX + b - aX + a - b) = aX$  est également de degré 1. Supposons que l'application  $f$  conserve les degrés jusqu'au degré  $n-1$ . Un polynôme de degré  $n$  peut s'écrire comme  $aX^n$  (où  $a \neq 0$ ) plus un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$ . L'image par  $f$  du second terme a (par hypothèse de récurrence) un degré strictement inférieur à  $n$ . Pour le premier terme, on a

$$f(aX^n) = af(X^n) = aX(X^n - (X-1)^n) = aX^{n+1} - aX^{n+1} + anX^n + \dots,$$

où les  $\dots$  représentent des termes de degrés strictement inférieur à  $n$ . Ainsi, l'image de  $aX^n$  est bien de degré  $n$ .

2. Ecrire la matrice  $M$  représentant  $f$  dans la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .

Comme les polynômes constants ont pour image 0 par  $f$  et que tout polynôme image par  $f$  n'a pas de terme constant (puisque on termine par une multiplication par  $X$ ), il est clair que la matrice  $M$  contient des 0 sur la première ligne et la première colonne. De plus, comme  $f$  préserve le degré,  $M$  est triangulaire supérieure. Pour obtenir les termes non nuls de la matrice  $M$  il suffit de développer  $f(X^j)$  grâce à la formule du binôme pour tout  $1 \leq j \leq n$ .

$$f(X^j) = X(X^j - (X-1)^j) = X^{j+1} - \sum_{i=0}^j C_j^i X^{i+1} (-1)^{j-i} = \sum_{i=1}^j C_j^{i-1} X^i (-1)^{j-i}.$$

Ainsi, les termes  $M_{i,j}$  non nuls sont égaux à  $C_j^{i-1}(-1)^{j-i}$ . En particulier, les termes sur la diagonale sont de la forme  $j$ .

3. Soit le polynôme  $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$ , pour  $k \geq 1$  et  $P_0 = 1$ . Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de vecteurs propres et donner une matrice diagonale semblable à  $M$ .

Il est clair que  $P_0$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$f(P_k) = X(X(X-1) \dots (X-k+1) - (X-1) \dots (X-k)) = X(X-1) \dots (X-k+1)(X - (X-k)) = kP_k.$$

$P_k$  est donc un vecteur propre associé à la valeur propre  $k$ . Comme il y en a  $n+1$  et que des vecteurs propres par rapport à des valeurs propres différentes sont obligatoirement libres, ils forment bien une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On dispose d'une base de vecteurs propres,  $M$  est donc diagonalisable en

$$\Lambda = \text{diag}(0, 1, \dots, n),$$



AVRIL 2007

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

1<sup>ère</sup>



- 4) On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
- Montrer que l'on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < J_n \leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^\pi \sin^{2n} x \, dx$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Problème

On considère la fonction  $f(t) = e^{-\sin t}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation  $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} f(t)^x \, dt$ .

- Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f(t)$  sur  $[-\pi, \pi]$ . La tracer sur  $[-\pi, \pi]$  et en déduire la forme de la fonction sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on a  $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$  (on utilisera pour cela l'égalité ou l'inégalité de Taylor-Lagrange).
- En déduire que, pour tout  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt| \leq \frac{1}{2} h^2 e^{|h|} \varphi(x).$$

- En déduire que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi'(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt.$$

Indiquer sans démonstration rigoureuse pourquoi  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner l'expression de sa dérivée seconde.

- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) < 0$  et  $\varphi''(x) > 0$ . Montrer également que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $-1 < \varphi'(x) < 0$ .
- Montrer que, pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$  (on pourra montrer que  $\sin(t)$  est concave sur  $[0, \pi/2]$ ).
- On rappelle que  $\frac{\pi}{2}(1-e^{-1}) < 0,993$ . Étudier sur  $\mathbb{R}$ , les variations de la fonction  $x \mapsto x - \varphi(x)$ . En déduire qu'il existe un et un seul réel  $x$  tel que  $\varphi(x) = x$ . On note  $\alpha$  ce réel. Montrer que  $0 < \alpha < 1$ .
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ . En déduire un tracé de la fonction  $\varphi(x)$ .

On définit maintenant la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .

- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) > 0$  et  $\varphi(\varphi(x)) < \frac{\pi}{2}$  et en déduire un encadrement pour  $u_2$  quelle que soit la valeur de  $u_0$ .
- Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $u_2 = \alpha$  ?
- On suppose désormais que  $u_2 < \alpha$ . Montrer que  $u_2 < \alpha < u_3$  et plus généralement que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$ . Montrer que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  croît et que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît.
- Montrer que, pour tout  $x \in [u_2, u_3]$ ,  $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .
- Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $u_2 > \alpha$  ?

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Les pays en voie de développement : éléments communs et diversité.

**Sujet n° 2**

La Politique peut-elle faire abstraction de la Morale ?

**Sujet n° 3**

Dans le cadre de la Mondialisation et de ses effets sur les économies et les sociétés, quelles sont les chances de l'Afrique ?

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

AVRIL 2007

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
DURÉE : 3 HEURES**

**EXERCICE N°1**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer le déterminant de la matrice  $M$  suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de  $m$  cette matrice est-elle inversible ? Calculer, dans ce cas, la matrice inverse  $M^{-1}$ .

2. Soient  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ . Résoudre, en utilisant le 1), le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + (m-2)z = a \\ 2x + (m-4)y - 2z = b \\ (m+2)x - 4y - 3z = c \end{cases}$$

3. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Notons  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

- (a) Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  ?  
 (b) Pour quelles valeurs de  $m$ , l'application  $f$  est-elle bijective ? Donner, dans ce cas, la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  ?  
 (c) Pour quelles valeurs de  $m$ , les sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  de  $E$  sont-ils supplémentaires ?

**EXERCICE N°2**

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de  $f$  ? En particulier, préciser leur ordre de multiplicité.  
 2. Pour quelles valeurs de  $m$  l'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ? Justifier soigneusement la réponse.

3. Lorsque  $m = 2$ , déterminer une base de vecteurs propres de  $f$  puis calculer  $A^k$ , pour tout entier  $k \geq 1$ .

### Problème

On se place dans un espace euclidien  $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ .

*Remarque :* dans l'énoncé, des précautions sont prises pour distinguer un élément de  $\mathcal{E}$  de la matrice colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base  $\mathcal{B}$ . On recommande aux candidats de prendre les mêmes précautions dans leur copie. On rappelle également que si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$  de matrices colonnes de coordonnées  $U$  et  $V$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors on a l'écriture  $\langle u, v \rangle = {}^tUV$ , où  ${}^tU$  est la matrice transposée de  $U$ .

1. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme  $p$  de  $\mathcal{E}$  qui est idempotent ( $p^2 = p$ ), et que la projection orthogonale sur un sous-espace  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est la projection  $p$  telle que  $\mathcal{F} = \text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$ .

(a) Montrer que si  $p$  est une projection et que la matrice  $P$  de  $p$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est symétrique, alors  $p$  est une projection orthogonale.

(b) Soit la matrice

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $P$  est la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$ , d'une projection orthogonale  $p$  sur un sous-espace  $\mathcal{F}$  dont on déterminera une base dans  $\mathcal{E}$ .

2. Soient  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p \leq n$  de  $\mathcal{E}$ , et  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  une base de  $\mathcal{F}$ .

**On note  $V_1, V_2, \dots, V_p$  les matrices colonnes  $n \times 1$  des coordonnées des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_p$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $M$  la matrice  $n \times p$  dont les colonnes sont les  $V_i$ .**

On considère la matrice  ${}^tMM$  ( $p \times p$ ), dont le coefficient d'ordre  $(j, k)$  est  $\langle v_j, v_k \rangle$ .

(a) Montrer que le sous-espace  $\mathcal{F}$  est exactement constitué des vecteurs de  $\mathcal{E}$  dont la matrice colonne des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $M\Lambda$  où  $\Lambda$  est une matrice colonne  $p \times 1$  (cette propriété sera utile à plusieurs reprises lors de la résolution de cet exercice).

(b) Justifier l'inclusion  $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}({}^tMM)$ .

(c) Soit  $U = ({}^t(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_p))$  une matrice colonne telle que  ${}^tMMU = 0$ , et  $w$  le vecteur de  $\mathcal{E}$  défini par  $w = \sum_{i=1}^p U_i v_i$  : la matrice colonne des coordonnées de  $w$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc  $MU$ .

Montrer que  $\langle v_j, w \rangle = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, p$ , et en déduire que  $w = 0$ . Justifier alors l'égalité  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM)$ .

(d) En déduire que  ${}^tMM$  a même rang que  $M$ .

(e) Montrer que  ${}^tMM$  est inversible.

(f) Puisque  ${}^tMM$  est inversible, il est donc possible de considérer la matrice

$$P = M \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM$$

Montrer que  $P$  est la matrice (par rapport à la base  $\mathcal{B}$ ) de la projection orthogonale sur le sous-espace  $\mathcal{F}$  engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_p$ .

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****CONTRACTION DE TEXTE****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Jean-Marie Pelt et Gilles-Eric Séralini dont le titre est « Après nous le déluge ? » paru aux éditions Flammarion / Fayard en avril 2006. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.**

Nous sommes peu nombreux, quelques voix dispersées sur tous les continents, à dénoncer le massacre du vivant. Il est grand temps que le cercle s'élargisse. L'urgence nous dicte aujourd'hui de vous livrer notre expérience concrète de scientifiques pour que vous puissiez juger de la situation : votre situation d'êtres humains bientôt incapables de léguer à leur descendance une planète en bonne santé. Votre état de femmes et d'hommes en chute de fertilité, avec des altérations génétiques croissantes, votre état de cancéreux en puissance. Mais aussi votre statut de citoyennes et citoyens désireux d'agir sur leur vie. Une simple vie humaine, immensément belle en ce qu'elle est l'extraordinaire et intelligente manifestation des réseaux d'espèces et d'individus qui, de la bactérie au lichen, de l'insecte au mammifère, contribuent en permanence à l'émergence et à l'évolution de la vie. Une fabuleuse distribution où chaque être vivant doit sa place au rôle qu'il joue par rapport aux autres. Et à une complexité de fonctions jusqu'au cœur de la cellule. Mais une vie rare, fragile, agressée par les pollutions chimiques, génétiques, et par la disparition accélérée de milliers d'espèces. Une existence essentiellement menacée par nos modes de vie. Par notre usage du monde.

Nos sociétés, nos économies se sont développées sur l'axiome(1) d'une terre inépuisable, corvéable à merci. Dans cet esprit, l'impact de nos activités a toujours été évalué à la marge, et a toujours compté pour négligeable ; la terre en avait vu d'autres... Et la logique des systèmes en place consiste à « résoudre » le problème immédiat sans en chercher la cause initiale.

Certains nourrissent encore l'espoir, la croyance, que la science trouvera bien, un jour, une solution. Seulement, il ne s'agit plus de problèmes d'hygiène ou de microbes, que la science est parvenue *grosso modo*, à juguler, du moins dans les pays riches. Nous devons affronter une transformation radicale des milieux qui hypothèque le retour à un état sanitaire satisfaisant. Nous touchons aux rivages de l'irréversible.



Il a fallu la menace que font peser sur l'économie les cyclones, la sécheresse, les inondations et la fonte des glaciers pour que la classe politique mondiale commence à se saisir du dérèglement climatique et de la pollution atmosphérique. Mais les climatologues avaient réagi, constaté, interpellé. Par contre, alors que l'air, l'eau, la terre, se polluent toujours davantage, que notre environnement toujours chargé d'innombrables molécules suspectes devient de plus en plus pathogène, nous déplorons l'absence d'unanimité des biologistes, les scientifiques les plus près de la vie, pour alerter leurs concitoyens sur les dangers encourus.

C'est pourquoi nous unissons aujourd'hui nos voix pour partager avec le plus grand nombre notre inquiétude sur l'état de la terre et nos interrogations sur le rôle de la science tant dans le bilan des atteintes à la biodiversité (pollutions chimiques et génétiques), dans l'épuisement des ressources naturelles (eau douce, pétrole, gaz, forêts, sols arables), que dans les voies proposées pour remédier à ces désastres.

De la science, nous avons des approches et pratiques complémentaires, de la très visible observation de plantes, à l'invisible vie des cellules et des gènes. Le botaniste qu'est Jean-Marie Pelt a exploré l'Afghanistan, une partie de l'Afrique occidentale et sa Lorraine natale avant de créer l'Institut européen d'écologie à Metz. En son laboratoire universitaire de Caen, Gilles-Eric Séralini, le biologiste moléculaire, traque le rôle des pesticides dans les cancers humains et les problèmes de reproduction, après avoir affûté ses outils aux Etats-Unis et au Canada.

En fait, nous nous complétons. Nous formons à nous deux un scientifique tel que nous aimerions qu'il soit : relié aux autres questionnements scientifiques que le sien. Capable de faire ce va-et-vient nécessaire du détail à la globalité et de la globalité au détail.

Aujourd'hui dans nos universités et dans nos laboratoires de recherches, nous sommes trop rarement capables de rapporter le détail à la globalité, de lire les complémentarités à l'intérieur du biotope(2) terrestre, car nous n'avons plus, ou presque plus, les botanistes, les physiologistes, les embryologistes, les zoologistes, tous ces grands explorateurs du vivant qui asseyaient leur savoir sur leurs capacités d'observation et de description – ces qualités aujourd'hui méprisées car elles n'ont de valeur que dans le temps, alors que nous vivons dans l'instant.

Pourtant, comment connaîtrait-on la disparition des espèces sans les inventaires des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles, sans les herbiers, sans les collections des muséums ? Comment connaître la richesse d'un biotope sans la précision des relevés des voyages scientifiques ? La science est devenue pressée. Elle vit dans l'urgence et le résultat immédiat. Elle n'investit pas sur le long terme, elle finance des projets de recherche dont on définit à l'avance ce qu'il faut qu'ils trouvent. Pas question de s'embarrasser avec des considérations générales. On préfère ignorer la cohérence du monde.

Depuis environ quatre décennies les biologistes ne jurent plus que par l'infiniment petit. Oublié l'homme qui se tient au sommet des cellules assemblées, effacé le paysage dans lequel il se meut, ignorée la planète sur laquelle il niche avec plantes et animaux. Au-delà du strict sujet d'étude, le monde est gommé. Il n'est plus étudié ou presque, qu'à travers le prisme des gènes et des micro- ou nano-particules. Certains scientifiques continuent à y projeter leurs fantasmes de simplicité, du genre, un gène = une protéine = une fonction. Ne leur vient-il pas à l'esprit que l'infiniment petit, à l'instar du grand, fonctionne en système, le monde entier n'est qu'interactions et interdépendances mais, aspirés par le tunnel de l'infiniment minuscule, ces chercheurs ne voient trop souvent que ce qui est au bout de leur lorgnette, fût-elle électronique. Devenus ce que nous appelons des scientifiques réductionnistes, ils s'enfoncent dans une parcelle infinitésimale de la réalité atteinte grâce à la technique, mais aussi isolée du reste – cellule, organe, corps, biotope, monde – par un mur technique. Microscopes et ordinateurs n'ont ni rétroviseurs ni zoom arrière.

La science et sa technologie de pointe, portée par la biologie, ressemblent à ces animaux de trait<sup>(3)</sup> tout à leur labeur immédiat. Atomisée en ses objets de recherche, la pratique scientifique a rompu avec une vision cohérente du monde, s'est trouvée entraînée, et l'humanité avec, dans un divorce avec la nature et un mariage avec l'économie de marché.

N'est-ce pas tenter un procès déplacé que de vouloir instruire un tel dossier, que de conférer à la science un tel pouvoir et une telle responsabilité ? Depuis l'époque des Lumières, elle est l'outil central de l'évolution de notre société. Elle a, par ses innombrables découvertes, bouleversé les modes de vie et d'organisation de la société. Elle a changé les conceptions de notre place dans l'Univers au point de devenir au XX<sup>e</sup> siècle, une référence morale supplantant celle de la religion. Pour s'en convaincre, il n'est que de voir le nombre de scientifiques à la tête des comités d'éthique, ou les décisions de justice tranchant en faveur de tel ou tel acharnement thérapeutique. La science et les systèmes technologiques qui en découlent ont pris les commandes de nos vies.

Nous considérons que la science n'est ni bonne ni mauvaise, mais nous voulons juger l'arbre à ses fruits. Nous comptons parmi les partisans du bilan de la science et de ses applications, plutôt que de ceux qui perpétuent les incantations sur ses bienfaits et les inéluctables progrès qu'elle engendre. Sur un plateau de la balance, une augmentation considérable de l'espérance de vie occidentale, un niveau de vie confortable, atteint au XX<sup>e</sup> siècle par un quart de la population mondiale concentré dans l'hémisphère Nord, mais si peu pour les autres. Sur l'autre plateau, un état de la dégradation du monde – pollution, épuisement des ressources, dérèglements climatiques – unique dans l'histoire de l'homme, dans l'histoire de la vie, dans l'histoire de la Terre. Ce mode de vie, dont nous sommes si fiers, nous l'exportons, via la globalisation économique, avec la vision du monde qui lui est consubstantielle<sup>(4)</sup> : se libérer des entraves naturelles, s'affranchir de l'environnement, accroître sans limites la consommation. En d'autres termes, raccourcir la distance qui nous sépare du point d'irréversibilité des dommages écologiques et humains.



Nous voudrions amorcer ici une critique de la pratique scientifique, lorsqu'elle s'érige en nouvelle religion. Lorsqu'elle épaula les pouvoirs politiques et économiques. A quelle autorité morale se réfère un président de la République, un premier ministre, et tout le personnel politique, pour savoir si les OGM sont bons ou pas ? si le clonage est profitable ou pas ? l'énergie nucléaire durable ou pas ? si l'étendue de la pollution mérite une loi sur l'air, celle des nappes phréatiques une loi sur l'eau, ou pas ?

Aujourd'hui, nous vous livrons nos éléments d'analyse avec trois buts : souligner l'avancée des connaissances sur la biodiversité et les effets des pollutions ; réapprendre à penser et à vivre en dehors du dogme technoscientifique ; et que la société civile puisse débattre du contrôle et de la transparence de la science, de ses objectifs et de son utilisation. Pour marquer notre engagement envers la société, nous proposons aussi un serment éthique à l'usage des chercheurs en sciences de la vie.

Rareté cosmique, rareté géographique, mais aussi rareté temporelle de la vie pour en arriver à la civilisation humaine... L'homme a colonisé beaucoup de milieux différents, mais des endroits habitables. Si nous faisons un tant soit peu varier nos conditions climatiques ou géothermiques, la donne humaine change. Et si nous n'y prenons pas garde, nous perdrons la richesse et la beauté des conditions exceptionnelles qui sont celles de la vie terrestre.

(....) Préserver le *diamant* de la société. C'est pour nous un préalable : l'homme est au centre de notre mobilisation. La Terre n'a pas besoin de nous pour continuer son existence cosmique. Nous, nous avons besoin d'elle dans un état qui satisfasse nos aspirations. Notre économie, globalisée comme elle l'est, ne préserve ni l'homme ni la nature. Elle est toujours sur le versant sombre de la théorie darwinienne : la compétition avec son corollaire, l'élimination des plus faibles. Biologistes, nos mots-clé sont la diversité, la coordination et la complémentarité. Le développement durable, c'est d'abord respecter l'autre, le protéger. La préservation des liens sociaux, la valorisation des initiatives collectives, de l'économie sociale, l'amélioration des conditions de vie, l'égalité d'accès aux biens fondamentaux, le respect des cultures, l'éducation, la justice sont les piliers indispensables du développement durable.

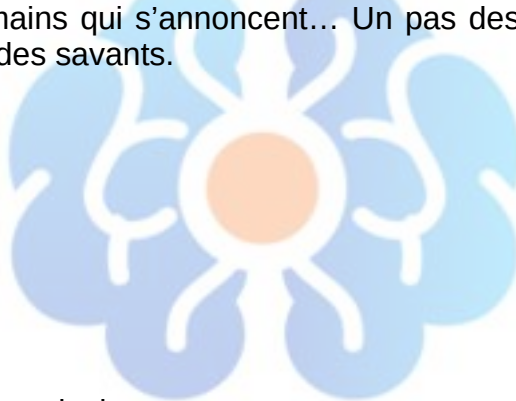
Encore faut-il s'entendre sur le mot « développement ». Nous ne l'entendons pas au sens d'une croissance continue (impossible au demeurant), d'une inflation des biens de consommation. Car personne ne doit rester sur le carreau de l'économie. Une société digne de ce nom attache un extrême souci à la personne. L'économie doit être au service de celle-ci, et non l'inverse.

(....) Les métiers changent : les informaticiens sont pléthoriques, les artisans de plus en plus rares, et les boulangers qui se lèvent encore la nuit auront bientôt disparu au profit du seul pain décongelé. Pourtant, à l'aune(5) de la durabilité de la planète, un métier n'en vaut pas un autre. Un inventeur de pesticides ne vaut pas un forestier qui restaure un massif. Un fabricant de plastique non dégradé qui laisse suinter des phtalates dans l'alimentation qu'il emballe, ne vaut pas le travail d'un agriculteur bio. Un industriel de l'armement ne vaut pas une infirmière pourtant bien moins rétribuée que lui.

La société de développement durable que nous appelons de nos vœux conduit à des reconversions professionnelles guidées par des impératifs, pas seulement économiques : l'écologie, la diversification, les échanges équitables, l'épanouissement, la moralisation des grands circuits financiers, la culture.

(....) Le respect des hommes ne peut passer que par un dialogue régulier entre science et société civile, entre scientifiques et citoyens. En toute modestie et avec l'appétit de contradictions que réclame la démocratie. Nous sommes nombreux, scientifiques ou non, à partager notre inquiétude quant à la situation. Nous craignons notamment que le corps scientifique ne révise aisément la conception de son rôle. Car un danger nous guette : l'outil de liberté et de culture que la science est devenue, pourrait devenir un outil d'asservissement. C'est pourquoi nous invitons les jeunes chercheurs en sciences de la vie à prononcer un serment éthique qui engage leur responsabilité morale, à l'instar du serment d'Hippocrate pour les médecins. Le chercheur s'engagerait ainsi à respecter l'état du monde, à mesurer l'impact de ses recherches sur l'homme et sur les écosystèmes, à transmettre son savoir.

Devenus conscients de l'état de la planète, citoyens soucieux du bien commun ces chercheuses et chercheurs passionnés par cet extraordinaire objet vivant retrouveraient la capacité de s'enchanter et de préserver la Terre pour les dix milliards d'êtres humains qui s'annoncent... Un pas des hommes vers l'homme. Et la société y gagnera des savants.



- (1) axiome : proposition – principe
- (2) biotope : lieu , étendue géographique correspondant à un groupement d'êtres vivants
- (3) animaux de trait : animaux qui tirent une voiture
- (4) consubstantiel : de la même substance
- (5) à l'aune : à la mesure

Avril 2007

**CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES  
ITS B OPTION MATHEMATIQUES**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

**Exercice 1**

1. Lorsque  $0 \leq a \leq 1$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $0 < k + a \leq k + 1$  et on en déduit

$$0 < \prod_{k=1}^n (k + a) \leq (n + 1)!$$

d'où

$$u_n \geq \frac{n!}{(n + 1)!} = \frac{1}{n + 1}.$$

On en déduit que la série  $\sum u_n \geq \sum \frac{1}{n+1}$  est divergente.

2. a) Montrons par récurrence sur  $n$  la relation, pour tout  $n \geq 2$ ,  $S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1} u_n$ .

• pour  $n = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1} u_2 &= \frac{1}{a-1} \left( 1 - \frac{2}{a+1} \right) = \frac{1}{a+1}, \\ S_1 &= u_1 = \frac{1}{a+1}. \end{aligned}$$

• supposons la relation vérifiée pour tout  $k \leq n-1$ . Alors on a

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + u_n = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1} u_n + u_n \\ &= \frac{1}{a-1} (1 - (n+a)u_n + (a-1)u_n) \\ &= \frac{1}{a-1} (1 - (n+1)u_n) \\ &= \frac{1}{a-1} \left( 1 - (n+1) \frac{(n+a+1)u_{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} u_{n+1}. \end{aligned}$$

b) La série  $\sum u_n$  est une série à termes positifs telle que la suite des sommes partielles  $(S_n)$  reste majorée par  $\frac{1}{a-1}$ . Cette série est donc convergente et on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell \leq \frac{1}{a-1}.$$

c) Supposons que  $\ell < \frac{1}{a-1}$ . Dans ce cas, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+a}{a-1} u_n = \frac{1}{a-1} - \ell = \alpha > 0$$

et  $u_n \sim \alpha$  ou  $u_n \sim \frac{(a-1)\alpha}{n}$ , ce qui entraînerait la divergence de la série  $\sum u_n$ . Ainsi, on en déduit  $\ell = \frac{1}{a-1}$ .

## Exercice 2

1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|e^{-x} \sin^{2n} x| \leq e^{-x}$ , donc  $|J_n| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt < \infty$ , ce qui entraîne que  $J_n$  existe pour tout  $n$ .

b) On a directement  $J_0 = 1$ .

2) a) Soit  $A > 0$ . Par intégration par parties on a

$$\int_0^A e^{-t} \sin^{2n} t dt = [-e^{-t} \sin^{2n} t]_0^A + 2n \int_0^A e^{-t} \sin^{2n-1} t \cos t dt,$$

d'où, en faisant tendre  $A$  vers l'infini, l'expression

$$J_n = 2n \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n-1} t \cos t dt.$$

De nouveau par intégration par parties, on obtient

$$\frac{\int_0^A e^{-t} \sin^{2n-1} t \cos t dt}{2n} = [-e^{-t} \sin^{2n-1} t \cos t]_0^A + \int_0^A e^{-t} ((2n-1) \sin^{2n-2} t \cos^2 t - \sin^{2n} t) dt$$

et donc, par passage à la limite quand  $A$  tend vers l'infini,

$$J_n = 2n((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n)$$

soit encore

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2} J_{n-1}.$$

b) On a par positivité de la fonction sous l'intégrale,  $J_n \geq 0$  pour tout  $n$ . La relation obtenue en a) montre que la suite  $(J_n)$  est décroissante. La suite est décroissante et minorée donc convergente.

3) a) On a par un simple développement limité

$$\ln \left( \frac{4k^2 - 2k}{4k^2 + 1} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1+2k}{1+4k^2} \right) \sim -\frac{1+2k}{1+4k^2} \sim -\frac{1}{2k}.$$

La série  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( \frac{4k^2 - 2k}{4k^2 + 1} \right)$  est donc de même nature que  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$  qui est divergente et de limite  $-\infty$ .

b) On a d'après 2)a) l'égalité  $\ln \left( \frac{J_k}{J_{k-1}} \right) = \ln \left( \frac{4k^2 - 2k}{4k^2 + 1} \right)$ . Donc, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{J_k}{J_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{4k^2 - 2k}{4k^2 + 1} \right).$$

On en déduit donc par sommation que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{J_k}{J_{k-1}} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln(J_k) - \sum_{k=1}^n \ln(J_{k-1}) \\ &= \ln J_n - \ln J_0 = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{4k^2 - 2k}{4k^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Cela entraîne que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln J_n = -\infty$  donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ .

4) a) Soit  $k \geq 0$ . Alors par un simple changement de variable et en utilisant la périodicité de la fonction  $\sin$ , on a

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt = \int_0^\pi e^{-u-k\pi} \sin^{2n} u du .$$

On en déduit que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^{(N+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt &= \sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt \\ &= \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^N e^{-u-k\pi} \right) \sin^{2n} u du \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - e^{-(N+1)u}}{1 - e^{-u}} e^{-u} \sin^{2n} u du \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sin^{2n} u du \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \int_0^\pi \sin^{2n} u du . \end{aligned}$$

Ceci restant vérifier pour tout  $N$ , l'inégalité en découle par passage à la limite.

b) On va montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \sin^{2n} t dt = 0$ . On a trivialement

$$\int_0^\pi \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \int_{\pi/2}^\pi \sin^{2n} t dt .$$

Le changement de variable  $u = \pi - t$  dans la seconde intégrale permet d'écrire que  $\int_0^\pi \sin^{2n} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{2n} t dt \leq \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} dt \leq \varepsilon .$$

Par ailleurs, par croissance de la fonction  $\sin$  sur  $[0, \pi/2]$ , on obtient

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^{2n} t dt \leq \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} \times \frac{\pi}{2} .$$

Comme  $0 < \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) < 1$ , il existe  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait

$$0 \leq \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} < \varepsilon .$$

Ceci entraîne que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $J_n$  tend vers 0.

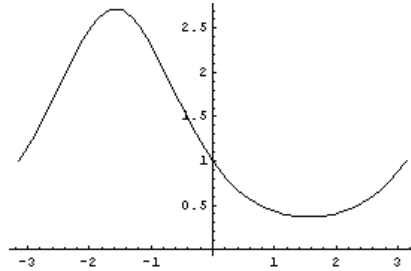
## Problème

### Première Partie

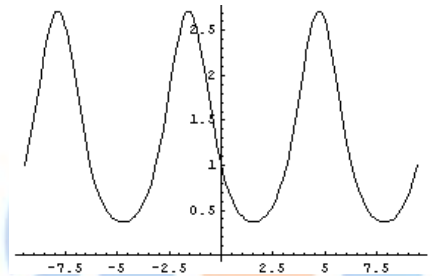
1) La fonction est clairement continue, infiniment dérivable par composition de fonctions infiniment dérivables. On a directement

$$f'(t) = -\cos(t)e^{-\sin(t)},$$

de signe inverse à  $\cos(t)$ , le tableau de variation et le tracé de la fonction s'en déduisent immédiatement



Par périodicité de la fonction  $f$  (de période  $2\pi$ ) on en déduit le tracé sur  $\mathbb{R}$  suivant



2) L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment  $[0, u]$  donne

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \sup_{[0, u]} \left| \frac{d^2 \exp(t)}{dt^2} \right|.$$

Si  $u > 0$ ,  $\sup_{[0, u]} |\exp''(t)| = e^u$ , si  $u \leq 0$ ,  $\sup_{[0, u]} |\exp''(t)| = e^0 = 1$ , et dans les deux cas on a bien :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

3) On pose

$$\Delta(h) = |\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt|.$$

Soit en ramenant tout sous la même intégrale

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \left| \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} (e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} |e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t| dt. \end{aligned}$$

En utilisant 2) on obtient donc

$$\begin{aligned}\Delta(h) &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \frac{h^2 \sin^2 t}{2} e^{|h| \sin t} dt \\ &\leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt \leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2} \varphi(x).\end{aligned}$$

4) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ , on déduit de 3)

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} -e^{-x \sin t} \sin t dt \right| \leq \frac{1}{2} |h| e^{|h|} \varphi(x).$$

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0} |h| e^{|h|} = 0$ , on en déduit que  $\varphi$  est dérivable au point  $x$ , avec

$$\varphi'(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt.$$

Pour montrer que la dérivée seconde existe on peut mener à bien le même type de calcul sur  $\varphi$  (avec Taylor-Lagrange à l'ordre 2) ou en travaillant directement sur  $\varphi'(x)$ . Le même type de calcul montre que  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin^2 t dt.$$

5) Les fonctions sous les intégrales étant positives, il est immédiat de montrer que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) < 0$  et  $\varphi''(x) > 0$ . Comme  $\varphi'$  est strictement croissante, on a, pour tout  $x < 0$ ,  $\varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$  d'où le résultat.

6) Par concavité de la fonction sinus sur  $[0, \pi/2]$ , on obtient directement  $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$  ( $\sin(t)$  est au dessus de du segment qui relie les points  $(0, 0)$  et  $(\pi/2, 1)$  de pente  $2/\pi$ ).

7) La fonction  $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ; elle s'annule donc en au plus un réel. On a de plus

$$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0 \text{ et } \delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0.$$

En effet, d'après ce qui précède

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin t} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2t/\pi} dt = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-1}) < 1.$$

Il en résulte qu'il existe un unique  $\alpha$  tel que  $\varphi(\alpha) = \alpha$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

8) D'après l'étude de la fonction  $f$  pour tout  $\varepsilon > 0$   $\sup_{x \in [\varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]} f(x) = \delta(\varepsilon) < 1$ . On en déduit que, pour  $x > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} &= \int_{\varepsilon}^{\pi/2 - \varepsilon} (e^{-\sin t})^x dt + \int_0^{\varepsilon} (e^{-\sin t})^x dt + \int_{\pi/2 - \varepsilon}^{\pi/2} (e^{-\sin t})^x dt \\ &\leq \int_{\varepsilon}^{\pi/2 - \varepsilon} \delta(\varepsilon)^x dt + \int_0^{\varepsilon} 1 dt + \int_{\pi/2 - \varepsilon}^{\pi/2} 1 dt \\ &\leq \delta(\varepsilon)^x \pi/2 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$



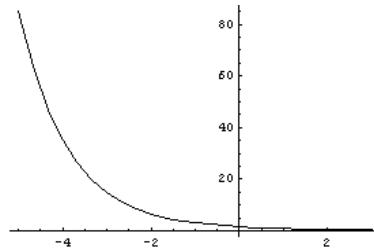
Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , le membre de droite peut être choisi arbitrairement petit et tend donc vers 0 d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Inversement on a  $\inf_{x \in [0, \pi/2]} f(x) = \eta < 1$  et on obtient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \geq \int_0^{\pi/2} \eta^x dt = \eta^x \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow -\infty,$$

d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$ . On déduit de ce qui précède le graphe de la fonction.



### Deuxième partie

9) La fonction  $t \mapsto e^{-x \sin t}$  étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration  $[0, \pi/2]$ , on a  $\varphi(x) > 0$ . Comme  $\varphi$  est strictement décroissante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \pi/2.$$

10) Si  $u_2 = \alpha$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire à partir du rang 2. La suite est même constante, puisque  $\varphi$  étant injective l'équation  $\varphi(x) = \alpha$  n'admet que la solution  $\alpha$  et donc  $u_1 = \alpha$  et  $u_0 = \alpha$ .

11) Comme  $\varphi$  est strictement décroissante, on a  $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$ , d'où  $u_3 > \alpha$ . On en déduit par récurrence simple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists a \in [\alpha, u_n] \quad n \in \mathbb{N}_+^*, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(a)(u_n - \alpha).$$

On en déduit que  $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$ , c'est à dire suite  $|u_n - \alpha|$  est strictement décroissante. On en déduit avec ce qui précède que

$$\begin{aligned} \alpha - u_{2n+2} &< \alpha - u_{2n} \\ u_{2n} &< u_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante. De plus comme  $\varphi$  est décroissante, la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît strictement. Pour tout  $x \in [u_2, u_3]$ , on a  $\varphi'(u_2) \leq \varphi'(x) < 0$  et  $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$ . Pour tout  $n \geq 2$ , on a donc :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)| \cdot |u_n - \alpha|$ . Ainsi  $\forall n \geq 2, |u_n - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|^{n-2} |u_2 - \alpha|$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

12) Si  $u_2 > \alpha$ , alors  $0 < u_1 < \alpha$  et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs et la conclusion est identique.



AVRIL 2007

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3 HEURES**

**EXERCICE N°1**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer le déterminant de la matrice  $M$  suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de  $m$  cette matrice est-elle inversible ? Calculer, dans ce cas, la matrice inverse  $M^{-1}$ .

*Correction :  $\det(M) = (2-m)(m-1)^2$  donc  $M$  est inversible si et seulement si  $m \neq 1$  et  $m \neq 2$ . Dans ce cas,*

$$M^{-1} = \frac{1}{(m-2)(m-1)^2} \begin{pmatrix} 3m-4 & 4m-5 & m^2-6m+6 \\ 2(m-1) & m^2-1 & 2(1-m) \\ m(m-2) & m-2 & 2-m \end{pmatrix}$$

2. Soient  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ . Résoudre, en utilisant le 1), le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + (m-2)z = a \\ 2x + (m-4)y - 2z = b \\ (m+2)x - 4y - 3z = c \end{cases}$$

*Correction : Le système s'écrit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .*

- si  $m \neq 1$  et  $m \neq 2$ ,  $M$  est inversible et le système admet une solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ pour tout } (a, b, c) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

- si  $m = 1$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x - 3y - 2z = b \\ x - y - z = c - b \end{cases}$$

Si  $a \neq c - b$ , il n'y a pas de solutions et si  $a = c - b$ , le système devient

$$\begin{cases} x - y - z &= c - b \\ y &= 2c - 3b \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions s'écrit  $\{(x, 2c - 3b, x - 3c + 4b), x \in \mathbb{R}\}$ .

- si  $m = 2$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y &= a \\ z &= \frac{2a-b}{2} \\ z &= \frac{4a-c}{3} \end{cases}$$

Si  $2a + 3b - 2c \neq 0$ , il n'y a pas de solutions et si  $2a + 3b - 2c = 0$ , alors l'ensemble des solutions s'écrit  $\{(x, x - a, \frac{2a-b}{2}), x \in \mathbb{R}\}$ .

3. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Notons  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) &= -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) &= (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

- (a) Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  ?

*Correction : Il s'agit de la matrice  $M$ .*

- (b) Pour quelles valeurs de  $m$ , l'application  $f$  est-elle bijective ? Donner, dans ce cas, la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  ?

*Correction :  $f$  est bijective si et seulement si  $M$  est inversible, c'est à dire, si et seulement si  $m \neq 1$  et  $m \neq 2$ . Dans ce cas, la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $M^{-1}$  calculée à la question 1.*

- (c) Pour quelles valeurs de  $m$ , les sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  de  $E$  sont-ils supplémentaires ?

*Correction : Il suffit de trouver pour quelles valeurs de  $m$   $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . Le vecteur  $X$  est dans  $\text{Ker } f$  si et seulement si ses coordonnées  $(x, y, z)$ , dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ , vérifient le système de la question 2 avec  $a = b = c = 0$ . Ainsi, si  $m \neq 1$  et  $m \neq 2$ ,  $X$  est obligatoirement le vecteur nul et dans ce cas  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . Si  $m = 1$  alors le vecteur  $X$  est de la forme  ${}^t(a \ 0 \ a)$ , où  $a \in \mathbb{R}$  et il est facile de vérifier que tous ces vecteurs là sont dans  $\text{Im } f$ , donc que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$ . Si  $m = 2$ , alors le vecteur  $X$  est de la forme  ${}^t(b \ b \ 0)$ , où  $b \in \mathbb{R}$  et il est facile de vérifier que ces vecteurs (sauf le vecteur nul) ne sont pas dans  $\text{Im } f$  et donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . En conclusion, les sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  de  $E$  sont supplémentaires si et seulement si  $m \neq 1$ .*

## EXERCICE N°2

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de  $f$  ? En particulier, préciser leur ordre de multiplicité.

*Correction :* Le polynôme caractéristique de  $f$  est  $P_X = (1-X)(2-X)(m-X)$ . Ainsi, lorsque  $m$  est différent de 1 et de 2,  $f$  admet trois valeurs propres 1, 2 et  $m$ . Lorsque  $m = 1$ , 1 est valeur propre double et 2 valeur propre simple et lorsque  $m = 2$ , 1 est valeur propre simple et 2 valeur propre double.

2. Pour quelles valeurs de  $m$  l'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ? Justifier soigneusement la réponse.

*Correction :*

- Lorsque  $m$  est différent de 1 et de 2,  $f$  admet trois valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}^3$ .
- Lorsque  $m = 1$ , 1 est valeur propre double. Cherchons la dimension de  $E_1$ , le sous-espace propre associé. Soit le vecteur  $u$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base canonique :

$$f(u) = u \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace  $E_1 = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$  est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double.  $f$  n'est donc pas diagonalisable quand  $m \neq 1$ .

- Lorsque  $m = 2$ , 2 est valeur propre double. Cherchons la dimension de  $E_2$ , le sous-espace propre associé. Soit le vecteur  $u$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base canonique :

$$f(u) = 2u \Leftrightarrow (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = x.$$

Ainsi, le sous-espace  $E_2 = \{(x, y, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  est de dimension 2 qui est bien l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2.  $f$  est donc diagonalisable quand  $m = 2$ .

En conclusion,  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $m \neq 1$ .

3. Lorsque  $m = 2$ , déterminer une base de vecteurs propres de  $f$  puis calculer  $A^k$ , pour tout entier  $k \geq 1$ .

*Correction :* à présent,  $m = 2$ . Nous cherchons une base  $(u_1, u_2, u_3)$  de vecteurs propres de  $f$  où  $u_1$  est associé à la valeur propre 1 et  $u_2$  et  $u_3$  sont associés à la valeur propre 2. Le sous-espace  $E_2$ , ayant été déterminé à la question précédente, on peut prendre  $u_2 = {}^t(0 \ 1 \ 0)$  et  $u_3 = {}^t(1 \ 0 \ 1)$ . Cherchons à présent un vecteur  $u_1$  de la forme  ${}^t(x \ y \ z)$  et vérifiant  $f(u_1) = u_1$ . Il vérifie  $x = y$  et  $z = 0$ , on peut donc prendre  $u_1 = {}^t(1 \ 1 \ 0)$ .

La matrice de passage de la base canonique à la base  $(u_1, u_2, u_3)$  est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  s'écrit alors sous la forme  $PDP^{-1}$ , où  $D = \text{diag}(1, 2, 2)$  et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $A^k = PD^kP^{-1}$ , d'où

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$



## Problème

On se place dans un espace euclidien  $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ .

*Remarque :* dans l'énoncé, des précautions sont prises pour distinguer un élément de  $\mathcal{E}$  de la matrice colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base  $\mathcal{B}$ . On pourra donc recommander aux candidats de prendre les mêmes précautions dans leur copie. On rappelle également que si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$  de matrices colonnes de coordonnées  $U$  et  $V$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors on a l'écriture  $\langle u, v \rangle = {}^tUV$ , où  ${}^tU$  est la matrice transposée de  $U$ .

1. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme  $p$  de  $\mathcal{E}$  qui est idempotent ( $p^2 = p$ ), et que la projection orthogonale sur un sous-espace  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est la projection  $p$  telle que  $\mathcal{F} = \text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$ .

- (a) Montrer que si  $p$  est une projection et que la matrice  $P$  de  $p$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est symétrique, alors  $p$  est une projection orthogonale.

*Correction :* Soit  $u \in \text{Ker}(p)$ , il suffit de montrer que  $u \perp \text{Im}(p)$ . Soit  $v \in \mathcal{E}$  et notons  $U$  et  $V$  les colonnes des coordonnées des vecteurs  $u$  et  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a

$$\langle u, p(v) \rangle = {}^tUPV = {}^tU({}^tP)V = {}^t(PU)V = \langle p(u), v \rangle = 0$$

puisque  $p(u) = 0$ .

- (b) Soit la matrice

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $P$  est la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$ , d'une projection orthogonale  $p$  sur un sous-espace  $\mathcal{F}$  dont on déterminera une base dans  $\mathcal{E}$ .

*Correction :*  $P$  est symétrique, et on vérifie que

$$P^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 30 & -6 \\ 12 & -6 & 30 \end{pmatrix} = P.$$

Il nous reste à déterminer  $\mathcal{F} = \text{Im}(p)$ . Soient  $U = {}^t(x \ y \ z)$  et  $V = {}^t(a \ b \ c)$  deux vecteurs colonnes quelconques : on a

$$\begin{aligned} PU = V &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6a \\ 2x + 5y - z = 6b \\ 2x - y + 5z = 6c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6a \\ 3y - 3z = 6(b - a) \\ -3y + 3z = 6(c - a) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6a \\ 3y - 3z = 6(b - a) \\ 0 = 6(b + c - 2a) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,  $v \in \mathcal{E}$  appartient à  $\text{Im}(p)$  si et seulement si  $b + c - 2a = 0$ , où  $(a, b, c)$  désignent les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $p$  est donc la projection orthogonale sur le plan d'équation  $y + z - 2x = 0$ , dont une base possible a comme coordonnées  $(1, 2, 0)$  et  $(1, 0, 2)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

2. Soient  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p \leq n$  de  $\mathcal{E}$ , et  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  une base de  $\mathcal{F}$ .

On note  $V_1, V_2, \dots, V_p$  les matrices colonnes  $n \times 1$  des coordonnées des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_p$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $M$  la matrice  $n \times p$  dont les colonnes sont les  $V_i$ .

On considère la matrice  ${}^tMM$  ( $p \times p$ ), dont le coefficient d'ordre  $(j, k)$  est  $\langle v_j, v_k \rangle$ .

- (a) Montrer que le sous-espace  $\mathcal{F}$  est exactement constitué des vecteurs de  $\mathcal{E}$  dont la matrice colonne des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $M\Lambda$  où  $\Lambda$  est une matrice colonne  $p \times 1$  (cette propriété sera utile à plusieurs reprises lors de la résolution de cet exercice).

*Correction : les vecteurs de  $\mathcal{F}$  sont exactement les vecteurs de la forme  $u = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j$ . En notant  $\Lambda$  la matrice colonne  ${}^t(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ , on constate que le vecteur  $u$  a comme vecteur de coordonnées  $M\Lambda$  (car la coordonnée  $k$  de  $u$  vaut  $\sum_{j=1}^p \lambda_j (v_j)_k$ , et que  $(v_j)_k$ ,  $k$ ème coordonnée de  $v_j$ , est égal à  $M_{kj}$  par construction de  $M$ , donc la somme ci-dessus vaut  $\sum_j M_{kj} \lambda_j = (M\Lambda)_k$ ).*

- (b) Justifier l'inclusion  $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}({}^tMM)$ .

*Correction : immédiat, puisque  $MU = 0$  implique  ${}^tMMU = 0$ .*

- (c) Soit  $U = {}^t(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_p)$  une matrice colonne telle que  ${}^tMMU = 0$ , et  $w$  le vecteur de  $\mathcal{E}$  défini par  $w = \sum_{k=1}^p U_k v_k$  : la matrice colonne des coordonnées de  $w$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc  $MU$ .

Montrer que  $\langle v_j, w \rangle = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, p$ , et en déduire que  $w = 0$ . Justifier alors l'égalité  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM)$ .

*Correction : comme  $w = \sum_{k=1}^p U_k v_k$ , on a  $\langle v_j, w \rangle = \sum_{k=1}^p \langle v_j, v_k \rangle U_k$ . Or par hypothèse  ${}^tMMU = 0$  donc, puisque les coordonnées de  ${}^tMM$  sont les  $\langle v_j, v_k \rangle$ , on a*

$$\sum_{k=1}^p \langle v_j, v_k \rangle U_k = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, p,$$

*d'où  $\langle v_j, w \rangle = 0$  pour tout  $j$ . En multipliant la  $j$ ème égalité par  $U_j$  et en sommant le tout en  $j$ , on obtient alors*

$$0 = \langle \sum_{j=1}^p U_j v_j, \sum_{k=1}^p U_k v_k \rangle = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

*autrement dit  $w = 0$  et par conséquent  $MU = 0$ . On a donc montré que  ${}^tMMU = 0$  impliquait  $MU = 0$ , donc que  $\text{Ker}({}^tMM) \subset \text{Ker}(M)$ , cqfd.*

- (d) En déduire que  ${}^tMM$  a même rang que  $M$ .

*Correction : on le déduit de la question précédente et du théorème du rang*

$$\text{rg}(M) + \dim(\text{Ker}(M)) = \text{rg}({}^tMM) + \dim(\text{Ker}({}^tMM)).$$

- (e) Montrer que  ${}^tMM$  est inversible.

*Correction : par hypothèse,  $M$  a pour rang  $p$ , puisque les  $v_i$  forment une base du sous-espace  $\mathcal{F}$  de dimension  $p$ , donc  ${}^tMM$ , de taille  $p \times p$ , est de rang maximum donc inversible.*



(f) Puisque  ${}^tMM$  est inversible, il est donc possible de considérer la matrice

$$P = M \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM$$

Montrer que  $P$  est la matrice (par rapport à la base  $\mathcal{B}$ ) de la projection orthogonale sur le sous-espace  $\mathcal{F}$  engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_p$ .

*Correction : on procède par étapes*

– la matrice  $P$  est symétrique, car, en utilisant plusieurs propriétés matricielles connues, on a

$${}^tP = {}^t \left( M \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM \right) = {}^t({}^tM) {}^t \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM = M \left( {}^t({}^tMM) \right)^{-1} {}^tM = P.$$

– ensuite, on a bien

$$P^2 = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM) \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM = M \left( ({}^tMM)^{-1} \right) {}^tM = P.$$

–  $P$  est donc la matrice d'une projection orthogonale  $p$ , et en notant  $\mathcal{G} = \text{Im}(p)$ , il nous faut donc montrer que

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}$$

La première inclusion est aisée : si  $u \in \mathcal{G}$ , ses coordonnées s'écrivent sous la forme  $PV$ , or  $PV = M\Lambda$  (où  $\Lambda = ({}^tMM)^{-1}({}^tM)V$ ) donc appartient à  $\mathcal{F}$  (cf question 2a).

Il nous reste donc à établir que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Soit  $u \in \mathcal{F}$ , c'est-à-dire (cf question 2a) le vecteur  $u$  a pour vecteur de coordonnées la matrice colonne  $U = M\Lambda$  où  $\Lambda$  est une matrice colonne  ${}^t(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ .

Par conséquent, puisque  $p(u)$  a comme coordonnées  $PU$ , on a

$$PU = PM\Lambda = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM)\Lambda = M\Lambda = U,$$

autrement dit  $p(u) = u$ , donc  $u \in \text{Im}(p)$  (et même plus : la projection  $p$  laisse  $\mathcal{F}$  invariant), donc  $\mathcal{F} \subset \text{Im}(p) = \mathcal{G}$ , CQFD.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2008

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

## Définitions et notations

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $I = [a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , où  $a < b$  sont deux réels. On note  $E = \mathcal{C}^0(I)$  l'ensemble des fonctions réelles continues sur  $I$ .

Pour  $f$  et  $g$  éléments de  $E$ , on pose  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ , ce qui définit sur  $E$  un produit scalaire dont la norme associée est notée  $\|\cdot\|$ , on rappelle que cette norme est définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}. \quad (1)$$

Ainsi  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé et on dit alors que  $E$  est muni d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une famille  $\mathcal{E} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2; \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

## Partie I : Les polynômes de Legendre

Dans cette partie on se place dans le cas où  $I = [-1, 1]$  et  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1])$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  définie par (1).

1. Quel que soit l'entier  $n$ , on définit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$L_n : t \longrightarrow \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n.$$

En particulier,  $L_0$  est l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  constante de valeur 1.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $L_n$  est un polynôme de degré  $n$  et préciser son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré de  $L_n$ .



- (b) Expliciter  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .
- (c) Préciser pour tout entier naturel  $n$ , la parité de  $L_n$ .
- (d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $L_n(1) = 2^n n!$  et calculer  $L_n(-1)$ . On pourra utiliser la formule de Leibniz.

2. Montrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ ,

$$\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \left( \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2 - 1)^m \right) dt ,$$

où  $\langle ., . \rangle$  est le produit scalaire défini par (1).

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|} L_n .$$

Montrer que la famille  $\mathcal{L} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$  est orthonormale.

4. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $F_n$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ . Ce sous-espace étant de dimension finie, on note  $\pi_n$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $F_n$ .

(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  et tout élément  $f$  de  $E$ ,

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle K_j \quad \text{et} \quad \|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle^2 .$$

(b) Montrer que, quelle que soit  $f$  appartenant à  $E$ , la série de terme général  $\langle f, K_n \rangle^2$  est convergente et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n \rangle^2 \leq \|f\|^2 .$$

## Partie II : Opérateurs linéaires positifs et densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$

On désigne par  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ . Un élément de  $\mathcal{L}(E)$  est aussi appelé un opérateur linéaire sur  $E$ .

On dit qu'un opérateur linéaire sur  $E$  est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à  $E$  en une fonction positive.

On note  $\mathbb{R}[x]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions polynomiales d'une variable réelle à coefficients réels et on le munit de la base  $\{Q_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$  définie par

$$(\forall k \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad Q_k(x) = x^k .$$

On considère la norme de la convergence uniforme sur  $E$  définie par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| .$$

## 5. Propriétés des opérateurs linéaires positifs

(a) Soit  $u$  un opérateur linéaire positif sur  $E$ . Montrer que

$$(\forall f \in E), \quad |u(f)| \leq u(|f|).$$

(b) Soit  $u$  un opérateur linéaire positif sur  $E$ . Montrer que  $u$  est l'endomorphisme nul si et seulement si  $u(Q_0) = 0$ .

(c) Montrer que tout opérateur linéaire positif sur  $E$  est continu.

(d) Soit  $n$  un entier strictement positif. Etant donnés  $n + 1$  points  $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  deux à deux distincts de  $I$  et  $n + 1$  fonctions  $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  de  $E$ , montrer que l'opérateur linéaire  $u_n$  défini sur  $E$  par :

$$(\forall f \in E), \quad u_n(f) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions  $u_{n,k}$  pour  $0 \leq k \leq n$ , sont positives.

(e) Pour cette question on suppose que  $I = [0, 1]$ , on se place donc dans  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ . On note  $\varphi_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(x, y) = (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^n.$$

Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , on désigne par  $B_{n,k}$  la fonction polynomiale définie par :

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

et  $B_n$  est l'opérateur linéaire positif défini par

$$\forall f \in E, \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \quad (2)$$

i. Pour tout réel  $y$  on désigne par  $f_y$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que

$$\forall x \in I, \quad B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

ii. Montrer que pour tout entier naturel  $j$  on a :

$$B_n(Q_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

iii. Exprimer  $B_n(Q_j)$  dans la base  $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$  pour  $j = 0, 1, 2$ .

## 6. Densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$

(a) Soit  $f$  un élément de  $E$ . Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2. \quad (3)$$

- (b) Pour toute fonction  $g$  appartenant à  $E$ , pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  fixé dans  $I$ , on désigne par  $g - g(x)Q_k$  la fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$t \longrightarrow g(t) - g(x)t^k.$$

Soit  $f$  appartenant à  $E$ . Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, t) \in I^2, \quad |f(t) - f(x)Q_0(t)| \leq \varepsilon Q_0(t) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (Q_2(t) - 2xQ_1(t) + x^2Q_0(t)). \quad (4)$$

- (c) Soit  $u$  un opérateur linéaire positif sur  $E$  et  $f$  une fonction appartenant à  $E$ . Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)Q_0)| \leq \varepsilon u(Q_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(Q_2) - 2xu(Q_1) + x^2u(Q_0)). \quad (5)$$

- (d) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'endomorphismes positifs de  $E$  telle que pour tout  $f$  appartenant à  $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$  la suite  $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

- i. Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(Q_2) - 2Q_1u_n(Q_1) + Q_2u_n(Q_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

- ii. Montrer que pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$ , la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)Q_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$  (On peut utiliser l'inégalité (5)).

- iii. Montrer que, pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$ , la suite  $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

- (e) Pour cette question on prend  $I = [0, 1]$  et on considère la suite d'opérateurs linéaires  $(B_n)_{n \geq 1}$  définie par (2).

Montrer que pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$ , la suite  $(B_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

- (f) Pour cette question et la question suivante  $I = [a, b]$  est un intervalle quelconque. Montrer que le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}[x]$  des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- (g) Montrer que le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}[x]$  des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  définie par (1).

AVRIL 2008

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Quelles sont les grandes orientations de la politique étrangère des Etats africains ? Vous essayerez de dégager les signes d'une volonté unitaire.

**Sujet n° 2**

Quels sont les nouveaux Centres d'impulsion économiques et les nouveaux flux (commerciaux et migratoires) apparus avec la Mondialisation ?

**Sujet n° 3**

Commentez cette phrase de l'écrivain américain Samuel Huntington dans « Le choc des Civilisations et la Refonte de l'ordre mondial » 1996 : « Il est probable que les premières années du 21<sup>e</sup> siècle voient une résurgence de la puissance et de la culture non occidentale ainsi que le choc des peuples de civilisations non occidentales avec l'Occident et entre eux ».

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2008**

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES  
VOIE B Option Mathématiques**

**DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
DURÉE : 3 HEURES**

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

**EXERCICE N°1**

On dit qu'une matrice carrée (de taille  $n$ )  $A$  est nilpotente s'il existe un entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$ .

1. Calculer  $M^p$  et  $N^p$ , pour tout entier  $p \geq 1$ , pour les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si  $A$  est nilpotente alors elle ne peut pas être inversible (*indication : on pourra utiliser  $r_0$ , le plus petit entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$* ).
3. Montrer que si  $A$  est nilpotente alors  $I - A$  est inversible et son inverse est

$$I + A + A^2 + \dots + A^r,$$

pour un entier  $r$  à préciser.

4. En utilisant les questions précédentes (sans calculer de déterminant, ni résoudre de système), montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse  $T^{-1}$ .

5. Montrer qu'une matrice nilpotente (non nulle) n'admet que 0 comme valeur propre et qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

## EXERCICE N°2

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ . Le but de cet exercice est de triangulariser cette matrice.

1. Montrer que 3 et  $-1$  sont les valeurs propres de  $A$  et déterminer les sous-espaces propres associés.
2. En déduire que  $A$  n'est pas diagonalisable.
3. Soient  $u_1, u_2$  et  $e_1$  les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement  $(1, 2, 2)$ ,  $(1, 2, 1)$  et  $(1, 0, 0)$ . Montrer que  $(u_1, u_2, e_1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Montrer que  $A$  est semblable, dans cette nouvelle base, à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## PROBLÈME

On appelle *Polynômes de Legendre* les polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (X^2 - 1)^n}{dX^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où " $\frac{d^n}{dX^n}$ " signifie dérivée  $n$ -ième.

Rappelons la *formule de Leibniz* dont on aura besoin dans les questions 3.(a), 4.(c) de la partie 1, et 2.(b) de la partie 2 :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où la notation  $f^{(n)}$  signifie dérivée  $n$ -ième de  $f$  et  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Partie 1 :

1. Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .
2. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  le degré de  $P_n$  est  $n$ .  
(b) Montrer que le coefficient  $a_n$  de  $X^n$  dans  $P_n$  vaut  $\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n n!}$ .
3. (a) En écrivant  $(X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$ , montrer que

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k.$$

- (b) En déduire que  $P_n(1) = 1$  et  $P_n(-1) = (-1)^n$ .
4. Dans la suite, la notation  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ .  
(a) Montrer que  $[(X^2 - 1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2 - 1)^n = 0$  (\*).  
(b) Montrer que  $(X^2 - 1)[(X^2 - 1)^n]' - 2nX(X^2 - 1)^n = 0$  (\*\*).  
(c) En dérivant  $(n+1)$  fois la relation (\*), montrer que

$$P'_{n+1} = X P'_n + (n+1) P_n.$$

**Partie 2 :** On appelle *Opérateur de Legendre* l'application  $L$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], L(P) = \frac{d}{dX}((X^2 - 1)P')$$

où  $\mathbb{R}_n[X]$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , à coefficients réels.

1. (a) Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
(b) Donner la matrice  $M$  de  $L$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. (a) Déterminer les valeurs propres de  $L$  et montrer que  $L$  est diagonalisable.  
(b) En dérivant  $(n + 1)$  fois la relation (\*\*), montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$L(P_n) = n(n + 1)P_n$$

et en déduire les vecteurs propres de  $L$ .

- (c) Expliquer pourquoi  $\mathbb{R}_n[X] = Vect(P_0) \oplus \dots \oplus Vect(P_n)$ , où  $Vect(P_k)$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $P_k$ . Que peut-on dire de la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  ?

**Partie 3 :** Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , on définit, pour tous  $P$  et  $Q$ , le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

et la norme euclidienne  $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ . Le but de cette partie est de montrer que les Polynômes de Legendre vérifient :

$$\langle P_i, P_j \rangle = 0 \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

et donc que la base  $(P_0, \dots, P_n)$  est orthogonale.

1. (a) Montrer que pour tous  $i$  et  $j$ ,  $\langle L(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, L(P_j) \rangle$  (indication : effectuer une intégration par parties).  
(b) En déduire que pour tous  $i \neq j$ ,  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ .
2. (a) Soient  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$  les coordonnées de  $P'_{n+1}$  dans la base  $(P_0, \dots, P_n)$ , montrer que

$$\int_{-1}^1 P'_{n+1}(t)P_n(t)dt = \beta_n \|P_n\|^2.$$

- (b) Montrer que  $\beta_n = (n + 1) \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , où  $a_n$  a été défini dans la partie 1.

3. (a) Par intégration par parties et en se servant d'un résultat de la partie 1, montrer que

$$\int_{-1}^1 (P_n(t))^2 dt = 2 - 2 \int_{-1}^1 t P'_n(t) P_n(t) dt.$$

- (b) En déduire que  $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .



AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****CONTRACTION DE TEXTE****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Ce texte est tiré du livre du Professeur Michel Lejoyeux dont le titre est « Overdose d'info. Guérir des névroses médiatiques. » paru aux éditions du Seuil en janvier 2006. Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

**Internet comme un nouveau stupéfiant**

L'Internet a changé la vie des amateurs d'actualités. Il a fait plonger dans la dépendance nombre de ceux qui se contentaient de la lecture quotidienne d'un journal imprimé. La possibilité de se connecter en permanence crée une nouvelle relation à l'information. L'Internet est bien - les patients que je rencontre me le confirment - un nouveau stupéfiant. Il est un sujet de préoccupation pour bien des parents, qui viennent me demander comment raisonner leurs enfants quand ils passent leurs journées et leurs nuits face à un écran. Il faut dire que l'Internet possède bien des charmes pour nous piéger. Nous recevons sur nos écrans de veille, qui ne s'endorment jamais, des nouvelles sans cesse renouvelées qui mobilisent notre peur et nous intriguent. Sans y avoir été préparés, nous allons devoir apprendre à consommer ces nouvelles de l'Internet. Nous savons enfin comment faire fonctionner les ordinateurs. Il ne nous reste plus qu'à savoir comment les éteindre pour profiter de la vie réelle qu'ils nous masquent parfois.

Max entretient une relation qui tient de la passion avec son Macintosh. Il lui souhaite son anniversaire et lui offre régulièrement des accessoires, comme un écran ou une carte censée le faire fonctionner plus rapidement. Le matin et le soir, il vérifie que son disque dur est bien rangé. Les amis auxquels il tient le plus, sont ceux qui partagent sa passion de l'informatique ou qui lui envoient des messages sur son ordinateur...



Sa « cyber-idylle » fait le bonheur et la fortune des vendeurs de matériel informatique. Il « gâte » sa machine préférée en lui offrant le dernier modèle de carte graphique, ou la version la plus performante des logiciels d'exploitation.

Les premiers cas de dépendance ayant sensibilisé le grand public et les professionnels, étaient des parents qui négligeaient leurs enfants au profit des news et de l'Internet. Une jeune femme élevant seule son enfant avait installé son ordinateur dans une pièce confortable et bien chauffée. Elle surveillait régulièrement l'actualité. Dans le même temps, elle « rangeait » son enfant dans un réduit sans chauffage ni lumière.

Nombre d'autres histoires sont venues confirmer les liens de dépendance que peuvent susciter l'ordinateur et l'Internet. Elles dépassent le cadre de l'anecdote et traduisent une nouvelle relation au virtuel et à l'actualité. Un cardiologue, grand consommateur d'actualités en continu me racontait comment l'ordinateur était rentré dans sa vie pour ne plus en sortir. Il avait commencé à l'utiliser pour des raisons professionnelles, puis il avait découvert à quel point ce mode de communication lui facilitait l'accès aux revues scientifiques, qu'il mettait du temps à chercher en bibliothèque avant. Il s'était ensuite abonné à des sites d'information qui le tenaient au courant des progrès de sa spécialité. En quelques mois, l'ordinateur était devenu indispensable à sa vie professionnelle. Il avait découvert qu'il pouvait présenter à des collègues les cas difficiles pour lesquels il cherchait un autre avis. Après avoir plongé dans les forums mêlant discussions et actualité, il n'a plus réussi à contrôler le temps passé devant l'écran. Il est entré dans l'addiction à petits pas. Il s'est abonné à des lettres d'information sur l'actualité de sa profession et s'est inscrit aux forums dans lesquels il pouvait commenter cette actualité, échanger des conseils et des informations.

Ce phénomène de dépendance au virtuel commence à faire l'objet de campagnes d'information en Angleterre. Aux Etats-Unis, un salarié américain sur quatre est considéré comme dépendant de l'Internet et consomme sur son lieu de travail les actualités des sites de news en ligne. Une étude qui a porté sur trois cents cinq salariés et deux cent cinquante directeurs des ressources humaines a montré que les salariés passaient plus d'une journée entière chaque semaine à surfer sur des sites qui n'ont pas de rapport avec leur activité professionnelle. Environ 23% du temps passé sur Internet concerne les sites d'information.

Une étude conduite aux Etats-Unis par la fondation Kaiser a trouvé chez les adolescents des quantités impressionnantes de temps passé devant l'ordinateur. Deux mille lycéens et étudiants ont été interrogés. Ils ont déclaré passer entre six heures et demi et huit heures et demi par jour devant un écran. Les écoliers plus jeunes passent de trente-cinq à quarante heures par semaine devant la télévision ou l'ordinateur... Autant que leurs parents au travail. Les relations amicales, la lecture et le sport sont autant d'activités sacrifiées au profit de l'intoxication médiatique.

Yang et Tung, des psychiatres, ont étudié l'usage de l'Internet chez mille sept cent huit étudiants taïwanais. Ils ont retrouvé une prévalence de 13,8% pour l'addiction à Internet. Les conséquences de cette addiction étaient, comme dans les autres cas, les effets négatifs sur la vie familiale, la scolarité, la santé. Les « addicts » à l'Internet percevaient bien que le temps passé en connexion avait une influence négative sur leur activité quotidienne, leurs performances scolaires, leurs relations avec les parents, les enseignants. Les dépendants et les non-dépendants considéraient tous que l'Internet était un moyen privilégié d'augmenter son nombre d'amis. Les étudiants ayant une personnalité caractérisée par la dépendance, la timidité, la dépression et la faible estime de soi présentaient plus de risques que les autres.

Lynda Hinkle, présidente de la Ligue féminine des violences sur Internet, raconte sa cyberdépendance : « je me suis connectée pour la première fois en 1993. J'ai allumé l'ordinateur de l'université Rutgers. Un ami m'a envoyé des messages et m'a appris à me servir des boîtes aux lettres. Après une semaine d'entraînement, je maîtrisais la technique de l'Internet. J'ai commencé à rencontrer de nouveaux correspondants. J'ai trouvé des pervers sexuels, mais aussi plein de chics types. Pour la première fois la solitaire que je suis a eu l'impression de faire partie d'une communauté. Et en même temps je suis tombée dans une sorte de dépression. Mes amis et mon médecin ont mis cette dépression sur le compte de l'Internet. Ils n'avaient pas complètement tort. En dehors du Web, plus rien ne m'intéressait vraiment. Je restais assise devant mon ordinateur près de vingt heures par jour. Je ne dormais presque plus. Je mangeais à peine. Je passais en coup de vent dans la salle de bains. Mes parents m'écrivaient des petits mots sur les murs ou sur la porte de mon bureau pour essayer d'entrer en contact avec moi. Ils voulaient me rappeler qu'ils existaient encore. Ils pensaient tous que j'avais un gros problème avec l'Internet. Moi, c'est avec la vie réelle sans écran que j'avais l'impression d'avoir des problèmes. J'ai commencé à prendre mes distances avec tout ce qui ne passait pas par un ordinateur. J'ai quitté l'université. J'ai interrompu mes études. Je n'avais plus le temps. Je restais dans ma chambre à coucher transformée en bureau virtuel. J'étais accrochée au fil qui reliait mon ordinateur à la ligne de téléphone. »

Malgré les effets de l'Internet sur sa vie, Lynda ne remet pas sa passion en cause. Elle trouve à ce média des aspects positifs. J'ai appris, dit-elle, à aimer, à parler, à confier mes sentiments les plus intimes grâce à mon ordinateur. Je fais mes courses et je communique avec mes parents éloignés. J'ai accepté pour la première fois de ma vie de confier des secrets qui me semblaient inavouables. Le seul problème, c'est que les leçons de l'Internet ne sont pas utilisables dans la vie réelle.

(...) Le psychiatre américain Donald Black ne désintoxique pas les accros du virtuel. Il a étudié en 1999 le profil typique du dépendant à l'Internet, consommateur d'actualités en ligne et de dépêches d'agence : c'est un homme de trente-deux ans ayant fait des études jusqu'à l'université, ayant un bon niveau socio-économique et qui possède un ordinateur depuis trois ans en moyenne. La plupart des addicts à l'Internet éprouvent un intérêt majeur pour le surf sur le Web, les forums de chat, les sites de news et les jeux en ligne. Ils passent en moyenne trente heures par semaine devant leur ordinateur par plaisir pendant leur temps de loisir. Ils se sentent excités, heureux et puissants quand ils sont connectés au monde entier, même si leur connexion ne leur annonce que des catastrophes. En quelques semaines ou quelques mois, l'ensemble de leur activité professionnelle passe par l'Internet. Insidieusement, ils se connectent de plus en plus longtemps, pendant les heures de bureau et le soir ou la nuit jusqu'à l'aube. Donald Black a montré que cette surconsommation d'informations virtuelles nuit à la vie réelle. Il a comparé la vie de vingt drogués du Net à celle de consommateurs plus modérés. Le résultat est sans appel. Les drogués du Net et de l'information en ligne abandonnent leurs proches. Ils connaissent les sites les plus rares mais oublient de sortir de leur bureau pour saluer leurs collègues. Les drogués du virtuel renoncent aussi aux rituels familiaux. Ils ne dînent plus avec leur famille. Ils s'inventent une nouvelle communauté d'amis, virtuelle celle-ci, avec laquelle ils communiquent par écrans interposés. Leur addiction à Internet se nourrit d'une envie de changer de vie, d'univers, de personnalité. Sans presque s'en rendre compte, ils sont entrés dans une « addiction sage », suscitée et justifiée par des motifs d'ordre professionnel, intellectuel ou scientifique.

Quand ils sont lassés des blogs et des journaux sur l'Internet, les drogués du virtuel voyagent sur la Toile. Ils n'éteignent pas leur ordinateur, mais changent de sites favoris. Ils vagabondent sur les sites de jeu. Ils trouvent là encore une illusion de socialisation qui les incite à poursuivre la connexion. Les loteries gratuites les incitent à tenter leur chance une première fois. Elles les orientent ensuite vers de véritables casinos en ligne. Damien Bonnête, président de Bingopoly explique dans un entretien au journal *Le Monde* les relations entre le virtuel et le jeu. « Nous travaillons avec des ethnologues sur le discours : maîtriser l'Internet, c'est se montrer évolué ; gagner à un jeu le prouve. L'internaute est davantage prêt à payer pour jouer que pour disposer d'un service utile. » Le journal du Net note que 51% des internautes se sont déjà connectés à un site de jeu gratuit. Ils peuvent y gagner jusqu'à dix millions d'euros. Ils passent ainsi d'un coin à l'autre de leur écran, du besoin de maîtrise au bonheur de la prise de risque.

L'Internet est aussi un grand magasin qui ne ferme jamais. Les boutiques généralistes ou spécialisées proposent à chaque heure du jour ou de la nuit de nouvelles promotions. Quand la pression des rues du commerce se relâche, les sites d'enchères en ligne prennent le relais. L'achat en ligne est, comme la consultation d'informations, une expérience passionnelle et solitaire. Toutes les conditions sont réunies pour qu'on cède à l'achat coup de tête. Nous sommes seuls. Aucun autre client, aucun vendeur maladroit ne vient troubler notre relation passionnelle à l'achat. Les vêtements, les livres ou les disques sont présentés sous leur meilleur jour. L'achat est dédramatisé. Il n'y a pas besoin de sortir d'argent de son portefeuille. Il suffit d'égrener sur le clavier les quelques chiffres de sa carte de crédit pour engager une dépense sans douleur. Et puis, plaisir ultime, le magasin virtuel ne ferme pas plus que ne dorment les sites d'information en continu. Il autorise les achats aux heures et aux jours les plus inhabituels. Un amateur de livres, collectionneur de romans policiers commandés sur des sites anglais, m'a raconté avec quel bonheur il se ruinait. Une acheteuse compulsive, fanatique d'écharpes et de chaussures, tente de restaurer l'image qu'elle a d'elle même en se couvrant de cadeaux. Les dimanches après-midi qu'elle passe seule, en proie à un sentiment d'abandon, déclenchent ses boulimies d'achats. Quand les boutiques sont closes, l'Internet est à l'écoute de son besoin de consolation.

Le plaisir de la connexion et de la consultation des sites de news ressemble aux effets de l'alcool ou de la drogue : apaisement, euphorie, excitation sont au rendez-vous. Certains analystes américains ne doutent pas de la réalité de cette nouvelle addiction. Ils proposent des sites de « soin en ligne » aux junkies de news en continu et ils appellent les entreprises et les pouvoirs publics à se mobiliser contre ce fléau nouveau.

(...) Depuis 1996, des critères diagnostiques ont été proposés. Ils indiquent que les « internetomanes », les drogués de l'information en ligne, partagent bien des symptômes : une tendance à la perte de contrôle, un temps important passé avec l'objet de leur addiction, un sentiment de manque, de malaise, ou même un vrai syndrome de sevrage quand ils sont déconnectés. Cette passion extrême provoque rapidement des effets néfastes, comparables, là encore, à ceux des autres toxicomanies. On retrouve ainsi chez les drogués du Net des difficultés familiales, professionnelles et affectives, un refus de l'existence réelle, avec ses satisfactions, ses contraintes et ses tracasseries au profit d'une vie virtuelle par écran interposé. Leur passion de l'information se double d'un attrait pour la technique. Ils parlent des performances de leur processeur comme les amateurs de voitures

annoncent le nombre de cylindres ou de chevaux de leur moteur. Ils vous racontent la manière dont ils se sont « gâtés » en s'offrant le dernier modèle d'écran à balayage ultrarapide. Ils redécouvrent le plaisir de faire des photos depuis que leur dernier téléphone portable intègre une fonction de photo numérique. Ils vous parleront aussi de leurs tri-bandes, des messages en couleurs qu'ils reçoivent, des séquences vidéo que leur envoie en continu leur opérateur. Le message ici est double. A l'intérêt pour l'actualité s'ajoute l'envie de faire partie du cercle restreint des individus « branchés » initiés aux techniques les plus nouvelles et les plus sophistiquées.

Les motivations de la dépendance au virtuel sont multiples. Elles ne sont pas les mêmes chez ceux qui visitent les sites marchands et ceux qui fréquentent les sites d'information. Quelques principes généraux émergent. Au plaisir de parcourir le monde et de connaître un sentiment d'omniscience, s'ajoutent d'autres plaisirs plus régressifs. Le psychologue américain David Greenfield suggère que la tendance à utiliser le virtuel pour se consoler du réel ou pour tenter de le maîtriser est un comportement appris dès l'enfance. L'enfant passe progressivement du scintillement de l'écran de télévision à celui de l'ordinateur. Le danger est peut-être ici moins dans les heures passées et le temps perdu que dans une altération de la réalité dont le dévoreur d'images n'est pas conscient, mais qui modifie profondément sa personnalité et ses relations aux autres. Le romancier Tonino Benacquista avait bien illustré dans son roman *Saga* cette relation passionnelle à l'écran : « je suis né devant la télévision et ce n'est pas une vue de l'esprit. La première image dont je me souviens vraiment, n'est pas le sein de ma mère, mais une chose brillante et carrée qui m'a irrésistiblement attiré. La télé, c'était ma baby-sitter, c'était mes mercredis après-midi, c'était la découverte du monde en marche sous mes petits yeux ébahis. La télé, c'était le copain avec qui on ne s'engueule jamais, celui qui aura toujours une bonne idée en tête du matin au soir. La télé, c'était une brassée de héros qui m'ont appris l'exaltation, les premiers émois, mais aussi les premiers dégoûts. »

AVRIL 2008

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

**Partie I : Les polynômes de Legendre**

1. (a)  $(t^2 - 1)^n$  est un polynôme de degré  $2n$  de coefficient dominant 1 et  $L_n$  est sa dérivée  $n^{\text{ième}}$  donc,

$$L_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2n(2n-1) \cdots (2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

(b)

$$L_0(t) = ((t^2 - 1)^0)^{(0)} = 1$$

$$L_1(t) = ((t^2 - 1)^1)^{(1)} = (t^2 - 1)' = 2t$$

$$L_2(t) = ((t^2 - 1)^2)^{(2)} = (t^4 - 2t^2 + 1)'' = 12t^2 - 4$$

$$L_3(t) = ((t^2 - 1)^3)^{(3)} = (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1)^{(3)} = 6 \times 5 \times 4t^3 - 3 \times 4 \times 3 \times 2t = 120t^3 - 72t.$$

- (c) Pour tout  $n$ ,  $(t^2 - 1)^n$  est un polynôme pair donc, pour  $k$  pair ( $k \leq 2n$ ),  $\frac{d^k}{dx^k}(t^2 - 1)^n$  est un polynôme pair, et pour  $k$  impair,  $\frac{d^k}{dx^k}(t^2 - 1)^n$  est un polynôme impair. En particulier,  $L_n$  a la même parité que  $n$ .

- (d) Démonstration par récurrence. On a  $L_0(1) = 1 = 2^0 \times 0!$ , l'assertion est vraie pour  $n = 0$ . Supposons que  $L_{n-1}(1) = 2^{n-1}(n-1)!$ . En appliquant la formule de Leibniz et en remarquant que seules les dérivées premières et secondes de  $(t^2 - 1)$  ne sont pas nulles :

$$\begin{aligned} ((t^2 - 1)(t^2 - 1)^{n-1})^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (t^2 - 1)^{(k)} ((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-k)} \\ &= (t^2 - 1)((t^2 - 1)^{n-1})^{(n)} + C_n^1 (t^2 - 1)'((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-1)} \\ &\quad + C_n^2 (t^2 - 1)''((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-2)} \\ &= (t^2 - 1)((t^2 - 1)^{n-1})^{(n)} + C_n^1 2t((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-1)} \\ &\quad + C_n^2 2((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-2)}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la caractérisation des racines multiples à l'aide des dérivées successives, 1 est racine simple de  $((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-2)}$  car 1 est racine de multiplicité



$n - 1$  de  $(t^2 - 1)^{n-1}$ . On a

$$\begin{aligned} ((t^2 - 1)(t^2 - 1)^{n-1})^{(n)}(1) &= (t^2 - 1)((t^2 - 1)^{n-1})^{(n)}(1) + C_n^1 2((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-1)}(1) \\ &\quad + C_n^2 2((t^2 - 1)^{n-1})^{(n-2)}(1) \\ &= n \times 2 \times 2^{n-1}(n-1)! + C_n^2 2 \times 0 \\ &= 2^n \times n! . \end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(1) = 2^n \times n!} .$$

D'après la parité de  $L_n$ ,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(-1) = (-2)^n \times n!} .$$

2. Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \langle L_n, L_m \rangle &= \int_{-1}^1 \left( \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \right) \left( \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m \right) dt \\ &= \left[ \left( \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \right) \left( \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m \right) \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \left( \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \right) \left( \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (t^2 - 1)^m \right) dt . \end{aligned} \quad (1)$$

En remarquant que pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $1$  et  $-1$  sont racines multiples d'ordre  $k$  de  $((t^2 - 1)^n)^{(n-k)}$ , ce qui fait que le "crochet" dans l'intégration par parties est nul et en réitérant  $n$  fois cette intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \langle L_n, L_m \rangle &= - \int_{-1}^1 \left( \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \right) \left( \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (t^2 - 1)^m \right) dt \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \left( \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2 - 1)^m \right) dt . \end{aligned} \quad (2)$$

3. Puisque par définition pour tout entier  $n$ ,  $\|K_n\| = 1$ , il suffit de montrer que la famille  $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$  est orthogonale. Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels distincts, supposons que  $n > m$ , alors  $\left( \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2 - 1)^m \right) = 0$ , car c'est la dérivée  $(n+m)$ <sup>ième</sup> d'un polynôme de degré  $2m$ , avec  $n+m > 2m$ . On en déduit que  $\langle L_n, L_m \rangle = 0$  pour tout entiers  $n \neq m$ . Ce qui prouve que la famille est orthogonale

4. (a) Considérons l'espace  $\text{Vect}(f, F_n)$ . Puisque  $\pi_n(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $F_n$ , on a

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \langle f - \pi_n(f), K_j \rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \langle f, K_j \rangle = \langle \pi_n(f), K_j \rangle .$$

Dans l'espace vectoriel euclidien  $F_n$  de base orthonormée  $(K_j)_{j \in \{0, \dots, n\}}$ , on a la décomposition

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^n \langle \pi_n(f), K_j \rangle K_j = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle K_j .$$

Toujours parce que  $(K_j)_{j \in \{0, \dots, n\}}$  est orthonormée

$$\|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle^2 .$$

(b) D'après le théorème de Pythagore,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\pi_n(f)\|^2 + \|f - \pi_n(f)\|^2 = \|f\|^2 ,$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle^2 \leq \|f\|^2 .$$

On en déduit que la série de terme général  $\langle f, K_n \rangle^2$  est convergente de somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n \rangle^2 \leq \|f\|^2$ .

