Mensa ACADEMY

CAPESA

CENTRE D'APPUI AUX ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINE

ISE CYCLE LONG & AS

- Présentation des écoles
- Anciens sujets de préselection
- Quelques corrigés
- Quelques quiz

Mensa ACADEMY

CAPESA

CENTRE D'APPUI AUX ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINE

ISE CYCLE LONG & AS

+237 655 333 073
+237 671 544 122

Yaoundé

Dédicaces & Remerciements

À

Tous les lauréats des Sessions antérieures : Élèves Ingénieurs Statisticiens Économistes et Analystes Statisticiens et ceux des autres écoles notamment de l'EAMAC et de l'EAMAU sans toutefois oublier les diplômés de ces Grandes Écoles depuis l'existence de MENSA Academy. Vous faites notre fierté et êtes la preuve vivante que seul le travail paye.

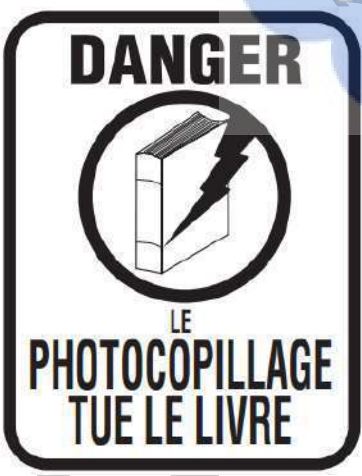
Les auteurs remercient l'Entreprise MENSA Academy constituée d'une équipe très efficace qui a permis à ce que ce livre soit publié dans plusieurs Maisons d'Édition à l'instar de Horizon + & Optimum, d'avoir mis à la disposition des autres pays africains quelques exemplaires, disponibles dans certaines bibliothèques.

La perfection n'étant pas de ce monde, toute suggestion/erreur relevée dans ce livre est la bienvenue. Vous pourrez le faire par **mail : louishenri2018@gmail.com** *ou via le moyen téléphonique suivant - WhatsApp :* ***+237 655 333 073****. De ce fait, le message doit se présenter comme suit :* ***Suggestion(s)/erreur(s) à signaler - Maths ISEL/AS Édition 2026 *** Vous vous présentez et enfin, vous indiquez la page, la suggestion ou l'erreur en question*** **** Toute question est également la bienvenue.*

MENSA Academy
294 Yaoundé, ISSEA - Rue Pasteur
08 BP 03 Abidjan, ENSEA
45512 Dakar, ENSAE
03 BP 1079 Cotonou, ENEAM
1096 ASECNA, Niamey
2067 EAMAU, Lomé
www.mensaacademy.com

Dans la même collection

Économie
Culture Générale,
Statistiques descriptives,
Statistiques-Probabilités,
Mathématiques pour économistes



Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle par quelque procédé que ce soit des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective. Il s'agit donc de la propriété intellectuelle de l'auteur et n'engage que lui et celle de l'Entreprise MENSA Academy.

ISBN 13 : x xxxxxxx xxxxxx
ISBN 10 : y yyy yyy yyy
BookEditions
Horizon +
Optimum
MENSA Academy

Avant-Propos

De plus en plus, le nombre de candidats au concours des Écoles de Statistique Africaines (ESA) augmente pour des raisons triviales. A l'issue de leur formation, les jeunes diplômés sont excessivement demandés sur le marché du travail que ce soit par l'État ou les Nations-Unies en raison du prestige et de la très haute qualité de leur formation. Mais l'adhésion dans l'une de ces écoles n'est pas soudaine et inopinée ; cela nécessite un travail acharné surtout pour les cycles ISE long & AS. En effet, l'admission définitive du candidat dans ce cycle passe par une présélection d'une épreuve de mathématiques du programme de Terminale C plus ou moins approfondi. C'est dans ce cadre que MENSA Academy vous offre ce petit livre des anciennes présélections et des exercices types. Il est donc scindé en trois (03) chapitres : la présentation des écoles statistique africaines ; les anciens sujets de présélection et le MENSA QUIZ.

Vous retrouverez des présélections des pays suivants :

— Cameroun ;

— Cote d'Ivoire ;

— Sénégal ;

— Tchad ;

— Congo ;

— Burkina-Faso.

Vous retrouverez des exercices du MENSA QUIZ des chapitres suivants :

— Analyse combinatoire ;

— Intégration sur des intervalles compacts ;

— Suites numériques ;

— Fonctions usuelles ;

— Développements limités ;

— Calcul des probabilités ;

— Variables aléatoires discrètes.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22
www.mensa-academy.com
MENSA Academy

Table des matières

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22

www.mensa-academy.com

Mensa ACADEMY

MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

Félicitations aux Lauréats !

1. ISE long/AS (2024)
AGHOKENG Sandra (ISSEA)
BETSI Marc (ISSEA)
DASEBO Etienne (ENSEA)
DJAM A BITANG (ISSEA)
EBALA Quentin (ISSEA)
FIRIDA Aimée Brigitte (ISSEA)
FOTIO Yan Mayel (ISSEA)
GAPILI Kadi (ISSEA)
KAZE Ariane Laure (ENSEA)

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Chapitre 1

Présentation des Écoles de Statistique Africaine

1.1 Généralités

Le Réseau des Écoles de Statistique Africaine (RESA) est constitué de quatre écoles :

— L'Institut Sous-régional de Statistique et d'Économie Appliquée - ISSEA de Yaoundé (Rue Pasteur).

— L'École Nationale de Statistique et d'Économie Appliquée - ENSEA d'Abidjan (Avenue des grandes écoles, campus de Cocody)

— L'École Nationale de Statistique et de l'Analyse Économique - ENSAE de Dakar (Immeuble ANSD, Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant)

— L'École Nationale d'Économie Appliquée et de Management - ENEAM de Cotonou [1]

Il faut donc dire que le Cameroun, la Cote d'Ivoire, le Sénégal et le Bénin représentent l'Afrique francophone dans la formation officielle les statisticiens africains (Techniciens, Analystes et Ingénieurs). Le réseau pourrait davantage s'élargir en fonction de la demande, du contexte et de la conjoncture.

A la tête de ces écoles, se trouve le Centre d'Appui aux Écoles Statistiques Africaines (CAPESA) dont le siège est en France, à Bruz (Campus de Ker Lann - 51 rue Blaise Pascal). La Direction est assurée en ce moment par : Frédéric LAVANCIER, Responsable des concours et Laure MIAMBAYE LOUNGOUMOUKA, Secrétaire.

1. L'ENEAM de Cotonou a rejoint le RESA depuis 2020 et forme les Ingénieurs Statisticiens Économistes Options Économie et Maths.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22
www.mensa-academy.com
Mensa ACADEMY

Le CAPESA a pour première responsabilité l'organisation des concours d'entrée aux écoles qui, pour leur part, assurent depuis de nombreuses années la formation des statisticiens : Ingénieurs Statisticiens Économistes (ISE) et ITS (Ingénieurs des Travaux Statistiques ou Ingénieurs de l'Application de la Statistique - IAS).

Récemment, les cycles ITS (niveau Baccalauréat) et ITS (options Maths et Économie en BAC+2) ont été supprimés. Donc, ces cycles n'existent plus et seuls les cycles suivants seront valorisés par le CAPESA :

— ISE : Ingénieurs Statisticiens Économistes;

— AS : Analystes Statisticiens.

Pour ces cycles ISE & AS, il convient d'expliciter les exigences suivantes :

Seuls les candidats ayant une licence en Économie ou en Mathématiques et au plus 26 ans révolus peuvent présenter le concours ISE (classique) c'est-à-dire trois (03) ans de formation.

Seuls les candidats ayant un Baccalauréat scientifique et au plus 22 ans révolus peuvent présenter le concours ISE (cycle long) c'est-à-dire, cinq (05) ans de formation.

Seuls les candidats ayant un Baccalauréat scientifique et au plus 22 ans révolus peuvent présenter le concours AS : trois (03) ans de formation.

Rappelons que les épreuves au concours des cycles ISE cycle long et AS sont identiques. Le candidat, lors de la constitution de ses dossiers devra faire un premier choix puis un second malgré le fait que cela ne garantisse pas son admission définitive dans le cycle préalablement choisi[2]. Nonobstant, à la présélection, les candidats sont classés en fonction de leur premier choix.

Chaque année, les différents centres d'Afrique (au moins 20 centres) accueillent près de 3500 étudiants (Cameroun, Gabon, Thad, Burkina-Faso, Mali, Cote d'Ivoire, Bénin, Sénégal, Madagascar, Congo, Togo etc.) et au plus 3% de candidats seulement parviennent à réussir. En conséquence, se préparer est une chose mais savoir se préparer en est une autre.

1.2 L'apologie et la bourse octroyée

Les Écoles de Statistique Africaine (ESA) font partie des meilleurs écoles en Afrique voire dans le monde. La matière grise, l'intelligence, l'ardeur, la persévérance, l'acharnement et surtout le travail sont le chemin pour adhérer ces écoles dont, la renommée est tellement fait peur,

2. Seuls le CAPESA et les membres du jury pourront apprécier - en fonction des notes du candidat.

MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

au sens où seuls les plus forts réussissent.

La particularité avec ces écoles est l'environnement. Déjà, tous les étudiants sont très bien habillés (costume, chemise, cravate et paire de chaussures pour les hommes et tailleur pour les filles), rien de plus beau de fréquenter dans une école où l'habillement fait partie intégrante de la formation des Ingénieurs de haut niveau. Le fait de côtoyer les meilleurs enseignants, les anciens étudiants chargés parfois des cours est une grâce énorme.

L'ISSEA est un Institut, spécialisé de la CEMAC constitué de 6 pays qui assurent à eux tous l'investissement important dans la formation des statisticiens. Cela implique une totale gratuité des frais de formation pour les lauréats puisque chaque pays de la sous-région CEMAC assure les frais de formation de ses lauréats. Au Cameroun par exemple, c'est le Ministère de la Planification et de l'Aménagement du Territoire (MINEPAT) qui s'en charge en affiliation avec le Ministère des Finances (MINFI) qui décaisse les fonds pour en assurer, idem pour la bourse des étudiants.

L'ISSEA est donc une école de bourse et les étudiants ne reçoivent que leur bourse en fin d'année (juin ou juillet au plus tard). Le montant de la bourse varie en fonction de la conjoncture économique : 2,2 millions, 1,4 million, 1 million, 800 mille.