## Partie II : Opérateurs linéaires positifs et densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$

### 5. Propriétés des opérateurs linéaires positifs

(a) Soit  $u$  un opérateur linéaire positif sur  $E$ . Montrons tout d'abord que l'application  $u$  est croissante pour la relation d'ordre partiel. En effet, pour tout  $f, g \in E$

$$f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow u(f - g) \geq 0 \Rightarrow u(f) - u(g) \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq u(g) .$$

Pour montrer l'inégalité annoncée, il suffit de remarquer que

$$\left( f \leq |f| \text{ et } -f \leq |f| \right) \Rightarrow \left( u(f) \leq u(|f|) \text{ et } -u(f) = u(-f) \leq u(|f|) \right) .$$

(b) Il est clair que si  $u$  est l'opérateur nul alors  $u(Q_0) = 0$ . Réciproquement, supposons que  $u(Q_0) = 0$ . Soit  $f \in E$  alors  $f$  est bornée par une constante  $C > 0$ , car elle est continue sur le compact  $I$ . On a donc  $|f| \leq C = CQ_0 \Rightarrow |u(f)| \leq u(CQ_0) = Cu(Q_0) = 0$ , donc  $u(f) = 0$ . Ce qui démontre que pour tout  $f \in E$ ,  $u(f) = 0$ .

(c) Soit  $u$  un opérateur linéaire positif non nul sur  $E$ . Soit  $f \in E$ , alors  $|f| \leq \|f\|_\infty Q_0$ , ce qui donne  $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(Q_0)$ . De même, si  $f, g \in E$ , on a

$$|u(f) - u(g)| = |u(f - g)| \leq u(|f - g|) \leq \|f - g\|_\infty u(Q_0) ,$$

Or  $u(Q_0) > 0$  car  $Q_0 > 0$ , ce qui montre la continuité de  $u$ .

- (d) Si les fonctions  $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  sont positives il est évident que l'opérateur  $u_n$  est positif. Réciproquement, supposons que l'opérateur  $u_n$  est positif. Soit  $0 \leq j \leq n$ , puisque les réels  $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$  sont distincts, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$x_{n,j} \in I_j = ]x_{n,j} - \delta, x_{n,j} + \delta[ \cap I \quad \text{et} \quad x_{n,k} \notin I_j, \quad \forall k \neq j.$$

On peut donc construire une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue telle que  $f(x_{n,j}) = 1$  et  $f(x_{n,k}) = 0, \forall k \neq j$ . On a donc pour une telle fonction  $f$ ,

$$u_n(f) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) u_{n,k} = u_{n,j}.$$

Comme  $u_n$  est positif, on en déduit que la fonction  $u_{n,j}$  est positive.

- (e) Pour cette question on suppose que  $I = [0, 1]$ , on se place donc dans  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ .

- i. Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^n f_y(k/n) B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{(k/n)y} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x e^{(y/n)})^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x + x e^{(y/n)})^n \\ &= \varphi_n(x, y). \end{aligned}$$

- ii. On a

$$B_n(Q_j)(x) = \sum_{k=0}^n (k/n)^j B_{n,k}(x).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, y) &= \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \sum_{k=0}^n e^{(ky/n)} B_{n,k}(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{d^j (e^{(ky/n)})}{dy^j} B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n (k/n)^j e^{(ky/n)} B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0) = \sum_{k=0}^n (k/n)^j B_{n,k}(x) = B_n(Q_j)(x).$$



iii. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} B_n(Q_0)(x) &= \varphi_n(x, 0) = 1, \\ B_n(Q_1)(x) &= n \frac{x}{n} (xe^{(0/n)} + 1 - x)^{n-1} = x, \\ B_n(Q_2)(x) &= \frac{n-1}{n} x^2 e^{(0/n)} (xe^{(0/n)} + 1 - x)^{n-2} \\ &\quad + \frac{1}{n} x e^{(0/n)} (xe^{(0/n)} + 1 - x)^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$B_n(Q_0) = Q_0, \quad B_n(Q_1) = Q_1 \quad \text{et} \quad B_n(Q_2) = \frac{1}{n} Q_1 + \frac{n-1}{n} Q_2.$$

## 6. Densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$ .

(a) La fonction  $f$  étant continue sur le compact  $I$ , elle est donc uniformément continue sur  $I$ . Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  défini comme ci-dessus. Soit  $(t, x) \in I^2$ . Nous allons traiter les deux cas  $|t - x| \leq \eta$  et  $|t - x| > \eta$  séparément :

- Si  $|t - x| \leq \eta$ , alors d'après l'uniforme continuité de  $f$ , on a

$$|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2.$$

- Si  $|t - x| > \eta$ , alors

$$|f(x) - f(t)| \leq 2\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty \frac{(t - s)^2}{(t - s)^2} \leq 2\|f\|_\infty \frac{(t - s)^2}{\eta^2} \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2.$$

On en déduit donc que

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2.$$

(b) C'est une conséquence du résultat de la question précédente. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  tel que

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t^2 - 2tx + x^2),$$

ce qui peut s'écrire comme

$$\forall x \in I, \quad \forall t \in I, \quad |f(t) - f(x)Q_0(t)| \leq \varepsilon Q_0(t) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (Q_2(t) - 2xQ_1(t) + x^2Q_0(t)),$$

ce qui donne le résultat demandé.

- (c) Soit  $\varepsilon > 0$ , d'après la question précédente, la positivité de  $u$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\forall x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)Q_0)| &\leq u(|f - f(x)Q_0|) \\ &\leq u\left(\varepsilon Q_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(Q_2 - 2xQ_1 + x^2Q_0)\right) \\ &\leq \varepsilon u(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(u(Q_2) - 2xu(Q_1) + x^2u(Q_0)) . \end{aligned}$$

- (d) i. Soit  $\varepsilon > 0$ , puisque pour  $0 \leq j \leq 2$ ,  $u_n(Q_j)$  converge uniformément vers  $Q_j$  sur  $I$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq n_0$ , et  $0 \leq j \leq 2$

$$\|u_n(Q_j) - Q_j\|_\infty \leq \varepsilon .$$

En remarquant que pour tout  $t \in I$ ,

$$(Q_2 - 2Q_1^2 + 2Q_2Q_0)(t) = t^2 - 2t^2 + t^2 = 0 ,$$

on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\|u_n(Q_2) - 2Q_1u_n(Q_1) + Q_2u_n(Q_0)\|_\infty \\ &= \|(u_n(Q_2) - Q_2) - 2Q_1(u_n(Q_1) - Q_1) + Q_2(u_n(Q_0) - Q_0)\|_\infty \\ &\leq \|u_n(Q_2) - Q_2\|_\infty + 2\|Q_1\|_\infty \|u_n(Q_1) - Q_1\|_\infty + \|Q_2\|_\infty \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty . \end{aligned}$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la fonction nulle sur  $I$ .

- ii. D'après l'inégalité (5), pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &= |u_n(f - f(x)Q_0)(x)| \\ &\leq \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(u_n(Q_2) - 2xu_n(Q_1) + x^2u_n(Q_0))(x) \\ &= \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}g_n(x) . \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty + \varepsilon \|Q_0\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} \|g_n\|_\infty .$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\infty = 0$ , on obtient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|Q_0\|_\infty .$$

Ce qui prouve que  $h_n$  converge vers la fonction nulle quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- iii. On a pour tout  $x \in I$

$$h_n(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(Q_0)(x),$$

donc

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(Q_0)(x) - Q_0(x)) .$$

On en déduit que

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty .$$

Puisque le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, on en conclut que  $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

- (e) Comme les opérateurs  $B_n$  sont positifs et compte tenu de ce qui précède, pour montrer que la suite  $(B_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$ , il suffit de montrer que  $(B_n(Q_j))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $Q_j$  pour  $0 \leq j \leq 2$ . Puisque  $B_n(Q_0) = Q_0$  et que  $B_n(Q_1) = Q_1$ , il reste à montrer la convergence uniforme de  $B_n(Q_2)$  vers  $Q_2$ . Or  $B_n(Q_2) = \frac{1}{n}Q_1 + \frac{n-1}{n}Q_2$  ce qui implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(Q_2) - Q_2\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|Q_1 - Q_2\|_\infty = 0 .$$

- (f) On remarque tout d'abord que sur  $[0, 1]$ , pour tout  $n \geq 1$ ,  $B_n(f)$  est un polynôme, donc de la question précédente on déduit la densité de  $\mathbb{R}[x]$  dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  pour la norme de la convergence uniforme.

Si maintenant  $I = [a, b]$ , on considère la fonction  $\tau_{a,b} : [0, 1] \rightarrow I$  définie par  $\tau_{a,b}(x) = a + (b-a)x$  qui est polynomiale et dont la réciproque est polynomiale. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ , alors  $f \circ \tau_{a,b} \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ . De la remarque précédente, on déduit alors que  $(B_n(f \circ \tau_{a,b}))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f \circ \tau_{a,b}$ , donc que  $(B_n(f \circ \tau_{a,b}) \circ \tau_{a,b}^{-1})_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$ . Par conséquent,  $\mathbb{R}[x]$  est dense dans  $\mathcal{C}^0(I)$  pour la norme de la convergence uniforme.

- (g) Montrons tout d'abord que pour tout  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$

$$\|f\| \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty ,$$

soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ , on a

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \forall t \in [a, b], \quad |f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2 .$$

Ce qui implique

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} \leq \sqrt{(b-a) \|f\|_\infty^2} = \sqrt{(b-a)} \|f\|_\infty .$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}[x]$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$ . D'après la remarque précédente on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\|p_n - f\| \leq \sqrt{b-a} \|p_n - f\|_\infty ,$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\| = 0$  et par la suite la densité de  $\mathbb{R}[x]$  dans  $\mathcal{C}^0(I)$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**  
**VOIE B Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
**DURÉE : 3 HEURES**

**EXERCICE N°1**

On dit qu'une matrice carrée (de taille  $n$ )  $A$  est nilpotente s'il existe un entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$ .

1. Calculer  $M^p$  et  $N^p$ , pour tout entier  $p \geq 1$ , pour les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Solution*

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^4 = 0, \quad M^p = 0 \text{ pour } p \geq 4.$$

et

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0, \quad N^p = 0 \text{ pour } p \geq 3.$$

2. Montrer que si  $A$  est nilpotente alors elle ne peut pas être inversible (*indication : on pourra utiliser  $r_0$ , le plus petit entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$* ).

*Solution*

Soit  $r_0$  le plus petit entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$ . Si  $A$  était inversible d'inverse  $A^{-1}$ , on aurait d'abord  $A$  non nulle, et ensuite  $A^{r_0} = 0$  donc en multipliant  $r_0 - 1$  fois  $A^{r_0}$  par  $A^{-1}$ , on trouverait  $A = 0$ , ce qui est contradictoire.

3. Montrer que si  $A$  est nilpotente alors  $I - A$  est inversible et son inverse est

$$I + A + A^2 + \dots + A^r,$$

pour un entier  $r$  à préciser.

*Solution*

Soit  $r_0$  le plus petit entier  $r > 0$  tel que  $A^r = 0$ . En remarquant que

$$(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{r_0-1}) = I - A^{r_0} = I \quad \text{et} \quad (I + A + A^2 + \dots + A^{r_0-1})(I - A) = I - A^{r_0} = I$$

on en déduit la réponse à la question, avec  $r = r_0$ .

4. En utilisant les questions précédentes (sans calculer de déterminant, ni résoudre de système), montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse  $T^{-1}$ .

*Solution*

On a  $T = I - N$  où  $N$  désigne la matrice nilpotente étudiée dans la question 1. Par conséquent, on déduit de la question précédente que  $T = I - N$  est inversible et d'inverse

$$T^{-1} = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer qu'une matrice nilpotente (non nulle) n'admet que 0 comme valeur propre et qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

*Solution*

Soit  $M$  une matrice nilpotente non nulle. Supposons que  $\lambda$  soit une valeur propre non nulle de  $M$ . Il existe alors  $u$  vecteur non nul tel que  $Mu = \lambda u$ . Si  $r$  désigne un entier  $> 0$  tel que  $M^r = 0$ , on a alors  $0 = M^r u = \lambda^r u$  donc, puisque  $\lambda \neq 0$ ,  $u$  est nul, ce qui est impossible. On a donc démontré par l'absurde qu'il ne pouvait pas exister de valeur propre non nulle pour  $M$ .

Par conséquent, 0 est l'unique valeur propre de  $M$ . Si  $M$  était diagonalisable,  $M$  serait donc nécessairement semblable à la matrice diagonale ne comportant que des 0 sur sa diagonale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}MP$  soit la matrice nulle. Ceci implique nécessairement que  $M$  est la matrice nulle, ce qui n'est pas possible par hypothèse de travail.

## EXERCICE N°2

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ . Le but de cet exercice est de triangulariser cette matrice.

1. Montrer que 3 et  $-1$  sont les valeurs propres de  $A$  et déterminer les sous-espaces propres associés.

*Solution*

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)(-2)((-5-\lambda)(7-\lambda) + 32) = -2(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\ &= -2(1+\lambda)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

donc 3 est valeur propre simple et  $-1$  est valeur propre double.

$$\begin{aligned} (A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 10y + 8z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 4z = 0 \\ -16y + 16z = 0 \\ -16y + 16z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ 2x = y \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est  $SEP_3 = \{(x, 2x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ , dont  $u_1 = (1, 2, 2)$  constitue une base.

$$(A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 6y + 8z = 0 \\ 6x - 7y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 4z = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 2z = y \end{cases}$$

donc le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$  est  $SEP_{-1} = \{(x, 2x, x); x \in \mathbb{R}\}$ , dont  $u_1 = (1, 2, 1)$  constitue une base.

2. En déduire que  $A$  n'est pas diagonalisable.

*Solution*

Comme  $-1$  est valeur propre double et que le sous-espace propre associé est seulement de dimension 1, on en déduit que  $A$  n'est pas diagonalisable.

3. Soient  $u_1, u_2$  et  $e_1$  les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement  $(1, 2, 2)$ ,  $(1, 2, 1)$  et  $(1, 0, 0)$ . Montrer que  $(u_1, u_2, e_1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

*Solution*

On trouve que  $\det(u_1, u_2, e_1) = -2 \neq 0$  donc  $(u_1, u_2, e_1)$  constitue une famille libre dans  $\mathbb{R}^3$ , ce qui en fait une base de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Montrer que  $A$  est semblable, dans cette nouvelle base, à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Solution*

On doit montrer que  $T = P^{-1}AP$  où  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On trouve

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## PROBLÈME

On appelle *Polynômes de Legendre* les polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (X^2 - 1)^n}{dX^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où “ $\frac{d^n}{dX^n}$ ” signifie dérivée  $n$ -ième.

Rappelons la *formule de Leibniz* dont on aura besoin dans les questions 3.(a), 4.(c) de la partie 1, et 2.(b) de la partie 2 :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où la notation  $f^{(n)}$  signifie dérivée  $n$ -ième de  $f$  et  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Partie 1 :

1. Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .

*Solution*

On a  $P_1 = X$  et  $P_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$ .

2. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  le degré de  $P_n$  est  $n$ .

*Solution*

Le polynôme  $(X^2 - 1)^n$  étant de degré  $2n$ , son polynôme dérivé- $n^{\text{ème}}$  est de degré  $n$ , ce qui est donc le cas de  $P_n$ .

- (b) Montrer que le coefficient  $a_n$  de  $X^n$  dans  $P_n$  vaut  $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$ .

*Solution*

Comme le polynôme  $(X^2 - 1)^n$  est de degré  $2n$  et de la forme  $X^{2n} + Q$  où  $Q$  est un polynôme de degré  $2n - 1$ , son coefficient de degré  $2n$  est donc égal à 1, et par conséquent le coefficient de degré  $n$  de sa dérivée  $n^{\text{ème}}$  est égal à  $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)$ . Le coefficient de degré  $n$  de  $P_n$  est donc égal à  $\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$ .

3. (a) En écrivant  $(X^2 - 1)^n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ , montrer que

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k.$$

*Solution*

Il s'agit d'appliquer la formule de Leibniz à  $f = (X - 1)^n$  et  $g = (X + 1)^n$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k (X - 1)^n}{dX^k} \frac{d^{n-k} (X + 1)^n}{dX^{n-k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left( (n)(n-1)\cdots(n-k+1)(X - 1)^{n-k} \right) \times \\ &\quad \left( (n)(n-1)\cdots(k+1)(X + 1)^k \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left( (n!/(n-k)!)(X - 1)^{n-k} \right) \left( (n!/k!)(X + 1)^k \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k. \end{aligned}$$



- (b) En déduire que  $P_n(1) = 1$  et  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

*Solution*

Dans l'expression de  $P_n$  établie à la question précédente, en prenant l'indéterminée égale à 1 le seul terme de la somme qui n'est pas nul en raison du facteur  $(X-1)^{n-k}$  est celui pour lequel  $k = n$ , donc

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n} (C_n^n)^2 (1+1)^n = 1$$

En suivant le même raisonnement, on aboutit à

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n} (C_n^0)^2 (-1-1)^n = (-1)^n.$$

4. Dans la suite, la notation  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ .

- (a) Montrer que  $[(X^2 - 1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2 - 1)^n = 0$  (\*).

*Solution*

C'est évident, puisque la dérivée de  $(X^2 - 1)^{n+1}$  vaut  $(n+1)(2X)(X^2 - 1)^n$ .

- (b) Montrer que  $(X^2 - 1)[(X^2 - 1)^n]' - 2nX(X^2 - 1)^n = 0$  (\*\*).

*Solution*

Idem, puisque la dérivée de  $(X^2 - 1)^n$  vaut  $n(2X)(X^2 - 1)^{n-1}$ , il suffit alors de multiplier par  $(X^2 - 1)$ .

- (c) En dérivant  $(n+1)$  fois la relation (\*), montrer que

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n.$$

*Solution*

On part de

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}} \{[(X^2 - 1)^{n+1}]\}' = 2(n+1) \frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}} (X(X^2 - 1)^n)$$

ce qui donne, en appliquant la formule de Leibniz à  $X$  et  $(X^2 - 1)^n$ , et en remarquant que dans la somme qui en découle, il n'y a que 2 termes non nuls (dû au fait que  $X^{(0)} = X$ ,  $X' = 1$  et  $X^{(k)} = 0$  pour tout  $k \geq 2$ ),

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1} &= 2(n+1) \left[ \frac{d^n}{dX^n} (X(X^2 - 1)^n) \right]' \\ &= 2(n+1) \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(k)} ((X^2 - 1)^n)^{(n-k)} \right]' \\ &= 2(n+1) \left[ C_n^0 X \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n + C_n^1 \frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}} (X^2 - 1)^n \right]' \\ &= 2(n+1) [2^n(n!)XP'_n]' + 2(n+1) \times n2^n(n!)P_n \\ &= 2^{n+1}(n+1)!(P_n + XP'_n) + n2^{n+1}(n+1)!P_n \end{aligned}$$

$$d'où P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n.$$

**Partie 2 :** On appelle *Opérateur de Legendre* l'application  $L$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], L(P) = \frac{d}{dX} ((X^2 - 1)P').$$

où  $\mathbb{R}_n[X]$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , à coefficients réels.



1. (a) Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

*Solution*

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Comme le degré de  $P$  est  $\leq n$ , celui de  $(X^2 - 1)P'$  est inférieur ou égal à  $n + 1$ , donc celui de  $L(P)$  est  $\leq n$ . Ainsi  $L$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Il suffit alors de démontrer la propriété de linéarité. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= \frac{d}{dX} [(X^2 - 1)(\lambda P' + Q')] \\ &= \lambda \frac{d}{dX} [(X^2 - 1)P'] + \frac{d}{dX} [(X^2 - 1)Q'] \\ &= \lambda L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

- (b) Donner la matrice  $M$  de  $L$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

*Solution*

On doit déterminer les images par  $L$  des polynômes  $1, X, X^2, \dots, X^n$ . On a  $L(1) = 0$ ,  $L(X) = 2X$ ,

$$L(X^k) = [(X^2 - 1)kX^{k-1}]' = k(X^{k+1} - X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

et ce, pour tout entier  $k$  compris entre 2 et  $n$ . La matrice  $M$  de l'endomorphisme  $L$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 12 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & -n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n(n+1) \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de  $L$  et montrer que  $L$  est diagonalisable.

*Solution*

On vient de déterminer la matrice  $M$  de l'endomorphisme  $L$ , qui se trouve être triangulaire, donc on en déduit les valeurs propres de  $L$ , qui sont  $0, 2, 6, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)$ . Elles sont au nombre de  $n+1$  et toutes distinctes donc elles sont toutes simples et par conséquent  $L$  est diagonalisable.

- (b) En dérivant  $(n+1)$  fois la relation (\*\*), montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$L(P_n) = n(n+1)P_n$$

et en déduire les vecteurs propres de  $L$ .

*Solution*

On a d'abord

$$L(P_n) = [(X^2 - 1)P_n']' = 2XP_n' + (X^2 - 1)P_n''.$$

Dérivons maintenant  $n+1$  fois le premier membre de la relation (\*\*):

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}} ((X^2 - 1)[(X^2 - 1)^n]') - 2n \frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}} (X(X^2 - 1)^n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2 - 1)^{(k)} [(X^2 - 1)^n]^{(n+2-k)} - 2n \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} [(X^2 - 1)^n]^{(n+1-k)} \\
 &= C_{n+1}^0 (X^2 - 1) [(X^2 - 1)^n]^{(n+2)} + C_{n+1}^1 (2X) [(X^2 - 1)^n]^{(n+1)} + C_{n+1}^2 (2) [(X^2 - 1)^n]^{(n)} \\
 &\quad - 2nC_{n+1}^0 (X) [(X^2 - 1)^n]^{(n+1)} - 2nC_{n+1}^1 [(X^2 - 1)^n]^{(n)} \\
 &= (X^2 - 1) \left[ \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n \right]'' + 2(n+1)X \left[ \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n \right]' + n(n+1) \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n \\
 &\quad - 2nX \left[ \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n \right]' - 2n(n+1) \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n \\
 &= (2^n(n!)) \times ((X^2 - 1)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n - 2nXP_n' - 2n(n+1)P_n) \\
 &= (2^n(n!)) \times ((X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' - n(n+1)P_n) \\
 &= (2^n(n!)) \times (L(P_n) - n(n+1)P_n)
 \end{aligned}$$

Comme cette expression est nulle, on obtient bien  $L(P_k) = k(k+1)P_k$  et ce, pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$  :  $P_k$  est donc vecteur propre de l'endomorphisme  $L$  associé à la valeur propre  $k(k+1)$ .

- (c) Expliquer pourquoi  $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(P_0) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(P_n)$ , où  $\text{Vect}(P_k)$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $P_k$ . Que peut-on dire de la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  ?

*Solution*

On vient d'établir que les sous-espaces  $\text{Vect}(P_0), \dots, \text{Vect}(P_n)$  sont les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $L$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme on a montré que  $L$  était diagonalisable, on sait alors que ces sous-espaces sont en somme directe et que  $\mathbb{R}_n[X]$  est égal à cette somme directe  $\text{Vect}(P_0) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(P_n)$ . La famille des  $(n+1)$  vecteurs  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  forme donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Partie 3 :** Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , on définit, pour tous  $P$  et  $Q$ , le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

et la norme euclidienne  $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ . Le but de cette partie est de montrer que les Polynômes de Legendre vérifient :

$$\langle P_i, P_j \rangle = 0 \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

et donc que la base  $(P_0, \dots, P_n)$  est orthogonale.

1. (a) Montrer que pour tous  $i$  et  $j$ ,  $\langle L(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, L(P_j) \rangle$  (indication : effectuer une intégration par parties).

*Solution*

On a

$$\begin{aligned}
 \langle L(P_i), P_j \rangle &= \int_{-1}^1 L(P_i)(t)P_j(t)dt \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dt}[(t^2 - 1)P_i'(t)] \cdot P_j(t)dt \\
 &= \left[ (t^2 - 1)P_i'(t)P_j(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P_i'(t)P_j'(t)dt \\
 &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P_j'(t)P_i'(t)dt \\
 &= \langle L(P_j), P_i \rangle = \langle P_i, L(P_j) \rangle
 \end{aligned}$$

- (b) En déduire que pour tous  $i \neq j$ ,  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ .

*Solution*

Soit  $i \neq j$ . Puisque  $L(P_i) = i(i+1)P_i$  et  $L(P_j) = j(j+1)P_j$ , le résultat précédent implique que

$$\langle i(i+1)P_i, P_j \rangle = \langle P_i, j(j+1)P_j \rangle \quad \text{donc} \quad i(i+1) \langle P_i, P_j \rangle = j(j+1) \langle P_i, P_j \rangle = 0$$

or  $i \neq j$  donc nécessairement  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ .

2. (a) Soient  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$  les coordonnées de  $P'_{n+1}$  dans la base  $(P_0, \dots, P_n)$ , montrer que

$$\int_{-1}^1 P'_{n+1}(t)P_n(t)dt = \beta_n \|P_n\|^2.$$

*Solution*

On a  $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^n \beta_k P_k$  donc, en vertu du résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P'_{n+1}(t)P_n(t)dt &= \langle P'_{n+1}, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n \beta_k P_k, P_n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \beta_k \langle P_k, P_n \rangle = \beta_n \langle P_n, P_n \rangle = \beta_n \|P_n\|^2 \end{aligned}$$

- (b) Montrer que  $\beta_n = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , où  $a_n$  a été défini dans la partie 1.

*Solution*

Comme  $a_{n+1}$  est le coefficient de degré  $n+1$  de  $P_{n+1}$ , le coefficient de degré  $n$  de  $P'_{n+1}$  est  $(n+1)a_{n+1}$ . Or, par définition des  $\beta_k$  et de  $a_n$ , on sait que le coefficient de degré  $n$  de  $P'_{n+1} = \beta_0 P_0 + \dots + \beta_n P_n$  est égal à  $\beta_n a_n$ , puisque  $P_n$  est le seul des  $P_k$  à avoir un coefficient de degré  $n$  non-nul. D'où  $\beta_n a_n = (n+1)a_{n+1}$ , cqfd.

3. (a) Par intégration par parties et en se servant d'un résultat de la partie 1, montrer que

$$\int_{-1}^1 (P_n(t))^2 dt = 2 - 2 \int_{-1}^1 t P'_n(t) P_n(t) dt.$$

*Solution*

On a, puisque  $P_n(1) = 1$  et  $P_n(-1) = (-1)^n$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (P_n(t))^2 dt &= \left[ t(P_n(t))^2 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t \cdot 2P'_n(t) P_n(t) dt \\ &= 2 - 2 \int_{-1}^1 t P'_n(t) P_n(t) dt \end{aligned}$$

- (b) En déduire que  $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .

*Solution*

Il faut utiliser plusieurs des résultats démontrés précédemment. En partant de l'équation de la question 2a), et en utilisant le fait que

$$tP'_n(t) = P'_{n+1}(t) - (n+1)P_n(t)$$

(question 4 de la partie 1), on a

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= 2 - 2 \int_{-1}^1 P'_{n+1}(t)P_n(t)dt + 2(n+1) \int_{-1}^1 (P_n(t))^2 dt \\ &= 2 - 2\beta_n \|P_n\|^2 + 2(n+1) \|P_n\|^2 \end{aligned}$$

donc  $(1 + 2\beta_n - 2(n+1))\|P_n\|^2 = 2$ . Or

$$\beta_n = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \frac{(2n+2)(2n+1)(2n) \dots (n+2)}{(2n) \dots (n+2)(n+1)} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 2n+1$$

$$\text{d'où } 2 = (1 + 2(2n+1) - 2(n+1))\|P_n\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

2009

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

## 1 Exercice :

On considère une fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , continue, réelle, décroissante, strictement positive.

1. On suppose que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$  est convergente.
  - (a) Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$  est convergente pour tout  $h > 0$ .
  - (b) Déterminer la limite de sa somme lorsque  $h$  tend vers 0.
2. On suppose seulement que  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . On désigne par  $E(x)$  la partie entière d'un réel  $x$  et on pose :

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ \sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

$$c_k = \int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k), \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \varphi(t) dt + C, \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

- (a) Démontrer que  $C$  existe effectivement.
- (b) Montrer que  $|\psi(x)| \leq |\varphi(x)|$ , pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

*Indication : on pourra distinguer deux cas selon que  $x < 1$  ou  $x \geq 1$ .*

## 2 Problème :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

On considère la série de fonctions  $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n\right)$ .

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série de fonctions, c'est-à-dire l'ensemble

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

2. Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , dont la valeur en chaque réel  $x$  est donnée par la somme de la série de terme général  $u_n(x)$ . Cette fonction  $F$  est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

- (a) Soit  $r > 0$  un réel strictement positif, montrer que la série dérivée de terme général  $u'_n(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}$  est normalement convergente sur  $[-r, r]$ .
  - (b) Montrer que  $F$  est deux fois dérivable en tout point  $x \in \mathbb{R}$  et exprimer en tout point  $x \in \mathbb{R}$ , les dérivées  $F'(x)$  et  $F''(x)$  en sommes de séries.
  - (c) Étudier la convexité du graphe de  $F$ .
3. Soient  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites réelles définies par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n ; \quad w_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} 4^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

avec  $0! = 1$ .

On désigne par  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- (b) Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

puis une majoration, sur la demi-droite fermée  $[0, \infty[$ , de la fonction  $F$  à l'aide de fonction  $x \mapsto \text{ch}(2x)$ .

- (c) Démontrer de même une minoration, sur la demi-droite ouverte  $]0, \infty[$ , de la fonction  $F$  à l'aide de fonction  $x \mapsto \frac{\text{sh}(2x)}{2x}$ .
- (d) Pour tout réel  $x$  strictement positif, soient  $G(x)$  et  $\Phi(x)$  deux fonctions définies par

$$G(x) = \sqrt{\text{ch}(2x) \frac{\text{sh}(2x)}{2x}}, \quad \Phi(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}, \quad x \in ]0, \infty[.$$

Comparer les deux fonctions  $G$  et  $\Phi$  à l'infini.

4. Le but de cette partie est de calculer les transformées de Laplace des fonctions  $F$  et  $\Phi$ .

Étant donnée une fonction  $f : t \mapsto f(t)$  définie, continue sur la demi-droite ouverte  $]0, \infty[$  et intégrable sur tout intervalle semi-ouvert  $]0, a]$ , ( $a$  est un réel positif quelconque), la transformée de Laplace de  $f$  notée  $L(f)$ , si elle existe, est définie par la relation suivante:

$$L(f)(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt.$$

- (a) Soit  $x \in ]0, \infty[$  un réel strictement positif ; calculer pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $I_k$  suivante :

$$I_k = \int_0^\infty t^k e^{-xt} dt.$$

- (b) Démontrer que la fonction  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[0, \infty[$  dès que le réel  $x$  est strictement supérieur à 2. Déterminer la fonction  $L(F)$  en calculant  $L(F)(x)$  au moyen de la somme d'une série.
- (c) Soit  $g$  la somme d'une série entière définie par la relation suivante :

$$g(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}.$$

Déterminer l'intervalle ouvert  $] -R, R[$  de définition de la fonction  $g$ . Déterminer au moyen de fonctions élémentaires l'expression de  $g(t)$  en utilisant par exemple le développement en série de la fonction  $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$ .

- (d) En déduire l'expression, pour tout réel  $x$  supérieur strictement à 2, de la transformée de Laplace de la fonction  $F$ .
- (e) Déterminer, en précisant son ensemble de définition, la transformée de Laplace de la fonction  $\Phi$ .

On admettra que  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

AVRIL 2009

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

En quoi certains pays africains peuvent-ils constituer un effet d'entraînement pour tout le continent africain ? Vous prendrez des exemples comme l'Afrique du Sud ou d'autres pays de votre choix.

**Sujet n° 2**

Que vous inspire l'élection de Barack Obama comme Président des Etats-Unis ?

**Sujet n° 3**

Quels sont les aspects de la crise financière et économique mondiale actuelle qui vous ont le plus frappé ?



AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

**Exercice n° 1**

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $M^2$  et exprimer  $M^2$  en fonction de  $M$  et  $I$ ,  $I$  étant la matrice identité.
2. Trouver un polynôme  $P$  du second degré tel que  $P(M) = 0$ .
3. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses valeurs propres.
4. Calculer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P(X)$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > 2$ .
5. En déduire  $M^n$ .

6. Soit, pour  $n > 0$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $U_{n+1} = MU_n$  de condition initiale  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



**Exercice n° 2**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel normé de dimension finie  $n$  ( $n \geq 1$ ). On note  $L(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ . Pour  $f \in L(E)$ , on pose :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme de  $E$ .

1. Vérifier que la notation précédente permet de définir une norme sur  $E$ .

2. Soient  $P$  et  $Q$  deux projections définies sur  $E$  et telles que  $\|P - Q\| < 1$ .

Montrer que  $I - (P - Q)$  est inversible.

Montrer que l'application  $P$  est une bijection de  $\text{Im}(Q)$  sur  $\text{Im}(P)$  ( $\text{Im}$  désigne l'image).

En déduire que  $\dim \text{Im}(P) = \dim \text{Im}(Q)$ .

**Exercice n° 3**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels,  $n \in \mathbb{N}$ . A cette suite, on associe deux autres suites  $(s_n)$  et  $(r_n)$  définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$$

1. Montrer que  $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$  pour tout entier  $n \geq 2$

2. On suppose que la série de terme général  $\frac{s_n}{n(n+1)}$  converge et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$$

Montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

3. On suppose que la série de terme général  $u_n$  converge, montrer alors que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  est aussi convergente.

4. On pose  $u_n = (-1)^n$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

5. Donner un exemple de suite  $(s_n)$  telle que la série de terme général  $\frac{s_n}{n(n+1)}$  converge, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} \neq 0$ .

#### Exercice n° 4

Soit  $f$  l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par  $\mathbb{R}$ ) par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est impaire et continue.
2. Montrer que la dérivée  $f'$  garde un signe constant sur  $\mathbb{R}$ . On pourra étudier la fonction  $u$  qui, à tout  $t$  réel positif, associe :  $u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$ . En déduire l'existence d'une application réciproque de  $f$ , impaire.
3. Justifier l'existence d'un développement limité de  $f$  en 0 à tout ordre  $n$ .
4. Ecrire un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 5 ; donner également un développement limité de  $f^{-1}$  en 0 à l'ordre 5.

#### Problème

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel réel  $E$  vérifiant  $f \circ f = \lambda f$ , où  $\lambda$  est un réel non nul.

On note  $L_\lambda = \{f \mid f \circ f = \lambda f\}$ .

1. Montrer que toute fonction de  $L_\lambda$  est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport  $\lambda$ .
2. Montrer que pour toute fonction  $f$  de  $L_\lambda$ , le noyau de  $f$  et l'image de  $f$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ .

3. Soient  $f, g \in L_\lambda$ . Montrer que  $(f + g) \in L_\lambda$  si et seulement si  $f \circ g = g \circ f = 0$ .

4. Soient  $f \in L_{\lambda_1}$  et  $g \in L_{\lambda_2}$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $g \circ f \in L_\mu$ , où  $\mu$  dépend de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

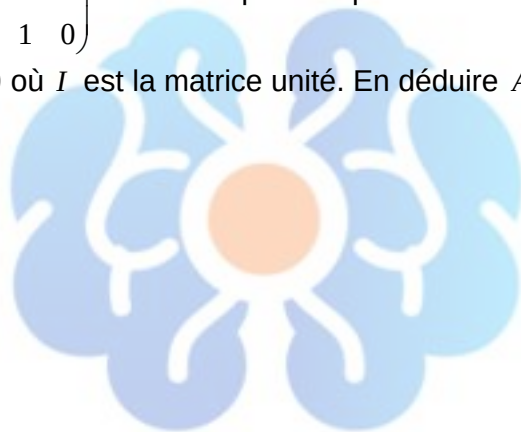
5. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  n'appartenant pas à une famille de  $L_\lambda$  et vérifiant  $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts et  $Id$  désigne l'application identique.

Montrer que  $v = u - a \times Id$  et  $w = u - b \times Id$  appartiennent à des familles de  $L_\lambda$ .

Ecrire  $u$  sous la forme  $\alpha v + \beta w$  et en déduire  $u^n$ .

6. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que l'on peut trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels

que  $(A - aI)(A - bI) = 0$  où  $I$  est la matrice unité. En déduire  $A^n$ .



AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****CONTRACTION DE TEXTE****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

*Ce texte est tiré du livre de Mihaly Csikszentmihalyi dont le titre est « Mieux vivre en maîtrisant votre énergie psychique » paru aux éditions Réponses chez Robert Laffont en février 2005. Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.*

*Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.*

  
**Bienfaits et risques des loisirs**

Il semble un peu ridicule d'affirmer que le temps libre constitue un problème parce que nous n'avons pas appris à l'employer intelligemment. C'est pourtant une inquiétude fréquemment exprimée depuis le milieu du XXe siècle. Pour diverses raisons, nous en sommes arrivés à dire que le temps libre était l'une des aspirations les plus fortement ancrées dans l'homme. Le travail apparaît comme un mal nécessaire et l'absence de toute activité comme la voie royale vers le bonheur. On pense généralement que profiter de son temps libre ne nécessite aucun savoir-faire, que tout le monde en est capable.

Or les faits prouvent le contraire : il est plus difficile de bien profiter de ses loisirs que de son travail. En soi, le temps libre ne rend pas la vie plus belle, à moins que l'on ne sache en tirer parti, et cela ne s'apprend pas tout seul.

A la fin du XIXe siècle, le psychanalyste hongrois Sándor Ferenczi remarquait déjà que le dimanche, ses patients avaient des crises d'hystérie et de dépression plus nombreuses que les autres jours de la semaine. Il a appelé ce syndrome « névrose dominicale ». Depuis, on a constaté que les troubles mentaux se manifestent plus fréquemment pendant les vacances et les jours fériés. La retraite pour ceux qui se sont fortement identifiés à leur travail annonce souvent une période de dépression chronique.

Nos propres recherches avec la méthode ESM (1), nous ont permis de constater que même la santé physique s'améliore dès que la personne est tendue vers un but. Pendant les week-ends, la solitude et le désœuvrement révèlent plus de symptômes qu'à l'ordinaire.

Tous ces éléments tendent à prouver que l'individu moyen est mal équipé pour l'oisiveté. Sans but, sans la présence de ses semblables, il perd motivation et concentration. Son esprit s'évade et la plupart du temps, il finit par ruminer des problèmes insolubles, facteurs d'anxiété. Afin d'éviter d'en arriver là, la plupart des gens recourent à des stimulations qui limitent l'entropie psychique (2). Sans en être nécessairement conscients, ils recherchent tout ce qui est susceptible de faire barrage à l'anxiété : regarder la télévision, s'adonner au jeu, multiplier les rencontres sexuelles, se saouler ou se droguer. Ce type de stratégies qui apaise rapidement le chaos de la conscience, ne laisse la plupart du temps qu'un vague sentiment d'insatisfaction.

De toute évidence, l'évolution de notre système nerveux l'a rendu capable de répondre aux signaux extérieurs, mais n'est pas allée jusqu'à l'adapter à de longs intervalles de temps dénués d'obstacles ou de dangers.

Au cours de l'Histoire, peu de gens ont appris à structurer leur énergie psychique par eux-mêmes, de l'intérieur. Dans ces bienheureuses sociétés où les hommes avaient beaucoup de temps libre, des pratiques culturelles élaborées étaient mises en place pour occuper l'esprit. Cycles complexes de rituels, cérémonies, danses et tournois pouvaient durer plusieurs jours ou plusieurs semaines – les Jeux Olympiques, notamment, qui commencèrent à l'aube de notre Histoire. Et si tous les villages n'offraient pas des activités religieuses ou artistiques, ils permettaient au moins de se livrer à de longues et joyeuses palabres ; assis sous le plus bel arbre de la place du village, les hommes qui n'avaient rien d'autre à faire fumaient la pipe, mâchonnaient des feuilles ou des fruits légèrement hallucinogènes tout en discutant de sujets divers.

.../... Ces méthodes permettent effectivement de limiter le chaos dans la conscience, mais jusqu'à un certain point seulement, mais elles contribuent rarement à améliorer la qualité de l'expérience vécue. Comme nous l'avons vu plus haut, les êtres humains se sentent mieux lorsqu'ils s'appliquent à relever un défi, résoudre un problème ou découvrir quelque chose de nouveau.

La plupart des activités qui produisent le flux (3) se définissent par un but clair, des règles précises et une rétroaction immédiate – données extérieures qui concentrent l'attention et font appel au savoir-faire.

Or, dans le domaine des loisirs, ces conditions sont justement celles qui manquent le plus souvent. Certes, les gens qui s'adonnent à un sport, à une activité artistique ou à un violon d'Ingres y retrouvent les éléments indispensables au flux. Mais la simple situation de liberté, quand rien de particulier ne sollicite l'attention, provoque le contraire de l'expérience optimale : l'entropie psychique qui procure un sentiment d'indifférence et d'apathie.

Toutes les activités de loisirs ne se ressemblent pas. On peut déjà établir une différence entre les loisirs actifs et les loisirs passifs dont les effets psychologiques ne sont pas les mêmes. Les adolescents américains par exemple, ont des expériences-flux (définies comme des défis importants requérant un savoir-faire maximal) environ 13% du temps où ils regardent la télévision, 34% du temps où ils font quelque chose qu'ils aiment et 44% du temps où ils jouent ou font du sport.

Cela suggère que les violons d'Ingres ont deux fois et demie plus de chance de provoquer un état de plaisir intense que la télévision, les jeux et les sports à peu près trois fois plus. Pourtant, ces mêmes adolescents passent au moins quatre fois plus de temps à regarder la télévision qu'à se livrer à leur activité favorite. Et la proportion est la même chez les adultes.

Pourquoi passons-nous quatre fois plus de temps à faire quelque chose qui a deux fois moins de chances de nous donner du plaisir ?

Quand nous posons la question aux participants à nos études, une explication cohérente commence à se dessiner. L'adolescent type admet qu'il est plus heureux en faisant de la bicyclette, une partie de basket-ball ou en jouant du piano qu'en traînant avec ses copains ou en regardant la télévision.

Mais, organiser une partie de basket demande du temps – il faut se changer, réunir l'équipe. Avant d'éprouver du plaisir en jouant du piano, il faut faire au moins une demi-heure d'exercices ennuyeux. Autrement dit, chacune des activités productrices de flux nécessite un investissement de départ avant d'être gratifiante. Il faut commencer par s'échauffer avant de goûter au plaisir d'une activité complexe. Quand on se sent trop fatigué, anxieux ou paresseux pour franchir l'obstacle préliminaire, il faut se contenter d'activités moins agréables mais plus accessibles.

C'est là qu'interviennent les activités de loisirs passifs. Traîner avec des copains, lire un livre facile ou allumer un téléviseur n'implique pas une dépense d'énergie préalable importante et n'exige ni savoir-faire ni concentration. C'est pourquoi la consommation de loisirs passifs devient trop souvent l'option principale des adolescents, mais également des adultes.

Il apparaît dans nos études que les loisirs actifs ou sociaux – sports et jeux, violons d'Ingres, fréquentation des amis – procurent plus d'expériences-flux que les activités solitaires et moins structurées – réfléchir, écouter de la musique, regarder la télévision.

On constate également que les activités productrices de flux, plus difficiles, plus exigeantes, déclenchent parfois l'anxiété, alors que les trois activités passives la provoquent rarement ; elles contribuent au contraire à un état de relaxation et d'apathie.

En consacrant son temps libre à des loisirs passifs, on n'éprouvera pas de grandes satisfactions, mais on évitera aussi de trop s'impliquer. C'est apparemment la solution qui plaît au plus grand nombre.



Je ne prétends pas que la relaxation soit mauvaise en soi. Tout le monde a besoin de se détendre, de lire n'importe quoi, de rester vautré sur un canapé les yeux dans le vide ou fixés sur un écran de télévision. Comme pour tous les autres aspects de l'existence, c'est une question de dosage.

Les loisirs passifs ne posent problème que s'ils constituent la principale – ou l'unique – forme de loisir. Car avec le temps, ils finissent par avoir des conséquences décisives sur la qualité de la vie dans son ensemble. Les gens qui passent leur temps libre à jouer de l'argent, par exemple, peuvent se retrouver prisonniers d'une habitude qui interfère avec leur métier, leur famille et finalement leur propre bien-être. Ceux qui regardent la télévision plus souvent que la moyenne ont aussi tendance à avoir des métiers moins intéressants et des relations médiocres.

Une vaste étude réalisée en Allemagne a montré que plus les individus lisaient des livres, plus ils avaient d'expériences-flux, alors que ceux qui regardaient la télévision disaient le contraire.

De telles corrélations n'impliquent pas, bien sûr, que l'habitude des loisirs passifs détermine la médiocrité de l'emploi, des relations, etc. Il est plus probable que le lien causal soit inverse : les solitaires exerçant des métiers sans intérêt consacrent volontiers leur temps libre à des loisirs passifs. Ou bien : ceux qui ne trouvent pas à vivre d'expérience optimale se tournent vers des activités faciles.

Mais, dans la vie, la causalité est généralement circulaire : ce qui a commencé par être un effet devient finalement une cause. Un parent abusif peut obliger son enfant à adopter un système de défense fondé sur l'agressivité réprimée ; lorsque l'enfant a grandi, c'est ce style de défense qui risque de l'inciter à devenir lui-même un parent abusif.

De la même façon, l'habitude des loisirs passifs n'est pas simplement l'effet de problèmes préalables, mais devient à son tour une cause qui coupe l'individu des choix qu'il aurait pu faire pour améliorer sa vie.

.../... Il n'est pas nécessaire d'avoir une personnalité extraordinaire pour occuper son temps libre de façon créative. Tous les arts et artisanats traditionnels – chansons, tissage, poterie, sculpture, qui confèrent à chaque culture son cachet propre – sont nés grâce à la volonté de gens ordinaires d'exprimer leur savoir-faire pendant les heures qui n'étaient pas consacrées au labeur.

On a du mal à imaginer ce que serait notre monde si nos ancêtres s'étaient contentés de loisirs passifs au lieu de voir dans leur temps libre une occasion d'explorer le savoir et la beauté.

Actuellement, environ 7% des énergies non renouvelables que nous utilisons – électricité, essence, papier et produits métalliques – servent essentiellement aux loisirs. Construction et entretien de terrains de golf, impression de magazines, trajets en avion vers des destinations de vacances, production et distribution d'émissions de télévision, fabrication et utilisation de hors-bord et de scooters des mers épuisent une bonne partie des ressources de notre planète.

Et il semble ironiquement que le bonheur et la satisfaction que nous retirons de nos loisirs n'aient aucune relation – ou alors une relation négative – avec la quantité d'énergie matérielle consommée.

Les activités qui requièrent un savoir-faire, des connaissances ou des émotions, c'est-à-dire notre énergie psychique, sont tout aussi gratifiantes que celles qui nécessitent des équipements lourds et une source d'énergie extérieure. S'entretenir avec quelqu'un, jardiner, lire de la poésie, travailler bénévolement ou apprendre quelque chose de nouveau n'épuise aucune ressource naturelle et donne au moins dix fois plus de plaisir que des activités qui consomment dix fois plus d'énergie.

De même que la qualité d'une vie individuelle dépend dans une large mesure de l'utilisation du temps libre, la qualité d'une société résulte de la manière dont ses membres occupent leurs loisirs.

Les quartiers riches peuvent donner une impression de fadeur déprimante parce qu'on se dit que derrière ces splendides façades dressées sur des pelouses impeccables personne ne fait rien d'intéressant.

Dans certains pays, même en parlant avec l'élite de la société, on a l'impression qu'en dehors de l'argent, de la famille, de la mode, des vacances et des commérages, il n'y a pas grand-chose qui retienne l'attention des gens.

A l'inverse, dans d'autres régions du monde, on trouve encore des retraités amoureux de la poésie classique qui collectionnent de vieux livres, des fermiers qui jouent d'un instrument de musique ou écrivent l'histoire de leur village, préservant ainsi les plus belles créations du passé et les enrichissant.

Nous avons vu que les habitudes de loisirs au niveau social et au niveau personnel agissent autant comme causes que comme conséquences. Lorsque le style de vie d'un groupe social devient obsolète, lorsque le travail se transforme en une routine ennuyeuse et que les responsabilités de la communauté perdent leur signification, on peut prévoir que les loisirs vont prendre une importance accrue.

Et si une société devient trop dépendante de ses distractions, on peut prévoir qu'elle n'aura plus assez d'énergie psychique pour relever les défis technologiques et économiques qui ne vont pas manquer de se présenter.

Il peut paraître contradictoire de signaler les dangers de l'industrie des loisirs à une époque où elle est si florissante aux Etats-Unis. Musique, cinéma, mode et télévision rapportent des masses de devises du monde entier. Les boutiques de vidéo poussent comme des champignons à tous les coins de rue et réduisent le nombre de chômeurs. Nos enfants prennent pour modèles des célébrités médiatiques, et notre esprit déborde d'informations sur les faits et gestes des stars du cinéma ou du sport.



Comment toutes ces belles choses pourraient-elles être nuisibles ? Si nous les évaluons du seul point de vue financier, il n'y a rien à redire. Mais si nous tenons compte des conséquences à long terme du consumérisme pratiqué par les jeunes générations « accros » à des loisirs passifs, il y a effectivement lieu de s'inquiéter.

Comment éviter le danger que constitue la polarisation de nos vies autour d'un travail dénué de signification parce que forcé et de loisirs dénués de signification parce que inutiles ?

L'une des issues possibles nous est indiquée par l'exemple des individus créatifs évoqués précédemment.

Pour eux, travail et loisirs sont indissociables, comme ils le sont pour les membres de certaines communautés traditionnelles. Mais les individus créatifs ne sont pas enfermés dans une époque révolue. Ils mettent à profit les connaissances héritées du passé et celles du présent pour inventer une meilleure façon d'être dans le futur.

Dans la mesure où nous pouvons nous inspirer de leur exemple, il n'y a rien à craindre des loisirs. Le travail lui-même devient un plaisir et quand on a besoin de s'arrêter, le temps libre peut être une véritable recreation au lieu d'un abrutissement programmé.

Si le métier qu'on exerce ne peut être amélioré, il faut faire de son temps libre une réelle occasion de vivre des expériences optimales – d'explorer son être et tout ce qui l'entoure.

Par chance, le monde regorge de choses intéressantes à faire. Les seuls obstacles sont le manque d'imagination ou d'énergie. Sans cela, chacun d'entre nous est capable d'être poète, musicien, inventeur, explorateur, savant amateur, artiste ou collectionneur.

(1) Experience Sampling Method qu'on peut traduire : « échantillons de vécu » est la méthode scientifique utilisée par l'auteur sur un large échantillon de personnes pour réaliser son étude.

(2) entropie : dégradation, perte de l'énergie

(3) flux : moments exceptionnels - plaisir intense

AVRIL 2009

## CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

### 1 Premier problème :

1. La fonction  $F$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , car  $F$  est clairement définie en 0 puisque c'est la somme d'une série entière et pour tout  $x$  non nul,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2} = 0$$

donc la série converge par la règle de d'Alembert.

$F$  est paire et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}, \quad F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{(n!)^2}.$$

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $F'(x) > 0$  donc  $F$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et décroissante sur  $] -\infty, 0]$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F''(x) > 0$  donc  $F$  est convexe.

2. (a) On a  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$ . Donc la suite  $(v_n)$  est croissante et  $v_n \geq v_0 = 1$ , d'où  $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$ .

Par la définition de  $F$  en déduit de cette inégalité, que pour  $x \geq 0$  :

$$F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(2x).$$

- (b) Considérons maintenant la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et appliquons le même raisonnement que la question précédente. On a  $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$ . Donc la suite  $(w_n)$  est décroissante et  $w_n \leq w_0 = 1$ , d'où  $\frac{1}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{(2n+1)!}$ .

On obtient, pour  $x > 0$  :

$$F(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\text{sh}(2x)}{2x}.$$

(c) On a  $G(x) = \sqrt{\text{ch}(2x) \frac{\text{sh}(2x)}{2x}} = \sqrt{\frac{\text{sh}(4x)}{4x}}$  et on écrit

$$G(x) = \sqrt{\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{8x}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{2x}} \sqrt{1 - e^{-8x}},$$

d'où  $G(x) \sim \frac{\Phi(x)}{2\sqrt{2}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

3. (a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto t^k e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et de la forme  $O(\frac{1}{t^2})$  qd  $t \rightarrow +\infty$  donc est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Pour  $A > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $I_k(A) = \int_0^A t^k e^{-xt} dt$ .

Pour  $k = 0$ ,  $I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} I_0(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A = \frac{1}{x}$  car  $x > 0$ . Pour  $k > 0$ , on

obtient en intégrant par parties,  $I_k(A) = \left[ t^k \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A + \frac{k}{x} I_{k-1}(A)$ . On en déduit en faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  que  $I_k = \frac{k}{x} I_{k-1}$ . Une récurrence simple donne

$$I_k = \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

- (b) Montrons d'abord que l'intégrale existe. La fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . D'après la question 2,  $\forall t \geq 0$ ,  $0 \leq F(t)e^{-xt} \leq \text{ch}(2t)e^{-xt}$  et lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\text{ch}(2t)e^{-xt} \sim \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$ .

Si  $x > 2$ ,  $t \mapsto \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc  $t \mapsto \text{ch}(2t)e^{-xt}$  aussi, d'après le théorème des équivalents, enfin  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  est aussi intégrable d'après le théorème de comparaison.

Pour tout  $x > 2$ ,  $L(F)(x) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \right) e^{-xt} dt$ . Posons  $X_n(t) = \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ .

La série de fonctions  $\sum X_n(t)$  converge sur  $[0, +\infty[$  et sa somme  $F(t)e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Il est clair que pour tout  $n$ ,  $X_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Pour tout  $n$ , posons  $J_n = \int_0^{+\infty} |X_n(t)| dt$  et montrons que la série de terme général

$J_n$  est convergente. On a  $J_n = \int_0^{+\infty} X_n(t) dt = \frac{1}{(n!)^2} I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$ . Utilisons le

critère de d'Alembert : on a  $\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 x^2}$  qui tend vers  $\frac{4}{x^2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , or  $x > 2$  implique  $\frac{4}{x^2} < 1$ , donc  $\sum \int_0^{+\infty} |X_n(t)| dt$  converge.

On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Donc

$$L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} X_n(t) dt$$

et en conclusion

$$L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}, \quad \text{pour tout } x > 2.$$

- (c) Pour  $t > 0$  posons  $g_n = g_n(t) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}$ . On a  $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{2(2n+1)t^2}{(n+1)}$  qui tend vers  $4t^2$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . La règle de d'Alembert entraîne que la série  $\sum g_n$  converge pour  $4t^2 < 1$  et diverge pour  $4t^2 > 1$ ; son rayon de convergence  $R$  est donc égal à  $1/2$ .

Pour  $|u| < 1$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+u}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} u^n. \end{aligned}$$

En posant  $u = -4t^2$  pour  $|t| < 1/4$  on a bien  $|u| < 1$  et on obtient  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$  pour  $|t| < \frac{1}{4}$ .

- (d) Pour tout  $x > 2$ ,

$$L(F)(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$L(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

- (e)  $t \mapsto \Phi(t)e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{(2-x)t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  au voisinage de 0 donc intégrable sur  $]0, 1]$ . Au voisinage de  $+\infty$  : si  $2-x < 0$  alors  $\Phi(t)e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc intégrable sur  $[1, +\infty[$  ; si  $2-x \geq 0$  alors  $\Phi(t)e^{-xt} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$  donc n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .  
Donc  $L(\Phi)$  est définie sur  $]2, +\infty[$ .

On fait le changement de variable  $u = \sqrt{t(x-2)}$  et on obtient

$$L(\Phi)(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}}.$$

## Deuxième problème

### 2 Partie I :

- Comme  $\varphi$  est décroissante, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h\varphi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$ . Posons  $u_n = h\varphi(nh)$  et  $v_n = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$ .

- (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{i=1}^n u_i \leq \sum_{i=1}^n v_i = \int_0^{nh} \varphi(t)dt$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nh} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < \infty$ , on déduit la convergence de la série  $\sum u_n$  par domination, car  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ .
- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $U_n = \sum_{i=1}^n u_i$ ,  $V_n = \sum_{i=1}^n v_i$ . Par la décroissance de  $\varphi$ , on a  $v_{i+1} \leq u_i \leq v_i$  et, en sommant ces inégalités, on a

$$V_{n+1} - v_1 \leq U_n \leq V_n$$

ce qui donne par passage à la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_0^h \varphi(t)dt \leq \sum_{i=1}^{+\infty} h\varphi(ih) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

Vu que  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \varphi(t)dt = 0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

2. (a) Par la décroissance de  $\varphi$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_k \geq 0$ , donc

$$\begin{aligned} 0 \leq C &= \int_0^1 \varphi(t)dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=2}^n \left( \int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k-1) \right) - \varphi(n) \right\} \\ &\leq \int_0^1 \varphi(t)dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n). \end{aligned}$$

De plus, la suite réelle  $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée donc elle est convergente. D'où l'existence de  $C$ .

- (b) Considérons tout d'abord le cas  $x < 1$ : on a

$$\psi(x) = - \int_0^x \varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k) \right]$$

et donc, grâce à la question précédente,  $\psi(x) \leq - \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt$ . Comme  $\varphi(x) > 0$  on a

$$\psi(x) \leq \int_x^1 \varphi(t)dt \leq (1-x)\varphi(x) \leq \varphi(x).$$

Il nous faut maintenant l'inégalité  $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geq -1$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[ \int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k) \right] \\ &\geq \int_x^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) \geq -\varphi(1) \\ &\geq -\varphi(x), \end{aligned}$$

car  $\varphi$  est décroissante. Pour traiter le cas  $x \geq 1$ , on écrit, après transformation,

$$\psi(x) = - \int_{E(x)}^x \varphi(t) dt + \sum_{k=E(x)+1}^{+\infty} \left[ \int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k) \right]$$

puis on applique des inégalités semblables à celles du cas précédent :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq - \int_{E(x)}^x \varphi(t) dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t) dt \\ &= \int_x^{E(x)+1} \varphi(t) dt \\ &\leq \varphi(x)(E(x) + 1 - x) \leq \varphi(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \int_{E(x)}^x \varphi(t) dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t) dt - \varphi(E(x) + 1) \\ &\quad + \sum_{k=E(x)+2}^{+\infty} \left[ \int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k) \right] \\ &\geq \int_x^{E(x)+1} \varphi(t) dt - \varphi(E(x) + 1) \geq -\varphi(E(x) + 1) \\ &\geq -\varphi(x) \quad \text{car } \varphi \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

3. Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

Comme  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ , on a pour  $0 < x < 1$ ,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ .

4. On pose  $h = -\ln x$  et on considère la fonction  $\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ , on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nh} = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h \varphi(nh).$$

On utilise le I1° appliqué à la fonction  $\varphi$  qui est continue sur  $]0, +\infty[$ , décroissante, positive et vérifie  $\int_0^{\infty} \varphi(t) dt < \infty$ . On a alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h \varphi(nh) \sim \frac{I}{\sqrt{h}}$$

où  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$  (intégrale de Gauss).

En conclusion, comme  $h = -\ln x \sim 1 - x$  en 1, on a bien

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

5. Pour  $y \geq 1$ , on a  $s(y) = \sum_{n=1}^{E(y)} \frac{1}{\sqrt{n}} = A_{E(y)}$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$h \int_n^{n+1} s(y) e^{-hy} dy = A_n (e^{-nh} - e^{-(n+1)h})$$

D'où pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} h \int_0^n s(y) e^{-hy} dy &= h \int_1^n s(y) e^{-hy} dy \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (e^{-kh} - e^{-(k+1)h}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{-kh} - \sum_{k=2}^n A_{k-1} e^{-kh} \\ &= -A_n e^{-nh} + A_1 e^{-h} + \sum_{k=2}^n [A_k - A_{k-1}] e^{-kh} \\ &= -A_n e^{-nh} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kh}. \end{aligned}$$

Comme  $A_n e^{-nh}$  a une limite nulle en  $+\infty$  (car  $A_n \leq n$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n s(y) e^{-hy} dy$  existe. On peut donc prendre la limite dans l'égalité du dessus, on en déduit que  $f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy} dy$ .

6. (a) On considère la fonction  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ . Avec les notations du I.2. on a  $\psi(x) = s(x) - 2\sqrt{x} + C$ , où  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}})$  et par la question 1.2.(b),

$$|\psi(x)| = |s(x) - 2\sqrt{x} + C| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\left| \int_0^{+\infty} h \psi(t) e^{-ht} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{t}} e^{-ht} dt = \sqrt{h} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \sqrt{h}$$

et d'après le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} f(e^{-h}) &= h \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-ht} dt + 2h \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-ht} dt - Ch \int_0^{+\infty} e^{-ht} dt \\ &= h \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-ht} dt + \frac{\sqrt{\pi}}{h} - C, \end{aligned}$$



car  $2h \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-ht} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$  et  $h \int_0^{+\infty} e^{-ht} dt = 1$ . Il vient ainsi:

$$\left| f(e^{-h}) - \frac{\sqrt{\pi}}{h} + C \right| \leq \sqrt{\pi h}.$$

Or, par un calcul simple, on prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = -C$$

où

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(b)  $f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est bien définie comme somme d'une série alternée. On pose alors:

$$B_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On sépare dans chacune de ces deux sommes les termes pairs et impairs, ce qui s'écrit:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= - \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ A_{2n} &= \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$B_{2n} + A_{2n} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \sqrt{2} A_n.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $x_n = A_n - 2\sqrt{n} + C$ . On a  $A_n = 2\sqrt{n} - C + x_n$  et  $A_{2n} = 2\sqrt{2n} - C + x_{2n}$  on en déduit que

$$B_{2n} = \sqrt{2} A_n - A_{2n} = (1 - \sqrt{2})C + (\sqrt{2}x_n - x_{2n}),$$

en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $f(-1) = (1 - \sqrt{2})C$  soit encore  $-C = (\sqrt{2} + 1)f(-1)$ .



## CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

### ITS voie B Option Mathématiques

### CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

#### Exercice n° 1

1. On vérifie que  $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$ .

2. On a  $M^2 + M - 2I = 0$  et  $P(x) = x^2 + x - 2$  répond à la question.

3.  $M$  étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour  $\lambda$  valeur propre de  $M$ , on a :  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , d'où  $\lambda = 1$  ou  $-2$ . La trace étant invariante par changement de base, on a aussi :  $1 - 2 + \lambda = \text{Tr}(M) = -3$ , d'où  $\lambda = -2$ . En conclusion,  $\lambda = 1$  est une valeur propre simple et  $\lambda = -2$  une valeur propre double.

4. Le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P(X)$  est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour  $X = 1$ , on obtient  $1 = a + b$  et pour  $X = -2$ ,  $(-2)^n = -2a + b$ . La résolution du système donne :

$$a = \frac{1 - (-2)^n}{3} \text{ et } b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$$

5.  $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + (aM + bI)$  et comme  $M^2 + M - 2I = 0$ , on obtient  $M^n = aM + bI$  ou encore,

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

6. On obtient  $U_{n+1} = M^n U_1 = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ b+a \\ b+a \end{pmatrix}$ , d'où

$$x_{n+1} = y_{n+1} = z_{n+1} = 1$$

### Exercice n° 2

1. On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

$$(1) \|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \text{ (car } f(0) = 0).$$

$$(2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda| \times \|f\|$$

$$(3) \forall f, g \in L(E), \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|, \forall x \in E, \text{ d'où } \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

2. Si  $I - (P - Q)$  n'est pas inversible, alors

$\exists u \neq 0, (I - (P - Q))(u) = 0$ , d'où  $u = (P - Q)(u)$  et  $\|u\| = \|(P - Q)u\| \leq \|P - Q\| \times \|u\| < \|u\|$ , ce qui est impossible.

Comme  $I - (P - Q)$  est inversible, il existe un endomorphisme  $v$  de  $E$  tel que :  $(I - (P - Q))v = I$ , d'où  $P(I - (P - Q))v = P$  ou encore  $(P - P^2 + PQ)v = P$  et  $PQv = P$  car  $P^2 = P$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , on a  $P(x) = PQ(v(x))$ , à savoir  $P(E) = PQ(E)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(P)$ , alors  $y = P(x) = PQ(v(x))$  et  $t = Q(v(x)) \in \text{Im} Q$  vérifie  $y = P(t)$ .  $P$  est donc une application bijective.

$P$  étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre  $\text{Im}(P)$  et  $\text{Im}(Q)$ , les dimensions sont égales.

### Exercice n° 3

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites  $(s_n)$  et  $(r_n)$  définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$$

1. Pour  $n = 2$ ,  $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$ . La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

$$2. r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse.

La suite  $(r_n)$  a donc une limite finie et la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

3. Soit  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Pour  $n$  grand,  $|s_n| \leq l$  et  $\left| \frac{s_n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{l}{n(n+1)}$ , donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$ , et la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  est convergente d'après la question précédente.

4. On vérifie que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$ , et que la série de terme général  $\frac{s_n}{n(n+1)}$  est convergente.

5. On considère la suite  $(s_n)$  définie par :

$$s_n = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2k \\ -(2k+1) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}. \text{ Elle vérifie les relations demandées.}$$

En effet :

$$\sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n}$  n'existe pas.

#### Exercice n° 4

1. On vérifie que  $f(-x) = -f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

2. Vérifions que  $f$  est dérivable à l'origine :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ .

$$\text{Pour } x \neq 0, f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1) + 1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}.$$

Puis  $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$ , donc  $u(t) > 0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

La fonction  $f$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

$$3. e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour  $x \neq 0$ , on a :  $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

On prolonge  $\varepsilon$  en 0 par  $\varepsilon(0) = 0$ .

$$4. f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

Pour  $f^{-1}$ , il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5) \text{ et}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \Rightarrow a_1 \left( x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} \right) + a_3 \left( x^3 + 3 \frac{x^5}{2} \right) + a_5x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3}a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5).$$

### Problème :

1. Supposons que  $f$  soit la composée d'une projection  $p$  et d'une homothétie  $h$ , on a  $p \circ p = p$  et  $h = \lambda Id$ . On obtient  $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$ . On pose donc  $p(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$  et  $h(x) = \lambda x$  avec  $\lambda \neq 0$ . On vérifie que  $f \circ f = \lambda f$ .

2. Soit  $y \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ . On obtient :  $f(y) = 0$  et  $\exists x \in E / y = f(x)$ , d'où  $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$  et  $y = f(x) = 0$

3. Soient  $f, g \in L_\lambda$ .  $(f + g) \in L_\lambda$  si et seulement si  $(f + g) \circ (f + g) = \lambda(f + g)$  ou encore  $f \circ g + g \circ f = 0$ .

Si  $f \circ g = g \circ f$ , il est clair que  $(f + g) \in L_\lambda$ .

Réciproquement, on a :

$$f \circ g + g \circ f = 0 \quad (1)$$

On multiplie (1) par  $f$  à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient  $f \circ g - g \circ f = 0$  (2) ;

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

4.  $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f)$ ,  
donc  $\mu = \lambda_1 \lambda_2$ .

$$5. v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aId) \circ (u - aId) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 Id = \lambda(u - aId)$$

Par hypothèse,  $u^2 - (a+b)u + abId = 0$ , d'où  $u^2 = (a+b)u - abId$ . On trouve donc  $\lambda = b - a$ .

De même  $w \circ w \in L_\mu$  avec  $\mu = a - b$ .

Par ailleurs,  $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aId) + \beta(u - bId)$ . Ceci est vérifié pour  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha a + \beta b = 0$ , ce qui donne :

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a  $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$  car  $v \circ w = w \circ v = 0$ .

D'autre part  $v^n = \lambda^{n-1} v$  et  $w^n = \mu^{n-1} w$ . On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

6. Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$(\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$ , d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^2 - A - 2I = (A + I)(A - 2I)$$

On obtient, par exemple,  $a = -1$  et  $b = 2$ .

$$A^n = \frac{2^n}{3}(A + I) - \frac{(-1)^n}{3}(A - 2I) = \frac{(2^n + (-1)^n)}{3} A + \frac{(2^n + 2(-1)^n)}{3} I$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2010

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

**Premier Problème**

**I : Moyenne de Cesàro d'une suite**

1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sa moyenne de Cesàro définie par  $y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ . Montrer que si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors sa moyenne de Cesàro converge aussi vers  $\ell$ .

2. Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels telle que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_{n+1} - z_n) = t.$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{n} = t$ .

**II : Recherche d'équivalents**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue, telle que  $f(x) = x(1 - ax^\alpha \varphi(x))$ , où  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1$ .

1. Montrer qu'il exist  $\rho \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{2} \leq \sup_{x \in [0, \rho]} \varphi(x) \leq \frac{3}{2}$  et en déduire que pour tout  $x \in [0, \rho]$ ,  $0 \leq f(x) \leq x$ .

2. Soit  $u_0 \in [0, \rho]$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  tend vers 0 en décroissant.

3. Prouver que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}) = a\alpha$ . En déduire que  $u_n \sim \frac{K}{n^{1/\alpha}}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où  $K$  est une constante.

4. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et pour  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . Trouver un équivalent de  $u_n$ .

## Deuxième Problème

### Définitions et notations

On désigne par  $\mathcal{E}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions numériques continues sur  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{B}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  des fonctions numériques continues et bornées sur  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\forall f \in \mathcal{B}, \|f\| = \sup\{|f(x)| / x \in \mathbb{R}\}$$

Pour  $a > 0$ , on appelle moyenne spatiale de paramètre  $a$  d'un élément  $f$  de  $\mathcal{E}$ , l'application  $m_a(f)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, [m_a(f)](x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$$

### I : Étude analytique

Dans cette partie  $f$  désigne un élément de  $\mathcal{E}$ .

1. Montrer que  $m_a(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.
2. Montrer que  $m_a(f)$  est constante si, et seulement si,  $f$  est périodique de période  $2a$ .
3. Étudier la parité de  $m_a(f)$  en fonction de celle de  $f$ .
4. Étudier la monotonie de  $m_a(f)$  lorsque  $f$  est monotone.
5. Un élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  est dit à support borné s'il existe  $A > 0$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $|x| \geq A$ .
  - (a) Montrer que si  $f$  est à support borné,  $m_a(f)$  l'est aussi.
  - (b) Montrer que si  $f$  vérifie  $f(x) = 0$  pour  $|x| \geq A$ , alors

$$\int_{-A-a}^{A+a} m_a(f)(t) dt = \int_{-A}^A f(t) dt .$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

### II : Étude de norme sur $\mathcal{B}$

1. On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $\mathcal{B}$  définies par

$$f(x) = \cos \frac{2\pi x}{a}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} .$$

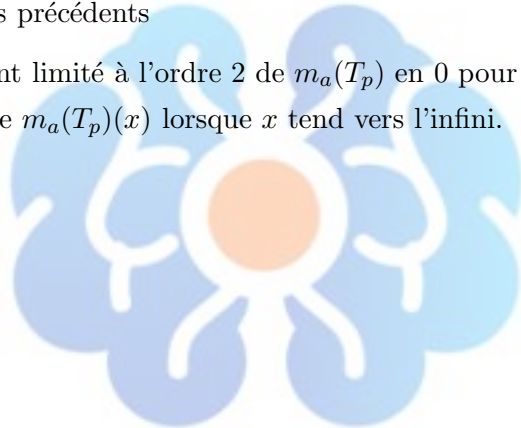
- (a) Calculer  $\|f\|$ ,  $\|g\|$ ,  $\|h\|$ ,  $\|m_a(f)\|$  et  $\|m_a(h)\|$ .
  - (b) Montrer que la fonction  $m_a(g)$  est décroissante et positive sur  $[0, +\infty[$ , puis calculer  $\|m_a(g)\|$ .
2. Montrer que pour tout élément  $f \in \mathcal{B}$ ,  $\|m_a(f)\| \leq \|f\|$ .
  3. Déterminer  $N(m_a) = \sup\{\|m_a(f)\| / f \in \mathcal{B}, \|f\| = 1\}$ .

### III : Polynômes de Tchébychev

On appelle polynômes de Tchébychev, la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \frac{1}{a}X, \quad \text{et } \forall p \in \mathbb{N}, \quad T_{p+2} = \frac{2}{a}XT_{p+1} - T_p.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier  $p$ ,  $T_p(a \cos x) = \cos px$ .  
 (b) Calculer  $T_p(0)$  et  $T'_p(a)$ .  
 (c) Étudier la parité du polynôme  $T_p$ .
2. (a) Déterminer le coefficient dominant de  $T_p$ .  
 (b) Montrer que  $T_p^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1}p!}{a^{p-1}}$  pour tout entier  $p$  non nul.
3. Calculer  $[m_a(T_p)](0)$  en fonction de  $p$ .
4. (a) Déterminer  $[m_a(T_p)]'(0)$  et  $[m_a(T_p)]''(0)$  en fonction de  $p$ .  
 (b) Montrer que  $[m_a(T_p)]^{(p)}(0) = \frac{1}{a}T_p^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1}p!}{a^p}$ .
5. Dédurre des résultats précédents
  - (a) le développement limité à l'ordre 2 de  $m_a(T_p)$  en 0 pour  $p > 1$ ;
  - (b) un équivalent de  $m_a(T_p)(x)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.





AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Dans son livre *Race et histoire*, Lévi-Strauss constate que "l'humanité est constamment aux prises avec deux processus contradictoires dont l'un tend à instaurer l'unification [des cultures], tandis que l'autre vise à maintenir ou à rétablir la diversification", et il affirme pour sa part "la nécessité de préserver la diversité des cultures dans un monde menacé par la monotonie et l'uniformité". Que pensez-vous, à l'heure de la "mondialisation", de cette affirmation ?

**Sujet n° 2**

Quels sont les atouts dont dispose l'Afrique pour son développement économique, et quels sont les obstacles qui au contraire freinent ce développement ?

**Sujet n° 3**

Le poète romantique Vigny opposait, à la liberté de la nature, la servitude que l'homme s'est artificiellement imposée dans les villes, ces "cités serviles" où règne "l'esclavage humain". Que pensez-vous de cette vision de la ville comme lieu de contrainte et de servitude ?

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Calculatrice non programmable autorisée.**

**Les exercices sont indépendants.**

**Exercice n° 1**

Soit  $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$ , où  $p, q > 0$  et  $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .
2. Etudier la diagonalisation de la matrice  $M$ .
3. Calculer  $M^n$  pour tout entier  $n$ .
4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

**Exercice n° 2**

Soient  $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$  et  $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$  où  $n$  est un entier naturel et  $x$  un nombre réel strictement positif.

1. Trouver une relation de récurrence entre  $f_n(1)$  et  $f_{n-1}(1)$ . En déduire la valeur de  $f_n(1)$  en fonction de  $n$ .

2. Montrer que  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

3. Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 1 - F_n(1)$

### Exercice n° 3

Soient  $f$  la fonction numérique définie sur  $R^2$  par :  $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$  et  $D = R^+ \times R^+$ .

1. Calculer  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

2. En déduire la valeur des intégrales :  $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ .

3. En déduire la valeur de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ .

4. Soit  $f_\alpha : R^+ \rightarrow R$  définie par :  $f_\alpha(x) = 2\varphi(x)\phi(\alpha x)$ , où  $\alpha \in R$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$  et

$\phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \varphi(t) dt$ . Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ .

5. Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$  dans le cas où  $\varphi(x) = x \exp(-x^2)$

### Exercice n° 4

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs.

1. Etudier, selon la nature de la série de terme général  $u_n$ , la convergence de la série de terme

général :  $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$

2. Etudier, selon la nature de la série de terme général  $u_n$ , la convergence de la série de terme

général :  $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$

**Exercice n° 5**

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

1. On pose  $\varphi(x) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a))$ .

Déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  de sorte que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

2. En déduire que :  $\exists c \in ]a, b[, (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$

3. En déduire, sous des conditions que l'on précisera que :  $\exists c \in ]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Exercice n° 6**

Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

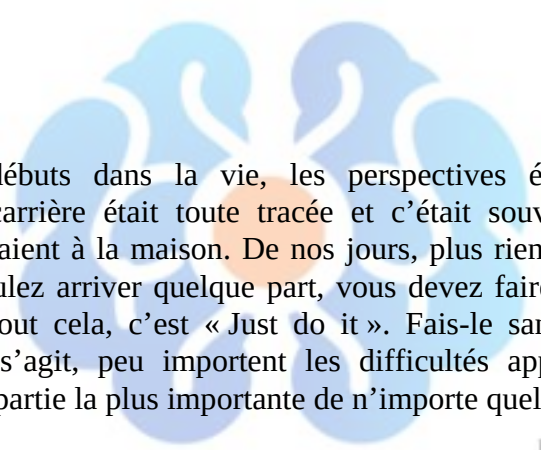
AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****CONTRACTION DE TEXTE****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Ce texte est tiré du livre de Richard Branson dont le titre est : « *Du capitalisme à l'écologie... Ma petite philosophie* » paru aux éditions Scali en février 2008.

**Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.**

**Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.**



Lors de mes débuts dans la vie, les perspectives étaient moins incertaines qu'actuellement. Votre carrière était toute tracée et c'était souvent celle de votre père. La plupart des mères restaient à la maison. De nos jours, plus rien n'est sûr et la vie est un long combat. Si vous voulez arriver quelque part, vous devez faire des choix. La meilleure leçon que j'ai tirée de tout cela, c'est « Just do it ». Fais-le sans te poser de questions. Peu importe de quoi il s'agit, peu importent les difficultés apparentes. Comme l'a dit Platon : « Le début est la partie la plus importante de n'importe quel travail. »

Un voyage de plusieurs milliers de kilomètres commence toujours par le premier pas. Si vous tentez déjà d'apercevoir l'arrivée et cette immense distance qui vous en sépare, avec tous les dangers que vous devrez affronter, vous ne ferez peut-être jamais ce premier pas. Et peu importe ce que vous voulez réaliser dans votre vie, si vous ne faites pas ce premier effort, vous n'atteindrez jamais votre but. Alors faites le premier pas. Il y aura beaucoup de défis à relever. Parfois, vous vous retrouverez au tapis, mais à la fin, soyez sûr que vous réussirez. Bonne chance.

L'équipe de Virgin (1) m'a trouvé un surnom : « Dr Yes » (Dr Oui). Ils m'appellent ainsi car je ne dis jamais non. Je trouve toujours de meilleures raisons de faire les choses plutôt que de ne pas les faire. Mon credo est : « On s'en fout ! On le fait ! »

Je sais que beaucoup de gens disent « non » ou « je vais réfléchir », presque comme une réponse pavlovienne à toute question, qu'il s'agisse d'un petit problème ou d'un projet énorme et révolutionnaire. Peut-être sont-ils très prudents ou se méfient-ils des idées nouvelles, ou ont-ils simplement besoin d'un peu de temps pour réfléchir. Mais ce n'est pas ma façon de voir les choses. Si quelque chose me semble être une bonne idée, je vais dire « oui, pourquoi pas » puis voir comment on peut mettre ce projet en route. Evidemment, je ne dis pas oui à tout, mais qu'est ce qui est pire, commettre une erreur occasionnelle ou avoir l'esprit fermé et passer à côté d'opportunités ?

Je crois qu'il faut savoir utiliser et exploiter l'expérience des autres, c'est pourquoi j'aime travailler en équipe. Exploiter les énergies, c'est comme exploiter des ressources intellectuelles. Quel intérêt d'exploiter quelqu'un pour une tâche particulière si l'on ne tient pas compte de son expérience et de ses capacités ? C'est comme si on consultait des experts tout en ignorant leurs conseils.

J'ai également foi en mon instinct et en mes capacités à accomplir presque tout ce que je décide d'entreprendre. Si une idée ou un projet sont bons et valent la peine, s'il est humainement possible de les accomplir, je les envisagerai toujours sérieusement, même s'il s'agit d'un domaine tout nouveau pour moi ou qui ne m'a jamais effleuré l'esprit. Je ne dirai jamais : « Je ne peux pas le faire car je ne sais pas comment le faire. ». Je demanderai, je ferai des recherches, je trouverai un moyen. Regarder, écouter, apprendre, sont des choses que nous devrions faire tout au long de notre vie, pas seulement à l'école.

Et puis il y a toutes ces petites règles absurdes que quelqu'un a inventées pour des raisons obscures. Je me dis toujours que si on crée un panel ou un comité, ils trouveront toujours quelque chose d'inutile à faire. Le monde est plein de bureaucratie créée par des comités qui ont beaucoup trop de temps à perdre et un trop grand besoin de tout contrôler. Toute cette bureaucratie se traduit souvent par un jargon inutile et incompréhensible. Si je désire me lancer dans un projet sérieux ou juste pour le plaisir, je ne vais pas laisser des règles absurdes m'en empêcher. Je trouverai un moyen légal de passer outre et j'irai de l'avant. Je dis toujours à mes employés : « Si tu veux le faire, vas-y, fonce. » Tout le monde est gagnant. Le travail et l'équipe sont valorisés, et c'est Virgin qui bénéficie de leur mise en œuvre. Les gens ne démissionnent pas parce qu'ils sont mal payés, ils démissionnent car ils ne sont pas valorisés. Nombreuses sont les compagnies qui mettent leurs employés dans des cases ; si vous êtes standardistes, vous le resterez. Nous avons de l'estime pour nos employés et nous les encourageons à être novateurs.

Je ne crois pas que ces petits mots, « on ne peut pas » doivent vous arrêter. Si rien dans ce que vous avez déjà vécu ne vous montre comment atteindre votre but, trouvez un moyen inédit. Si vous voulez piloter un avion, dès que vous avez seize ans, foncez à l'aérodrome le plus proche et préparez le thé pour les pilotes. Gardez vos yeux ouverts. Regardez et apprenez. Pas besoin d'avoir été à l'école pour devenir un créateur de mode. Faites-vous embaucher par une entreprise de ce secteur pour passer le balai. Et puis gravissez les échelons.

Ma mère Eve est l'exemple parfait de cette attitude volontaire. Pendant la guerre, elle voulait à tout prix devenir pilote. Elle s'est rendue à l'aéroport d'Heston et a postulé pour un boulot. Ma mère qui était très jolie avait été danseuse. Elle était vraiment très féminine, mais ce n'était pas un obstacle pour elle. Elle a enfilé un gros blouson d'aviateur, a caché ses cheveux blonds sous une casquette de cuir et s'est efforcée de parler avec une voix grave. Et finalement, elle a obtenu le boulot qu'elle convoitait. Par la suite elle a appris à piloter et s'est même retrouvée chargée de la formation des jeunes pilotes, ceux-là même qui allaient combattre les Allemands aux commandes d'avions de chasse pendant la Bataille d'Angleterre.

Après la guerre, elle a voulu devenir hôtesse de l'air. A l'époque il fallait parler espagnol et avoir une formation d'infirmière. Mais ma mère a baratiné le veilleur de nuit qui a inscrit son nom sur la liste des candidates. Peu après, elle est devenue hôtesse de l'air. Elle ne parlait pas un mot d'espagnol et n'avait jamais été infirmière. Mais elle avait fait fonctionner ses petites cellules grises. Elle ne s'était pas dit : « Je ne peux pas. » Elle l'avait fait tout simplement.



Et ma mère n'est pas la seule personne de la famille qui s'est dit un jour : « on fonce. » Le célèbre explorateur, le capitaine Robert Scott, était le cousin de mon grand-père. C'était un homme d'un grand courage.

Il a organisé deux expéditions vers l'Antarctique. Son but était de devenir le premier homme à atteindre le pôle Sud. Les gens lui assuraient que c'était impossible. Mais lui était sûr du contraire : « Je peux le faire » a-t-il dit. Et il a presque réussi. Il a atteint le pôle Sud mais en deuxième position, juste derrière Roald Amundsen. Ce fut une très grande déception pour Scott. Il est mort pendant le trajet du retour. Quand j'entends dire qu'il n'y a pas de récompense pour les seconds, je pense à lui. Il est devenu célèbre en étant le deuxième homme à atteindre le pôle Sud. Il a aussi été le premier à survoler l'Atlantique en ballon, mais les gens ont oublié cet exploit.

J'ai lancé *Student magazine* à l'âge de quinze ans. J'étais encore à l'école et tout le monde soutenait que c'était irréalisable. J'étais trop jeune, disait-on, je n'avais aucune expérience. Mais j'ai voulu leur prouver qu'ils avaient tort. J'étais sûr que c'était possible. J'ai calculé avec soin le montant des investissements nécessaires. J'ai estimé les coûts du papier et de l'encre. Puis, j'ai calculé combien allaient me rapporter les ventes au numéro et les espaces publicitaires. Ma mère m'a donné 4 livres (environ 7 euros) pour acheter des timbres. Avec mon camarade de lycée, Jonny Gem, nous avons passé presque deux années pour envoyer des centaines de lettres pour essayer de vendre des espaces publicitaires. Nous tentions aussi d'obtenir des interviews de personnalités. Ecrire ce courrier et attendre les réponses, était bien plus drôle que les cours de latin. J'ai été bouleversé quand nous avons reçu notre premier chèque pour la vente d'un espace publicitaire : 250 livres (environ 350 euros), une somme, à nos yeux, faramineuse. Ma foi avait été récompensée.

Je vais m'attarder un peu sur ma première vraie aventure commerciale, le magazine *Student*, car il me semble que ma méthodologie était bonne et que c'est un bon exemple de mon état d'esprit fonceur. J'ai lancé *Student* à l'âge de quinze ans alors que j'étais encore scolarisé au pensionnat Stowe. Je ne l'ai pas fait dans le but de gagner de l'argent, mais pour le simple plaisir de publier un magazine. Je n'aimais pas les méthodes pédagogiques de mon école, l'actualité mondiale m'inquiétait et je voulais en parler. Une des raisons principales de la création du magazine était de pouvoir exprimer mon point de vue sur la guerre du Vietnam. En 1965, sous la présidence de Lyndon B. Johnson, un grand nombre de troupes américaines ont commencé à arriver, et les journaux décrivaient les bombardements de routes et de villes au nord du Vietnam. Des défoliants chimiques (2) étaient aspergés un peu partout depuis des avions. Tout cela semblait inutile et injustifié.

Comme bien d'autres entrepreneurs novices, je ne voyais pas mon idée comme un vrai business mais plutôt comme un projet politique sympathique et novateur. Pour moi, les hommes d'affaires travaillaient dans le centre ville, fumaient des gros cigares et portaient des costumes. Ça ne m'était même pas venu à l'esprit qu'il existait des hommes d'affaires de toutes sortes, car jusqu'à présent, ils suivaient généralement un chemin tout tracé. J'avais déjà essayé de me lancer dans les affaires en essayant de vendre des lapins, des perruches et des sapins de Noël. Pour lancer le magazine, il y a eu beaucoup de tâtonnements au départ ; il est vrai que je n'étais encore qu'un jeune lycéen. J'ai tout de même eu le réflexe de préparer un plan d'activités précis, la base de toute jeune entreprise. Le personnage de Charles Dickens

dans *David Copperfield*, *Mr Micawber*, avait raison quand il a dit : « Revenu annuel, vingt livres sterling ; dépense annuelle, dix-neuf livres ; résultat : bonheur. Revenu annuel, vingt livres sterling ; dépense annuelle, vingt livres et six pence ; résultat : misère. » Mes parents étaient de bons gestionnaires de leurs revenus, je savais que ceux-ci devaient être supérieurs aux dépenses. Le profit devrait être le but principal de toute entreprise, même si l'on s'amuse à la mettre en œuvre. Un business sans profit est une prise de tête, une source de stress et une folie sur le plan fiscal.

(.../...) Chaque fois qu'une opportunité se présentait, nous la saisissons. Nous avons été les premiers à vendre des disques à moitié prix par correspondance. Nous avons annoncé ce premier service par un encart publicitaire dans *Student*. Lorsqu'une grève de la poste est venue contrarier notre projet, nous avons décidé de changer notre fusil d'épaule en renonçant à la vente par correspondance. Mais, il n'était pas question d'abandonner. Notre but était d'ouvrir des boutiques de disques. Une seule chose nous manquait : l'argent. Aussi nous avons demandé au propriétaire d'un magasin de chaussures de nous louer une partie de ses locaux inutilisés. Nous avons travaillé dur pour assurer la promotion de l'ouverture de notre nouvelle boutique. Elle est devenue un endroit « cool » fréquenté par de nombreux étudiants. Et cette première boutique a mené à l'ouverture d'une seconde puis d'une troisième. En très peu de temps, nous avons ouvert une boutique dans presque toutes les grandes villes d'Angleterre. Et je n'avais pas encore vingt ans. L'argent coulait à flot, mais il n'était pas question de nous endormir sur nos lauriers. Nous avions mis dans le mille, mais nous visions encore d'autres cibles.

L'un de mes plus grands buts était, comme le capitaine Scott, de vivre pleinement mon existence. Et quand, en 1984, on m'a proposé d'être le sponsor du navire qui allait tenter de décrocher le Ruban Bleu pour la Grande Bretagne, j'ai accepté d'emblée.

Le Ruban Bleu récompense le record de vitesse de traversée de l'Atlantique entre les Etats-Unis et l'Irlande. J'ai annoncé que je ferais partie de l'équipage et, dès lors, je me suis astreint à un entraînement rigoureux. Il n'y avait qu'un seul problème : mon épouse Joan attendait un enfant et j'avais promis d'être là le jour de la naissance. Mais la météo était idéale : si je renonçais à partir maintenant, je laissais tomber toute l'équipe.

J'ai demandé à Joan : « Qu'est-ce que je dois faire ? Fais-le : pars », m'a-t-elle répondu. Le bébé n'est pas attendu avant deux semaines. Tu seras rentré avant. »

Nous avons donc entamé la traversée, luttant contre les vagues à bord du *Virgin Atlantic Challenger*. A la fin du premier jour, on m'a annoncé que mon fils Sam était né. Nous avons sabré le champagne et poursuivi notre route. Le Ruban Bleu était dans la poche jusqu'à ce que nous soyons pris dans une violente tempête au large de l'Irlande. A moins de cent kilomètres de l'arrivée, nous avons été frappés par une vague géante. La coque du navire s'est brisée et nous avons fait naufrage. « SOS ! SOS ! SOS ! »

Nous étions en pleine mer, au milieu d'une tempête à bord d'un petit canot de sauvetage. Par chance, un bateau qui se dirigeait vers les Etats-Unis s'est détourné de sa route et nous a sauvés. Nous avons échoué dans notre première tentative pour décrocher le Ruban Bleu, mais le mot découragement ne fait pas partie de notre vocabulaire. Six ans plus tard, j'étais de retour avec le *Virgin Atlantic Challenger II*.



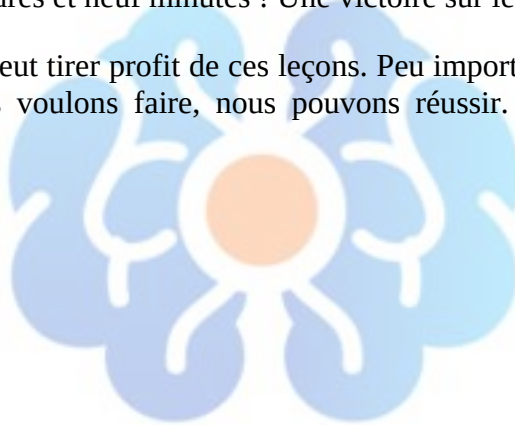
La course se passait bien jusqu'à ce que nous découvrions que de l'eau de mer s'engouffrait dans les réservoirs de carburant. Le moteur s'est arrêté. Nous avons passé des heures à nettoyer les réservoirs et à essayer de redémarrer les machines. La situation paraissait désespérée. A la fin, les membres de l'équipage pensaient qu'il fallait abandonner. Pour eux, c'était fini. Mais c'était notre dernière chance de gagner ce ruban. C'était maintenant ou jamais. Il fallait que je les persuade de ne pas abandonner. Je leur ai dit : « Allez, il faut le faire, on doit essayer. »

On avait tout tenté, nous avions les yeux rouges et nous étions épuisés. Nous avions tous le mal de mer. On détestait le navire, on détestait l'océan. On ne souhaitait qu'une chose : dormir pendant une semaine d'affilée.

« Il faut qu'on continue » ai-je crié, « Ok » m'ont-ils répondu, « on essaye une dernière fois. »

On ne sait trop comment nous sommes parvenus à redémarrer les machines et à poursuivre la traversée. Mais nous avons perdu tant de temps que continuer semblait bien inutile. Et pourtant, nous sommes parvenus à rattraper notre retard et finalement nous avons battu le record de deux heures et neuf minutes ! Une victoire sur le fil, mais une victoire !

(.../...) Chacun peut tirer profit de ces leçons. Peu importe ce que nous voulons être, peu importe ce que nous voulons faire, nous pouvons réussir. Alors, foncez et faites-le. Tout simplement.



(1) - Virgin : Groupe industriel créé par l'auteur.

(2) - Défoliants chimiques : Produits détruisant la végétation.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

2010

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

## Premier Problème

### I : Moyenne de Cesàro d'une suite

1. Soit  $\epsilon > 0$ , comme la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : (n \geq n_1) \implies |x_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, puisque la suite  $(x_n)$  est convergente, elle est bornée :

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M,$$

on a alors lorsque  $n \geq n_1$ ,

$$\begin{aligned} |y_n - \ell| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_1-1} |x_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_1}^n |x_k - \ell| \\ &< \frac{n_1}{n+1} (M + \ell) + \frac{n - n_1 + 1}{n+1} \times \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{n_1}{n+1} (M + \ell) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient

$$n \geq n_1 \implies |y_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Puisque  $\epsilon$  est arbitraire, ceci prouve que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell$ .

2. On a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k) = \frac{z_{n+1}}{n+1} - \frac{z_0}{n+1}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_0}{n+1} = 0$ , il suffit d'utiliser le résultat de la première question à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = z_{n+1} - z_n$ .

## II : Recherche d'équivalents

1. Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1$ , on a

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists 0 < \eta < 1) : 0 < x < \eta \implies -\epsilon + 1 < \varphi(x) < \epsilon + 1,$$

en particulier pour  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists \rho \in ]0, 1[$  tel que  $\forall x \in ]0, \rho[, \frac{1}{2} < \varphi(x) < \frac{3}{2}$ . D'où l'existence de  $\rho \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{2} \leq \sup_{x \in [0, \rho]} \varphi(x) \leq \frac{3}{2}$ .

2. D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n \leq \rho$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \rho$ . La suite  $(u_n)$  est alors décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite  $\ell$ . Par la continuité de  $f$ , on a  $f(\ell) = \ell$  et  $\ell \in [0, \rho]$ , d'où  $0 \leq f(\ell) \leq \ell(1 - \frac{\alpha}{2}\ell^\alpha)$ , ce qui exige que  $\ell = 0$ ; (car sinon, alors  $0 \leq f(\ell) < \ell$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $f(\ell) = \ell$ )

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} &= \frac{u_n^\alpha - u_n^\alpha(1 - au_n^\alpha \varphi(u_n))^\alpha}{u_n^\alpha u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{1 - (1 - au_n^\alpha \varphi(u_n))^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{1 - [1 - \alpha au_n^\alpha \varphi(u_n) + o(u_n^\alpha \varphi(u_n))]}{u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{\alpha au_n^\alpha \varphi(u_n) + o(u_n^\alpha)}{u_{n+1}^\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - au_n^\alpha \varphi(u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \varphi(u_n) = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \right) = \alpha a.$$

D'après la question I.2.  $\frac{1}{u_n^\alpha} \sim n\alpha a$ , d'où

$$u_n \sim \left( \frac{1}{\alpha a n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

4. Il suffit d'appliquer les résultats des questions précédentes avec  $a = \frac{1}{6}$  et  $\alpha = 2$  :

$$\sin(x) = x \left( 1 - \frac{1}{6} x^2 \varphi(x) \right), \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = 6 \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

On trouve :  $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ .

## Deuxième Problème

### I : Étude analytique

1. Soient  $f \in \mathcal{E}$  et  $F$  une primitive de  $f$ , alors

$$[m_a(f)](x) = \frac{1}{2a} (F(x+a) - F(x-a)) .$$

Puisque  $f$  est continue, sa primitive  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $m_a(f)$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$[m_a(f)]'(x) = \frac{1}{2a} (f(x+a) - f(x-a))$$

2. On a

$$\begin{aligned} m_a(f) \text{ est constante} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, [m_a(f)]'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0 . \end{aligned}$$

En posant  $y = x - a$  dans la dernière égalité, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}, f(y+2a) = f(y) .$$

On déduit alors des deux équivalences que  $m_a(f)$  est constante si et seulement si  $f$  est  $2a$ -périodique.

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , en utilisant le changement de variable  $u = -t$  on a :

$$\begin{aligned} [m_a(f)](-x) &= \frac{1}{2a} \int_{-x-a}^{-x+a} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(-u) du \\ &= \begin{cases} [m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est paire} \\ -[m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est impaire} . \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction  $m_a(f)$  est donc de la même parité que  $f$ .

4. Comme la fonction  $m_a(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , elle est monotone si et seulement si  $[m_a(f)]'$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$ , ce qui est équivalent d'après 1. à  $f(x+a) - f(x-a)$  est de signe constant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est croissante,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) \geq 0$ , ainsi  $[m_a(f)]' \geq 0$  et  $m_a(f)$  croissante; de même si  $f$  est décroissante alors  $m_a(f)$  décroissante.

Ainsi  $m_a(f)$  est de même monotonie que  $f$ .

5. On suppose qu'il existe  $A > 0$  tel que  $f(x) = 0$  pour  $|x| \geq A$ .

(a)  $m_a(f)$  est à support borné car :

- si  $x \geq A + a$ ,  $[x - a, x + a] \subset [A, +\infty[$ , donc  $[m_a(f)](x) = 0$ ,
  - si  $x \leq -A - a$ ,  $[x - a, x + a] \subset ]-\infty, -A]$ , donc  $[m_a(f)](x) = 0$ ,
- donc  $[m_a(f)](x) = 0$  pour  $|x| \geq A + a$ .

(b) Une première intégration par parties, en posant  $u = m_a(f)$  et  $v' = 1$  donne

$$\begin{aligned}
 \int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt &= \left[ t[m_a(f)](t) \right]_{t=-A-a}^{t=A+a} - \int_{-A-a}^{A+a} t \frac{1}{2a} (f(t+a) - f(t-a)) dt \\
 &= \frac{A+a}{2a} \left( \int_A^{A+2a} f(t) dt - \int_{-A-2a}^{-A} f(t) dt \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t (f(t+a) - f(t-a)) dt \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t f(t+a) dt + \frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t f(t-a) dt .
 \end{aligned}$$

car  $f(x) = 0$  pour  $|x| \geq A$

Puis, en effectuant les changements de variables  $u = t + a$  (resp.  $v = t - a$ ) sur la première (resp. la seconde) intégrale du membre de droite de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt &= \frac{1}{2a} \left( - \int_{-A}^{A+2a} (u-a) f(u) du + \int_{-A-2a}^A (v+a) f(v) dv \right) \\
 &= \frac{1}{2a} \left( - \int_{-A}^A (u-a) f(u) du + \int_{-A}^A (v+a) f(v) dv \right) \\
 &= \int_{-A}^A f(w) dw
 \end{aligned}$$

car  $f(x) = 0$  pour  $|x| \geq A$ .

## II : Étude de norme sur $\mathcal{B}$

- (a)
  - $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$  et  $f(0) = 1$  donc  $\|f\| = 1$ .
  - $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq 1$  et  $g(0) = 1$  donc  $\|g\| = 1$ .
  - $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| = |\lambda|$  donc  $\|h\| = |\lambda|$ .
  - $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned}
 [m_a(f)](x) &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \cos \frac{2\pi t}{a} dt = \frac{1}{2a} \frac{a}{2\pi} \left[ \sin \frac{2\pi t}{a} \right]_{t=x-a}^{t=x+a} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{a} (x+a) - \sin \frac{2\pi}{a} (x-a) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left( \sin \left( \frac{2\pi x}{a} + 2\pi \right) - \sin \left( \frac{2\pi x}{a} - 2\pi \right) \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc  $\|m_a(f)\| = 0$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, |[m_a(h)](x)| = |\lambda|$  donc  $\|m_a(h)\| = |\lambda|$ .

(b) On a  $[m_a(g)]'(x) = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{1+(x+a)^2} - \frac{1}{1+(x-a)^2} \right) \leq 0$  si  $x \geq 0$ , donc  $m_a(g)$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ , positive, et admet un maximum en 0, de plus  $m_a(g)$  est paire car  $g$  est paire, d'où,  $[m_a(g)](0) = \frac{1}{2a} 2 \arctan a$ , et donc  $\|m_a(g)\| = \frac{\arctan a}{a}$ .

2. Soit  $f \in \mathcal{B}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |[m_a(f)](x)| &= \frac{1}{2a} \left| \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \|f\| dt = \|f\| \end{aligned}$$

donc

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad \|m_a(f)\| \leq \|f\|.$$

3. Si  $\|f\| = 1$  alors  $\|m_a(f)\| \leq \|f\| = 1$  et  $\|m_a(f)\| = \|f\| = 1$  pour  $f : x \mapsto 1$ , donc :

$$N(m_a) = \sup_{\|f\|=1, f \in \mathcal{B}} \|m_a(f)\| = 1.$$

### III : Polynômes de Tchébychev

- (a) Raisonnement par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ . La formule est vraie pour  $p = 0$  et  $p = 1$ . Soit  $p \geq 2$ ; on suppose la formule vraie jusqu'au rang  $p$ . En utilisant la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(p+1)x + \cos(p-1)x = 2 \cos x \cos px,$$

on a

$$\begin{aligned} T_{p+1}(a \cos x) &= \frac{2a \cos x}{a} T_p(a \cos x) - T_{p-1}(a \cos x) \\ &= 2 \cos x \cos px - \cos(p-1)x \\ &= \cos(p+1)x. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang  $(p+1)$ .

Par le théorème de récurrence la formule est donc vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

- (b) On prend  $x = \frac{\pi}{2}$  dans la formule précédente et on obtient

$$T_p(0) = T_p(a \cos(\pi/2)) = \cos p \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{p}{2}} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

Dérivons les deux membres de l'identité  $T_p(a \cos x) = \cos px$ ,  $\forall x$ , on a

$$-a \sin x T_p'(a \cos x) = -p \sin px, \quad \forall x.$$

Pour  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $T'_p(a \cos x) = \frac{p \sin px}{a \sin x}$ , ce qui donne le résultat en faisant tendre  $x$  vers 0.

$$\begin{aligned} T'_p(a) &= \lim_{x \rightarrow 0} T'_p(a \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p^2 \sin px}{a} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{p^2}{a}. \end{aligned}$$

(c) Montrons, par récurrence sur  $p$ , que l'entier  $p$  et le polynôme  $T_p$  sont de même parité. La propriété est vraie pour  $p = 0$  et  $p = 1$ . Soit  $p \geq 2$ ; supposons la propriété vraie jusqu'au rang  $p$ ; alors les polynômes  $\frac{2X}{a}T_p$  et  $T_{p-1}$  sont de même parité que  $(p+1)$  et donc aussi de même parité que  $T_{p+1} = \frac{2X}{a}T_p - T_{p-1}$ . La propriété est donc vraie au rang  $(p+1)$ . Le théorème de récurrence donne alors le résultat.

2. (a) Montrons, par récurrence sur  $p$ , que  $T_p$  est un polynôme de degré  $p$  et de terme dominant  $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$  pour  $p \geq 1$ .

La propriété est vraie pour  $p = 0$  et  $p = 1$ . Soit  $p \geq 2$ ; supposons la propriété vraie jusqu'au rang  $p$ ; alors le terme dominant de  $T_{p+1}$  est la terme dominant de  $\frac{2X}{a}T_p$ , soit  $\frac{2X}{a} \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$ . La propriété est donc vraie au rang  $(p+1)$ .

Le théorème de récurrence donne donc que  $T_p$  est un polynôme de degré  $p$ , de terme dominant  $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$  pour  $p \geq 1$ .

(b) Puisque  $T_p$  est un polynôme de même parité que  $p$  dont on connaît le terme dominant, pour  $p \in \mathbb{N}^*$  on a

$$T_p = \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p + Q,$$

où  $Q$  est un polynôme de degré  $\leq (p-2)$ . En dérivant  $(p-1)$  fois, on a

$$\begin{aligned} T_p^{(p-1)} &= \frac{2^{p-1}}{a^p}(X^p)^{(p-1)} + Q^{(p-1)} \\ &= \frac{2^{p-1}}{a^p} \frac{p!}{1!}X + 0 \end{aligned}$$

et en posant  $X = a$ , on obtient

$$T_p^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1}}{a^{p-1}} p! \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, .$$

3. Puisque  $T_p$  est un polynôme de même parité que  $p$ , on a

$$[m_a(T_p)](0) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a T_p(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{a} \int_0^a T_p(t) dt & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

Calculons  $m_a(T_{2k})(0)$ . Par le changement de variable  $t = a \cos u$ , on a

$$\begin{aligned} m_a(T_{2k})(0) &= \frac{1}{a} \int_0^a T_{2k}(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 T_{2k}(a \cos u)(-a \sin u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos 2ku)(\sin u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2k+1)u - \sin(2k-1)u] du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos(2k+1)u}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)u}{2k-1} \right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = -\frac{1}{4k^2-1} \end{aligned}$$

D'où

$$[m_a(T_p)](0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{1-p^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

4. (a) On a  $[m_a(T_p)]'(x) = \frac{1}{2a}(T_p(x+a) - T_p(x-a))$ , donc

$$\begin{aligned} [m_a(T_p)]'(0) &= \frac{1}{2a}[T_p(a) - T_p(-a)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a}T_p(a) = \frac{1}{a} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que si  $T_p$  est paire alors  $T_p'$  est impaire et si  $T_p$  est impaire alors  $T_p'$  est paire, donc

$$\begin{aligned} [m_a(T_p)]''(0) &= \frac{1}{2a}[T_p'(a) - T_p'(-a)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{a}T_p'(a) = \frac{p^2}{a^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) D'après la question **II : 2.(b)**, on a

$$[m_a(T_p)]^{(p)}(0) = \frac{1}{2a}[T_p^{(p-1)}(a) - T_p^{(p-1)}(-a)] = p! \frac{2^{p-1}}{a^p}.$$

5. (a) Le polynôme  $m_a(T_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; son développement limité à l'ordre 2, au voisinage de  $x = 0$  est donné par

$$[m_a(T_p)](x) = [m_a(T_p)](0) + \frac{[m_a(T_p)]'(0)}{1!}x + \frac{[m_a(T_p)]''(0)}{2!}x^2 + o(x^2),$$



ce qui donne

$$[m_a(T_p)](x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p^2} + \frac{p^2}{2a^2}x^2 + o(x^2) & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a}x + o(x^2) & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

- (b) Remarquons que  $m_a(T_p)$  est un polynôme de degré  $p$  dont le terme dominant est le terme dominant de  $T_p$ , donc

$$m_a(T_p) = \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p + Q,$$

où  $Q$  est un polynôme de degré  $\leq (p-1)$ .

D'autre part, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m_a(X^k)$  est un polynôme unitaire de degré  $k$ , ce qui montre, grâce à la linéarité de  $m_a$ , que

$$[m_a(T_p)](x) \sim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2^{p-1}}{a^p}x^p.$$



CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Soit  $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$ , où  $p, q > 0$  et  $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .

$\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$ , d'où  $\lambda = 1$  est une valeur simple et  $\lambda = p - q/2$  est une valeur propre double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice  $M$ .

Si  $p - q/2 = 1$ , alors  $M = I$ .

Si  $p - q/2 \neq 1$ , la matrice  $M$  est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = p - q/2$  est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres :  $u_2(1, -1, 0)$  et  $u_3(0, -1, 1)$ . Et  $u_1(1, 1, 1)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$M$  est diagonalisable et semblable à  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer  $M^n$  pour tout entier  $n$ .

$M^n = P\Delta^n P^{-1}$ , avec  $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p - q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p - q/2)^n \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On obtient  $M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n \\ 1 - 3(p - q/2)^n & 1 & 1 + 3(p - q/2)^n \\ 1 + (p - q/2)^n & 1 + (p - q/2)^n & 1 - 2(p - q/2)^n \end{pmatrix}$

4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

Pour  $p - q/2 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , sinon la convergence n'est pas assurée.

### Exercice n° 2

Soient  $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$  et  $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$  où  $n$  est un entier naturel et  $x$  un nombre réel strictement positif.

1. Trouver une relation de récurrence entre  $f_n(1)$  et  $f_{n-1}(1)$ . En déduire la valeur de  $f_n(1)$  en fonction de  $n$ .

On obtient :  $f_0(1) = 1$  et  $f_1(1) = 2/3$

A l'aide d'une intégration par parties :

$$f_n(1) = \left[ t(1-t^2)^n \right]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = 2n \int_0^1 (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{n-1} dt$$

$$f_n(1) = -2n f_n(1) + 2n f_{n-1}(1), \text{ d'où } f_n(1) = \frac{2n}{2n+1} f_{n-1}(1)$$

Par récurrence, on obtient :  $f_n(1) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Montrer que  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

$\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \int_0^1 \left( \int_t^1 (1-x^2)^n dx \right) dt$ . On fait une intégration par parties, en posant :  $u' = 1$

et  $v = \int_t^1 (1-x^2)^n dx$  et on obtient immédiatement le résultat :  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$ .

3. Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 1 - F_n(1)$

$$u_n = 1 - F_n(1) = \int_0^1 \frac{f_n(1)}{f_n(1)} dt - \int_0^1 \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt = \frac{1}{f_n(1)} \int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{(2n+1) f_n(1)}$$

On a :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{2n+4}$ . La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

**Exercice n° 3**

Soient  $f$  la fonction numérique définie sur  $R^2$  par :  $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$  et  $D = R^+ \times R^+$ .

1. Calculer  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

Soit  $K_n = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$ .

$$I_n = \iint_{K_n} f(x, y) dx dy = \iint_{K_n} re^{-r^2} dr d\alpha = \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^n re^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-n^2}.$$

$$\text{Et } I = \lim_n I_n = \frac{\pi}{4}.$$

2. En déduire la valeur des intégrales :  $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ .

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy = \left( \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$
 On obtient :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

3. En déduire la valeur de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$  et interpréter ce résultat.

Par un changement de variable  $t = x/\sqrt{2}$ , on obtient :  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = 1$ . La fonction

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$  est positive et d'intégrale égale à 1 sur  $R$ , c'est donc une densité et on reconnaît celle de la loi normale centrée réduite.

4. Soit  $f_\alpha : R^+ \rightarrow R$  définie par :  $f_\alpha(x) = 2\varphi(x)\phi(\alpha x)$ , où  $\alpha \in R$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$  et

$$\phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \varphi(t) dt. \text{ Déterminer } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$$

$$\text{Pour } x=0, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{ et}$$

$$\text{Pour } x \neq 0, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 2\varphi(x)$$

5. Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$  dans le cas où  $\varphi(x) = x \exp(-x^2)$

$$\text{Pour tout } x, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$$

### Exercice n° 4

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs.

1. Etudier, selon la nature de la série de terme général  $u_n$ , la convergence de la série de terme

$$\text{général : } v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Si  $\lim_n u_n = 0$ , alors  $v_n$  est équivalent à  $u_n$  et les deux séries sont de même nature.

Si  $\lim_n u_n \neq 0$ , alors  $\lim_n v_n \neq 0$  et les deux séries sont toujours de même nature.

2. Etudier, selon la nature de la série de terme général  $u_n$ , la convergence de la série de terme

$$\text{général : } w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors  $\lim_n u_n = 0$  et  $w_n$  est équivalent à  $u_n$ , donc la série de terme général  $w_n$  converge.

Si la série de terme général  $u_n$  diverge et si la suite  $(u_n)$  est majorée ( $u_n \leq K$ ), on a :

$$w_n \geq \frac{u_n}{1 + K^2} \text{ et la série de terme général } w_n \text{ diverge également.}$$

Si la série de terme général  $u_n$  diverge et si la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée, on ne peut rien dire sur la série de terme général  $w_n$ . Par exemple, pour  $u_n = \sqrt{n}$ , la série de terme général  $w_n$  diverge et pour  $u_n = n^2$ , la série de terme général  $w_n$  converge.

### Exercice n° 5

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

1. On pose  $\varphi(x) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a))$ .

Déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  de sorte que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

Comme  $\varphi(a) = 0$ , il faut aussi  $\varphi(b) = \lambda(f(b) - f(a)) + \mu(g(b) - g(a)) = 0$ . Parmi les solutions possibles, on trouve :  $\lambda_0 = -(g(b) - g(a))$  et  $\mu_0 = f(b) - f(a)$ . Les autres couples  $(\lambda, \mu)$  vérifient :  $(\lambda, \mu) = (k\lambda_0, k\mu_0)$ .

2. En déduire que :  $\exists c \in ]a, b[, (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$

On applique le théorème de Rolle à  $\varphi$  sur  $[a, b]$ , il vient :  $\varphi'(c) = 0$ , ce qui donne la relation recherchée.

3. En déduire, sous des conditions que l'on précisera que :  $\exists c \in ]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Il faut que  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$  puisque  $g(b) - g(a) \neq 0$  par le théorème des accroissements finis appliqué à  $g$  sur  $[a, b]$ .

### Exercice n° 6

Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  est diagonalisable et semblable à :  $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc  $M = P\Delta P^{-1}$  et  $\Delta = P^{-1}MP$ .

Soit  $B$  une matrice qui commute avec  $M$ . Posons  $X = P^{-1}BP$ . On obtient :  $MB = P\Delta XP^{-1}$  et  $BM = PX\Delta P^{-1}$ . Donc  $\Delta X = X\Delta$  et il faut et il suffit que  $X$  commute avec la matrice diagonale  $\Delta$ .

En écrivant les produits  $\Delta X$  et  $X\Delta$ , on trouve la condition nécessaire et suffisante :  $X$  matrice diagonale. Soit  $X = \text{diag}(a, b, c)$ , on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 4a - 8b + 6c & -8a + 16b - 8c & 16a - 40b + 24c \\ -3a + 3c & 6a - 4c & -12a + 12c \\ -2a + 2b & 4a - 4b & -8a + 10c \end{pmatrix}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

### Exercice

On note  $\mathbb{R}[X]$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des polynômes à coefficients réels. Quel que soit le polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , on identifie le polynôme  $P$  et la fonction  $x \mapsto P(x)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui lui est naturellement associée.

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère le polynôme  $A(x) = (x+1)^{2n} - 1$  de  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Montrer que  $A(x) = x \times B(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , où  $B$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté  $b_0$ .
2. Déterminer les racines de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ . On posera  $z_0 = 0$  et les autres racines  $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$  seront mises sous forme trigonométrique.
3. On pose  $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .

(a) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que  $P_n = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$ .

En déduire que, si  $Q_n = \prod_{\ell=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$ , alors  $P_n = \sqrt{Q_n}$ .

(b) Calculer de deux façons :  $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ . Puis, en déduire  $Q_n$  et enfin,  $P_n$ .

### Problème

#### I. Continuité et dérivation sous le signe $\int$ .

Soient  $a < b$  deux nombres réels,  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et

$$f : \begin{cases} I \times [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto f(x, t) \end{cases}$$

une application continue. Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

1. Montrer que  $g$  est continue.
2. On suppose que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe et continue sur  $I \times [a, b]$ . Soit  $x_0 \in I$  ; posons pour  $x \in I$  :

$$\varphi(x, t) = f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

- (a) Montrer que la fonction  $\varphi$  est dérivable par rapport à  $x$  sur  $I$  et pour tout  $x_0 \in I$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [a, b], \forall x \in I; |x - x_0| \leq \eta \implies \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varepsilon.$$

- (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a, b], |\varphi(x, t)| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

- (c) Montrer que l'application  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si  $f$  admet  $k$  dérivées partielles par rapport à  $x$ , qui sont toutes continues sur  $I \times [a, b]$ , alors la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et

$$g^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

**II.** On désigne par  $\mathcal{E}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions numériques continues et bornées  $f$  sur  $[0, +\infty[$ , et telles que pour tout réel strictement positif  $x$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt$  soit convergente.

On considère l'application  $S$  qui à tout élément  $f$  de  $\mathcal{E}$ , fait correspondre la fonction  $Sf$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$Sf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

Soient  $f$  un élément quelconque de  $\mathcal{E}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $u_n$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers  $Sf$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty$ .
3. Déterminer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tels que,

$$\frac{t}{x^2 + t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}, \text{ pour tout couple } (x, t) \neq (0, 0).$$

Utiliser cette égalité pour calculer  $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right)$  et en déduire que, pour tout couple de réels  $(x, t) \neq (0, 0)$  on a :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| \leq \frac{k!}{(x^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$



4. On note  $u_n^{(k)}$  la dérivée  $k$ -ème de la fonction  $u_n$ . Soit  $a \in ]0, +\infty[$ . Montrer qu'il existe une constante  $A_k$  telle que, pour tout  $x \geq a$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$\left| u_n^{(k)}(x) \right| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

En déduire que la série de fonction  $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$  converge normalement sur  $]a, +\infty[$ .

5. Montrer que la fonction  $Sf$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty$  et que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$(Sf)^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) f(t) dt.$$

**III.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(t) = \sin(t)$ .

1. Montrer que pour tout nombre positif  $T$ , on a

$$\int_0^T \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt = -\frac{T \cos(T)}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) dt. \quad (1)$$

En déduire que  $g$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

2. Le but de cette partie est de déterminer une équation différentielle dont  $Sg$  est solution.

- (a) Prouver que pour tout couple de réels  $(x, t) \neq (0, 0)$  on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) = 0.$$

- (b) En déduire que sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $Sg$  est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y = 0. \quad (E)$$

*Indication : on pourra utiliser II, 5 et faire deux intégrations par parties successives.*

- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $]0, +\infty[$ .

3. Détermination explicite de  $Sg$ .

- (a) Prouver que pour tout  $x > 0$ , on a

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \sin(t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2x}.$$

*Indication : on pourra utiliser l'égalité (1).*

En déduire la limite de  $(Sg)(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- (b) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente et que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda.$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt$  a une limite finie lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

- (c) On admet sans démonstration que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Expliciter la fonction  $Sg$ .

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****ORDRE GÉNÉRAL****(Durée de l'épreuve : 3 heures)****Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.****Sujet n° 1**

"Le sport est éducation, la plus concrète, la plus véritable : celle du caractère."  
Que pensez-vous de cette déclaration de René Maheu, ancien Directeur Général de l'UNESCO ?

**Sujet n° 2**

Les droits de l'homme vous paraissent-ils représenter une exigence valable en tout lieu et pour tout homme, comme l'affirme la *Déclaration*, dite justement *Déclaration Universelle*, des Nations-Unies ?

**Sujet n° 3**

L'Histoire est le produit le plus dangereux que la chimie de l'intellect ait élaboré. Elle fait rêver, elle enivre les peuples, leur engendre de faux souvenirs, exagère leurs réflexes, entretient leurs vieilles plaies, les tourmente dans leur repos, les conduit au délire des grandeurs ou à celui de la persécution." En vous appuyant sur des exemples précis, vous commenterez et éventuellement discuterez ces lignes de Paul Valéry, dans *Regards sur le monde actuel* (1931).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Calculatrice non programmable autorisée.**

**Les exercices sont indépendants.**

**Exercice n° 1**

Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $R^3$  déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

1. Déterminer une base de  $E$ . On notera  $X$  la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de  $E$ .
2. Calculer la matrice  $M = I - XX'$ , où  $I$  désigne la matrice unité et  $X'$  la matrice transposée de  $X$ .
3. Déterminer les valeurs propres de  $M$ .
4. Déterminer les sous espaces vectoriels propres de  $M$ . Que peut-on constater ?

**Exercice n° 2**

Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4$  et  $u_0 = 1$ .

### Exercice n° 3

Pour  $t$  nombre réel strictement positif, on définit la fonction  $f_t$  de la variable réelle  $x$  dépendant du paramètre  $t$  de la façon suivante :

$$f_t(x) = \frac{1+t}{t+x^2}$$

1. Déterminer, quand ils existent, les réels  $M(x)$  et  $m(x)$  définis par :

$$M(x) = \max_{t>0} f_t(x)$$

$$m(x) = \min_{t>0} f_t(x)$$

2. Représenter les graphes des fonctions  $M$  et  $m$ .

3. Etudier les variations de  $f_t$  ( $t>0$ ) en fonction de la variable  $x$  et tracer son graphe (on regardera la convexité).

### Exercice n° 4

1. Pour tout entier  $n$  strictement positif, la suite  $(\alpha_n)$  est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n), \quad \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Exprimer  $\alpha_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite.

2. Pour tout entier  $n$ , on définit la suite réelle  $(x_n)$ , récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \times x_n}$$

On donne  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 2$ .

Donner l'expression du terme général  $x_n$  de la suite.

3. Déterminer la limite de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice n° 5

On considère  $n$  couples fixés  $(x_i, y_i)$  de valeurs réelles strictement positives et  $\lambda$  un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer une fonction  $f$  qui minimise l'expression suivante :

$$L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^1 f''(x) dx$$

dans chacun des cas ci dessous :

1.  $f(x) = ax$
2.  $f(x) = ax^2$
3.  $f(x) = ax^2 + bx$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

### Exercice n° 6

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est égale à  $x$ . On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on souhaite étudier sa fiabilité. On dispose des expériences suivantes :

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme malades s'est avéré positif dans 98% des cas.
- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme saines s'est avéré positif pour une seule personne.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test.

On note  $M$  = « la personne est malade » et  $T$  = « la personne a un test est positif ».

Enfin, on note  $p(x)$  la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer  $p(x)$  en fonction de  $x$ .
2. Tracer le graphe de la fonction  $p$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
3. On considère que le test est fiable quand la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 95%.

Le test est-il fiable si la proportion  $x$  d'individus malades est de 5% ?

A partir de quelle proportion  $x$ , le test est-il fiable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Ce texte est tiré de l'intervention de Monsieur EMILE-ETIENNE BAULIEU, Président de l'Académie des sciences, le 21 octobre 2003.

**Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.**

**Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre écrit.**



**CHANGEMENT DE LA SCIENCE, PROGRES POUR L'HOMME ?**

Changements de la science, progrès pour l'homme, point d'interrogation ?

Faut-il qu'il y ait un grave problème, pour que le titre de mon intervention doive inclure un point d'interrogation, une ponctuation que je qualifierais de politiquement correcte, de bien pensante ! Eh bien c'est un souci pour moi que cette interrogation !

L'homme domine le monde vivant, grâce à la science. Celle-ci progresse sans nul doute, mais soudain une question surgit : ses changements contemporains seraient-ils devenus contreproductifs ?

Comment cette science, qui ne cesse de mieux connaître la matière et la fait fonctionner à l'échelle nanométrique (le milliardième de mètre), met depuis quelques années les hommes de toute la terre en communication instantanée, sans fil et sans frontière, décrit le squelette génétique à la base de la vie des individus normaux et malades, permet de contrôler notre reproduction et de visualiser notre fonctionnement cérébral, comment cette science en progrès comme jamais, si spécifique de notre espèce, peut-elle être mise en examen au tribunal du progrès humain ?

Faut-il que l'humanité soit devenue hypocondriaque pour douter à ce point de sa santé collective ! Le sentiment de progrès est un sentiment de confiance ; aujourd'hui le doute a remplacé la confiance.

Pour nous scientifiques, l'activité de la science vise à *comprendre* : comprendre le monde, comprendre le fonctionnement de notre planète, comprendre le destin de l'homme et participer à son questionnement métaphysique. Nous, scientifiques, savons combien notre condition humaine, équilibre entre le corporel, le cérébral, le spirituel est à la fois vulnérable et aléatoire. Nous savons que nous ne savons pas prédire l'avenir de notre espèce, nous savons, et peut-être est-ce la grandeur de notre condition humaine, que nous sommes menacés.

La première perception du progrès tient aux différents usages de la technique : des améliorations concrètes, proches de nous, immédiatement utiles, acceptables et intégrables. Le génie de l'homme, son inventivité, son insatiable curiosité, son infatigable manie d'essayer, l'ont conduit à voler le feu, à capturer le vent, à semer des graines, à inventer la roue... à « faire » avant de comprendre, à agir avant d'analyser, et bien souvent la technique a interrogé et stimulé la recherche fondamentale par ses observations.

Dans l'histoire de l'humanité, la technique a souvent précédé la science. Mais, naturellement aussi, la technique accompagne la science et fréquemment lui succède en concrétisant ses concepts et en appliquant ses découvertes.

C'est pourquoi je me réjouis que notre Académie ait voulu aider à la reconnaissance, à côté de l'abstraction scientifique, des avancées vertigineuses des techniques, en favorisant la création d'une Académie des technologies.

L'harmonieuse intégration et l'efficace articulation des inventions de la science et de ses applications ont ainsi engendré deux percées refondatrices de la condition humaine : d'une part l'extraordinaire développement des moyens de communication, qui ont aboli les distances tant entre les hommes qu'entre les cultures, et, d'autre part, l'implacable accroissement jusque-là silencieux de la longévité humaine.

Le doute qui saisit l'époque me paraît lié au double sentiment de pouvoir et d'impuissance qu'a l'homme vis-à-vis de la nature et de lui-même. Le sentiment de pouvoir est sans doute né des interrogations et des craintes sur l'usage de l'énergie nucléaire : l'homme maintenant craint son propre pouvoir.

Il a désormais plus peur de lui-même que de la nature ! Or, depuis l'origine, les phénomènes naturels ont menacé de très près les hommes. L'homme a réussi à résister, se protéger, et même à utiliser bien des forces de la nature : le feu, l'électricité, l'atome... La science a libéré l'homme de ses peurs, de ses superstitions d'une nature enchantée, animée d'intentions plus ou moins bonnes à son égard : la science donne à voir la nature comme indifférente. C'est en quelque sorte un libre arbitre conquis par rapport à la nature. Mais désormais l'homme s'interroge : saura-t-il la protéger de lui-même et de ses excès ? C'est aussi un libre arbitre entamé ou perdu par rapport à lui-même : l'homme est-il déterminé par ses gènes, n'est-il qu'une somme de structures et de réactions chimiques, sans pouvoir sur sa personnalité et ses choix de vie ?

Aujourd'hui, les hommes seraient-ils en train de se venger de la nature et de la menacer à leur tour ? Certains redoutent que l'activité des hommes n'altère notre environnement, notre climat, nos océans, notre atmosphère, ne les fragilise, ne les prive de leurs possibilités de régénération. Au point qu'ils s'interrogent pour savoir si notre développement est durable, ou s'il faut en changer.



La question du rapport de la science avec la nature est au cœur du doute actuel concernant les progrès de la science et se pose en des termes nouveaux à propos du monde vivant, animal et végétal.

À partir de l'exemple des organismes génétiquement modifiés, les O.G.M., je voudrais illustrer la passion et la difficulté des rapports de la Science avec le sentiment de progrès.

Voici que vient de commencer la grande aventure de la maîtrise des éléments fondamentaux du vivant, avec la découverte de l'arrangement de l'A.D.N. des gènes.

Des molécules assez simples chimiquement, mais numériquement sélectionnées pour faire exister la diversité des formes de la vie, permettent la synthèse d'autres composés (protéines en particulier), qui assureront la régulation de la matière vivante en réaction avec un environnement infiniment varié et variable.

« Maîtriser le vivant » veut dire que l'on sait de mieux en mieux isoler, découper, recombinaison, transférer cet A.D.N. des gènes. Dans le cas des O.G.M., les caractéristiques du monde végétal peuvent être directement soumises à notre volonté : créer des plantes qui ont un meilleur rendement, qui résistent mieux au froid ou au chaud, à l'eau ou à la sécheresse, à certains pesticides, qui peuvent empoisonner spécifiquement les prédateurs animaux, créer des plantes qui se conservent mieux...

Cette méthode permet même de créer des plantes qui produisent des substances chimiques difficiles et chères à synthétiser par d'autres moyens, par exemple certains médicaments... Ainsi l'hémoglobine, dont le manque n'est aujourd'hui compensé que par la transfusion, pourrait être produite en quantité par des plants de tabac génétiquement modifié ! Tout devient possible par construction, de façon utile et efficace.

Or le sigle O.G.M., est mondialement stigmatisé, plus encore que les produits eux-mêmes. N'est-ce pas un affreux symbole, cet été au Larzac que d'avoir mis en avant des centaines de volontaires prêts à les faucher.

Cette inquiétude a pour première réponse la prudente modestie de l'attitude autocritique qui gouverne l'activité scientifique. L'essence de l'activité est de comprendre le monde, mais sa méthodologie n'est que modestie, à partir du doute, de l'hésitation, de la vérification ; c'est à tort que l'on suspecte la science d'arrogance, car son propos est de conquérir le savoir. Y a-t-il tentation du pouvoir ?

Les hommes de science d'aujourd'hui ne sont pas, comme on le croit quelquefois, les adeptes du « tout-scientifique », pas plus que d'un quelconque « tout-économique ». Ils savent que les croyances, les valeurs morales, politiques, culturelles et affectives d'une époque, déterminent le bon ou le mauvais usage des découvertes.

Après la peur, l'ignorance. L'exemple d'un nouveau maïs, le « maïs-t » illustre bien un malentendu qui repose d'abord sur une mauvaise compréhension du mécanisme en cause et des objectifs poursuivis. Le « maïs-t », le « t » représentant l'élément génétique d'une bactérie (*bacillus thuringiensis*) qu'on ajoute à l'ADN du maïs (c'est l'objet de la modification O.G.M.) et qui permet la synthèse d'une protéine tueuse de la chenille pyrale, ennemie du maïs. Le maïs ainsi pourvu, la récolte sera épargnée par la chenille. La méthode plus traditionnelle est l'utilisation complexe et polluante d'insecticides qui, certes, sauveront la récolte, mais qui causeront d'autres effets négatifs sur l'environnement.../...



Le charbon contre l'électricité, l'électricité contre le nucléaire... L'exemple de l'énergie montre combien les techniques se renouvellent avec une efficacité croissante, d'où la nécessité d'encadrer, de normaliser leurs usages.

La « révolution verte » qui, à la fin du siècle dernier, utilisa les méthodes conventionnelles, pour le riz et le blé, a sauvé les grands pays d'Asie de la famine.

Mais l'évolution démographique de notre planète, qui a vu sa population passer de trois à six milliards d'habitants au cours des soixante-dix dernières années, promet à nouveau trois milliards d'individus de plus d'ici 2100, 50 % d'augmentation ! Le choix collectif de nombreux pays du Tiers Monde a consisté à ne pas encadrer le contrôle des naissances. Comment sauver aujourd'hui ces nouveaux êtres de la famine sans une nouvelle révolution agraire ?

La révolution des O.G.M. est un progrès indispensable, il faut l'admettre.

Ceci ne veut pas dire que notre confiance doive être aveugle. La science se doit par exemple de prévoir l'apparition et la multiplication d'insectes résistant au gène si efficace contre la chenille : pour se débarrasser de ces mutants, il faudra encore plus de science – continuer la recherche pour détecter et circonvenir cette évolution.

Après la peur et l'ignorance, voici enfin l'*idéologie* : ceux qui s'opposent violemment aux plus précautionneuses recherches sur les O.G.M., et le font avant même de connaître le résultat des expériences, se dressent contre les principes (et les lois) démocratiques de notre République, et recrutent leurs adeptes en fabriquant des amalgames : économiques (les multinationales), politiques (le grand capital), et médiatiques (Astérix redoutant que le ciel ne tombe sur la tête des habitants du village gaulois). Faut-il que nous ayons scientifiquement tort parce certains ont – provisoirement j'espère – médiatiquement raison ?

Ainsi le nécessaire débat entre la science et la société se trouve faussé et obscurci. Il est pourtant urgent de montrer, de donner à voir ce que sont ces découvertes, et de débattre de leur utilisation. Il importe de ne pas faire du principe de précaution un principe de suspicion et une pratique d'inaction, mais de rechercher, vérifier, contrôler, sans négliger aucune critique, et d'être toujours prêt à des solutions différentes. C'est le devoir d'humanité et la responsabilité politique des scientifiques dans la Cité.

Ce devoir et cette responsabilité sont plus manifestes encore quand le vivant est l'espèce humaine et que le matériau implique des cellules-souches de type embryonnaire. Le débat entre la science et la société atteint son paroxysme avec ce qui est communément appelé le « clonage thérapeutique ».

De quoi s'agit-il ? Depuis peu, les découvertes permettent de canaliser la différenciation de certaines cellules humaines (souvent appelées cellules-souches) pour obtenir celles capables de réparer un défaut d'origine héréditaire, ou une lésion causée par un traumatisme ou une maladie. Cette méthode s'applique en particulier au traitement des troubles qui ont leur origine dans le cerveau comme certaines maladies neuro-dégénératives.

La controverse est double : d'une part, certains s'élèvent contre ce qu'ils nomment une « chosification » des cellules humaines, redoutant leur « instrumentalisation ». Ils oublient, qu'en leur temps, les premières transfusions sanguines ou les premières greffes d'organes avaient été jugées scandaleuses et même dangereuses. Qui se souvient que les premières greffes cardiaques furent attaquées au motif qu'elles étaient considérées déshumanisantes ? Je voudrais également rappeler la transgression qu'ont commise, à une époque où la religion définissait l'éthique, nos prédécesseurs lorsqu'ils s'autorisèrent à pratiquer des autopsies. Avaient-ils pour autant altéré notre respect des autres, notre amour du prochain, corps et âmes réunis ?

La controverse a, d'autre part, des arguments invoqués au nom du débat sur le début de la vie. Certains excluent en effet toute recherche sur l'embryon puisque celui-ci est potentiellement une personne. C'est tout à fait une position cohérente, de la part de ceux qui refusent toute intervention dans le processus de reproduction, adoptant ainsi, par principe, une position proche de celle de l'Église catholique romaine, pour laquelle la vie humaine commence dès la fécondation.

Mais, s'agissant de cellules humaines, la crainte de Faust ou du Golem resurgit. On fantasme facilement sur des dérives imaginaires. On a raison de tout anticiper et de prévoir un arsenal de limites et d'encadrement, mais il ne faut pas pour autant céder à l'aveuglement : il faut regarder la réalité et la connaissance en face.

Le changement et la transgression sont consubstantiels à la science : chercher du nouveau est une activité permanente de tous les hommes, « une version plus hardie du métier de vivre », comme l'a rappelé Pierre-Gilles de Gennes ici même l'an dernier, en citant Primo Levi, le chimiste mais aussi l'humaniste dont la déportation a marqué le destin.

Progrès tout cela ? Oui, si on l'inscrit dans une perspective de plus grande fraternité, de meilleure compréhension de notre monde et des hommes. Faisons en sorte que les progrès scientifiques ne soient pas qu'un moyen de plus pour renouveler des activités marchandes.

Comment ces changements et ces progrès influencent-ils notre bonheur personnel, amoureux, familial ? Je crois qu'avec le feu, l'électricité, les antibiotiques, nous sommes plus heureux que les hommes qui dessinèrent Lascaux : nous avons plus de temps à vivre, pour être libre et pour aimer. Mais leur art nous parle et nous touche : le *continuum* entre nous tient sans doute à l'affectivité, à l'imaginaire, aux désirs, qui ne se résument pas à des conditions de vie, à des acquis.

Nos progrès nous déterminent : ils ne nous définissent pas.

On pourrait aujourd'hui avoir la tentation de s'en tenir aux acquis d'une humanité qui dispose déjà de tant de moyens pour mieux vivre, et choisir de mieux les partager. Je comprends ce sentiment, cette intuition qu'il faudrait marquer une pause.

Mais il ne faut pas compter sur un palier de l'évolution scientifique, sur un moratoire du changement : c'est une hypothèse totalement irréaliste – et bien des conservateurs tranquilles vont le regretter. L'homme invente, veut savoir toujours plus, que cela touche le climat sur notre terre et son évolution, les planètes alentour, ou les possibilités de vie prolongée en bonne santé et pleine lucidité.

C'est irrépressible. Aux hommes et aux femmes, à leurs représentants, à leurs civilisations, d'en faire des bonheurs, d'accompagner ces percées, et d'inventer les règles de vie qui en feront des progrès pour le genre humain.

# CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

## ITS Voie B Option Mathématiques

### Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

Avril 2011

### Exercice

1. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k = xB(x)$$

avec

$$B(x) = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^{k-1} = C_{2n}^1 + \sum_{k=2}^{2n-1} C_{2n}^k x^{k-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n-1}.$$

Donc, le polynôme  $B$  est de degré  $2n - 1$ , son coefficient dominant est  $C_{2n}^{2n} = 1$  et son terme constant  $b_0$  vaut  $C_{2n}^1 = 2n$ .

2.  $z$  est racine de  $A$  si et seulement si  $(z + 1)^{2n} = 1$  ce qui équivaut à  $z + 1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$  où  $k$  est un entier compris entre 0 et  $2n - 1$ . Donc les racines de  $A$  sont  $z_0 = 0$  et  $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$  avec  $k$  est un entier compris entre 1 et  $2n - 1$ .

3. (a) Faisons dans  $P_n$  le changement d'indice  $\ell = 2n - k$ . Alors :

$$P_n = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{\ell\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$$

car  $\sin(\pi - x) = \sin x$ .

On en déduit que

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2.$$

De plus, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $2n - 1$ ,  $\frac{k\pi}{2n}$  appartient à  $[0, \pi]$

donc  $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$  ce qui implique que  $P_n$  et  $Q_n$  sont positifs. Par conséquent,  $P_n = \sqrt{Q_n}$ .

(b) On a  $B(x) = \prod_{k=1}^{k=2n-1} (x - z_k)$  donc  $B(0) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = b_0$ , soit

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = -b_0 = -2n.$$

D'autre part, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $2n - 1$  :

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \left( \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right) \right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right),$$

donc,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{k=2n-1} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{k\pi}{2n}} \\ &= 2^{2n-1} i^{2n-1} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n-1} k\right) \prod_{k=1}^{k=2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = 2^{2n-1} \frac{(-1)^n}{i} \exp\left(\frac{2n-1}{2} i\pi\right) Q_n;$$

or  $\exp\left(\frac{2n-1}{2} i\pi\right) = e^{in\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{i}$  d'où

$$Q_n = 2n \times 2^{1-2n} = \frac{n}{4^{n-1}} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

## Problème

### I. Continuité et dérivation sous le signe $\int$ .

1. Pour tout  $x \in I$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$  donc intégrable sur  $[a, b]$ . La fonction  $g$  est ainsi bien définie.

Soient  $x_0 \in I$  et  $r > 0$ , tel que  $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ , ce qui est possible puisque  $I$  est ouvert. Le pavé  $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a, b]$  est une partie compact de  $\mathbb{R}^2$  (il est fermé et borné). La fonction  $f$  est donc uniformément continue sur  $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a, b]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x, x' \in [x_0 - r, x_0 + r]$  et pour tout  $t, t' \in [a, b]$ , on a

$$(|t - t'| \leq \eta \quad \text{et} \quad |x - x'| \leq \eta) \implies |f(x, t) - f(x', t')| \leq \varepsilon.$$

Soit  $x$  et  $x'$  appartenant à  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Nous avons

$$|g(x) - g(x')| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x', t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x', t)| dt.$$

Appliquons l'uniforme continuité de  $f$  sur  $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a, b]$  en choisissant  $t = t'$ . Si  $|x - x'| \leq \eta$ , alors on a  $|f(x, t) - f(x', t)| \leq \varepsilon$  quel que soit  $t \in [a, b]$ , d'où

$\int_a^b |f(x, t) - f(x', t)| dt \leq \varepsilon(b - a)$ . Ainsi on a  $|g(x) - g(x')| \leq \varepsilon(b - a)$  dès que  $x$  et  $x'$  appartiennent à  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Cela montre que  $g$  est uniformément continue sur  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , en particulier  $g$  est continue au point  $x_0$ .

Le point  $x_0$  étant pris arbitrairement dans  $I$ , cela entraîne que  $g$  est continue sur  $I$ .

2. (a) La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $I$ , car elle est somme de fonctions dérivables et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

Soient  $x_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $r > 0$ , tel que  $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ , ce qui est possible puisque  $I$  est ouvert. La fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est uniformément continue sur le compact  $K = [x_0 - r, x_0 + r] \times [a, b]$ , il existe donc  $\varrho > 0$  tel que pour tout  $(t, x), (t', x') \in K$ , on ait :

$$(|t - t'| \leq \varrho \quad \text{et} \quad |x - x'| \leq \varrho) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x', t') \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui, en prenant  $\eta = \min(\varrho, r)$ , donne

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall x \in I; \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varepsilon.$$

- (b) Soit  $\varepsilon > 0$ , par la question précédente, il existe  $\eta > 0$ , tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a, b], \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Soit  $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$  et  $t \in [a, b]$ , par le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]\min(x_0, x), \max(x_0, x)[$  tel que  $\varphi(x, t) - \varphi(x_0, t) = (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, t)$ . Comme  $\varphi(x_0, t) = 0$  et  $\xi \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ , par (1),  $|\varphi(x, t)| \leq |x - x_0| \varepsilon$ . Ce qui donne,

$$x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \implies |\varphi(x, t)| \leq |x - x_0| \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

- (c) Soit  $x_0 \in I$  fixé. En intégrant la fonction  $\varphi$  entre  $a$  et  $b$  on a pour tout  $x \in I$ ,

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| = \left| \int_a^b \varphi(x, t) dt \right|.$$

D'après la question précédente, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \varepsilon |x - x_0| |b - a|.$$

La fonction  $g$  est ainsi dérivable en  $x_0$  avec pour dérivée :

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Enfin, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  étant continue, le théorème de continuité sous le signe  $\int$  démontré dans I. 1., nous donne la continuité de  $g'$ .

3. C'est une simple récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ . En effet, la démonstration à l'ordre  $k = 1$ , est traitée dans la partie I.2. Supposons que la relation est vraie jusqu'à l'ordre  $k \geq 1$  et supposons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I \times [a, b]$ . Alors, par l'hypothèse de récurrence  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et

$$g^{(k)} = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I \times [a, b]$ , la fonction  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$  est de  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \times [a, b]$ . On applique le résultat de la récurrence pour  $k = 1$  à la fonction  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$  et on obtient immédiatement le résultat à l'ordre  $k + 1$ .

## II.

1. Soit  $x > 0$ , comme l'intégrale  $Sf(x)$  converge, la somme partielle  $\sum_{n=0}^N u_n(x) = \int_0^{N+1} \frac{tf(t)}{x^2+t^2} dt$  converge vers  $Sf(x)$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . Autrement dit, la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  et a pour somme  $Sf$ .
2. On utilise le résultat de la première partie : l'application  $(x, t) \mapsto \frac{tf(t)}{x^2+t^2}$  de  $\mathbb{R}_+^* \times [n, n+1]$  dans  $\mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . La fonction  $u_n$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} f(t) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2+t^2} \right) dt$ .
3. On a  $x^2 + t^2 = (x - it)(x + it)$ . Par les méthodes classiques on décompose la fraction rationnelle  $\frac{t}{x^2+t^2}$  en éléments simples, on trouve  $\alpha = -\frac{i}{2}$  et  $\beta = \bar{\alpha} = \frac{i}{2}$  :

$$\frac{t}{x^2+t^2} = -\frac{i}{2} \frac{1}{x-it} + \frac{i}{2} \frac{1}{x+it}. \quad (2)$$

Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{1}{x-it} \right) = \frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{1}{x+it} \right) = \frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}}.$$

d'où

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2+t^2} \right) = (-1)^{k+1} i \frac{k!}{2} \left[ \frac{1}{(x-it)^{k+1}} - \frac{1}{(x+it)^{k+1}} \right].$$

Pour tout couple de réels  $(x, t) \neq (0, 0)$ , on a  $|x - it| = |x + it| = (x^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$  et

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2+t^2} \right) \right| &\leq \frac{k!}{2} \left[ \frac{1}{|x-it|^{k+1}} + \frac{1}{|x+it|^{k+1}} \right] \\ &= \frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}. \end{aligned}$$

4. Rappelons que d'après la question II, b, la fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} f(t) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2+t^2} \right) dt.$$



La fonction  $f$  étant bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , la quantité  $M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)| \in \mathbb{R}_+$  est finie. Posons  $A_k = Mk!$ . On a pour tout  $x \in [a, +\infty[$

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$  est convergente (car  $k+1 \geq 2$  et  $\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sim \frac{1}{t^{k+1}}$ ), la série de terme général  $A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$  est convergente, ce qui prouve la convergence normale sur  $[a, +\infty[$  de la série  $\sum u_n^{(k)}$ .

5. On démontre par récurrence la propriété suivante, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $Sf$  appartient à  $\mathcal{C}^k$  et

$$(Sf)^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) f(t) dt.$$

Démontrons la propriété pour  $k = 1$ , la preuve du passage de  $k$  à  $k+1$  est identique à celle pour  $k = 1$ . Soit  $a > 0$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$  est convergente sur  $[a, +\infty[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$ , de plus la série de fonction  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$  est normalement convergente sur  $[a, +\infty[$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme la fonction  $Sf = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est dérivable sur  $[a, +\infty[$  et pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,

$$(Sf)'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) f(t) dt.$$

Enfin, comme  $a > 0$  est arbitraire,  $Sf$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### III.

1. Posons  $u(t) = \frac{t}{x^2+t^2}$  et  $v(t) = -\cos(t)$ . Par intégration par parties, on obtient, pour tout  $T > 0$ ,

$$\int_0^T \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt = -\frac{T \cos(T)}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) dt.$$

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) dt$  est absolument convergente puisque

$$\left| \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) \right| \leq \frac{|x^2 - t^2|}{(x^2 + t^2)^2} \leq \frac{1}{x^2 + t^2}.$$

Par ailleurs  $\left| \frac{T \cos(T)}{x^2 + T^2} \right| \leq \frac{T}{x^2 + T^2} \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow +\infty$ . Il en résulte que  $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt$  est convergente et  $g \in \mathcal{E}$ . De plus

$$Sg(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) dt. \quad (3)$$

2. (a) En utilisant la décomposition (2), on vérifie que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) = -\frac{i}{(x - it)^3} + \frac{i}{(x + it)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right)$$

(b) D'après la question précédente et II. 5, on a

$$(Sg)''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \sin(t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \sin(t) dt.$$

On intègre une première fois par parties, on a

$$\begin{aligned} (Sg)''(x) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \sin(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \cos(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \cos(t) dt, \end{aligned}$$

car  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{x^2 + t^2} \right) \sin(t) \right| \leq \left| \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} \right| \rightarrow 0$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Par une deuxième intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} (Sg)''(x) &= \left[ \frac{t}{x^2 + t^2} \cos(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \sin(t) dt \\ &= (Sg)(x), \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \cos(t) = 0.$$

(c) L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  est l'ensemble des fonctions  $y$  de la forme  $y : x \rightarrow ae^x + be^{-x}$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

3. (a) D'après (3),

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \sin(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos(t) dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \sin(t) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|x^2 - t^2|}{(x^2 + t^2)^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Puis par le changement de variable  $u = x/t$  on obtient,

$$(Sg)(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2} dt = \frac{1}{x} \left[ \text{Arctan}(u) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (Sg)(x) = 0$ .

(b) La fonction  $\frac{\sin(t)}{t}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  est prolongeable par continuité au point zéro, elle est donc intégrable au voisinage de zéro et sur tout intervalle de type  $[0, M]$ , en particulier sur  $[0, \pi/2]$ . Montrons la convergence de l'intégrale sur  $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ . Par une intégration par parties, pour tout  $M > \pi/2$ , on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin(t)}{t} dt = -\frac{\cos(M)}{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$



L'absolue convergence de  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$  et  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\cos(M)}{M} = 0$  implique la convergence de  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  et par suite celle de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x^2 + t^2)} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda \end{aligned}$$

par le changement de variables  $t = x\lambda$ .

Or pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(u)| \leq |u|$ . Donc pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda \right| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{x\lambda}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda \\ &= x \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} \\ &= \frac{\pi}{2} x. \end{aligned}$$

Donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 et  $Sg(x)$  tend vers  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$  quand  $x$  tend vers 0.

- (c) D'après les questions (b) et (c) de **III. 2.**, il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $Sg(x) = ae^x + be^{-x}$ , pour tout  $x > 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Sg(x) = 0$ , la constante  $a$  est nulle,  $a = 0$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Sg(x) = \frac{\pi}{2}$ , on a  $b = \frac{\pi}{2}$ . D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad Sg(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $R^3$  déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

1. Déterminer une base de  $E$ . On notera  $X$  la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de  $E$ .

On a :  $(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ , d'où  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calculer la matrice  $M = I - XX'$ , où  $I$  désigne la matrice unité et  $X'$  la matrice transposée de  $X$ .

On obtient :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs propres de  $M$ .

$\det(M - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)(2 + \lambda)$ . Les valeurs propres sont donc : -2, 0 et 1.

4. Déterminer les sous espaces vectoriels propres de  $M$ . Que peut-on constater ?

Le sous espace propre associé à la valeur propre -2 est engendré par le vecteur :  $(1, 1, -2)$ ,

Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par le vecteur :  $(1, -1, 0)$ ,

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur :  $(1, 1, 1)$ .

On obtient ainsi une base orthonormée, ce qui est toujours vérifié pour une matrice symétrique. On pourrait même choisir une base orthogonale.

### Exercice n° 2

Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4$  et  $u_0 = 1$ .

On vérifie aisément que  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$ , d'où  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n}(u_1 - u_0) < 0$ , la suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

Si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , celle ci doit vérifier l'équation :  $l = \frac{1}{2}l - 4$ , soit  $l = -8$ .

On montre facilement par récurrence que  $u_n > -8$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée, elle converge vers  $-8$ .

Remarque : On peut aussi chercher le réel  $k$  tel que la suite  $v_n = u_n + k$  est une suite géométrique  $v_{n+1} = a.v_n$

On trouve  $k = 8$ ,  $a = \frac{1}{2}$  et donc  $v_n \rightarrow 0$  et donc  $u_n \rightarrow -8$ .

### Exercice n° 3

Pour  $t$  nombre réel strictement positif, on définit la fonction  $f_t$  de la variable réelle  $x$  dépendant du paramètre  $t$  de la façon suivante :

$$f_t(x) = \frac{1+t}{t+x^2}$$

1. Déterminer, quand ils existent, les réels  $M(x)$  et  $m(x)$  définis par :

$$M(x) = \max_{t>0} f_t(x)$$

$$m(x) = \min_{t>0} f_t(x)$$

La dérivée de  $f_t$  par rapport à la variable  $t$  est égale à :  $f'_t(x) = \frac{x^2 - 1}{(t + x^2)^2}$

Pour  $|x| \geq 1$ ,  $f_t$  est croissante, pour  $t > 0$ , de  $\frac{1}{x^2}$  à 1.

Pour  $|x| < 1$ ,  $f_t$  est décroissante, pour  $t > 0$ , de  $\frac{1}{x^2}$  à 1.

On obtient donc :

$$m(x) = \underset{t>0}{\text{Min}} f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

$$M(x) = \underset{t>0}{\text{Max}} f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

2. Représenter les graphes des fonctions M et m.

Les graphes sont simples à tracer et ils sont « complémentaires », puisque  $m(x) = \text{Min}(1, 1/x^2)$  et  $M(x) = \text{Max}(1, 1/x^2)$ .

3. Etudier les variations de  $f_t$  ( $t>0$ ) en fonction de la variable  $x$  et tracer son graphe.

La dérivée de  $f_t$  par rapport à la variable  $x$  est égale à :  $f_t'(x) = \frac{-2x(1+t)}{(t+x^2)^2}$  et c'est une fonction paire. Cette fonction est décroissante sur  $R^+$  de  $1+1/t$  à 0. Elle admet une tangente horizontale en  $(0, 1+1/t)$ . Sa dérivée seconde s'annule pour  $x = \pm\sqrt{t/3}$  et la valeur de  $f_t$  en ces points est  $3(1+t)/4t$ . La fonction est concave sur l'intervalle  $[-\sqrt{t/3}, +\sqrt{t/3}]$  et convexe sinon.

#### Exercice n° 4

1. Pour tout entier  $n$  strictement positif, la suite  $(\alpha_n)$  est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n), \quad \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Exprimer  $\alpha_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$$2x^2 - x - 1 = 0 \text{ et les solutions sont : } x = 1 \text{ ou } x = -1/2.$$

Le terme général de la suite  $(\alpha_n)$  est de la forme :  $\alpha_n = \lambda(1)^n + \mu(-1/2)^n$  avec  $\alpha_1 = 1 = \lambda + \mu(-1/2)$  et  $\alpha_2 = 1/2 = \lambda + \mu(1/4)$ . La résolution du système donne :  $\lambda = 2/3$  et  $\mu = (-2/3)$ . On obtient :

$$\alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Et  $\lim_n \alpha_n = 2/3$ .

2. Pour tout entier  $n$ , on définit la suite réelle  $(x_n)$ , récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \times x_n}$$

On donne  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 2$ .

Donner l'expression du terme général  $x_n$  de la suite.

On vérifie aisément que cette suite  $(x_n)$  est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple :  $x_2 = 2^{1/2}$ ,  $x_3 = 2^{3/4}$ ,  $x_4 = 2^{7/8}$ .

On montre alors par récurrence que  $x_n = 2^{\alpha_n}$ . En effet :  $x_{n+2} = \sqrt{2^{\alpha_{n+1}} \times 2^{\alpha_n}} = (2^{\alpha_{n+1} + \alpha_n})^{1/2}$  et  $x_{n+2}$  est de la forme  $2^{\alpha_{n+2}}$  si et seulement si on a la relation :  $\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n)$

avec  $\alpha_1 = 1$ , et  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ . On se trouve dans la situation de la question précédente, donc

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Déterminer la limite de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_n x_n = 2^{2/3}$$

Remarque : Puisque la suite de terme général  $x_n$  est strictement positive, on peut passer au logarithme de base 2. On a alors  $\alpha_n = \log_2 x_n$  (le log base 2 est obligatoire pour retrouver les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de la question 1).

### Exercice n° 5

On considère  $n$  couples fixés  $(x_i, y_i)$  de valeurs réelles strictement positives et  $\lambda$  un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer une fonction  $f$  qui minimise l'expression suivante :

$$L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^1 f''(x) dx$$

dans chacun des cas ci dessous :

1.  $f(x) = ax$
2.  $f(x) = ax^2$
3.  $f(x) = ax^2 + bx$

1. Pour  $f(x) = ax$ , on a :  $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$ . Cette fonction admet un minimum pour la valeur de  $a$  qui annule la dérivée de cette fonction  $L$  par rapport à  $a$ .

On obtient :  $2a(\sum_{i=1}^n x_i^2) - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ , d'où  $a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$

2. Pour  $f(x) = ax^2$ ,  $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2)^2 + 2a\lambda$ . En dérivant par rapport à  $a$ ,

on obtient :  $2a(\sum_{i=1}^n x_i^4) - 2\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2\lambda = 0$ , d'où  $a = \frac{\sum_i x_i^2 y_i - \lambda}{\sum_i x_i^4}$

3. Pour  $f(x) = ax^2 + bx$ ,  $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i)^2 + 2a\lambda$ . On dérive par rapport à  $a$  et par rapport à  $b$ .

$$L'_a = 2a(\sum_{i=1}^n x_i^4) + 2b(\sum_i x_i^3) - 2\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2\lambda = 0 \text{ et}$$

$$L'_b = 2a(\sum_{i=1}^n x_i^3) + 2b(\sum_i x_i^2) = \sum_i x_i y_i$$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(\sum_i x_i^4) + b(\sum_i x_i^3) = \sum_i x_i^2 y_i - \lambda \\ a(\sum_i x_i^3) + b(\sum_i x_i^2) = \sum_i x_i y_i \end{cases}$$

La résolution de ce système donne, en posant  $\Delta = (\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i^3)^2$  :

$$a = \frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i x_i^2 y_i - \lambda) - (\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i y_i)}{\Delta} \text{ et}$$

$$b = \frac{(\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i^2 y_i - \lambda)}{\Delta}$$

### Exercice n° 6

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est égale à  $x$ . On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on souhaite étudier sa fiabilité. On dispose des expériences suivantes :

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme malades s'est avéré positif dans 98% des cas.
- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme saines s'est avéré positif pour une seule personne.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test.

On note  $M$  = « la personne est malade » et  $T$  = « la personne a un test est positif ».

Enfin, on note  $p(x)$  la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer  $p(x)$  en fonction de  $x$ .

$$\text{On a : } p(x) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \text{ ou encore } p(x) = \frac{P(M \cap T)}{P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})}$$

D'où  $p(x) = \frac{P_M(T)x}{P_M(T)x + P_{\overline{M}}(T)(1-x)}$ , car  $P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$  où  $P_M(T)$  est la probabilité conditionnelle de  $T$  sachant  $M$ .

Dans l'application numérique :  $P(M) = x$  et  $P(\overline{M}) = 1 - x$ ,  $P_M(T) = 0,98$  et  $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$

On obtient :

$$p(x) = \frac{0,98x}{0,97x + 0,01} = \frac{98x}{97x + 1}$$

2. Tracer le graphe de la fonction  $p$  sur l'intervalle  $[0,1]$

Le graphe de la fonction  $p$  est une fonction hyperbolique croissante restreinte à l'intervalle  $[0,1]$ .

3. On considère que le test est fiable quand la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 95%.

Le test est-il fiable si la proportion  $x$  d'individus malades est de 5% ?

$$p(0,05) = \frac{98 \times 0,05}{97 \times 0,05 + 1} \approx 0,8376.$$

Le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade.