Il y a plusieurs avantages dans les ESA : le transport des étudiants, l'accès à la bibliothèque, le logement, le divertissement à l'instar du voyage pour 2 ou 3 jours dans quelques sites attrayants.

Il faut comprendre que l'octroie de la bourse n'est automatique. Certains organisations telles que la Banque Mondiale financent la bourse à certains lauréats de certains pays (Comme ce fut (c'est) le cas du Congo et du Tchad). En général, ce sont les gouvernements des différents pays et les Instituts de la statistique et d'économie qui financent la bourse et le logement aux différents lauréats (Burkina-Faso, Cameroun etc.)

Il n'est pas exempt que les lauréats puissent adresser une demande de bourse aux instituts liés à la statistique, aux Organisations Internationales comme la Banque Mondiale et la Banque Africaine de Développement etc.

1.3 Des controverses ...

L'initiation du projet de la formation des statisticiens est ancienne. Pour plus de visibilité, de transparence et d'équité, le CAPESA assure le grand jury. L'objectif réel est de promouvoir le développement du continent africain. Mais seulement, le métier n'est pas encore véritablement

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

connu. Certaines structures pensent s'en passer du statisticien (et/ou des économistes) mais le passé finit toujours par les rattraper. Le recrutement des statisticiens doit donc se faire chaque année à une masse importante afin de conquérir ces structures qui mystifient encore le rôle et la place du statisticien.

Ce n'est qu'à l'étranger que le métier de statisticien est véritablement connu et c'est d'ailleurs l'un des métiers les plus convoités et les plus chers au monde. La réticence des diplômés envers les ministères qui les intègrent, est parfois compréhensive. Ainsi, moult de ces diplômés préfèrent aller dans d'autres horizons pour faire parler leur talent à des taux de salaire extraordinaires.

Au Cameroun, c'est un fait. Raison pour laquelle les recrutements entre 2020 et 2022 ont été très serrés et continuent de l'être. Le nombre de places demandé par le gouvernement est si peu que le CAPESA se voit de prendre davantage de lauréats tout en faisant la distinction : boursiers et non boursiers. Cette distinction permettra juste aux boursiers de percevoir leur bourse en fin d'année et d'être intégrés. Rappelons tout de même que l'intégration n'est pas une fin en soi, beaucoup de ces boursiers pourraient d'ailleurs traverser la mer pour "valoriser" le métier. Aussi, le gouvernement ne pourra délaisser les non boursiers, il y aura forcément un moyen de les intégrer.

La valorisation du métier de statisticien ne se fait pas toujours à l'étranger. Il faut tout simplement envahir les structures en rapport avec la statistique ou l'économie et faire les preuves. Le fait de voyager laisse un creux terrible et le métier ne pèse plus. L'effectif est donc une chose très importante : plus il est fort, plus la visibilité s'accroit et plus, le nombre de places sera revu à la hausse car, il y aura une très forte demande. Dans les ministères, certains se plaignent qu'il n'y a pas de travail et donc, la mort du génie est imminente. Les ingénieurs sont ceux qui apportent du nouveau, qui conçoivent, qui créent et qui innovent. Donc, pensez toujours à innover, le travail viendra forcément et vous vous remarquerez positivement dans toute l'humilité.

1.4 Les matières au concours

1.4.1 ISE Long / AS

La réussite définitive d'un candidat passe par deux phases :

— une phase de présélection ;

— une phase de sélection.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

La première consiste à présélectionner un nombre définis (100 à priori dans chaque cycle : ISE Long ou AS) de candidats qui subiront les épreuves de sélection, proposées par le CAPESA.

Le nombre de présélectionnés dépend du nombre total de candidats et du nombre à recruter. Donc, il est possible que l'Institut ou le Ministère en charge, prenne moins de 100 dans chaque cycle. Il faut donc être parmi les 50 au plus pour espérer braver les épreuves finales[3].

Il n'y a qu'une seule épreuve de Mathématiques pour le test de présélection, d'une durée de **4 heures**. Le programme de cette épreuve est celui de la terminale scientifique (série C). Les chapitres clés pour cette épreuve sont les suivants :

— Les ensembles ;
— Le raisonnement logique (récurrence, absurde, contraposée) ;
— Les nombres complexes ;
— Les suites numériques ;
— L'étude des fonctions ;
— L'analyse combinatoire ;
— Le calcul des probabilités (chapitre clé) ;
— Primitives et calcul intégral ;
— Les équations différentielles ;
— Un peu de polynômes et de géométrie.

Après avoir été présélectionné, le candidat subira les épreuves de sélection suivantes en deux jours (deux épreuves par jour).

	Première Maths	**Ordre Général**	**Deuxième Maths**	**Contraction de texte**
Coef.	**30**	**15**	**30**	**15**
Durée	**4 heures**	**3 heures**	**3 heures**	**3 heures**

1.4.2 ISE Option Mathématiques

En général, il n'y a pas d'épreuve de présélection ici étant donné du nombre parfois faible de candidatures. Aussi, l'Institut ou le Ministère en charge ne se voit pas organiser un test de présélection sur 150 ou 170 candidats pour après, éliminer 50 ou 70 ; les couts pourraient être importants. Toutefois, si le nombre de candidatures est révisé à la hausse les prochaines années

3. Rappelons que le CAPESA ne demande pas plus de 100 à 150 candidats pour ces cycles ISE long et AS. Chaque pays devra donc enclencher la phase de présélection lorsqu'il y a potentiellement assez de candidatures (relativement).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

(300, 350 voire 500 candidats), un test de présélection s'imposerait indubitablement.

Cependant, les épreuves à braver pour la phase finale sont consignées dans le tableau :

	Ordre Général	Première Maths	Deuxième Maths	Contraction de texte
Coef.	**15**	**40**	**30**	**15**
Durée	**4 heures**	**4 heures**	**4 heures**	**3 heures**

1.4.3 ISE Option Économie

La première composition de Maths à ce niveau est filtrante et toute note inférieure ou égale à 5 est éliminatoire. Veuillez donc éviter de ne pas être parmi ceux-là !

	Ordre Général	Première Maths	Économie	Deuxième Maths
Coef.	**15**	**30**	**35**	**20**
Durée	**4 heures**	**4 heures**	**4 heures**	**3 heures**

1.5 Un mot sur les lauréats

La correction des copies se fait sans signe distinctif entre les filles et les garçons. Le classement est fait en fonction des pays et c'est sur cette base que les meilleurs sont sélectionnés. Les délibérations visent non seulement à avoir un quota de filles mais aussi, à équilibrer les nationalités dans les différentes écoles. Les délibérations visent enfin à répondre aux questions suivantes : doit-on faire échouer le candidat X de la nationalité Y et faire réussir le candidat Z de la nationalité T alors qu'il y a un écart considérable entre les deux ? Étant donné du niveau très élevé des candidats de la nationalité Y, doit-on prendre conséquemment de places au détriment de quelques places des candidats de la nationalité T ? Si oui, combien doit-on prendre ? Combien de places l'ISSEA ou l'ENSEA par exemple est apte à accueillir ? etc.

1.6 Les débouchés

Un Ingénieur Statisticien Économiste, un Ingénieur des Travaux Statistiques ou un Analyste Statisticien sont des métiers auxquels il est impossible de chômer. Des Directeurs et des Ministres Statisticiens, formés par les ESA sont nommés presque chaque année. Nonobstant, un diplôme des ESA peut travailler comme Cadre Supérieur ou moyen dans toutes les structures en

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

rapport avec la statistique, les Organisations internationales ou les Ministères etc. : **Organisations Internationales et Nations Unies** (FMI, Banque Mondiale, Banques Centrales, Banques Commerciales, PNUD, OMC, CENUCED, UNICEF, ...), **Ministères** (Ministère de l'Économie, des Finances, de la Santé, de l'Éducation, ...), **Structures** (ORANGE, MTN, CAMTEL, Crédit Foncier, ...), **Instituts de la Statistique** (INS, ENSEED, ...). La liste est très exhaustive !

1.7 Un outil d'aide à la prise de décision

Le Statisticien (et/ou économiste) mène des études purement quantitatives visant à modéliser plusieurs processus du système économique ; il peut s'agir des études statistiques purement descriptives ou des études économétriques. Le décideur se base généralement sur l'ensemble des résultats trouvés dès lors vulgarisés. L'homme politique peut se demander si le niveau actuel d'inflation ou de chômage peut être soutenable ... le statisticien doit donc procéder à une étude approfondie pour répondre à cette question, suivie des recommandations viables et pertinentes. Que ce soit dans le domaine de la santé, du sport, de la banque, des finances, des télécommunications, des travaux publics, de l'agriculture, de l'éducation etc., la place du statisticien n'est plus à débattre. Les Organisations Internationales telles que le FMI, la Banque Mondiale, l'OMC, le PNUD, l'OMS, l'UNICEF, etc. reconnaissent la valeur du statisticien qui, sans lui, il serait impossible de développer des secteurs clés. Le statisticien est enfin amené à faire des études de marché, à suivre le cours des activités, à faire des prévisions, à détecter les défauts du système, à repérer les éventuelles limites ou barrières qui pourraient freiner les activités... Il n'est pas seulement un technicien, mais un théoricien et un vrai manager.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Chapitre 2

Anciens sujets de présélection

Ce chapitre présente brièvement quelques anciens sujets de présélection des différents pays à l'instar du **Cameroun**, du **Sénégal**, de la **Cote d'Ivoire**, du **Tchad**, du **Congo** et du **Burkina-Faso**. L'idée ici est de pouvoir s'exercer le maximum possible afin être parmi les meilleurs au test de présélection.

Sujet de présélection de 2025 - Cameroun

Exercice n°1

1. Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.
2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta)$.
3. Soit $w = 1 + i$.
   (a) Déterminer les racines carrées de w sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.
   (b) Calculer le module et l'argument de w.
   (c) Calculer la valeur de $\cos(\pi/8)$ et de $\sin(\pi/8)$.
4. Calculer la limite des suites de terme général : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Soit f la fonction de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[0, 1]$ définie par : $f(x) = \sin^2(x)$.
   (a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
   (b) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et déterminer sa dérivée.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22

www.mensa-academy.com

Mensa ACADEMY

6. (a) Démontrer la formule de Leibniz sur le calcul des dérivées n-ième : $(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$.
   (b) Calculer la dérivée n-ième de la fonction $h(x) = x^3 e^{2x}$.

Exercice n°2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \;:\; [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie A : Étude des fonctions polynomiales P_n.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x + 1}$ où P_n' désigne la dérivée de P_n.
2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$: $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{x}{2n+2}\right)$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que : $1 < x_n \leqslant 2$.