A partir de quelle proportion  $x$ , le test est-il fiable ?

On doit résoudre l'équation :  $p(x) \geq 0,95$ . Soit  $\frac{98x}{97x+1} \geq 0,95$  et on obtient  $x \geq \frac{19}{117} \approx 0,1624$ .

Le test est donc fiable si au moins 17% de la population est malade.



1



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point. On note  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies et continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions  $\varphi$  pour lesquelles il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|.$$

**I**

Dans cette partie nous allons étudier quelques propriétés des fonctions lipschitziennes.

1. Montrer que  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ , justifier l'existence du réel  $K_f$  défini par

$$K_f = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \mid (x, y) \in I^2, x \neq y \right\}.$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de  $f$ .

2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées de  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ . Montrer que leur produit  $fg$  est aussi une fonction de  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ . En est-il de même si  $f$  et  $g$  ne sont pas toutes les deux bornées ?
3. On suppose dans cette question que  $I$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ , le produit  $fg$  est aussi une fonction de  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ .
4. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer l'existence de deux réels positifs  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B.$$

5. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Montrer que  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est bornée sur  $I$ .  
Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz de  $f$  à l'aide de  $f'$ .

6. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  qui converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ . On suppose de plus que  $\sup \{K_{f_n} \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ . Montrer que  $f \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ .
7. Soit  $g \in \mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $K_g \leq 1$ . On considère la fonction  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $\tilde{g}(x) = g(x - n) + n(g(1) - g(0))$  pour tout  $x$  dans  $[n, n + 1]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

(a) Montrer que  $\tilde{g} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et que

$$\tilde{g}(x) = g(x), \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad K_{\tilde{g}} \leq 1.$$

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $g_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \tilde{g}(t) dt$ . Montrer que  $g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à dérivée bornée par 1.

(c) Montrer que la suite  $g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $\tilde{g}$ .

## II

Le but de cette partie est de rechercher les fonctions  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x + a) = f(x), \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  donnée et où  $a$  et  $\lambda$  sont deux réels non nuls, donnés.

1. Soit  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1). Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka), \quad (2)$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) - \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} f(x - ka). \quad (3)$$

2. On suppose dans cette sous-partie que  $|\lambda| < 1$ .

(a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$  est absolument convergente (on pourra utiliser la Question I.4).

(b) Montrer que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$$

vérifie (1) et appartient à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . En déduire que  $F$  est l'unique fonction ayant ces propriétés.

(c) Soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_1(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x).$$

Montrer que  $f_1$  et  $f_2$  sont dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et que les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  correspondantes sont données par

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}, \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}. \quad (4)$$

3. On suppose dans cette sous-partie que  $|\lambda| > 1$ .

(a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$  est absolument convergente.

(b) Montrer que

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$$

vérifie (1) et appartient à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . En déduire que  $F$  est l'unique fonction ayant ces propriétés.

(c) Soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies par

$$f_1(x) = \cos x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin x.$$

Calculer les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  correspondantes.

4. On suppose dans cette sous-partie que  $\lambda = 1$ .

(a) Montrer que, si il existe une fonction  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1), alors  $f$  est bornée.

(b) Montrer, en construisant un exemple, qu'il existe des fonctions  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  non nulles vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x+a) = 0$ .

(c) Soit  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1). La fonction  $F$  est-elle unique ?

(d) On suppose dans cette question que la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = f_2(x) = \sin x$ .

(i) Si  $\cos a \neq 1$ , montrer qu'en faisant tendre  $\lambda$  vers 1 dans la fonction  $F_2$  donnée par la formule (4), on obtient une fonction  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

(ii) Si  $a = 2\pi$ , établir qu'il n'existe aucune fonction  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

5. On suppose dans cette sous-partie que  $\lambda = -1$ .

(a) Montrer, en construisant un exemple, qu'il existe des fonctions  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  non nulles vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + F(x+a) = 0$ .

(b) Soit  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1). La fonction  $F$  est-elle unique ?

(c) On suppose dans cette question que  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = f_2(x) = \sin x$ .

(i) Si  $\cos a \neq -1$ , expliciter une fonction  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

(ii) Si  $a = \pi$ , établir qu'il n'existe aucune fonction  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Forces et faiblesses de la société démocratique (dite aussi "société ouverte").

**Sujet n° 2**

"Pas de liberté pour les ennemis de la liberté" déclarait le dirigeant politique Saint-Just pendant la Révolution Française, à l'époque de la Terreur. Que pensez-vous de cette formule ?

**Sujet n° 3**

La mondialisation vous paraît-elle un bien ou un mal pour l'Afrique ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Calculatrice non programmable autorisée.**

**Les exercices sont indépendants.**

Dans tous les exercices,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.

**Exercice n° 1**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $] -1, +\infty ]$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice n° 2**

Soit la suite  $(S_n)$  définie, pour  $n \in N^*$ , par :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

1. On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  $u_n = S_{2n}$  et  $v_n = S_{2n+1}$ . Démontrer que ces suites sont adjacentes.
2. Démontrer que la suite  $(S_n)$  converge.

3. Soit  $x$  un nombre réel positif, exprimer  $\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$  en fonction de  $x$  et  $(-x)^{2n}$ .
4. Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$   
 Etudier les variations de  $f$  (on précisera le signe de  $f$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien).
5. Comparer  $\ln(1+x)$  et  $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$
6. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

### Exercice n° 3

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle boutique. Trois emplacements, notés 1, 2 et 3, sont disponibles. Il a été possible de contrôler le chiffre d'affaires de ces boutiques pendant une semaine (tableau1).

Tableau 1

| Jours    | Chiffre d'Affaires journalier des boutiques |    |     |
|----------|---------------------------------------------|----|-----|
|          | 1                                           | 2  | 3   |
| Lundi    | 60                                          | 65 | 80  |
| Mardi    | 80                                          | 70 | 20  |
| Mercredi | 75                                          | 75 | 40  |
| Jeudi    | 55                                          | 68 | 110 |
| Vendredi | 88                                          | 66 | 10  |
| Samedi   | 60                                          | 63 | 80  |
| Dimanche | 50                                          | 60 | 60  |

1. Calculer la moyenne des chiffres d'affaires de la semaine pour chaque emplacement.

2. Différents indicateurs statistiques qui peuvent aider l'entreprise à prendre sa décision sont proposés (variance, coefficient de variation) :

Soit  $X$  le chiffre d'affaires d'une boutique et  $x_i$  le chiffre d'affaires du jour  $i$  ( $i=1, \dots, 7$ )

Nous rappelons les définitions de ces différents indicateurs.

| Indicateurs              | Expression                                            |
|--------------------------|-------------------------------------------------------|
| Variance                 | $Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ |
| Coefficient de variation | $CV(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}}$                   |

Calculer la valeur de ces indicateurs pour chaque boutique.

3. En fonction de tous ces indicateurs, quel emplacement vous semble le meilleur et pourquoi ?

#### Exercice n° 4

Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $R^3$  déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y - z = 0\}$$

1. Déterminer une base de  $E$ . On notera  $X$  la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de  $E$ .
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur  $E$ , dans la base canonique de  $R^3$ .
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $M$  définie par :

$$M = X(X'X)^{-1}X', \text{ où } X' \text{ désigne la transposée de } X.$$

4. Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la symétrie par rapport à  $E$ .

5. Soit  $D$  la droite vectorielle de  $R^3$  engendrée par le vecteur  $u = (1, 1, -1)$ .

- Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la projection orthogonale sur  $D$ .

- Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la symétrie par rapport à  $D$ .

### Exercice n° 5

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans  $R$ , on considère l'équation  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de  $(E_n)$ , notée  $x_n$ , et calculer sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
2. On pose  $u_n = 1 - x_n$ . Montrer que pour  $n$  assez grand, on a :

$$\frac{\ln n}{2n} \leq u_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}$$

(On peut poser  $f_n(u) = n \ln(1-u) - \ln u$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien).

3. Montrer que  $\ln(u_n)$  est équivalent à  $-\ln n$  et en déduire que :

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

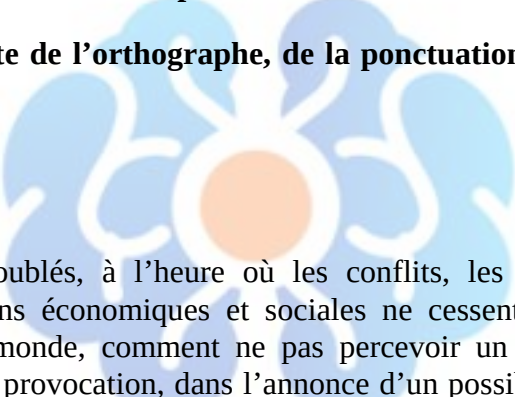
**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est extrait du livre « Eloge de l'optimisme » Quand les enthousiastes font bouger le monde de Philippe GABILLET publié en janvier 2011 aux éditions Saint Simon.**

**Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.**

**Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.**



En ces temps troublés, à l'heure où les conflits, les catastrophes naturelles et humanitaires, les récessions économiques et sociales ne cessent de rappeler à notre bon souvenir les misères du monde, comment ne pas percevoir un parfum d'insolence et de scandale, voire de franche provocation, dans l'annonce d'un possible *Eloge de l'optimisme* ? Confirmons dès à présent cette intention malicieuse, impertinente et politiquement incorrecte. Nous plaiderons donc coupable en affirmant que si l'homme a des droits, il a aussi des devoirs et que le premier d'entre eux est le devoir d'optimisme, clé de tous les autres ! Mais nous n'en sommes pas encore là.

Car autant l'admettre d'emblée, l'optimisme n'est pas vraiment à l'ordre du jour. D'ailleurs, l'a-t-il jamais été ? Qu'ils dissertent du climat, de la situation économique et financière nationale ou mondiale, de la déliquescence de l'éducation, de la culture et de l'environnement, des tensions géopolitiques ou des risques sanitaires divers auxquels nous expose la modernité, la majorité des experts compétents diffusent globalement de forts arômes de pessimisme, voire de pessimisme donneur de leçons.

Bref, nous déclare-t-on en substance, le monde va globalement assez mal, cela ne s'arrangera pas dans l'avenir et d'ailleurs, vous l'avez bien cherché !

Haro sur les optimistes ! Qu'un grand quotidien se pique de ne plus diffuser que des bonnes nouvelles, et son nombre de pages diminuera sans doute à mesure que fondra son lectorat. Quant au sympathique politicien excessivement optimiste, en particulier sur les sujets graves, la supposée immaturité d'une telle attitude risque rapidement de lui faire interrompre une carrière prometteuse, faute de crédibilité et de suffrages.

Car tout est là. Non seulement le pessimisme fait davantage vendre que l'optimisme, mais en outre il fait plus sérieux, plus solide, bref plus réaliste !

Le citoyen que nous sommes, qu'il soit père ou mère de famille, qu'il soit salarié ou retraité, étudiant ou enseignant, peine ainsi à trouver au fil des séquences de son journal télévisé favori quelques miettes de réconfort et de confiance en l'avenir. Et pour peu que -pris d'une sorte d'addiction morose- il se mette à fréquenter assidument les forums et autres blogs d'humeur qui fleurissent sur le Net, le désespoir ne tarde pas à s'infiltrer, incrustant au cœur des esprits les moins chagrins, son visage mélancolique et résigné.

Il demeure bien sûr nombre de quêteurs, porteurs et autre diffuseurs d'espoir et de confiance. Ils constituent la communauté invisible de toutes celles et ceux qui, de par le monde, pensent que l'avenir est toujours ouvert, que la partie est loin d'être perdue, que les forces vives de l'intelligence frappent à nos portes, que la créativité et la passion peuvent tout, que d'autres solutions ne demandent qu'à être inventées et que tant d'autres chemins n'attendent qu'à être explorés.

Qu'à cela ne tienne. Rendons un instant la parole aux experts et ils ne tarderont pas à qualifier ces « incorrigibles optimistes » de rêveurs, de poètes, voire de naïfs ou d'utopistes. Et c'est sous couvert de réalisme et de lucidité qu'ils les renverront séance tenante à l'analyse froide de la seule vérité qui compte, celle de la rationalité des chiffres et du bon sens, celle de l'étroite sagesse des possibles raisonnables dont il s'agit d'assurer la victoire face à l'immense éventail des impossibles radieux !

Dès lors, pourquoi un *Eloge de l'optimisme* ? Pourquoi tenter de défendre, de promouvoir, de diffuser largement cette forme de pensée, sympathique certes, mais tellement inadaptée-aux dires de certains- aux réalités d'un monde si cruel et désespérant ?

La réponse est simple : nous sommes de plus en plus nombreux à penser qu'il existe une authentique *voie optimiste* et qu'à l'heure de la montée des incertitudes dans tous les domaines, cette voie seule est à même de faire bouger dans le bon sens la société de ceux qui y vivent. Que ce soit dans le monde de l'éducation ou de la santé, dans la famille ou au bureau, chez les travailleurs sociaux ou les hommes d'affaires, dans les médias ou au coin de la rue, l'optimisme repart en campagne. Mais une chose a changé. Les optimistes ne sont plus seuls ! Dans le monde entier, un nombre croissant de chercheurs, journalistes, intellectuels, philosophes, écrivains, enseignants, psychologues etc. entreprennent désormais de mieux comprendre, de défendre et de diffuser largement la pratique de cette fabuleuse dimension de la nature humaine.

Les optimistes avaient déjà leurs grands auteurs, ils ont désormais leurs grands chercheurs, leurs chaires universitaires, et même une organisation internationale, Optimistes sans frontières, et un pays d'accueil virtuel, l'Optimistan ! Celles et ceux qui dans leur vie personnelle et professionnelle font le choix de l'optimisme sont bien sûr convaincus que cette voie est à la fois nécessaire et salubre. Mais n'est-ce pas un chemin bien abrupt en ces temps si difficiles parfois si désespérants ? Non, car l'optimisme peut être une aventure réellement positive et agréable, souriante et énergique, et somme toute relativement aisée d'accès, pour peu que l'on accepte de regarder différemment le monde qui nous entoure et par conséquent, de conduire différemment notre propre existence.

Car, et c'est bien là l'autre bonne nouvelle annoncée par les spécialistes de la question, l'optimisme n'est plus uniquement considéré comme un trait inné de personnalité, même si nous n'avons pas tous les mêmes prédispositions en la matière. Mais ce que les maîtres ès optimisme nous apprennent, c'est que la partie n'est pas jouée d'avance, même pour les plus pessimistes (pardon, les plus réalistes) d'entre nous. Oui, l'optimisme se travaille, se développe et s'entretient comme on entretient son corps et son esprit.

Au cœur de cet *Eloge de l'optimisme* réside une conviction simple, à la fois humaniste et citoyenne. Il n'y a pas, il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais d'alternative durable à l'optimisme surtout quand les brouillards descendent, que résonnent encore dans le lointain les orages qui s'éloignent et que grondent ceux qui s'approchent. Seul l'optimisme peut faire bouger le monde et évoluer positivement ceux qui y viennent.

Il est vrai que le pessimisme peut avoir raison. Il a même souvent raison techniquement parlant. Mais c'est aussi parce que l'optimiste ne le croit pas, qu'il entreprend des folies déraisonnables, qu'il sort du cadre, qu'il prend des risques, qu'il s'aventure, qu'il parie, bref qu'il profite davantage du voyage de la vie, quelles que soient les surprises -bonnes ou mauvaises- que celle-ci lui réserve.

Voilà ce qui fait désormais de l'optimisme militant un authentique combat philosophique et social, et donc une quête majeure car chargée de sens pour les générations présentes et à venir.

L'optimisme est nécessaire car il se nourrit d'enthousiasme autant qu'il en diffuse autour de lui. Il peut arriver que cet enthousiasme se révèle excessif, illusoire ou risqué. Mais qu'importe. Comme nous le rappelle la célèbre formule du philosophe Hegel, « Rien de grand ne s'est accompli dans le monde sans passion ». Et quand bien même l'enthousiasme ferait trébucher l'optimisme, c'est quand même lui qui lui donne l'envie de se relever puis de poursuivre, le sourire aux lèvres, l'aventure promise à chacun au fil de cette merveilleuse route que l'on appelle la vie.

Mais connaissons-nous vraiment l'optimisme ? C'est à cette définition et aux mises en perspectives qu'elle exige que nous nous attacherons. Nous entreprendrons une excursion dans quelques domaines où l'optimisme fait aujourd'hui la différence, notamment pourquoi et comment l'attitude optimiste nous maintient plus longtemps en meilleure forme physique et mentale, nous conduit à créer des relations sociales plus agréables, nous rend plus attractif dans le monde professionnel et, ce qui ne gâte rien, fait de nous des hommes ou de femmes plus chanceux que les autres. Nous apprendrons comment développer cette dimension optimiste dans nos propres vies, éduquer notre regard à voir le monde de façon optimiste, prendre des décisions porteuses de possibilités nouvelles et, surtout, nous permettre de contribuer à la création d'une authentique « société optimiste » pour le plus grand bénéfice de tous.

### **L'optimiste et les lendemains qui chantent**

On constate en premier lieu que l'optimiste, sans toujours voir tout en rose -comme on le lui reproche parfois- n'en perçoit pas moins l'avenir à travers un filtre particulier. Les premiers chercheurs dans le domaine ont étudié de près ce trait de personnalité, cette façon remarquable de se projeter dans le temps et d'optimiser son futur en l'imaginant de façon globalement positive. Pour le psychiatre Christophe André être optimiste conduit toujours à « supposer, face à l'incertain, qu'il existe une issue favorable et se donner le droit d'agir pour la faciliter » Cette définition rejoint d'ailleurs celle d'une autre grande spécialiste Sonja Lyubomirski, qui voit dans l'optimisme « l'anticipation globale d'un avenir positif, assortie de la certitude qu'on pourra remplir ses objectifs » Aux dires de ces experts, l'optimisme présente donc -psychologiquement parlant- deux facettes :

- Une facette cognitive et intellectuelle : l'optimiste est un individu qui envisage aisément une issue favorable aux situations qu'il rencontre ;

- Une facette émotionnelle et affective : l'optimiste est aussi quelqu'un qui éprouve un sentiment de confiance heureuse dans l'évolution ou le dénouement d'une situation.

### **Les optimistes, une ressource pour l'entreprise**

L'optimisme représente souvent un critère essentiel d'appréciation, en particulier lorsqu'on recrute un nouveau collaborateur. Certes, les pessimistes ont toujours leur chance, toute entreprise comprenant aussi des postes exigeant de ceux qui les occupent un sens aigu des réalités, voire un haut niveau de prudence et d'évitement du risque. On pense en particulier à des métiers concernant la sécurité des personnes, l'estimation de coûts, la gestion de fonds importants, le contrôle sous toutes ses formes le respect des procédures et des normes techniques, etc. Dans ce genre de fonction, un pessimisme modéré peut même représenter une réelle ressource et un optimisme excessif, un danger patent.

En revanche, dès lors que la mission qui lui est confiée exige persévérance, prise d'initiatives, esprit d'innovation et créativité, l'optimisme réapparaît dans les critères de choix d'un collaborateur. Il en sera de même si le travail demandé tend à créer des tensions psychologiques (que ce soit avec soi-même ou avec les autres), c'est-à-dire s'il comprend une dose non négligeable d'échecs ou de vexations. Confrontés à des situations de ce genre, les plus optimistes sauront mieux que d'autres, trouver le mode d'explication positif qui leur permettra de résister aux frustrations et de trouver des voies permettant de rebondir.

Dans le cadre de sa politique de recrutement, l'entreprise peut donc utiliser l'optimisme comme un critère pertinent de sélection de nouveaux collaborateurs.

### **.../... L'attitude positive au travail, comment ça marche ?**

Mais si l'optimisme -en tant qu'état d'esprit collectif- peut être considéré comme une ressource pour l'entreprise, cette ressource est-elle pour autant développable ? Oui, nous disent les spécialistes. Tel est d'ailleurs l'un des buts des politiques visant à développer une authentique « attitude positive au travail ».

C'est dans les périodes difficiles et conflictuelles que l'on prend plaisir à redécouvrir les vertus d'un climat de travail positif. Dans toute entreprise, c'est en effet le « climat » -c'est-à-dire l'atmosphère prédominante ressentie par les employés- qui crée le terrain culturel sur lequel vont prospérer négativité et tension ou au contraire attitude positive et énergie d'action.

Une attitude positive au travail « fabrique » de l'optimisme individuel et collectif car elle accroît naturellement le niveau d'engagement et d'implication investi par les employés dans leur tâche. Ce faisant, elle entraîne la motivation et la performance des équipes à travers une satisfaction accrue. Elle favorise de même l'apparition de comportements solidaires et crée enfin les conditions pour que prospère un esprit d'innovation et d'ouverture.

« Il n'y a pas d'amour, mais uniquement des preuves d'amour. » Cette phrase de Jean Cocteau s'applique parfaitement à l'attitude positive au travail qui n'existe, elle aussi, que par ses manifestations. Sur le terrain, dans la réalité de la vie des entreprises, elle se manifeste par un comportement collectif (employés, cadres, dirigeants) composé à la fois d'ouverture, de participation active et d'esprit constructif. Si l'attitude positive au travail se nourrit d'optimisme autant qu'elle l'entretient, c'est qu'elle finit par générer un climat mêlant naturellement :

- une grande clarté sur les buts poursuivis et les règles à suivre,
- un appui des acteurs entre eux, que ce soit dans l'action quotidienne ou en cas de problème,
- une atmosphère de défis à relever, nourrie par des marques de confiance réciproques des personnes entre elles.

Néanmoins, malgré tous ces avantages, la fin de la négativité au travail ne saurait être décrétée si facilement ! L'attitude négative au travail est en fait une sorte de cocktail « létal », car potentiellement tueur de motivation et d'enthousiasme. Ses ingrédients clés - souvent nourris par l'organisation elle-même- sont toujours les mêmes : pessimisme, défiance, jalousie, critique systématique et rumination. Et leur mélange conduit assez rapidement à l'instauration d'un sentiment collectif d'impuissance et de découragement.

Car même fondée sur des faiblesses réelles du système, une attitude négative au travail nuit toujours profondément à ceux qui en sont porteurs ainsi qu'à celles et ceux qui les entourent. En effet, elle entretient un esprit délétère orienté sur la seule dénonciation des faiblesses, légitimée et nourrie par l'illusion utopique de la possibilité d'un monde parfait.

L'attitude positive au travail, en revanche, ne fait pas l'impasse sur les difficultés : mais elle les regarde différemment, de façon sereine et surtout constructive.

Elle est aussi un phénomène fonctionnant selon les lois de la gravitation -c'est-à-dire en cascade- du sommet de l'entreprise jusqu'aux niveaux d'exécution les plus modestes. Inutile donc d'espérer une attitude positive durable de la part de collaborateurs qui n'observent pas l'équivalent dans le comportement de leurs propres managers et dirigeants.

L'attitude positive au travail enfin est un phénomène diffus et contagieux qui infiltre l'ensemble des dimensions de la vie de l'entreprise. Qu'il s'agisse de la relation entre les collaborateurs d'une même organisation, des modes de fonctionnement hiérarchiques ou de la façon de traiter les clients et les fournisseurs, l'attitude positive ne saurait être cloisonnée. Elle est partie intégrante de la culture de l'entreprise et de ses modes de fonctionnement, ou n'est pas.

Afin de faire vivre l'attitude positive au travail, l'entreprise doit donc compter en priorité sur celles et ceux qui la dirigent et l'animent. Parmi eux une population occupe aujourd'hui une place éminemment stratégique : les *managers de proximité*.

.../...Un manager optimiste est celui dont on peut dire : « Il m'a donné envie d'essayer, il m'a autorisé à ne pas réussir tout de suite et m'a poussé à recommencer jusqu'à ce que je gagne la partie ! ».



1



Avril 2012

## CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

### ————— I —————

1. L'ensemble  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  est non-vidé, car il contient les fonctions constantes et toute fonction lipschitzienne est continue sur  $I$ . Donc  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions lipschitziennes, de constantes de Lipschitz respectives  $K_f$  et  $K_g$ , et  $\lambda$  un réel. Pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |(f(x) + \lambda g(x)) - (f(y) + \lambda g(y))| &\leq |f(x) - f(y)| + |\lambda| |g(x) - g(y)| \\ &\leq (K_f + |\lambda| K_g) |x - y|, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $f + \lambda g$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz  $K_f + |\lambda| K_g$ . Donc  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  est un sous-espace de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

L'existence de  $K_f$  découle directement du théorème de la borne supérieure : toute partie majorée non vide de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.

2. Soit  $f, g \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R})$  deux fonctions bornées et  $M_1$  et  $M_2$  des majorants respectifs de  $|f|$  et de  $|g|$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M_1 |g(x) - g(y)| + M_2 |f(x) - f(y)| \\ &\leq (M_1 K_g + M_2 K_f) |x - y|, \end{aligned}$$

donc  $fg$  appartient à  $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ .

Prenons  $I = \mathbb{R}$ ,  $f = g : x \mapsto x$ ,  $f$  et  $g$  sont trivialement des fonctions lipschitziennes, mais le produit  $fg : x \mapsto x^2$ , n'est pas une fonction lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  car, pour  $x = n \in \mathbb{N}^*$  et  $y = 0$ , on a,  $\left| \frac{n^2 - 0}{n - 0} \right| = n$  non borné.

3. Supposons l'intervalle  $I$  compact. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions lipschitziennes, elles sont donc continues sur  $I$ .

Puisque  $I$  est compact et  $f_1, f_2$  continues, elles sont bornées sur  $I$ . Par la question précédente la fonction  $f_1 f_2$  est lipschitzienne.

4. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x) - f(0)| \leq K_f |x|$ , ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |f(0)| + K_f |x|.$$

D'où le résultat demandé avec, en particulier,  $A = |f(0)|$  et  $B = K_f$ .

5. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $f$  est lipschitzienne, pour tout  $x \in I$ ,

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq K_f,$$

comme  $x$  est arbitrairement pris dans  $I$ , on a  $\sup_{x \in I} |f'(x)| \leq K_f$ .

Inversement, soit  $x, y \in I$ , d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]\min(x, y), \max(x, y)[$  tel que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq \sup_{x \in I} |f'(x)|,$$

ce qui montre que  $f$  est lipschitzienne et que  $K_f \leq \sup_{x \in I} |f'(x)|$ .

D'où l'équivalence souhaitée et  $K_f = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ .

6. Soient  $M$  un majorant de la suite  $(K_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $x, y \in I$ , on a  $|f_n(y) - f_n(x)| \leq K_{f_n} |y - x| \leq M |y - x|$ , en particulier,  $|f_n(y) - f_n(x)| \leq M |y - x|$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient,  $|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$ . D'où  $f$  est lipschitzienne et  $K_f \leq M$ .
7. Soit  $g \in \mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $K_g \leq 1$ . On considère la fonction  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $\tilde{g}(x) = g(x - n) + n(g(1) - g(0))$  pour tout  $x$  dans  $[n, n + 1]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (a) La fonction  $\tilde{g}$  est clairement continue comme composée est somme de fonctions continues. Montrons qu'elle est lipschitzienne : soit  $x, y \in \mathbb{R}$  distincts et supposons sans perte de généralité que  $x < y$ . Si  $x$  et  $y$  sont dans un même intervalle  $[n, n + 1]$ , il est clair que  $|\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x)| \leq |y - x|$ . Sinon, il existe  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  tels que  $k \leq x \leq k + 1 \leq \ell \leq y \leq \ell + 1$ , on a

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| &\leq |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(k + 1)| + |\tilde{g}(k + 1) - \tilde{g}(\ell)| + |\tilde{g}(\ell) - \tilde{g}(y)| \\ &\leq (k + 1 - x) + |(\ell - k - 1)(g(1) - g(0))| + (y - \ell) \\ &\leq (k + 1 - x) + (\ell - k - 1) + (y - \ell) = y - x. \end{aligned}$$

- (b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $g'_n(x) = n(\tilde{g}(x + \frac{1}{n}) - \tilde{g}(x))$  et  $\tilde{g}$  est continue, donc  $g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus

$$|g'_n(x)| \leq n|\tilde{g}(x + \frac{1}{n}) - \tilde{g}(x)| \leq n(x + \frac{1}{n} - x) = 1.$$

- (c) Le changement de variable  $u = n(t - x)$  donne  $g_n(x) = \int_0^1 \tilde{g}(x + \frac{u}{n}) du$  et comme  $\tilde{g}$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz plus petite ou égale à 1, on a

$$\begin{aligned} |g_n(x) - \tilde{g}(x)| &\leq \int_0^1 |\tilde{g}(x + \frac{u}{n}) - \tilde{g}(x)| du \\ &\leq \int_0^1 \frac{u}{n} du = \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|g_n(x) - \tilde{g}(x)|\} \leq \frac{1}{2n}$  et donc la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  vers  $\tilde{g}$ .



## II

1. Raisonnement par récurrence : la formule (2) est vraie pour  $n = 1$ . Si elle est vraie au rang  $n$ , l'application de la formule (1) en  $x + na$  donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka) \\ &= \lambda^n [\lambda F(x + (n+1)a) + f(x + na)] + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka) \\ &= \lambda^{n+1} F(x + (n+1)a) + \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x + ka), \end{aligned}$$

ce qui est la formule au rang  $n + 1$ .

On procède également par récurrence : la formule (1) appliquée en  $x - a$  donne

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} F(x - a) - \frac{1}{\lambda} f(x - a)$$

qui est la formule (3) au rang 1. On obtient le passage du rang  $n$  au rang  $n + 1$  en appliquant la formule précédente en  $x - na$ .

2. On suppose dans cette sous-partie que  $|\lambda| < 1$ .

- (a) Comme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , d'après la question I. 4., il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq A|x| + B$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$|\lambda^n f(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B) \leq (A|x| + B)|\lambda|^n + A|an||\lambda|^n.$$

Comme les séries de termes positifs  $|\lambda|^n$  et  $n|\lambda|^n$  sont convergentes ( $|\lambda| < 1$ ), il en est de même pour la série de terme général  $|\lambda^n f(x + na)|$ .

- (b) Soit  $F$  définie par  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ , on a

$$F(x) - \lambda F(x + a) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} f(x + (n+1)a) = f(x),$$

donc  $F$  vérifie (1).

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n [f(x + na) - f(y + na)] \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K_f |x - y|.$$

Donc  $|F(x) - F(y)| \leq \frac{K_f}{1 - |\lambda|} |x - y|$ . Donc  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Reste à montrer que  $F$  est unique. Soit  $G$  une autre fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant

(1). Par ce qui précède et **I. 1.**,  $G - F$  est une fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et par la formule (2), elle vérifie

$$(G - F)(x) = \lambda(G - F)(x + a) = \lambda^n(G - F)(x + na),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . D'après **I. 4.**, il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$|(G - F)(x)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle, donc  $G - F$  est nulle. Donc  $F$  est l'unique fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

(c) Les dérivées des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont bornées, donc elles sont dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

On a

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cos(x + na) \quad \text{et} \quad F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sin(x + na).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda^n \cos(x + na)$  et  $\lambda^n \sin(x + na)$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe  $\lambda^n e^{i(x+na)} = e^{ix} (\lambda e^{ia})^n$ .

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \exp(i(x + na)) = \frac{e^{ix}}{1 - \lambda e^{ia}} = \frac{e^{ix} - \lambda e^{i(x-a)}}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}.$$

$F_1$  et  $F_2$  sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}, \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}. \quad (4)$$

3. On suppose dans cette sous-partie que  $|\lambda| > 1$ .

(a) Même démonstration que dans **II. 2. (a)**. Comme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  tel que  $|f(x)| \leq A|x| + B$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On a

$$|\lambda^{-n} f(x - na)| \leq |\lambda|^{-n} (A|x - na| + B) \leq (A|x| + B)|\lambda|^{-n} + A|an||\lambda|^{-n}.$$

Comme les séries de termes positifs  $|\lambda|^{-n}$  et  $|n||\lambda|^{-n}$  sont convergentes ( $|\lambda|^{-1} < 1$ ), il en est de même pour la série de terme général  $|\lambda^{-n} f(x - na)|$ .

(b) On suit la même preuve que dans **II. 2. (b)**.

Soit  $F$  définie par  $F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(x - na)$ , on a

$$F(x) - \lambda F(x + a) = - \sum_{n \geq 1} \lambda^{-n} f(x - na) + \sum_{n \geq 1} \lambda^{-n+1} f(x - (n-1)a) = f(x),$$

donc  $F$  vérifie (1).

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} [f(x - na) - f(y - na)] \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{-n} K_f |x - y|.$$

Donc  $|F(x) - F(y)| \leq K_f \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - |\lambda|^{-1}} |x - y| = \frac{K_f}{|\lambda| - 1}$ . Donc  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

De même, l'unicité se démontre exactement comme dans **II. 2. (b)**. Soit  $G$  une autre fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1), alors  $G - F$  est une fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et vérifie,

$$(G - F)(x) = \lambda^{-1}(G - F)(x - a) = \lambda^{-n}(G - F)(x - na)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après **I. 4.**, il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|(G - F)(x)| \leq |\lambda|^{-n} (A|x - na| + B), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle quand  $n \uparrow +\infty$ , donc  $G - F$  est nulle.  $F$  est l'unique fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1).

- (c) Même calcul que dans **II 2. (c)**. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe suivant

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} \exp(i(x - na)) = -\frac{\lambda^{-1} e^{i(x-a)}}{1 - \lambda^{-1} e^{-ia}} = -\frac{\lambda e^{i(x-a)} - e^{ix}}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}.$$

$F_1$  et  $F_2$  ont la même expression qu'en **II. 2. (c)** :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}, \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}.$$

4. On suppose dans cette sous-partie que  $\lambda = 1$ .

- (a) Soit  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que,  $F(x) - F(x + a) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . D'où  $|f(x)| \leq K_F |a|$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est donc bornée.
- (b) Si  $f = 0$ , les fonctions constantes ou les fonctions lipschitziennes périodiques de période  $a$  conviennent, par exemple  $F(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ .
- (c) Si  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifie (1), pour toute fonction  $G$  lipschitzienne périodique de période  $a$ , la fonction  $F + G$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifie également (1). La fonction  $F$  n'est donc pas unique.
- (d) On suppose dans cette question que  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = f_2(x) = \sin x$ .

- (i) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , d'après la question **II. 2. (c)**, formule (4), pour tout  $-1 < \lambda < 1$ ,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x + a) = \sin(x),$$

où  $F_2$  est donnée par la formule (4) (elle dépend naturellement de  $\lambda$ ). En faisant tendre  $\lambda$  vers 1, on obtient l'expression

$$F(x) - F(x + a) = \sin(x),$$

où  $F(x) = \frac{\sin x - \sin(x - a)}{2(1 - \cos a)}$  ( $\cos a \neq 1$ ). Cette fonction  $F$  est lipschitzienne comme combinaison linéaire de deux fonctions de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et vérifie (1) pour  $\lambda = 1$ . Elle répond donc à la question.

(ii) Supposons que  $a = 2\pi$ . Soit  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1) pour  $\lambda = 1$ . D'après la formule (2), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$F(x) = F(x + 2n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + 2k\pi) = F(x + 2n\pi) + n \sin x,$$

en particulier, pour  $x = \frac{3\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$F\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + n \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - n,$$

ce qui donne, pour tout  $n$ ,  $F\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 2n + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour  $\lambda = 1$ .

5. On suppose dans cette sous-partie que  $\lambda = -1$ .

- (a) On cherche une fonction  $F$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant  $F(x) = -F(x + a)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $F(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$  est une fonction vérifiant cette identité.
- (b) Pour toute constante  $C$ , la fonction  $CF$  vérifie (1), où  $F$  est la fonction de la question précédente. Il n'y a donc pas d'unicité.
- (c) On suppose dans cette question que  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = \sin x$ .

(i) On procède comme dans la question II. 4. (b). (i). Pour tout  $-1 < \lambda < 1$ ,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x + a) = \sin(x),$$

où  $F_2$  est donnée par la formule (4). En faisant tendre  $\lambda$  vers -1, on obtient l'expression  $F(x) = \frac{\sin x + \sin(x - a)}{2(1 + \cos a)}$  ( $\cos a \neq -1$ ). Cette fonction  $F$  est lipschitzienne et répond à la question.

(ii) Supposons que  $a = \pi$ . Soit  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (1) pour  $\lambda = -1$ . D'après la formule (2), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$F(x) = (-1)^n F(x + n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(x + k\pi) = (-1)^n F(x + n\pi) + n \sin x,$$

en particulier, pour  $x = \frac{3\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  et un entier  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$F\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2n \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2n,$$

ce qui donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 4n + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour  $\lambda = -1$ .

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $] -1, +\infty ]$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de  $f$ .

La dérivée de  $f$  est égale à :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ . La fonction est donc strictement croissante, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  ;

2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.

On peut aisément vérifier que  $u_n > 0$ , puis  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ , et par récurrence que  $u_n \leq 1$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, donc elle converge.

3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

Comme  $f$  est continue, la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$  doit vérifier :  $l = f(l) = \sqrt{\frac{l+1}{2}}$ , à savoir :  $2l^2 - l - 1 = 0$  et comme cette limite est positive, on obtient :  $l=1$ .

## Exercice n° 2

Soit la suite  $(S_n)$  définie, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

- On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  $u_n = S_{2n}$  et  $v_n = S_{2n+1}$ .  
Démontrer que ces suites sont adjacentes.

On a :

$$v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \text{ qui tend vers zéro,}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0, \text{ donc la suite } (u_n) \text{ est croissante,}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \leq 0, \text{ donc la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

Les deux suites sont donc adjacentes.

- Démontrer que la suite  $(S_n)$  converge.

Comme la suite des termes de rang pair et celle des termes de rang impair sont adjacentes, elles convergent vers une même limite qui est celle de la suite  $(S_n)$ .

- Soit  $x$  un nombre réel positif, exprimer  $\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$  en fonction de  $(-x)^{2n}$ .

$$\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 + x}, \text{ car on a une suite géométrique de raison } -x.$$

- Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ .

Etudier les variations de  $f$  (on précisera le signe de  $f$ ),  $\ln$  désigne le logarithme népérien).

$$\text{La dérivée de } f \text{ est égale à : } f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0$$

La fonction  $f$  est donc croissante et comme  $f(0)=0$ , elle est positive. En particulier :

$$\ln(1+x) \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

- Comparer  $\ln(1+x)$  et  $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

On procède comme à la question précédente (on remplace  $n$  par  $n+1$ ), à partir de la fonction :

$$g(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \text{ pour obtenir : } \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

6. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

Des deux questions précédentes, on obtient :  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ , puis pour  $x=1$ ,  $u_n \leq \ln 2 \leq v_n$ . Par conséquent la suite  $(S_n)$  converge vers  $\ln 2$ .

### Exercice n° 3

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle boutique. Trois emplacements, notés 1, 2 et 3, sont disponibles. Il a été possible de contrôler le chiffre d'affaires de ces boutiques pendant une semaine (tableau1).

Tableau 1

| Jours    | Chiffre d'Affaires journaliers des boutiques |    |     |
|----------|----------------------------------------------|----|-----|
|          | 1                                            | 2  | 3   |
| Lundi    | 60                                           | 65 | 80  |
| Mardi    | 80                                           | 70 | 20  |
| Mercredi | 75                                           | 75 | 40  |
| Jeudi    | 55                                           | 68 | 110 |
| Vendredi | 88                                           | 66 | 10  |
| Samedi   | 60                                           | 63 | 80  |
| Dimanche | 50                                           | 60 | 60  |

1. Calculer la moyenne des chiffres d'affaires de la semaine pour chaque emplacement.

2. Différents indicateurs statistiques qui peuvent aider l'entreprise à prendre sa décision sont proposés (variance, coefficient de variation) :

Soit  $X$  le chiffre d'affaires d'une boutique et  $x_i$  le chiffre d'affaires du jour  $i$  ( $i=1, \dots, 7$ )

Nous rappelons les définitions de ces différents indicateurs.

| Indicateurs              | Expression                                                   |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Variance                 | $\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ |
| Coefficient de variation | $\text{CV}(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}}$                   |

Calculer la valeur de ces indicateurs pour chaque boutique.



On obtient les résultats suivants :

| Boutiques | $\bar{X}$      | Var            | $\sigma(X)$ | CV             |
|-----------|----------------|----------------|-------------|----------------|
| 1         | <b>66,86 +</b> | 172,12         | 13,12       | 0,196          |
| 2         | 66,71          | <b>20,50 +</b> | <b>4,53</b> | <b>0,068 +</b> |
| 3         | 57,14          | 1106,19        | 33,26       | 0,582          |

3. En fonction de tous ces indicateurs, quel emplacement vous semble le meilleur et pourquoi ?

La boutique 1 a la meilleure moyenne, mais elle est plus risquée. La boutique 2 a une moyenne très proche de la 2, mais elle a l'avantage d'être nettement moins risquée. Il ne faut pas oublier que l'observation ne concerne qu'une semaine (cas d'un sondage).

On préfère donc la boutique 2.

#### Exercice n° 4

Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $R^3$  déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y - z = 0\}$$

- Déterminer une base de  $E$ . On notera  $X$  la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de  $E$ .

$$\forall (x, y, z) \in E, (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur  $E$ , dans la base canonique de  $R^3$ .

$$\text{La matrice de projection orthogonale s'écrit : } M = X(X'X)^{-1}X' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $M$  définie par :

$$M = X(X'X)^{-1}X', \text{ où } X' \text{ désigne la transposée de } X.$$

Cette matrice correspond à la matrice précédente de projection orthogonale, donc 1 est valeur propre double (dimension de  $E$ ) ayant comme vecteurs propres, les deux vecteurs de  $E$ . Et 0 est l'autre valeur propre dont le vecteur propre associé est orthogonal à  $X$ , par exemple :

$$(1, 1, -1)$$

4. Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la symétrie par rapport à  $E$ .

Soit  $e_1 = (1, 0, 1)$  et  $e_2 = (0, 1, 1)$  une base de  $E$  et  $e_3 = (1, 1, -1)$  un vecteur orthogonal. La matrice

de la symétrie s'écrit dans cette base :  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Par changement de base, la matrice  $S$

de cette symétrie est égale à :  $S = P\Delta P^{-1}$ , où  $P$  est la matrice du changement de base à savoir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On obtient : } S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soit  $D$  la droite vectorielle de  $R^3$  engendrée par le vecteur  $u = (1, 1, -1)$ .

- Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la projection orthogonale sur  $D$ .

Comme la droite  $D$  est orthogonale à  $E$ , la matrice de la projection orthogonale sur  $D$  est égale

$$\text{à } I - M, \text{ soit } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer, dans la base canonique de  $R^3$ , la matrice de la symétrie par rapport à  $D$ .

La matrice de la symétrie par rapport à  $D$ , composée avec la matrice de la symétrie par rapport à  $E$  est égale à moins la matrice unité. Donc c'est l'opposé de l'inverse de  $S$  (question 4)

$$S_D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ (on peut aussi procéder comme à la question 4).}$$

**Exercice n° 5**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans  $R$ , on considère l'équation  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

Soit l'équation  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de  $(E_n)$ , notée  $x_n$ , et calculer sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Posons  $f_n(x) = x^n + x - 1$ , alors  $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$ .

$f_n$  est continue, strictement croissante et réalise une bijection de  $R^+$  sur  $[-1, +\infty[$ ,  $f_n(0) = -1$ , il existe donc une unique solution  $x_n$ ; de plus  $f_n(1) = 1$ , donc  $x_n \in ]0, 1[$ .

Si  $x_{n+1} < x_n$ , alors  $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$  et  $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1 = 0$ , ce qui est impossible. La suite  $(x_n)$  est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite  $l$ . Si  $l < 1$ , alors par passage à la limite dans l'équation,  $l - 1 = 0$ , ce qui est impossible, donc  $l = 1$ .

2. On pose  $u_n = 1 - x_n$ . Montrer que pour  $n$  assez grand, on a :

$$\frac{Lnn}{2n} \leq u_n \leq 2 \frac{Lnn}{n}$$

(On peut poser  $f_n(u) = nLn(1-u) - Lnu$ , où  $Ln$  désigne le logarithme népérien).

$f_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ ,  $f_n(u_n) = 0$ ,  $f_n(\frac{Lnn}{2n}) \approx \frac{Lnn}{2} > 0$  et  $f_n(2\frac{Lnn}{n}) \approx -Lnn < 0$ , donc à partir d'un certain rang  $\frac{Lnn}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Lnn}{n}$

3. Montrer que  $Ln(u_n)$  est équivalent à  $-Lnn$  et en déduire que

$$x_n = 1 - \frac{Lnn}{n} + o\left(\frac{Lnn}{n}\right)$$

Pour  $n > 2$ ,  $Ln(\frac{Lnn}{2n}) \leq Ln(u_n) \leq Ln(2\frac{Lnn}{n})$  implique  $Ln(u_n) \approx -Lnn$ , puis

$nLn(1-u_n) = Lnu_n$  implique  $-nu_n \approx -Lnn$ , d'où  $u_n \approx \frac{Lnn}{n}$  et enfin

$$x_n = 1 - \frac{Lnn}{n} + o\left(\frac{Lnn}{n}\right)$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

## Définitions et notations

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. Si  $A \subset B$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$ , on note par  $B \setminus A$  le complémentaire de  $A$  dans  $B$ . On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs et par  $\mathbb{Z}_- = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 0\}$ .

On admettra le développement suivant de la fonction Cotangente :

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad \cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}.$$

## Première partie.

1- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite réelle définie par  $u_n(x) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ ,  $n \geq 1$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

- a) Montrer que la série de fonctions de terme général  $u_n(x)$ , converge simplement sur  $[0, 1[$ .
- b) Montrer que la série dérivée de terme général  $u'_n(x)$  converge normalement sur tout segment  $[0, a] \subset [0, 1[$ .
- c) Montrer que la fonction  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et  $F'(x) = \pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x}$ .
- d) Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ , pour tout  $x \in [0, 1[$ .

2- Soit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \quad s_n(x) = \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Montrer que la suite de fonctions  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .  
Nous noterons  $s$  sa limite.
- b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

(i) Montrer que  $s_n(x) = \frac{x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (k-x)(k+x)$ .

(ii) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n > |x|$  on a  $s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$ .

- (iii) En déduire que  $s(x+1) = -s(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Calculer  $s(x)$  pour tout  $x \in [0, 1[$ .
- En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$ .

## Deuxième partie.

On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1) \dots (x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

- 1- Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-p)$ .
- 2- On suppose que  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ .
- a) Montrer qu'il existe  $N_x \in \mathbb{N}$ , tel que la série de terme général  $\ln \frac{f_{n+N_x+1}(x)}{f_{n+N_x}(x)}$  converge.
- b) Montrer que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite non nulle  $f(x)$ .
- c) Déterminer  $f(x)$  en fonction de  $x, N_x$  et  $S(x) = \sum_{n \geq N_x} \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ .
- d) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x) = xf(x+1)$ .
- e) Calculer  $f(1)$  et en déduire  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 3- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x)f(1-x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$ .
- On pourra calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  le produit  $f_n(x)f_n(1-x)$  en fonction de  $s_n(x)$ .
- 4- On se propose dans cette question de montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on a la relation :

$$f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right). \quad (*)$$

- a) (i) Vérifier que la relation (\*) est satisfaite pour  $p = 1$ .
- (ii) Supposons que  $p \geq 2$  et  $px = -n \in \mathbb{Z}_-$ , montrer que la relation (\*) est vérifiée.
- b) On suppose que  $px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$ . Soit  $n$  un élément quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\frac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$  ne dépend pas de  $x$ . En déduire que  $f$  vérifie une relation du type :

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right),$$

où  $A_p$  est un nombre réel positif ou nul dépendant de  $p$ .

- c) En écrivant pour  $x = \frac{1}{p}$  la relation ci-dessus, montrer que :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right) = 1.$$

En déduire que

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}}.$$

d) Montrer l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle  $x$  :

$$(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1 \right).$$

e) En donnant à  $x$  la valeur 1, en déduire les valeurs de  $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}$  et de  $A_p$ , ainsi que la relation (\*).

## Troisième partie.

Soit  $\Gamma$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1- Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathcal{D}$ .

2- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$G_n(x) = \int_0^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{x-1} dt.$$

a) On pose  $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$ . Déterminer une relation entre  $g_n(x)$  et  $g_{n-1}(x+1)$  et en déduire l'expression de  $g_n(x)$  en fonction de  $x$  et  $n$ .

b) Montrer que

$$G_n(x) = \frac{n}{(n+x)g_n(x)}.$$

c) Montrer que pour tout  $t \in [0, n]$  on a les inégalités

$$e^{-t} \geq \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \quad \text{et} \quad e^t \geq \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^n.$$

En déduire que l'on a

$$0 \leq e^{-t} - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq e^{-t} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t^2}{n^2} \right)^n \right]$$

pour tout  $t \in [0, n]$ .

d) Montrer, par récurrence sur  $n$ , que l'on a  $(1-a)^n \geq 1-na$  pour tout  $a \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que pour tout  $t \in [0, n]$  on a les inégalités :

$$0 \leq e^{-t} - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

e) Déduire de ce qui précède que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ . Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $\Gamma(x)$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Selon plusieurs études parues récemment (provenant notamment de l'Institut pour la finance internationale et du cabinet de conseil McKinsey), la croissance en Afrique repose sur de solides bases, et le secteur de la consommation et des services devrait voir son chiffre d'affaires exploser dans les années à venir.

Vous apporterez un point de vue critique à cette affirmation.

**Sujet n° 2**

« L'économie africaine, pour l'essentiel, repose sur les femmes » indiquait Alpha Condé, le président de la Guinée, lors d'un entretien au journal Le Monde en janvier 2012. Développez cette affirmation et prolongez votre exposé sur le rôle des femmes africaines dans d'autres domaines.

**Sujet n° 3**

La célèbre formule d'Abraham Lincoln (16ème président des Etats Unis de 1860 à 1865) « la démocratie est le gouvernement du peuple, par le peuple, pour le peuple » est-elle une définition encore possible est réalisable ?

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS Voie B Option Mathématiques****2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****(Durée de l'épreuve : 3 heures)****Calculatrice non programmable autorisée.****Les exercices sont indépendants.**

Dans tous les exercices,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.

**Exercice n° 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $R^*$  par :  $f(x) = \frac{\text{Ln}(1+x^2)}{x}$ , où  $\text{Ln}$  désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction  $f$  (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine ; on ne cherchera pas à préciser les points d'inflexion).

2. Calculer  $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ .

3. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$  strictement positif.

Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

### Exercice n° 2

1. Déterminer les valeurs des paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx$$

2. En déduire que  $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$  est convergente et calculer  $I$ .

### Exercice n° 3

1. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

2. Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$  (si la suite est convergente, on précisera sa limite).

### Exercice n° 4

Soient  $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .
2. Déterminer un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $E$ . Quelle est la dimension de  $G$  ?
3. Soit la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = x^2 + x + 1$ . Quelle est sa projection orthogonale sur  $G$  ?



**Exercice n° 5**

Soient  $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$  et  $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$  où  $n$  est un entier naturel et  $x$  un nombre réel strictement positif.

1. Calculer  $f_n(1)$  en fonction de  $n$

2. Montrer que  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$  (on pourra aussi calculer  $\int_0^1 (1-x)^n dx$ )

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 1 - F_n(1)$

**Exercice n° 6**

Soit  $A$  une partie fermée non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $a \in A$ . On définit alors l'ensemble suivant :

$$T(A, a) = \{u \in \mathbb{R}^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n(x_n - a) \rightarrow u\}$$

1. Montrer que  $(0,0) \in T(A, a)$ .
2. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble stable par homothétie positive.
3. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ .
4. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^2$  si  $A$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .
5. Soit  $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , expliciter  $T(A, a)$  pour  $a = (0,0)$ .
6. Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$ , expliciter  $T(A, a)$  pour  $a = (0,0)$ .

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Monsieur Frédéric LENOIR : intitulé : « L'ÂME DU MONDE » paru aux éditions NIL en mai 2012.**

**Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.**

**Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.**

**Du sens de la vie**

Un sage prit la parole et dit : « Ô enfants des hommes, écoutez le premier noble enseignement sur le sens de la vie humaine.

La plupart des malheurs de l'humanité viennent du fait que bien des hommes, surtout ceux qui exercent le pouvoir et possèdent la richesse ne se sont jamais interrogés sur la signification de leur existence. Ils vivent suivant la pente de leurs pulsions et de leurs besoins matériels. Ils descendent, inconscients le fleuve de l'existence, telles des bûches ballotées par les eaux, sans jamais rien maîtriser du cours de leur vie.

A ce compte-là, même les cadavres jetés dans la rivière descendent plus vite que les vivants !

Mais est-il encore un Vivant, celui qui ne vit que selon les besoins immédiats de son corps et étouffe les questions et les besoins de son âme ?

Pourquoi sommes-nous sur terre ? Avons-nous chacun quelque chose de particulier à réaliser ? Les événements qui nous arrivent sont-ils seulement le fruit du hasard ou bien ont-ils une signification ? Avons-nous une destinée à accomplir ? Sommes-nous le jouet de nos instincts et de notre éducation ou bien pouvons-nous acquérir une vraie liberté ?

Et si tel est le cas, comment en faire bon usage ? Sur quels rochers fonder notre vie ? Peut-on atteindre un bonheur véritable et durable ? Comment nourrir notre âme autant que notre corps et comment faciliter la bonne entente de cet attelage de l'être humain ? Notre esprit disparaît-il avec le corps physique ?

... / ...Voici les questions que devrait se poser tout être humain lorsqu'il comprend qu'il n'est pas qu'un animal soumis aux lois universelles du plaisir ou du déplaisir, de l'attraction et de la répulsion ; lorsqu'il découvre qu'il possède un esprit ou une âme spirituelle, peu importe les mots utilisés, qui lui permettent de maîtriser son corps, ses émotions, ses pulsions.

La grandeur de l'être humain, c'est qu'il est le seul être vivant qui puisse s'interroger sur la signification de son existence et lui donner une direction, un but.

Mais malheureux l'homme qui n'a pas découvert le sanctuaire de l'esprit. Malheureux celui qui n'a d'autre préoccupation que de survivre !

Malheureux l'homme qui ne se pose jamais la question : comment vivre de manière proprement humaine ? Comment mener une vie bonne ? Qu'est ce qui est vraiment important et qu'est-ce qui ne l'est pas ?

Comment devenir pleinement moi-même et être utile aux autres ?

Comment réussir ma vie afin qu'à l'instant de ma mort, je puisse partir en paix et regarder derrière moi le cœur serein ?

Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il possède deux grands trésors à l'intérieur de lui-même : la clarté de l'esprit qui peut le rendre libre, et la bonté du cœur qui peut le rendre heureux.

Malheureux l'homme qui mène une existence semblable à celle des bêtes, enchaîné à ses instincts et seulement préoccupé des soucis matériels de la vie. Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il est un homme ».

Un sage prit la parole et dit : « La vie est un voyage. Comme les oiseaux nous sommes un jour appelés à quitter le nid de notre enfance pour voler de nos propres ailes. Nous allons découvrir l'amour et bien souvent fonder une famille. Nous allons apprendre un métier pour nous réaliser dans un travail et subvenir à nos besoins matériels et à ceux de nos enfants.

Tout cela est bien. Mais tout cela n'est pas suffisant. Au long du voyage de la vie, nous allons rencontrer bien des obstacles. La maladie peut survenir, l'amour peut s'éclipser, nos proches vont mourir, nous ne sommes jamais sûrs de toujours pouvoir faire face aux difficultés matérielles de l'existence.

Nous allons aussi découvrir combien il est difficile d'aimer, combien il est rare de trouver un travail qui nous épanouisse en profondeur, combien nous sommes souvent pris dans des contradictions intérieures, dans des peurs, des colères, des frustrations, des jalousies, des découragements.

Au fil de la vie, nous allons devoir apprendre à vivre. Non pas à survivre, mais à vivre. A vivre pleinement, les yeux ouverts avec conscience et attention. A vivre en étant capable de choisir les bonnes personnes pour partager notre quotidien, en évitant de commettre les mêmes erreurs que dans le passé, en se donnant les moyens d'être véritablement soi-même et heureux, autant que faire se peut.

Tout cela s'apprend avec le temps et l'expérience. Mais il est infiniment précieux d'utiliser au plus tôt la clarté de notre esprit pour nous guider sur le chemin de la vie. Bien des égarements, des erreurs, des mauvais choix et des drames pourront être évités.

Ecoutez l'histoire de cette femme tenant son enfant dans les bras.

Passant devant une grotte, elle entend une voix mystérieuse qui lui dit : entre et prends tout ce que tu veux. Mais souviens-toi d'une chose : quand tu seras ressortie, une porte se refermera à tout jamais. Profite de l'opportunité, mais n'oublie pas le plus important.

La femme pénètre dans la grotte et y découvre un fabuleux trésor. Fascinée par l'or, les diamants et les bijoux, elle dépose son enfant sur le sol et s'empare de tout ce qu'elle peut. Elle rêve à tout ce qu'elle va pouvoir faire de ces richesses. La voix mystérieuse lui dit : « Le temps est écoulé, n'oublie pas le plus important. » A ces mots, la femme chargée d'or et de pierres précieuses court hors de la cavité dont la porte se ferme derrière elle à tout jamais. Elle admire son trésor, et se souvient alors, seulement, de son enfant qu'elle a oublié à l'intérieur.

Combien d'êtres humains passent l'essentiel de leur vie à se soucier de choses matérielles ou futiles et oublient de prendre le temps de vivre les expériences les plus essentielles : l'amour, l'amitié, l'activité créatrice, la contemplation de la beauté du monde ? Ils ne sont ni bêtes ni méchants, mais ignorants. Ignorants de ce que la vie peut donner de meilleur et cela ne coûte rien ! Le superflu est onéreux, mais l'essentiel est offert. Encore faut-il le savoir.

Et combien aussi préfèrent suivre la masse de ceux qui obéissent aux modes de leur époque ? Apprenez, ô enfants des hommes, à cheminer sur votre voie, celle qui est bonne pour vous, celle qui vous est destinée et qui réjouira votre cœur. »

## **De la vraie liberté**

Un chant d'oiseau déchira le ciel. Alors un sage prit la parole et dit : « Ecoutez, ô enfants des hommes, le noble enseignement sur la connaissance de soi et la liberté. Tout homme aspire à être libre et c'est là une grande et belle ambition, car que vaut la vie d'un prisonnier, ou celle d'un esclave ?

Il existe toutefois de nombreuses formes de prisons ou de servitudes. La plus subtile et la plus pernicieuse, celle que bien peu d'homme considèrent et dénoncent, c'est la prison intérieure de l'homme esclave de lui-même.

Est-il libre l'homme qui s'adonne au jeu, au point d'en perdre tous ses biens ? Est-il libre l'homme qui passe plusieurs heures par jour devant son écran, sans pouvoir décrocher ? Est-il libre l'homme qui se laisse emporter par une violente crise de jalousie, allant jusqu'à frapper sa femme ? Est-il libre l'homme qui est tellement angoissé qu'il ne pourra parler en public, ou celui qui ne pourra rester dans une pièce où il a vu une araignée ?

Nous sommes tous plus ou moins prisonniers de nos peurs, de nos pulsions, de notre caractère, de nos habitudes, de nos émotions. La plupart de nos actions et de nos choix sont mus par ces tendances qui nous dominent. Esclaves de nous-mêmes, nous sommes les seuls à pouvoir nous libérer de cette prison intérieure.

Le début de la libération passe par la connaissance de soi. C'est par une introspection, une fine observation de notre comportement, de nos réactions, de l'affleurement de nos émotions que nous parvenons progressivement à nous connaître et à comprendre les causes profondes de nos actions.

Travailler sur nous-mêmes, corriger nos réactions, modifier nos réflexes spontanés ou nos mauvaises habitudes demande effort et volonté. Mais c'est le prix à payer pour gagner notre liberté intérieure.

Car l'homme qui ne se connaît pas est comme aveugle. Il marche sans assurance et risque à tout instant de heurter un obstacle ou de s'égarer.

C'est pourquoi le commencement de la sagesse, c'est de tourner son regard vers soi-même et d'apprendre qui nous sommes, quels sont nos motivations, nos besoins, nos réactions, nos attirances et nos répulsions, nos habitudes, nos addictions, nos émotions les plus fortes et quelles en sont leurs causes. Comme le disait un ancien maître de la sagesse : « On ne naît pas libre, on le devient. »

... / ...Un sage prit la parole et dit : « L'esclavage intérieur ne vient pas seulement de nos pulsions et de nos émotions, mais aussi de l'attachement que nous portons aux objets qui nous entourent.

La dépendance à l'égard des choses matérielles est un des esclavages les plus répandus de nos jours. Non seulement nous voulons toujours plus et toujours mieux, mais nous n'arrivons pas à nous passer de ces choses qui n'existaient pas la veille.

La plupart des humains ont pu vivre heureux pendant des millénaires sans voiture et sans téléphone portable, sans électricité et sans Internet, sans télévision.

Mais imaginons aujourd'hui quelqu'un qui partirait vivre dans un lieu sans rien de tout cela. On le prendrait pour un fou et nul n'aurait envie de le suivre, car nous nous sommes tant habitués à ce confort et à ces objets qu'ils nous semblent indispensables à notre équilibre, voire à notre survie.

Il nous serait fort utile au contraire d'apprendre à nous en détacher. A en user librement sans addiction, en sachant parfois nous en séparer volontairement.

Possédez des objets mais n'en soyez pas possédés. Usez des biens matériels sans en être esclaves. Voilà un pas important vers la vraie liberté.

Être libre, c'est aussi ne pas agir en fonction du regard d'autrui. Or bien souvent nos actions ou nos réactions sont mues par le désir de plaire ou de ne pas déplaire, de se conformer aux usages communs ou bien au contraire de se rebeller contre eux, d'attirer l'attention ou de rester discrets.

Agissant ainsi, nous sommes prisonniers du regard des autres. La sagesse consiste aussi à se libérer de ce regard pesant, bien souvent si intériorisé que nous n'en avons pas conscience.

Voici l'histoire d'un enfant qui demande à son père le secret du bonheur.

Alors le père dit à son fils de le suivre ; ils sortent de leur maison, le père sur leur vieil âne, le fils à pied. Et les gens du village de s'indigner : « Quel mauvais père d'obliger ainsi son fils d'aller à pied !

Tu as entendu mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le lendemain, le père installe son fils sur l'âne tandis que lui marche à côté. Les gens du village lancent alors : « Quel fils indigne qui ne respecte pas son vieux père et le laisse aller à pied !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils montent tous les deux sur l'âne. Les villageois de dire : « Ils n'ont donc aucun cœur pour surcharger ainsi cette pauvre bête !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils partent en portant eux-mêmes leurs affaires, l'âne marchant derrière eux. Les gens du village commentent de plus belle : « voilà qu'ils portent eux-mêmes leurs bagages maintenant ! C'est le monde à l'envers !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Arrivés à la maison, le père dit à son fils : « Tu me demandais le secret du bonheur ? Peu importe ce que tu fais, il y aura toujours quelqu'un pour y trouver à redire. Fais ce que tu aimes ou ce que tu penses juste de faire, et tu seras heureux ! »

Nous avons tous besoin de reconnaissance, nous ne supportons pas qu'on nous critique et qu'on nous insulte. Ce besoin et cette aversion règnent en tyrans sur notre âme. Nous sommes sans cesse en quête d'un regard approbateur, d'un compliment, d'une gratification, d'un prix honorifique, d'une renommée sociale ou d'une bonne réputation.

A l'inverse, nous sommes bouleversés par une critique ou un reproche, blessés par une insulte même si elle vient d'un parfait inconnu, mis à terre par un échec qui nuit à notre réputation ou à notre prestige.

Ce comportement est normal dans l'enfance. Un enfant a besoin d'être conforté, encouragé, récompensé pour ses efforts. De même, il est normal qu'il vive mal les reproches qui atteignent son égo.

Mais ce qui est ordinaire chez l'enfant ne l'est pas chez l'adulte. Il est nécessaire de prêter attention à l'avis d'autrui, cependant un être humain doit pouvoir acquérir assez de confiance en lui pour ne pas constamment se soucier de l'approbation ou des critiques d'autrui.

Hélas, bien des hommes n'ont pas su ou n'ont pas pu acquérir cette confiance et ils continuent de vivre comme des enfants. La confiance et le juste amour de soi sont nécessaires à la croissance de l'être humain, à sa liberté et à son bonheur.



... / ...Apprenez, ô enfants des hommes à passer de l'ignorance à la connaissance.  
Car l'ignorance est la cause de la plupart des maux.

Développez votre intelligence et vos connaissances pour apprendre à discerner.  
Toute votre vie, vous aurez à discerner le vrai du faux, le juste de l'injuste, le positif du négatif, l'utile de l'inutile, le nécessaire du superflu. La connaissance de vous-mêmes vous rendra libres et capables de faire les justes choix pour mener une vie bonne.

Mais rappelez-vous que la connaissance de soi est la plus importante. C'est pourquoi un ancien maître de la sagesse disait : « Connais-toi toi-même et tu connaîtras le monde et les dieux. »



1

Avril 2013

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

## Définitions et notations

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. Si  $A \subset B$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$ , on note par  $B \setminus A$  le complémentaire de  $A$  dans  $B$ . On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs et par  $\mathbb{Z}_- = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 0\}$ .

On admettra le développement suivant de la fonction Cotangente :

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad \cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}. \quad (1)$$

## Première partie.

1- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite réelle définie par  $u_n(x) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ ,  $n \geq 1$ .

a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1[$ , le terme  $u_n(x)$  est négatif et on a  $u_n(x) \sim -\frac{x^2}{n^2}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La série de fonctions  $\sum u_n$  converge donc simplement sur  $[0, 1[$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et on a  $u'_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$ .

Soit  $0 \leq a < 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $r_n = \frac{2a}{n^2 - a^2}$ . Pour tout  $x \in [0, a]$ , on a  $|u'_n(x)| \leq r_n$  qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement sur  $[0, a]$ .

c) Soit  $0 \leq a < 1$ , d'après la question précédente la série de fonction  $\sum u'_n$  est normalement convergente sur  $[0, a]$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$  et on a

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Comme  $a$  est arbitrairement pris dans  $[0, 1[$ , on en déduit en utilisant le développement (1) que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et

$$F'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$



d) En intégrant la dernière égalité de la question précédente, on obtient pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = \int_0^x \left\{ \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} \right\} du,$$

comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$ , il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \left[ \ln \frac{\sin \pi u}{u} \right]_0^x = \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

2- Soit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \quad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , désignons par  $\lfloor y \rfloor$  sa partie entière. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , à partir de  $n \geq \lfloor |x| \rfloor$ , la suite  $(|s_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, donc elle est convergente. De plus, pour tout  $n \geq \lfloor |x| \rfloor$ ,  $s_{n-1}(x)$  et  $s_n(x)$  sont de même signe. La suite  $(s_n(x))_{n \geq \lfloor |x| \rfloor}$  est alors de signe constant, donc elle est convergente. On en déduit que la suite de fonctions  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $s$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

(i) Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} s_n(x) &= x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = x \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2} ((k-x)(k+x)) \\ &= \frac{x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (k-x)(k+x). \end{aligned} \quad (2)$$

(ii) D'après la question précédente

$$s_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (k-x) \prod_{k=0}^n (k+x),$$

il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$s_n(x+1) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (k-x-1) \prod_{k=0}^n (k+x+1) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-x) \prod_{k=1}^{n+1} (k+x),$$

et pour  $n > |x|$ ,

$$\frac{s_n(x+1)}{s_n(x)} = \frac{-x}{n-x} \times \frac{n+1+x}{x} = -\frac{n+1+x}{n-x},$$

d'où l'égalité demandée.

(iii) Pour tout  $n > |x|$ ,  $s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$ . Par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $s(x+1) = -s(x)$ .

- c) La fonction  $s$  est nulle en 0, car  $s_n(0) = 0$  pour tout  $n$ .  
 Pour  $x \in ]0, 1[$ , on a  $s_n(x) > 0$  et  $\ln s_n(x) = \ln x + \sum_{k=1}^n u_k(x)$ . D'après 1-, d),  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln s_n(x) = \ln x + \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi}$ .  
 La fonction exponentielle est continue donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = e^{\ln \frac{\sin \pi x}{\pi}}$ , soit

$$s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n = \lfloor x \rfloor$  sa partie entière. On a donc  $s(x) = (-1)^n s(x-n)$  et  $x-n \in [0, 1[$ ,  
 ainsi  $s(x) = (-1)^n \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi}$ .

On obtient donc  $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## Deuxième partie.

On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1) \dots (x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

- 1- Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Comme pour tout  $n \geq p+1$ ,  $f_n(-p) = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-p) = 0$ .

- 2- On suppose que  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ .

- a) Puisque  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) \neq 0$  et

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Il s'en suit que pour tout  $n \geq N_x = \max\{1, \lfloor -x \rfloor + 1\}$ ,  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$  et

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = -x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général  $\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ , définie à partir du rang  $N_x$  est convergente.

- b) Pour tout  $n \geq N_x$ , notons

$$S_n(x) = \sum_{k=N_x}^n \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}.$$

Par télescopage des termes, pour tout  $n \geq N_x$ ,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x+1}(x) - \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x}(x) = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)},$$

d'où  $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x) e^{S_n(x)}$ . Il en résulte que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0$ , où  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ .

- c) D'après la question précédente, et la question 1-, a),

$$f(x) = \begin{cases} f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

- d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$ . Par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $f(x) = x f(x+1)$ .
- e) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(1) = 1$  donc  $f(1) = 1$ .  
En utilisant la relation  $f(x) = x f(x+1)$ , on établit, par récurrence sur  $n$ , que

$$f(n) = \frac{1}{(n-1)!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

3- Soit  $x \in \mathbb{R}$ , d'après (2) on a

$$\begin{aligned} f_n(x) f_n(1-x) &= \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \times \frac{n^{-1+x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (-x+k+1) \\ &= \frac{1}{n!(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \times \prod_{k=1}^n (k-x) \\ &= \frac{n}{n+x} \frac{x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (x+k)(k-x) \\ &= \frac{n}{n+x} s_n(x). \end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donne la relation demandée,

$$f(x) f(1-x) = s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

4- On se propose dans cette question de montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on a la relation :

$$f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right). \quad (*)$$

- a) (i) Pour  $p = 1$  la relation (\*) est trivialement vérifiée.  
(ii) Supposons que  $p \geq 2$  et  $px = -n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $f(px) = 0$  d'après 1-. D'autre part, remarquons que le membre de droite de l'égalité (\*) peut également s'écrire

$$(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{-n+k}{p}\right)$$

et parmi les entiers  $\{-n+k : k = 0, \dots, p-1\}$  il en existe un, noté  $k_0$  tel que  $(-n+k_0)/p$  soit un entier de  $\mathbb{Z}_-$ . D'après 1-, le terme de droite dans (\*) est donc nul, d'où le résultat.

Montrons la propriété utilisée : il existe  $k_0 \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que  $-n+k_0 \in p\mathbb{Z}_-$ . Par la division euclidienne de  $n$  par  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe  $(q, r) \in \mathbb{N}^2$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que  $n = pq + r$ . Pour  $k_0 = r$ , on a  $-n+k_0 = -pq$ , ce qu'il fallait démontrer.

- b) On suppose que  $px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$ . Soit  $n$  un élément quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . Par la définition de  $f_n$ , on a d'une part,

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1} n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1} (px+j),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1} \left( \frac{n^{-(x+\frac{k}{p})}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{p} + i\right) \right) \\ &= \frac{n^{-\left(px + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} \left( \prod_{i=0}^{n-1} (px+k+ip) \right), \end{aligned}$$

puis en utilisant des changement d'indices et la commutativité de la multiplication,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} f_n \left( x + \frac{k}{p} \right) &= \frac{n^{-\left( px + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p} \right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell=ip}^{(i+1)p-1} (px + \ell) \right) \\ &= \frac{n^{-\left( px + \frac{p-1}{2} \right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{j=0}^{pn-1} (px + j), \end{aligned}$$

car  $\cup_{i=0}^{n-1} \{ip, \dots, (i+1)p-1\} = \{0, \dots, np-1\}$ .

Il en résulte que

$$\frac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n \left( x + \frac{k}{p} \right)} = p^{pn-1} n^{\frac{p-1}{2}} \frac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!} := A_p(n)$$

qui est strictement positif et ne dépend pas de  $x$ .

Le terme de gauche admet une limite égale à  $\frac{p^{px-1} f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f \left( x + \frac{k}{p} \right)}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Il en

résulte que la suite  $(A_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et admet une limite, positive ou nulle. On note  $A_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_p(n)$ , on obtient l'égalité demandée :

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f \left( x + \frac{k}{p} \right). \quad (3)$$

c) D'après la question 2-, e),  $f(1) = 1$ , en écrivant la relation ci-dessus pour  $x = \frac{1}{p}$ , on a

$$f(1) = 1 = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f \left( \frac{k+1}{p} \right) = A_p \prod_{k=1}^p f \left( \frac{k}{p} \right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f \left( \frac{k}{p} \right).$$

Le changement d'indices  $k \rightarrow p-k$  donne

$$1 = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f \left( \frac{k}{p} \right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f \left( 1 - \frac{k}{p} \right).$$

Calculons  $A_p^2$  : par l'égalité précédente et le résultat de la question 3-, on a

$$1 = A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} f \left( \frac{k}{p} \right) f \left( 1 - \frac{k}{p} \right) = A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{p}}{\pi},$$

ainsi

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}}.$$

d) Montrons l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle  $x$  :

$$(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1 \right).$$

On a

$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1),$$

ainsi le polynôme  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  a pour zéros complexes, les  $p - 1$  racines de l'unité  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$  avec  $k = 1, \dots, p - 1$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1 &= (x - e^{\frac{2ik\pi}{p}})(x - e^{-\frac{2ik\pi}{p}}) = (x - z_k)(x - \bar{z}_k) \\ &= (x - z_k)(x - z_{p-k}). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2 &= \prod_{k=1}^{p-1} (x - z_k)(x - z_{p-k}) \\ &= \prod_{k=1}^{p-1} \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1 \right). \end{aligned}$$

e) En donnant à  $x$  la valeur 1, on obtient

$$\begin{aligned} p^2 &= \prod_{k=1}^{p-1} \left( 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{p} \right) = \prod_{k=1}^{p-1} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{p} \\ &= 4^{p-1} \left( \prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} \right)^2. \end{aligned}$$

Puisque  $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} > 0$ , il en résulte que

$$\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Avec le dernier résultat de la question précédente, on a  $A_p^2 = \frac{(2\pi)^{p-1}}{p}$ . sachant que

$$A_p \geq 0, \text{ il vient } A_p = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

Finalement, en remplaçant  $A_p$  par sa valeur dans la formule (3), on obtient la formule (\*).

## Troisième partie.

Soit  $\Gamma$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1- Notons  $h : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $h(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

D'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , On a  $h(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ , ainsi  $h(x, \cdot)$  est intégrable

au voisinage de 0 si et seulement si  $x > 0$ , et  $h(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , ainsi  $h(x, \cdot)$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  pour tout  $x$ .

Il en résulte que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $\mathcal{D} = ]0, +\infty[$ .

On vérifie que  $h$  est continue sur  $]0, +\infty[^2$ , ainsi que chacune de ses dérivées partielles et on a

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x, t) \mapsto \ln^k t \, e^{-t} t^{x-1}.$$

Considérons un segment  $[a, b] \subset \mathcal{D}$  et notons  $g_{a,b}(t) = (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ , on a

$$|h(x, t)| \leq g_{a,b}(t) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \max\{|\ln^k(a)|, |\ln^k(b)|\} g_{a,b}(t).$$

Comme la fonction  $g_{a,b}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que  $\Gamma$  est indéfiniment dérivable sur  $[a, b]$ . Comme  $a, b$  sont arbitrairement choisis sur  $\mathcal{D}$ , on en déduit que  $\Gamma$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathcal{D}$ .

2- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

a) Soit  $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ .

Soit  $n \geq 1$  et  $x > 0$ . Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left[ (1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du \\ &= \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$g_n(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} g_{n-k}(x+k).$$

Par ailleurs, pour tout  $y \in ]0, +\infty[$ ,

$$g_0(y) = \int_0^1 u^{y-1} du = \left[ \frac{1}{y} u^y \right]_0^1 = \frac{1}{y},$$

$$\text{d'où } g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le changement de variable  $t = nu$  donne  $g_n(x) = n^{-x} G_n(x)$ .  
En remplaçant par la valeur de  $f_n(x)$ , non nulle, on obtient

$$G_n(x) = \frac{n}{(n+x)f_n(x)}.$$

c) On étudie la fonction  $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ , on vérifie que  $e^x \geq 1 + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que

$$e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \geq 0$$

pour tout  $t \in [0, n]$ .

En élevant à la puissance  $n$ , on obtient les inégalités demandées :

$$e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

On en déduit que, pour tout  $t \in [0, n]$ ,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

- d) Soit  $a \in [0, 1]$ . L'inégalité  $(1 - a)^n \geq 1 - na$  est vérifiée pour  $n = 1$ .  
 Supposons-la vérifiée pour  $n \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} (1 - a)^{n+1} &= (1 - a)(1 - a)^n \\ &\geq (1 - a)(1 - na) = 1 - (n + 1)a + na^2 \\ &\geq 1 - (n + 1)a. \end{aligned}$$

Il en résulte, par récurrence sur  $n$ , que l'on a  $(1 - a)^n \geq 1 - na$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En utilisant la question précédente, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

- e) Pour  $x \in ]0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt \\ &= \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$0 \leq \Gamma(x) - G_n(x) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt.$$

L'existence de  $\Gamma(x)$  implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = 0$ .

Par ailleurs,  $\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$  qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$ .

D'après la question 2-a), on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{f(x)}$ , ainsi  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$ .



CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $R^*$  par :  $f(x) = \frac{\text{Ln}(1+x^2)}{x}$ , où  $\text{Ln}$  désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction  $f$  (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine).

On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus, on peut donc prolonger  $f$  par continuité à l'origine en posant  $f(0) = 0$ .

La dérivée de  $f$  est égale à :  $f'(x) = \frac{2x^2 - (1+x^2)\text{Ln}(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$  et elle est nulle quand son

numérateur est nul ou encore  $2(t-1) - t\text{Ln}t = 0$  en posant  $t = 1+x^2$ ,  $t \geq 1$ .

Soit  $z(t) = 2(t-1) - t\text{Ln}t = 0$ ,  $z'(t) = 1 - \text{Ln}t$  qui est nulle pour  $t = e$ .

On trouve  $z(e) = e - 2 > 0$  et par exemple  $z(e^2) = -2 < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur  $t_0$  dans l'intervalle  $]e, e^2[$  qui annule  $z(t)$ .

Soit  $x_0 = \sqrt{t_0 - 1}$ . La fonction  $z$  est croissante sur l'intervalle  $]0, x_0[$  et décroissante ensuite.

La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $]0, \sqrt{e-1}[$ , puis décroissante. D'autre

part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et la pente à l'origine est donnée par  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

2. Calculer  $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ . On calcule par intégration par parties.

$$I = \int_0^1 x \text{Ln}(1+x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \text{Ln}(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \text{Ln} \sqrt{2} - \int_0^1 \left( x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$I = \text{Ln} \sqrt{2} - \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \text{Ln}(1+x^2) \right]_0^1 = \text{Ln} 2 - \frac{1}{2}$$

3. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$  strictement positif.

Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

On vérifie facilement par récurrence que la suite est strictement positive.

On a :  $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$ . La suite est décroissante et minorée, donc convergente

vers une limite  $l$  solution de l'équation :  $l = f(l)$ , car  $f$  est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où  $l = 0$

## Exercice n° 2

1. Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx .$$

Cette intégrale présente un problème en zéro pour le numérateur et un problème en 1 pour le dénominateur.  $\int_0^{1/2} \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx$  est convergente en 0 pour tout  $\beta$  et en 1,  $\ln x \approx x-1$  est convergente en 1 pour  $\alpha < \beta + 1$

2. En déduire que  $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$  est convergente et calculer  $I$ .

L'intégrale est convergente d'après la question précédente. On pose  $t = \sqrt{1-x}$ ,

$I = 2 \int_0^1 \ln(1-t^2) dt = 2 \int_0^1 \ln(1-t) dt + 2 \int_0^1 \ln(1+t) dt$ , puis en posant  $u = 1-t$  dans la première intégrale et  $u = 1+t$  dans la deuxième intégrale, on obtient  $I = 4(\ln 2 - 1)$

Une primitive de  $\ln x$  est  $x \ln x - x$ .

### Exercice n° 3

1. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$

Solution :  $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x (\ln x)^n (\ln x - 1) dx < 0$ . La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

2. Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

$v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{n+1} (x-1) \ln(x+1) dx < 0$  et la suite est décroissante, minorée par zéro, elle

converge. On a, par intégration par parties :  $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$  qui tend vers zéro.

### Exercice n° 4

Soient  $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .  
Evident.

2. Déterminer un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $E$ . Les fonctions  $h$  de  $E$  qui ne sont pas dans  $F$  vérifient  $h(0) \neq 0$  ou  $h'(0) \neq 0$ . Par exemple les fonctions constantes et les applications linéaires sont ainsi.

Soit  $G = \{f \in E / f(x) = ax + b\}$ . Montrons que  $G$  est un supplémentaire de  $F$ .

Soit  $f \in F \cap G$ , alors  $f(x) = ax + b$ ,  $f(0) = b$ , et  $f'(0) = a$ . Donc  $a = b = 0$  (car  $f \in F$ ) et l'intersection est réduite à zéro.

Soit  $h \in E$ , on pose :  $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$  et  $f \in F$ . Et la fonction

$g(x) = h(0) + h'(0)x$  appartient à  $G$  et  $h = f + g$ .

L'espace  $G$  est engendré par les fonctions  $e_1(x) = 1$  et  $e_2(x) = x$  et donc  $G$  est de dimension 2.

3. Soit la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = x^2 + x + 1$ . Quelle est sa projection orthogonale sur  $G$  ?

On peut se restreindre à l'espace vectoriel des fonctions du second degré et naturellement la projection de  $h$  sur  $G$  est la fonction  $x+1$  (on peut le vérifier avec la matrice de la projection orthogonale sur  $G$ ).

**Exercice n° 5**

Soient  $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$  et  $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$  où  $n$  est un entier naturel et  $x$  un nombre réel strictement positif.

1. Calculer  $f_n(1)$

$$f_n(1) = \left[ t(1-t^2)^n \right]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = -2n f_n(1) + 2n f_{n-1}(1)$$

Et  $f_n(1) = \frac{2n}{2n+1} f_{n-1}(1)$  et on obtient :  $f_n(1) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Montrer que  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

$$\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \int_0^1 \int_t^1 (1-x^2)^n dx dt = \frac{1}{2} \sum_k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ et } \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{(n+1)} = \sum_k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1}$$

En conclusion  $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

3. Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 1 - F_n(1)$

$$u_n = \int_0^1 \frac{f_n(1) - f_n(t)}{f_n(1)} dt = \frac{1}{f_n(1)} \times \frac{1}{2(n+1)}$$

On vérifie que  $u_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+4} u_n$  et la suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

**Exercice n° 6**

Soit  $A$  une partie non vide de  $R^2$  et  $a \in A$ . On pose,

$$T(A, a) = \{u \in R^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n (x_n - a) \rightarrow u\}$$

1. Montrer que  $(0,0) \in T(A, a)$

Il suffit de prendre  $x_n = a$  et  $\lambda_n = 1$ .

2. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble stable par homothétie positive.

Soit  $u \in T(A, a)$ ,  $\forall \mu > 0$ ,  $\mu \lambda_n (x_n - a) \rightarrow \mu u$  et  $\mu u \in T(A, a)$ , donc cet ensemble est stable par homothétie positive.

3. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble fermé de  $R^2$ .

Soit  $u^i$  une suite de points de  $T(A, a)$  et  $u = \lim_i u^i$ . Comme  $u^i \in T(A, a)$ ,  $\exists \lambda_{pi}^i > 0$ ,

$$\exists x_{pi}^i \in A, x_{pi}^i \rightarrow a,$$

$$\lambda_{pi}^i (x_{pi}^i - a) \rightarrow u^i. \text{ Pour tout } n, \exists k_n > 0 \text{ tel que } |\lambda_{kn}^n (x_{kn}^n - a) - u^n| < \frac{1}{n} \text{ et alors } x_{kn}^n \rightarrow a,$$

$$\lambda_{kn}^n (x_{kn}^n - a) \rightarrow u \text{ et } u \in T(A, a), \text{ ce qui montre que } T(A, a) \text{ est un ensemble fermé de } R^2.$$

4. Montrer que  $T(A, a)$  est un ensemble convexe de  $R^2$  si  $A$  est une partie convexe

$$\exists (u_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, u_n \rightarrow a, \lambda_n (u_n - a) \rightarrow u$$

$$\exists (v_n) \in A, \exists \alpha_n > 0, v_n \rightarrow a, \alpha_n (v_n - a) \rightarrow v \text{ et}$$

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) \rightarrow \lambda u + (1 - \lambda) v.$$

Par ailleurs,

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) = (\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n) \left( \frac{\lambda \lambda_n u_n + (1 - \lambda) \alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n} - a \right) \text{ ou encore,}$$

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) = \beta_n (w_n - a) \text{ avec}$$

$$\beta_n (w_n - a) \rightarrow \lambda u + (1 - \lambda) v,$$

$$w_n \in A, \text{ car } A \text{ est une partie convexe de } R^2,$$

$$w_n = \frac{\lambda \lambda_n u_n + (1 - \lambda) \alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n} \rightarrow a \quad \text{car } \|w_n - a\| \leq \max(\|u_n - a\|, \|v_n - a\|).$$

$$\text{En conclusion } \lambda u + (1 - \lambda) v \in T(A, a)$$

5. Soit  $A = R^+ \times R^+$ , expliciter  $T(A, a)$  pour  $a = (0, 0)$ .

On vérifie facilement que  $T(A, a) = R^+ \times R^+$

6. Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$ , expliciter  $T(A, a)$  pour  $a = (0, 0)$ .

Soit  $u = (x, y) \in T(A, a)$ ,

$$\exists (x_n, y_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \rightarrow x, \lambda_n y_n \rightarrow y$$

En multipliant par  $\lambda_n$  les inégalités, on obtient :

$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n y_n - \lambda_n x_n x_n \geq 0$  et par passage à la limite,  $y \geq 0$ . De même,  $x \geq 0$ . On a donc  $T(A, a) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Réciproquement, on pose, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$  et on vérifie que cette suite  $(x_n, y_n)$  appartient à l'ensemble  $A$  pour  $n$  grand.



1

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

## Problème I.

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Pour un entier  $d \geq 1$ , on note par  $\mathcal{M}_d$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $d$ . Si  $M = (m_{ij})$  et  $P = (p_{ij})$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_d$  on note par  $MP$  le produit de  $M$  par  $P$ . On note  $I_d$  la matrice identité d'ordre  $d$ . Nous dirons qu'une suite de matrices  $(M_n = (m_{ij}(n)))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_d$  converge vers une matrice  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_d$  si, pour tous  $i$  et  $j$  fixés, chaque suite réelle  $(m_{ij}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $m_{ij}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 1- Soit  $d > 1$ . Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que  $A \in \mathcal{M}_d$  soit diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .
- 2- Soit  $P \in \mathcal{M}_d$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_d$ . Montrer que si  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$ , alors  $(PM_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $PM$  et  $(M_n P)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $MP$ .
- 3- Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) On note  $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ ,  $R = \frac{1}{6} I_2$  et  $O$  la matrice nulle  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = O$ .

- b) Sans calculer  $(I_2 - Q)^{-1}$ , montrer que  $I_2 - Q$  est inversible puis démontrer la relation suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) = (I_2 - Q)^{-1}.$$

- c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $S_n = I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n$ .

(i) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la matrice  $A^n$  se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la

façon suivante  $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix}$ .

(ii) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

- 4- Dans cette partie, on fixe une base de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ . On convient de noter de la même façon un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  et la matrice colonne à  $d$  lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice  $M$ , on note  ${}^t M$  la matrice transposée. On fixe une matrice  $A \in \mathcal{M}_d$ .

- a) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda$  est aussi valeur propre de  ${}^t A$ .

- b) Soit  $x$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et soit  $y$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Montrer, pour  $\lambda$  et  $\mu$  distincts, la relation  ${}^tyx = 0$ .

*Indication : on pourra calculer de deux façons différentes la quantité  ${}^tyAx$ .*

- c) On suppose désormais que  $A$  possède  $d$  valeurs propres distinctes notées  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  et vérifiant  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$ .

On note  $x_i$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et  $y_i$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à cette même valeur propre.

(i) Montrer que  $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^tyx$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$ .

(ii) Montrer que la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  est une base de  $\mathbb{R}^d$ .

(iii) En déduire qu'on peut choisir la famille  $(y_1, y_2, \dots, y_d)$  de sorte que  ${}^ty_i x_i = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Dans la suite, on supposera que les familles  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_d)$  sont telles que  ${}^ty_i x_i = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

- d) Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , on définit la matrice carrée  $A_i$  d'ordre  $d$  par  $A_i = x_i {}^ty_i$ . Montrer que, pour  $i \neq j$ , la matrice  $A_i A_j$  est la matrice nulle et que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , on a la relation  $A_i^2 = A_i$ .

- e) Montrer que  $\sum_{i=1}^d A_i = I_d$  et  $\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i = A$ .

*Indication : on rappelle que  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  est une base de  $\mathbb{R}^d$ .*

- f) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$ .

- g) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n$ .

- h) Montrer que  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\lambda_1 \in ]-1, 1]$ .  
Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  pour  $\lambda_1 \in ]-1, 1]$ .

- 5- On considère les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = v_0 = 1$  et la formule de récurrence : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n + 2v_n,$$

$$v_{n+1} = u_n + v_n.$$

- a) Montrer que  $u_n$  et  $v_n$  sont strictement positifs pour tout entier  $n$ .

- b) Déterminer l'unique matrice  $A$  telle que l'on ait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- c) Calculer les valeurs propres de  $A$ .

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ?

- d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- e) Montrer que les suites  $\left(\frac{u_n}{(1 + \sqrt{2})^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\frac{v_n}{(1 + \sqrt{2})^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent dans  $\mathbb{R}$  et calculer leurs limites. En déduire la limite de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .



## Problème II.

On se propose d'étudier la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui au réel  $x > 0$  associe

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt.$$

Pour  $x > 0$ , on définit la fonction  $h_x : [0, 2x[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h_x(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$ .

1- Montrer que  $h_x$  est intégrable sur  $[0, 2x[$ .

2- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(2x \sin(v)) dv.$$

3- (i) Montrer que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité sur  $[0, +\infty[$ , en une fonction que l'on notera toujours  $f$ .

(ii) Montrer que  $f$  est dérivable et calculer sa dérivée  $f'$ .

(iii) Montrer que cette fonction est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$  et préciser  $f^{(n)}(x)$  en fonction de  $n$  et de  $x$  sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

4- On admet que  $f^{(2n)}(0) = 0$  et  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

a) Déterminer la série de Taylor de  $f$  au voisinage de 0 sous la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$  et calculer son rayon de convergence.

b) Démontrer que pour  $x$  fixé, la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$  est alternée et montrer que la suite  $(|a_{2k+1} x^{2k+1}|)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante dès que  $k > x - \frac{3}{2}$ .

5- Montrer que pour tout entier naturel  $p$  et tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq p-1$ , on a:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt < 0.$$

En déduire le signe de  $f(p\pi)$ .

*Indication.* On pourra utiliser la relation de Chasles : décomposer l'intégrale en somme des intégrales sur  $[2k\pi, (2k+1)\pi]$  et  $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ .

6- Déterminer le signe de  $f(p\pi + \pi/2)$  et en déduire que  $f$  s'annule une infinité de fois sur  $[0, +\infty[$

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Le secteur des *technologies de l'information et de la communication* est en croissance en Afrique, avec une forte augmentation de l'utilisation d'Internet et de la téléphonie mobile. Exposez dans quelle mesure cela est un indicateur de développement.

**Sujet n° 2**

Un des huit objectifs du millénaire pour le développement<sup>1</sup> est de préserver l'environnement. Explicitez en quoi cela constitue un enjeu pour éliminer la pauvreté.

**Sujet n° 3**

Le 10 octobre 2013, Joyce Banda, la présidente du Malawi (Etat d'Afrique australe), a limogé son gouvernement après la révélation d'une affaire de soupçons de corruption et de détournement de fonds publics. Une telle décision peut-elle rétablir la confiance avec la population et les bailleurs de fonds ? Prolongez votre propos en exposant d'autres mesures propices à rétablir la confiance.

---

<sup>1</sup> Le Sommet du Millénaire, qui s'est tenu du 6 au 8 septembre 2000 au Siège de l'Organisation des Nations Unies, à New York, s'est conclut avec l'adoption par les 189 États Membres de la Déclaration du Millénaire, dans laquelle ont été énoncés les huit objectifs du Millénaire pour le développement (OMD).

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Calculatrice non programmable autorisée.**

**Les exercices sont indépendants.**

**Dans toute la composition,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.**

**Exercice n° 1**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \text{ et } 0 < u_0 < 1$$

1. Etudier la convergence de cette suite  $(u_n)$  et donner sa limite (si elle est convergente).
2. On considère la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(v_n)^2}{4} \text{ et } 1 < v_0 \leq 2$$

Etudier la convergence de cette suite  $(v_n)$  et donner sa limite (si elle est convergente).

**Exercice n° 2**

Soit l'application linéaire  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^4$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Déterminer une base du noyau de  $f$ .
2. Déterminer une base de l'image de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ .

3. En identifiant  $R^3$  à  $R^4 \times \{0\}$ , quel est l'orthogonal de l'image de  $f$  dans  $R^4$  ?
4. Ecrire la matrice  $A$  de la projection orthogonale sur  $Im(f)$  dans une base formée de la réunion d'une base de  $Im(f)$  et de son orthogonal.
5. Ecrire la matrice  $M$  de la projection orthogonale sur  $Im(f)$  dans la base canonique de  $R^4$ .

### Exercice n° 3

Soit  $f$  l'application définie sur  $R$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est impaire et continue.
2. Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $R$ . On pourra étudier la fonction  $u$  qui, à tout  $t$  réel positif, associe :  $u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$ .  
En déduire l'existence d'une application réciproque de  $f$  impaire.
3. Justifier l'existence d'un développement limité de  $f$  en 0 à tout ordre  $n$ .
4. Ecrire un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 5 ; donner également un développement limité de  $f^{-1}$  en 0 à l'ordre 5.

### Exercice n° 4

Pour tout nombre réel  $x$ , on désigne par  $E(x)$  sa partie entière, soit le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

1. Etudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $R^{+*}$  (ensemble des nombres réels strictement positifs) par :  $f(x) = \frac{E(x)}{x}$
2. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ , étudier la convergence de cette suite et donner sa limite (si elle existe).

### Exercice n° 5

1. Etudier les variations de tracer le graphe de la fonction numérique  $sh$  d'une variable réelle  $x$  définie par :  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. Soit  $f(x) = Ln(1 + sh(x))$ , où  $Ln$  désigne le logarithme népérien. Donner un développement limité de  $f$  d'ordre 3 au voisinage de zéro.
3. Calculer  $\int_{-1}^1 f(x) dx$
4. Soit  $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ , donner un développement limité de  $g$  d'ordre 2 au voisinage de zéro.
5. Etudier le prolongement par continuité de  $g$  à l'origine. Cette fonction est-elle dérivable à l'origine ?

### Exercice n° 6

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ , où  $n$  est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
4. Soit  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ . Déterminer la limite de  $J_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.
5. Calculer  $J_n$  en fonction de  $n$ .

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Joël de Rosnay intitulé : Surfer la vie. Comment *sur-vivre* dans la société fluide, et paru aux éditions LLL, Les liens qui libèrent, en Mai 2012.**

**Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.**

***Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.***

Il nous faut donc promouvoir ce que j'appelle la « société fluide ». Une société qui se fonde sur des rapports de flux et pas seulement sur des rapports de force. L'avènement de la société fluide permettra de traiter les grands problèmes actuels, qu'ils soient liés à l'énergie, à la santé, à l'éducation ou à l'environnement. Trop souvent considérés sous l'angle de décisions centralisées et pyramidales, les grands enjeux de société sont soumis à des jeux de pouvoir personnel ou à des groupes de pression qui nous transforment en usagers passifs. Ainsi en est-il du nucléaire, symbole de la centralisation, de l'industrie pétrolière, de l'influence de quelques géants de l'industrie pharmaceutique ou de la mainmise de l'agroalimentaire sur nos vies quotidiennes.

Dans le même ordre d'idées nous avons besoin d'une réelle démocratie énergétique responsabilisante. Forts de notre conquête de *l'automobilité* avec l'automobile, puis de *l'infomobilité* avec Internet et le Smartphone, il nous reste à nous libérer de la tutelle énergétique en créant une *écomobilité* qui nous transformerait en producteurs – consommateurs à la fois autonomes et solidaires.

Cette nouvelle approche permettrait de passer d'un système de rapports de force, de concurrence et de compétition acharnée à un système de rapports de flux et d'échanges solidaires mettant en œuvre de nouvelles valeurs de nouvelles actions et de nouvelles responsabilités par exemple de sortir des rapports de force exercés par l'industrie nucléaire et pétrolière sur les usagers pour s'ouvrir à des rapports de flux représentés par une électricité autoproduite de manière décentralisée à partir d'énergies renouvelables et librement échangée entre utilisateurs. Pour y parvenir, il est nécessaire de se référer à des modèles autres que les seuls modèles économiques ou politiques.

En un certain sens, le surf représente la transposition dynamique de la vie elle-même : un modèle pour affronter la complexité du monde. Le surfeur chevauche un élément improbable, la vague qui va mourir sur le rivage, et en tire un plaisir éphémère. Le surf est bien plus qu'un sport, c'est un style de vie, un mode de fonctionnement en société. C'est aussi une expression passée dans le langage courant. On parle de surfer sur les sondages, sur Internet, dans l'esprit de l'opinion publique comme s'il s'agissait d'une grande vague puissante et déterminée. Cette métaphore (1) de plus en plus répandue symbolise l'entrée dans l'ère de la fluidité, après des siècles de rapports de force. Dans le cadre de la nouvelle société du numérique, de la fluidité des échanges et des rapports sociaux, nous commençons enfin à nous construire les uns par rapport aux autres

Effectivement, dans un monde reconfigurable et instable, rien n'est extrapolable comme par le passé. Des « effets pervers » peuvent tout remettre en cause. Que signifie « se former » à une époque où les connaissances acquises sont sans cesse bouleversées ? Comment exercer son « métier » sans être à la traîne d'un monde en perpétuel mouvement ? Associée à la crise mondiale, cette sorte de fuite en avant nourrit le sentiment d'insécurité des jeunes générations. Pour compenser cette impression que leur avenir se construit sur des sables mouvants, elles veulent profiter maintenant de tout ce qu'elles tiennent dans leurs mains. Elles veulent vivre de la gratification instantanée plutôt que d'attendre une récompense ou une reconnaissance tardive.

La transposition de ces valeurs dans la conduite de sa vie s'accorde aux comportements des surfeurs. Surfer sa vie, c'est profiter de l'instant, être à l'écoute de son environnement, de ses réseaux, évaluer en temps réel les résultats de son action pour réussir à affronter les nouveaux défis de la société fluide. Le but du surfeur est non seulement de conserver son équilibre tout en surveillant ceux qui sont sur la même vague que lui et qui risqueraient de le déstabiliser, mais aussi et surtout de prendre du plaisir, de faire reconnaître ses compétences, d'être félicité par les surfeurs qui remontent pour prendre la vague suivante, comme dans une quête de renaissance perpétuelle.

Comme la vie qui s'éteint, la vague va mourir sur la plage mais il est possible de renaître de ses cendres dans une autre vie, et de repartir à la recherche de nouveaux enjeux et de nouveaux plaisirs avec la recherche de vagues suivantes.

Surfer la vie est à la fois un jeu, un défi, et une compétition et parfois une douleur. L'échelle des valeurs se déplace de la concurrence - qui vise à s'imposer et à réussir, - vers le partage, la solidarité, l'échange, le « gagnant-gagnant » qui autorisent davantage de souplesse dans la conduite de sa vie.

La métaphore du surf peut nous aider à construire des modèles de vie et de société plus vivables, plus solidaires. Dans un autre contexte, la génération du numérique, avec sa capacité de travail en réseau et son habileté à surfer sur la complexité, peut nous aider à explorer de nouvelles voies pour concevoir ensemble notre avenir. Au-delà des égoïsmes traditionnels à toute volonté de pouvoir, est-il possible que soit en train de naître une « société fluide » plus altruiste, plus empathique, plus soucieuse de l'intérêt commun que de l'intérêt particulier de quelques groupes ?



## Surfer la vie dans une société fluide : risque et innovation

Une société qui ne prend pas de risques ne peut évoluer. Sans développement, sans croissance, sans partage, elle reste à l'état statique, se sclérose et menace de disparaître. Prendre des risques, c'est accroître ses chances de gagner. C'est vrai d'une personne comme d'une entreprise. Pour cela, il faut affronter la peur : celle de l'échec, de la faillite, ou, pour un sportif celle de la chute et de la défaite. C'est la prise de risques matérialisée, par les nouveaux projets de recherche en laboratoire qui permet la découverte, l'invention et en définitive, l'innovation bénéfique pour la société toute entière.

Or, découverte, invention et innovation vont à l'encontre de la stabilité des idées reçues et des situations acquises. L'innovation dérange. Elle crée des rejets, tout comme un système immunitaire qui se défend avec ses anticorps et ses globules blancs contre les antigènes étrangers des microbes qui cherchent à envahir les cellules. Dans une entreprise, quand une équipe propose des idées nouvelles, on entend très souvent des réactions comme : « on n'a pas le budget », « ça se fait déjà en Chine », « la réglementation internationale ne le permettra pas », etc. Les Américains appellent ce syndrome le NIH, pour Not Invented Here : cela n'a pas été inventé ici, donc cela ne peut qu'être meilleur que ce que feraient nos équipes de recherche.

D'où la paralysie des innovations dans de grandes structures trop rigides et trop centralisées. Lorsque je travaillais à l'institut Pasteur, le professeur Jacques Monod me disait souvent : « Quand vous lancez une nouvelle idée, vous avez trois catégories de personnes contre vous : ceux qui font la même chose, ceux qui font le contraire et ceux qui ne font rien, c'est-à-dire tout le monde ! » C'est pourquoi il faut se battre pour innover, et pour cela prendre des risques.

Les personnes responsables de la naissance des innovations dans les entreprises publiques ou privées me semblent appartenir – d'après l'expérience que j'ai pu acquérir dans ces structures - à deux catégories : les « oui-mais » et les « oui-et ». Pour les premiers, la proposition que l'on vient de faire est toujours impossible à réaliser : « D'accord, c'est une assez bonne idée, *mais* on n'aura pas le temps de la mettre en œuvre, *mais* les concurrents y travaillent déjà, *mais* le planning est trop chargé, etc. Pour les seconds, il y a toujours une autre idée derrière la première : « Oui, c'est une bonne idée, *et* on pourrait aussi en profiter pour lancer un nouveau journal » ; « Excellente proposition, *et* on pourrait ajouter la coopération avec l'entreprise X » etc. L'ouverture d'esprit face à l'innovation est essentielle pour créer des synergies, des complémentarités, voire des amplifications permettant d'aller au-delà de l'idée originale.

Pour surfer la vie de manière créative et gratifiante, il est nécessaire de connaître et de mettre en œuvre certaines règles fondamentales qui permettent d'assurer, comme pour le surf lui-même, la sécurité, l'efficacité, et le plaisir dans la fluidité. Dans la vie individuelle et collective, des règles ayant fait leurs preuves au cours des siècles, voire des millénaires, ont permis aux hommes de construire les sociétés afin d'évoluer, de travailler ensemble et de coopérer, dans le respect de la dignité humaine, de la liberté, de la démocratie et de l'égalité.

Des règles trop souvent enfreintes, tout au long de l'histoire, par des régimes dictatoriaux totalitaires ou intégristes qui ont laissé en place, voire favorisé la répression des libertés humaines, l'esclavagisme, la torture, la criminalisation de l'économie, les guerres et les profondes inégalités sociales. Néanmoins, de grands principes de vie personnelle et collective existent et sont respectés dans le monde.



J'ai tenté de sélectionner ces principes d'humanité tels qu'ils ont été décrits par les grands philosophes et mis en pratique par les cinq grandes religions. Il n'est pas interdit de penser que leur application par de hauts dirigeants politiques et industriels ouvrirait des voies nouvelles pour affronter et surmonter la crise qui frappe le monde.

Voici mes sept règles et concepts pour surfer harmonieusement et intelligemment la vie : le respect de la diversité ; le respect de l'autre ; l'altruisme ; l'empathie ; la responsabilité individuelle et collective ; la fraternité ; la spiritualité laïque.

### *Le respect de l'autre, base de la solidarité pour construire l'avenir*

Dans une société fluide fondée sur le partage, l'échange et les rapports de flux, le respect de l'autre constitue une donnée essentielle à la survie et au développement. Le respect de l'autre a toujours été considéré par les grandes religions et les grandes philosophies laïques comme une priorité majeure. Pour surfer la vie en harmonie avec les autres, chaque personne doit chercher à pratiquer une telle forme constructive de relation plutôt que de maintenir des rapports de force et de pouvoir conduisant à donner la priorité aux biens matériels, à la possession immédiate, donc à l'égoïsme, au détriment de l'ouverture aux autres.

La question du respect de l'autre et du vivre-ensemble est une constante chez tous les grands penseurs de la construction des sociétés humaines, de Gandhi à Martin Luther King. Selon ce dernier, « il faut apprendre à nous aimer comme des frères ou nous préparer à périr comme des imbéciles ». Pour lui, la question du « bien- vivre » plutôt que du « mal-être » est une question collective et pas seulement personnelle, car elle passe par le respect fondamental de l'autre et sa pratique.

### *La responsabilité individuelle et collective, clé de la réciprocité dans les liens sociaux*

Une autre grande valeur nécessaire pour surfer sa vie, et surtout pour être capable d'agir collectivement, est la responsabilité : la prise de conscience de sa capacité à comprendre l'évolution des phénomènes d'un monde complexe, à gérer cette complexité et à agir sur elle pour en modifier l'évolution. Or nous semblons aujourd'hui dépassés par l'évolution scientifique et technologique, en constante accélération. Nous en perdons le contrôle, la maîtrise de la maîtrise. Cette incapacité à gérer la complexité et l'accélération fait naître des menaces qui requièrent non seulement de nouvelles responsabilités, mais plus que tout une nouvelle éthique (2).

Une bioéthique, bien sûr, compte tenu des progrès rapides des sciences du vivant, mais aussi ce que j'appelle une info -éthique et une éco-éthique responsable, pour construire une civilisation du numérique respectueuse des droits et des libertés de chacun, ainsi qu'un environnement assurant la biodiversité et la durabilité des écosystèmes.

C'est justement ce que prône le philosophe allemand Hans Jonas dans son livre *Le principe responsabilité* publié en 1979. Il insiste sur l'urgence de nous doter d'une « éthique pour la civilisation technologique » fondée sur ce qu'il appelle le « principe de responsabilité ». Il part du postulat que les promesses de progrès des techniques modernes se sont transformées en menaces de catastrophes : « La science confère à l'homme des forces jamais encore connues, l'économie pousse toujours en avant dans une impulsion effrénée. » Les politiques de croissance à l'échelle mondiale conduisent inévitablement à des dérèglements de l'équilibre de la planète. On sait maintenant à quel point l'impact de l'homme met en danger nos sociétés et leur environnement. De nouvelles disciplines scientifiques apparues au cours des trente dernières années, telles que le génie génétique, le clonage ou la biologie de synthèse, risquent de mener à des débordements et à des dérives préjudiciables à l'intégrité même du vivant.

L'approche éthique fondée sur le principe de responsabilité se traduit dans le vivant et dans l'environnement par le fait de « prendre soin » de ce qui compte pour l'avenir physique, énergétique, biologique, environnemental de l'humanité. Ce que l'on pourrait appeler les « arts du soin » ne concerne pas seulement le domaine médical, mais aussi les accompagnements humains de tout type : éducation, prévention, éco-participation à la protection de l'environnement, art du jardin, du paysage, pratiques esthétiques, soutien juridique, police de proximité, psychothérapie de groupe, services à la personne... Ce soin implique un investissement intellectuel, financier et en termes de temps, d'où l'importance d'avoir précédemment investi un « capital-temps »

## LA VOIE PERSONNELLE VERS LE BONHEUR

Au terme de ces réflexions, il est nécessaire de retenir quelques clés essentielles pour parvenir à surfer harmonieusement vers son destin.

Tout d'abord, il faut souligner l'importance de la création individuelle et collective. Les grands enjeux actuels ne tournent plus seulement autour de la production mais de l'échange et de la création. C'est la création qui procure le sentiment d'avoir investi du temps qui pourra servir aux autres. C'est cette création qui transforme la mort en un passage, puisque ce que l'on a créé, partagé, diffusé, mémorisé, se retrouvera chez ceux qui poursuivront la tâche entreprise en se référant à celui ou celle qui l'a initiée. L'acte de création est lié au rayonnement. Donner, partager, transmettre, sont des actes essentiels, non seulement dans l'éducation de ses enfants, la formation de ses collaborateurs, les messages que l'on diffuse à la société, mais sur le plan psychologique et moral, en lien avec les grands principes évoqués – l'altruisme, la solidarité, et l'empathie.

(1) Métaphore : exemple

(2) Ethique : respect de règles morales

Avril 2014

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

**Problème I.**

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, Pour un entier  $d \geq 1$ , on note par  $\mathcal{M}_d$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $d$ .

- 1- Soit  $A \in \mathcal{M}_d$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique  $\chi_A(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I_d)$  soit scindé :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^d \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

et que pour tout  $1 \leq k \leq r$ , le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(A - \lambda I_d)$  soit de dimension  $\alpha_k$ .

- 2- Pour tous  $1 \leq i, j \leq d$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P M_n)(i, j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d p_{ik} m_{kj}(n) = \sum_{k=1}^d p_{ik} m_{kj} = (P M)(i, j).$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n P)(i, j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d m_{ik}(n) p_{kj} = \sum_{k=1}^d m_{ik} p_{kj} = (M P)(i, j),$$

ce qui donne le résultat.

- 3- Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) On note  $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$  et  $R = \frac{1}{6} I_2$ .

Le polynôme caractéristique de la matrice  $Q$  est donné par

$$\chi_Q(\lambda) = (\lambda - 1/3)^2 - 1/4 = (\lambda - 5/6)(\lambda + 1/6).$$

D'après la condition suffisante rappelée dans la question 1-,  $Q$  est diagonalisable. Il existe alors une matrice  $P \in \mathcal{M}_2$  inversible telle que  $Q = P D P^{-1}$ , où  $D = \begin{pmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}$ .

Il s'en suit que

$$Q^n = P D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En utilisant la question 2-, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Les valeurs propres de  $I_2 - Q$  sont  $1 - 5/6 = 1/6$  et  $1 + 1/6 = 7/6$ . 0 n'est pas valeur propre de  $I_2 - Q$ , donc  $I_2 - Q$  est inversible.

Notons  $S_n = I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n$ , on a

$$(I_2 - Q) S_n = (I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n) - (Q + Q^2 + \dots + Q^{n+1}) = I_2 - Q^{n+1}.$$

En utilisant la question 2-, il vient

$$(I_2 - Q) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_2 - Q^{n+1}) = I_2.$$

On obtient finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = (I_2 - Q)^{-1}.$$

- c) Désignons par  $O$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(i) La matrice  $A$  se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante

$$A = \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix},$$

en faisant un produit par blocs, on a  $A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R(I_2 + Q) & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R S_1 & I_2 \end{pmatrix}$ .

Montrons par récurrence que  $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix}$ .

Cette égalité est vraie pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie au rang  $n \geq 1$ , alors

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R S_{n-1} Q + R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R S_n & I_2 \end{pmatrix},$$

la formule est donc vraie au rang  $n + 1$ .

(ii) D'après la question précédente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} O & O \\ R(I_2 - Q)^{-1} & I_2 \end{pmatrix}.$$

Après calculs on obtient

$$I_2 - Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}; \quad (I_2 - Q)^{-1} = \frac{1}{4/9 - 1/4} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et

$$R(I_2 - Q)^{-1} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4- Dans cette partie, on fixe une base de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ . On convient de noter de la même façon un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  et la matrice colonne à  $d$  lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice  $M$ , on note  ${}^t M$  la matrice transposée. On fixe une matrice  $A \in \mathcal{M}_d$ .

- a) On a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\det(A - \lambda I_d) = \det({}^t(A - \lambda I_d)) = \det({}^tA - \lambda I_d).$$

Donc  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si elle est valeur propre de  ${}^tA$ . En particulier,  $A$  et  ${}^tA$  ont le même polynôme caractéristique.

- b) Soit  $x$  (resp.  $y$ ) un vecteur propre de  $A$  (resp.  ${}^tA$ ) associé à la valeur propre  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ), alors  $Ax = \lambda x$  et  ${}^tAy = \mu y$ . On a, d'une part  ${}^tyAx = {}^ty\lambda x = \lambda {}^tyx = \lambda \sum_{k=1}^d x_k y_k$  et d'autre part,  ${}^t({}^tyAx) = {}^tx{}^tAy = {}^tx\mu y = \mu \sum_{k=1}^d x_k y_k$ .

Puisque  ${}^tyAx$  est un réel, ces deux dernières quantités sont égales. Donc  $\lambda \neq \mu$  implique  ${}^tyx = 0$ .

- c) On suppose désormais que  $A$  possède  $d$  valeurs propres distinctes notées  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  et vérifiant  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$ .

On note  $x_i$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et  $y_i$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à cette même valeur propre.

- (i) Montrer que  $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^tyx$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$ .

(\*) Linéarité à gauche :  $\forall (\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,

$$(\lambda x_1 + x_2|y) = {}^ty(\lambda x_1 + x_2) = \lambda {}^tyx_1 + {}^tyx_2 = \lambda (x_1|y) + (x_2|y).$$

(\*) Symétrie :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $(y|x) = {}^txy = {}^t({}^txy) = {}^tyx = (x|y)$ , car  ${}^txy$  est égale à sa transposée (c'est un réel).

(\*) Elle est définie positive : soit  $x \in \mathbb{R}^d$ , notons  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$  sa représentation dans

la base de  $\mathbb{R}^d$  fixée par l'énoncé. On a  ${}^txx = \sum_{k=1}^d x_k^2$ , cette dernière quantité

est strictement positive sauf si  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (ii)  $(x_1, \dots, x_d)$  est une famille de vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres distinctes, c'est donc une famille libre de  $\mathbb{R}^d$ . C'est une base, car elle possède  $d$  éléments dans  $\mathbb{R}^d$  qui est de dimension  $d$ .

- (iii) Soit  $1 \leq k \leq d$ .  $y_k$  est un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à  $\lambda_k$ . D'après la question 4, b),  ${}^ty_k x_i = 0$ , pour tout  $i \neq k$ , donc  $y_k$  est orthogonal au sous espace vectoriel engendré par  $\{x_i, i \neq k\}$ . Le réel  ${}^ty_k x_i$  est alors non nul, en effet si  ${}^ty_k x_i = 0$ , on aurait que  $y_k$  serait orthogonal à tous les vecteurs de la base  $\{x_1, \dots, x_d\}$ , donc  $y_k = 0$ , contradiction.

Notons  $a_k = {}^ty_k x_k$  et  $y'_k = \frac{y_k}{a_k}$ , on obtient ainsi un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à  $\lambda_k$  et  ${}^ty'_k x_k = 1$ . On peut donc choisir la famille  $\{y_1, \dots, y_d\}$  de sorte que  ${}^ty_k x_k = 1$  pour tous  $1 \leq k \leq d$ .

- d) Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$ . Si  $i \neq j$ ,  $A_i A_j = (x_i {}^ty_i)(x_j {}^ty_j) = x_i ({}^ty_i x_j) {}^ty_j = 0$ , car  ${}^ty_i x_j = 0$  et pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on a  $A_i^2 = (x_i {}^ty_i)(x_i {}^ty_i) = x_i ({}^ty_i x_i) {}^ty_i = x_i {}^ty_i = A_i$ , car  ${}^ty_i x_i = 1$ .

On peut donc conclure que pour tous  $1 \leq i, j \leq d$ ,  $A_i A_j = \delta_{ij} A_i$ , où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

e) Puisque  $(x_1, \dots, x_d)$  est une base, pour montrer que  $\sum_{i=1}^d A_i = I_d$  il suffit de montrer

que  $\left(\sum_{i=1}^d A_i\right) x_k = I_d x_k$  pour tout  $1 \leq k \leq d$ . Soit  $k \in \{1, \dots, d\}$ , on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^d A_i\right) x_k &= \sum_{i=1}^d A_i x_k = \sum_{i=1}^d (x_i {}^t y_i) x_k \\ &= \sum_{i=1}^d x_i ({}^t y_i x_k) = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{ik} = x_k = I_d x_k. \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour montrer que  $\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i = A$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i\right) x_k &= \sum_{i=1}^d \lambda_i A_i x_k = \sum_{i=1}^d \lambda_i (x_i {}^t y_i) x_k \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i ({}^t y_i x_k) = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \delta_{ik} = \lambda_k x_k = A x_k. \end{aligned}$$

f) Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$ .

L'égalité est vraie pour  $n = 1$ . Si elle est vraie pour  $n$ , alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i\right) \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j A_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i^n \lambda_j A_i A_j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i^n \lambda_j \delta_{ij} A_i \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_i^{n+1} A_i, \end{aligned}$$

l'égalité est donc vraie au rang  $n + 1$ .

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

g) On a  $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1 + \sum_{i=2}^d \frac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} A_i$ . Or, pour tout  $i \geq 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n = 0$

car  $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ , par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1$ .

h) Montrons que  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si  $\lambda_1 \in ]-1, 1]$ .

Montrons que la condition est suffisante :

– si  $\lambda_1 = 1$ , alors d'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_1$ ;

– si  $\lambda_1 \in ]-1, 1[$ , alors comme  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$ , tous les  $\lambda_i$  sont dans  $] -1, 1[$ , et

$A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$  tend vers 0.

Montrons que la condition est nécessaire :

si  $|\lambda_1| > 1$ , ou si  $\lambda_1 = -1$  alors  $A^n = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right)$  ne tend pas vers une limite, puisque  $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n$  tend vers la limite non nulle  $A_1$  et que  $(\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.



Conclusion :  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\lambda_1 \in ]-1, 1]$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_1$  si  $\lambda_1 = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$  si  $|\lambda_1| < 1$ .

- 5- On considère les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = v_0 = 1$  et la formule de récurrence : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + v_n. \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Montrons par récurrence que  $u_n$  et  $v_n$  sont strictement positifs pour tout  $n$ .  
On a  $u_0 = v_0 = 1$ , donc c'est vrai pour  $n = 0$ .  
Supposons que pour  $n \geq 0$ ,  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ ; alors,  $u_{n+1} = u_n + 2v_n > 0$  et  $v_{n+1} = u_n + v_n > 0$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont strictement positifs.
- b) Soit  $A$  la matrice définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , alors la relation (1) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- c) Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 2$ . Ses valeurs propres sont donc  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$  et  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ .  
La matrice  $A$  est un élément de  $\mathcal{M}_2$  et admet deux valeurs propres distinctes. D'après la condition suffisante rappelée dans la question 1-,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

- d) Les valeurs propres de  $A$  calculées dans la question précédente sont telles que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . D'après la question 4-, g),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} A^n = A_1$ , où  $A_1$  est définie dans 4-, d).

Calculons  $A_1$  : un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_1$  est donné par une solution de l'équation  $-\sqrt{2}a + 2b = 0$ , soit par exemple  $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . De même, un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à  $\lambda_1$  est obtenu en prenant une solution de l'équation  $-\sqrt{2}a + b = 0$ , soit un vecteur de la forme  $c \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ , où  $c$  est une constante. D'autre part, pour obtenir l'égalité  ${}^ty_1x_1 = 1$ , il faut que  $c = \frac{1}{4}$ , ce qui nous amène à prendre  $y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

D'après la question 4-, d), on a

$$A_1 = x_1 {}^ty_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement on obtient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- e) D'après la question 5-, a), pour tout  $n \geq \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$



donc d'après la question 2-,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{(1 + \sqrt{2})^n} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{(1 + \sqrt{2})^n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})$$

et par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{2}.$$

## Problème II.

On se propose d'étudier la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui au réel  $x > 0$  associe

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt.$$

Pour  $x > 0$ , on définit la fonction  $h_x : [0, 2x[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h_x(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$ .

- 1- La fonction  $h_x$  est continue sur  $[0, 2x[$  et au voisinage de  $2x$ ,  $h_x(t) = O\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}\right)$ . Donc  $h_x$  est intégrable sur  $[0, 2x[$  (car la fonction  $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}$  est aussi intégrable sur  $[0, 2x[$ ).
- 2- Soit  $0 < \varepsilon < x$  assez petit, en effectuant le changement de variable  $t = 2x \sin v$ , on obtient

$$\int_0^{2x-\varepsilon} \frac{\sin t}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v) dv.$$

On a donc,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v) dv.$$

- 3- (i) Considérons la fonction  $\Psi : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $\Psi(v, x) \mapsto \sin(2x \sin v)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  (resp. pour tout  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ), la fonction  $v \mapsto \Psi(v, x)$  (resp.  $x \mapsto \Psi(v, x)$ ) est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (resp.  $\mathbb{R}_+$ ). De plus, Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sup_{v \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\Psi(v, x)| \leq 1$  et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction  $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $\tilde{f}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v) dv$  est continue. Comme la restriction de  $\tilde{f}$  à  $[0, 2x[$  est égale à  $f$ ,  $\tilde{f}$  répond à la question. Dans la suite on la notera  $f$ .

- (ii) Nous utilisons le théorème de la dérivation sous le signe intégrale : Considérons la fonction  $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Psi_0(v, x) = \sin(2x \sin v) .$$

Les applications partielles  $v \mapsto \Psi_0(v, x)$  et  $x \mapsto \Psi_0(v, x)$  sont toutes les deux de classe  $C^1$  respectivement sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\mathbb{R}_+$ . De plus, pour tous  $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$ ,  $|\partial_x \Psi_0(v, x)| \leq 2$ . De plus, la fonction constante égale à 2 est intégrable sur l'intervalle fermé borné  $[0, \frac{\pi}{2}]$  de  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale  $f$  est de classe  $C^1$  et que pour tous  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \cos(2x \sin v) dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \sin\left(2x \sin v + \frac{\pi}{2}\right) dv . \end{aligned}$$

- (iii) Nous allons montrer par récurrence que  $f$  est de classe  $C^\infty$  et que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n \frac{\pi}{2}\right) dv . \quad (2)$$

On vient de montrer que la propriété est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Supposons que  $f$  soit de classe  $C^n$  et vérifie (2) au rang  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme pour la question précédente, pour montrer que la propriété est vraie pour  $n + 1$ , nous allons utiliser le théorème de la dérivation sous le signe intégrale. Considérons la fonction  $\Psi_n : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Psi_n(v, x) = (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n \frac{\pi}{2}\right) .$$

Les applications partielles  $v \mapsto \Psi_n(v, x)$  et  $x \mapsto \Psi_n(v, x)$  sont toutes les deux de classe  $C^1$  respectivement sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\mathbb{R}_+$ . De plus, pour tous  $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$ ,  $|\partial_x \Psi_n(v, x)| \leq 2^{n+1}$ . De plus, la fonction constante égale à  $2^{n+1}$  est intégrable sur l'intervalle fermé borné  $[0, \frac{\pi}{2}]$  de  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale  $x \mapsto \Psi_n(v, x)$  est dérivable et

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^{n+1} \sin\left(2x \sin v + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) dv .$$

Par récurrence,  $f$  est donc de classe  $C^\infty$  et  $f^{(n)}$  est donnée par (2) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 4- On admet que  $f^{(2n)}(0) = 0$  et  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

- a) La série de Taylor de  $f$  au voisinage de 0 est donnée par  $s_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , où

$$a_{2n} = 0, \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} .$$

Il s'agit d'une série de terme général  $(-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} x^{2n+1}$  :

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} x^{2n+1} .$$

Le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{a_{2n+3} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} = -x^2 \frac{2^4(n+1)^2}{[(2n+2)(2n+3)]^2} = -\frac{4x^2}{(2n+3)^2} \quad (3)$$

qui tend vers 0. Donc le rayon de convergence est  $+\infty$ .

- b) Par (3), le signe du terme général est alterné. De plus,  $\left| \frac{a_{2n+3} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} \right| = \frac{4x^2}{(2n+3)^2}$  est inférieur à 1 pour  $2n+3 > 2x$ , soit  $n > x - \frac{3}{2}$ . Ce qui montre que la suite  $|a_{2k+1} x^{2k+1}|$  est décroissante dès que  $k > x - \frac{3}{2}$ .

5- Comme suggéré dans l'énoncé, on utilise la relation de Chasles,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt,$$

en effectuant le changement de variable  $t - \pi = u$  sur la seconde intégrale du membre de droite, on obtient,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin t \left( \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t+\pi)^2}} \right) dt < 0,$$

puisque l'on intègre une fonction continue négative non identiquement nulle. Par addition,

$$f(p\pi) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt < 0.$$

6- On procède de la même façon que la question précédente, on a

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t \left( \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t-\pi)^2}} \right) dt > 0.$$

Comme la fonction  $\sin$  est positive sur  $[0, \pi]$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$ . Donc

$$f(p\pi + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + \sum_{k=1}^p \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'annule donc au moins une fois dans chaque intervalle  $[p\pi, p\pi + \frac{\pi}{2}]$  et par suite une infinité de fois sur  $\mathbb{R}_+$ .

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \text{ et } 0 < u_0 < 1$$

1. Etudier la convergence de cette suite  $(u_n)$  et donner sa limite (si elle est convergente).

On vérifie par récurrence que  $u_n > 0$ , et que  $u_n < 1$  ;

De plus,  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$ . La suite est alors décroissante et minorée, donc elle converge. (On pouvait aussi calculer le rapport  $u_{n+1}/u_n < 1$ ).

Sa limite  $l$  est donc solution de l'équation :  $l = \frac{l}{2} + \frac{(l)^2}{4}$  qui admet 0 et 2 comme solution, mais comme la suite est strictement inférieure à 1, sa limite est zéro.

2. On considère la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(v_n)^2}{4} \text{ et } 1 < v_0 \leq 2$$

Etudier la convergence de cette suite  $(v_n)$  et donner sa limite (si elle est convergente).

On montre par récurrence que cette suite est majorée par 2.

On a :  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(v_n - 1)(v_n - 3) < 0$ , car  $(v_n)$  est entre 1 et 2.

La suite étant strictement décroissante et minorée, elle converge vers une limite  $l$ , solution de l'équation :  $l = \frac{3}{4} + \frac{(l)^2}{4}$ , soit  $l=1$  ou 3, mais comme la suite est bornée entre 1 et 2, sa limite est égale à 1.

On peut aussi poser  $u_n = (v_n - 1)$  et on se retrouve dans la situation de la première question.

**Exercice n° 2**

Soit l'application linéaire  $f$  définie sur  $R^4$  et à valeurs dans  $R^3$  par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Déterminer une base du noyau de  $f$ .

Il suffit de résoudre le système :  $(x + y, z + t, x + y + z + t) = (0, 0, 0)$ , soit  $x = -y$  et  $z = -t$ .

Les vecteurs  $(1, -1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1, -1)$  constituent une base du noyau.

2. Déterminer une base de l'image de  $f$ , notée  $Im(f)$ .

Comme  $Dim R^4 = 4 = Dim Ker(f) + Dim Im(f)$ . La dimension de l'image est égale à 2 et donc engendrée par deux vecteurs indépendants. Par exemple  $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1)$  et

$f(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 1)$ . On peut aussi écrire :

$$(x + y, z + t, x + y + z + t) = (x + y)(1, 0, 1) + (z + t)(0, 1, 1)$$

3. En identifiant  $R^3$  à  $R^4 \times \{0\}$ , quel est l'orthogonal de l'image de  $f$  dans  $R^4$  ?

Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à  $(1, 0, 1, 0)$  et  $(0, 1, 1, 0)$  et indépendants entre eux.

Par exemple (en utilisant le produit scalaire) :  $(1, 1, -1, 0)$  et  $(1, 1, -1, 1)$ . L'orthogonal de  $f$  est engendré par ces deux vecteurs.

4. Ecrire la matrice  $A$  de la projection orthogonale sur  $Im(f)$  dans une base formée dans la réunion d'une base de  $Im(f)$  et de son orthogonal.

La matrice s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que cette matrice est diagonale.

5. Ecrire la matrice  $M$  de la projection orthogonale sur  $Im(f)$  dans la base canonique de  $R^4$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et sa matrice inverse } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et enfin } M = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice n° 3**

Soit  $f$  l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par  $\mathbb{R}$ ) par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est impaire et continue.

On vérifie que  $f(-x) = -f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

2. Montrer que  $f'$  garde un signe constant sur  $\mathbb{R}$ . On pourra étudier la fonction  $u$  qui, à tout  $t$  réel positif, associe :  $u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$ .

En déduire l'existence d'une application réciproque de  $f$ , impaire.

Vérifions que  $f$  est dérivable à l'origine :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ . Pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1) + 1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}.$$

Puis  $u'(t) = (2t + 1)\exp(t)$ , donc  $u(t) > 0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

La fonction  $f$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

3. Justifier l'existence d'un développement limité de  $f$  en 0 à tout ordre  $n$ .

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour  $x \neq 0$ , on a :  $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . On prolonge  $\varepsilon$  en 0 par  $\varepsilon(0) = 0$

4. Ecrire un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de  $f^{-1}$  en 0 à l'ordre 5.

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

Pour  $f^{-1}$ , il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5) \text{ et}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \Rightarrow a_1\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) + a_3\left(x^3 + 3\frac{x^5}{2}\right) + a_5x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3}a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient :  $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5)$

#### Exercice n° 4

Pour tout nombre réel  $x$ , on désigne par  $E(x)$  sa partie entière, soit le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

1. Etudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (ensemble des nombres réels strictement positifs) par :  $f(x) = \frac{E(x)}{x}$

Si  $n < x < n+1$ , alors  $f(x) = \frac{n}{x}$  et  $f$  est continue.

Si  $x = n$ , alors  $f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{n-1}{x} = \frac{n-1}{n} \neq 1$ , et  $f$  n'est pas continue.

En conclusion  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*} - \mathbb{N}$ .

2. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ , étudier la convergence de cette suite et donner sa limite (si elle existe).

On a :  $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$  et  $\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ . Puis en divisant par la racine, on obtient :  $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$ , puis quand  $n$  tend vers l'infini,  $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$



### Exercice n° 5

1. Etudier les variations de tracer le graphe de la fonction numérique  $sh$  d'une variable réelle

définie par :  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Cette fonction est impaire, strictement croissante et convexe sur l'ensemble des réels positifs. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy. Sa dérivée est égale à :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(0) = 0.$$

2. Soit  $f(x) = \ln(1 + sh(x))$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien. Donner un développement limité de  $f$  d'ordre 3 au voisinage de zéro.

On a :  $1 + sh(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et  $\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

En remplaçant, on obtient :  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

3. Calculer  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Comme la fonction est impaire, cette intégrale est nulle.

4. Soit  $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ , donner un développement limité de  $g$  d'ordre 2 au voisinage de zéro.

On a :  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et en faisant la division euclidienne, on obtient :

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

5. Etudier le prolongement par continuité de  $g$  à l'origine. Cette fonction est-elle dérivable à l'origine ?

D'après ce qui précède,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ , donc  $g$  est prolongeable en zéro en posant  $g(0)=1$ .

Cherchons la limite en zéro de  $\frac{g(x) - g(0)}{x} \approx \frac{-x/2}{x} = -1/2$ ,  $g$  est donc dérivable en zéro et sa dérivée est égale à  $-1/2$

### Exercice n° 6

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ , où  $n$  est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

On a :  $0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  et la suite converge vers zéro.

2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

On a :  $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \dots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$

Puis en intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x} \right) dx = \ln 2 + (-1)^{n+1} I_n \text{ et}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Par conséquent  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} I_n \rightarrow \ln 2$

4. Soit  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ . Déterminer la limite de  $J_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Le raisonnement est analogue à celui de la première question. On a :

$$0 < J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ et la suite converge vers zéro.}$$

5. Calculer  $J_n$  en fonction de  $n$ .

La démarche est analogue à celle de la deuxième question.

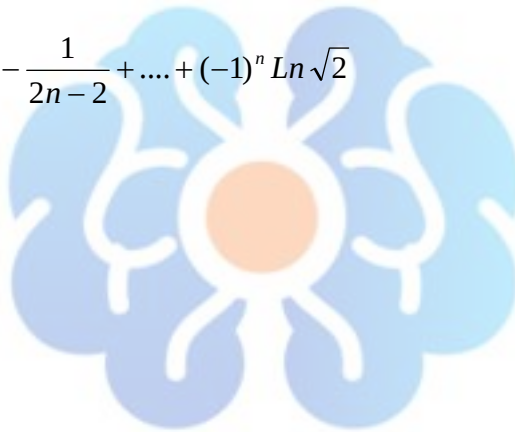
$$J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \quad , \quad \text{puis} \quad J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctg } x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = [\text{Ln } \sqrt{x}]_0^1 = \text{Ln } \sqrt{2}$$

Par récurrence, on obtient,

$$\text{Pour } n \text{ pair : } J_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \dots + (-1)^n \frac{\pi}{4} \text{ et}$$

$$\text{Pour } n \text{ impair : } J_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \dots + (-1)^n \text{Ln } \sqrt{2}$$



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels.

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0,$$

où la fonction  $y$  est une fonction inconnue de la variable  $x$ , deux fois continûment dérivable, et  $\lambda$  un réel donné.

- 1- On admet qu'il existe une fonction  $f_\lambda$ , égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , telle que  $f_\lambda(0) = 1$  et  $f_\lambda$  est solution dans l'intervalle  $] -R, R[$  de l'équation différentielle  $E_\lambda$ . Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

- a) Montrer que  $a_1 = \lambda$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k + \lambda)}{(n!)^2} \lambda$ .

Préciser les fonctions  $f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}$ .

- b) Montrer que  $f_\lambda$  est un polynôme si et seulement si, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda = -p \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas, préciser le degré du polynôme  $f_\lambda$  en fonction de  $p$  et du terme dominant (le coefficient du terme de plus haut degré).

- c) Quel est le rayon de convergence  $R$  de la série entière de terme général  $a_n x^n$ ,  $n \geq 1$ , lorsque  $-\lambda \notin \mathbb{N}$  ?

On admet dans la suite que la fonction  $f_\lambda$  est la seule fonction, développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ , qui soit solution de l'équation différentielle  $E_\lambda$  et tel que  $f_\lambda(0) = 1$ .

- 2- Dans cette question, on suppose que  $\lambda = 1$  :

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)y' - y = 0.$$

- a) En effectuant le changement de fonction inconnue  $z = y' - y$ , montrer que l'équation  $E_1$  peut se transformer en une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $z$ .

- b) Déterminer la solution générale  $f_1$  de l'équation différentielle  $E_1$  sur la demi-droite  $]0, +\infty[$ , exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite  $]0, +\infty[$  par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- c) Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle  $E_1$  sur la demi-droite  $] -\infty, 0[$ .  
d) Le but de cette question est de résoudre l'équation différentielle  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
(i) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- (ii) Déterminer les fonctions solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $E_1$ .

- 3- Étant donné un réel  $\lambda$ , soit  $g_\lambda$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

- a) Montrer que  $g_\lambda$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $E_{1-\lambda}$ .  
b) On admet que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  est encore une fonction développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .  
Dédurre de la question précédente que, pour tous réels  $\lambda$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

- c) Préciser, lorsque  $p$  est un entier strictement positif, les fonctions  $f_p$ . En déduire les fonctions  $f_2$  et  $f_3$ .  
d) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  un entier supérieur ou égal à 1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)}.$$

- 4- L'objet de la suite du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction  $f_{1/2}$ . Dans ce but soit  $\varphi$  la fonction, définie pour tout réel  $x$ , par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

Etant donné un entier naturel  $p$ , soit  $I_p$  l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta d\theta.$$

- a) Etablir une relation entre les intégrales  $I_p$  et  $I_{p+1}$ . En déduire la valeur de l'intégrale  $I_p$ .  
b) *Relation entre les fonctions  $\varphi$  et  $f_{1/2}$  :*  
(i) Démontrer que la fonction  $\varphi$  est définie et continue sur tout  $\mathbb{R}$ .  
Montrer qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  
(ii) Déterminer le développement en série entière de la fonction  $\varphi$  sur un intervalle  $] -R, R[$ .  
En déduire que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}.$$

- c) *Encadrement de  $\varphi(x)$  :*

- (i) Démontrer que, pour tout réel  $u$  strictement inférieur à 1 ( $u < 1$ ),

$$e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

- (ii) Soit  $x$  un réel strictement inférieur à 1 ( $x < 1$ ), soit  $J(x)$  l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - x \sin^2 \theta}.$$

Montrer que  $J(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

- (iii) Dédurre des résultats précédents que, pour tout réel  $x$  strictement inférieur à 1 ( $x < 1$ ), la fonction  $\varphi$  vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

- (iv) Démontrer l'existence d'une constante  $A > 0$  (strictement positive) telle que pour tout réel  $x < -1$ , la fonction  $\varphi$  vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

*Indication : on pourra utiliser successivement les deux changements de variables,  $u = \sin \theta$  et  $v = \sqrt{-xu}$ .*

- (v) Démontrer que la fonction  $f_{1/2}$  admet une limite lorsque le réel  $x$  tend vers  $-\infty$ . Préciser cette limite.

La fonction  $f_{1/2}$  est-elle intégrable sur la demi-droite  $]-\infty, -1]$  ?

**5-** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} f_{1/2}(x).$$

- a) Démontrer que la fonction  $h$  est paire et que la valeur de  $h(x)$  est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}\left(x \frac{\cos \theta}{2}\right) d\theta.$$

où  $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$  désigne la fonction cosinus hyperbolique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

- b) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Malgré une augmentation des dépenses de santé des ONG en Afrique, beaucoup de personnes ont encore un accès limité aux soins de bonne qualité. Apportez votre analyse sur ce constat de l'AMREF, ONG africaine de santé publique.

**Sujet n° 2**

De Gaulle disait « Les Etats n'ont pas d'amis, ils n'ont que des intérêts ». Développez les notions que cette phrase recouvre.

**Sujet n° 3**

« L'éducation est l'arme la plus puissante qu'on puisse utiliser pour changer le monde. »  
Explicitez cette phrase de Nelson Mandela, en illustrant votre propos.



AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Calculatrice non programmable autorisée.**

**Les exercices sont indépendants.**

**Dans toute la composition,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.**

**Exercice n° 1**

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'intégrale  $S(n)$  par :  $S(n) = \int_0^1 (1+x)^n dx$

1. Calculer  $S(n)$
2. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$ , où  $C_n^k$  désigne le nombre de combinaisons de  $k$  éléments pris parmi  $n$ .

**Exercice n° 2**

Soit  $f$  l'application définie sur  $[-1, +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

**Exercice n° 3**

1. Trouver une primitive de la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - 1}$

2. Trouver une primitive de  $g(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{t}$

3. Soit  $H(x)$  une primitive de  $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Montrer que :

$$H(x) = -2 \ln x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln(1-\sqrt{1-x}) + K, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

4. Soit  $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ , montrer que cette intégrale est convergente.

5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$

6. Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose :  $I(\varepsilon, a) = \int_{\varepsilon}^a \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ . Calculer  $I(\varepsilon, a)$  et en déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice n° 4**

Pour une valeur de périmètre donnée, quelle est parmi ces trois figures : carré, rectangle, cercle, celle qui a la plus grande surface ?

**Exercice n° 5**

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle trois fois continûment dérivable en un point  $a$ .

Soit  $D$  le déterminant défini par :  $D(a, h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$

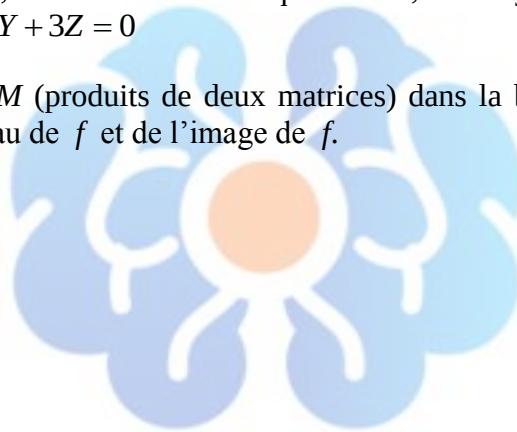
Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(a, h)}{h^4}$

**Exercice n° 6**

Soit  $f$  une application linéaire définie sur  $R^3$  et à valeurs dans  $R^3$  par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{14}(13x - 2y - 3z, -2x + 10y - 6z, -3x - 6y + 5z)$$

1. Déterminer le noyau de  $f$ .
2. Déterminer l'image de  $f$ .
3. Calculer les valeurs propres de la matrice  $M$  associée à  $f$  dans la base canonique de  $R^3$ .
4. Expliciter la nature géométrique de l'application  $f$ .
5. Ecrire la matrice  $S$ , dans la base canonique de  $R^3$ , de la symétrie par rapport au plan d'équation :  $X + 2Y + 3Z = 0$
6. Exprimer  $MS$  et  $SM$  (produits de deux matrices) dans la base formée par la réunion d'une base du noyau de  $f$  et de l'image de  $f$ .



1

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Jacques ATTALI « Devenir soi » paru aux éditions Arthème Fayard en 2014.**

***Il devra être résumé en 250 mots (+ou- 10%). Le nombre de mots sera indiqué. Il sera tenu compte de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.***

Dans un monde aujourd'hui insupportable, et qui, bientôt le sera plus encore pour beaucoup, il n'y a rien à attendre de personne. Il est temps pour chacun de se prendre en main. Ne vous contentez pas de réclamer une allocation ou une protection de l'Etat, arrachez-vous à la routine, aux habitudes, au destin tout tracé, à une vie choisie par d'autres. Choisissez votre vie !

Où que vous soyez dans le monde, homme ou femme, qui que vous soyez dans la société, agissez comme si vous n'attendiez plus rien des gens de pouvoir ; comme si rien ne vous était impossible. Ne vous résignez pas ! Ne vous bornez pas à dénoncer l'«horreur économique» du monde, ne vous contentez pas de vous indigner : l'une et l'autre attitude ne sont que des formes de lâcheté mondaine.

Pour vous débrouiller, pour réussir votre propre vie, ayez confiance en vous. Respectez-vous. Osez penser que tout vous est ouvert. Ayez le courage de vous remettre en question, de bousculer l'ordre établi, d'entreprendre et de considérer votre vie comme la plus belle des aventures. Pour trouver la force de le faire, réfléchissez sur toutes les instances qui conditionnent votre avenir.

Vous verrez alors que vous êtes beaucoup plus libre que vous ne le croyez ; que, qui que vous soyez, quel que soit votre âge, quelles que soient vos ressources matérielles, votre sexe, votre origine et votre situation sociales, vous pouvez affronter des difficultés qui vous paraissent insurmontables, changer radicalement votre destin, celui de ceux qui vous aiment et que vous aimez, et celui des générations à venir, dont dépendent votre bien-être et votre sécurité.

Les femmes en sont particulièrement empêchées. Si elles y réussissent, elles bouleverseront le monde.

Ce dont je parle ici n'est significativement désigné par aucun mot en français, ni dans aucune autre langue que je connaisse. Il ne s'agit pas de résistance ni de résilience, ni de libération ni de désaliénation, ni de pleine conscience. Je proposerai le mot «*devenir-soi*»

Le monde est dangereux et le sera de plus en plus : la violence rôde partout, elle se déchaîne en maints endroits au nom des pires intolérances et des idéologies les plus obscures ; des guerres de religion se rallument ; des sécessions se multiplient ; des différences ne se nourrissent plus les unes des autres ; l'environnement se dégrade ; la nourriture est de plus en plus polluée ; l'emploi disparaît ; les classes moyennes se défont ; la croissance ne permet pas de répondre aux besoins d'une population urbaine de plus en plus dense et solitaire ; les inégalités se creusent entre quelques riches et un nombre immense de pauvres. L'un après l'autre, tous les filets de sécurité se déchirent.

La croissance n'étant plus au rendez-vous, pour maintenir leur niveau de vie menacé de toutes parts, Etats, entreprises, particuliers vivent de plus en plus à crédit, au crochet des générations passées dont ils pillent l'héritage, et des générations futures dont ils dégradent le patrimoine.

Face à ces périls, la plupart des hommes politiques et des dirigeants d'entreprise, presque tous préoccupés par leur seul présent se contentent de gérer au mieux le quotidien et de colmater les brèches ; les politiciens ne cherchent qu'à améliorer leur popularité auprès des électeurs par des décisions démagogiques ; les chefs d'entreprises auprès des actionnaires par la recherche frénétique de profits trimestriels.

Tous oublient que vivants d'aujourd'hui auraient pourtant un intérêt égoïste à penser au long terme, soit parce qu'ils font partie des générations passées (plus d'un tiers de l'humanité actuelle était déjà sur terre il y a cinquante ans), soit parce qu'ils font déjà partie des générations futures (plus des deux tiers de nos contemporains seront encore vivants dans trente ans).

En France en particulier, les dirigeants successifs ont laissé le pays s'enfoncer depuis deux décennies dans un lent déclin, un engourdissement qui pourrait devenir mortel. Lassé d'avoir dit, écrit et répété qu'il est urgent de réformer la gouvernances du monde, de l'Europe et de mon pays ; lassé d'exposer le détail de toutes les mesures urgentes à prendre pour éviter les catastrophes écologiques, retrouver une croissance durable et juste, fournir à chacun les moyens de vivre pleinement sa liberté sans la refuser aux autres ; lassé d'entendre les hommes et les femmes de pouvoir, de tout parti, de tout pays, me dire en confidence qu'ils partagent avec moi la diagnostique et la prescription, qu'ils savent ce qu'il faudrait faire, mais que ce n'est pas le moment de le mettre en œuvre à cause de la crise, ou de l'absence de crise, ou de leur popularité ou de leur impopularité ; lassé de les voir se réfugier derrière leur scepticisme, leur cynisme, leur narcissisme, leur autosatisfaction, leur égoïsme, leur avidité, leur pusillanimité, leur orgueil ; enragé de les voir procrastiner en rois fainéants soucieux de leur seul intérêt , je voudrais désormais dire à chacun d'entre vous : n'attendez plus rien de personne, faites un nouveau pari à la Pascal !

Ce grand génie français avait proposé, en son temps, de faire le pari de croire en Dieu indépendamment de toute révélation ; de croire sans preuve ; parce que, expliquait-il, nul n'a rien à y perdre : s'il n'existe pas, on ne sera pas puni d'y avoir cru ; s'il existe, on sera peut-être récompensé de l'avoir honoré.

Je propose d'agir de même dans le monde d'aujourd'hui : faire le pari de prendre le pouvoir sur sa propre vie, de se trouver, indépendamment de l'hypothétique action des autres. Parce qu'en toute hypothèse on a tout à y gagner.

En effet, de deux choses l'une :

Soit, comme c'est le plus probable, les puissants, publics et privés ne seront pas à la hauteur des enjeux ; alors chacun aura agi à temps pour suppléer pour lui-même au moins à leur impuissance.

Soit, au contraire, les hommes de pouvoir se décideront enfin à affronter les enjeux écologiques, éthiques, politiques, sociaux et économiques du siècle. Là encore, de deux choses l'une : soit ils échoueront, ce qui ramènera au cas précédent ; soit ils réussiront, et nul n'aura rien perdu à s'inscrire au mieux, par son initiative personnelle, dans l'abondance retrouvée.

Certes, cette liberté, but ultime, n'est pas et ne sera jamais illimitée : le même Blaise Pascal nous rappelle que notre vie se déroule à l'intérieur d'une prison, déterminée par les conditions de notre naissance et les exigences de notre mort. A nous d'en écarter les murs. C'est encore lui qui compare la liberté de tout homme avec celle du paysan : sa récolte dépend de son travail autant que de la pluie et de la fertilité de son champ qui lui échappent.

Faire un tel pari ne va pas de soi : bien des gens ne se résignent à être toute leur vie que ce que les autres ont décidé qu'ils seront ; ils mènent l'existence que les autres ou les hasards, ont tracée pour eux là où ils sont nés. Par peur. Par paresse. Par passivité. Ils survivent au mieux, trouvant parfois de minces bonheurs dans les anecdotes de leurs destins.

D'autres croient y échapper en s'indignant ; ils critiquent, manifestent, protestent. Jamais ils ne transforment leur indignation en actes. Ni pour réussir leur propre vie, ni pour améliorer celle d'autres. Où qu'ils soient, ils ne font que se donner bonne conscience et s'inventer d'honorables sujets de conversation.

D'autres, enfin, refusent le destin que la société, la religion, la famille, la classe sociale, la nation où ils sont nés, leurs moyens matériels, leur sexe, leur patrimoine génétique prétendent choisir pour eux ; ils s'arrachent aux déterminismes de toute nature ; ils se choisissent à leur gré, sans obéir à leurs aînés, des études, un métier, un physique, une orientation sexuelle, une langue, un conjoint, un combat, un idéal, une éthique. Ils quittent parfois leur famille, leur pays. Ils cherchent en quoi ils sont uniques. Ils se forgent une utopie et cherchent à la réaliser. Ou plus modestement, ils décident de se prendre en main et de ne plus rien attendre de personne : ni emploi, ni épanouissement. Ils tentent alors de devenir eux-mêmes. Ils ne réussiront certes pas tous. Au moins auront-ils été libres en essayant.

Une telle recommandation n'est évidemment pas facile à suivre : pendant des millénaires, au nom des dieux, princes et prêtres ont imposé leur pouvoir aux hommes qui ont à leur tour, imposé leur caprices aux femmes et aux enfants. Aujourd'hui encore, le sort de presque tous les humains –surtout les femmes et les enfants- dépendent de forces écrasantes, visibles ou invisibles, matérielles ou immatérielles, économiques ou idéologiques, financières ou politiques, religieuses, militaires ou climatiques ; du bon vouloir des autres, de leurs désirs, de leur folie, de leur violence ou de leur indifférence.



Chacun, même parmi les classes moyennes des pays riches, peut penser qu'il n'a aucun pouvoir sur l'environnement, la paix, la guerre, la croissance, l'emploi, l'évolution du climat et celle des technologies ; donc aucun pouvoir sur l'essentiel de ce qui fait sa propre vie. Et de fait, bien des gens ne réaliseront pas leurs rêves. Ils ne sont pas –et ne seront pas– les artistes, les médecins qu'ils auraient rêvés d'être.

Et pourtant, presque tous les humains, hommes et femmes, même les plus faibles, les plus démunis, les plus écrasés par les diverses forces qui se disputent le monde, ont la capacité de prendre le pouvoir sur leur propre vie. S'ils ressentent le besoin vital de se libérer ; s'ils apprennent à ne pas se résigner, à résister, à trouver dans leur vie intérieure et dans l'exercice de leur raison une façon de se libérer des déterminismes qui les asservissent.

Bien des événements peuvent provoquer une telle prise de conscience : une situation matérielle améliorée ou dégradée ; le sentiment de sa mort prochaine ou d'une santé florissante ; une réflexion sereine ou une crise existentielle ; un profond chagrin ou un accès de bonheur ; un moment de solitude ou un coup de foudre ; le désir de soi ou le besoin de l'Autre dont la présence est déjà rupture à soi.

Il s'agit là bien plus que de résilience ; il n'y est pas seulement question de survivre aux crises, ni de se tirer d'affaire dans la vie quotidienne, mais de se trouver, de réussir sa vie, de découvrir la raison de sa présence sur cette terre pour « devenir-soi » et trouver le courage de se débrouiller par soi-même.

De cet arrachement aux autres, de cette prise de pouvoir de chacun sur soi-même, sortiront des cohortes de créateurs, dans leur vie privée ou leur activité professionnelle ; ils vivront ce qu'ils sont et créeront pour eux-mêmes et pour le reste de l'humanité. S'ils éclosent en grand nombre, s'ils en aident beaucoup d'autres à devenir soi, les crises seront bientôt surmontées .../...

### **Les entrepreneurs privés**

D'autres ont pris le parti de se dégager de la vie prévue pour eux en se lançant dans une autre forme de création : celle d'une entreprise.

Les mécanismes qui conduisent un homme ou une femme à vouloir, sans en être l'héritier, créer une entreprise plutôt que d'être simple employé sont tout aussi mystérieux : un hasard, souvent ; une nécessité le plus souvent ; une énergie particulière, toujours. Rarement le choix d'un domaine particulier. En général, juste le besoin d'être son propre maître ; le désir de faire fortune aussi.

Sans revenir aux marchands de Bruges du XIV<sup>ème</sup> siècle ou aux armateurs vénitiens du XV<sup>ème</sup>, voici quelques exemples qui démontrent que la création d'entreprise est à la portée de qui le veut et le décide.



Ainsi de Thomas Edison, né dans une très modeste famille immigrée en 1847 dans l'Ohio, atteint d'une surdité quasi-totale à l'âge de treize ans qui débute en tant qu'employé dans les trains du Michigan. Rien ne le prédispose à la création d'entreprise. Pourtant résolu à prendre le pouvoir sur sa vie, il n'accepte aucun métier qu'on lui propose. Passionné par les sciences physiques et la chimie, auxquelles il s'initie seul pour une large part, il met au point à vingt-deux ans un télégraphe automatique utile aux trains, puis fonde à vingt-neuf ans l'Edison Illuminating Company qui deviendra General Electric. Il ne cesse plus d'innover tout en développant sa firme : il invente le phonographe à trente ans et dépose en tout près de onze cents brevets, attirant auprès de lui nombre de jeunes ingénieurs, les incitant à créer à leur tour leurs propres entreprises.

.../... Ainsi d'Alizéta Ouédraogo, aujourd'hui femme la plus prospère de son pays, le Burkina Faso. Après avoir fait fortune dans le cuir au cours des années 1990, elle s'est lancée dans l'immobilier et les travaux publics. Elle a pris la tête de la Chambre de Commerce et d'Industrie de son pays en 2011.

Ainsi de Tilahun Alemu (Ethiopie), reconnue comme une des femmes les plus influentes d'Afrique par *The Guardian* en 2013, fondatrice en 2004 de SoleRebels, entreprise fabriquant des chaussures dont la semelle est faite à partir de pneus usagés. Ayant commencé dans un humble atelier à Addis-Abeba, la société emploie désormais plus d'une centaine de personnes et distribue ses produits dans une trentaine de pays.

.../... Ainsi de Takao Sasaki, au Japon, qui perd son emploi de salarié dans l'industrie des sushis à cause du Tsunami de 2011. Fort de vingt années d'expérience, il crée sa propre entreprise de sushis dans la région de Tōhoku. Il emploie actuellement plus d'une dizaine de personnes.

.../... Tous et toutes, quelle que soit la taille de leur entreprise, «entrepreneurs de l'envie» ou «entrepreneurs de la survie», ont compris qu'il n'y a pas d'entreprise sans marché, ni de marchés sans clients satisfaits. Ce ne sont donc pas seulement des égoïstes intelligents, mais aussi des altruistes pour motifs rationnels, qui déploient de plus en plus d'efforts pour s'intéresser à leurs clients et fournisseurs à venir, autrement dit au bien-être des générations futures.

Avril 2015

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0,$$

où la fonction  $y$  est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable  $x$  et  $\lambda$  un réel donné.

- 1- On admet qu'il existe une fonction  $f_\lambda$ , égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , telle que  $f_\lambda(0) = 1$  et  $f_\lambda$  est solution dans l'intervalle  $] -R, R[$  de l'équation différentielle  $E_\lambda$ . Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

- a) Sur l'intervalle  $] -R, R[$ ,  $f_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée première est la somme de la série dérivée

$$f'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad x \in ] -R, R[.$$

De même sa dérivée seconde est la somme de la série

$$f''_\lambda(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad x \in ] -R, R[.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= x f''_\lambda(x) + (1-x) f'_\lambda(x) - \lambda f_\lambda(x) \\ &= x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( (n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda) a_n \right) x^n - \lambda + a_1, \end{aligned}$$

ce qui donne,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( (n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda) a_n \right) x^n - \lambda + a_1 = 0$ , pour tout  $x \in ] -R, R[$ .

D'où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite définie par

$$a_1 = \lambda, \quad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (2)$$

On a donc que

$$a_1 = \lambda \quad \text{et} \quad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k + \lambda)}{(n!)^2} \lambda, \quad \forall n \geq 2.$$

En particulier, pour  $\lambda = -2, -1, 0, 1$ , on obtient

$$f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

$$f_0 = 1,$$

$$f_{-1}(x) = 1 - x,$$

$$f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2.$$

- b)  $f_\lambda$  est un polynôme si et seulement si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de  $a_n$  précédemment déterminée, on en déduit que  $f_\lambda$  est un polynôme si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n + \lambda = 0$  ; d'où  $f_\lambda$  est un polynôme si et seulement si  $-\lambda \in \mathbb{N}$ . De plus, lorsque  $\lambda = -p$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ , on a pour tout  $n \geq 1$ ,
- $$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k-p)}{(n!)^2} (-p).$$

Si  $p \geq 1$ , alors  $a_p = (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p!)^2} (-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$ , et  $a_n = 0$  pour  $n \geq p+1$ . Donc  $f_{-p}$  est un polynôme de degré  $p$  et de coefficient dominant  $\frac{(-1)^p}{p!}$ .

Le cas  $\lambda = 0$  est traité dans la question précédente.

- c) Supposons que  $-\lambda \notin \mathbb{N}$ , d'après a), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lambda}{(n+1)^2} = 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  a pour rayon de convergence  $R = +\infty$ .

Il est admis, dans la suite, que la fonction  $f_\lambda$  est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle  $E_\lambda$ , et qui prenne la valeur 1 en 0.

- 2- Dans cette question, on suppose que  $\lambda = 1$  :

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)y' - y = 0.$$

- a) Posons  $z = y' - y$ . L'équation  $E_1$  se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $z$  :

$$xz' + z = 0. \quad (3)$$

- b) Sur  $]0, \infty[$ , l'équation (3) a pour solutions les fonction du type  $x \mapsto ae^{-\int \frac{dx}{x}}$ , soit  $x \mapsto \frac{a}{x}$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

La fonction inconnue  $y$  satisfait alors  $y' - y = \frac{a}{x}$  ; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre, mais non homogène.

Appliquons la méthode de variation de la constante : la recherche de solution  $y$  sous la forme  $\varphi(x)e^x$ , conduit à l'équation  $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$ .