Partie B : Étude de la suite (x_n).

6. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$: $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt$
7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt$.
8. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$: $t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$.
9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$, puis : $0 < x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}$.
10. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°3

Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. (a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

   (b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?

2. Lorsqu'on tire une tire une boule, on marque un point ; lorsqu'on tire une boule rouge, on perd un point ; lorsqu'on tire une boule verte, on marque zéro point. On désigne par X le nombre de points marqués.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice n°4

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x parcourant l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

   (c) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

   (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$

   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

   Dresser le tableau des variations de f.

   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, qd $x \to -\infty$.

   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
4. (a) Établir : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\,e^x - 1 \geq 0$
   (b) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
   (c) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$
   (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$
5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$
6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

7. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

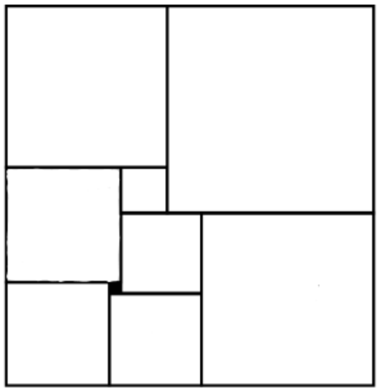
8. (a) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\,f(x)$.
   En déduire la limite de G en $+\infty$.
   (b) Montrer : $\forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\,f(x)$.
   En déduire la limite de G en $-\infty$.
9. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Sujet de présélection de 2025 - Cote d'Ivoire

Exercice n°1

La figure suivante représente un rectangle découpé en carrés. Calculer la longueur L et la largeur l de ce rectangle sachant que le petit carré noir a son côté qui mesure 4 cm.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026



Indications possibles :

— Poser x égal au côté de l'un des carrés autour du carré noir ;

— Écrire le côté de chacun des autres carrés en fonction de x puis déduire x par résolution d'équation.

Exercice n°2

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

— A_n l'événement « la n-ième cible est atteinte » ;

— $\bar{A}_n$ l'événement « la n-ième cible n'est pas atteinte » ;

— a_n la probabilité de l'événement A_n ;

— b_n la probabilité de l'événement $\bar{A}_n$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2 (on pourra utiliser un arbre pondéré).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$; puis que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
3. Soit (U_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n = 0,6665$.

Exercice n°3

Soit $A = (\sqrt{3} + i)^n$ où n est un entier naturel et $i^2 = -1$.

1. Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel n pour que A soit un nombre réel.
2. Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel n pour que A soit imaginaire pur.
3. On appelle $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = 1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique).
   (b) Montrer que $\bar{j} = j^2$.
   (c) Montrer que $j^{-1} = j^2$.
   (d) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice n°4

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225^oC.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four. Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25^oC. On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

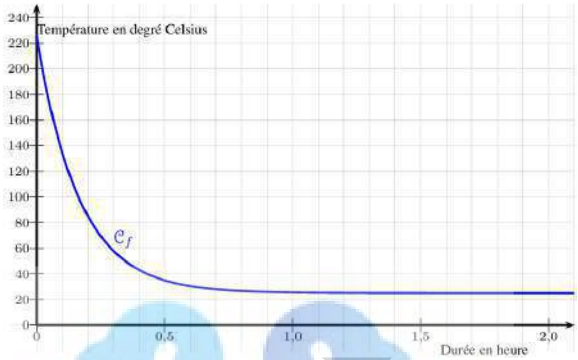
MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à $40^{o}C$. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



Sujet de présélection de 2025 - Sénégal

Exercice n°1

1. Démontrer, par récurrence sur n, que $\sum_{p=1}^{p=n} p(p+1)(2p+1) = \frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$.
2. Une urne contient trente boules, parmi lesquelles n sont rouges, $n+1$ sont blanches et le reste constitué de boules vertes.
   (a) Déterminer le nombre maximal, N de boules rouges que peut contenir l'urne.
   (b) On effectue trois tirages successifs d'une boule que l'on remet dans l'urne après avoir noté sa couleur.
      i. Calculer le nombre de tirages donnant, dans cet ordre : une rouge, une blanche, une blanche.
      ii. Calculer le nombre de tirages donnant une boule rouge et deux boules blanches, sans tenir compte de l'ordre des tirages.
   (c) La méthode de tirage étant la même qu'en (2)(b) et N la valeur trouvée au (2)(a). Soit d_n le nombre de tirages donnant les deux couleurs : rouge et blanche. Calculer d_1 puis d_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant n \leqslant N$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Calculer $\sum_{n=1}^{n=N} d_n$.

Exercice n°2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la suite de terme général $U_{p,n} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(n+k)^p}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose $p \geqslant 2$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_{p,n} = 0$. (On pourra chercher un encadrement de $U_{p,n}$).
2. On suppose $p = 1$. Étudier le sens de variation de la suite $(U_{1,n})_{n\geqslant 1}$. En déduire sa nature.
3. Soit la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$.
   (a) Montrer l'encadrement suivant : $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin(x) \leqslant x$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la même limite que la suite $(U_{1,n})_{n\geqslant 1}$.
4. On se propose de calculer le réel ℓ égale à la limite commune aux deux suites $(V_n)_{n\geqslant 1}$ et $(U_{1,n})_{n\geqslant 1}$. Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$, dérivable à droite en 0. On pose : $f'_d(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $S_n(f) = \sum_{k=0}^{k=n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha$. En déduire que : $\lim S_n(f) = \alpha \lim (U_{1,n})$.
   (b) Retrouver les résultats du (1) et du (3)(b).
   (c) Calculer la valeur de ℓ.

Exercice n°3

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal du plan.

1. Donner la nature de (C_0) et préciser ses éléments caractéristiques.
2. On suppose $n \geqslant 1$.
   (a) Étudier les variations de f_n.
   (b) Préciser la valeur du maximum de f_n ainsi que sa limite quand $x \to +\infty$.
3. (a) Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (b) En déduire les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).
   (c) Construire, dans un même repère, les courbes (C_n), $n = 0, 1, 2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°4

1. On considère la fonction $g : x \longmapsto 2x + 1 - \dfrac{2}{\pi}\text{cotan}(\pi x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par g_n la restriction de g à l'intervalle ouvert $]n, n+1[$.
   (a) Déterminer D, l'ensemble de définition de g.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]n, n+1[$, on a : $g_n(x) = g_0(x - n) + 2n$.
   (c) Dresser le tableau de variation de g_0, puis celui de g_n, $n \geqslant 1$.
   (d) Démontrer que g_n est une bijection. En déduire le nombre de solutions de l'équation : $g_n(x) = 0$ dans $]n, n+1[$.
2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{4}[1 - (2x+1)\cos(\pi x)]$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in D$, on a : $f'(x) = \dfrac{\pi}{4}\sin(\pi x) g(x)$.
   (b) En utilisant la question (1), établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le tableau de variation de f sur l'intervalle fermé $[n, n+1]$. On distinguera les cas : n pair et n impair. On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'extrémum de f sur cet intervalle.
   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $-\dfrac{1}{2}x \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
   (d) Tracer la courbe (C) correspondant à $x \in [0, 5]$.

Sujet de présélection de 2024 - Cameroun

Exercice n°1

1. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\left|\sqrt{2+x} - 2\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x - 2|$.
2. (a) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.
   (b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$, vérifiant $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{a}{1 - \sin x} + \dfrac{b}{1 + \sin x}$.
   (c) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\cos x}$.
3. En appliquant la méthode des rectangles à la fonction appropriée, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
4. (a) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer le module et l'argument de e^{iz}.
   (b) En utilisant la formule d'Euler, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

5. Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice n°2

Partie A

Pour cette partie, on rappelle qu'une fonction f est n-fois dérivable si ses dérivées successives existent jusqu'à l'ordre n et on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
On rappelle que $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

1. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in D_g$, $g^{(n)}(x) = (-a)^n \dfrac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, trouver $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{C}$ tels que $f(x) = \dfrac{u}{x-\alpha} + \dfrac{v}{x-\beta}$.
3. En déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f^{(n)}(x) = 0$.

Partie B

Pour tout entier $n \geqslant 2$, soit la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.

5. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$. On note cette solution a_n.
6. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $f_{n+1}(a_n) = 0$.

   (b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1+(a_n)^{n+1}}{2}$. On pourra utiliser l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

8. On pose $b_n = (a_n)^{n+1}$. Calculer la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°3

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Dans cette partie, aucun calcul approché n'est demandé. On prélève, au hasard 4 câbles dans une livraison de 50 câbles. Préciser la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. E = " les 4 câbles sont du type C_1 ";
2. F = " 1 câble est du type C_1 et 3 sont du type C_2 "; 8item G = " au moins 1 câble est du type C_1 ".

Partie B

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience ε et on note X le nombre de câbles du type C_1 obtenus.

1. On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1.
   (c) Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Dans cette question, n est inconnu.
   (a) Exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
   (b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience ε pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°4

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

1. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$
2. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.
4. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

   On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Montrer : $\lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

5. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim x{+}\infty\Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Sujet de présélection de 2024 - Cote d'Ivoire

Exercice n°1

1. Déterminer l'entier naturel n tel que : $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = n\sqrt{2}$.
2. Calculer : $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$.

Exercice n°2

Un capital C est partagé en deux parts C_1 et C_2. La somme C_1 est placée à 4% d'intérêts par an, la somme C_2 à 5% d'intérêts par an. Au bout d'un an, les intérêts représentent au total 250 000 F.

Si on avait placé le capital C à 4%, on aurait obtenu 220 000 F d'intérêts au bout d'un an.

1. Calculer le capital C.
2. Calculer les sommes C_1 et C_2.

Exercice n°3

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés. Une urne U contient six boules indiscernables au toucher portant les nombres : $-2; -1; 0; 1; 2$ et 3.

Une urne V contient cinq boules indiscernables au toucher ; quatre boules portent le nombre 1 et une boule le nombre -1.

On tire au hasard une boule de chacune des urnes. On note α le nombre lu sur la boule tirée de U et β celui lu sur la boule tirée V.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Justifier que les points pondérés (A, α), (B, β) et $(C, 4)$ admettent un barycentre. On le note G.

2. (a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   - E_1 : G appartient à la droite (BC).
   - E_2 : G appartient au segment $[BC]$.

   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : "G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des cotés" est égale à : $\dfrac{2}{5}$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer une boule de chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.