Finalement, on peut conclure que  $f_1$  est une fonction du type

$$x \mapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + be^x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- c) La résolution sur  $] -\infty, 0[$  est identique à celle de la question précédente. On obtient les solutions sous la forme

$$x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- d) Le but de cette question est de résoudre l'équation différentielle  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- (i) Au voisinage de 0, on a  $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ . Il s'en suit que la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  n'est pas intégrable sur  $]0, 1]$  et lorsque  $x \rightarrow 0$ , on a :  $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ , et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty,$$

de même,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty.$$

- (ii) Si  $y$  est solution de  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$ , sa restriction à  $]0, +\infty[$  est solution de  $E_1$  sur  $]0, +\infty[$ , il existe alors  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $y(x) = ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + be^x$ . De même, sa restriction à  $] -\infty, 0[$  est solution de  $E_1$  sur  $] -\infty, 0[$ , il existe donc  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $y(x) = \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x$ .

De plus  $y$  est continue en 0, d'où si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , alors nécessairement  $a = \alpha = 0$  et  $b = \beta$ . La solution est donc de la forme  $y : x \mapsto y(x) = \delta e^x$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions  $x \mapsto \delta e^x$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$  sont solutions de  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Conclusion : les solutions de  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $x \mapsto \delta e^x$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$ .

- 3- Étant donné un réel  $\lambda$ , soit  $g_\lambda$  la fonction définie sur la droite réelle  $\mathbb{R}$  par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

- a) Les fonctions  $f_\lambda$  et  $x \mapsto e^x$  sont deux fois continûment dérivables, il en est de même de la fonction  $g_\lambda$  et on a

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= e^x g_\lambda(-x), \\ f'_\lambda(x) &= e^x (g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x)), \\ f''_\lambda(x) &= e^x (g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x)), \end{aligned}$$

comme  $f_\lambda$  est solution de  $E_\lambda : xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , on a la relation :

$$-x(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)) + (1+x)(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)) - \lambda g_\lambda(x) = 0,$$

ce qui donne

$$xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) + (\lambda-1)g_\lambda(x) = 0,$$

ainsi,  $g_\lambda$  est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$xy'' + (1-x)y' - (1-\lambda)y = 0.$$

Ce qui signifie que  $g_\lambda$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $E_{1-\lambda}$ .

- b) La fonction  $g_\lambda$  est produit de deux fonctions développables en séries entières sur  $\mathbb{R}$ , donc  $g_\lambda$  est développable en séries entières sur  $\mathbb{R}$ , de plus  $g_\lambda$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $E_{1-\lambda}$  et on a  $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$ .

Ainsi,  $g_\lambda$  est solution développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  de  $E_{1-\lambda}$  telle que  $g_\lambda(0) = 1$ . Il vient par l'unicité (admise dans l'énoncé) que  $g_\lambda = f_{1-\lambda}$ .

Conclusion : pour tous réels  $\lambda$  et  $x$  :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

- c) Fixons  $p \in \mathbb{N}^*$ . D'après la relation précédente :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$ . Or  $p \geq 1 \Rightarrow -(1-p) \in \mathbb{N}$ ; d'après la question **I-, b)**,  $f_{1-p}$  est donnée par le polynôme

$$f_{1-p}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n,$$

$$\text{où } a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}, \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = e^x + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2} x^n e^x,$$

en particulier pour tout réel  $x$  :

$$f_2(x) = e^x + x e^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^x + 2x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

- d) Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel  $x$  :  $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$  et  $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$ , de plus,  $f_{-p}$  et  $f_{1-p}$  sont des polynômes de degré respectif  $p$  et  $p-1$ . Donc  $R(x) = \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \frac{f_{-p}(-x)}{x f_{1-p}(-x)}$  est une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur  $f_{p+1}$  et du dénominateur  $x f_{1-p}$  sont de même degré  $p$ . Il s'en suit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(-1)^p}{p!} x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} x^p} = \frac{-1}{p}.$$

- 4- L'objet de la suite du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction  $f_{1/2}$ . Dans ce but soit  $\varphi$  la fonction, définie pour tout réel  $x$ , par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

Etant donné un entier naturel  $p$ , soit  $I_p$  l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta d\theta.$$

- a) On a

$$I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2+2p} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = I_p - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta,$$

puis, par intégration par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta = \left[ \frac{\sin^{2p+1} \theta}{2p+1} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+2} \theta}{2p+1} d\theta = \frac{1}{2p+1} I_{p+1},$$

d'où

$$I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p.$$

Comme  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ , une récurrence élémentaire permet d'établir que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$I_p = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2(kp+1)} \frac{\pi}{2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)}{2^p p!} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

- b) Relation entre les fonctions  $\varphi$  et  $f_{1/2}$  :

- (i) Nous utilisons les théorèmes de la continuité et de la dérivation sous le signe intégrale : considérons la fonction  $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Psi_0(\theta, x) = e^{x \sin^2 \theta}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (resp. pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ), la fonction  $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$  (resp.  $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ ) est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (resp.  $\mathbb{R}$ ). De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sup_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\Psi_0(\theta, x)| \leq e^x$  et la fonction constante en  $\theta$  égale à  $e^x$  est intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

D'autre part, les applications partielles  $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$  et  $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$  sont toutes les deux de classe  $C^1$  respectivement sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tous  $(\theta, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ ,  $|\frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(\theta, x)| \leq e^x$ . De plus, la fonction constante en  $\theta$  égale à  $e^x$  est intégrable sur l'intervalle fermé borné  $[0, \frac{\pi}{2}]$  de  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale  $\varphi$  est de classe  $C^1$  et

$$\varphi'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} (e^{x \sin^2 \theta}) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

On démontre par récurrence que  $(\theta, x) \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  est également de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (e^{x \sin^2 \theta}) d\theta = \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

- (ii) Commençons par déterminer le développement en série entière de  $x \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$e^{x \sin^2 \theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n,$$

puisque  $\sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \left| \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n \right| = \frac{x^n}{n!}$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n$  est normalement convergente en  $\theta$  et ceci pour tout  $x$ . Donc par intégration en  $\theta$ , il vient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n.$$

Posons  $\alpha_n = \frac{I_n}{n!}$ , alors

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{n + \frac{1}{2}}{(n+1)^2},$$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite du développement (2) en série de  $f_{1/2}$ . Signalons d'autre part la différence entre les premiers termes :  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $a_0 = 1$ .

On en déduit que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}.$$

- c) Encadrement de  $\varphi(x)$  :

- (i) Il suffit de montrer que pour tout  $u < 1$ ,  $(1-u)e^u - 1 \leq 0$ . On étudie alors la fonction  $g : x \mapsto (1-x)e^x - 1$ . Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = -xe^x$  qui est positive sur  $] -\infty, 0]$  et négative sur  $[0, +\infty[$ , de plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ,  $g(1) = -1$  et  $g(0) = 0$ .

On en déduit que pour tout  $x \leq 1$ ,  $g(x) \leq 0$ , ce qui montre que  $e^x - \frac{1}{1-x} \leq 0$  si  $x < 1$  (car  $1-x > 0$ ).

- (ii) Existence de l'intégrale : puisque  $x < 1$  la fonction  $\theta \mapsto 1 - x \sin^2 \theta$  ne s'annule pas et donc la fonction  $\theta \mapsto \frac{1}{1-x \sin^2 \theta}$  est définie continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , ce qui implique que  $J(x)$  existe.

Pour calculer l'intégrale, on commence par utiliser les règles de Bioche, qui consiste à effectuer le changement de variable  $t = \tan \theta$ , ce qui est justifié par le fait que  $\theta \mapsto \tan \theta$  est  $\mathcal{C}^1$ -bijectif de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  sur  $]0, +\infty[$ . On a

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2(1-x)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(t\sqrt{1-x})^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise le changement de variable  $v = t\sqrt{1-x}$  et on obtient

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} \frac{dv}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [\arctan v]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

- (iii) Puisque la fonction  $\exp$  est à valeurs strictement positives, on a pour tout réel  $x$ ,  $\varphi(x) \geq 0$ . D'autre part, d'après la question 4-, c), (i), pour tout réel  $x < 1$ ,  $e^{x \sin^2 \theta} \leq \frac{1}{1-x \sin^2 \theta}$ , d'où par croissance de l'intégrale, pour tout réel  $x < 1$ ,  $\varphi(x) \leq J(x)$ .

Par conséquence, pour tout  $x < 1$ ,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

- (iv) Le premier changement de variable  $u = \sin \theta$ , donne

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{xu^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

puis on pose  $v = \sqrt{-x}u$ , on obtient

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv.$$

Or  $x \leq 0 \Rightarrow 1 + \frac{v^2}{x} \leq 1$ , donc  $\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv \geq \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv$ ; de plus, puisque

$x \leq -1$ , on a  $\int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv \geq \int_0^1 e^{-v^2} dv$ . Posons  $A = \int_0^1 e^{-v^2} dv$ ,  $A > 0$ , on peut conclure que pour tout réel  $x \leq -1$ ,

$$\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

- (v) Nous avons montré que  $f_{1/2} = \frac{2}{\pi} \varphi$  et pour tout réel  $x < 1$ ,  $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , ce qui implique

$$0 \leq f_{1/2}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \forall x < 1,$$



d'où, par passage à la limite ( $x \rightarrow -\infty$ ),

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{1/2}(x) = 0.$$

Nous avons également montré que  $\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}$  pour  $x \leq -1$  ce qui justifie que  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $]-\infty, -1]$ .

5- Soit  $h$  la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} f_{1/2}(x).$$

a) Rappelons que nous avons montré dans 4-, b), (ii) que  $h(x) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta$ . Montrons que  $h$  est paire, soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$h(-x) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x(1-\sin^2 \theta)} d\theta = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos^2 \theta} d\theta,$$

en effectuant le changement  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$ , il vient

$$h(-x) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta = h(x),$$

d'où la parité de  $h$ .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}(1-2\sin^2 \theta)} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2} \cos 2\theta} d\theta, \end{aligned}$$

puis par le changement de variable  $t = 2\theta$ , on obtient

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2} \cos t} dt.$$

La relation demandée est alors une conséquence immédiate de la parité de  $h$  :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} (h(x) + h(-x)) = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2} \cos \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2} \cos \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch} \left( \frac{x}{2} \cos \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel positif  $x$  et tout réel  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\operatorname{ch} \left( x \frac{\cos \theta}{2} \right) \geq \frac{1}{2} e^{x \frac{\cos \theta}{2}} > 0$ , donc

$$h(x) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x \frac{\cos \theta}{2}} d\theta,$$

or pour  $\theta \in [0, \pi/4]$ ,  $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , d'où

$$h(x) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x \frac{\sqrt{2}}{4}} d\theta \geq \frac{1}{4} e^{x \frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.$$

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'intégrale  $S(n)$  par :  $S(n) = \int_0^1 (1+x)^n dx$

1. Calculer  $S(n)$

$$S(n) = \left[ \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{(2^{n+1} - 1)}{n+1}$$

2. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$ , où  $C_n^k$  désigne le nombre de combinaisons de  $k$  éléments pris parmi  $n$ .

$$S(n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{k+1} = \frac{(2^{n+1} - 1)}{n+1}$$

**Exercice n° 2**

Soit  $f$  l'application définie sur  $[-1, +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La fonction est définie pour  $x \geq -1$ . Sa dérivée est égale à :  $f'(x) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$ , donc la fonction est strictement croissante de  $[-1, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

Montrons par récurrence la propriété suivante :  $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Pour  $n=0$ , on a  $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et la propriété est vérifiée.

On suppose que :  $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ . Comme  $f$  est strictement croissante, on a :

$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$ , c'est-à-dire  $\frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ , d'où la propriété à l'ordre  $n+1$ .

La suite étant croissante et majorée (par 1), elle est convergente et sa limite  $l$  vérifie

l'équation :  $f(l) = l$  ou encore :  $l = \sqrt{\frac{l+1}{2}}$ , d'où :  $2l^2 - l - 1 = 0$  et  $l=1$ .

### Exercice n° 3

1. Trouver une primitive de la fonction  $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - 1}$

$\frac{2t^2}{t^2 - 1} = 2 + \frac{2}{t^2 - 1} = 2 + \frac{1}{t-1} + \frac{-1}{t+1}$  et une primitive est égale à

$$2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + K = 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + K$$

2. Trouver une primitive de  $g(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{t}$

$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t} dt = \int \frac{2x^2}{x^2 - 1} dx$  en posant  $x = \sqrt{1-t}$ . D'où d'après la question précédente, on obtient :

$$2\sqrt{1-t} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right| + K$$

3. Soit  $H(x)$  une primitive de  $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Montrer que

$H(x) = -2\ln x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2\ln(1-\sqrt{1-x}) + K$ , où  $K$  est une constante.

$H(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx = \left[-2\sqrt{1-x} \ln x\right] - \int 2\sqrt{1-x} \frac{1}{x} dx$ , ce qui donne l'expression demandée, où on peut enlever les valeurs absolues.

4. Soit  $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ , montrer que cette intégrale est convergente.

La fonction  $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$  n'est pas définie en 0 et 1. On a une intégrale généralisée.

En 0,  $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \approx \ln x$  et  $x^{1/2} \ln x \rightarrow 0$  et l'intégrale converge en 0.

En 1, on pose  $t = 1-x$ ,  $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \approx \frac{1}{\sqrt{t}}$ , donc on a la convergence en 1.

En conclusion, l'intégrale est convergente.

5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$

$$H(x) = -2 \ln x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln(1-\sqrt{1-x}) + K$$

$$H(x) = -2 \ln x \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln\left(1 - \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)\right) + K$$

$$H(x) = -2 \ln x + x \ln x (1 + o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) + K$$

$$H(x) = -2 \ln x + x \ln x (1 + o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln x + 2 \ln\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) + K$$

$$H(x) = x \ln x (1 + o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2 \ln\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) + K, \text{ puis on passe à la limite :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 4 - 2 \ln 2 + K$$

6. Soit  $I(\varepsilon, a) = \int_{\varepsilon}^a \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ . Calculer  $I(\varepsilon, a)$  et en déduire la valeur de  $I$ .

$$I(\varepsilon, a) = H(a) - H(\varepsilon)$$

$$I(\varepsilon, a) = -2 \ln(a) \sqrt{1-a} + 4\sqrt{1-a} + 2 \ln(1-\sqrt{1-a}) + 2 \ln(\varepsilon) \sqrt{1-\varepsilon} - 4\sqrt{1-\varepsilon} + 2 \ln(1-\sqrt{1-\varepsilon})$$

$$I = H(1) - H(0) = 4 - 2 \ln 2$$

#### Exercice n° 4

Pour une longueur de périmètre donnée, quelle est parmi ces trois figures : carré, rectangle, cercle, celle qui a la plus grande surface ?

Soit  $p$  le périmètre donné.

Pour un cercle, son périmètre est égal à  $p = 2\pi R$  ( $R$  étant le rayon) et sa surface à

$$\pi R^2 = \pi \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$$

Pour un carré, sa surface est égale à :  $\frac{p^2}{16}$  (le côté étant égal à  $p/4$ )

Pour un rectangle, son périmètre est égal à :  $p = 2(L + l)$  où  $L$  désigne sa longueur et  $l$  sa largeur. Sa surface est égale à :  $S = L \times l = L \times \left(\frac{p}{2} - L\right)$  et cette surface est maximale pour la

valeur qui annule la dérivée de cette fonction concave à savoir  $L = \frac{p}{4}$ . Par conséquent la

surface d'un rectangle est la plus grande quand c'est un carré et donc on ne compare que la surface du carré avec le cercle. Comme  $16 > 4\pi$ ,  $\frac{p^2}{4\pi} > \frac{p^2}{16}$  et le cercle a la plus grande surface.

**Exercice n° 5**

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle trois fois continûment dérivable en un point  $a$ .

Soit  $D$  le déterminant défini par :  $D(a, h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$

Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(a, h)}{h^4}$

En faisant une soustraction de lignes, on obtient :

$$D(a, h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 0 & f(a+h) - f(a) & f(a+2h) - f(a+h) \\ 0 & f(a+2h) - f(a) & f(a+3h) - f(a+h) \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant bien sûr par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$D(a, h) = [(f(a+h) - f(a)) \times (f(a+3h) - f(a+h))] - [(f(a+2h) - f(a)) \times (f(a+2h) - f(a+h))]$$

Puis on applique la formule de Taylor à chaque expression à l'ordre 3 au voisinage de  $a$  (l'ordre 3 suffit, car le déterminant sera en  $h$  puissance 4, ce qui correspond au dénominateur de la limite à calculer).

On a :

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

$$f(a+2h) - f(a) = 2h f'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

$$f(a+2h) - f(a+h) = h f'(a+h) + \frac{h^2}{2} f''(a+h) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a+h) + o(h^3)$$

$$f(a+3h) - f(a+h) = 2h f'(a+h) + 2h^2 f''(a+h) + \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(a+h) + o(h^3)$$

Les termes en  $h^2$  et  $h^3$  s'éliminent, et le terme en  $h^4$  est égal à :  $f'(a) \times f^{(3)}(a) - (f''(a))^2$

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(a, h)}{h^4} = f'(a) \times f^{(3)}(a) - (f''(a))^2$

**Exercice n° 6**

Soit  $f$  une application linéaire définie sur  $R^3$  par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{14}(13x - 2y - 3z, -2x + 10y - 6z, -3x - 6y + 5z)$$

1. Déterminer le noyau de  $f$ .

$f(x, y, z) = 0$  implique  $13x - 2y - 3z = 0$ ,  $-2x + 10y - 6z = 0$ ,  $-3x - 6y + 5z = 0$ , soit  $y=2x$  et  $z=3x$ . Le noyau est donc une droite engendrée par le vecteur de composantes  $(1, 2, 3)$ .

2. Déterminer l'image de  $f$ .

L'image est le plan d'équation :  $X + 2Y + 3Z = 0$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice  $M$  associée à  $f$  dans la base canonique de  $R^3$ .

$Det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-14\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 10-14\lambda & -6 \\ -3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$ . En ajoutant à la première colonne, deux fois la deuxième et trois fois la troisième, on obtient :

$Det(M - \lambda I) = -14\lambda \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$ . On soustrait trois fois la première ligne à la troisième ligne :

$Det(M - \lambda I) = (-14\lambda)(14(1-\lambda)) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 14-14\lambda \end{vmatrix}$  et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :  $Det(M - \lambda I) = -(14)^3 \lambda (1-\lambda)^2$

Par conséquent 0 est une valeur propre simple et 1 une valeur propre double.

4. Expliciter la nature géométrique de l'application  $f$ .

On constate que le noyau est orthogonal à l'image et que  $M^2 = M$ , il s'agit d'une projection orthogonale sur le plan d'équation  $X + 2Y + 3Z = 0$

5. Ecrire la matrice  $S$ , dans la base canonique de  $R^3$ , de la symétrie par rapport au plan d'équation :  $X + 2Y + 3Z = 0$

On écrit d'abord dans une base obtenue avec le noyau et l'image, plus précisément :

$e_1 = (-2, 1, 0)$  et  $e_2 = (-3, 0, 1)$  forment une base du plan de symétrie, donc  $S(e_1) = e_1$  et  $S(e_2) = e_2$

$e_3 = (1, 2, 3)$  est un vecteur orthogonal au plan de symétrie, donc  $S(e_3) = -e_3$

Donc dans cette base,  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage est  $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et son inverse :  $P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 7 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Dans la base canonique  $S_c = P S P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & -4 & -6 \\ -4 & 3 & -12 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

6. Exprimer  $MS$  et  $SM$  (produits de deux matrices) dans la base formée par la réunion d'une base du noyau de  $f$  et de l'image de  $f$ .

On a :  $S(e_1) = e_1, S(e_2) = e_2, S(e_3) = -e_3$  et  $M(e_1) = e_1, M(e_2) = e_2, M(e_3) = 0$

Par conséquent  $MS = SM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2016

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

### Exercice I.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1- Démontrer que cette fonction est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .  
Exprimer la différentielle de  $f$  en tout point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  en fonction de ses dérivées partielles.
- 2- Démontrer que les dérivées partielles de  $f$  ne sont pas continues au point  $(0, 0)$ .

### Exercice II.

Pour tout nombre réel  $u \in ]0, 1[$ , on définit la fonction  $\varphi_u$  de la variable réelle  $t$  par :

- Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $\varphi_u(t) = \cos ut$ ,
- La fonction  $\varphi_u$  est périodique de période  $2\pi$ .

- 1- Montrer que la fonction  $\varphi_u$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2- Montrer que la série de Fourier de la fonction  $\varphi_u$  s'écrit sous la forme  $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u) \cos nt$ .
- 3- Calculer  $a_n(u)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4- La fonction  $\varphi_u$  est-elle égale en tout point de  $\mathbb{R}$  à la somme de sa série de Fourier ?
- 5- En déduire pour tout  $u \in ]0, 1[$ , l'égalité:

$$\frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

### Problème III.

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Pour un entier  $p \geq 1$ , on note par  $\mathcal{M}_p$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$ . Si  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_p$  on note par  $AB$  le produit de  $A$  par  $B$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A^n$  le produit  $n$ -fois de la matrice  $A$ . On note  $I_p$  la matrice identité d'ordre  $p$  et on convient que  $A^0 = I_p$ .

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_p$  est dite *nilpotente d'indice trois* si elle vérifie  $A^2 \neq 0$  et  $A^3 = 0$ .

Les parties 2 et 3 sont liées, mais la partie 1 est indépendante du reste du problème.

- 1- Dans toute cette partie, on note  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_p$ , nilpotente d'indice trois.  
Pour tout réel  $t$ , on note  $E(t)$  la matrice

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

- a) Vérifier la relation

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s + t).$$

- b) En déduire que  $(E(t))^n = E(nt)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .  
c) Montrer que la matrice  $E(t)$  est inversible. Quel est son inverse ?  
d) Montrer que la famille  $(I_p, A, A^2)$  est libre dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p$ .  
e) En déduire que l'application  $E : t \mapsto E(t)$ , de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}_p$ , est injective.  
f) Dans cette question,  $p = 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Expliciter la matrice  $E(t)$  sous la forme d'un tableau matriciel pour  $t \in \mathbb{R}$ .

- 2- Dans cette partie, on note  $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathcal{M}_2$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui lui est canoniquement associé.

- a) Montrer que  $F = \text{Ker}(f - 2I_2)$  et  $G = \text{Ker}(f - I_2)$  sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans  $\mathbb{R}^2$ . Préciser un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $F$ , et un vecteur directeur  $\vec{v}$  de  $G$ .  
b) Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ .  
c) En déduire qu'il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que  $A = PDP^{-1}$ . Expliciter  $P$ ,  $D$  et  $P^{-1}$ .  
d) Expliciter  $D^n$  pour tout entier naturel  $n$ . Démontrer la relation  $A^n = PD^nP^{-1}$ . En déduire l'expression de  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.

- 3- On reprend les notations de la partie 1-.

- a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel  $t$ , on a

$$e^t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right).$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.

- b) Pour tout réel  $t$ , pour tout entier naturel  $n$ , on note  $E_n(t)$  la matrice définie par  $E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k$ . On écrira cette matrice sous la forme  $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ .

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $c_n(t)$ ,  $d_n(t)$ .

- c) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $E(t)$  la matrice  $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ , avec

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t), & b(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t), \\ c(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) & \text{et} & \quad d(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t). \end{aligned}$$

Montrer que  $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$ .

- d) Montrer qu'il existe deux matrices  $Q$  et  $R$  (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad E(t) = e^{2t} Q + e^t R$$

et expliciter  $Q$  et  $R$ .

- e) Calculer les matrices  $Q^2$ ,  $R^2$ ,  $QR$ ,  $RQ$ . Que peut-on dire des endomorphismes  $q$  et  $r$  de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associés aux matrices  $Q$  et  $R$  (on pourra préciser la réponse en utilisant les droites  $F$  et  $G$  de la question 2- a) ?

- f) En déduire que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t).$$

Que dire de  $(E(t))^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?, de  $(E(t))^{-1}$  ?

L'application  $E : t \mapsto E(t)$ , de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}_2$ , est-elle injective ?

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Le multilinguisme en Afrique, un atout ou un frein ?

**Sujet n° 2**

L'art est-il universel ?

**Sujet n° 3**

«De nos jours, la parole est devenue flottante tout comme les devises.»  
Explicitez cette citation de Driss Chraïbi, écrivain marocain .



AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les exercices sont indépendants.**

*Dans toute la composition,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.*

**Exercice n° 1**

Pour  $k$  un entier strictement supérieur à 1 et  $x$  un nombre réel positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (xy - f_k(x))$$

1. Etudier les variations et tracer le graphe de  $f_3(x)$ .
2. Calculer  $f_2^*(x)$ .
3. Etudier la convexité de  $f_k(x)$ .
4. Calculer  $f_k^*(y)$  pour tout  $k > 1$ .

**Exercice n° 2**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  (entier strictement supérieur à 2) et  $f$  un endomorphisme sur  $E$  vérifiant :  $(f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}) = 0$ , où  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$  et  $\text{Id}$  désigne l'application identique de  $E$ .

1. On rappelle qu'une application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$  est une projection si  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ .  
Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels  $\lambda, \mu$  tels que :

$$p = \lambda(f - a \text{Id}) \text{ et } q = \mu(f - b \text{Id}) \text{ soient des projections.}$$

Quelle relation existe-t-il entre  $p$  et  $q$  ?

2. Exprimer  $f$  à l'aide de  $p$  et  $q$ . En déduire  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois)
3. Montrer que si  $ab \neq 0$ , l'application  $f$  est inversible. Exprimer son inverse  $f^{-1}$  à l'aide de  $p$  et  $q$ .

4. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$ , où  $m$  est un paramètre réel non nul.

Déterminer  $a$  et  $b$  tels que :  $(A - aI)(A - bI) = 0$ , où  $I$  désigne la matrice unité d'ordre 3. En déduire  $A^n$

### Exercice n° 3

On note  $C$  l'ensemble des nombres complexes et  $f$  l'application de  $C$  dans  $C$  définie, pour  $z \neq 2i$ , par :  $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Donner les formes cartésiennes et trigonométriques de  $f(i)$
2. Résoudre l'équation :  $f(z) = 2i$
3. Déterminer l'ensemble  $D$  des points  $M$  d'affixe  $z$ , tels que  $|f(z)| = 2$

### Exercice n° 4

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0,1[$  par :  $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. Montrer que le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.
3. Trouver une primitive de  $f$  sur  $]0,1[$ .
4. Calculer l'aire comprise entre l'axe  $Ox$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x=1/2$  et  $x=2/3$

5. Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0,1[$  par :  $g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ . Trouver la primitive  $G$  de  $g$  qui vérifie :  $G(1/2)=6$ .
6. Comparer la position des graphes de  $f$  et  $g$  sur  $]0,1[$

**Exercice n° 5**

Pour  $\alpha \in ]-1,1[$ , on considère l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x) f(\alpha x)$$

où  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Comparer deux solutions  $f$  et  $g$  de (E) qui vérifient :  $f(0) = g(0)$
2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

**Exercice n° 6**

Pour  $n$  entier naturel, on définit la suite des intégrales  $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) dx$

1. Montrer que  $J_n$  existe pour tout entier naturel  $n$ . Calculer  $J_0$ .
2. Pour  $n$  non nul, déterminer une relation de récurrence entre  $J_n$  et  $J_{n-1}$ . En déduire une expression de  $J_n$  en fonction de  $n$ .
3. Etudier la convergence de la suite  $(J_n)$ .
4. Déterminer la nature de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  de terme général :  $u_k = \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$  et en déduire la limite de la suite  $(J_n)$ .



AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jacques ATTALI : intitulé : « Peut-on prévoir l'avenir ? » Paru aux éditions Fayard en août 2016.**

***Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.***

***Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation, et de la présentation de votre copie***

Je veux ici expliquer comment je prévois l'avenir et comment chacun de nous peut y parvenir.

« Connaître l'avenir », « prédire l'avenir », « prévoir l'avenir » : trois expressions qui disent apparemment la même chose. Et qui sont pourtant fort distinctes. Dans toutes les langues.

« Connaître l'avenir », c'est penser qu'il est fixé à l'avance et qu'on peut en découvrir tous les détails. Ceux qui le croient possible en déduisent qu'il faut se résigner à accepter notre destin comme il viendra, puisqu'il nous est imposé, jour après jour, par les dieux ou par la nature. Que nous devons prier les dieux afin qu'ils le changent.

« Prédire l'avenir », c'est encore penser qu'il est immuable, mais sans plus croire qu'il soit entièrement accessible à notre connaissance ; c'est alors se contenter d'en deviner les bribes, d'anticiper un peu de ce que le destin nous réserve, sans non plus espérer le modifier sinon par la prière...

Enfin « prévoir l'avenir », c'est aussi essayer de le deviner au moins partiellement, mais en considérant qu'il n'est pas figé, et qu'il est possible, par l'action, de lui faire prendre un autre chemin que celui que décrit la prévision.

Chercher à « connaître » l'avenir ou à le « prédire », c'est se résigner. Chercher à le prévoir, c'est se préparer, si on le souhaite, à vivre libre, à « devenir soi ».

.../... Ceux qui pensent qu'ils peuvent influencer sur leur destin ont besoin, d'abord, de comprendre ce que l'avenir semble leur réserver ; pour détourner, si nécessaire, le cours du destin et le rapprocher d'une trajectoire rêvée. Comme un général envoie, un éclaireur ou un espion, observer ce qui se passe chez l'ennemi, pour lui rendre ensuite compte de la situation et lui permettre d'élaborer une stratégie ; prévoir c'est se faire éclaireur du temps. Espion de l'avenir.

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie : on peut souhaiter prévoir son propre avenir juste pour éviter un danger, sans pour autant vouloir changer le cours de sa vie, ni chercher à « devenir soi ». Par exemple, quand on roule sur une route de nuit, on a intérêt à allumer les phares afin d'éviter les obstacles, mais pas nécessairement pour changer de destination ; de

même, une entreprise a intérêt à évaluer tous les risques qu'elle peut encourir juste pour les éviter, sans pour autant vouloir changer d'activité. Un banquier a intérêt à connaître toutes les circonstances dans lesquelles son prêt pourrait ne pas être remboursé sans pour autant vouloir modifier sa politique de crédit. Une nation a intérêt à prévoir les risques qu'elle peut courir, sans pour autant nécessairement vouloir changer de modèle de développement ou de projet politique. L'humanité a intérêt à prévoir l'évolution du climat de la planète, pour essayer d'en contenir les conséquences désastreuses, sans pour autant vouloir changer plus largement son destin. Et plus particulièrement les peuples martyrs, et victimes de ségrégation spécifique sont sans cesse dans l'obligation de prévoir les menaces qui les guettent ; prévoir l'avenir est pour eux une condition de survie, qui ne leur impose pas nécessairement de changer de pays ou de confession.

Aujourd'hui, ceux qui ne peuvent ou ne veulent prévoir leur avenir se préparent des lendemains tragiques. Prosaïquement, ils ne préparent pas leur retraite ; ils vivent à crédit sans se préoccuper de savoir comment rembourser ; ils négligent les conséquences de leurs actes sur l'environnement et sur les autres ; même s'ils savent ce qui va en découler, ils préfèrent l'ignorer.

Seuls survivront longtemps ceux qui n'auront pas joué un jeu aussi suicidaire, et qui auront su prévoir et aider les autres à prendre conscience de l'urgence d'anticiper. Pour rester des êtres humains. Ou mieux encore : pour le devenir enfin.

C'est possible. Il ne faut jamais oublier que le propre de l'homme, ce qui lui a permis de dominer les autres espèces, c'est sa capacité de prévoir l'avenir. Et le propre des chefs, parmi les humains, c'est leur capacité supérieure à y parvenir, à le faire croire, ou à contrôler ceux qui le font ; prévoir doit devenir une obsession. La liberté est à ce prix.

Est-il possible de prévoir l'avenir ?

Pour certains c'est tout à fait impossible, autant y renoncer tout de suite.

D'abord parce qu'on ne sait même pas ce qu'est le temps : si chacun ressent bien qu'il s'écoule (dans nos corps, nos vies, nos sensations, nos souvenirs, nos espérances) ; si chacun comprend à peu près ce que sont le passé et le présent, chacun sait aussi que la mémoire est trompeuse, que le présent est souvent illusoire, que l'avenir est immédiatement du passé ; et qu'on ne peut même pas définir le temps.

Ensuite, parce que tant d'événements peuvent influencer sur l'avenir, personnel ou collectif, qu'il est absurde d'espérer déterminer le cours des choses : si on n'avait pas croisé telle personne par hasard, notre vie eut été totalement différente ; à l'inverse, si on n'avait pas pris du retard dans tel rendez-vous, on aurait pu rencontrer celui ou celle qui aurait pu changer notre destin. Si une entreprise n'avait pas eu tel dirigeant, elle aurait peut-être manqué telle technologie qui l'a sauvée.

De même, à l'échelle des peuples et de l'Histoire : si en juin 1914, à Sarajevo, l'archiduc François-Ferdinand avait échappé à l'attentat qui l'a tué, la première guerre mondiale n'aurait peut-être pas eu lieu. Si le 11 septembre 2001 le quatrième avion détourné n'avait pas été dévié de sa trajectoire par des passagers courageux et s'était écrasé sur la Maison-Blanche, le sort de la planète eût été différent.

.../... On peut donc comprendre qu'après un millier de pages d'analyses savantes sur ce sujet, le mathématicien Nassim Nicholas Taleb conclue péremptoirement : « Les prévisions sont tout bonnement impossibles. »

Pour d'autres, au contraire, même s'il était possible de prévoir, de prédire et même de connaître l'avenir, il faudrait surtout s'en empêcher : faut-il vraiment se savoir atteint d'une

maladie incurable ? Faut-il songer à la mort ? Dans un couple, faut-il vraiment chercher à prévoir le comportement de l'autre ? N'est-ce pas se condamner à l'ennui ? Si on savait, avant un dîner chez des amis qui on allait y rencontrer et ce qui allait s'y dire, aurait-on encore envie de s'y rendre ? De même, si on avait pu prévoir que l'électricité allait causer la mort de plusieurs millions de personnes, l'aurait-on jamais utilisée ? Plus généralement, si l'avenir était totalement prévisible, aurait-on encore envie de vivre ? L'imprévisible n'est-il pas nécessaire à toute vie en société ? A tout plaisir ? A toute décision ?

.../... Les hommes, depuis toujours scrutent les astres, interrogent des voyantes, font parler les cartes et fouillent dans ce qu'ils pensent être des expressions du destin. Etonnement, ils s'entêtent à le faire sans douter de la validité de techniques dont nul n'a pourtant jamais apporté la moindre preuve rationnelle de leur efficacité. Comme si l'homme s'accrochait à tout et n'importe quoi pour tenter de comprendre ce qui l'attend, dans un monde où rien ne lui paraît prévisible, pas même, au début de l'humanité, le retour du soleil à l'aube, ni celui de la nuit, au crépuscule. Chacune de ces techniques dit malgré tout beaucoup de l'avenir : de l'observation des astres à l'analyse des rêves, des jeux de hasard à l'interprétation des signaux les plus faibles, tout peut être signifiant.

Comme le pouvoir appartient très largement à celui qui prévoit, ou qui réussit à faire croire qu'il est capable de le faire, ou encore à celui qui contrôle ceux qui prévoient – successivement hommes de Dieu, d'armes, politiciens et hommes d'argent -, cette histoire de la prédiction est aussi, d'une certaine façon, celle du pouvoir.

Ceux qui parlent de l'avenir se trouvent toujours dans une position dangereuse : ils sont en général pessimistes (car on a toujours tendance à noircir l'avenir que l'on ne connaîtra pas, comme pour punir les autres d'exister après vous). Et ceux qui prévoient sont souvent considérés comme responsables de ce qu'ils annoncent (en tout cas, comme l'ayant souhaité).

.../... Prévoir l'avenir a d'abord été l'apanage des dieux et de leurs représentants sur terre. Ceux que Victor Hugo appelle les « contemplateurs de ténèbres » tentent alors de percer les secrets de l'avenir, par des prières, des transes, l'observation de signes célestes ou corporels, des jeux de hasard, de la méditation, de la musique, de la danse. Ils sont chamans, prophètes, augures ; ils sont à la fois adorés et haïs, craints et vénérés.

Peu à peu, les hommes ont tenté de s'approprier ces pouvoirs et sont parvenus à prévoir au moyen de diverses techniques rationnelles quelques données du futur. Ils ont peu à peu mis au point des méthodes pour apprendre à prévoir : les jeux, la littérature, la musique, l'humour.

Et puis, très récemment, tout s'est détraqué : aucune des directions que l'Histoire était censée prendre n'a tenu ses promesses ; ni celle du capitalisme, ni celle du socialisme, ni celle de la démocratie. Le monde est devenu de moins en moins prédictible. La plupart des hommes, ivres de liberté et de caprices se contentent désormais de vivre l'instant présent sans plus chercher à rien attendre de l'avenir. Sans plus penser à l'éternité, ni même aux années qui leur restent à vivre. Faisant tout pour oublier qu'ils sont mortels, étourdis par d'absurdes distractions, d'illusoires convoitises.

Aujourd'hui, face à la complexité des interactions, les hommes confient de plus en plus la mission de prévoir à des machines. De façon de plus en plus précise. Dans tous les domaines : la finance, la santé, la sécurité, la consommation, la production. La prévision redevient ici prédiction.

Ce savoir sur l'avenir n'est pas également partagé, et il restera ce qu'il est depuis l'aube des temps : un instrument majeur de pouvoir au profit de quelques-uns. D'abord, comme toujours, ceux qui, mystérieusement sauront faire preuve d'intuition et de prescience. Puis, demain, des compagnies d'assurances et des gestionnaires de données sauront tout des risques encourus par chacun, et orienteront les comportements pour les minimiser. Chacun sera alors un collaborateur plus ou moins volontaire d'une dictature prédictive.

Pour ma part, je ne veux pas croire que la liberté des hommes sera ainsi perdue. Je ne veux pas croire que nous n'aurons plus jamais les moyens d'anticiper notre avenir et d'agir sur lui. Je ne crois pas non plus que les machines soient aujourd'hui, et seront même jamais, capables de remplacer la sophistication de la pensée humaine. Ni que la démocratie deviendra définitivement un leurre. Je ne veux pas croire enfin que l'espèce humaine acceptera de perdre ce qui fait l'essentiel de sa grandeur : sa capacité à se projeter dans l'avenir, pour le choisir.

Je crois au contraire, que les potentialités de chacun de se prévoir sont, et seront, bientôt plus grandes que jamais. Et que devancer notre avenir deviendra une arme, l'arme ultime, de défense et de conquête de notre liberté.

.../... La paresse est le pire ennemi de l'anticipation. La prévision est le meilleur allié de la liberté ; le seul moyen, même, d'éviter que ne se réalise le scénario noir, pour chacune de nos vies comme pour l'humanité. Il faut donc oser prévoir et y consacrer le temps nécessaire ; on s'aperçoit vite que c'est moins difficile qu'on ne le pense. Et qu'on apprend infiniment sur soi et sur les autres en s'y livrant. On peut, on doit aussi convier à ce processus toutes les techniques disponibles, y compris les plus étranges, les plus anciennes. Certes, rien ne me fera jamais douter de l'absurdité de la chiromancie ou de l'astrologie, prises l'une et l'autre au pied de la lettre. Rien ne me fera non plus croire que l'observation de la chute d'une feuille ou du marc de café, ou encore de l'envol d'un oiseau, puisse aider à prévoir quoi que ce soit. En revanche, en particulier, les techniques les plus récentes de prévision, permettent de comprendre l'influence, certaine même si elle est très indirecte, des astres sur la météorologie et sur l'humeur des gens ; de l'influence de leur physique sur leur capacité à séduire et à convaincre ; de l'influence du hasard sur les destins. Il est aussi vraisemblable qu'on ne sait pas encore tout sur la fonction d'analyse causale des signaux faibles par les rêves, ni sur la capacité d'intuition, d'analyse totale, de pressentiment, de précognition dont certains disposent, surtout parmi les artistes, les musiciens, les poètes. Et inversement, c'est en cherchant à prévoir que chacun peut faire surgir ses propres capacités créatrices artistiques

Il appartient donc à chacun de nous de développer ces dons. Ils conduisent tant à prédire l'avenir qu'à échapper à la pesanteur du présent pour rêver, oser, créer.

Imaginez un monde dans lequel chacun ferait cet exercice. Cette lucidité transformerait profondément l'avenir individuel et collectif. Nul ne pourrait plus procrastiner ni se conduire en aveugle. Nul ne pourrait se résigner à la dictature des machines ni se contenter de son propre égoïsme. Nul ne pourrait plus s'enfermer dans la résignation ni dans le tunnel d'une vie décidée par d'autres.

En attendant cette inaccessible lucidité universelle, ceux qui prendront la peine d'apprendre ces techniques verront assez vite de grands changements dans leur vie, dans leur force créatrice et dans leurs rapports aux autres. Encore leur faudra-t-il affronter le fait que toute prévision de l'avenir est un appel à l'action et que tout change une fois qu'on a écarté le voile de l'ignorance. Même la peur devient alors un moteur de l'action. Même le chagrin n'est plus un obstacle à la joie parce que prévoir conduit à penser au-delà de lui et au moment où, inévitablement, il s'estompera.

Pour les avoir moi-même beaucoup pratiquées, je peux témoigner de l'extraordinaire force créatrice et auto-réalisatrice de ces techniques. Il suffit d'y croire sincèrement, pour que, d'une certaine façon, elles participent au surgissement mystérieux de l'avenir. Oui, le fait de croire à une prévision, aussi irréaliste soit-elle en apparence, peut participer à sa réalisation.

Chaque vie est comme une cathédrale. Il faut la rêver avant de la vivre, la rêver pour la vivre. Même si on n'a pas le temps de l'achever de son vivant, on finit toujours par vivre dans son œuvre : prévoir donne vie.



Avril 2016

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

**Exercice I.**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1- La fonction  $f$  est clairement différentiable en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$  comme produit et composée de fonctions différentiables et on a pour tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(df(x, y))(h, k) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) h + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) k,$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Montrons la différentiabilité au point  $(0, 0)$  : on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( h^2 \sin \frac{1}{|h|} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left( k^2 \sin \frac{1}{|k|} \right) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

ce qui montre que  $f$  est différentiable au point  $(0, 0)$  et pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(df(0, 0))(h, k) = 0.$$

- 2- Étudions la limite dans la direction de la première bissectrice (i.e.  $y = x$ ) : pour tout  $x \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{2x^2}} - \frac{x}{\sqrt{2x^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2x^2}} = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \cos \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(y, y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{2y^2}} - \frac{y}{\sqrt{2y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2y^2}} = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{2}|y|} - \frac{y}{\sqrt{2}|y|} \cos \frac{1}{\sqrt{2}|y|}, \end{aligned}$$

les deux dernières expressions n'admettent pas de limite lorsque  $x \rightarrow 0$  et respectivement lorsque  $y \rightarrow 0$ . On en déduit que les dérivées partielles de  $f$  ne sont pas continues au point  $(0, 0)$ .

## Exercice II.

Pour tout nombre réel  $u \in ]0, 1[$ , on définit la fonction  $\varphi_u$  de la variable réelle  $t$  par :

- Pour tout  $t \in [-\pi, \pi[$ ,  $\varphi_u(t) = \cos ut$ ,
- La fonction  $\varphi_u$  est périodique de période  $2\pi$ .

- 1-** La fonction  $\varphi_u$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit d'établir la continuité en  $\pi$  pour en déduire, par  $2\pi$ -périodicité, la continuité de  $\varphi_u$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $t \in [\pi, 3\pi[$ , on a  $\varphi_u(t) = \varphi_u(t - 2\pi) = \cos u(t - 2\pi)$  et  $\lim_{t \rightarrow \pi_+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$  qui est égal à  $\lim_{t \rightarrow \pi_-} \varphi_u(t)$ .

La continuité en  $\pi$  permet d'écrire  $\varphi_u(t) = \cos ut$  pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ .

- 2-** Notons  $s$  la série de fourier de  $\varphi_u$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n(u) \cos nt + b_n(u) \sin nt\},$$

avec

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t) \sin nt \, dt.$$

La fonction  $\varphi_u$  est paire sur  $[-\pi, \pi]$ , donc  $b_n = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'où

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u) \cos nt.$$

- 3-** Par la parité de  $\varphi_u$ , on a

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ut \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u-n)t + \cos(u+n)t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(u-n)t}{u-n} + \frac{\sin(u+n)t}{u+n} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2u \sin u\pi}{u^2 - n^2}. \end{aligned}$$

- 4-** La fonction  $\varphi_u$  est de classe  $C^1$  par morceaux et continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sa série de Fourier converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\varphi_u$ . Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2u \sin u\pi}{u^2 - n^2} \cos nt.$$

- 5** Pour  $t = \pi$  le calcul de la somme de la série de Fourier de  $\varphi_u$  donne, après division par  $\sin \pi u \neq 0$  :

$$\forall u \in ]0, 1[, \quad \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

### Problème III.

- 1- Dans toute cette partie, on note  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , nilpotente d'indice trois.  
Pour tout réel  $t$ , on note  $E(t)$  la matrice

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

- a) Soit  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ . Puisque  $A$  est nilpotente d'indice 3, on a  $A^3 = 0$ , d'où  $A^4 = A.A^3 = 0$  et donc

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I_p + sA + \frac{s^2}{2}A^2) \\ &= I_p + (s+t)A + (\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2})A^2 + (\frac{st^2}{2} + \frac{ts^2}{2})A^3 + \frac{s^2t^2}{4}A^4, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } E(s)E(t) = I_p + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t).$$

- b) Par récurrence : pour  $n = 0$  la relation est clairement vraie car  $E(0) = I_p = (E(0))^0$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on  $(E(t))^n = (E(t))^{n-1}E(t) = E((n-1)t)E(t) = E(nt)$ .  
c) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $E(0) = I_p = E(t-t)$ . Puis, par la relation démontrée précédemment,  $E(t)E(-t) = E(0) = I_p$ .  
La matrice  $E(t)$  est donc inversible d'inverse  $E(-t)$ .  
d) Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels tels que  $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$ .  
Multiplions cette égalité par  $A^2$ . On obtient  $\alpha A^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0$  et donc  $\alpha = 0$ .  
En multipliant alors l'égalité par  $A$ , on déduit  $\beta = 0$  et donc  $\gamma A^2 = 0$  avec  $A^2 \neq 0$ .  
Donc  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .  
La famille  $(I, A, A^2)$  est libre.  
e) Soient  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $E(s) = E(t)$ . Alors,

$$I_p = E(0) = E(s)E(-s) = E(t)E(-s) = E(t-s),$$

ce qui donne

$$I_p \iff I_p + (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2}A^2 = I_p \iff (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2}A^2 = 0.$$

Or la famille  $(I, A, A^2)$  est libre ; on déduit alors  $t-s=0$ . L'application  $E$  est donc injective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}_p$ .

- f) Dans cette question,  $p = 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On obtient après calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2- Dans cette partie, on note  $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathcal{M}_2$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui lui est canoniquement associé.



a) Dans  $\mathcal{B}_0$  la matrice de  $f - 2I_2$  est  $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Soit  $u = (x, y)$ .  $u \in F \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$ . On reconnaît l'équation, dans le plan, d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est  $\vec{u} = (3, 1)$ .

De même, dans  $\mathcal{B}_0$  la matrice de  $f - I_2$  est  $A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Soit  $v = (x, y)$ .  $v \in G \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$ . On reconnaît, là encore l'équation d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est  $\vec{v} = (2, 1)$ .

Il reste à montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires : soit  $\vec{u} \in F \cap G$ , comme  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{u} \in G$  on a  $(f - 2I_2)(\vec{u}) = 0$  et  $(f - I_2)(\vec{u}) = 0$  ce qui implique  $f(\vec{u}) = 2\vec{u} = \vec{u} \implies \vec{u} = \vec{0}$ . Donc  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ . De plus  $\dim(F) + \dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ . On en déduit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

b) On a  $\vec{u} \in F \implies f(\vec{u}) = 2\vec{u}$  et  $\vec{v} \in G \implies f(\vec{v}) = \vec{v}$ . Donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$ , et  $D$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . La formule de changement de base pour les endomorphismes se traduit, ici, par  $D = P^{-1}AP$  ou encore  $PDP^{-1} = A$  (on a multiplié l'égalité précédente à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$ ).

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D\dots DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  : la relation est évidemment satisfaite pour  $n = 1$ . Supposons que la relation est satisfaite pour un entier  $n$ , on a alors

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 6 - 6 \cdot 2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

**3-** On reprend les notations de la partie 1-.

a) La fonction  $\exp$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exp^{(n)} = \exp$ , où  $\exp^{(n)}$  désigne la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de la fonction  $\exp$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exp^{(n)}(0) = 1$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $t \in \mathbb{R}_+$ . On sait que la fonction  $\exp$  est croissante sur  $[0, t]$ , donc  $\forall u \in [0, t]$ ,  $\exp^{(n+1)}(u) \leq e^t$ . Alors l'inégalité de Taylor Lagrange, appliquée à la fonction  $\exp$  s'écrit :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right| \leq e^t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or on sait (comparaison des fonctions puissances et des factorielles) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} =$

0. De plus  $e^t$  ne dépend pas de  $n$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right) = e^t.$$

Si  $t \in \mathbb{R}_-$ . Par la monotonie de la fonction exp sur  $[t, 0]$ , pour tout  $u \in [t, 0]$ ,  $\exp^{(n+1)}(u) \leq$

1. Par l'inégalité de Taylor Lagrange

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On obtient de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right) = e^t$ .

b) Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la définition de  $E_n(t)$  et la question 2- d),

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (3 \cdot 2^k - 2) = 3 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, \\ b_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (6 - 6 \cdot 2^k) = -6 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2^k - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, \\ d_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (3 - 2 \cdot 2^k) = -2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

c) En utilisant le résultat de 3- a) appliqué au réel  $2t$  on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$ .

Alors :  $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$ ,  $b(t) = -6e^{2t} + 6e^t$ ,  $c(t) = e^{2t} - e^t$ ,  $d(t) = -2e^{2t} + 3e^t$ .

Ainsi  $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$ .

d)  $E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

D'où  $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

e) Après un calcul matriciel classique, on obtient  $Q^2 = Q$ ,  $R^2 = R$ ,  $RQ = QR = 0$ .

on a  $Q^2 = Q$  et  $R^2 = R$  donc  $q$  et  $r$  sont des projections.

D'autre part,  $Q = A - I_2$  et donc  $\text{Ker}(q) = G$ .

De même  $R = -A + 2I$  et donc  $\text{Ker}(r) = F$ .

On a

$q(u) = u \iff (f - I_2)(u) = u \iff (f - 2I_2)(u) = 0 \iff u \in F$ . Donc  $q$  est la projection sur  $F$  de direction  $G$ .

De même

$r(u) = u \iff (-f + 2I_2)(u) = u \iff (f - I_2)(u) = 0 \iff u \in G$ . Donc  $r$  est la projection sur  $G$  de direction  $F$ .

f) D'après le résultat de la question 3- e)

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \\ &= e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

On en déduit alors, que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(E(t))^n = E(nt)$ ,  $E(0) = I_2$  et  $E(-t)E(t) = E(0) = I$  et donc  $(E(t))^{-1} = E(-t)$ .

Il nous reste à montrer que  $E$  est injective : soient  $s, t \in \mathbb{R}$ , tels que  $E(t) = E(s)$ , alors  $E(t)E(-s) = E(t-s) = I_2$ , car  $(E(s))^{-1} = E(-s)$ .

Posons  $u = t - s$ , on a

$$\begin{aligned} E(u) = I_2 &\iff \begin{cases} 3e^{2u} - 2e^u = 1 \\ -6e^{2u} + 6e^u = 0 \\ e^{2u} - e^u = 0 \\ -2e^{2u} + 3e^u = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^u = e^{2u} \\ e^u = 1 \end{cases} \iff u = 0 \iff t = s. \end{aligned}$$

Donc  $E$  est injective.



CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Pour  $k > 1$  et  $x \in \mathbb{R}$  positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f_k(x))$$

1. Etudier les variations et tracer le graphe de  $f_3(x)$ .

On a :  $f_3(x) = \frac{(2x+1)^{3/2} - 3x-1}{3}$  et sa dérivée est égale à :  $f_3'(x) = \sqrt{2x+1} - 1 > 0$ .

La fonction est donc strictement croissante sur les réels positifs, avec une branche parabolique dans la direction Oy. Elle présente une tangente horizontale en 0.

2. Calculer  $f_2^*(x)$ .

Pour  $k=2$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$  et  $f_2^*(y) = \sup_x (xy - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}y^2$ . Car cette borne supérieure est atteinte pour  $x=y$

3. Etudier la convexité de  $f_k(x)$ .

On a :  $k f_k'(x) = k((k-1)x+1)^{1/k-1} - 1$ . Posons  $u = ((k-1)x+1)^{1/k-1} - 1$ , on obtient :  $u' = ((k-1)x+1)^{2-k/k-1} > 0$ , la dérivée seconde de  $f_k(x)$  étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme  $k > 1$  et  $x \in \mathbb{R}$  positif, la racine est bien définie).

4. Calculer  $f_k^*(y)$  pour tout  $k > 1$ .

Soit  $g(x) = xy - f_k(x)$ , alors  $g'(x) = y - f_k'(x) = 0$  pour  $x = \frac{(y+1)^{k-1} - 1}{k-1}$  et en

remarquant que :  $((k-1)x+1)^{k/k-1} = (y+1)^k$ , on obtient :  $f_k^*(y) = \frac{(1+y)^k - ky - 1}{k(k-1)}$

## Exercice n° 2

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  (entier strictement supérieur à 2) et  $f$  un endomorphisme sur  $E$  vérifiant :  $(f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}) = 0$ , où  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$  et  $\text{Id}$  désigne l'application identique de  $E$ .

1. Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels  $\lambda, \mu$  tels que :

$p = \lambda(f - a \text{Id})$  et  $q = \mu(f - b \text{Id})$  soient des projections (on rappelle qu'une application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$  est une projection si  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ).

Quelle relation existe-t-il entre  $p$  et  $q$  ?

On a :  $p \circ p = \lambda^2(b - a)(f - a \text{Id})$  et  $p \circ p = p \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{b - a}$

De même,  $q \circ q = q \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{a - b}$

On vérifie que :  $p + q = \text{Id}$

2. Exprimer  $f$  à l'aide de  $p$  et  $q$ . En déduire  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$

On obtient  $f = (b - a)p + a \text{Id} = bp + aq$  et  $f^n = b^n p + a^n q$

3. Montrer que si  $ab \neq 0$ , l'application  $f$  est inversible. Exprimer son inverse  $f^{-1}$  à l'aide de  $p$  et  $q$ .

On obtient :  $f^{-1} = \frac{1}{ab}((a + b)\text{Id} - f) = b^{-1}p + a^{-1}q$

4. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$ , où  $m$  est un paramètre réel non nul.

Déterminer  $a$  et  $b$  tels que :  $(A - aI)(A - bI) = 0$ , où  $I$  désigne la matrice unité d'ordre 3. En déduire  $A^n$ .

Si  $(A - aI)(A - bI) = 0$ , d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $a$  et  $b$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

On obtient :  $\det(A - \delta I) = (\delta + 1)^2(\delta - 2)$ ,  $a = 2, b = -1$  ou l'inverse et  $A^n = (-1)^n q + 2^n p$

**Exercice n° 3**

On note  $C$  l'ensemble des nombres complexes et  $f$  l'application de  $C$  dans  $C$  définie,

pour  $z \neq 2i$ , par :  $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Donner les formes cartésiennes et trigonométriques de  $f(i)$ .

$$f(i) = -1 - i = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

2. Résoudre l'équation :  $f(z) = 2i$

$$f(z) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i(z - 2i) \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 5 \Leftrightarrow z = 1 + 2i$$

3. Déterminer l'ensemble  $D$  des points  $M$  tels que  $|f(z)| = 2$

$$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2|x + iy - 2i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-2)^2), \text{ d'où}$$

$$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre  $(-1/3, 8/3)$  et de rayon :  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

**Exercice n° 4**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0,1[$  par :  $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

1. Etudier les variations de  $f$ .

On a  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$ . Le numérateur est toujours négatif. La fonction  $f$  est donc strictement décroissante de  $]0,1[$  dans  $R$ .

2. Montrer que le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.  
Le graphe de  $f$  est symétrique par rapport au point  $A(1/2, 0)$ , en effet si on pose

$$X = x - 1/2, \text{ on obtient } f(X) = \frac{2X}{X^2 - 1/4} \text{ qui est impaire.}$$

3. Trouver une primitive de  $f$  sur  $]0,1[$ .

Une primitive de  $f$  sur  $]0,1[$  est  $F(x) = \ln x(1-x) + Cste$ .

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe  $ox$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x=1/2$  et  $x=2/3$

L'aire comprise entre l'axe  $ox$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = \frac{2}{3}$  est égale à :  $\ln \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) - \ln \frac{2}{3} (1 - \frac{2}{3}) = \ln \frac{9}{8}$ .

5. Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0,1[$  par :  $g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ . Trouver la primitive  $G$  de  $g$  qui vérifie :  $G(1/2)=6$ .

On obtient  $G(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + k$  et avec  $G(\frac{1}{2}) = 6$ ,  $k = 2$

6. Comparer la position des graphes de  $f$  et  $g$  sur  $]0,1[$ .

Pour  $x \in ]0,1[$ ,  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 2x-1 \geq \frac{2x-1}{x(x-1)}$

Si  $x \geq 1/2$ ,  $f(x) \leq g(x)$

Si  $x \leq 1/2$ ,  $f(x) \geq g(x)$

### Exercice n° 5

Pour  $\alpha \in ]-1,1[$ , on considère l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x) f(\alpha x)$$

où  $f$  est une fonction continue.

1. Comparer deux solutions  $f$  et  $g$  de (E) qui vérifient :  $f(0) = g(0)$

Si  $f$  est solution de (E) alors  $f(x) = \prod_{k=0}^n (1-\alpha^k x) f(\alpha^{n+1} x)$ . Quand  $n$  tend vers plus

l'infini,  $f(\alpha^{n+1} x) \rightarrow f(0)$  tandis que la suite de terme général  $\prod_{k=0}^n (1-\alpha^k x)$  converge.

En effet, pour  $N$  assez grand,  $\forall n \geq N, \prod_{k=N}^n (1-\alpha^k x) > 0$  et

$\ln(\prod_{k=N}^n (1-\alpha^k x)) = \sum_{k=N}^n \ln(1-\alpha^k x)$  et  $\ln(1-\alpha^k x)$  est le terme général d'une série

absolument convergente. Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{\infty} (1-\alpha^k x)$ . La fonction  $g$  a une expression de la même forme, d'où l'égalité de  $f$  et  $g$  lorsque  $f(0) = g(0)$ .



2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

A partir de l'expression  $f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha^k x)$  et par calcul, on obtient que pour

$a_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n$ ,  $a_{n+1} = \frac{\alpha^n}{(1 - \alpha^{n+1})} a_n$ , la série entière  $\sum a_n x^n$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et sa fonction somme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  est solution de l'équation prenant la valeur  $a_0$  en 0.

Ainsi toutes les fonctions  $f$  solutions de (E) sont développables en série entière sur  $\mathbb{R}$

et on vérifie  $f(x) = f(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^{k+1}} \right) x^n$

### Exercice n° 6

Pour  $n$  entier naturel, on définit la suite des intégrales  $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) dx$

1. Montrer que  $J_n$  existe pour tout  $n$ . Calculer  $J_0$

On a un problème en  $+\infty$  et  $|e^{-x} \sin^{2n}(x)| \leq e^{-x}$ , l'intégrale est donc convergente et  $J_0 = 1$ .

2. Pour  $n$  non nul, déterminer une relation de récurrence entre  $J_n$  et  $J_{n-1}$ . En déduire une expression de  $J_n$  en fonction de  $n$ .

Avec deux intégrations par parties et en posant chaque fois  $v'(x) = e^{-x}$ , on obtient :

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1} \text{ et } J_n = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{k(2k-1)}{4k^2+1}$$

3. Etudier la convergence de la suite  $(J_n)$

La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

4. Déterminer la nature de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  de terme général :  $u_k = \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$  et en déduire la limite de la suite  $(J_n)$ .

$u_k = \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \approx -\frac{1}{2k}$  et la série est divergente vers moins l'infini.

On a :  $\text{Ln} \frac{J_k}{J_{k-1}} = \text{Ln} \left( \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1} \right)$

et  $\sum_k \text{Ln} \frac{J_k}{J_{k-1}} = \sum_k \text{Ln} J_k - \sum_k \text{Ln} J_{k-1} = \text{Ln} J_n = \sum_k u_k,$

donc  $\text{Lim} \text{Ln} J_n = -\infty$  et  $\text{Lim} J_n = 0$



1

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

## Exercice I.

Soient les suites réelles  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases} \text{ et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

1. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice  $A$ .
3. Déterminer la matrice  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Expliciter les termes  $u_n, v_n, w_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice II.

On note  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , calculer l'intégrale double  $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ .

## Problème.

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème,  $\sum f_n$  est une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

- 1- (a) Rappeler la définition de la convergence absolue de la série de fonctions  $\sum f_n$  sur  $I$ .
- (b) Rappeler la définition de la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum f_n$  sur  $I$ .
- (c) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions  $\sum f_n$  sur  $I$ .
- (d) On suppose que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , démontrer que  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$ .
- (e) On suppose que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , démontrer que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  
*Indication : on pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.*

- (f) On pose pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) = (-1)^n \left( \frac{x^2 + n}{n^2} \right)$ .

Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement puis converge uniformément sur  $[0, 1]$  mais ne converge absolument en aucune valeur de  $[0, 1]$ .

2- Dans toute cette partie,  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est une suite décroissante de réels positifs,  $I = [0, 1[$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$ .

(a) Justifier que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est bornée et que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

(b) (i)- Calculer pour  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ .

(ii)- Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si la série de réels positifs  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$  converge.

(c) (i)- Calculer pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ ,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$ .

(ii)- On suppose que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0, démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  
On pourra observer que pour  $k \geq n + 1$ ,  $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$ .

(iii)- Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  alors la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

3- Soit la fonction  $\zeta$  de Riemann définie par  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

(a) Déterminer le domaine de définition de  $\zeta$ , c'est-à-dire  $D = \{x : \zeta(x) < \infty\}$ .

(b) Montrer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le domaine  $D$  et exprimer, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\zeta^{(k)}$  comme somme d'une série.

(c) Montrer que  $\zeta$  est convexe sur  $D$ .

(d) Prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ .

(e) Prouver que  $\lim_{x \rightarrow +1^+} \zeta(x) = +\infty$ .

On pourra comparer à une intégrale.

4- Soient  $g_n(x) = (-1)^n \cos^n x$ ,  $V_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  et  $W_n = \int_0^{\pi/2} g_n(x) dx$ .

(a) Étudier la convergence de la série  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ .

(b) Montrer que la suite  $V_n$  est positive, décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ .

(c) Montrer la convergence de la série de terme général  $W_n$ .

(d) Pour tout  $a \in [0, 1[$ , on pose  $A_n(a) = (-1)^n \int_0^a \cos^n x dx$  et  $B_n(a) = (-1)^n \int_a^{\pi/2} \cos^n x dx$ .

(i) Montrer que la série  $\sum g_n$  converge normalement sur  $[a, \pi/2]$ .

(ii) Montrer que pour tout  $0 < a < \pi/2$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx = 1 - \tan(a/2).$$

(iii) Montrer que pour tous  $0 < a < \pi/2$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq \int_0^a \cos^{n+1}(x) dx$  et en déduire

$$\text{que } \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0.$$

(e) Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = 1$ .

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Doit-on avoir peur du progrès ?

**Sujet n° 2**

« Nous n'héritons pas de la terre de nos parents nous l'empruntons à nos enfants ». Illustrer et prolonger cette citation de Léopold Sédar Senghor (1906-2001), chef d'Etat et poète.

**Sujet n° 3**

Les réseaux sociaux, médias en ligne, blogs redonnent-ils du pouvoir aux citoyens ?

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les exercices sont indépendants.**

**Exercice n° 1**

Soit la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :  $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$ .

1. Étudier les variations et tracer le graphe de  $f$ .

2. Étudier la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

3. Pour  $\alpha > 0$ , on pose  $f_\alpha(x) = \frac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$ . Étudier les variations de  $f_\alpha$  et la convergence de

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ .

**Exercice n° 2**

Pour  $m > 0$ , on pose  $f_m(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^m} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de  $m$  la fonction est-elle continue ? (On notera  $f$  la fonction qui correspond à la valeur de  $m$  ainsi trouvée).

2. Étudier la dérivabilité de  $f$ .

3. Étudier la continuité de la dérivée de  $f$ .

4.  $f$  a-t-elle une dérivée seconde continue ?

**Exercice n° 3**

On considère deux suites de nombres réels  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies, pour  $n$  entier naturel, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases} \text{ et } u_0, v_0 \text{ sont donnés quelconques.}$$

1. Exprimer  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $n$  (on fera apparaître l'expression  $u_0 + v_0$ ).
2. Étudier la convergence de ces deux suites.

**Exercice n° 4**

On considère la matrice  $M$  définie par :  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de  $M$  (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera par  $D$  la matrice ainsi obtenue).
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice  $M$  associé à la valeur propre 3. On notera  $P_X$  cette matrice.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice  $M$  associés aux valeurs propres 2 et 3. On notera  $P_Y$  cette matrice.
4. Calculer les produits  $P_X P_Y$  et  $P_Y P_X$ .
5. Parmi les matrices suivantes :  $M, D, P_X, P_Y$ , quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice n° 5**

Soit la matrice  $M$  définie par :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire associée à  $M$ .
2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?
3. Déterminer une base de l'orthogonal du noyau de  $M$ .



4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles de  $M$ .

5. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = m \\ 2x + 3y + 4z = 2m \\ 3x + 4y + 5z = 3m \end{cases}$$
, où  $m$  est un paramètre réel.

### Exercice n° 6

1. Pour  $n$  entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique  $f_n$  définie par :

$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$ . Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.

2. Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  pour  $n$  entier naturel. Calculer  $I_0, I_1, I_2$

3. Calculer  $I_n$  et  $J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  pour tout  $n$ .

4. Étudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$  et  $u_0$  un nombre réel quelconque.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Monsieur Pierre RABHI \* intitulé : « la puissance de la modération », paru aux éditions HOZHONI en octobre 2015.**

***Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.***

**La puissance de la modération**

La plus grande exaction (1) de la modernité est d'avoir outrepassé les limites de la nature afin de servir le culte d'une croissance indéfinie, irréaliste au sein de notre planète aux ressources abondantes mais limitées.

Ce culte enkysté dans le cerveau des experts et des politiques, s'est imposé comme une évidence sans cesse invoquée pour solutionner tous les problèmes. Il est devenu une sorte de dogme, de crédo quasi religieux, dont la remise en cause serait un blasphème qui, en des temps moins tolérants, aurait mérité le bûcher.

Pour que la logique dont il est question puisse s'imposer et perdurer, il a fallu cultiver le « toujours plus » en manipulant le citoyen réduit au statut de consommateur, afin d'installer dans sa psyché (2) le sentiment permanent du manque voire de la pénurie. Nous avons ainsi instauré le règne de la quantité et aboli la juste mesure. Le seuil de satisfaction étant sans cesse repoussé, le productivisme a finalement provoqué l'inverse de ce qu'il était censé produire : l'insatisfaction dans l'abondance engendre cet état pernicieux où les biens se banalisent, avant même d'avoir assouvi les désirs.

Nos outrances extérieures se révèlent inefficaces à combler nos vides intérieurs. L'accumulation de possessions ne garantit en rien la joie de vivre. Celle-ci, comme sentiment et sensation suprême, est d'une essence (3) qui ne peut être subordonnée à la volonté

humaine, car elle ne peut être confondue avec le plaisir. Elle peut advenir dans la chaumière et désertier le plus somptueux palais.

En Grèce antique déjà, la démesure, *l'hubris*, était considérée comme un crime engendrant inmanquablement la juste colère des Dieux visant à rétablir l'équité (4) ; il est évident que notre immodération est la source de très nombreux déséquilibres actuels, que ce soit en termes de dissipation des ressources naturelles ou d'inégalités planétaires. Faut-il encore rappeler à nos esprits endoctrinés qu'un cinquième de l'humanité accapare actuellement les quatre cinquièmes des ressources ? Nous nous demandons comment et pourquoi tant de nos frères et sœurs continuent à souffrir de la faim en dépit de l'abondance des ressources.

C'est à la démesure des prospères gaspilleurs, que cela est dû, comme le pensaient les grecs, à l'orgueil de l'homme qui s'est érigé prince de la création et s'est approprié ce que la vie a élaboré depuis des milliards d'années.

Le drame du monde actuel est d'avoir permis à l'argent de légitimer de véritables hold-up sur le bien commun. Une minorité a légalisé son droit à piller ce qui est nécessaire à la survie de tous. La démesure des uns provoque la ruine et l'indigence des autres.

Le « toujours plus » pour quelques-uns engendre le « toujours moins » pour le plus grand nombre. L'organisation du vivre-ensemble universel, non seulement ne remet pas en cause cette anthropophagie mais la valide et la propage.

Bien avant nous déjà, l'émergence des grandes civilisations a montré à quel point un développement démesuré pouvait être néfaste à notre sphère terrestre et participer activement au processus de sa désertification, comme ce fut le cas en Egypte ancienne, en Mésopotamie, et dans bien d'autres espaces terrestres désertifiés, comme nous pouvons l'observer au Sahel et ailleurs.

Avec l'avènement de l'agriculture, l'être humain s'est libéré de sa condition aléatoire de « chasseur-cueilleur-pêcheur » et de sa fragile dépendance aux aléas naturels. L'agriculteur naissant est devenu également un défricheur et un pasteur immodéré.

Tel Prométhée, il a voulu atteindre une maîtrise totale de sa vie en s'exonérant des limites établies par la nature. La science et l'industrialisation ont exalté les capacités du cerveau humain à innover dans ce sens, mais l'intelligence fondamentale n'a pas suivi.

Il en résulte un constat plus que déplorable : l'humain qui était censé se libérer est aujourd'hui plus aliéné que jamais au sein d'un système vendeur de rêves, mais destructeur d'autonomie. Le dévouement à la mort outrepassa le respect et la célébration de la vie. Avec ces considérations indéniables, l'humanité contemporaine est particulièrement invitée à choisir d'urgence entre la bourse ou la vie !

Autrefois, le crime de *l'hubris* recouvrait des violations comme le vol de propriété publique ou sacrée, et il était considéré comme répréhensible et immoral. Telle devrait être notre juste posture aujourd'hui. La spéculation et le négoce autour de la terre nourricière et de ses ressources sont insensés. C'est une véritable profanation de ce qui devrait être reconnu et protégé par les lois, comme bien commun et inaliénable de l'ensemble de l'humanité.

Cela m'évoque le discours que tint le chef indien Seattle au gouvernement d'Isaac Stevens en 1854 : *« La terre n'appartient pas à l'homme ; l'homme appartient à la terre. Toutes choses se tiennent comme le sang qui unit une même famille. Tout ce qui arrive à la terre arrive aux fils de la terre ... »* Ces paroles révèlent pour moi la spiritualité incarnée, l'intelligence à l'état pur.

La crise fondamentale que nous vivons aujourd'hui est due en grande partie à notre rupture avec l'ordre et le sentiment sacrés. Nous évaluons les choses sur leur contrepartie financière, et n'avons plus conscience de leur valeur réelle. La perception d'une planète merveilleuse, pourvoyeuse de toutes les offrandes jubilatoires, est ravalée à celle d'un gisement de ressources à épuiser.

C'est là une des grandes défaillances de l'esprit, qui démontre bien que l'humanité est capable de prouesses extraordinaires, mais qu'elle demeure profondément béotienne<sup>(5)</sup> quant à la valeur transcendante des liens inaliénables, garants de la continuité de notre aventure terrestre.

Dans l'état actuel du monde qui nous pose l'ultimatum de changer pour ne pas disparaître, peut-être aurions-nous grand intérêt à nous inspirer des processus de notre Terre-Mère, et à opter délibérément pour la modération. Antidote à la démesure qui nous a causé tant de désagréments, elle apparaît comme une option consciente, un devoir moral, une posture soucieuse de contribuer à l'harmonie universelle.

A titre personnel, la modération a grandement inspiré notre retour à la terre et même le choix de notre ferme. Aridité du sol, rareté de l'eau, absence d'électricité : avec ma compagne Michèle, nous avons opté pour la modération car elle recelait beauté et simplicité. Le fait qu'aujourd'hui l'humain soit prêt à sacrifier la beauté sur l'autel de la rentabilité, m'affecte profondément. C'est une renonciation à l'une des plus belles et indispensables potentialités de l'espèce humaine, qui est celle d'admirer.

Dans notre cheminement, nous savions que l'immodération serait un piège. Beaucoup d'agriculteurs ont échoué et échouent encore à cause de cela : toujours plus de terres, de matériel, d'emprunts, etc. ne font que les anéantir.

C'est pourquoi à la chimie qui était alors en plein essor, nous avons préféré l'agro écologie. Loin du gigantisme et de la spécialisation, causes de tant de ruptures dans nos écosystèmes naturels, l'agro écologie implique de renouer avec les lois de la vie, en recréant une synergie entre les divers éléments : terre, végétal, animal, humain, qui nourrissent à leur

tour la terre.... L'agro-écologie est une démarche juste car elle permet de répondre au besoin impérieux de se nourrir dans le respect des sources même de la vie et de la transmission d'une terre vivante aux générations futures.

Elle offre une occasion de se reconnecter profondément à la Terre-Mère et permet ainsi de mieux appréhender le grand mystère. Vous pouvez faire analyser un échantillon de terre mais vous ne saurez jamais qui ordonne au grain de blé de germer et de se multiplier à l'infini. C'est cela qui est fascinant : malgré tous nos savoirs, le mystère demeure. ..

La modération est puissante en ce qu'elle nous permet de reconquérir notre légitimité : Plus nous sommes modérés, plus nous pouvons répondre par nous-mêmes à nos besoins fondamentaux et nous garder de l'aliénation. Elle concentre nos efforts sur l'essentiel, nous libère d'un système complexifié, et exalte le génie et la force de la simplicité. Elle libère du temps pour être et admirer, plutôt que de nous incarcérer dans le « produire » et le « consommer » et nous permet ainsi de répondre à notre véritable vocation.

La modération est puissante en ce qu'elle met en actes la conscience du lien immuable qui nous unit à la nature et à l'ensemble de l'humanité. Elle devient ainsi une posture de reliance et de solidarité : en étant modéré dans mes besoins, je permets à d'autres de satisfaire les leurs. Je me respecte, je respecte mes frères et sœurs humains, je respecte notre terre commune.

Je ne dis pas que le chemin vers la simplicité ou la sobriété est facile. Le système lui-même est pétrifiant et je comprends que bon nombre de personnes aient du mal à s'en extirper. Nous en sommes d'ailleurs tous complices, et alimentons au quotidien les multinationales par nos actes d'achat. Moi-même je ne m'éclaire pas à la bougie et ne roule pas en charrette. Mais il nous reste toujours un espace dans lequel nous avons une marge de choix : il incombe à chacun de se demander à quel moment il outrepassa la juste mesure. Car l'indispensable à la survie est par nature limité.

Il est évident qu'un changement de paradigme (6) est nécessaire pour la survie de notre espèce, remplaçant le respect de l'humain et de la nature au cœur de nos préoccupations, et que celui-ci ne pourra advenir sans la modération. La modération peut transformer le monde à condition qu'elle révèle une transformation sincère de l'être humain lui-même, retrouvant le sentiment profond d'appartenance à la réalité vivante universelle. Un être humain conscient, éveillé, faisant délibérément le choix de la modération, peut réellement participer à l'avènement d'un grand changement pour sortir de la logique que l'inintelligence continue à prôner et propager, au risque d'une impasse mortelle dans l'épopée historique du genre humain.

Il est difficile de définir ce qui fait une destinée humaine. Je vois mon propre itinéraire comme un chemin initiatique et n'aurais jamais pu imaginer que le petit orphelin du désert soit mené là où j'en suis aujourd'hui. Les multiples déchirements que j'ai subis auraient pu me faire tomber dans la révolte amère. J'ai préféré me mettre au service de l'amour et de la

vie. Je suis entré dans cette posture sacrée à partir du moment où j'ai compris que je pouvais prendre soin de la Terre-Mère, participer à sa régénération et à sa préservation pour le bien de tous, la respecter et l'honorer dans mes actes quotidiens. Aimer, prendre soin et rechercher la cohérence ont été pour moi des moteurs porteurs de sens et d'enthousiasme.

.../... En relisant les citations compilées ici, qui égrainent l'essentiel du message que je n'ai cessé de porter depuis plus de trente ans, je m'aperçois que la modération a toujours été au cœur de mon itinéraire, et que celui-ci s'apparente à une véritable insurrection contre la démesure, source de plus de frustrations que de satisfactions. Décidément, la modération est à l'évidence une puissance libératrice .../...

Je ne crois pas à la puissance des comptes en banque. La vraie puissance est dans la capacité d'une communauté humaine à se contenter de peu, mais à produire de la joie. Nous ne pouvons accéder au bonheur par la voie de la matière, mais peut-être par la subtilité des éléments qui sont en nous, par une posture de détachement, par le fait de se déligoter des choses qui nous appesantissent.

Aucun faste sous des lustres flamboyants de cristal, aucune manifestation de la vanité conquérante, aucune construction en luxueuse chimères, n'ont la force d'un humble foyer rassemblant des hommes et des femmes dans la simplicité et la bienveillance.

Les ressources demeureront toujours insuffisantes, tant que la justice, la modération, un humanisme authentique et une conscience radicalement différente, ne présideront pas à leur usage.

Mettons en route dès maintenant les processus qui permettront d'éviter une immense déconvenue. Car la finalité est inévitable : il faudra faire de la frugalité un nouveau paradigme.

Je suis frugal parce que j'ai conscience d'habiter une planète aux ressources limitées soumise à un pillage illimité. Je suis frugal parce que je veux me libérer de la surconsommation et m'affranchir du statut de consommateur manipulé, auquel l'idéologie de la marchandise veut me réduire. Je suis frugal parce que je ne veux pas contribuer à rendre la vie des générations à venir impossible.

La modération libère du temps pour un art de vivre. Le travail devient un labeur constructeur de sens et de bien-être physique et moral. Le temps de la puissance de la modération constitutive de l'essor d'un vivre ensemble généreux et solidaire, est aujourd'hui la seule évidence.

### **Changement, cheminement**

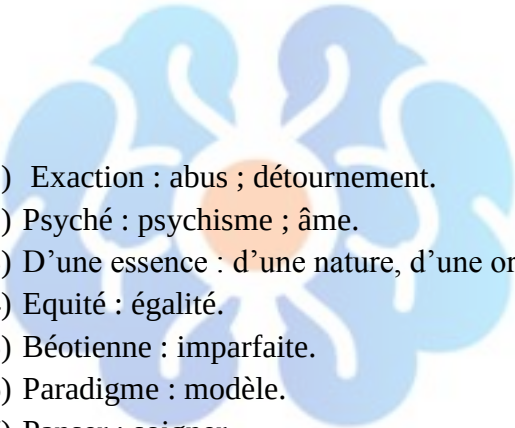


Tout changement implique le changement de soi, car si l'être humain ne change pas lui-même, il ne pourra changer durablement le monde dont il est le responsable. Nous oublions trop souvent que tout ce qui se produit dans le monde germe d'abord en chacun d'entre nous. Nos tourments sont à la racine de toutes les déviances de la société.