   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   (a) Déterminer l'entier n pour que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   (b) Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situés à l'intérieur du triangle ABC soit supérieur ou égale à 0,999.

Exercice n°4

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = n(3 - u_n)$.

   (a) Prouver que cette suite est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°5

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la concentration d'un médicament dans le sang par voie intraveineuse et par voie orale.

I. Soit α une constante réelle strictement positive. On considère l'équation différentielle (E_1) : $y'(t) = \alpha y(t)$, où y est une fonction définie pour tout réel t.

1. Déterminer la solution générale de (E_1).
2. On appelle Q la solution de (E_1) vérifiant $Q(0) = 0,6$. Déterminer l'expression de Q.
3. Calculer la limite de Q en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de Q sur $[0; +\infty[$.
4. A l'instant $t = 0$, une dose du médicament est injectée dans le sang par voie intraveineuse. La substance se répartit instantanément dans le sang, ce qui donne une concentration initiale de $0,6mg/L$ et est ensuite progressivement éliminée.

   Pour tout $t \geqslant 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $Q(t)$ trouvée à la question 2.

   Au bout d'une heure, la concentration de médicament présente dans le sang a diminué de 30%.

   a. Calculer α.

   b. Le médicament reste efficace tant que sa concentration reste supérieure à $0,1mg/L$. Déterminer le temps d'efficacité du médicament.

II. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$.

On considère la fonction f définie sur $[0; \infty[$ par : $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$.

1. Justifier que f est une solution de (E).
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. A l'instant $t = 0$, le médicament est administré par voie orale en une prise. La substance est absorbée progressivement dans le sang puis éliminée.

   Pour tout $t \geqslant 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $f(t)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy.

Le médicament cause des effets indésirables quand sa concentration dans le sang est supérieure à $0,3mg/L$.

Le médicament va-t-il causer des effets indésirables au patient ? Justifier la réponse.

III. On rappelle que le médicament reste efficace tant que sa concentration reste supérieure à $0,1mg/L$. On admet que : $f(t) = 0,1$ pour $t = 0,24$ ou $t = 4,37$;

Quel mode d'administration choisir si on veut que le médicament soit efficace le plus longtemps possible ?

Sujet de présélection de 2024 - Sénégal

Exercice n°1

1. Démontrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les range toutes dans n boites (chaque boite pouvant contenir de 0 à n boules).
   (a) Déterminer le nombre total A_n de rangements possibles.
   (b) Déterminer le nombre total B_n de rangements tels que chaque boite contienne exactement une boule.
3. On pose : $P_n = \dfrac{B_n}{A_n}, n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer, en utilisant la question (1), que $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} \geqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que $P_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice n°2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On note par f_α la fonction définie par : $f_\alpha(x) = \dfrac{x^2 + (\alpha+1)x + 2\alpha}{x+1}$, et $(\mathcal{C}_\alpha)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Étudier les variations de f_α sur son domaine de définition.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) On note A_α et B_α les points de $(\mathcal{C}_\alpha)$ correspondant respectivement au maximum et minimum relatifs de f_α. Lorsque α décrit $\mathbb{R}_+^*$, déterminer, par son équation cartésienne, la réunion $\mathcal{P}$ de l'ensemble des points A_α et l'ensemble des points B_α.

2. Déterminer, par son équation cartésienne, l'asymptote oblique (D_α) de $(\mathcal{C}_\alpha)$.
3. Montrer que les courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ ont un unique point commun I qu'on précisera.
4. Étudier les positions relatives des deux courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ et $(\mathcal{C}_\beta)$, avec $\alpha < \beta$.
5. Construire dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes : $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_4)$ et $\mathcal{P}$.

Exercice n°3

On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls, avec $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) ainsi obtenue est convergente.

2. On pose : $a_n = n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer qu'on a : $\forall x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, $P_n(x) = \dfrac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$.

   (b) Calculer u_1 et montrer que : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire la valeur de : $l = \lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n$.

Exercice n°4

L'objectif de cet exercice est de montrer l'important résultat suivant :

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (simple notation).}$$

On pose : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. On se propose de montrer, ici que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   (a) En utilisant l'égalité : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la suite (u_n) telle que $u_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p(p+1)}$ est convergente, et trouver sa limite.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Montrer que : $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, $\forall n \geqslant 2$. En déduire que la suite (v_n) est majorée, puis qu'elle converge.

2. On se propose de calculer, ici, la limite de (v_n). On considère α réel tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et on admet la relation suivante : $\sin(n\alpha) = \sin^n(\alpha)\left(C_n^1 \cot^{n-1}(\alpha) - C_n^3 \cot^{n-3}(\alpha) + C_n^5 \cot^{n-5}(\alpha) - \ldots\right)$, le dernier terme dépendant de la parité de n.

   On suppose dans la suite que n est impair et on se pose : $n = 2p+1$.

   (a) Démontrer que les racines du polynôme : $P(x) = C_{2p+1}^1 x^p - C_{2p+1}^3 x^{p-1} + C_{2p+1}^5 x^{p-2} + \ldots + (-1)^k C_{2p+1}^{2k+1} x^{p-k} + \ldots + (-1)^p$ sont : $x_k = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $\forall k \in \left\{1, 2, \ldots, p = \frac{n-1}{2}\right\}$.

   (b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{p} x^k = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)$.

   (c) Sachant que : $\sin(\alpha) < \alpha < \tan(\alpha)$, $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$, montrer que : $\frac{1}{6}(n-1)(n-2) < \frac{n^2}{\pi^2} v_n < \frac{1}{6}(n-1)(n+1)$, $\forall n \geqslant 2$.

   (d) En déduire : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n$ et conclure.

Sujet de présélection de 2024 - Tchad

Exercice n°1

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où k est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local ?

2. Résoudre dans R^2 le sytème suivant : $x + y = xy = x^2 + y^2$.

3. Calculer : $I = \int_0^1 E(x)dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

4. a étant un réel strictement positif, on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ définie pour tout $x > 0$. Résoudre l'équation : $f(x) = x$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°2

z étant un complexe, on note (S) le système : $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z. \end{cases}$

Le plan est rapporté à un répère orthonormal direct (O, u, v).

1. Donner le module et un argument des trois complexes suivants : $a = \sqrt{3} + i$, $b = -2 + 2i$ et $c = 3 + 3i$.
2. Parmi les complexes a, b et c, lesquels sont solutions du système (S) ? (Justifier la réponse).
3. M étant le point d'affixe z, et A le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S).
4. Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice n°3

Soit la fonction φ définie sur R (ensemble des nombres réels) par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in R \backslash Q \\ x^2 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

Où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de φ.
2. Etudier la dérivabilité de φ.
3. Soit $f(x) = \sin(x).\varphi(x)$, étudier la continuité de f.

Sujet de présélection de 2023 - Cameroun

Exercice n°1

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.

60% des apprenants pratiquent un instrument à cordes (C), 45% des apprenants pratiquent un instrument à vent (V) et 10% pratiquent un instrument à cordes et à vent.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. On choisit un apprenant dans le conservatoire :
   (a) Quelle est la probabilité de l'évènement : " cet apprenant pratique au moins un des deux instruments considérés " ?
   (b) Quelle est la probabilité de l'évènement : " cet apprenant pratique un et un seul des instruments considérés " ?
2. On choisit au hasard un apprenant pratiquant un instrument (C). Quelle est la probabilité pour que cet apprenant pratique un instrument (V) ?
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n apprenants. On suppose que le nombre d'apprenants est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.
   (a) Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un apprenant choisi au hasard pratique un instrument C ?
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,999$.

Exercice n°2

1. Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$.
2. En déduire : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} dx$.
3. Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.
   (a) Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel x.
   (c) Calculer $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ et en déduire $\mathcal{B} = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

Exercice n°3

1. Soit la fonction f définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
   (a) Démontrer que f est décroissante sur I.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Soit la suite u_n de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geqslant 1$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) Quel est le sens de variation de cette suite ?

(b) Quelle est sa limite ?

(c) Démontrer que cette suite est bornée.

3. On définit la suite (s_n) dont le terme général est la somme des n premiers termes de la suite (u_n), $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

(a) Démontrer que cette suite est constante.

(b) Écrire l'expression de $u_1 + u_2 + u_3$.

(c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $s_n = \dfrac{n}{n+1}$, puis calculer s_{99}.

(d) La suite (s_n) converge vers 1. Vraie ou faux ? Justifier.

Exercice n°4

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unité graphique : 2cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

1. On considère $n = 1$.

(a) Calculer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?

(b) Étudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.

(c) Déterminer une équation de la tangente à C_1 en son point d'abscisse 1.

2. On considère $n = 2$.

(a) Calculer les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?

(b) Calculer $f_2'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_2.

(c) Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire les positions relatives de C_1 et C_2.

(d) Tracer C_1 et C_2.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{e} f_n(x)dx$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. On pose $F(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$.
3. Calculer I_2, puis l'aire en cm^2 du domaine du plan compris entre les courbes C_1 et C_2 et les courbes d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
4. En utilisant la question 2 de la partie B, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\dfrac{1}{n!}I_n = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n!}\right)$.
5. En utilisant un encadrement $\ln x$ sur $[1, \mathrm{e}]$, montrer que pour tout entier n on a :
$$0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$
6. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

Sujet de présélection de 2023 - Cote d'Ivoire

Exercice n°1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

1. Trois étudiants engagent des fonds dans une affaire : le premier 15 000F pendant 4 mois, le deuxième 18 000F pendant 3 mois, le troisième 13 000F pendant 1 mois. Le bénéfice réalisé est partagé entre les 3 étudiants proportionnellement au montant engagé et à la durée. Le deuxième reçoit 10 800F.
   (a) Calculer les parts des deux autres étudiants (*Indication : Si les nombres sont proportionnels à deux grandeurs, alors ils sont proportionnels au produit de ces deux grandeurs.*)
   (b) Calculer le bénéfice réalisé.
2. Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle. Sa profondeur est de 40 cm. Les autres dimensions intérieures sont de 100 cm et 40 cm. On remplit cet aquarium à l'aide d'un récipient cylindrique de 30 cm de diamètre intérieur et de 30 cm de profondeur.
   (a) Combien de récipients cylindriques faut-il pour remplir l'aquarium ?
   (b) Quelle est la masse de l'aquarium rempli d'eau ? Le verre a une épaisseur de 10 mm et sa masse volumique est de 2,5kg/dm^3.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°2

Pour tout entier n, on définit les fonctions f_n sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$.

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   (a) La fonction f_n est-elle strictement monotone ?
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite est convergente. On notera α sa limite.
   (c) On suppose que : $\alpha < 1$.
      i. Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\alpha_n\right)^n = 0$.
      ii. Déduire alors la valeur de α.

Exercice n°3

On considère deux pièces de monnaie A et B telles que la pièce A donne "Face" avec la probabilité 1/2 et la pièce B donne "Face" avec la probabilité 1/4.

Lorsqu'on lance l'une de ces deux pièces, si on obtient "Face", on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

1. On effectue une série de trois lancers, en commençant par lancer la pièce A.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où "Face" est obtenu.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
2. On effectue une série de n lancers, en commençant par lancer la pièce A.

   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère les évènements suivants :

   F_n : " Obtenir Face au nième lancer " ; A_n : " Utiliser la pièce A pour le nième lancer ". On note $p_n = P(A_n)$; on a donc : $p_1 = 1$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.
   (b) Démontrer par récurrence que : $p_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$ pour tout $n \geqslant 1$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(c) Déterminer la probabilité $P(F_n)$.

(d) Déterminer la limite de la probabilité $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Interpréter le résultat.

Exercice n°4

Dans une usine de fabrique de jouets, une étude a permis de faire les modélisations suivantes :

- la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x}-1\right)$, où $f(x)$ est le prix de vente unitaire en milliers de francs correspondant à une quantité x offerte exprimée en centaines de jouets ;
- la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{12}{e^{2x}+1}$, où $g(x)$ est le prix de vente unitaire en milliers de francs correspondant à une quantité x demandée exprimée en centaines de jouets.

On note p et q les nombres réels tels que : $f(q) = g(q) = p$.

1. (a) La valeur exacte de q, puis celle de p.

   (b) Le nombre p correspond, selon la loi de l'offre et de la demande, au prix d'équilibre. Donner ce prix d'équilibre en francs ainsi que le nombre de jouets offerts, arrondi à l'unité près, assurant l'équilibre du marché.

2. On appelle surplus du producteur le nombre S tel que : $S = pq - \int_0^q f(x)dx$. Calculer S, puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

3. On appelle surplus du consommateur le nombre S' tel que : $S' = \int_0^q g(x)dx - pq$.

   (a) Déterminer les nombres réels u et v tels que, $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = u + \frac{ve^{2x}}{e^{2x}+1}$.

   (b) Calculer S', puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice n°5

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sin(\pi x)$.

1. Calculer $I = \int_0^1 \sin(\pi x)dx$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$.

   (a) Prouver que : $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + ... + e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) En déduire que : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+...+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

(c) Prouver enfin que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{2}{\pi}$.

3. Comparer les résultats des questions 1 et 2.c puis interpréter graphiquement.

Sujet de présélection de 2023 - Tchad

Exercice n°1

Soit $u=1+i$ et $v=-1+i\sqrt{3}$.

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice n°2

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :
$f(-1)=f(1)=0$ et $f(x)=\mathrm{e}^{\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}$ pour $x]-1,1[$.

1. Étudier la dérivabilité de f en $x=1$ et $x=-1$.
2. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
3. Résoudre l'équation $f(x)=\mathrm{e}^x$.

Exercice n°3

Soit un réel x, on définit la partie entière de x, notée $E(x)$, comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que $E(x)$ vérifie la double inégalité : pour x réel,

$$E(x)\leqslant x<E(x)+1.$$

Pour $x\in J=[-1,2]$, on définit la fonction f par $x\longmapsto f(x)=E(x).\sin(\pi x)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

1. Donner les expressions de f quand x appartient aux intervalles : $A = [-1, 0[$, $B = [0, 1[$ et $C = [1, 2]$.
2. Calculer l'intégrale : $D = \int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Exercice n°4

1. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.
2. Résoudre l'équation : $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.
3. On augmente la longueur d'un rectangle de 40% et on diminue sa largeur de 40%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation.

Sujet de présélection de 2023 - Congo

Exercice n°1

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes $|z_1| = |z_2| = 1$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$.

   Démontrer que $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un réel.
2. Si z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes de module 1,

   Démontrer que $|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = |z_1 + z_2 + z_3|$.

Exercice n°2

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = (\alpha + 1)(v_n + 2) \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1. Pour quelle valeur de α la suite (v_n) est-elle constante ?
2. Pour quelle valeur de α la suite (v_n) est-elle arithmétique ?
3. On pose $\alpha = -\dfrac{2}{3}$.
   (a) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = v_n - 1$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Donner les expressions de w_n et v_n en fonction de n.

(c) Calculer en fonction de n, les sommes :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Calculer les limites de T_n et S_n quand n tend vers plus l'infini.

Exercice n°3

On donne les intégrale suivantes : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \sin x dx$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Pour tout n non nul, montrer que I_n et J_n vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} \frac{1}{n} I_n + J_n = \frac{1}{n} \\ -I_n + \frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$
3. En déduire les expressions de I_n et de J_n en fonction de n.
4. Calculer I_3 et J_3.

Exercice n°4

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x\left(2 + \ln^2 x\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_g) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la continuité de g au point $x = 0$.
2. Étudier la dérivabilité de g au point $x = 0$.
3. Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses puis vérifier la parité de la fonction g.
4. Étudier les variations de g sur son ensemble de définition puis tracer sa courbe.
5. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_g), l'axe des abscisses et les droites $x = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2023 - Sénégal

Exercice n°1

A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

On note par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère cartésien du plan.

1. Étudier les fonctions f_0, f_1 et f_2 et tracer, dans un même repère les courbes C_0, C_1 et C_2.
2. (a) Étudier la parité de f_n en fonction de celle de n.
   (b) Étudier la périodicité de f_n.
   (c) Montrer que $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (-1)^n f_n\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (d) Déduire de ce qui précède qu'il suffit d'étudier f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On précisera les transformations géométriques permettant d'obtenir sa courbe globale.
3. (a) Étudier les variations de f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $n \geqslant 3$.
   (b) Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale, y_n, prise par f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} y_n$.

Exercice n°2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme P_n défini par : $P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier et représenter graphiquement P_2.
2. On pose $\phi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Étudier les variations de ϕ_n sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]-1, 0[$ tel que $\phi_n(\alpha_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Déduire de (2) l'étude des variations de P_n sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $P_n(x) \geqslant P_n(\alpha_n) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$..

Exercice n°3

On considère la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $U_1 = 1$ et $U_n = U_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour $n \geqslant 2$.

1. (a) Exprimer U_n à l'aide du symbole $\sum$, puis montrer que : $\sqrt{n} \leqslant U_n \leqslant n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} V_n = 2\sqrt{n} - U_n \\ W_n = 2\sqrt{n+1} - U_n \end{cases}$

   (a) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes.

   (b) Soit ℓ leur limite commune.

   Déterminer n_0 pour que V_{n_0} soit une valeur approchée par défaut de ℓ à 10^{-3} près.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{U_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{U_n}{\sqrt{n}}$.

3. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n, U_n et U_{2n}.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice n°4

1. Dans une urne U_1, on a placé 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200. On extrait simultanément et au hasard 3 jetons de U_1 et on note par S la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

   (a) Déterminer toutes les valeurs possibles de S.

   (b) Déterminer le nombre de tirages correspondant à :

      i. $S = 400$

      ii. $S = 500$

2. On considère une seconde urne U_2 contenant 3 jetons marqués 100 et 2 jetons marqués 200. Un tirage consiste à extraire un jeton de U_1 puis un jeton de U_2.

   (a) Calculer le nombre de tirages possibles.

   (b) Calculer le nombre de tirages donnant 2 jetons portant le même nombre.

BARÈME

Exercice 1 : 5pts=1+(0,5+0,5+0,5+0,5)+(1+1)

Exercice 2 : 5pts=1+(1+1)+(1+1)

Exercice 3 : 5pts=(0,5+0,5)+(1+0,5+1)+(0,5+1)

Exercice 4 : 5pts=(1+(1+1))+1+1

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

Sujet de présélection de 2022 - Cameroun

Exercice n°1

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Étant donné un nombre réel a, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = a \text{ et pour tout entier } n \geq 1 \,:\, u_{n+1} = u_1 \times u_2^2 \times u_3^3 \times \cdots \times u_n^n.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite en fonction de a.
2. Calculer, pour $n \geq 2$, u_n en fonction de u_{n-1}, puis u_n en fonction de u_{n-2}.
3. Calculer, pour $n \geq 2$, u_n en fonction de a.

Partie B

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation :
$$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8(3)+\log_8(x+1)} = \log_9(27).$$
2. Trouver les réels a, b et c tels que : $\dfrac{x^2}{x^4-1} = \dfrac{a}{1+x^2} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{x-1}$ et calculer :
$$F(x) = \int \frac{x^6}{x^4-1}dx.$$

Exercice n°2

Partie A

1. Un championnat sportif regroupe 20 équipes, chaque match oppose 2 équipes et chaque équipe doit, pendant la saison, rencontrer chacune des 19 autres formations, une fois sur son propre terrain et une autre fois sur le terrain de l'adversaire. Combien de rencontres faut-il organiser au total pour respecter ce règlement ?
2. Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques, somme-toutes effrayantes sur les risques de cancer,

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer, toujours d'après des statistiques,

on estime les probabilités suivantes :

si cette personne n'a pas fumé un jour J_n,

alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est de $0,3$;

mais si elle a fumé un jour J_n,

alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est $0,9$.

(a) Quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n qu'elle fume le jour J_n ?

(b) Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter de fumer ?

Partie B

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes de j :

   (a) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

   (b) $j^3 = 1$;

   (c) $1 + j + j^2 = 0$;

   (d) $-j^2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points M, N, P d'affixes respectives m, n, p.

   (a) Montrer que, si le triangle MNP est équilatéral direct, alors :

   $$m - n = -j^2(p - n) \quad \text{et} \quad m + nj + pj^2 = 0.$$

   (b) Réciproquement, on suppose que $m + nj + pj^2 = 0$.

   Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct.

3. **Application** : on considère un cerlce du plan de centre O et des points A, B, C, D, E, F de ce cercle tels que

   les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}\right)$ aient la même mesure $\frac{\pi}{3}$.

   Soient M, N, P les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$.

   Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°3

Dans tout cet exercice,

le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = 1 - x^2 + \ln(1 - x)$.

1. (a) Étudier la fonction f et tracer sa courbe C_f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution positive α et vérifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right[$.