Si on admet que chacun d'entre nous est le monde, et que le monde est chacun de nous, instaurer la paix en soi, c'est contribuer à la paix dans le monde. Et nous voici affranchis de l'impuissance. Au lieu de nous positionner en victimes ou de chercher des boucs émissaires, nous cherchons et expérimentons des solutions.

Il y a en chacun de nous un tyran et une victime. Ces failles, si nous ne les accueillons pas pour les penser et les panser (7), font le lit des idéologies, du dogmatisme religieux, du conformisme militant. On se cherche un sauveur, une appartenance, une ligne de conduite, et l'on néglige de prendre sa part de responsabilité à l'égard de soi et des autres.

Bien sûr qu'il y a des protestations nécessaires, mais l'idéal est une détermination paisible, qui nous engage en notre âme et conscience et dans notre libre arbitre, à participer avec toute l'énergie dont nous disposons au changement du monde.

- 
- (1) Exaction : abus ; détournement.
  - (2) Psyché : psychisme ; âme.
  - (3) D'une essence : d'une nature, d'une origine.
  - (4) Equité : égalité.
  - (5) Béotienne : imparfaite.
  - (6) Paradigme : modèle.
  - (7) Panser : soigner.

\*Pierre RABHI est né en 1938 en Algérie. Il est auteur, conférencier et philosophe, et l'un des pionniers de l'agriculture écologique en France.



Avril 2016

## CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

### Exercice I.

Soient les suites réelles  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1). \quad (1)$$

- On calcule le polynôme caractéristique  $\chi_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - 3t^2 - 22t + 24 = (t-1)(t-6)(t+4)$ . Ainsi, la matrice  $A$  admet trois valeurs propres distinctes  $Sp(A) = \{1, 6, -4\}$ , elle est donc diagonalisable. On peut également justifier que  $A$  est diagonalisable par le fait qu'elle soit symétrique à coefficients réels.

- Pour chacune des valeurs propres de  $A$ , on détermine le sous-espace propre associé.

- Pour  $\lambda_1 = 1$ , notons  $E_1$  le sous-espace propre associé à  $\lambda_1$  :  $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$ , où  $I_3$  est la matrice identité de  $M_3(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3) \iff \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x + 4z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases}.$$

On trouve que  $(x, y, z) \in E_1 \iff \{y = 0, z = -\frac{3}{4}x \text{ et } x \text{ est quelconque}\}$ , d'où, si on prend  $x = -4$ , on trouve que le sous-espace propre  $E_1$

associé à la v.p.  $\lambda_1 = 1$  a pour base  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1\}$  avec  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- Pour  $\lambda_2 = 6$ , notons  $E_2$  le sous-espace propre associé à  $\lambda_2$  :  $E_2 = \text{Ker}(A - 6I_3)$ . On trouve  $E_2 = \text{Vect}\{\vec{b}_2\}$  avec  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- Pour  $\lambda_3 = -4$ , le sous-espace propre  $E_3$  associé à  $\lambda_3$  est  $E_3 = \text{Ker}(A + 4I_3)$ . On trouve  $E_3 = \text{Vect}\{\vec{b}_3\}$  avec  $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

On a donc que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ . On a  $A^0 = PD^0P^{-1}$ , donc la relation est satisfaite pour  $n = 0$ . Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ , alors  $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$ . D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

Après calcul, on obtient,  $P^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

puis,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 32 + 9(-4)^n + 9 \cdot 6^n & -15((-4)^n - 6^n) & 12(-2 + (-4)^n + 6^n) \\ -15((-4)^n - 6^n) & 25((-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) \\ 12(-2 + (-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) & 18 + 16((-4)^n + 6^n) \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Le système d'équation (1)

s'écrit alors  $X_{n+1} = AX_n$ , et on montre par récurrence que  $X_n = A^n X_0$ ,

où  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Après simplifications, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{50}(8 + 21((-4)^n + 6^n)), \quad v_n = \frac{-7}{10}((-4)^n - 6^n) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{25}(-3 + 14((-4)^n + 6^n)).$$

## Exercice II.

On effectue le changement de variable en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}, \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta.$$

qui conduit au nouveau domaine d'intégration suivant :  $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ .

Ainsi,

$$I = \int \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta.$$

Puis, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$I = 2\pi \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} r = 2\pi \frac{1}{2} \left[ \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln(2).$$

### Problème III.

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème,  $\sum f_n$  est une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

- 1- (a) La série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ , la série numérique à termes positifs  $\sum |f_n(x)|$  converge.
- (b) La série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si la suite de fonctions  $\left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$ . C'est-à-dire, qu'il existe une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| = 0.$$
- (c) La série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si la série numérique à termes positifs  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge, où  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|/x \in I\}$ , appelée norme de la convergence uniforme.
- (d)  $\forall x \in I$ ,  $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$  et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si  $\sum f_n$  converge normalement, alors pour tout  $x$  de  $I$ , la série  $\sum |f_n(x)|$  converge, i.e. la série  $\sum f_n$  converge absolument.
- (e) Pour  $x$  dans  $I$  notons  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ . Alors  $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ .

Comme la série  $\sum f_n$  convergeant normalement, la suite  $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$  converge vers 0 et ne dépend pas de  $x$ , ce qui prouve que la suite des restes  $(R_n(x))_n$  converge uniformément vers 0 sur  $I$ , i.e. la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

- (f) On pose pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2}\right)$ .

Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$  et donc la suite  $(|f_n(x)|)_n$  décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I = [0, 1]$ .

Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout  $x \in I$ ,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}\right) = 0$ , la suite  $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers 0, c'est à dire la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I = [0, 1]$ .

Montrons que la série de fonctions  $\sum f_n$  ne converge absolument en aucune valeur de  $[0, 1]$ . Pour  $x$  fixé,  $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$ . La série

$\sum \frac{x^2}{n^2}$  converge (série de Riemann) mais la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge (série harmonique), et donc la série  $\sum |f_n(x)|$  diverge ; ce qui prouve que la série  $\sum f_n$  ne converge pas absolument sur  $I$ .

2- Dans toute cette partie,  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est une suite décroissante de réels positifs,  $I = [0, 1[$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$ .

(a) La suite  $(\alpha_n)$  décroît et est positive, donc  $\forall n$ ,  $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_0$ . La suite  $(\alpha_n)_n$  est donc bornée.

Pour  $x = 0$  et  $x = 1$  la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est clairement nulle. Supposons que  $0 < x < 1$ , pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \alpha_n x^n (1 - x) \leq \alpha_0 (1 - x) x^n$ , et  $\sum \alpha_0 (1 - x) x^n = \alpha_0 (1 - x) \sum x^n$ . La série géométrique  $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$  de raison  $0 < x < 1$  est convergente. On en déduit par comparaison de séries à termes positifs, que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

(b) (i)- Pour tout  $x \in I$ ,  $f'_n(x) = \alpha_n (n x^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1} (n - x(n+1))$ . On étudie ensuite la variation de  $f_n$  et on montre que la fonction  $f_n$  est positive et atteint son maximum sur  $I$  au point  $\frac{n}{n+1}$ .

On a  $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ , ce qui implique que  $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ .

(ii)- On a  $\|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$ . Ainsi,  $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{ne}$ , et par comparaison de séries positives,  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge si et seulement si  $\sum \frac{\alpha_n}{n}$  converge.

Reste à montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$ . On a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1) \ln(1 - \frac{1}{n+1})}.$$

Or  $(n+1) \ln(1 - \frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$ . D'où le résultat.

(c) (i)- Pour  $x = 1$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = +\infty$  et pour  $0 \leq x < 1$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ .

(ii)- Pour  $x = 1$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1 - x) = 0$ .

Supposons que  $0 \leq x < 1$ . Puisque la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante, pour tout  $k \geq n+1$ ,  $\alpha_k \leq \alpha_{n+1} \Rightarrow \alpha_k x^k (1 - x) \leq \alpha_{n+1} (1 - x) x^k$ ,

pour tout  $k \geq n+1$ , et donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &= \alpha_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

La suite des restes  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$  est donc positive et majorée par la suite  $(\alpha_{n+k})_{k \geq 0}$ , qui ne dépend pas de  $x$  et qui converge vers 0. On en déduit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément.

(iii)- Comme la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est convergente. Posons  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ , on a  $\ell \geq 0$ .

Supposon que  $\ell > 0$  et étudions la suite des restes  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$ . Pour  $x = 1$ , on a  $R_n(1) = 0$ , supposons  $0 \leq x < 1$ . Comme pour tout  $n$ ,  $\alpha_n \geq \ell > 0$ , on a  $R_n(x) \geq \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$ . En particulier, pour  $x = 1 - \frac{1}{n+1}$ , on obtient  $R_n(1 - \frac{1}{n+1}) \geq \ell(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$  qui converge vers  $\frac{\ell}{e}$ , i.e.  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon + \frac{\ell}{e} \leq \ell(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \varepsilon + \frac{\ell}{e}$ . Ceci implique en prenant  $\varepsilon = \frac{\ell}{2e}$ , qu'il existe un entier  $n_0 > 1$ , telle que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $R_n(1 - \frac{1}{n+1}) \geq \frac{\ell}{2e}$ , ce qui montre que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle ; d'où une contradiction avec l'hypothèse. Nous avons donc montré que si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0. Nous avons l'équivalence de ces deux propositions d'après la question précédente.

**3-** (Fonction  $\zeta$  de Riemann). Soit  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

(a) Pour  $x$  réel donné, la série de terme général  $\frac{1}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , converge si et seulement si  $x > 1$  (c'est la série de Riemann). En effet, pour  $x \leq 0$  le terme général ne tend pas vers 0 et la série est divergente. Pour  $x > 0$ , on utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{t^x}$  sur l'intervalle  $[k, k+1[$  ( $k \geq 1$ ), on a  $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x}$ . D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre ( $k = 1, \dots, k = n$ ) on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}.$$

La série  $\zeta(x)$  est alors de même nature que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$  qui converge si et seulement si  $x > 1$ . Donc  $D = ]1, +\infty[$ .

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $f_n : ]1, +\infty[$  définie par  $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tous  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]1, +\infty[$ ,  

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Soit  $1 < a < +\infty$  fixé. Puisque la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$  est convergente, les séries  $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$  sont normalement, donc uniformément convergentes sur  $[a, +\infty[$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, +\infty[$  et que  $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$  pour tout  $x \in [a, +\infty[$ . Comme  $1 < a < +\infty$  est arbitrairement pris, on en déduit que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et que  $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$  pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ .

- (c) D'après la question précédente, la fonction  $\zeta$  est deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$  et

$$(\zeta)''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0.$$

Donc la fonction  $\zeta$  est convexe.

- (d) Fixons  $a > 1$ , d'après la question (a), (ii)-, la série de fonctions de somme  $\zeta$  converge uniformément vers  $\zeta$  sur  $[a, +\infty[$ . De plus, chacune des fonctions  $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , à savoir  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  si  $n \geq 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$ . Le théorème d'interversion des limites permet alors d'affirmer que la fonction  $\zeta$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = 1 + 0 + \dots + 0 \dots = 1.$$

- (e) Nous avons démontré dans la question (a), (i)- que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 1$ ,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x},$$

ce qui implique par passage à la limite en  $n$  que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x},$$

puis en calculant  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$  que pour tout  $x > 1$ ,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

et puisque  $\lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ , on obtient que  $\lim_{x \rightarrow +1^+} \zeta(x) = +\infty$ , car en effet, pour tout  $M > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que  $1 < x < 1 + \eta \implies \zeta(x) \geq \frac{1}{x-1} > M$ .

4- Soient  $g_n(x) = (-1)^n \cos^n x$ ,  $V_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$  et  $W_n = \int_0^{\pi/2} g_n(x) \, dx$ .

- (a) - Si  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ , alors  $|\cos x| < 1$ , et la série  $g(x)$  converge absolument (c'est la série géométrique de raison  $\cos x$ ).  
 - Si  $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$ , alors  $\cos x = 1$  ou  $\cos x = -1$ , et donc la série  $g(x)$  diverge (le terme général ne tend pas vers 0).
- (b) Soient  $n \leq m$  deux entiers naturels, on a  $\forall x \in [0, \pi/2]$ ,  $\cos(x) \in [0, 1] \implies \forall x \in [0, \pi/2]$ ,  $\cos^n(x) \geq \cos^m(x) \geq 0 \implies V_n \geq V_m \geq 0$ .  
 Soit  $0 < \varepsilon < \pi/2$ , on a  $0 < \cos(\varepsilon/2) < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(\varepsilon/2) = 0$ , il existe alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N \implies \cos^n(\varepsilon/2) \leq \frac{\varepsilon}{\pi},$$

ce qui implique par la monotonie de  $\cos$  sur  $[0, \pi/2]$  que

$$n > N \implies \forall x \in [\varepsilon/2, \pi/2], \cos^n x \leq \cos^n(\varepsilon/2) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}. \quad (2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx &= \int_0^{\varepsilon/2} \cos^n(x) \, dx + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2) pour majorer l'intégrale sur  $[\varepsilon/2, \pi/2]$  et le fait que la fonction  $\cos$  est bornée par 1 pour majorer l'intégrale sur  $[0, \varepsilon/2]$ .

Puisque  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit, on a bien la convergence vers zéro de la suite  $(V_n)_{n \geq 0}$ .

- (c) La série de terme général  $W_n$  converge d'après le théorème sur les séries alternées.
- (d) Pour tout  $a \in [0, 1]$ , on pose

$$A_n = (-1)^n \int_0^a \cos^n x \, dx \quad \text{et} \quad B_n = (-1)^n \int_a^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

- (i) La série  $\sum_n g_n$  converge normalement sur  $[a, \pi/2]$  car

$$\sup_{x \in [a, \pi/2]} |(-1)^n \cos^n x| = \cos^n a$$

et la série de termes positifs  $\cos^n a$  converge  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n a = \frac{1}{1 - \cos a} \right)$ .

La série converge donc uniformément sur  $[a, \pi/2]$  d'après la question 1-, (e).



- (ii) Soit  $0 < a < \pi/2$ . Puisque  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge uniformément sur  $[a, \pi/2]$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cos^k x \right) dx = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx.$$

Effécturons le changement de variable

$$u = \tan(a/2), \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad dx = \frac{2}{1 + u^2} du,$$

on obtient

$$\int_a^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int_{\tan(a/2)}^1 du = 1 - \tan(a/2).$$

D'où le résultat.

- (iii) Soit  $0 < a < \pi/2$ . On montre comme dans les questions 1-, (b) et 1-, (c) que la série de terme général  $A_n(a)$  est alternée. D'après le critère des séries alternées, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq |A_{n+1}(a)| = \int_0^a \cos^{n+1}(x) dx \leq a.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en particulier pour  $n = 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) \leq a$$

$$\text{d'où } \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0.$$

- (e) Pour tout  $0 < a < \pi/2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = A_n(a) + B_n(a)$ . Puisque les séries de terme général  $A_n(a)$  et  $B_n(a)$  converge, on a Pour tout  $0 < a < \pi/2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(a).$$

Puisque  $a$  est arbitrairement choisi dans  $]0, \pi/2[$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$  ne dépend pas de  $a$ , d'après les questions 4-, (d), (ii) et 4-, (d), (iii),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \lim_{a \rightarrow 0} (1 - \tan(a/2)) = 1.$$

## CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

### ITS voie B Option Mathématiques

### CORRIGÉ DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

**Les exercices sont indépendants.**

#### Exercice n° 1

Soit la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :  $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$

1. Étudier les variations et tracer le graphe de  $f$

On remarque que la fonction est paire et donc que son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude sur les nombres réels strictement positifs. Sa dérivée est égale

à :  $f'(x) = \frac{e^{-x^2}(-4x^2 - 1)}{2x\sqrt{x}} < 0$ . La fonction est donc strictement décroissante de  $+\infty$  à zéro sur les réels positifs. Les axes sont des asymptotes.

2. Étudier la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

On remarque que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

En 0 :  $f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$ , donc convergente

En  $+\infty$  :  $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} = 0$  et l'intégrale est convergente.

3. Pour  $\alpha > 0$ , on pose  $f_\alpha(x) = \frac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$ . Étudier les variations de  $f_\alpha$  et la convergence de

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ .

La fonction  $f_\alpha$  est strictement décroissante sur les réels positifs (résultats analogues à ceux pour  $f$ ).

En 0 :  $f_\alpha(x) \approx \frac{1}{x^\alpha}$ , donc convergente si et seulement si  $0 < \alpha < 1$ ,

En  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2-\alpha} f_\alpha(x) = 0$  pour  $0 < \alpha < 1$  et l'intégrale est convergente pour  $0 < \alpha < 1$

## Exercice n° 2

Pour  $m > 0$ , on pose  $f_m(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^m} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de  $m$  la fonction  $f_m$  est-elle continue ? (On notera  $f$  la fonction qui correspond à la valeur de  $m$  ainsi trouvée).

Tout le problème est uniquement en 0.

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-m} = f_m(0) = 1$  si et seulement si  $m=1$ . Dans toute la suite de l'exercice, on fixe  $m=1$  et on note  $f$  cette fonction.

2. Étudier la dérivabilité de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6}\right) = 0 = f'(0)$$

3. Étudier la continuité de la dérivée de  $f$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - x^2/2) - (x - x^3/6)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x/3) = 0 = f'(0)$$

4.  $f$  a-t-elle une dérivée seconde continue ?

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - x^2/2) - (x - x^3/6)}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{On a : } f''(x) = \frac{-x^3 \sin x - 2x^2 \cos x + 2x \sin x}{x^4} \approx \frac{-x^4 + 2x^4 - x^4/3}{x^4} \rightarrow -\frac{1}{3} = f''(0)$$

En conclusion la fonction (pour  $m=1$ ) est de classe  $C^2$ .

## Exercice n° 3

On considère deux suites de nombres réels définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases} \text{ et } u_0, v_0 \text{ sont donnés quelconque.}$$

1. Exprimer  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $n$ .

$$\text{On a : } u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) = 2^{n+1}(u_0 + v_0) \text{ et } 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_0 + 2v_0$$

$$\text{Par conséquent : } u_{n+1} = -2^{n+2}(u_0 + v_0) + 3u_0 + 2v_0 \text{ et } v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1}(u_0 + v_0) - 3u_0 - 2v_0$$

2. Étudier la convergence de ces deux suites

Si  $u_0 + v_0 = 0$ , alors  $u_{n+1} = 3u_0 + 2v_0 = -v_{n+1}$  (suites stationnaires)

Si  $u_0 + v_0 > 0$ , alors  $u_n \rightarrow -\infty$ ,  $v_n \rightarrow +\infty$

Si  $u_0 + v_0 < 0$ , alors  $u_n \rightarrow +\infty$ ,  $v_n \rightarrow -\infty$

## Exercice n° 4

On considère la matrice  $M$  définie par :  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de  $M$  (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera  $D$  la matrice diagonale semblable à  $M$ )

On a :  $\det(M - \lambda I) = \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-2\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix}$ . On ajoute la troisième colonne à la

première pour obtenir :  $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix} = 0$

Puis on retranche la première ligne à la troisième pour obtenir :

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-2\lambda \end{pmatrix} = 0$ , d'où

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)(4-2\lambda)(2-2\lambda) = 0$ , soit  $\lambda = 1, 2$  ou  $3$

Comme la matrice admet 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable.

Elle est semblable à la matrice  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  avec comme matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice  $M$  associé à la valeur propre 3. On notera  $P_X$  cette matrice.

Posons  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , la matrice de projection est égale à :  $P_X = X(X'X)^{-1} X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice  $M$  associés aux valeurs propres 2 et 3.

On notera  $P_Y$  cette matrice.

De la même façon, posons  $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient  $(Y'Y) = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$  et

$$(Y'Y)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

La matrice de projection est égale à :  $P_Y = Y(Y'Y)^{-1} Y' = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer les produits  $P_X P_Y$  et  $P_Y P_X$

On obtient  $P_X P_Y = P_Y P_X = P_Y$

5. Parmi les matrices suivantes :  $M, D, P_X, P_Y$ , quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur  $R^3$  ?

Il faut que la matrice soit symétrique définie positive, seule  $D$  vérifie cette propriété.

## Exercice n° 5

Soit la matrice  $M$  définie par :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire associée à  $M$ .

Il suffit de résoudre le système pour obtenir :  $x + y + z = 0$ ;  $y + 2z = 0$ . Le noyau est une droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, -2, 1)$ .

2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?

$$\text{On a : } \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda + 6) = 0$$

La matrice admet trois valeurs propres distinctes  $(0, \frac{9 \pm \sqrt{105}}{2})$ , elle est donc diagonalisable (on pouvait aussi remarquer qu'elle est symétrique).

3. Déterminer une base de l'orthogonal du noyau de  $M$ .

Il suffit de trouver deux vecteurs indépendants orthogonaux à  $(1, -2, 1)$ .

Par exemple :  $(1, 0, -1)$  et  $(2, 1, 0)$ , soit le plan d'équation :  $x - 2y + z = 0$ . Ce que l'on pouvait aussi trouver directement.

4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles.

Comme la matrice est symétrique et les valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Par conséquent on obtient le même résultat qu'à la question précédente : le plan d'équation  $x - 2y + z = 0$ .

$$5. \text{Résoudre le système } \begin{cases} x + 2y + 3z = m \\ 2x + 3y + 4z = 2m \\ 3x + 4y + 5z = 3m \end{cases}, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On obtient, de façon triviale, une droite affine comme solution, à savoir :  $x = z + m$  ;  $x + y + z = m$

## Exercice n° 6

1. Pour  $n$  entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique suivante :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}. \text{ Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.}$$

Si  $n$  est pair, la fonction est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe verticale.

Si  $n$  est impair, la fonction est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier la fonction sur les réels positifs.

La dérivée est égale à :  $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(1+x^2)^2} [n + (n-2)x^2]$  qui est positive pour  $x > 0$ . La fonction est donc croissante avec une branche parabolique dans la direction  $oy$  et une tangente horizontale à l'origine.

2. Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  pour  $n$  entier naturel. Calculer  $I_0, I_1, I_2$

Les calculs sont évidents :  $I_0 = \frac{\pi}{4}$ ;  $I_1 = \ln\sqrt{2}$ ;  $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

3. Calculer  $I_n$  et  $J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  pour tout  $n$ .

$$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1-1)}{1+x^2} dx = \frac{1}{n+1} - I_n$$

$$I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \dots + (-1)^n \frac{\pi}{4} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \dots + (-1)^n \ln\sqrt{2}$$

Si  $n$  est impair, la fonction est impaire et  $J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$

Si  $n$  est pair, la fonction est paire et  $J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 2I_n$

4. Étudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$  et  $u_0$  un nombre réel quelconque.

Pour  $n > 1$ ,  $u_n > 0$  (récurrence évidente). Si  $u_0 = 0$ , la suite est stationnaire égale à zéro.

Si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , alors cette limite vérifie :  $l = \frac{l^2}{1+l^2}$ , soit  $l=0$ .

On a :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1+u_n^2} < 1$ . La suite est décroissante et minorée, donc elle converge vers zéro.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ISSEA-YAOUNDE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

**Exercice.**

On considère le système différentiel de fonctions inconnues  $x, y$  et de variable  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  et en déduire que la matrice  $B = A - 2I_2$  est nilpotente, où  $I_2$  est la matrice identité.
2. En utilisant sans démonstration l'égalité  $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$ , valable pour tout réel  $t$ , donner l'expression de la matrice  $e^{tA}$ .
3. En utilisant ce qui précède, trouver la solution du système différentiel vérifiant

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$



## Problème.

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

### Partie I

On considère la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  de la variable complexe  $z$ , où  $s$  est un nombre réel donné.

- Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- On suppose que  $z = e^{i\theta}$  est un nombre complexe de module 1. Étudier la convergence de  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  dans le cas où  $s > 1$  ainsi que dans le cas où  $s \leq 0$ .
- On suppose que  $0 < s \leq 1$ . Étudier la convergence de  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  pour  $z = 1$ .
- On suppose toujours que  $0 < s \leq 1$  et  $z = e^{i\theta}$  est un nombre complexe de module 1. On suppose de plus que  $z \neq 1$ . On pose  $S_0 = 0$  et pour tout nombre entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n z^k$ .
  - Montrer que  $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - En écrivant  $z^k$  sous la forme  $S_k - S_{k-1}$  pour tout nombre entier  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}] + S_n n^{-s}.$$

- Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n [n^{-s} - (n+1)^{-s}]$  est convergente et en déduire que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  est convergente.

Nous noterons dorénavant  $\varphi(z, s)$  la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  pour tout couple  $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  pour lequel cette série est convergente :

$$\varphi(z, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n. \quad (1)$$

- On note  $I$  l'intervalle ouvert  $I = ]-1, 1[$  de  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que pour tout  $(x, s) \in I \times \mathbb{R}$  on a  $\varphi(x, s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$ .

(b) Calculer  $\varphi(x, 0)$  et  $\varphi(x, 1)$  pour tout  $x \in I$ .

6. On suppose dans cette question que  $s > 1$ . On définit alors  $\Gamma(s)$  par l'intégrale

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

(i) Calculer  $\Gamma(2)$ .

(ii) Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $f_n(t) = e^{-nt} t^{s-1}$ .  
Montrer que  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et exprimer  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  à l'aide de  $n, s$  et l'intégrale  $\Gamma(s)$ .

(iii) Soit  $z$  un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$  de fonctions de la variable réelle  $t$  est intégrable terme à terme sur  $]0, +\infty[$ .  
En déduire que pour tout  $s > 1$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ , on a

$$\varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

## Partie II

Pour tout nombre réel  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \varphi(1, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ , où  $\varphi$  a été définie dans la partie I par la formule (1).

1. Montrer que  $\zeta$  est une fonction indéfiniment dérivable de la variable  $s$  sur  $]1, +\infty[$ .
2. Montrer que  $\zeta$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .
3. Montrer que pour tout  $s \in ]1, +\infty[$ , on a :

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s).$$

En déduire la limite de  $\zeta(s)$  lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$ . Déterminer un équivalent de  $\zeta(s)$  lorsque  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

### Partie III

1. Soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

**a-** Montrer que  $g$  est paire.

**b-** Développer  $g$  en série de Fourier réelle.

**c-** Étudier l'égalité entre  $g$  et la somme de sa série de Fourier.

**d-** Calculer les valeurs de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$ , où  $\zeta$  est la fonction définie dans la partie précédente.

2. Soit  $\theta$  un nombre réel. On note  $R_\varphi(\theta)$  la partie réelle de  $\varphi(e^{i\theta}, 2)$ , où  $\varphi$  est la fonction définie dans la partie I par la formule (1).

**a-** Exprimez  $R_\varphi(\theta)$  à l'aide de  $g(\theta)$ .

**b-** En déduire que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

**c-** Déduire de ce qui précède la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt.$$

**d-** On rappelle que  $\text{sh}$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

$$\text{Calculer l'intégrale } I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt$$

*Indication : on pourra considérer  $I_1 + I_2$ .*

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

**ORDRE GÉNÉRAL**  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Modernité et tradition, clivage ou complémentarité ?

**Sujet n° 2**

Explicitez la citation de Simone Weil, philosophe française, « *La joie est notre évasion hors du temps* ». (La connaissance surnaturelle - 1942)

**Sujet n° 3**

Les frontières sont-elles nécessaires ?

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices sont indépendants. Dans toute la composition,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.

**Exercice n° 1**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $R^+$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.
2. Pour  $x > 0$  et tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n(x) = \sqrt{\frac{x^n}{x+1}}$ . Etudier la suite  $(u_n(x))$  selon les valeurs de  $x$ .
3. Calculer  $I = \int_0^1 f(x) dx$

**Exercice n° 2**

Pour  $a \in R$ , on définit la matrice  $M(a)$ , carrée d'ordre 3, par :  $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour  $b \in R$ , calculer le produit  $M(a)M(b)$
2. Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $M^n(a)$

3. La matrice  $M(a)$  est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

4. La matrice  $M(a)$  est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale semblable.

### Exercice n° 3

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de  $M_t$
2. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes :
  - $M_t$  est-elle diagonalisable ?
  - $M_t$  est-elle inversible ?
  - $M_t$  peut-elle être associée à une projection orthogonale dans  $\mathbb{R}^3$  ?
  - $M_t$  peut-elle être associée à une symétrie dans  $\mathbb{R}^3$  ?

3. On considère la suite de matrices  $(M_n(t))$  définie par :

$$M_1(t) = M_t \text{ et } M_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^n & t^{n+1} \\ t^n & t^{n+1} & t^{n+2} \\ t^{n+1} & t^{n+2} & t^{n+3} \end{pmatrix}$$

Etudier cette suite.

### Exercice n° 4

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \ln(1+x^2)$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

2. Calculer  $I = \int_0^1 x f(x) dx$

3. Résoudre l'équation :  $f(x) = 1 + x^2$

### Exercice n° 5

Pour  $n$  entier strictement positif, on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0,1]$  par

$$f_n(x) = x^n - (1-x)^2$$

1. Etudier la monotonie de  $f_n$
2. Montrer que  $f_n$  admet une unique racine, que l'on notera  $\alpha_n$
3. Quel est le signe de  $f_{n+1}(\alpha_n)$  ?
4. On considère la suite de terme général  $\alpha_n$ 
  - Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est convergente.
  - Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .
5. Donner l'allure du graphe de  $f_n$  pour  $n > 2$  (on précisera la convexité et l'évolution du graphe quand  $n \rightarrow \infty$ ).
6. Soit  $I_n = \int_{\alpha_n}^1 f_n(x) dx$ . Calculer  $I_n$  ainsi que sa limite quand  $n \rightarrow \infty$

### Exercice n° 6

Soit  $f$  une fonction numérique définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Etudier la monotonie de  $f$
2. En supposant que  $f$  est strictement croissante, montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. On suppose, dans cette question, qu'il existe un couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , avec  $a < b$ , et tel que  $f([a, b]) \subset [a, b]$ 
  - Montrer que  $f$  admet un point fixe sur  $[a, b]$
  - On suppose que  $f$  est croissante, en déduire la forme de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[a, b]$  (qui sera notée  $f_{[a, b]}$ )
  - On suppose  $f$  décroissante, déterminer  $f_{[a, b]}$
4. On suppose que  $f$  est croissante.
  - On suppose de plus que pour tout  $x$ ,  $f(x) < x$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - Que peut-on dire si pour tout  $x$ ,  $f(x) > x$  ?



AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

**CONTRACTION DE TEXTE**  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jean-Louis SERVAN-SCHREIBER, intitulé :  
« C'est la vie ! », paru aux éditions Albin Michel en avril 2015.

*Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Il sera tenu compte de  
l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.*

**MON MONDE : unique**

Même au milieu des autres, j'habite un monde qui n'appartient qu'à moi. Il est contenu en totalité dans mon cerveau et dans mon corps ; il est le produit de mes perceptions, de mes sensations, de mes pensées, de mes sentiments, de mes souvenirs, de mes connaissances et de mes ignorances. Fait de tout ce que je reçois du monde extérieur. Il est mon équipement pour y vivre. Il en est ainsi dans mon rapport à tout autre être humain, comme à tout ce que j'ai rencontré et expérimenté, au gré des jours, depuis que je suis né.

Une illusion est commune à tous : il semble si naturel de croire que les autres perçoivent le même monde que moi. Or ce qui me semble évident, aller de soi, ne l'est pas pour un autre. Comprendre cela désoriente d'abord, remet en cause mes idées reçues. Mais, une fois que je l'ai admis, je suis devenu plus tolérant en même temps que plus intéressé par l'infinie diversité de nos points de vue.

Mon cerveau est fort limité en mémoire comme en capacité à manier les idées. Mais ce qu'il a emmagasiné depuis ma naissance, ou produit en combinant tout ce qu'il a perçu, compris, retenu, est déjà si foisonnant en moi, que je ne peux en exprimer, en décrire, en partager avec d'autres qu'une infime partie. Laquelle est filtrée par celui qui m'écoute ou me lit selon ses propres critères, différents des miens. Je pense souvent que c'est une chance et une prouesse improbable de se comprendre entre nous autrement que par bribes.

Quelle que soit ma richesse intérieure, je ne peux tenter de la communiquer que par le maigre filet de mes mots, mes intonations, mes gestes ou mes intonations de visage. Il en est de

même pour chacun de nous, puisque nous sommes tous porteurs de notre univers, complexe, unique, et qui restera largement inexploré, y compris par nous. Je ne prends pourtant pas cette évidence au tragique. Elle est constitutive de nous tous, humains, et nous parvenons bien à vivre ainsi. Ces mondes élaborés par chaque bipède de notre espèce pour son propre usage, sont plus ou moins originaux, intéressants ou agréables à habiter. Toutefois, c'est là que nous passons nos vies, seuls dans notre monde, mais en compagnie des autres.

Mon monde est l'œuvre de ma vie. Je le meuble, le complète, le modifie chaque jour, au gré de mes expériences et de mes idées. Au début, une cire vierge. Mes premiers souvenirs, à partir de trois ou quatre ans, étaient en forme de point d'interrogation. Qui sont ces gens qui viennent voir mes parents ? Comment répondre à ce que l'on me dit ? Qu'est-ce qui est important ? Qu'est-ce que j'ai le droit de faire ? Et toujours et encore : comment ça marche, depuis les rapports avec les autres jusqu'aux objets que je les vois utiliser ?

En thérapie, on commence par explorer l'enfance, car dans nos débuts de la vie tout s'inscrit plus durablement. Puis ce que l'on apprend en vivant s'empile et forme vite un humus si épais que chaque nouvelle couche recouvre et occulte une partie de celles qui l'ont précédée. Mais le socle des impressions d'enfance reste le plus déterminant pour notre avenir.

Etudes, relations, responsabilités, découvertes, déceptions, joies, mon monde s'est ensuite constamment élargi, approfondi. Souvent en désordre et sans que j'aie toujours pu prendre le temps de bien comprendre ou situer ce qui se déposait ainsi en moi. Le résultat de cette imprégnation est forcément personnel, puisque j'en suis l'auteur et l'acteur. En même temps, le processus en est banal, car c'est ainsi que chacun s'élabore lui-même.

Nous construisons tous notre propre monde à partir des éléments communs à tous les autres, ceux du réel extérieur, trié par nos goûts, intérêts et valeurs. Le tout pimenté par les hasards de notre vécu. Comme nous ne pouvons connaître qu'une fraction de la complexité des autres et que nous ne sommes que partiellement conscients de la nôtre, on mesure combien communiquer mobilise une part essentielle de nos énergies et de nos talents. Et que les résultats ne peuvent en être qu'approximatifs.

Ce monde, le mien, est déterminé par mes capacités à savoir, comprendre, mémoriser, voir, écouter. Lesquelles sont restreintes. Nous les humains, qui nous désignons comme des semblables, sommes surtout dissemblables, par nos capacités et nos cheminements si différents.

Nos mondes ont-ils des richesses et des profondeurs variées selon nos aptitudes ? A l'évidence oui. Nous connaissons nombre de nos semblables dont nous admirons l'univers intérieur, plus large et nourri que le nôtre. Mais aussi d'autres dont le monde nous paraît bien étriqué. Chacun se construit une demeure à la mesure de ses moyens et de ce qui l'entoure, comme la chèvre broute autour de son piquet.

Certains astrophysiciens avancent des théories, dites des « multivers », selon lesquelles notre univers ne serait qu'un parmi d'autres. Je le constate à ma toute petite échelle personnelle. Mon propre univers existe dans ma tête, mais il y en a autant que d'humains vivant en même temps que moi. Si je ne pouvais concevoir au-delà du mien, j'y resterais enfermé. Heureusement mon monde personnel tient aussi compte, au moins un peu, de l'existence de

ceux de tous mes semblables. Pas étonnant que l'on réalise aujourd'hui qu'il faut prendre de plus en plus en compte la complexité.

Cette singularité me rend unique, donc seul, même si je suis entouré par d'autres, dont la présence m'est agréable autant que vitale. Raison pour laquelle nous parvenons à bien vivre tous côte à côte. Une proximité n'est pas une connaissance, mais elle nous aide à palier notre solitude existentielle. Il n'y a pas là de quoi dramatiser cette condition, puisque la solitude est constitutive de notre condition d'humains autonomes. Mais si nous sommes par nature seuls, nous nous efforçons d'éviter d'être isolés.

En fait cette singularité/solitude est providentielle, car si les autres étaient et voyaient exactement comme moi, que pourraient-ils m'apporter ? Quand on fait une rencontre, on se raconte, on échange des informations et des impressions. C'est alors que je peux choisir soit d'aller plus loin dans la relation, soit, le cas le plus fréquent, d'en rester là. Mais en même temps que j'en apprend plus sur nos différences, j'explore les éventuelles similitudes et affinités. Une relation féconde se nourrit à la fois de nos dissemblances, grâce auxquelles l'autre nous complète, et de nos ressemblances qui rendent tentants les rapprochements. Là, comme dans tant de situations de la vie, j'essaie de trouver le juste équilibre entre des pôles qui peuvent paraître inconciliables.

Cet effort même rend ma vie plus intéressante. Que l'autre vive dans un monde qui lui est propre en fait à la fois sa complexité et sa richesse. Entrer en relation avec quiconque fait de moi un explorateur.

### **[...] L'AUTRE : un peu moi**

Je dois tout aux autres. Parce que certains sont un peu moi, parce que tout ce que je sais, tout ce qui me permet de vivre me vient d'eux. Surtout dans une société d'aujourd'hui, produite et entretenue par un travail collectif incessant de milliards d'entre nous.

Seul, je ne peux pas me nourrir, me loger, me déplacer, m'instruire, me soigner, me divertir, ni surtout échapper à l'isolement. Ceux du passé ont construit ce pays où je me sens à l'aise. Ils m'ont légué des pensées, des traditions, des principes, des inventions qui rendent ma vie agréable ou simplement possible. Mes contemporains créent et fabriquent tout ce dont je peux avoir besoin et que je serais bien incapable de faire seul. Vivre grâce à tout ce qui me vient d'eux me remet à ma juste place : celle d'une minuscule partie d'un ensemble infiniment complexe.

Au-delà de ces évidences utilitaires mais nécessaires, les autres sont surtout pour moi les sources d'émotion, de stimulation, de désirs parfois, bref de vie. Parce qu'ils sont mes semblables, ils me complètent, parce qu'ils sont différents, ils m'enrichissent.

Donc, tout autre m'intrigue et m'importe. Il m'est par nature, inconnaissable. Il me reste à le découvrir constamment, par bribes. En même temps l'autre me permet de mieux me définir ; par effet miroir, par contraste, par comparaison, voire par antagonisme. Le désir que je peux aussi avoir de l'autre comporte l'espoir d'aménager ma solitude, et même, par instants de l'oublier.

D'ailleurs cette solitude existentielle est-elle une infortune ? Il est convenu de s'en plaindre, alors qu'elle découle de ma singularité de naissance, qui fonde ma liberté de vivre. Je suis seul du fait même que je suis vivant. S'en arranger est la grande affaire. Déplorer l'inévitable ne produit qu'une peine stérile. D'autant que je peux choisir librement d'être seul, quand j'en ressens le besoin. C'est d'être privé de ma solitude qui peut alors devenir une infortune.

Mais l'autre ne m'offre pas seulement sa compagnie, je suis partiellement fait de lui et il est aussi fait de moi. De bien des manières. D'abord génétique puisque, de même que nous sommes tous issus de poussières d'étoiles, je suis un cocktail des gènes de ma chaîne familiale biologique. N'est-il pas toujours troublant de retrouver en soi, dans son aspect ou son comportement, des traits que l'on pouvait constater chez nos ascendants ou collatéraux ? Si j'agis par instants comme mon père, est-ce génétique ou mimétique ? Souvent les deux à la fois. Mais ça signe aussi ce qui, dans mon destin, ne dépend pas de ma seule volonté et assure une continuité, même à mon insu.

L'essentiel de ce que j'ai appris, en bien et en moins bien, m'a été transmis par d'autres. Mes valeurs, mes références, mes exemples me sont venus d'eux, dès le début de mon existence, puis au long de mon parcours. Même en négatif. Ne pas vouloir ressembler à tel autre contribue tout autant à me définir. On se comprend soi-même autant par nos différences avec les autres que par nos similitudes.

### **[...] LE NOUS : il revient**

S'il existe autant de mondes que d'individus singuliers, comment vivre ensemble ? La focalisation de nos contemporains sur la liberté de l'individu comme valeur fondamentale ne trouve-t-elle pas déjà ses limites ? Chacun a l'expérience plus ou moins occasionnelle, que plus je m'affirme comme individu, plus je ressens ma solitude. Cette dernière n'est pas négative par essence, mais demande, au long de ma vie, à être compensée, soutenue, complétée, bref, aménagée.

Le moment semble venu de retrouver le « nous », car l'individu triomphant, dont les droits légitimes ont été enfin reconnus, actés en loi, quasi sacralisés, a peut-être passé son apogée.

Un peu de bon sens suffit pour comprendre que mon autonomie est une fiction. L'individualisme dont se grisent les modernes que nous sommes rappelle nos illusions d'adolescents qui croyaient pouvoir s'affranchir de leurs parents. Il fallait probablement que cette soif d'émancipation s'exprime historiquement dans nos sociétés pour que nous prenions concrètement conscience de ses limites. Le moment semble venu de la dépasser pour aller plus loin en humanité.

[...] Il en était de même dans la principale cellule du nous et du vivre ensemble, la famille. Partout cette dernière reposait sur des hiérarchies méticuleuses, régissant les droits des hommes sur les femmes, comme ceux des parents sur les enfants. Les coutumes comme les religions étaient imposées dès le plus jeune âge et pérennisées une génération après l'autre. La première entrave à toute liberté, en particulier pour les femmes était familiale avant d'être politique ou sociale. Et trop rares encore sont les pays où cette contrainte s'est réellement

desserrée. Dans nos nations où la parité entre les hommes et les femmes a fait de réels progrès, nous l'avons un peu vite oublié.

L'idée neuve que chacun puisse vivre pleinement sa liberté d'être, formulée en Europe dès les Lumières, s'est déployée depuis le milieu du siècle dernier. Au moment même où les idéologies collectives s'effondraient et où les technologies de communication mettaient presque le monde entier à la portée de chacun, l'individualisme trouvait là son terrain fertile. Nous voici d'autant plus autonomes qu'hyperconnectés.

Mais un nouvel isolement en a résulté. Exemple banal : dans nos rapports de travail, les liaisons électroniques sont la règle courante. Nous envoyons couramment un même message à la fois à un collègue basé à Londres et à un autre dans le bureau mitoyen. Pour le premier, c'est une plus grande proximité ; pour le second, une plus grande mise à distance. Les mêmes adolescents qui échangent constamment des messages entre eux se rencontrent moins souvent en personne.

La propagation vertigineuse de nos contacts instantanés s'est faite au détriment de leur profondeur. En s'industrialisant, la relation à l'autre s'est diluée. Notre rayon d'action et notre solitude ont progressé au même rythme. A force de se vouloir cool, le rapport à l'autre s'est refroidi. Pourtant le besoin de chaleur et de proximité humaine reste aussi présent dans chaque individu, même émancipé. Par un habituel balancier de l'histoire, l'heure du retour au « nous » se rapproche. Mais sur des bases à réinventer.

Le nous, le groupe, la communauté, la famille, sont potentiellement, à la fois oppressant et chaleureux. L'individu récemment émancipé n'est pas encore prêt à aliéner sa toute nouvelle liberté, mais commence à ressentir l'attrait de liens non hiérarchiques, non pyramidaux, pour se rapprocher des autres. L'essor actuel des formes associatives et bénévoles en témoigne. D'autant que les Etats se désengagent de plus en plus de leurs tâches et responsabilités. Face à quoi les individus comprennent tout l'intérêt pratique de se regrouper, sur la base d'une coopération librement acceptée. Est-ce si nouveau que ça ?

Comment croire en effet que l'ensemble des créations humaines n'aient pu être réalisées que par des systèmes de contrainte ? Les villages, les villes, toutes les modalités de vie commune regroupant des populations sans cesse croissantes ont demandé une capacité de coopération et une imagination qu'aucune loi, aucune hiérarchie n'aurait pu imposer. Le monde actuel est tissé d'une infinité de cellules humaines de taille variable, non hiérarchisées mais où chacun reconnaît sa dépendance aux autres et en a besoin.

[...] Le nous s'impose là au moi, du simple fait que chacun comprend qu'il en est de son intérêt. Si on y ajoute que les réseaux sociaux permettent de mettre en faisceaux les intelligences et les créativité avec une efficacité sidérante, cette numérisation du nous peut amplifier un pas en avant dans la modernité.

Le progrès de nos sociétés libres passera par l'association d'individus libres dans des actions communes qui surpassent de loin les résultats de chacun. Nous sommes en train de passer des liens imposés par la tradition et la loi, aux associations et coopérations d'autant plus fructueuses qu'elles sont consenties. Dans la morale contemporaine, la prise en compte des autres s'est, heureusement, substituée aux injonctions venues du Ciel.



Avril 2018

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques**

**Exercice.**

1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\chi_A(X) = (1 - X)(3 - X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

D'après le Théorème de Caley Hamilton,  $(A - 2I_2)^2 = 0$  donc  $A - 2I_2$  est nilpotente.

2. Posons  $B = A - 2I_2$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tB} = e^{2t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!} = e^{2t} \left( I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} \right) = e^{2t} (I_2 + tB).$$

Car  $B^2 = 0$ , ce qui implique  $B^n = 0, \forall n \geq 2$ .

3. En notant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , notre système d'équations se réécrit sous la forme matricielle

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{avec condition initiale} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cette équation différentielle homogène de première ordre admet pour unique solution, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Simplifions cette dernière expression.

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \quad e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} (I_2 + tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 2 + 3t \end{pmatrix}.$$

Conclusion : l'unique couple solution est le couple  $(t \mapsto e^{2t}(1 - 3t); t \mapsto e^{2t}(2 + 3t))$ .

**Problème.**

**Partie I**

On considère la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  de la variable complexe  $z$ , où  $s$  est un nombre réel donné.

1. Posons  $a_n = n^{-s}, n \geq 1$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^s = 1.$$

On déduit de la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série entière est  $R = 1$ .

2. Si  $s > 1$ ,  $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$  est une série à termes positifs convergente car  $s > 1$

(règle de Riemann). La convergence absolue de la série entraîne donc sa convergence.

Si  $s \leq 0$ ,  $|n^{-s}z^n| = n^{-s} \geq 1$ . La suite  $(n^{-s}z^n)$  ne tend pas vers 0 et la série diverge.

3. Pour  $z = 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$  diverge car  $s < 1$  (règle de Riemann).

4. On suppose toujours que question que  $0 < s \leq 1$  et  $z = e^{i\theta} \neq 1$ . On pose  $S_0 = 0$  et pour tout nombre entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n z^k$ .

- (i)  $S_n$  est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $z \neq 1$ . Donc  $S_n = z \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ . Ce qui donne par l'inégalité triangulaire  $|S_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$ . Or  $1-z = (1-\cos(\theta)) + i\sin(\theta)$  et  $|1-z| = \sqrt{(1-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = \sqrt{2-2\cos(\theta)} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)}$ .  
D'où  $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ .

- (ii) On a  $z^k = S_k - S_{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^n k^{-s} z^{k-1}$ , puis par changement d'indices,  $\sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{-s} z^k$ . En regroupant les termes de même indice, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}] + S_n n^{-s}.$$

- (iii) D'après la question précédente, la suite  $(S_n)$  est bornée, comme  $s > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-s} S_n = 0$ . D'autre part pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}]| &\leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \sum_{k=1}^n [k^{-s} - (k+1)^{-s}] \\ &= \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} (1 - (n+1)^{-s}), \end{aligned}$$

comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^{-s} = 0$ , la dernière inégalité prouve que  $\sum_{k=1}^n S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}]$  est une série absolument convergente, donc convergente.

Conclusion : la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  est convergente.

Nous noterons dorénavant  $\varphi(z, s)$  la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  pour tout couple  $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  pour lequel cette série est convergente :

$$\varphi(z, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n. \quad (1)$$

5. On note  $I$  l'intervalle ouvert  $I = ]-1, 1[$  de  $\mathbb{R}$ .



- (a) Posons  $F(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$ . On utilise les résultats sur les séries entières : la fonction  $f : t \mapsto \frac{\varphi(t, s)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} t^{n-1}$  a un développement en série entière de rayon de convergence  $R = 1$  et on cherche une primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(0) = 0$ . On sait que dans le disque de convergence, toute primitive de  $f$  a un développement en série entière  $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \frac{x^n}{n} = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} x^n = \varphi(x, s+1)$ . On aboutit au résultat demandé car  $F(0) = 0$ .

*Remarque : On pourrait aussi utiliser l'intégration terme à terme d'une série de fonction.*

- (b)  $\varphi(x, 0) = 0$  et  $\varphi(x, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ .

6. On suppose dans cette question que  $s > 1$ . Pour  $s > 1$ , on définit  $\Gamma(s)$  par l'intégrale

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

- (i) On calcule  $\Gamma(2)$  en utilisant une intégration par parties : on pose  $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$ ,  $v(t) = -e^{-t} \Rightarrow v'(t) = e^{-t}$  et on obtient

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

- (ii) Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $f_n(t) = e^{-nt} t^{s-1}$ . Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  en particulier au point 0, car  $s-1 > 0$ , il suffit alors de vérifier que  $f_n$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Puisque  $n \geq 1$ , au voisinage de  $+\infty$ ,  $f_n = O(1/t^2)$  ; or  $t \mapsto 1/t^2$  est positive est intégrable sur tout intervalle de type  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ . Soit  $a > 0$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , continue sur  $[0, a]$ , donc intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Pour calculer l'intégrale de  $f_n$ , on effectue le changement de variables affine  $u = nt$ , ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} \frac{du}{n} = \frac{1}{n^s} \Gamma(s).$$

- (iii) Soit  $z$  un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $u_n = z^n f_n(t)$ . Montrons que les hypothèses du théorème d'inversion série-intégrale sont satisfaites :

- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $|u_n| = |z^n f_n| \leq |f_n|$ . D'après la question précédente,  $u_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- $u_n(t) = (ze^{-t})^n t^{s-1}$  qui est une suite géométrique de raison  $r = ze^{-t}$  telle que  $|r| \leq e^{-t} < 1$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ . Donc la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(t) = ze^{-t} t^{s-1} \frac{1}{1 - ze^{-t}}$ .

- $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = |z^n| \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \leq \frac{\Gamma(s)}{n^s}$  ; il s'en suit par la règle de Riemann que  $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt$  converge car  $s > 1$ .

On peut alors utiliser le théorème d'interversion série-intégrale : la fonction  $g$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt$ .

Soit

$$z \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{s-1}}{1 - ze^{-t}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \varphi(z, s).$$

En multipliant numérateur et dénominateur dans l'intégrale par  $e^t$ , on obtient la formule demandée :

$$\varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

## Partie II

Pour tout nombre réel  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \varphi(1, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ , où  $\varphi$  a été définie dans la partie I pa la formule (1).

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $h_n : ]1, +\infty[$  définie par  $h_n(s) = \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tous  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \in ]1, +\infty[$ ,  $h_n^{(k)}(s) = \frac{(-\ln n)^k}{n^s}$ .

Soit  $1 < a < +\infty$  fixé. Puisque la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$  est convergente, les séries  $\sum_{n \geq 1} h_n^{(k)}$ ,

$k \geq 1$  sont normalement, donc uniformément convergentes sur  $[a, +\infty[$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$

sur  $[a, +\infty[$  et que  $\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^s}$  pour tout  $s \in [a, +\infty[$ . Comme  $1 < a < +\infty$

est arbitrairement pris, on en déduit que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et que  $\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^s}$  pour tout  $s \in ]1, +\infty[$ .

2. D'après la question précédente, la fonction  $\zeta$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et

$$\zeta'(s) = - \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^s} < 0.$$

Donc la fonction  $\zeta$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

3. On utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{t^s}$  sur l'intervalle  $[k, k+1[$  ( $k \geq 1$ ), on a  $\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{k^s}$ . D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre ( $k = 1, \dots, k = n$ ) on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}.$$

La fonction  $t \mapsto t^{-s}$  est intégrable sur  $]1, +\infty[$  (l'intégrale sur  $]1, +\infty[$  est de même nature que la série  $\zeta(x)$ ). Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s)$ . De plus  $\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} \geq 0$  ce qui complète l'encadrement

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s). \quad (2)$$

Or  $\int_1^{+\infty} t^{-s} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1}$ , ce qui donne  $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$ . Lorsque  $s \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$ .

De même, en multipliant par  $s-1 > 0$  tous les membres de l'inégalité (2), on obtient  $0 \leq (s-1)\zeta(s) - (s-1) \leq 1 \leq (s-1)\zeta(s)$ . Lorsque  $s \rightarrow +\infty$ , on aboutit à  $\lim_{s \rightarrow +\infty} (s-1)\zeta(s) = 1$  soit  $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$  au voisinage de 1.

### Partie III

1. Soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

a- Comme  $g$  est périodique de période  $2\pi$ , il suffit de montrer qu'elle est paire sur  $[-\pi, \pi]$ . Or pour tout  $x \in [-\pi, 0[$ ,  $x + 2\pi \in [0, 2\pi[$  et  $-x \in ]0, \pi]$ , ce qui implique

$$g(x) = g(x + 2\pi) = \left(\frac{\pi + x}{2}\right)^2 = g(-x).$$

D'où la parité de  $g$ .

b- La fonction  $g$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et périodique, elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculons sa série de Fourier.  $g$  étant paire ses coefficients  $b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = 0$

et  $a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(nt) dt$ . Pour  $n \geq 1$ , on effectue une double intégration par parties.

- Première intégration par parties : on pose  $U = (t - \pi)^2 \Rightarrow U' = 2(t - \pi)$ ,  $V' = \cos(nt) \Rightarrow V = \frac{1}{n} \sin(nt)$ ,

$$a_n(g) = \frac{1}{2\pi} \left[ (t - \pi)^2 \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2(t - \pi) \sin(nt) dt = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi) \sin(nt) dt.$$

- Deuxième intégration par parties : on pose  $X = (t - \pi) \Rightarrow X' = 1$ ,  $Y' = \sin(nt) \Rightarrow Y = -\frac{1}{n} \cos(nt)$ ,

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{n\pi} \left[ (t - \pi) \frac{1}{n} \cos(nt) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2\pi} \left[ \sin(nt) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Il reste à calculer } a_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

- c-  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  par morceaux. On peut alors appliquer le théorème de Dirichlet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \cos(nt)$  et en particulier, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2. \quad (3)$$

- d- En prenant  $t = 0$  dans la relation (3), on a  $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , ce qui donne

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour calculer  $\zeta(4)$ , on utilise l'inégalité de Parseval : puisque  $g$  est continue et l'intervalle fermé sur  $[0, 2\pi]$ , on a  $\int_0^{2\pi} (g(t))^2 dt < +\infty$ , comme de plus elle est  $2\pi$ -périodique, par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^4 dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g))^2$$

car  $g$  est  $2\pi$ -périodique et paire. En effectuant dans l'intégrale le changement de variable  $u = \pi - x$ , on obtient

$$\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{1}{2} \zeta(4) = \frac{1}{16\pi} \int_0^{\pi} u^4 du = \frac{\pi^4}{80},$$

ce qui donne

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. Soit  $\theta$  un nombre réel. On note  $\text{Re}(\varphi(\theta))$  la partie réelle de  $\varphi(e^{i\theta}, 2)$  où  $\varphi$  est la fonction définie à la question I.2.

- a- On a

$$R_{\varphi}(\theta) = \text{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Re}(e^{in\theta})}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

- b- D'après la formule de la question I.6.(iii)

$$\begin{aligned} R_{\varphi}(\theta) &= \text{Re}(\varphi(\theta, 2)) = \text{Re} \left( \frac{e^{i\theta}}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - e^{i\theta}} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left( \frac{t e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}} \right) dt. \end{aligned}$$

Considérons la fonction dans l'intégrale, en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, on a

$$\frac{t e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}} = \frac{t e^{i\theta} (e^t - e^{-i\theta})}{(e^t - e^{i\theta})(e^t - e^{-i\theta})} = \frac{t (e^{t+i\theta} - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1}.$$

La partie réelle du membre de droite de cette dernière égalité est  $\frac{t (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1}$ . D'autre part, d'après la question I.6.(i),  $\Gamma(2) = 1$ . On obtient donc

$$R_{\varphi}(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

c- On calcule  $I_1$  et  $I_2$  en donnant des valeurs particulières à  $\theta$  :

- Pour  $\theta = 0$ , on a  $\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t - 1)}{e^{2t} - 2e^t + 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$ ,

or  $\frac{t(e^t - 1)}{e^{2t} - 2e^t + 1} = \frac{t(e^t - 1)}{(e^t - 1)^2} = \frac{t}{e^t - 1}$ . D'où  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$ .

- De la même manière, pour  $\theta = \pi$ , on a  $-\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t + 1)}{e^{2t} + 2e^t + 1} dt = -\frac{\pi^2}{12}$ , et  $\frac{t(e^t + 1)}{e^{2t} + 2e^t + 1} =$

$\frac{t(e^t + 1)}{(e^t + 1)^2} = \frac{t}{e^t + 1}$ . D'où  $I_2 = \frac{\pi^2}{12}$ .

d- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^t + 1} = \frac{t}{\text{sh}(t)}$  ; ainsi  $I_3 = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{4}$ .



AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
**ITS Voie B Option Mathématiques**
**CORRIGÉ DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**Les exercices sont indépendants. Dans toute la composition,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.**

**Exercice n° 1**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $R^+$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La dérivée est égale à (pour  $x$  non nul):  $f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2 \sqrt{x/(x+1)}} > 0$

La fonction est continue et strictement croissante de  $R^+$  sur  $[0,1[$ , elle admet la droite  $y=1$  comme asymptote, une tangente verticale à l'origine et elle est concave.

2. Pour  $x > 0$  et tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n(x) = \sqrt[n]{\frac{x^n}{x+1}}$ . Etudier la suite  $(u_n(x))$  selon les valeurs de  $x$ .

On obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } x = 1 \\ +\infty & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Calculer  $I = \int_0^1 f(x) dx$

On pose  $t = \sqrt{x+1}$ , d'où  $dx = 2t dt$  et  $x = t^2 - 1$  pour obtenir  $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 - 1} dt$

Puis on pose  $t = chu$  pour obtenir :  $I = \int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} sh^2(u) du$  (on rappelle que  $ch^2(u) - sh^2(u) = 1$  ,

$$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \text{ et } Argchu = Ln(u + \sqrt{u^2 - 1}).$$

Puis

$$I = \frac{1}{2} \int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} (e^{2u} + e^{-2u} - 2) du = \left[ \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4} - u \right]_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left( (\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} \right) - Ln(1 + \sqrt{2})$$

Après simplification, on obtient :  $I = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - Ln(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - Ln(1 + \sqrt{2})$

Autre méthode : On pose  $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ , d'où  $x = \frac{t^2}{1-t^2}$  et  $dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt$ .

Puis  $I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} t \times \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt$  que l'on intègre par parties en posant :

$$u = t \text{ et } v' = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \text{ pour obtenir}$$

$$I = \left[ \frac{t}{1-t^2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)} dt = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \sqrt{2} - \frac{1}{2} Ln \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \sqrt{2} - Ln(1 + \sqrt{2})$$

## Exercice n° 2

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $M(a)$ , carrée d'ordre 3, par :  $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour  $b \in \mathbb{R}$ , calculer le produit  $M(a)M(b)$

On obtient  $M(a)M(b) = M(a+b)$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $M^n(a)$

On déduit de la question précédente que :  $M^2(a) = M(2a)$  et par récurrence que  $M^n(a) = M(na)$

3. La matrice  $M(a)$  est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.



Soit  $b = -a$ , on a :  $M(a)M(-a) = M(0) = I$ , donc la matrice est inversible et  $M^{-1}(a) = M(-a)$

4. La matrice  $M(a)$  est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale semblable.

On a de façon triviale  $\det(M(a) - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$  et  $\lambda = 1$  est une valeur propre triple. La matrice sera diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé est égale à 3, ce qui est possible seulement pour  $a=0$  et la matrice unité est la matrice diagonale semblable.

### Exercice n° 3

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de  $M_t$

On peut remarquer que les 3 colonnes sont dépendantes, donc zéro est une valeur propre double.

Le déterminant de  $M_t - \lambda I$  est donc de la forme :  $-\lambda^2(\lambda - a)$ . La trace étant invariante par changement de base, on obtient comme troisième valeur propre :  $1 + t^2 + t^4$

2. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes /

-  $M_t$  est-elle diagonalisable ? Oui, car symétrique

-  $M_t$  est-elle inversible ? Non, car des colonnes dépendantes

-  $M_t$  peut-elle être associée à une projection orthogonale dans  $\mathbb{R}^3$  ? Pour une matrice de projection orthogonale 0 et 1 sont des valeurs propres. Comme 0 est une valeur propre double, cela ne peut être qu'une projection orthogonale sur une droite à condition que :  $1 + t^2 + t^4$  soit égal à 1. Il faut donc  $t = 0$  et on a une projection orthogonale sur l'axe Ox, dont la matrice est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-  $M_t$  peut-elle être associée à une symétrie dans  $\mathbb{R}^3$  ? Non, car -1 ne peut pas être une valeur propre.

3. On considère la suite de matrices  $(M_n(t))$  définie par :

$$M_1(t) = M_t \text{ et } M_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^n & t^{n+1} \\ t^n & t^{n+1} & t^{n+2} \\ t^{n+1} & t^{n+2} & t^{n+3} \end{pmatrix}$$

Etudier cette suite.

Si  $t=1$ , la suite est constante  $M_n(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si  $|t| < 1$ , la suite est convergente vers  $P$

Dans les autres cas, la suite est divergente.

#### Exercice n° 4

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $R$  par :  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \ln(1+x^2)$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La fonction est paire et il suffit donc de l'étudier sur  $R^+$  et son graphe est symétrique par rapport à l'axe  $Ox$ . Sa dérivée est égale est :  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (\ln(1+x^2) + 2)$ . Cette dérivée

est positive et la fonction est strictement croissante de  $R^+$  sur  $R^+$ . Son graphe admet une branche parabolique dans la direction  $Oy$  et la pente de la tangente à l'origine est horizontale.

2. Calculer  $I = \int_0^1 x f(x) dx$

$I = \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} \ln(1+x^2) dx$  et on fait une intégration par parties, en posant  $u' = x \sqrt{1+x^2}$  et  $v = \ln(1+x^2)$ . D'où

$$I = \left[ \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \ln 2) - \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_0^1$$

$$\text{Et } I = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \ln 2) - \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$$

3. Résoudre l'équation :  $f(x) = 1+x^2$

Il faut résoudre :  $\ln(1+x^2) = \sqrt{1+x^2}$ , puis en posant  $u = \sqrt{1+x^2}$ , il faut résoudre l'équation :  $z = \ln u - \frac{1}{2}u = 0$  ; La dérivée de  $z$  est égale à  $z' = \frac{2-u}{u}$  qui s'annule pour  $u=2$  et qui admet un maximum négatif en cette valeur, donc la fonction  $z$  est toujours strictement négative et l'équation n'admet pas de racines.

Pour  $n$  entier strictement positif, on considère :  $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Etudier la monotonie  $f_n$

On a :  $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2(1-x) > 0$ , car  $x \in [0,1]$ , la fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que  $f_n$  admet une unique racine, que l'on notera  $\alpha_n$

On a :  $f_n(0) = -1$  et  $f_n(1) = 1$ . Comme  $f_n$  est continue et strictement croissante, elle est bijective, donc il existe une unique valeur  $\alpha_n$  telle que  $f_n(\alpha_n) = 0$  (on peut aussi évoquer le théorème des valeurs intermédiaires).

3. Quel est le signe de  $f_{n+1}(\alpha_n)$  ?

On a :  $f_n(\alpha_n) = 0$ , soit  $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$ .

Puis  $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1-\alpha_n)^2 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) < 0$

4. On considère la suite de terme général  $\alpha_n$

- Montrer que la suite  $(\alpha_n)$

Comme  $f_n$  est une bijection croissante, on a :  $0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$ . La suite est donc croissante et comme elle est majorée par 1, elle est convergente vers une valeur  $\alpha$

- Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$

La suite étant croissante, on a :  $0 < \alpha_n < \alpha$  et  $0 < \alpha_n^n < \alpha^n$

Si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^n = 0$  ;

Par ailleurs, on a :  $f_n(\alpha_n) = 0$ , soit  $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^n = 1 = \alpha$ . Ce qui est contraire à l'hypothèse. En conclusion  $\alpha = 1$ .

5. Donner l'allure du graphe de  $f_n$  pour  $n > 2$  (on précisera la convexité et l'évolution du graphe quand  $n \rightarrow \infty$ )

On a :  $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} - 2$  qui est nulle pour  $x = \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$ . La fonction est convexe pour  $x > \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$  et concave dans le cas contraire sur son domaine de définition.

Quand  $n \rightarrow \infty$ , l'abscisse du point d'inflexion tend vers zéro, la partie convexe du graphe augmente et le graphe de  $f_{n+1}$  est en dessous de celui de  $f_n$

6. Soit  $I_n = \int_{\alpha_n}^1 f_n(x) dx$ . Calculer  $I_n$  ainsi que sa limite quand  $n \rightarrow \infty$

$$I_n = \int_{\alpha_n}^1 f_n(x) dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right]_{\alpha_n}^1 = \frac{1 - \alpha_n^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{3}(1 - \alpha_n)^3 \text{ qui tend vers zéro.}$$

### Exercice n° 6

Soit  $f$  une fonction numérique définie et continue sur  $R$ , vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in R^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Etudier la monotonie de  $f$

Pour  $(x, y) \in R^2$  tel que :  $f(x) = f(y)$ , on a  $|x - y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$  et donc  $f$  est injective.

Comme de plus elle est continue et définie sur un intervalle de  $R$ , elle est strictement monotone.

2. En supposant que  $f$  est strictement croissante, montrer que  $f$  est une bijection de  $R$  dans  $R$ .

Comme la fonction est croissante, elle admet une limite à  $+\infty$ , qui est soit  $+\infty$  ou une limite finie  $l$ .

Si la fonction admet une limite finie, alors pour tout  $x$  nombre réel,  $f(x+1) - f(x) = |f(x+1) - f(x)| \geq |x+1 - x| = 1$ . En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient :  $0 = l - l \geq 1$ , ce qui est faux. Par conséquent  $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ . On peut tenir le même type de raisonnement à  $-\infty$  pour obtenir  $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ .

On en déduit que  $f(R) = R$  et que la fonction continue et strictement croissante est bijective.

3. On suppose, dans cette question, qu'il existe un couple  $(a, b)$  de  $R^2$ , avec  $a < b$ , et tel que  $f([a, b]) \subset [a, b]$

- Montrer que  $f$  admet un point fixe sur  $[a, b]$

On a évidemment  $f(a) \geq a$ ,  $f(b) \leq b$ . On considère l'application  $g$  définie sur  $[a, b]$  par  $g(x) = f(x) - x$ . Cette fonction  $g$  est continue avec  $g(a) \geq 0$ ,  $g(b) \leq 0$  et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $c$  de l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , d'où  $f(c) = c$ .

- On suppose que  $f$  est croissante, en déduire la forme de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[a, b]$  (qui sera notée  $f_{[a, b]}$ )

Soit  $c$  un point fixe de  $f$ . Du fait de la croissance de la fonction, on a

$$f(c) - f(a) = |f(c) - f(a)| \geq |c - a| = c - a \quad \text{et} \quad \text{comme} \quad f(c) = c, \quad \text{alors} \quad f(a) \leq a, \quad \text{d'où} \quad f(a) = a$$

En appliquant la même démarche en  $b$ , on obtient  $f(b) \geq b$  et donc  $f(b) = b$

Pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , on a

$$f(x) - a = |f(x) - f(a)| \geq |x - a| = x - a, \quad \text{d'où} \quad f(x) \geq x \quad \text{et}$$

$$b - f(x) = |f(b) - f(x)| \geq |b - x| = b - x, \quad \text{d'où} \quad f(x) \leq x$$

En conclusion  $f$  est l'application identique sur l'intervalle  $[a, b]$

- On suppose  $f$  décroissante, déterminer  $f_{[a,b]}$

Soit  $g$  la fonction définie sur  $R$  par  $g(x) = a + b - f(x)$ ,  $g$  est continue et vérifie la même relation que  $f$ , à savoir  $\forall (x, y) \in R^2, |g(x) - g(y)| \geq |x - y|$

Par ailleurs,  $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a + b - f(x) \leq b \Rightarrow g([a, b]) \subset [a, b]$ . Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question précédente, on a donc  $\forall x \in R, g(x) = x$  et par conséquent  $f(x) = a + b - x$

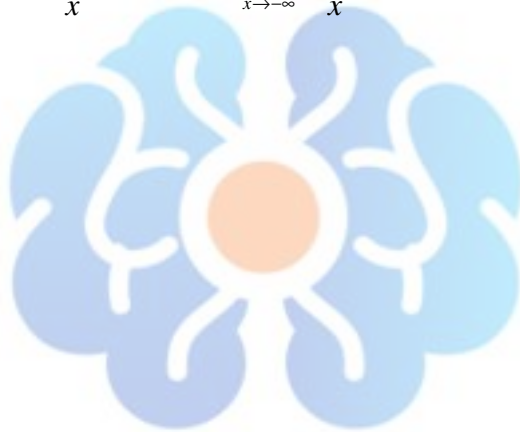
4. On suppose que  $f$  est croissante.

- On suppose de plus que pour tout  $x$ ,  $f(x) < x$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit  $x > 0$ ,  $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x$ , donc  $f(0) + x \leq f(x) < x$  et en divisant par  $x$  strictement positif, on obtient :  $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

- Que peut-on dire si pour tout  $x$ ,  $f(x) > x$  ?

Soit  $x < 0$ ,  $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$ , donc  $x < f(x) \leq x + f(0)$  et en divisant par  $x$ , on obtient :  $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ISSEA-YAOUNDE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

**Exercice 1.**

Soient  $f$  et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x, y) = f(x + \phi(y))$ .

1. Justifier que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Montrer que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

**Exercice 2.**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = f(b)$  et  $f'(a) = 0$ . Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

1. Montrer que  $\Phi$  est continue sur  $[a, b]$ .
2. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .

## Problème.

Dans tout le problème l'entier  $n$  est strictement positif ( $n \geq 1$ ) et l'expression  $C_n^p$  désigne le nombre des parties ayant  $p$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments.

### Partie I

Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$U_n(x) = x^n(x-1)^n, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} U_n(x).$$

1. Étant donné un réel strictement positif  $a$  ( $a > 0$ ) et un entier naturel  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on définit l'intégrale  $I_{a,k}$  par

$$I_{a,k} = \int_0^1 x^{a-1}(x-1)^k dx.$$

- (i) Démontrer l'existence de l'intégrale  $I_{a,k}$ .
  - (ii) Montrer que  $I_{a,k} = -\frac{k}{a} I_{a+1,k-1}$  si  $k > 0$  et  $I_{a,0} = 1/a$ .
  - (iii) Calculer  $I_{a,k}$ .
  - (iv) Dédire du résultat précédent la valeur de l'intégrale de la fonction  $U_n$  sur le segment  $[0, 1]$ , en fonction du coefficient du binôme  $C_{2n}^n$ .
2. Déterminer le degré du polynôme  $P_n$  et préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.
3. Déterminer de deux manières différentes le polynôme  $P_n$  (le résultat sera exprimé en fonction d'expressions du type  $x^k(x-1)^{n-k}$ ) :
  - (i) la première manière, par dérivation de l'expression de  $U_n$  obtenue après développement.
  - (ii) la seconde manière, par dérivation du produit  $x^n(x-1)^n$ .
4. Dédire de la question précédente la relation :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$



## Partie II

Étant donnés deux réels  $a$  et  $b$ , strictement positifs ( $a > 0, b > 0$ ), soit  $J(a, b)$  l'intégrale suivante

$$J(a, b) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

1. Étudier l'existence de l'intégrale  $J(a, b)$ .
2. Montrer que l'intégrale  $J(a, b)$  est égale à la somme de la série de terme général  $\frac{(-1)^k}{a+kb}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  :

$$J(a, b) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb}.$$

3. En déduire la somme de la série suivante :

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} \cdots$$

Étant donné un réel  $a$  strictement compris entre  $-1$  et  $1$  ( $-1 < a < 1$ ), soit  $\varphi_a$  la fonction définie sur l'intervalle ouvert  $I = ]-1, 1[$  par la relation suivante :

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Démontrer que la fonction  $\varphi_a$  est intégrable sur l'intervalle ouvert  $I$ .

Soit  $K(a)$  l'intégrale de la fonction  $\varphi_a$  sur l'intervalle  $I$  :

$$K(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

5. Démontrer, pour tout réel  $a$  appartenant à l'intervalle ouvert  $I$ , la relation suivante :

$$K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

6. Déterminer, en admettant le résultat suivant :

$$K(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

le développement en série entière de la fonction  $K : a \mapsto K(a)$  dans un voisinage de l'origine. Préciser le rayon de convergence.

7. Exprimer, pour tout entier  $n$  strictement positif, la valeur de l'intégrale  $L_n$  ci-dessous en fonction du coefficient du binôme  $C_{2n}^n$  :

$$L_n = \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Comment interpréter la maxime « *Un esprit sain dans un corps sain* » ?



**Sujet n° 2**

Le continent africain est le mieux placé en matière de parité selon une étude<sup>1</sup> qui dresse le panorama du leadership au féminin à travers le monde. Illustrez ce constat et ses effets.

<sup>1</sup> Etude « *women in business 2018* » publiée par le cabinet Grant Thornton.

**Sujet n° 3**

Explicitez la citation de Nelson Mandela, homme d'Etat sud-africain, (1918-2013) « *Être libre, ce n'est pas seulement se débarrasser de ses chaînes ; c'est vivre d'une façon qui respecte et renforce la liberté des autres* ».

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

**Exercice n° 1**

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont des nombres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .
2. Déterminer les valeurs de  $a, b$  et  $c$  pour que  $M$  soit la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).
3. La matrice  $M$  peut-elle être associée à une symétrie orthogonale ?

**Exercice n° 2**

On considère la matrice  $A$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n > 1$ .
2. Déterminer les sous espaces vectoriels stables par  $A$ .

**Exercice n° 3**

On considère le système linéaire suivant : 
$$\begin{cases} x + y + z - p x = 0 \\ x + y + z - q y = 0 \\ x + y + z - p z = 0 \end{cases}$$
 où  $(x, y, z)$  sont les inconnues réelles et  $(p, q)$  des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice associée au système.
2. Déterminer les plus petits entiers non nuls  $(p, q)$  tels que l'espace vectoriel des solutions de ce système soit de dimension 1.
3. On suppose que  $q = p$ . La matrice M est-elle inversible ? orthogonale ?

**Exercice n° 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :  $f(x) = x^3 + x - \ln x$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation :  $f(x) = 0$
2. Calculer  $I = \int_1^e f(x) dx$
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :  $f(x) = e$  (nombre de Neper).

**Exercice n° 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]-1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \frac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux,  $q > 0$ .  $Q$  désigne l'ensemble des nombres rationnels et  $Q^* = Q - \{0\}$

1. Montrer que  $f$  est continue en zéro.
2. Etudier la continuité de  $f$  sur  $Q^* \cap I$
3. Etudier la continuité de  $f$  sur  $I - Q$

### Exercice n° 6

Soient  $a$  et  $x$  deux nombres réels strictement positifs. On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_0 = a$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$ ;  $b_0 = \frac{x}{a_0}$ ;  $b_n = \frac{x}{a_n}$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.
2. Soit la suite  $(x_n)$  définie par récurrence par  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ . Etudier la convergence de cette suite.
3. On considère, pour  $a > 0$ , les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :  $f(x) = \sqrt{ax}$ ;  $g(x) = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a})$ . Déterminer, selon les valeurs de  $a$ , le nombre de points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

### Exercice n° 7

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $f$  une fonction numérique définie par :  $f(x) = k x e^{-\lambda x^2}$  sur l'ensemble des nombres réels positifs, où  $k$  et  $\lambda$  sont des paramètres réels strictement positifs.

1. Déterminer  $k$  et  $\lambda$  pour que  $f$  soit une fonction de densité sur l'ensemble des nombres réels positifs.
2. On suppose que  $f$  (qui dépend de  $\lambda$ ) est la fonction de densité de  $X$ . Calculer l'espérance de  $X$  (on rappelle que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).
3. Etudier les variations et tracer le graphe de  $f$  (on étudiera en particulier sa convexité).

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

**CONTRACTION DE TEXTE**  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Yuval Noah Harari intitulé : « *21 leçons pour le 21<sup>ème</sup> siècle* » paru aux éditions Albin Michel en 2018.

*Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.*

*Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.*

**Education : La seule constante est le changement**

L'humanité est confrontée à des révolutions sans précédent, tous nos vieux récits s'émiettent, et aucun nouveau récit n'est jusqu'ici apparu pour les remplacer. Comment nous préparer, nous et nos enfants, à ce monde de transformations inédites et d'incertitudes radicales ? Un bébé qui naît aujourd'hui aura trente et quelques années en 2050. Si tout va bien, il sera encore là en 2100 et pourrait bien être un citoyen actif du XXII<sup>ème</sup> siècle. Que devrions-nous enseigner à ce bébé pour l'aider à survivre et à s'épanouir dans le monde de 2050 ou du XXII<sup>ème</sup> siècle ? De quel genre de compétences aura-t-il besoin pour trouver un emploi, comprendre ce qui se passe autour de lui et se repérer dans le dédale de la vie.

Hélas, personne ne sachant de quoi le monde aura l'air en 2050 –pour ne pas parler de 2100-, ces questions demeurent sans réponses. Bien entendu, les hommes n'ont jamais su prédire l'avenir avec exactitude. Mais c'est aujourd'hui plus difficile que jamais : en effet, dès lors que la technologie nous permet d'intervenir dans le corps, le cerveau et les esprits, nous ne pouvons plus être sûrs de rien, y compris de ce qui semblait fixe et éternel.

Voici un millier d'années en 1018, il y a beaucoup de choses que les gens ignoraient de l'avenir, mais ils n'en étaient pas moins convaincus que les traits de base de la société humaine n'allaient pas changer. Si vous viviez dans la Chine de 1018, vous saviez qu'en 1050 l'empire des Song pouvait s'effondrer, que les Khitan pouvaient envahir le pays par le nord et

que les épidémies pouvaient faire des millions de morts. En revanche, il était clair qu'en 1050, la plupart travailleraient toujours comme paysans et tisserands, que les souverains continueraient de recruter des hommes pour leurs armées et leurs bureaucraties, que les hommes domineraient encore les femmes, que l'espérance de vie tournerait autour de quarante ans et que le corps humain serait exactement le même. Dans la Chine de 1018, donc, les parents pauvres apprenaient à leurs enfants à planter du riz et à tisser la soie ; les plus riches apprenaient aux garçons à lire les classiques confucéens, à pratiquer la calligraphie et à se battre à cheval ; aux filles à être des épouses pudiques et soumises. A l'évidence, ces talents seraient encore nécessaires en 1050.

Aujourd'hui, au contraire, nous n'avons aucune idée de quoi la Chine ou le reste du monde auront l'air en 2050. Nous ne savons pas comment les gens gagneront leur vie, comment les armées ou les bureaucraties fonctionneront, ni à quoi ressembleront les relations entre hommes et femmes. D'aucuns vivront probablement bien plus longtemps qu'aujourd'hui. Du fait du génie biologique et des interfaces directes cerveau-ordinateur, le corps humain lui-même pourrait bien subir une révolution sans précédent. Une bonne partie de ce que les enfants apprennent aujourd'hui n'aura probablement plus aucune pertinence en 2050.