   (a) Soient p et q les fonctions définies sur $\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]$ respectivement par :

   $$p(x) = \left|f'(x)\right| \quad \text{et} \quad q(x) = \left|f''(x)\right|.$$

   Étudier les variations de p et q et dresser leurs tableaux de variations.

   (b) En dééduire que :

   $$\forall\, x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right] : \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \frac{e^2 + 2}{3}.$$

2. Soit t un élément de $]\alpha, 1[$.

   (a) Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{t} f(x)\, dx$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 1^-} \int_{\alpha}^{t} f(x)\, dx = P(\alpha)$ où P est un polynome à déterminer.

Partie B : les questions 4 et 5 sont indépendantes

4. Soient u et v deux réels tels que $u < v$. Soit h une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant

   l'intervalle $J = [u, v]$, dérivable jusqu'à l'ordre 2 et ayant u comme unique zéro dans J (i.e $h(u) = 0$).

   On suppose que h est négative sur J ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et que pour tout $x \in J \,:\, h'(x) \neq 0$.

   On considère la fonction T définie sur$J$ par $T(x) = x - \dfrac{h'(x)}{h(x)}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) Soit $a \in J$ et A le point d'abscisse a de la courbe C_h représentative de h dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Vérifier que $T(a)$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_h en A avec l'axe des abscisses.

(b) Montrer que T est dérivable dans J et monotone : dresser son tableau de variations.

(c) En déduire que $T(J) \subset J$.

(d) On pose $x_0 = v$ et pour tout entier naturel n : $x_{n+1} = T(x_n)$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.

(e) Vérifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente : calculer sa limite.

5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et deux fois dérivable.

Soit k un réel fixé. On considère la fonction G définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall\, x \in [a, b] \,:\, G(x) = g(a) - g(x) - (a - x)\, g'(x) - \frac{1}{2}k(a - x)^2 .$$

(a) Calculer $G(a)$. Déterminer k pour que $G(b)$ soit égal à 0.

Désormais k prend cette valeur.

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à G dans l'intervalle $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $G'(c) = 0$.

(c) En déduire que $g(a) = g(b) + (a - b)\, g'(c) + \frac{1}{2}(a - b)^2 g''(c)$.

Partie C : Application à la fonction f

6. (a) Démontrer que la fonction f satisfait dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, aux hypothèses faites sur la fonction h de la partie B. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $x_0 = \beta$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel c_n dans $\left]\alpha, x_n\right[$ tel que :

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)\, f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n) .$$

(c) En déduire que $x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$ et $x_{n+1} - \alpha \leq \frac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$ où M est à préciser.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

7. Pour tout entier naturel n on pose $\delta_n = \frac{M}{2}\left(x_n - \alpha\right)$.

   (a) En remarquant que $\delta_0 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha) \leq \frac{M}{4}$, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $$\delta_n \leq \delta_0^{2^n} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n}.$$

   (b) Déterminer un entier naturel n tel que $x_n - \alpha$ soit inférieur à 10^{-5} et

   une valeur approchée de α à 10^{-5} près par excès.

Sujet de présélection de 2021 - Cameroun

Exercice n°1

Partie A

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur les intervalles $]-1,+\infty[$ et $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \text{ si } t > 0 \end{cases}.$$

1. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier les variations de f et donner le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1,+\infty[$ une solution unique notée α,

   et donner sa valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Préciser, suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$.
5. Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
6. Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a : $g' = s(t) \times f(t)$, avec $s(t)$ une fonction à préciser.

   (a) Calculer la limite de g en $+\infty$.

   (b) Dresser le tableau de variations de g.
7. Tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   On prendra pour unités 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, du domaine du plan limité par

l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

8. (a) Étudier sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la dérivabilité de la fonction $g_1 : x \longmapsto \sqrt{x}\ln(1+x)$.

   (b) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt.$$

   Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0, +\infty[$ et que : $\varphi(x) = g(x)$.

9. En déduire que $\mathcal{A} = 2\ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

10. Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

    Et k la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $k(\theta) = \tan^2(\theta)$.

    (a) Calculer $(h\circ k)(0)$.

    (b) Calculer $(h\circ k)'(\theta)$ pour tout $\theta \in I$.

    (c) En déduire l'expression de $(h\circ k)$.

    (d) Calculer $k(I)$ et $k\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice n°2

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1à 20.

Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité $\frac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois,

je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

— avec la combinaison $3-4-12-16$, je ne marque rien ;

— avec la combinaison $2-8-11-11$, je marque 11 points ;

— avec la combinaison $5-9-9-9$, je marque 9 points ;

— avec la combinaison $7-7-14-14$, je marque 21 points ;

— avec la combinaison $2-2-2-2$, je marque 2 points.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a un entier compris entre 1 et 20.

   Déterminer, pour tout $k \leq 4$, la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.

   Pour cela, on considèrera la variable aléatoire N_k,

   égale au nombre de fois d'avoir exactement k nombres a parmi les lancés des dés.
3. Pour tout a, on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi

   les quatre du lancer, et 0 sinon. Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables aléatoires.
4. Combien de points puis-je espérer en moyenne ?
5. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?
6. On suppose, à partir de maintenant, qu'après avoir lancé les 4 dés, je suis autorisé à relancer entre 0 et 4

   dés pour améliorer mon score. Je décide de tout relancer. Ai-je pris la bonne décision ?

Exercice n°3

On considère la suite (d_n) définie par :

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : d_{n+1} = n\left(d_n + d_{n-1}\right).$$

1. (a) Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : d_{n+1} = (n+1)\, d_n + (-1)^{n+1}$.
2. On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n e^t\, dt$.

   (a) Calculer I_0, puis trouver la relation entre I_n et I_{n+1}, pour tout entier naturel n.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : ed_n = n!\left(1 + (-1)^n I_n\right)$.

   (c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N} : \left|d_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

   (d) Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n, pour $n \geq 2$,

   puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la première question et calculer d_{10}.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

Exercice n°4

Dans cet exercice, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie 1 : Préliminaires

1. Soient D et D' deux droites sécantes en un point I, s et s' les symétries axiales respectivement d'axes D et D'.

   Donner la nature et les éléments caractéristiques de $s \circ s'$.

2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, O le centre du cercle inscrit à ABC.

   On désigne par s_1, s_2, s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA), (OB) et (OC)

   et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$ et $M_3 = s_3(M)$.

   (a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$, $M_3 = r(M_1)$ avec $r =^2= r \circ r$.

   (b) Quelle est la nature du triangle $M_1M_2M_3$?

Partie 2 : Nombres complexes

L'affixe du vecteur $\vec{u}$ étant 1, celle du vecteur $\vec{v}$ étant noté i (avec $i^2 = -1$),

comme il est d'usage, on pose : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère, dans le plan $\mathcal{P}$, les points O, A, B, C d'affixes respectives $0, 1, j, j^2$.

On désigne par s_1, s_2, s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA), (OB) et (OC).

Soit M un point quelconque du plan d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, ρ un réel strictement positif et θ un réel.

3. Soient $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$ et $M_3 = s_3(M)$.

   Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\overline{z}$, $j^2\overline{z}$ et $j\overline{z}$.

4. Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC).

   Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu du segment $[M_1, M_4]$; en déduire l'affixe de M_4.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

5. (a) À quelle condition les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés ?

   On suppose désormais que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés ;

   on note Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

   (b) Justifier le fait que Ω appartient à la droite $\left(OM_1\right)$; dans la suite, on note son affixe $\lambda e^{-i\theta}$, avec λ réel.

   (c) Montrer que $\lambda = -\dfrac{1+2\rho\cos(\theta)}{\rho+2\cos(\theta)}$;

   (d) En déduire une expression du rayon R du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

   (e) Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si $\rho = 1$ ou $(\rho+\cos(\theta))^2 = 1-3\cos^2(\theta)$.

Sujet de présélection de 2021 - Cote d'Ivoire

Exercice n°1

On considère les nombres S et P suivants :

- $S = (1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2)+\ldots+(2021^2-2022^2-2023^2+2024^2)$.
- $P = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{4084441}\right)$.

Calculer S et P.

Exercice n°2

On dit qu'un nombre entier est digisible lorsqu'il vérifie les trois conditions suivantes :

— aucun de des chiffres n'est nul ;

— il s'écrit avec des chiffres tous différents ;

— il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 36 est digisible car il est divisible par 3 et par 6 ;
- 264 est digisible car il est divisible par 2, par 6 et par 4.

1. Proposer deux autres nombres digisibles à deux chiffres.
2. (a) Donner tous les diviseurs à un chiffre du nombre 1 000.

   (b) En déduire un nombre digisible à quatre chiffres.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Soit n un nombre entier digisible dont l'écriture comporte 5.

   (a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

   (b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

Exercice n°3

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la nième lecture ?

2. (a) Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la nième lecture ?

   (b) Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0,9 ?

Exercice n°4

Une étude d'un hypermarché portant sur un produit vendu dans ses rayons a révélé que pour un prix de vente unitaire x, exprimé en milliers de francs :

— le nombre d'objets exprimé en centaines, proposés sur le marché est modélisé par la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{e^x} - 1$;

— le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prets à acheter est modélisé par la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{12}{\sqrt{e^x} + 1}$.

1. (a) Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$. On note p la solution.

   (b) En déduire le prix d'équilibre (prix auquel la demande est égale à l'offre) de ce produit.

2. Justifier que : $f(p) = \sqrt{13} - 1$. Que désigne ce nombre ?

3. Calculer la rente R du producteur (en centaines, $R = p \times f(p) - \int_0^p f(x)dx$).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°5

1. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, les système suivant : $\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$
2. On pose : $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   (a) Démontrer que : $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$.
   (b) En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$.
3. On admet que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$.
   Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Sujet de présélection de 2021 - Tchad

Exercice n°1

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n)\ :\ x^n + x - 1$.
   — Montrer qu'il existe une unique solution positive et strictement inférieure à 1, de (E_n), notée x_n.
   — Calculer la limite de la suite (x_n) quand n tend vers plus l'infini.
2. Calculer en fonction de n (où n est un entier strictement positif), l'expression :
$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k.$$
3. Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leqslant x \leqslant 1$. On pose $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2 + y^2 \leqslant 1$. On tire aléatoirement un point $M(x, y)$. Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

Exercice n°2

1. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(nx)}{x}$ pour n non nul.
3. Soit g la fonction à valeurs réelles définie par : $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

MENSA Academy
MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

— Quel est le domaine de définition de g ?

— Déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers 0.

Exercice n°3

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x}{1 + \mathrm{E}(x)}$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière entière de x.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité de f.

Exercice n°4

Soit un réel x, on définit la partie entière de x, notée $E(x)$, comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que $E(x)$ vérifie la double inégalité : pour x réel, $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Pour $x \in J = [-1, 2]$, on définit la fonction f par $x \longmapsto f(x) = E(x).\sin(\pi x)$.

1. Donner les expressions de f quand x appartient aux intervalles : $A = [-1, 0[$, $B = [0, 1[$ et $C = [1, 2]$.
2. Étudier la continuité de f sur J.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
4. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle J, et tracer l'allure générale de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
5. Calculer les intégrales : $U = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$ et $U = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Sujet de présélection de 2021 - Burkina-Faso

Exercice n°1

Soit m un nombre complexe non nul.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0.$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (on remarquera que m est solution de (E)).

(b) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E) autre que m.

(c) Vérifier que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$.

(d) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note P le centre de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme O en A, Q le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B et R le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en O.

(a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

(b) i. Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

ii. Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(c) Montrer que $OQ = PR$ et que les droits (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice n°2

Soit k un nombre réel.

1. Vérifier que la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - kx + 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = (x-2)(x-k-2)$.

2. Soit l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

(a) Justifier que (E') : $y'' - 2y' + y = 0 \iff$ (F) : $y' - y = Ae^x$ où $A \in \mathbb{R}$.

(b) Démontrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = Axe^x$ est solution de l'équation (F).

3. Soit f une fonction deux fois dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que f est solution de (F) si et seulement si $f - h$ est solution de (F') : $y' - y = 0$.

4. On admet qu'une fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si $g - g_k$ est solution de (E'). En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

5. Déterminer la solution h_k de (E) telle que $h_k(k) = 0$ et $h'_k(k) = k$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercicen°3

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction p_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$p_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. (a) Étudier le sens de variation de p_n.

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, p_n admet une racine unique α_n dans $]0;1]$.

   (c) Déterminer la valeur exacte de α_2.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $p_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n). Est-elle convergente ?

3. (a) Montrer que pour tout x réel positif et $x \neq 1$ on a : $p_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$.

   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, on a $\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$.

   (c) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $\alpha_n \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$ et $0 < 2\alpha_n - 1 \leqslant \alpha_2^{n+1}$.

   (d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Exercicen°4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm).

1. Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par : $g(x) = \ln(1-x) - \ln x$.

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 0$.

   (b) Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que la courbe (C) admet la droite d'équation $x = 1/2$ comme axe de symétrie.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer sa dérivée.

   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

   (c) Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en 0 ; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   En déduire le comportement (C) au point de coordonnées (1 ;0).

   (d) Dresser le tableau de variation de f.

   (e) Tracer la courbe (C).

4. Soient a et b deux nombres strictement positifs tels que $a + b = 1$.

   (a) Utiliser les résultats de la question 3) pour montrer que : $a \ln \dfrac{1}{a} + b \ln \dfrac{1}{b} \leqslant \ln 2$.

   (b) Pour quelles valeurs de a et b cette inégalité est-elle une égalité ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2020 - Cameroun

Exercice n°1

Partie A

1. Montrer que, pour a positif donné, les fonctions de la variable réelle t définies par :

$$\Phi(t) = \frac{t-a}{a\ln(t) - t\ln(a)} \quad \text{et} \quad \Psi(a) = \frac{(a\ln(t) - t\ln(a))^2 (t\ln(t) - a\ln(a))}{2(t-a)\left(t - a - a\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)}$$

admettent, quand t tend vers a, des limites, que l'on calculera.

2. Ces limites dépendent de a ; on les appelle respectivement $x(a)$ et $y(a)$.

   M le point qui, dans un repère orthonormé, a pour coordonnées $x(a)$ et $y(a)$.

   Trouver une équation de l'ensemble des points M quand a varie.

Partie B

On considère la fonction définie par l'égalité : $y = \frac{2x-1}{x^3}e^{\frac{x-1}{x}}$ et on note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. Étudier les variations de y.

4. Montrer qu'il existe une fonction homographique $f(x)$ satisfaisant à $\int y\,dx = k + e^{\frac{x-1}{x}} f(x)$ $(k \in \mathbb{R})$.

5. Construire C.

1. Sur C on considère les points O, A, B et P dont les abscisses sont $0, \frac{1}{2}, 1$ et α $(\alpha > 1)$.

   Les parallèles à (Oy) issues de ces points, l'axe (Ox) et C déterminent trois domaines dont les aires

   sont appelées A_1, A_2 et A_3. Calculer ces trois aires ; dire si A_3 admet une limite finie quand α tend vers $+\infty$.

Exercice n°2

Pour tout entier $n \geq 2$, soit la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0, +\infty[$. On note α_n cette solution.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$.

   (b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

   (c) En déduire que la suite (α_n) converge.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$: $\alpha_n = \dfrac{1 + (\alpha_n)^{n+1}}{2}$.

   On pourra utiliser l'égalité suivante : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

3. Calculer la limite de $(\alpha_n)^{n+1}_{n\geq 2}$. En déduire la limite de (α_n).

Exercice n°3

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée un groupe

de personnes dès le lever du soleil. Pendant la saison estivale, il y a plus de demandes que de guides et chaque

groupe doit s'inscrire la veille de la promenade. Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité

que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les

groupes inscrits se présentent indépendamment les uns les autres.

Partie A

1. Montrer que la probabilité, qu'un jour donné, les 12 groupes inscrits soient tous présents

   est comprise entre 0, 20 et 0, 21.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Déterminer la loi et les éléments caractéristiques de X.

3. Une somme de 1 crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade. Dans le cas où un groupe ne se

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le crédit que ce groupe aurait versé pour la journée. On nomme S la variable aléatoir égale à la somme, en crédits, perçue par l'association un jour donné. Calculer la probabilité de l'événement $\{S = 1\}$. Préciser l'espérance mathématique de S.

Partie B

4. Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre en chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13ième groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 crédits à l'association. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné qu'il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?
5. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.
6. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est : $\sum_{k=0}^{13} k C_{13}^{k} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13}$.

   Calculer ce gain.
7. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ? Justifier votre réponse.

Problème

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Partie A

1. Vérifier que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j et j^2 ?
3. Soient a, b et c vérifiant la relation $a + bj + cj^2 = 0$.

   (a) Montrer que a, b et c vérifient la relation $(a - c) + (b - c) j = 0$.

   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $b = c$ et en déduire que $a = b = c$.

   (c) En déduire que $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B

On lance un dé équilibré à six faces (numérotées de 1 à 6).

On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire égale à j^F.

4. Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que la loi de Z est l'équiprobabilité sur $\{1, j, j^2\}$,

   c'est-à-dire $P(Z = 1) = P(Z = j) = P(Z = j^2) = \frac{1}{3}$.

5. On considère un entier $n \geq 1$, on lance le dé n fois (lancers indépendants).

   On note :

   F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$;

   $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ et $P_n = P(S_n = 0)$;

   U_n la variable aléatoire égale au nombre d'entiers $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $Z_k = 1$;

   V_n la variable aléatoire égale au nombre d'entiers $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $Z_k = j$;

   W_n la variable aléatoire égale au nombre d'entiers $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $Z_k = j^2$.

   (a) Justifier que $U_n + V_n + W_n = n$.

   (b) Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2W_n$.

   (c) Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.

   (d) Montrer que si $S_n = 0$, alors n est multiple de 3.

   (e) En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $P_n = 0$.

Partie C

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.

6. Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

7. En déduire $P(U_n = m)$.

8. Montrer que la probabilité conditionnelle $P_{U_n=m}(V_n = m)$ est égale à $2^{-2m}C_{2m}^m$.

9. En déduire que : $P_{3m} = 3^{-3m}C_{2m}^m C_{3m}^m$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie D

On suppose après calcul que : $\dfrac{P_{3m+3}}{P_{3m}} = \dfrac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$.

10. Pour tout entier $m \geq 1$, montrer que : $\dfrac{P_{3m+3}}{P_{3m}} \geq \dfrac{m}{m+1}$.

    En déduire que $P_{3m} \geq \dfrac{2}{9m}$.

11. Soit $k \in \{1, ..., n\}$ un entier naturel. On considère la variable aléatoire de Bernoulli :

$$Y_k = \begin{cases} 1 \text{ si } S_k = 0 \\ 0 \text{ si } S_k \neq 0 \end{cases}.$$

    Cette variable aléatoire indique si l'entier naturel k vérifie la relation $S_k = 0$ ou pas.

12. Pour chaque entier naturel $k \in \{1, ..., n\}$, calculer $E\left(Y_k\right)$.

13. Selon vous que représente la variable aléatoire $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$?

    Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X_n ?

14. Montrer que $E\left(X_n\right) = P_1 + \cdots + P_n$.

15. Donner le sens de variation de la suite de terme général $E\left(X_n\right)$.

16. Montrer que pour tout entier naturel $m \geq 1$ on a :

$$E\left(X_{6m}\right) - E\left(X_{3m}\right) \geq \frac{2}{9}\left(\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}\right).$$

17. En déduire que $E\left(X_{6m}\right) - E\left(X_{3m}\right) \geq \frac{1}{9}$.

18. Montrer que pour tout entier $m \geq 0$, on a : $E\left(X_{3 \times 2^m}\right) \geq \dfrac{m}{9}$.

    Que peut-on conclure quant à la limite suivante : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} E\left(X_n\right)$?

Partie E

Pour que l'un des S_k, $k \in \{1, ..., n\}$, soit nul, il faut et il suffit que l'un des Y_k soit égal à 1 ; en d'autres termes, il faut et il suffit que $X_n > 0$.

Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul, c'est-à-dire que $q_n = P\left(X_n > 0\right)$.

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite $\left(q_n\right)$ converge vers 1.

19. Montrer que $X_n \leq X_{n+1}$.

20. Montrer que la suite $\left(q_n\right)$ est croissante et majorée.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

21. En déduire que la suite (q_n) converge vers un réel q vérifiant $q_n \leq q \leq 1$ pour tout n.

22. En utilisant la formule mathématique $E(X_n) = \sum_{r=0}^{n} rP(X_n = r)$

    et en remarquant que $P(X_n = r) = P(X_n \geq r) - P(X_n \geq r+1)$,

    montrer que $E(X_n) = \sum_{r=1}^{n} P(X_n \geq r)$.

23. On admet que $P(X_n \geq r) \leq q^r$.

    Démontrer que $E(X_n) \leq q + q^2 + \cdots + q^n = q\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

24. En raisonnant par l'absurde, déduire de la question précédente que $q = 1$ et conclure.

Sujet de présélection de 2020 - Sénégal

Exercice n°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$.