A l'heure actuelle, trop d'écoles privilégient l'accumulation d'information. Cela avait du sens autrefois parce qu'elle était rare et que la censure coupait régulièrement sa lente diffusion. En 1800, l'habitant d'une petite ville provinciale du Mexique ne pouvait pas savoir grand-chose du monde : il n'y avait ni radio, ni télévision, ni quotidiens ni bibliothèques publiques. La situation était largement la même dans les villes de province en Russie, en Inde, en Turquie ou en Chine. Apprenant à chaque enfant à lire et à écrire tout en lui inculquant des rudiments de géographie, d'histoire et de biologie, les écoles modernes représentèrent un immense progrès.

[...] Au XXIème siècle, à l'opposé, nous sommes inondés d'énormes quantités d'informations.

Des habitants du monde entier sont à un clic des toutes dernières informations sur le bombardement d'Alep ou la fonte de la calotte glaciaire dans l'Arctique, mais les versions contradictoires sont si nombreuses qu'il est difficile de savoir laquelle croire. En outre, bien d'autres choses sont à portée de clic, ce qui ne nous aide pas à nous concentrer. Quand la politique ou la science paraissent trop compliquées, il est tentant de passer à des vidéos amusantes de chats, ou des échos sur les stars.

Dans un tel monde, donner plus d'informations à ses élèves est la dernière chose qu'il ait besoin de faire un enseignant. Ils en ont déjà beaucoup trop. Il leur faut plutôt apprendre à en dégager le sens, à distinguer l'important de l'insignifiant, et surtout à associer les multiples bribes d'informations en une vision d'ensemble du monde

[...] Que devrions-nous donc enseigner ? De nombreux spécialistes de pédagogie affirment que les écoles devraient passer à l'enseignement des « quatre C » : pensée critique, communication, collaboration et créativité. Plus généralement les écoles devraient minimiser l'importance des compétences techniques pour privilégier les compétences générales nécessaires dans la vie courante. La plus importante de toutes sera la capacité d'affronter le changement, dans des situations peu familières. Pour être à la hauteur du monde de 2050, il



faudra non seulement inventer des idées et des produits, mais d'abord et avant tout se réinventer sans cesse.

En effet, avec l'accélération du changement, l'économie, mais aussi le sens même de « l'être humain » sont susceptibles de se transformer. Dans le Manifeste communiste de 1848, Marx et Engels déclaraient déjà que « tout ce qui est solide se volatilise ». Mais ils pensaient surtout aux structures sociales et économiques. En 2048, les structures physiques et cognitives se volatiliseront elles aussi dans l'air ou dans un cloud de bits de données.

En 1848, des millions de gens quittaient les fermes de leurs villages pour aller travailler en usine dans les grandes villes. Là, il était peu probable de les voir changer de sexe ou ajouter un sixième sens. Et s'ils trouvaient du travail dans une usine textile, ils pouvaient espérer le conserver jusqu'à la fin de leur vie active.

[...] Mais ne prenez pas ce scénario à la lettre. Nul ne saurait prédire les changements précis dont nous serons les témoins. Tout scénario particulier risque d'être bien loin de la vérité. Si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela ait des airs de science-fiction, probablement sa description est-elle fausse. Mais si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela n'ait pas des airs de science-fiction, sa description est certainement fausse. Nous ne pouvons être sûrs des détails ; la seule certitude, c'est le changement. Un tel changement en profondeur peut fort bien transformer la structure élémentaire de la vie et faire de la discontinuité son trait saillant (1). Depuis des temps immémoriaux, la vie se divisait en deux parties complémentaires : une période d'apprentissages, suivie d'une période de travail. Dans la première, vous aviez accumulé des informations, acquis des compétences, élaboré une vision du monde et construit une identité stable. Même si à quinze ans vous passiez le plus clair de votre journée à travailler dans le champ de riz familial (plutôt qu'à l'école), votre activité la plus importante était d'apprendre : à cultiver le riz, à négocier avec les marchands cupides de la grande ville et à résoudre des conflits avec les autres villageois sur des questions de terre et d'eau. Dans la seconde partie, vous vous en remettiez à vos connaissances accumulées pour naviguer dans le monde, gagner votre vie et contribuer à la société. Bien entendu, à cinquante ans, vous continuiez à apprendre des choses nouvelles sur le riz, les marchands et les conflits, mais ce n'étaient que des petits ajustements de capacités bien rodées ?

Au milieu du XXIème siècle, l'accélération du changement et l'allongement de la durée de la vie rendront ce modèle traditionnel obsolète. La vie craquera aux entournures, il y aura de moins en moins de continuité entre les différentes périodes de l'existence. « Qui suis-je ? » sera une question plus urgente et compliquée que jamais.

Cela induira probablement des niveaux de stress considérables. Car le changement est presque toujours stressant. Passé un certain âge la plupart des gens n'aiment pas changer. A quinze ans, votre vie entière est changement. Le corps grandit, l'esprit se développe, les relations s'approfondissent. Tout est en mouvement, tout est nouveau. Vous êtes occupé à vous inventer. La plupart des ados s'en effraient, mais c'est aussi excitant. De nouveaux horizons s'offrent à vous, vous avez un monde à conquérir.

A cinquante ans, vous n'avez pas envie de changement ; la plupart ont alors renoncé à conquérir le monde. J'ai déjà été là, j'ai déjà fait ça, acheté ce T-shirt. Vous préférez de

beaucoup la stabilité. Vous avez tellement investi dans vos compétences votre carrière, votre identité et votre vision du monde que vous n'avez aucune envie de tout recommencer. Plus vous avez travaillé dur pour construire quelque chose, plus il vous est difficile de le lâcher pour faire place à du nouveau. Vous pourriez encore apprécier les expériences nouvelles et les petits ajustements, mais à la cinquantaine, la plupart des gens ne sont pas prêts à chambouler les structures profondes de leur identité et de leur personnalité.

Il y a des raisons neurologiques à cela. Bien que le cerveau adulte soit plus flexible et changeant qu'on ne le pensait autrefois, il reste moins malléable que celui d'un adolescent. Reconnecter les neurones et recâbler les synapses est une tâche sacrément difficile. Au XXIème siècle cependant, on ne peut guère se permettre la stabilité. Si vous essayez de vous accrocher à une identité stable, un travail ou une vision du monde, vous risquez fort de vous retrouver en rade tandis que le monde continuera sa course folle. L'espérance de vie étant susceptible d'augmenter, vous pourriez passer des décennies dans un état de fossile paumé. Pour garder une pertinence –économique, mais aussi sociale-, un jeune de cinquante ans devra être capable d'apprendre et de se réinventer constamment.

L'étrangeté devenant la nouvelle norme, vos expériences passées, comme celles de toute l'humanité, deviendront des guides moins fiables. Les individus et l'humanité dans son ensemble devront de plus en plus affronter des choses que personne n'aura encore jamais rencontrées : machines super-intelligentes, corps modifiés, algorithmes capables de manipuler vos émotions avec une mystérieuse précision, enchaînement rapide de cataclysmes climatiques produits par l'homme et nécessité de changer de profession tous les dix ans. Face à une situation totalement inédite, quelle est la bonne attitude ? Comment se conduire quand on est inondé d'énormes quantités d'information et qu'il n'y a absolument aucun moyen de l'absorber et de l'analyser dans sa totalité ? Comment vivre dans un monde où l'incertitude n'est pas un bug, mais un trait caractéristique ?

Pour survivre et s'épanouir dans un monde pareil, il faut beaucoup de souplesse mentales et de grandes réserves d'équilibre émotionnel. Vous devrez vous défaire régulièrement d'une partie de ce que vous connaissez le mieux pour vous sentir à l'aise dans l'inconnu.

[...] Mais alors, à quoi se fier ? A la technologie ? C'est un pari encore plus risqué. Elle peut vous aider beaucoup, mais si elle prend trop d'ascendant dans votre vie, vous pouvez devenir l'otage de son ordre du jour. Voici des milliers d'années, les humains ont inventé l'agriculture, mais cette technologie n'a enrichi qu'une minuscule élite tout en asservissant la majorité. De l'aube au crépuscule, la plupart des gens étaient occupés à arracher des herbes sauvages, à porter des seaux d'eau et à ramasser le blé sous un soleil de plomb. Vous pouvez devenir victime du même schéma.

La technologie n'est pas mauvaise en soi, si vous savez ce que vous voulez dans la vie, elle peut vous aider à l'obtenir. Si vous ne le savez pas, ce sera un jeu d'enfants pour elle de façonner vos objectifs à votre place et de prendre le contrôle de votre existence. La technologie parvenant à mieux comprendre les humains, vous pourriez vous retrouver de plus en plus à son service au lieu d'être servi par elle.

[...] Afin de réussir dans cette tâche aussi redoutable, il vous faudra consentir de gros efforts pour mieux connaître votre système opératoire. Savoir qui vous êtes et ce que vous attendez

de la vie. C'est bien entendu le plus vieux conseil du monde : connais-toi toi-même. Depuis des milliers d'années, philosophes et prophètes pressent les gens de se connaître, mais ce conseil n'a jamais été plus impérieux qu'au XXIème siècle parce que la concurrence est autrement plus sérieuse aujourd'hui qu'au temps de Lao-Tseu ou de Socrate. Coca-Cola, Amazon, Baidu et l'Etat sont tous engagés dans une course pour vous hacker, vous pirater. Pas uniquement votre Smartphone, votre ordinateur ou votre compte en banque, mais vous-même et votre système opératoire organique. Sans doute avez-vous entendu dire que nous vivons à l'époque du piratage des ordinateurs, mais ce n'est guère qu'une moitié de la vérité. En vérité, nous sommes entrés dans l'ère du hacking des êtres humains. Dès maintenant, les algorithmes vous surveillent. Ils observent vos déplacements, vos achats, vos rencontres. Bientôt, ils surveilleront vos pas, votre respiration, les battements de votre cœur. Ils s'en remettent aux Big Data et à l'apprentissage automatique pour vous connaître de mieux en mieux. Et du jour où ces algorithmes vous connaîtront mieux que vous ne vous connaissez vous-mêmes, ils pourront vous contrôler et vous manipuler sans que vous n'y puissiez grand-chose. Vous vivrez dans la matrice (2) ou dans le Truman Show. Somme toute, c'est une simple question empirique : si les algorithmes comprennent ce qui se passe en vous réellement mieux que vous ne le comprenez, c'est à eux que reviendra l'autorité.

Bien entendu, vous pourriez être heureux de céder toute l'autorité aux algorithmes et de les laisser décider pour vous et le reste du monde. En ce cas, détendez-vous, et bon voyage ! Vous n'avez rien à faire. Les algorithmes s'occuperont de tout. Si toutefois, vous voulez garder un certain contrôle sur votre existence personnelle et l'avenir de la vie, vous devez courir plus vite que les algorithmes, plus vite qu'Amazon et l'Etat, et apprendre à vous connaître avant eux. Pour courir vite, ne prenez pas trop de bagages. Abandonnez toutes vos illusions, elles sont trop lourdes.

(1) - saillant : marquant, remarquable.

(2) - matrice : moule qui permet de reproduire une forme.

Avril 2019

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

**Exercice 1.**

Soient  $f$  et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x, y) = f(x + \phi(y))$ .

1. Par composition,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

2. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x + \phi(y)), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \phi'(y)f'(x + \phi(y))$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x + \phi(y)), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \phi'(y)f''(x + \phi(y)).$$

On en déduit l'égalité demandée :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

**Exercice 2.**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = f(b)$  et  $f'(a) = 0$ . Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

1. Il est clair que  $\Phi$  est continue sur  $]a, b]$  (comme rapport de deux fonctions continues). D'après les hypothèses et la définition de la dérivée à droite d'une fonction en un point, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \Phi(x) = f'(a) = 0 = \Phi(0).$$

D'où la continuité de  $\Phi$  au point  $a$ .

2. La fonction  $\Phi$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , de plus  $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ . D'après le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\Phi'(c) = 0$ . Or pour tout  $x \in ]a, b[$

$$\Phi'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{x - a} \left( f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

Puisque  $c \neq a$ ,  $\Phi'(c) = 0 \implies f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ . Ce qu'il fallait montrer.

## Problème.

Dans tout le problème l'entier  $n$  est strictement positif ( $n \geq 1$ ) et l'expression  $C_n^p$  désigne le nombre des parties ayant  $p$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments.

### Partie I

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$U_n(x) = x^n(x-1)^n, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} U_n(x).$$

1. (i) On utilise la règle des équivalents : la fonction  $f(x) = x^{a-1}(x-1)^k$  est définie et continue sur  $]0, 1]$ , et au voisinage de 0,  $f(x) \sim x^{a-1}$ . Comme, de plus  $a-1 > -1$  ; la fonction  $x \mapsto x^{a-1}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . D'où l'intégrabilité de  $f$  sur  $]0, 1]$ .
- (ii) On fixe  $0 < b < 1$  et on effectue une intégration par parties sur le segment  $[b, 1]$ , en posant  $u(x) = (x-1)^k$ ,  $v'(x) = x^{a-1}$ , soit  $u'(x) = k(x-1)^{k-1}$  (ce qui nécessite  $k \geq 1$ ) et  $v(x) = x^a/a$ . On obtient

$$\int_b^1 x^{a-1}(x-1)^k dx = \left[ \frac{x^a}{a}(x-1)^k \right]_{x=b}^{x=1} - \frac{k}{a} \int_b^1 x^a(x-1)^{k-1} dx. \quad (1)$$

La fonction  $x \mapsto x^a(x-1)^{k-1}$  est intégrable sur  $[0, 1]$  car elle est continue  $[0, 1]$ . La seconde intégrale admet donc une limite lorsque  $b$  tend vers 0, ce qui donne:  $I_{a,k} = -\frac{k}{a} I_{a+1,k-1}$  si  $k > 0$  et  $I_{a,0} = 1/a$ .

- (iii) On applique de nouveau la formule de la question précédente à  $I_{a+1,k-1}$  (possible car  $a+1 > 0$ , et tant que  $k-1 \geq 0$ ), ce qui donne:

$$I_{a,k} = \frac{-k(-k+1) \cdots (-1)}{a(a+1) \cdots (a+k-1)} I_{a+k,0} = \frac{(-1)^k k!}{a(a+1) \cdots (a+k)}.$$

- (iv) L'intégrale de  $U_n$  correspond au cas particulier  $a = n+1$ ,  $k = n$  :

$$\int_0^1 U_n(x) dx = I_{n+1,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)(n+2) \cdots (2n+1)}.$$

En multipliant par  $n!$  au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\int_0^1 U_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{1}{C_{2n}^n}.$$

2. Le polynôme  $U_n$  est de degré  $2n$ , donc  $P_n$  est de degré  $2n - n = n$ . De plus  $U_n(x) = x^{2n} + Q(x)$  où  $Q$  est un polynôme de degré  $\deg(Q) < 2n$ , ce qui entraîne, en dérivant  $n$  fois,  $U_n^{(n)}(x) = 2n(2n-1) \cdots (n+1)x^n + Q^{(n)}(x)$ . Le coefficient dominant de  $P_n$  est donc  $d_n = \frac{2n(2n-1) \cdots (n+1)}{n!} = C_{2n}^n$ .

3. (i) On a  $U_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} x^{n+k}$ , en dérivant  $n$  fois, on obtient

$$U_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k,$$

soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k! n!} x^k,$$

- (ii) on utilise la formule de Leibnitz, ce qui est possible puisque les fonctions sont polynômiales, donc  $n$  fois dérivables:

$$\begin{aligned} U_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(k)} ((x-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} (x-1)^k, \end{aligned} \quad (2)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 x^{n-k} (x-1)^k. \end{aligned} \quad (3)$$

4. Sachant que le polynôme  $P_n$  est de degré  $n$ , on peut alors obtenir son coefficient dominant avec la seconde expression ; le monôme de degré  $n$  de  $x^{n-k}(x-1)^k$  est  $x^n$ . Ainsi  $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ .

## Partie II

Étant donnés deux réels  $a$  et  $b$ , strictement positifs ( $a > 0, b > 0$ ), soit  $J(a, b)$  l'intégrale suivante

$$J(a, b) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

1. La fonction  $t \mapsto f(t) = t^{a-1}/(1+t^b)$  est définie sur  $]0, 1]$ , continue, positive et dominée au voisinage de 0 par  $1/t^{1-a}$ ; or la fonction  $t \mapsto 1/t^{1-a}$  est continue sur  $]0, 1]$ , positive et intégrable sur  $]0, 1]$  car  $1-a < 1$ . On peut alors appliquer la règle de domination :  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

2. Pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\frac{1}{1+tb} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb}$ , donc  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb+a-1}$ .

On pose pour  $t \in [0, 1[$ ,  $w_n(t) = (-1)^n t^{nb+a-1}$ . Pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\frac{|w_{n+1}(t)|}{|w_n(t)|} = t^b < 1$  et donc la suite  $(|w_n(t)|)_n$  décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série  $\sum w_n$  converge simplement sur  $I = [0, 1[$ .

Soit  $0 < \delta < 1$ . Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout  $x \in [0, \delta]$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k(x) \right| \leq |w_{n+1}(x)| \leq |w_{n+1}(\delta)|.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |w_{n+1}(\delta)| = 0$ , la suite  $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, \delta]$ , c'est à dire la série  $\sum w_n$  converge uniformément sur  $[0, \delta]$ . D'après le théorème d'inversion de série et d'intégrale, on a

$$\int_0^\delta f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\delta (-1)^n t^{nb+a-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a}. \quad (4)$$



Le terme de gauche de cette dernière inégalité tend quand  $\delta$  tend vers 1, vers  $\int_0^1 f(t)dt$ .

Étudions maintenant la limite lorsque  $\delta$  tend vers 1 du terme de droite. C'est encore une série alternée : posons  $v_n(\delta) = (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a}$ , cette suite satisfait aux critères des séries alternées

et on a  $|R_n(\delta)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(\delta) \right| \leq \frac{1}{(n+1)b+a}$  qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On en déduit que la série  $\sum v_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème

d'inversion de série et de limite, on a alors  $\lim_{\delta \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{nb+a}$ .

Le résultat est une conséquence de l'inégalité (4).

3. On considère le cas particulier  $a = 1$  et  $b = 3$  :  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$ .

Pour calculer cette intégrale, on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples, soit

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{3} \frac{-t+2}{(t^2-t+1)}.$$

On cherche ensuite les primitives de chaque terme. Regardons le deuxième membre. Posons

$u = t^2 - t + 1$  alors  $u' = 2t - 1$ . Ainsi,  $-t + 2 = -\frac{1}{2}(2t - 1) + \frac{3}{2}$  et  $\frac{-t+2}{t^2-t+1} = -\frac{1}{2} \frac{u'}{u} + \frac{3}{2} \frac{1}{u}$ .

On utilise aussi le fait que  $u = (t-1/2)^2 + 3/4$  et  $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctn}(t/a)$ . Par conséquence

$$\int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{2} \ln|t^2-t+1| + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctn}(2t-1)\sqrt{3}.$$

Ce qui donne  $I = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ .

Étant donné un réel  $a$  strictement compris entre  $-1$  et  $1$  ( $-1 < a < 1$ ), soit  $\varphi_a$  la fonction définie sur l'intervalle ouvert  $I = ]-1, 1[$  par la relation suivante :

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}.$$

4. La fonction  $x \mapsto \varphi_a(x)$  est continue positive sur  $] -1, 1[$ .

Au voisinage de  $-1$ ,  $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1+a)\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$  et  $\varphi_a$  est dominée par  $C_1(1+x)^{-1/2}$ , où  $C_1$  est une constante positive. Or la fonction  $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$  est définie, continue, positive sur  $] -1, 0]$ , et y est intégrable. Donc  $\varphi_a$  est intégrable sur  $] -1, 0]$ .

Au voisinage de  $1$ ,  $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1-a)\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$  et  $\varphi_a$  est dominée par  $C_2(1-x)^{-1/2}$ , où  $C_2$  est une constante positive. Or la fonction  $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$  est définie, continue, positive sur  $] 0, 1]$ , et y est intégrable. Donc  $\varphi_a$  est intégrable sur  $] 0, 1]$ .

Soit  $K(a)$  l'intégrale de la fonction  $\varphi_a$  sur l'intervalle  $I$  :

$$K(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx.$$



5. De nouveau, il s'agit d'effectuer une permutation série-intégrale, avec les mêmes problèmes que précédemment. Soient  $-1 < a < 1$ ,  $0 < \delta < 1$  et posons

$$K_\delta(a) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Pour tout  $x \in [-\delta, \delta]$  on a,

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De plus, il existe une constante  $C_\delta > 0$ , tel que pour tout  $x \in [-\delta, \delta]$ ,  $|(ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}| \leq C_\delta a^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n = \frac{1}{1-a}$  est convergente. La série de terme général  $Z_n = (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  converge normalement, donc uniformément sur  $[-\delta, \delta]$ . On peut alors appliquer le théorème de permutation série-intégrale et on a

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Lorsque l'entier  $n$  est impair,  $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$  car la fonction intégrée est impaire. Donc

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On applique de nouveau l'inversion de limite ( $\delta \rightarrow 1$ ) et série comme précédemment : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $0 < \delta < 1$ ,  $a^n \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq a^n \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n = \frac{1}{1-a}$  est convergente. La série converge donc uniformément en  $\delta \in [-1, 1]$ . En appliquant le théorème d'inversion de limite et somme, et obtient

$$K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

6. On utilise le résultat suivant du cours: pour tout réel  $\alpha$  et  $x \in ]-1, 1[$  :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On l'applique pour  $\alpha = -1/2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)((-1/2)-1)((-1/2)-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(3/2)((2n-1)/2)}{n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des termes pairs de 2 à  $2n$ , il vient, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n)}{2^n \times (2 \times 4 \times \cdots \times (2n)) \times n!} x^{2n}.$$

Dans les termes pairs du dénominateur on factorise par 2, il vient,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

et pour tout  $a \in ]-1, 1[$ ,

$$K(a) = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n}.$$

7. Si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle  $] -a, a[$ , avec  $a > 0$ , alors leurs coefficients sont égaux. Comme la question 5 a donné un développement en série entière de la fonction  $K$ . Par identification, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$



1

AVRIL 2019

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

**Exercice n° 1**

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont des nombres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .

On a :  $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab & b^2 \\ ab & -\lambda & ab \\ b^2 & ab & a^2 - \lambda \end{vmatrix}$ . En soustrayant la troisième colonne à la première, puis en additionnant la troisième ligne à la première, on obtient :

$$\det(M - \lambda I) = (a^2 - b^2 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & 2ab & a^2 + b^2 - \lambda \\ 0 & -\lambda & ab \\ -1 & ab & a^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + b^2 - a^2)(-\lambda^2 + (a^2 + b^2)\lambda + 2a^2b^2)$$

On obtient trois valeurs propres distinctes :  $\lambda = a^2 - b^2$  ;  $\lambda = \frac{(a^2 + b^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ , où  $\Delta = a^4 + b^4 + 10a^2b^2$

2. Déterminer les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $M$  soit la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

La matrice  $M$  étant symétrique, elle sera une matrice de projection orthogonale si et seulement

si  $M^2 = M$ . On obtient :  $M^2 = \begin{pmatrix} a^4 + b^4 + a^2b^2 & ab(a^2 + b^2) & 3a^2b^2 \\ ab(a^2 + b^2) & 2a^2b^2 & ab(a^2 + b^2) \\ 3a^2b^2 & ab(a^2 + b^2) & a^4 + b^4 + a^2b^2 \end{pmatrix}$ , d'où le

système :

$$\begin{cases} a^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 \\ ab = ab(a^2 + b^2) \\ 0 = 2a^2b^2 \\ b^2 = 3a^2b^2 \end{cases}$$

Si  $a=0$ , alors  $b=0$ , et on a la matrice nulle.

Si  $b=0$ , alors  $a^2 = 1$  et  $a = \pm 1$  (mais la valeur  $-1$  ne convient pas), donc  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ce

qui correspond à la projection orthogonale (dans l'espace) sur le plan des axes  $Ox$  et  $Oz$ .

3. La matrice  $M$  peut-elle être associée à une symétrie orthogonale ?

On doit avoir  $M^2 = I$ , soit en particulier (cf. la question précédente) :

$\begin{cases} 2a^2b^2 = 1 \\ 3a^2b^2 = 0 \end{cases}$ , ce qui est impossible. Par conséquent  $M$  ne peut être associée à une matrice de symétrie.

## Exercice n° 2

On considère la matrice  $A$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n > 1$ .

Cette matrice admet 1, 2 et 3 pour valeurs propres et comme elles sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous espace vectoriel propre associée à 1 est engendré par :  $e_1 = (1, 0, 0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 2 est engendré par :  $e_2 = (1, 1, 0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 3 est engendré par :  $e_3 = (1, 2, 2)$

La matrice de passage est :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (on vérifie que  $PP^{-1} = I$ ).

On a :  $A^n = P \Delta^n P^{-1}$  et on obtient :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & -2^n + (1 + 3^n)/2 \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Remarque : On pouvait penser à écrire :  $A = \Delta + J$  avec  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

La puissance de ces deux matrices est plus facile à calculer puisque :  $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$  ;

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J^3 = 0$ . Mais la formule du binôme ne s'applique pas car  $\Delta J \neq J \Delta$ .

2. Déterminer les sous espaces vectoriels stables par A.

Un vecteur  $u$  est stable par A si  $Au = \lambda u$  (ce qui correspond aux vecteurs propres).

Les sous espaces vectoriels stables par A sont donc :  $\{0\}$ , les 3 droites vectorielles engendrées respectivement par  $e_1, e_2, e_3$ , les 3 plans vectoriels engendrés par deux de ces vecteurs propres et enfin l'espace lui-même.

### Exercice n° 3

On considère le système linéaire suivant : 
$$\begin{cases} x + y + z - p x = 0 \\ x + y + z - q y = 0 \\ x + y + z - p z = 0 \end{cases}$$
 où  $(x, y, z)$  sont les inconnues réelles et  $(p, q)$  des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice associée au système.

La matrice du système est :  $M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-p \end{pmatrix}$ , puis

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{en}$$

soustrayant la troisième colonne à la première) et

$$\det(M - \lambda I) = (p+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-p-\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{en additionnant la première ligne à la}$$

troisième). On obtient finalement :  $\det(M - \lambda I) = -(p+\lambda)(\lambda^2 - \lambda(3-p-q) + pq - 2q - p)$

La matrice admet donc 3 valeurs propres réelles distinctes :  $-p; \frac{3-p-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ , où  $\Delta = (p-q)^2 + 2(q-p) + 9 > 0$ .

2. Déterminer les plus petits entiers non nuls  $(p, q)$  tels que l'espace vectoriel des solutions de ce système soit de dimension 1.

Si l'espace vectoriel des solutions est de dimension 1, forcément la déterminant de la matrice est nul (sinon l'origine serait la seule solution), mais cette condition n'est pas suffisante.

On a :  $\det M = -p(pq - p - 2q)$ , soit  $(pq - p - 2q) = 0$  ou encore  $p = \frac{2q}{q-1} (q \neq 1)$

Pour  $q=2$ , on trouve  $p=4$ . Il faut vérifier que c'est bien un espace de dimension 1. Et on obtient la droite vectorielle définie par :  $y=2x=2z$ .

3. On suppose que  $q = p$ . La matrice M est-elle inversible ? orthogonale ?

On obtient  $\det M = p^2(3-p)$  et la matrice est inversible pour  $p \neq 0$  et  $p \neq 3$

Comme la matrice est symétrique, elle sera orthogonale si  $M^2 = I$ . L'élément de la première ligne et première colonne de  $M^2$  est égal à  $(1-p)^2 + 2$ , ce qui ne peut être égal à 1. La matrice ne peut être orthogonale.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :  
 $f(x) = x^3 + x - \ln x$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation :  $f(x) = 0$

- Si  $0 < x < 1$ , alors  $-\ln x > 0$  et  $f(x) > 0$

- Si  $x > 1$ , on a :  $f'(x) = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x}$  et  $f''(x) = 6x + \frac{1}{x^2} > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[2, +\infty[$ . Par conséquent  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$  et l'équation n'admet pas de solution.

2. Calculer  $I = \int_1^e f(x) dx$

$$\text{On a : } I = \int_1^e f(x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x \ln x + x \right]_1^e = \frac{e^4 + 2e^2 - 7}{4}$$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :  $f(x) = e$  (nombre de Neper).

Soit  $g(x) = f(x) - e$ . Les dérivées de  $g$  sont les mêmes que pour  $f$ . La fonction  $g'$  est strictement croissante de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur  $\alpha \in ]0, 1[$ , telle que :  $g'(\alpha) = 0$  ( $\alpha < 1$ ). La fonction  $g$  est donc strictement décroissante sur  $]0, \alpha[$  et croissante sur  $]\alpha, +\infty[$  et elle admet un minimum négatif en  $\alpha$  (on a  $g(1) = 2 - e$ ). L'équation admet donc deux solutions : l'une appartenant à l'intervalle  $]0, \alpha[$  ( $\lim_{0^+} g = +\infty$ ) et l'autre à l'intervalle  $]\alpha, +\infty[$ , toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice n° 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]-1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \frac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux,  $q > 0$ .  $Q$  désigne l'ensemble des nombres rationnels et  $Q^* = Q - \{0\}$



1. Montrer que  $f$  est continue en zéro.

En effet  $f$  est continue en 0 si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ .

Si  $x \in I - Q$ , on a :  $f(x) = \frac{x}{1+x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$  et si  $x \in I \cap Q^*$ ,  $\left| \frac{p}{q} \right| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x}{1+x+1/q} \right| \leq |x|$ .

La fonction  $f$  est donc continue en zéro.

2. Etudier la continuité de  $f$  sur  $I \cap Q^*$

Soit  $x_0 = \frac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$ ,  $\lim_{x \in I-Q \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{1+x} = \frac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \frac{x_0}{1+x_0+1/q_0}$ , donc  $f$  n'est pas continue sur  $Q^* \cap I$

3. Etudier la continuité de  $f$  sur  $I - Q$

Montrons que  $f$  est continue sur  $I - Q$ . Elle est continue  $x_0$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Si  $x \in I - Q$ , l'assertion précédente est vérifiée, car la restriction de  $f$  à  $I - Q$  est continue.

Si  $x = \frac{p}{q} \in I \cap Q^*$ , alors

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x}{1+x+1/q} - \frac{x_0}{1+x_0} \right| = \frac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x-x_0)} \leq \frac{|x-x_0|+|x_0|/q}{(1+x_0)^2/2} \quad \text{dès}$$

que  $|x - x_0| \leq (1+x_0)/2$ , car  $1+x_0 + \frac{1}{q} + x - x_0 \geq x_0 + \frac{1}{q} - |x - x_0| \geq \frac{1+x_0}{2}$

Considérons les nombres rationnels tels que  $\frac{|x_0|}{q} \geq \frac{(1+x_0)^2}{4} \varepsilon$  ou  $q \leq \frac{4|x_0|}{(1+x_0)^2} \varepsilon$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit  $\beta$  le minimum de la distance de  $x_0$  à ces points. On a alors pour  $x \in I \cap Q^*$  :

$$|x - x_0| \leq \inf \left( \frac{1+x_0}{2}, \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4} \varepsilon \right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Soient  $a$  et  $x$  deux nombres réels strictement positifs. On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_0 = a$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$ ;  $b_0 = \frac{x}{a_0}$ ;  $b_n = \frac{x}{a_n}$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.

On vérifie aisément par récurrence que ces deux suites sont à termes strictement positifs. De plus  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ , par conséquent elles seront monotones de sens contraire.

Si ces suites sont adjacentes, elle converge vers la même limite  $l$ , solution de l'équation :  $l = \frac{x}{l}$  ou encore  $l = \sqrt{x}$ .

1) Si  $a > \sqrt{x}$ , on vérifie par récurrence que  $a_n > \sqrt{x}$  pour tout  $n$ . Par conséquent  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{(\sqrt{x} - a_n)(\sqrt{x} + a_n)}{a_n} \right) < 0$ . La suite est décroissante, minorée par  $\sqrt{x}$  et elle converge vers  $\sqrt{x}$ . La suite  $(b_n)$  est croissante majorée par  $\sqrt{x}$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$  et les suites sont adjacentes.

2) Si  $a < \sqrt{x}$ , on a encore deux suites adjacentes, mais avec des monotonies inversées.

2. Soit la suite  $(x_n)$  définie par récurrence par  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ . Etudier la convergence de cette suite.

- Si  $x > 1$ , on vérifie par récurrence que  $x_n > 1$  pour tout  $n$ . Puis  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} < 1$ , la suite est donc décroissante et minorée par 1, donc convergente vers  $l$  solution de  $l = \sqrt{l}$ , soit  $l=1$ .

- Pour  $0 < x < 1$ , on arrive à la même conclusion par un raisonnement analogue.

3. On considère, pour  $a > 0$ , les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :  $f(x) = \sqrt{ax}$ ;  $g(x) = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a})$ . Déterminer, selon les valeurs de  $a$ , le nombre de points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

On a :  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{ax} = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a}) \Leftrightarrow x - 2a\sqrt{a}\sqrt{x} + a^2 = 0$ . En posant  $t = \sqrt{x}$ , on a l'équation :  $t^2 - 2a\sqrt{a}t + a^2 = 0$  et  $\Delta = a^2(a-1)$ . En conclusion :

- Si  $a > 1$ , l'équation admet deux racines et donc les graphes ont deux points d'intersection.

- Si  $a = 1$ , l'équation admet une racine et donc les graphes ont un seul point d'intersection.

- Si  $0 < a < 1$ , l'équation n'admet pas de racines et donc les graphes n'ont pas de points d'intersection.

### Exercice n° 7

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $f$  une fonction numérique définie par :  $f(x) = k x e^{-\lambda x^2}$  sur l'ensemble des nombres réels positifs, où  $k$  et  $\lambda$  sont des paramètres réels strictement positifs.

1. Déterminer  $k$  et  $\lambda$  pour que  $f$  soit une fonction de densité sur l'ensemble des nombres réels positifs.

$$\text{Il faut que } \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} k x e^{-\lambda x^2} dx = \left[ -\frac{k}{2\lambda} e^{-\lambda x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{2\lambda} = 1 \text{ pour } k = 2\lambda.$$

2. On suppose que  $f$  est la fonction de densité de  $X$ . Calculer l'espérance de  $X$  (on rappelle que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).

On a :

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = 2\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = 2\lambda \int_0^{\infty} x \cdot x e^{-\lambda x^2} dx = 2\lambda \left( \left[ -\frac{1}{2\lambda} x e^{-\lambda x^2} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx \right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx$$

, d'où  $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$

3. Etudier les variations et tracer le graphe de  $f$  (on étudiera en particulier sa convexité).

La dérivée de  $f$  est égale à :  $f'(x) = 2\lambda e^{-\lambda x^2} (1 - 2\lambda x^2)$  qui est nulle pour  $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$  avec

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = \sqrt{2\lambda} e^{-1/2}$ . La fonction est croissante sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, +\infty\right]$ .

La fonction est convexe pour  $x > \sqrt{3/2\lambda}$  et concave sinon.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ENSEA-ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ISSEA-YAOUNDE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

**Exercice 1.**

Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}.$$

**Exercice 2.**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier en  $x = 0$ .
2. Étudier l'existence de  $f''$  en tout point de  $\mathbb{R}$ .

**Problème.**

1. On considère dans cette question la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} = \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k-1}{2k} \right).$$

- (a) On pose, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $v_n = \sqrt{n} u_n$ .  
Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
- (b) Étudier la nature de la série de terme général  $w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (c) Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. On note  $L$  sa limite.  
Comparer, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , les réels  $u_n$  et  $\frac{L}{\sqrt{n}}$ .

2. On considère dans cette question la fonction  $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}$  pour  $x \in [0, 1]$ .

- (a) Déterminer la dérivée d'ordre  $n$  de  $\varphi : x \mapsto \varphi^{(n)}(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .
- (b) Soit  $x \in [0, 1[$ . La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à  $\varphi$  sur  $[0, x]$  s'exprime sous la forme  $\varphi(x) = P_n(x) + R_n(x)$  où  $P_n$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  et

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt.$$

Exprimer les coefficients de  $P_n$  en fonction de  $n$ . Donner la valeur de  $P_4$ .

- (c) Démontrer la majoration

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{2} u_n \int_0^x (1-t)^{-1/2} dt.$$

On pourra remarquer que  $x-t \leq 1-t$ .

En déduire que

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq u_n.$$

- (d) Démontrer que la suite de fonctions polynomiales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $\varphi$ .

Dans la question suivante, on note  $Q_n$  le polynôme tel que  $Q_n(x) = P_n(1-x^2)$ .

- (e) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $M$  une constante strictement positive. Démontrer que si  $N \geq \frac{L^2 M^2}{\varepsilon^2}$ ,

$$\forall x \in [-1, 1], |x| - Q_N(x) \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

3. On considère dans toute la suite une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

On admet qu'il existe un entier naturel  $n \geq 2$  tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |x-y| < 1/n \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dans la suite du problème,  $n$  désigne l'entier ainsi défini.

- (a) Soit  $g$  la fonction telle que  $\forall k, 0 \leq k \leq n, g(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$  et  $g$  est affine sur chacun des intervalles  $[k/n, (k+1)/n], 0 \leq k \leq n-1$ .

Déterminer l'expression de  $g(x)$  lorsque  $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ .

- (b) Démontrer que  $\forall x \in [0, 1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ . On pourra remarquer que l'on peut écrire  $g(x)$  sous la forme  $\alpha f(\frac{k}{n}) + (1-\alpha)f(\frac{k+1}{n})$ .

4. Soient  $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  et  $B_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  les deux matrices suivantes :

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & n \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \ddots & \ddots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} & 1/2 & 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{2n} \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1/2 & \ddots & 1/2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 1/2 \\ \frac{1}{2n} & 0 & \ddots & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

de termes généraux respectifs :

$$(a_{i,j} = |i - j|)_{1 \leq i,j \leq n+1}$$

$$\begin{aligned} b_{i,i} &= -1 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n+1 \\ b_{1,1} &= b_{n+1,n+1} = -(1/2) + (1/2n) \\ \text{si } |i - j| &= 1 \text{ alors } b_{i,j} = 1/2 \\ b_{1,n+1} &= b_{n+1,1} = 1/2n \\ b_{i,j} &= 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $\det(A_{n+1})$  en fonction de  $n$  : on effectuera les opérations suivantes ;  
pour  $i$  allant de  $n+1$  à 2 remplacer la ligne  $L_i$  par la ligne  $L_i - L_{i-1}$   
pour  $j$  allant de 2 à  $n$  remplacer la colonne  $C_j$  par la colonne  $C_j + C_1$
- (b) Montrer que  $A_{n+1}$  et  $B_{n+1}$  sont inversibles et que  $A_{n+1}^{-1} = B_{n+1}$ .
5. Soit  $E_{n+1}$  l'espace vectoriel des fonctions  $g$  définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $g$  soit affine sur chacun des intervalles  $[k/n, (k+1)/n]$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Soit d'autre part  $\Phi$  l'application de  $E_{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  telle que

$$\forall g \in E_{n+1}, \quad \Phi(g) = (g(k/n))_{0 \leq k \leq n}.$$

- (a) Démontrer que  $\Phi$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et expliciter l'unique fonction  $g_\alpha \in E_{n+1}$  telle que  $\Phi(g) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  où  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .
- (b) Pour tout entier  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , on note  $f_j \in E_{n+1}$  l'application

$$t \rightarrow f_j(t) = \left| t - \frac{j}{n} \right|.$$

Expliciter la matrice de la famille des vecteurs  $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  
En déduire que la famille  $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$  est une base de  $E_{n+1}$ .

- (c) Soit  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $g_\alpha \in E_{n+1}$  la fonction définie à la question 5. (a), telle que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $g_\alpha(k/n) = a_k$ .

Démontrer qu'il existe  $n+1$  réels  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x).$$

Déterminer la valeur des coefficients  $\lambda_k$ ,  $0 \leq k \leq n$  en fonction de  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ .

6.  $g$  désigne dans cette question la fonction étudiée à aux questions 3. (a) et 3. (b) et  $Q_N$  le polynôme obtenu à la question 2. (e) pour la valeur  $\varepsilon > 0$  et la valeur  $M = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$ .

- (a) Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $g = g_\alpha$ .

En déduire à l'aide de  $f$  la valeur des coefficients  $\lambda_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , obtenus à la question 5. (c).

- (b) On pose

$$R(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q_N(x - \frac{k}{n}).$$

Démontrer que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon.$$

- (c) En déduire le théorème de Weierstraß : toute fonction continue sur  $[0, 1]$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$ .

AVRIL 2020

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS voie B Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Le travail divise-t-il les humains ?

**Sujet n° 2**

« Quand les femmes sont éduquées, leurs pays deviennent plus forts et plus prospères » indiquait Michelle OBAMA lors d'un voyage en Afrique en 2013. Développez cette citation.

**Sujet n° 3**

De nombreux États africains souhaitent développer le secteur du tourisme. Quels sont les avantages et les difficultés qu'implique cette démarche ?



AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**  
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

**Exercice n° 1**

1. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $m$ , les solutions du système d'équations linéaires suivant, où  $a, b, c$  sont des nombres réels :

$$\begin{cases} x - y + (m - 2)z = a \\ 2x + (m - 4)y - 2z = b \\ (m + 2)x - 4y - 3z = c \end{cases}$$

2. On note  $f$  l'application linéaire associée à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ ,

où  $m$  est un paramètre réel.

- Pour quelles valeurs de  $m$ , l'application  $f$  est-elle bijective ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$ , le noyau et l'image de  $f$  sont-ils supplémentaires ?

3. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$  dans les deux cas suivants :  $m = 2$  et  $m = 1$  (on indiquera si la matrice est diagonalisable ou non).

**Exercice n° 2**

Pour  $n$  entier naturel, on considère l'intégrale  $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} dx$ .

1. Montrer qu'il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \in [0, \pi/4] \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad \text{et calculer } I_0.$$

2. Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .

3. Calculer  $I_2$ .

4. Etudier la convergence de la suite  $(I_n)$ .

### Exercice n° 3

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty, 1[$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty, 1[$ .

2. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

3. Tracer le graphe de  $f$  (on précisera les points d'inflexion).

4. Calculer l'aire comprise entre le graphe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=1/2$  et  $x=-1/2$ .

### Exercice n° 4

Pour  $\alpha$  entier naturel, on considère la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  (ensemble des nombres réels positifs) par :  $f_\alpha(x) = \alpha x + \ln(1+x^2)$

1. Etudier les variations de  $f_\alpha$  selon les valeurs de  $\alpha$  (on précisera la convexité ou non de la fonction).

2. Tracer le graphe de  $f_2$ .

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f_0(u_n)$  et  $u_0 > 0$ .

4. Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie par la relation de récurrence :  $v_{n+1} = f_\alpha(v_n)$  et  $v_0 > 0$ , avec  $\alpha > 1$ .

5. Calculer  $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x) dx$

**Exercice n° 5**

Pour  $k \in \mathbb{R}$ , soit la fonction  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f_k(x, y) = \left( \left( \frac{1+k}{2} \right)x + \left( \frac{1-k}{2} \right)y, \left( \frac{1-k}{2} \right)x + \left( \frac{1+k}{2} \right)y \right)$$

1. Pour quelles valeurs de  $k$ , la fonction  $f_k$  est-elle bijective ?
2. Soit  $f_k^{-1}$  l'application réciproque de  $f_k$  quand elle existe. Comparer  $f_k^{-1}$  et  $f_{1/k}$ .
3. Quels sont les invariants de  $f_k$  ?
4. On suppose  $k=3$ , quelle est l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 par  $f_3$  ?
5. Peut-on trouver une valeur de  $k$  pour laquelle  $f_k$  correspond à une projection sur une droite (que l'on précisera), à une symétrie par rapport à une droite (que l'on précisera) ?



AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

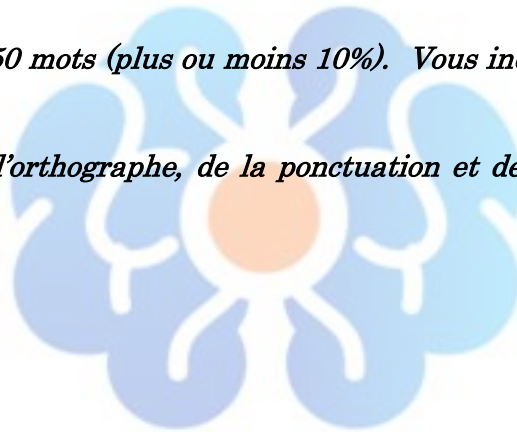
**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Le texte ci-après est tiré du livre de Monsieur Serge TISSERON, intitulé : « *Le jour où mon robot m'aimera. Vers l'empathie artificielle* », paru aux éditions Albin Michel en Septembre 2015.

*Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.*

*Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.*



En juin 2014, le groupe japonais SoftBank a lancé le robot Pepper en jouant largement sur la confusion entre l'homme et la machine. Lors de sa présentation devant la presse mondiale, son président Masayoshi Son a déclaré : « Pour la première fois dans l'histoire de la robotique, nous présentons un robot avec un cœur. » Un robot qui a du cœur ? Comme Rodrigue, donc, et prêt à craquer pour les beaux yeux de Chimène ? Ne rêvons pas, et sachons raison garder, même si le président de SoftBank ne nous y encourage guère. Pepper n'aura pas plus de cœur qu'une machine à laver, mais à la différence de celle-ci, il sera capable de simuler l'affection que tout être humain attend de ses semblables – ou au moins de certains d'entre eux. Et c'est ce qui donnera envie de l'acheter ! En effet, nous n'avons guère envie d'héberger sous notre toit une créature de métal qui nous batte constamment aux échecs ou au Memory (1), qui nous demande si nous avons bien pris nos médicaments et nous rappelle l'heure d'aller nous coucher.

Ce n'est donc pas l'intelligence des robots qui sera mise en avant pour nous convaincre d'en acheter, mais leur « cœur ». L'intelligence artificielle fait peur, l'empathie artificielle sera là pour nous rassurer. C'est elle qui sera le fer de lance de leur promotion. Et pour nous en

convaincre, il est très important que nous puissions communiquer avec ces robots exactement comme avec un être humain, c'est-à-dire en utilisant la voix, le regard et le geste. Telle est donc la première référence qui va nous guider dans notre projet de penser nos relations aux robots : l'homme. Pourtant nous ne cesserons probablement jamais tout à fait de considérer les robots comme des machines. Nous reporterons inévitablement sur eux des attentes et des espoirs que nous avons renoncé à satisfaire avec des humains, exactement comme nous le faisons déjà avec nos objets familiers.

Notre seconde référence sera donc les relations de l'homme à ces objets et nous verrons qu'elle est beaucoup plus riche et complexe que nous le pensons. Enfin, les progrès technologiques nous permettront très vite de donner à nos robots les apparences de notre choix, y compris le nôtre ou celle d'un proche (...)

### *Mon robot, les émotions et moi.*

Le PDG de SoftBank qui parle de « cœur » pour vendre les qualités de son robot Pepper n'est pas le seul à jouer sur cette fibre. Depuis 2006, l'Europe développe un projet intitulé *Feelix-croissance*. La croissance, tout le monde comprend de quoi il s'agit. Quant au mot « *feelix* », il est fabriqué à partir des mots anglais *feel*, *interactive* et *express* qui signifient respectivement « sentir », « interagir » et « exprimer ». Ce programme s'est fixé comme objectif de concevoir des robots capables de décrypter les manifestations émotionnelles des humains et de leur répondre de façon adaptée. Et comme toute grande entreprise à destination commerciale, il est porté par un slogan : *Emotional robot has empathy*, en français : Un robot émotionnel a de l'empathie. Les émotions seraient-elles donc indispensables à un robot ? Pas du tout. Un robot est un système capable de percevoir les informations du monde ambiant grâce à ses nombreux capteurs, d'avoir une représentation de ce monde et de s'y adapter. Cette définition ne nécessite pas que les robots aient une apparence humaine, avec une tête, deux bras et deux jambes et encore moins qu'ils aient des émotions. Mais si c'était la condition pour que les humains les adoptent ?

### *Robot as-tu du cœur ?*

Imaginez un robot qui vous propose une partie de cartes ou d'échecs au moment où vous tombez de sommeil ou qui vous invite à faire une promenade alors que vous souffrez d'un terrible mal de dos. Il est probable que vous demanderiez vite qu'on vous en débarrasse ! Pour qu'un robot soit accepté, la première condition est qu'il soit capable de reconnaître la signification des mimiques humaines et les émotions dont elles témoignent, afin d'y répondre de façon adaptée. Mais ce n'est pas suffisant. Si le même robot qui vous voit tomber de sommeil vous déclare d'une voix métallique et sans esquisser un geste : « Vous-devriez-aller-vous-coucher », il vous semblera vite insupportable. Et s'il demande à un enfant de la même manière : « Est-ce-que-tu-as-envie-que-nous-jouions-ensemble ? », il finira enfermé dans un placard ! Pour qu'un robot soit complètement accepté, il est indispensable qu'il parle avec des intonations et des mimiques qui évoquent de vraies émotions. C'est cela que le PDG de SoftBank appelle un robot qui a du « cœur », et sur cette voie que s'avancent les recherches dédiées à ce qu'il est convenu d'appeler « l'empathie homme-machine ». Elles ont pour objectif de concevoir un robot capable non seulement d'interagir avec un être humain en s'adaptant à lui, mais aussi comme s'il était lui-même un être humain. Il semble en effet que

cela soit essentiel pour que nous acceptions d'être aidés par un robot en lui faisant pleinement confiance. Mais en même temps, un robot, parce qu'il n'est pas un être humain, peut aussi proposer une communication simplifiée. Et cette caractéristique s'avère très utile avec des personnalités, ou dans des situations où la complexité des émotions humaines peut dérouter. C'est pourquoi les travaux sur les robots et les émotions portent sur trois domaines : mieux comprendre les émotions humaines, fabriquer des robots mieux acceptés par la majorité de la population, et, dans certaines circonstances réduire la complexité des échanges

(...) Bien sûr, tout cela peut nous paraître lointain, mais n'oublions pas que beaucoup d'entre nous vivront parmi les robots et que ce sera évidemment le cas de nos enfants. Or chacun conviendra qu'il serait absurde de les élever pour qu'ils soient capables de vivre dans le monde d'hier, mais il n'est pas non plus adapté de les préparer à vivre dans celui d'aujourd'hui puisque ce ne sera plus le leur demain. Nous devons les préparer à vivre dans un monde où les objets seront fondamentalement différents de ce qu'ils sont aujourd'hui, et la première condition pour y parvenir est de prendre conscience de ce que seront ses opportunités mais aussi ses séductions et ses risques. Bref, il nous faut faire avec nos enfants ce que nos propres parents n'ont pas fait avec nous lorsqu'ils n'ont pas pris la mesure de la révolution des écrans et la nécessité d'y préparer les plus jeunes. Si les écrans sont devenus pour certains adolescents et jeunes adultes d'aujourd'hui autant de pièges, c'est parce que leurs parents n'avaient pas compris que le monde est en train de changer. Ils ont expliqué à leurs enfants qu'il ne fallait pas faire confiance aux gentils messieurs qui leur tendent un bonbon à travers la portière de leur voiture, et nous découvrons aujourd'hui qu'il est bien aussi important de les protéger précocement contre les séductions des écrans, qu'il s'agisse du flux télévisuel qui transforme chacun en spectateur passif du monde, des jeux vidéo répétitifs ou des espaces numériques dans lesquels pullulent les Églises et les sectes. Bientôt nous allons devoir leur apprendre beaucoup d'autres choses. Pas pour les tenir à l'écart des robots, mais pour leur apprendre à les utiliser pour ce qu'ils peuvent leur apporter de meilleur tout en se gardant de leur demander ce qu'ils ne peuvent pas donner.

Tout d'abord, il va devenir nécessaire de penser autrement notre rapport aux objets : accepter que nous puissions les aimer et les désirer, peut-être même jusqu'à la passion amoureuse, et en même temps prendre en compte qu'ils puissent être autant de mouchards reliés à des tiers. Nous devons renoncer à penser en termes de « ou bien, ou bien » et accepter qu'ils puissent être à la fois la cause de grands avantages et de grands dangers, de façon à choisir, à chaque fois, en comparant les uns et les autres.

Parallèlement, il sera essentiel de développer dès le plus jeune âge le goût du débat et de la controverse afin de familiariser nos enfants avec la multitude de choix possibles dans chaque situation, et d'éviter que les logiciels conçus par quelques-uns ne finissent par imposer à tous une représentation univoque du monde. Mais surtout l'éducation devra apprendre à considérer les robots tous ensemble comme des objets technologiques perfectionnés, des créatures possiblement douées d'une forme de conscience – même si celle-ci n'a rien de commun avec la nôtre –, et comme des images porteuses de toutes les confusions possibles. Les robots seront *à la fois* et *inséparablement* un alter ego, un simple objet et une image. Et la meilleure manière de préparer les nouvelles générations à une pensée si complexe sera probablement de les inviter à en construire eux-mêmes le plus précocement possible. Si l'apprentissage du langage de la programmation est un élément majeur sur la voie de comprendre ce qu'on appelle bien improprement l'« intelligence artificielle », il n'est pas suffisant à lui seul pour



www.mensa-academy.com

écarter tous les pièges que les robots pourront susciter. La fabrication d'objets-robots conçus à l'image de figures que l'enfant désire animer est un autre volet de cet indispensable travail de prévention. Fabriquer des robots comme autant de nouvelles formes d'images deviendra aussi important pour l'enfant qu'apprendre à dessiner aujourd'hui : il y découvrira le fait que le robot, comme l'image, se substitue au modèle d'une façon qui ne le remplace pas, et que sa fabrication est l'occasion privilégiée de s'approprier à la fois l'expérience de sa construction et celle de sa perception propre du monde, puisque le robot une fois fabriqué permet de voir, d'entendre, de toucher le monde à travers ses capteurs. Le robot deviendra alors pour eux une machine transformable à tout instant en fonction de leurs attentes, et c'est ce qu'on peut leur souhaiter de mieux. En effet, plus un usager saura transformer son robot et moins le risque d'attachement à lui sera problématique

(...) Bien sûr, ces mesures éducatives, si importantes soient-elles, ne seront pas suffisantes pour nous protéger des risques que les robots nous feront courir. En effet, avant même de nous retrouver - peut-être - tous dominés par un super-cerveau artificiel plus puissant que l'ensemble des intelligences humaines réunies, nous courons le risque d'être manipulés par une multitude de petites intelligences artificielles introduites par des programmeurs dans le moindre de nos objets quotidiens. C'est pourquoi nous devons toujours exiger que leurs choix soient explicites.

Dans la mesure où nos robots domestiques n'auront pas seulement de grands yeux attendrissants et des oreilles surdimensionnées pour mieux nous comprendre, mais aussi pour mieux nous surveiller, il sera également essentiel que leurs utilisateurs puissent les paramétrer de façon à décider de ce qu'ils accepteront ou non de transmettre sur eux-mêmes, et qu'ils puissent connaître la destination et l'usage des données recueillies. Toutes les machines qui nous seront proposées, justement parce qu'elles seront des machines, devront se présenter comme des systèmes ouverts, modifiables et reprogrammables. Enfin, plus l'apparence des robots se rapprochera de celle des humains et plus nous risquons de renouer avec la tentation qui a toujours marqué la relation de l'homme aux représentations qu'il fabrique : penser qu'une image puisse contenir un peu –ou beaucoup ! – de ce qu'elle représente.

(...) En d'autres termes, l'objectif à poursuivre ne serait pas de donner aux robots une conscience toujours plus grande, mais de réfléchir aux modalités limitées de conscience dont ils pourraient être dotés, de façon à permettre à l'homme de développer toutes les formes de sa propre conscience du monde et de lui-même.

Et pour y répondre, demandons-nous, parmi toutes les choses que les robots peuvent apprendre à faire, lesquelles sont vraiment valables. A mon avis, ce sont celles qu'une société qui vise l'égalité de ses membres doit chercher à réaliser et soutenir. Par exemple, il y aurait un grand danger à ce que les robots d'assistance infantilisent les gens et les traitent comme des récipiendaires passifs de soins et de services. Au contraire, nous aurons tout à gagner à avoir des robots qui protègent et soutiennent l'autonomie des personnes : des robots qui fassent faire de la gymnastique et de la rééducation aux personnes âgées plutôt que des robots qui les portent dans leurs bras ; et des robots qui leur apprennent l'Internet et ses nouveautés, et facilitent leurs communications avec d'autres personnes partout dans le monde plutôt que des robots qui leur proposent de jouer avec elles.

Réfléchissons alors dès aujourd'hui à ce que nous pouvons faire tous ensemble, que nous ne pouvons faire ni chacun séparément, ni ensemble sans robots. Les experts de Google prévoient que l'intelligence artificielle sera en 2045, un milliard de fois plus puissante que



tous les cerveaux humains réunis. Mais les robots peuvent aussi devenir des partenaires au service de notre désir de mieux nous connaître et de mieux nous comprendre afin de devenir toujours plus maître de notre propre vie. Pour cela, il est vrai, il va nous falloir renoncer à des robots auxquels nous dirions : « obéis-moi en tout, fais à ma place ce que je renonce à faire moi-même, anticipe mes désirs même les plus secrets et montre-moi toujours que tu m'aimes. » Car s'il arrivait que ce soit un jour le cas, cette situation entraînerait inévitablement l'angoisse que la machine veuille nous manipuler à son tour, et l'oubli des hommes qui les auraient conçues pour nous asservir ! Demandons plutôt aux programmeurs de réfléchir à des robots auxquels nous puissions dire : « Permets-moi de mieux me connaître, de mieux comprendre mon passé et mon histoire, de mieux communiquer mon présent, et, avec toi ou sans toi, de mieux maîtriser mon avenir ».

(1)- Memory : jeu de société.



Avril 2020

## CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1<sup>ère</sup> Composition de Mathématiques

### Exercice 1.

On a au voisinage 0,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x).$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit et on a

$$e^{x^2} - \cos(x) = \frac{3x^2}{2} + x^2\epsilon(x),$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} + \epsilon(x) \right) = \frac{3}{2}.$$

### Exercice 2.

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  : sur  $]0, +\infty[$  elle est constante et sur  $] - \infty, 0[$  c'est la composée de fonctions dérivables.

Montrons la dérivabilité au point 0. La dérivée à droite de 0 est nulle, car  $f$  est constante à droite de 0. Calculons la dérivée à gauche,

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 = f'_d(0).$$

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. De même,  $f'$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f''(x) = 0, \forall x \in ]0, +\infty[$ , elle est dérivable sur  $] - \infty, 0[$  car c'est la composée de fonctions dérivables. Étudions l'existence de  $f''$  au point 0,  $f''_d(0) = 0$  car  $f'$  est constante sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$f''_g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^3 e^X = 0 = f'_d(0).$$

On en déduit que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

## Problème.

1. On considère dans cette question la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} = \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k-1}{2k} \right).$$

(a) On a  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ ,  
donc  $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{n+n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n(n+1)}} > 0$ .

- (b) On peut utiliser le développement limité de la fonction  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0 :  
posons  $X_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$ , d'après la question précédente

$$X_n = \frac{[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})]^2}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \sqrt{n(n+1)}}.$$

On a alors,  $w_n \sim X_n \sim \frac{1}{8n^2}$ . Par conséquent  $\sum w_n$  converge.

- (c)  $\sum_{n=1}^N w_n = \ln \frac{v_{N+1}}{v_1} = \ln 2v_{N+1}$  ; donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. Comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante,  $u_n < \frac{L}{\sqrt{n}}$ .

2. (a) On montre par récurrence que

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right) (1-x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= -\frac{(2n-3)(2n-5) \dots 1}{2^n} \frac{1}{(\sqrt{1-x})^{2n-1}}. \end{aligned}$$

- (b) Par la formule de Taylor avec reste intégrale  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  où

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = -\frac{(2k-3)(2k-5) \dots 1}{k! 2^k}.$$

On peut exprimer les coefficients du polynôme  $P$  en fonction des termes de la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ;

$$a_k = -\frac{u_{k-1}}{2^k}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4.$$

(c) En utilisant l'indication  $x - t \leq 1 - t$ , on a

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{n!} \int_0^x (1-t)^n \frac{1 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \frac{1}{(\sqrt{x-t})^{2n+1}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x u_n \frac{(1-t)^n}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}} dt = \frac{u_n}{2} \int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé dans la première égalité le fait que  $x < 1$  et que l'intégrale est prise sur  $t \in [0, x] \subset [0, 1]$ .

Comme, de plus  $\int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = -2 [\sqrt{1-t}]_0^x = 2(1 - \sqrt{1-x}) < 2$ , on obtient  $|R_n(x)| < u_n$ .

(d) D'après 1.c,  $|P_n(x) - \varphi(x)| \leq u_n < \frac{L}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [0, 1[$  et aussi en  $x = 1$  par continuité des fonctions  $P_n$  et  $\varphi$ . Donc la suite  $(P_n)$  converge uniformément vers  $\varphi$  sur  $[0, 1]$ .

(e) De même, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = 1 - x^2 \in [0, 1]$ , d'où

$$|P_n(y) - \varphi(y)| = |Q_n(x) - |x|| < \frac{L}{\sqrt{n}}.$$

Donc, pour tout  $n \geq \frac{L^2 M^2}{\varepsilon^2}$ ,  $|Q_n(x) - |x|| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ .

3. (a) Entre  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ , le graphe de la fonction  $g$  est le segment d'une droite d'équation  $g(x) = ax + b$ , avec  $g(k/n) = f(k/n) = a(k/n) + b$  et  $g((k+1)/n) = f((k+1)/n) = a((k+1)/n) + b$ . On résout ce système d'équations d'inconnues  $a$  et  $b$  et on obtient :

$$g(x) = n \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x + (k+1)f\left(\frac{k}{n}\right) - kf\left(\frac{k+1}{n}\right). \quad (1)$$

(b) On réécrit l'expression de la fonction  $g$  pour utiliser l'indication : pour  $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ,

$$g(x) = (1 - \alpha)f\left(\frac{k}{n}\right) + \alpha f\left(\frac{k+1}{n}\right) = (k+1 - nx)f\left(\frac{k}{n}\right) + (nx - k)f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

( $\alpha = nx - k$ ). On a

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= \left| (1 - \alpha)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) + \alpha\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(x)\right) \right| \\ &\leq \left| (1 - \alpha)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \right| + \left| \alpha\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(x)\right) \right| \\ &= (1 - \alpha) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \alpha \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq (1 - \alpha)\varepsilon + \alpha\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , elle s'applique pour tout  $x \in [0, 1]$ .

4. On rappelle les définitions de  $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  et  $B_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  :

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & n \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \ddots & \ddots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} & 1/2 & 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{2n} \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1/2 & \ddots & 1/2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 1/2 \\ \frac{1}{2n} & 0 & \ddots & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

(a) En suivant les étapes indiquées dans l'énoncé, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & n-1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^n n 2^{n-1} \neq 0.$$

(b) On déduit de la question précédente que puisque  $\det(A_{n+1}) \neq 0$ , la matrice  $A_{n+1}$  est inversible, il suffit alors de vérifier que  $B_{n+1} \times A_{n+1} = I_{n+1}$ , où  $I_{n+1}$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  : notons  $M = B_{n+1} \times A_{n+1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$

(i) Pour  $2 \leq i \leq n+1$ , pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ,

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} b_{i,k} a_{k,j} = b_{i,i+1} a_{i+1,j} + b_{i,i-1} a_{i-1,j} + b_{i,i} a_{i,j} \\ &= \frac{1}{2} a_{i+1,j} + \frac{1}{2} a_{i-1,j} - a_{i,j} \\ &= \frac{1}{2} |j-i-1| + \frac{1}{2} |j-i+1| - |j-i| \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j=i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Pour  $i = 1$ , pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ,

$$\begin{aligned} m_{1,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} b_{1,k} a_{k,j} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a_{1,j} + \frac{1}{2} a_{2,j} + \frac{1}{2n} a_{n+1,j} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) |j-1| + \frac{1}{2} |j-2| + \frac{1}{2n} |n+1-j| \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{si } j \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(iii) Pour  $i = n+1$ , pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ,

$$\begin{aligned} m_{n+1,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} b_{n+1,k} a_{k,j} = \frac{1}{2n} a_{1,j} + \frac{1}{2} a_{n,j} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a_{n+1,j} \\ &= \frac{1}{2n} |j-1| + \frac{1}{2} |n-j| + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) |n+1-j| \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que pour tout  $1 \leq i, j \leq n+1$ ,  $m_{i,j} = \delta_{i,j}$ . Donc  $M = I_{n+1}$ .

5. (a) - L'application  $\Phi$  est linéaire : soient  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  et  $g_1, g_2 \in E_{n+1}$

$$\begin{aligned} \Phi(a_1 g_1 + a_2 g_2) &= (a_1 g_1(k/n) + a_2 g_2(k/n))_{0 \leq k \leq n} \\ &= a_1 (g_1(k/n))_{0 \leq k \leq n} + a_2 (g_2(k/n))_{0 \leq k \leq n} \\ &= a_1 \Phi(g_1) + a_2 \Phi(g_2). \end{aligned}$$

-  $\Phi$  est un isomorphisme : toute fonction  $g$  de  $E_{n+1}$  est entièrement caractérisée par ses valeurs  $a_k$  aux points  $\frac{k}{n}$ ,  $0 \leq k \leq n$ . En effet, comme dans l'expression (1), pour tout  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , et tout  $g \in E_{n+1}$ ,  $\Phi(g) = \alpha$  si et seulement si, pour tout  $0 \leq k \leq n$  et pour tout  $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ ,

$$g(x) = n(a_{k+1} - a_k)x + (k+1)a_k - ka_{k+1} = (k+1-nx)a_k + (nx-k)a_{k+1},$$

et  $g(k/n) = a_k$  pour tout  $0 \leq k \leq n+1$ .

(b)  $\Phi(f_j)$  est le vecteur  $\frac{1}{n} (j, j-1, \dots, 1, 0, 1, \dots, n-j) = \frac{1}{n} {}^t U_j$ , où  ${}^t U_j$  est la transposée du  $j$ -ème vecteur colonne de la matrice  $A_{n+1}$ .

La matrice de la famille des vecteurs  $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est donc  $\frac{1}{n} A_{n+1}$

Comme  $A_{n+1}$  est inversible,  $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et comme  $\Phi$  est un isomorphisme,  $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$  est une base de  $E_{n+1}$ .

(c) La fonction  $g_\alpha$  se décompose selon la base  $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$  :

$$g_\alpha = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k.$$

D'où

$$\Phi(g_\alpha) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \Phi(f_k)$$

soit

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A_{n+1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = B_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1-n}{2n}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2n}a_n, \\ \lambda_k = \frac{1}{2}a_{k-1} - a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} & \text{si } 0 < k < n, \\ \lambda_n = \frac{1}{2n}a_0 + \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1-n}{2n}a_n. \end{cases}$$

6. (a) Par la définition de  $g$ , on a  $g_\alpha = g$  avec  $\alpha = (a_0, \dots, a_n)$  et  $a_k = f(\frac{k}{n})$ .

D'après la question de la précédente,

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1-n}{2n}f(0) + \frac{1}{2}f(1/n) + \frac{1}{2n}f(1) \\ \lambda_k = \frac{1}{2}f((k-1)/n) - f(k/n) + \frac{1}{2}f((k+1)/n) & \text{si } 0 < k < n \\ \lambda_n = \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{2}f(1-1/n) + \frac{1-n}{2n}f(1). \end{cases}$$

- (b) Rappelons que  $R(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q_N(x - \frac{k}{n})$ . Soit  $x \in [0, 1]$ , par l'inégalité triangulaire et la question 3. (b),

$$|f(x) - R(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - R(x)| \leq \varepsilon + |g(x) - R(x)|.$$

Puis en utilisant les définitions de  $g$  et  $R$ ,

$$\begin{aligned} |g(x) - R(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k Q_N(x - \frac{k}{n}) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k (f_k(x) - Q_N(x - \frac{k}{n})) \right| \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \left| x - \frac{k}{n} - Q_N(x - \frac{k}{n}) \right|. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $|x - \frac{k}{n}| \leq 1$  pour tout entier  $k \in [0, n]$  et tout réel  $x \in [0, 1]$ , d'après la question 2. (e) et les deux inégalités précédentes, on obtient

$$|g(x) - R(x)| \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{M} = 2\varepsilon.$$

- (c) Le théorème de Weierstraß se déduit immédiatement des questions précédentes.



AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

**CORRIGÉ de la 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**Exercice n° 1**

1. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $m$ , les solutions du système d'équations linéaires suivant, où  $a, b, c$  sont des nombres réels :

$$\begin{cases} x - y + (m - 2)z = a \\ 2x + (m - 4)y - 2z = b \\ (m + 2)x - 4y - 3z = c \end{cases}$$

Soit  $M$  la matrice du système, à savoir  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$  et son déterminant est

égal à :  $\det M = (2 - m)(m - 1)^2$  (on peut additionner la deuxième colonne à la première, puis soustraire la troisième ligne à la deuxième).

a) Si  $m \neq 2$  et  $m \neq 1$ , la matrice est inversible et le système admet une unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

b) Si  $m=1$ , le système devient  $\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x - 3y - 2z = b \\ 3x - 4y - 3z = c \end{cases}$  ou encore  $\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x - 3y - 2z = b \\ x - y - z = c - b \end{cases}$

Si  $a \neq c - b$ , le système n'a pas de solution et si  $a = c - b$ , l'ensemble des solutions est de la forme :  $(x, 2c - 3b, x - 3c + 4b)$

c) Si  $m=2$ , le système devient 
$$\begin{cases} x - y = a \\ z = (2a - b)/2 \\ z = (4a - c)/3 \end{cases}$$

Si  $2a + 3b - 2c \neq 0$ , le système n'a pas de solution et si  $2a + 3b - 2c = 0$ , l'ensemble des solutions est de la forme :  $(x, x - a, (2a - b)/2)$

2. On note  $f$  l'application linéaire associée à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ , où  $m$  est un paramètre réel.

- Pour quelles valeurs de  $m$ , l'application  $f$  est-elle bijective ?

D'après la question précédente (comme  $M$  est la matrice du système),  $f$  est bijective si et seulement si  $m \neq 2$  et  $m \neq 1$ .

- Pour quelles valeurs de  $m$ , le noyau et l'image de  $f$  sont-ils supplémentaires ?

Il suffit de trouver pour quelles valeurs de  $m$ ,  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

Si  $m \neq 2$  et  $m \neq 1$ , la solution unique est le vecteur nul et  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$

Si  $m=1$ , alors un vecteur de la forme  $(a, 0, a)$  est dans le noyau et l'image, donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$ .

Si  $m=2$ , alors un vecteur du noyau est de la forme  $(a, a, 0)$  et il n'est pas dans l'image (sauf le vecteur nul), donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

En conclusion, le noyau et l'image sont supplémentaires si et seulement si  $m \neq 1$ .

3. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$  dans les deux cas suivants :  $m = 2$  et  $m = 1$  (on indiquera si la matrice est diagonalisable ou non).

Dans les deux cas, 0 est une valeur propre.

Pour  $m=1$ , les valeurs propres sont : -5 et 0 (double). Comme la dimension du noyau est égale à 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

Pour  $m=2$ , les valeurs propres sont : -5, 0, 1 et la matrice est diagonalisable.

**Exercice n° 2**

Pour  $n$  entier naturel, on considère l'intégrale  $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx$ .

1. Montrer qu'il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :  
 $\forall x \in [0, \pi/4], \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$  et calculer  $I_0$ .

On identifie les deux côtés de l'égalité (et en prenant  $x=0$ ) pour obtenir :  $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ , d'où  $a=b=1/2$ .

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left( \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$$

2. Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n-1} x \cdot \cos^2 x} dx = \left[ \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{(2n-1) \tan x \sin x}{\cos^{2n} x} dx \text{ et}$$

$$I_n = (\sqrt{2})^{2n-1} - (2n-1) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx = (\sqrt{2})^{2n-1} - (2n-1)(I_n - I_{n-1})$$

En conclusion :  $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} + \frac{2^{n-1/2}}{2n}$

3. Calculer  $I_2$

On a :  $I_1 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $I_2 = \frac{3}{4} I_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ , d'où  $I_2 = \frac{3}{8} I_0 + \frac{7}{4\sqrt{2}}$  et  $I_2 = \frac{3}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{7}{4\sqrt{2}}$ .

4. Etudier la convergence de la suite  $(I_n)$ . On a :  $I_n \geq 0$ , et  $I_n \geq \frac{2^{n-1/2}}{2n}$ , donc  $I_n \rightarrow +\infty$

**Exercice n° 3**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty, 1[$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty, 1[$ .

Pour  $0 < x < 1$ ,  $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} > 0$  et pour  $x \leq 0$ ,  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \geq 0$ . La fonction est donc strictement croissante de  $]-\infty, 1[$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

La fonction est dérivable en 0, car  $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$

3. Tracer le graphe de  $f$  (on précisera les points d'inflexion).

Pour  $0 < x < 1$ ,  $f''(x) = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3} > 0$  et pour  $x \leq 0$ ,  $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ . La fonction est convexe sur  $]0, 1[$ . Le point  $A(0, 1)$  est un point d'inflexion. La fonction est concave sur l'intervalle  $]-1/\sqrt{3}, 0[$ , le point  $B(-1/\sqrt{3}, 3/4)$  est aussi un point d'inflexion et la fonction est convexe pour  $x < -1/\sqrt{3}$ . L'axe  $Ox$  est une asymptote à  $-\infty$ , la droite verticale d'équation  $x=1$  est également une asymptote.

4. Calculer l'aire comprise entre le graphe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=1/2$  et  $x=-1/2$ .

L'aire est égale à  $I = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx = \int_{-1/2}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx$ , d'où

$$I = [\text{Arctg } x]_{-1/2}^0 + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \text{Arctg}(1/2) + \frac{1}{2} \text{Ln} 3$$

### Exercice n° 4

Pour  $\alpha$  entier naturel, on considère la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_\alpha(x) = \alpha x + \ln(1+x^2)$$

1. Etudier les variations de  $f_\alpha$  selon les valeurs de  $\alpha$  (on précisera la convexité ou non de la fonction).

- Si  $\alpha = 0$ , sa dérivée est égale à :  $f'_\alpha(x) = \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$ , la fonction est paire et croissante de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ , avec une branche parabolique dans la direction  $Ox$ . On a :  $f''_\alpha(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ . La fonction est donc convexe sur  $[0,1]$  et concave pour  $x > 1$ . On a aussi  $f_\alpha(0) = f'_\alpha(0) = 0$ .

- Si  $\alpha \neq 0$ ,  $y = \alpha x$  est une direction asymptotique et  $f'_\alpha(x) = \alpha + \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$ . La fonction est strictement croissante et sa dérivée seconde est la même que précédemment, donc elle est convexe sur  $[-1,1]$  et concave pour  $x > 1$  et  $x < -1$ .

2. Tracer le graphe de  $f_2$ .

La question précédente donne tous les éléments pour tracer le graphe.

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f_0(u_n)$  et  $u_0 > 0$ .

La suite est toujours à termes strictement positifs. Si  $(u_n) \rightarrow l$ , cette limite est un point fixe de la fonction. Soit  $y = x - \ln(1+x^2)$ , dont la dérivée est :  $y' = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$  et la fonction est strictement croissante, et la seule limite possible est zéro.

Par ailleurs, on a :  $u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n^2) - u_n < 0$ , la suite étant décroissante et minorée, elle converge vers 0.

4. Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie par la relation de récurrence :  $v_{n+1} = f_\alpha(v_n)$  et  $v_0 > 0$ , avec  $\alpha > 1$ .

Comme précédemment, la suite est à termes positifs et sa seule limite possible est zéro (même démarche) : En posant  $y = x(\alpha-1) + \ln(1+x^2)$ , on a  $y' = \frac{x^2(\alpha-1) + 2x + (\alpha-1)}{1+x^2} \geq 0$  mais

$v_{n+1} - v_n = \ln(1 + v_n^2) + (\alpha - 1)v_n > 0$ . La suite étant croissante, elle ne peut pas converger vers 0. Comme elle n'est pas majorée, elle tend vers  $+\infty$ .

5. Calculer  $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x) dx$

On calcule l'intégrale de  $\ln(1+x^2)$  par parties pour obtenir :

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{2} + \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \frac{\alpha}{2} + \left[ x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\alpha}{2} + \ln 2 - 2 \left[ x - \operatorname{Arctg} x \right]_0^1$$

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{2} + \ln 2 - 2 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

### Exercice n° 5

Pour  $k \in \mathbb{R}$ , soit la fonction  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f_k(x, y) = \left( \left( \frac{1+k}{2} \right)x + \left( \frac{1-k}{2} \right)y, \left( \frac{1-k}{2} \right)x + \left( \frac{1+k}{2} \right)y \right)$$

1. Pour quelles valeurs de  $k$ , la fonction  $f_k$  est-elle bijective ?

La matrice associée à  $f_k$  (linéaire) est  $M_k = \begin{pmatrix} \frac{1+k}{2} & \frac{1-k}{2} \\ \frac{1-k}{2} & \frac{1+k}{2} \end{pmatrix}$  et son déterminant  $\det M_k = k$ .

L'application est donc bijective si  $k \neq 0$ .

2. Soit  $f_k^{-1}$  l'application réciproque de  $f_k$  quand elle existe. Comparer  $f_k^{-1}$  et  $f_{1/k}$ .

On trouve facilement  $f_k^{-1} = f_{1/k}$  car  $f_k \circ f_{1/k} = I$

3. Quels sont les invariants de  $f_k$  ?

$$f_k(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} (1+k)x + (1-k)y = 2x \\ (1-k)x + (1+k)y = 2y \end{cases}, \text{ d'où } (1-k)(x-y) = 0$$

- Si  $k=1$ , la fonction est l'identité et tous les points de  $R^2$  sont des invariants.
- Si  $k \neq 1$ , la droite  $y=x$  correspond aux invariants.

4. On suppose  $k=3$ , quelle est l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 par  $f_3$  ?

La matrice de l'application est :  $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Pour  $f_3(x, y) = (x', y')$ , on obtient :

$$\text{Soit } \begin{cases} 2x - y = x' \\ -x + 2y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{3}(x' + 2y') \end{cases}$$

Pour un point du cercle, on a :  $x^2 + y^2 = 1$ , soit  $5(x')^2 + 5(y')^2 + 8x'y' = 9$ . Les deux bissectrices sont des axes de symétrie et en faisant une rotation d'angle  $\pi/4$ , soit

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases} \text{ ou encore } = \left(\frac{X}{3}\right)^2 + Y^2 = 1, \text{ il s'agit d'une ellipse.}$$

5. Peut-on trouver une valeur de  $k$  pour laquelle  $f_k$  correspond à une projection sur une droite (que l'on précisera), à une symétrie par rapport à une droite (que l'on précisera) ?

Si  $f_k$  est une projection, ses valeurs propres sont 0 et 1. Par conséquent le déterminant de la matrice associée est nul, et d'après la première question, la seule possibilité est  $k=0$ .

La matrice est donc  $M_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et qui correspond à une projection orthogonale sur la première bissectrice.

Si  $f_k$  est une symétrie, ses valeurs propres sont -1 et 1. Par conséquent le déterminant de la matrice associée est égal à -1 et d'après la première question, la seule possibilité est  $k=-1$ .

La matrice est donc  $M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et qui correspond à une symétrie par rapport à la première bissectrice.