Exercice n°2

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de θ.

2. En déduire, si a est un réel différent de $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}$$

Exercice n°3

Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on pose : $P_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, calculer P_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n$.

Exercice n°4

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = 2u_n + 2^n$, pour n entier naturel. On pose : $v_n = \dfrac{v_n}{2^n}$ pour n entier naturel.

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n et u_0.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k U_{k+1}} = \frac{n+1}{U_0 U_{n+1}}$.
2. Application : calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Exercice n°6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis calculer sa limite.

Exercice n°7

On pose $\begin{cases} u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \ \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
2. Calculer leur limite commune.

Exercice n°8

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $f(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°9

1. Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que :
$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$
2. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n, puis calculer :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

Exercice n°10

1. Montrer que $\text{cotan}(\theta) - 2\text{cotan}(2\theta) = \tan(\theta)$.
2. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ en fonction de n et θ. Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

Exercice n°11

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x - \text{E}(x)}$ est-elle continue en tout $m \in \mathbb{Z}$?

On rappelle que $\text{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice n°12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?
2. Sa dérivée f' est-elle continue en 0 ?

Exercice n°13

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour x réel. Montrer que la dérivée n-ième de f vérifie : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ où $P_n(x)$ est un polynôme vérifiant la relation : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$.

Exercice n°14

Étudier, puis représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^3+|x|}{x^2-|x|}$

Exercice n°15

Déterminer, suivant $n \in \mathbb{N}$, les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^n+ax+b}{x^2-1}$ puisse être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°16

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$ où $n \in \mathbb{N}/n \geqslant 2$.

1. Montrer que f atteint un minimum que l'on précisera.
2. En déduire les inégalités :
   (a) $(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \forall x \in \mathbb{R}_+$.
   (b) $(x+y)^n < 2^{n-1}(x^n+y^n), \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.

Exercice n°17

Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(1+x^n)$.

Exercice n°18

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes. Combien peut-on ainsi former de groupes constitués :

1. uniquement d'hommes ?
2. au moins d'une femme et au moins d'un homme.

Exercice n°19

Soient A, B, C trois ensembles finis.

1. Montrer que :
   $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.
2. Application : une classe de l'ENSAE comporte 34 élèves, parmi eux : 26 sont matheux, 20 sont sportifs et 7 sont musiciens. Aucun élève ne déteste à la fois les mathématiques, le sport et la musique. De plus, 4 sont matheux musiciens, 15 matheux sportifs et 3 sont musiciens sportifs. Y a t-il un élève satisfaisant les idéaux des Grecs, c'est-à-dire à la fois matheux, sportif et musicien ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°20

Le bibliothécaire de l'ENSAE, après avoir codifié 4 livres de mathématiques, 6 livres de statistique et 5 livres d'économie, souhaite ranger ces documents sur une étagère. De combien de façons peut-il effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières ?
2. si les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Sujet de présélection de 2020 - Cote d'Ivoire

Exercice n°1

Dans une usine, un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est reparti entre les deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

Les échanges entre les deux bassins sont modélisés de la façon suivante :

— Au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B en contient 1 400m^3.

— Chaque jour, 10% du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré dans le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

Ainsi, $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 1320$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Les deux bassins peuvent-ils avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau à un jour donné ?

Exercice n°2

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes.

L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.

Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :

— Si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd ;

— Si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne ;

— Si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos et si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne, sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. Montrez que la probabilité de l'évènement : "Le joueur gagne est de $\frac{5}{24}$.
2. Un joueur ne possède que 500 francs qu'il verse pour participer à une partie.

   S'il gagne, il reçoit f francs ; sinon, il ne reçoit rien.

   Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.

   (a) Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (b) Calculez en fonction de k, l'espérance mathématique de X.

   (c) Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable ? (c'est-à-dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 500 francs à la fin de la partie).

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}\ln x$.

1. Calculer la limite de f à droite en 0 et la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2020 - Burkina Faso

Exercice n°1

1. On appelle diviseur strict d'un entier naturel, tout diviseur autre que le nombre lui-même. Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220.
2. On appelle nombres amiables, deux entiers naturels tels que l'un d'entre eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.
3. On appelle nombre parfait, un nombre dont la somme de ses entiers naturels diviseurs stricts est égale à lui-même (amiable à lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ? Déterminer un entier p premier tel que le nombre 2^4 soit parfait.

Exercice n°2

Soient U et V deux suites définies par $U_0 = 1$ et $V_0 = 0$ et pour tout entier naturel non nul,

$$\begin{cases} U_{n+1} = V_n + U_n \\ V_{n+1} = V_n - U_n \end{cases}$$

On pose $Z_n = U_n + iV_n$.

1. (a) Montrer que la suite (Z_n) est géométrique et préciser sa raison.
   (b) Exprimer Z_n en fonction de n.
2. (a) Exprimer Z_n sous forme trigonométrique.
   (b) En déduire U_n et V_n en fonction de n.
3. On pose : $A_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$. Calculer A_n, B_n et C_n en fonction de n.
4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Z_n est réels.

Exercice n°3

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Pour k variant entre 1 et 4, on note P_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres P_1, P_2, P_3 et P_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $P_4 = 0,4$; montrer que $P_1 = 0,1$; $P_2 = 0,2$ et $P_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois (03) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1,2, 4 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $0 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. On lance n fois le dé, les lancers étant indépendants. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle converge.
   (b) Calculer $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant 0,999$.

   NB : On donne $(0,6)^{10} = 0,00604$; $\ln(0,001) = -6,90$ et $\ln(0,6) = -0,51$.

Sujet de présélection de 2019 - Cameroun

Exercice n°1

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

i. (a) la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
   ii. s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

iii. s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

Soit n un entier naturel non nul. On note :

G_n l'événement ‹‹ le joueur gagne la $n^{ième}$ partie ›› et

p_n la probabilité de l'événement G_n.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = p_n + \alpha$. Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique et
   en déduire l'expression explicite de p_n et la limite de (p_n).
6. Déterminer le nombre n de parties nécessaires pour que $\frac{3}{4}$ soit une valeur approchée de p_n à 10^{-7}.

Exercice n°2

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par

M et du demi-axe $[O, \vec{u})$.

1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$. Construire le point M'.
3. On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et,
   pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_n+|z_n|}{2}\right)$.
   (a) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
   (b) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

4. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel. Démontrer que $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$ et conclure quant au comportement de $(|z_n|)$ à l'infini.

Exercice n°3

1. Soit la suite (u_n) $(n > 0)$ définie par : $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

   Donner les valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3 à 10^{-2} près.

   (a) Montrer que pour tout réel t de $[0, 1]$, on a : $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$.

   On pourra étudier le signe de la fonction $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.

   (b) En déduire que pour tout n strictement positif, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

   (a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a :

$$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

   (a) Par considération d'aires, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$.

   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Problème

On considère la fonction $f(x) = \frac{\ln(|x+1|)}{x}$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

   puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. Étudier la continuité de f en 0. Que peut-on conclure ?

3. Étudier la continuité de f' et f'' en 0.

4. Soient α et β deux réels tels que $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\beta) = 0$.

   Donner un encadrement de α et β à 10^{-1} près.

5. Construire la courbe C_f de f.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B

6. Déduire des résultats précédents les variations de la fonction $g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}} = e^{f(x)}$ et le graphe correspondant.
7. Démontrer que les suites définies par : $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = g\left(-\frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes et
   déterminer leur limite commune.
8. En déduire la double inégalité : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
9. Cette double inégalité permet-elle une détermination rapide de e avec une précision convenable ?

Partie C

10. (a) Dans le repère où est construit C_f, construire le graphe de la droite $y = 1 - x$.
    (b) Pour $|x| \leq \frac{1}{2}$, comment peut-on en déduire que : $x \leq \ln(1+x) \leq x - x^3$?
11. On considère la suite (A_n) de terme général $A_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.
    Donner un encadrement de $\ln(A_n)$ et déduire la limite de la suite (A_n).
12. On considère la suite (B_n) de terme général $B_n = \left(1+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n^3}}\right)\cdots\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)$.
    (a) Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$.
    (b) Donner un encadrement de $\ln(B_n)$ et déduire la limite de la suite (B_n).

Sujet de présélection de 2018 - Cameroun

Exercice n°1

Dans une foire, une publicité annonce : ‹‹ un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ››.

Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets mis en vente, exactement

un billet sur deux est gagnant. Bodo est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A

Il est mis en vente chaque jour cents billets.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Bodo achète deux billets.

   Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.

   Le résultat sera donné sous forme d'une fraction rationnelle, puis à 10^{-2} près.

2. Bodo revient chaque jour, pendant trois jours acheter deux billets.

   Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?

   Le résultat sera donné à 10^{-2} près.

3. Un autre jour, Bodo achète six billets.

   Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.

   Le résultat sera donné à 10^{-2} près.

Partie B

Soit n un entier non nul. Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Bodo achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n qu'il achète au moins un billet gagnant est :

$$p_n = \frac{3n-1}{2(2n-1)}.$$

   (a) Étudier les variations de la suite (p_n).

   (b) Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°2

Dans le plan complexe muni du repère orhonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\operatorname{Re}(z'\overline{z}) = 0$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}(z'\overline{z}) = 0$.

   Applications

3. N est le point d'affixe : $z^2 - 1$.

   Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe : $\frac{1}{z^2} - 1$.

   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que O, N et P soient alignés.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) Montrer que : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z^2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

(b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice n°3

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.

On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les deux événements suivants :

A : ‹‹ on obtient des boules des deux couleurs ›› et

B : ‹‹ on obtient au plus une boule blanche ››.

1. (a) Calculer la probabilité de l'événement : ‹‹ toutes les boules tirées sont de même couleur ››.

   (b) Calculer la probabilité de l'événement : ‹‹ on obtient exactement une boule blanche ››.

   (c) En déduire que $p(A\cap B)=\dfrac{n}{2^n}$; $p(A)=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $p(B)=\dfrac{n+1}{2^n}$.

2. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ si et seulement si $2^{n-1}=n+1$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 par :

$$u_n=2^{n-1}-(n+1).$$

   (a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$ on a :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$$f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$$

(c) En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

(d) Étudier la position relative de (C) et (Δ).

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1. de la partie A,

   donner une interprétation géométrique de $F(x)$.
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1, 1 + a[$, on a : $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

   (b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme,

   établir que : $\frac{a}{1+1} \leq \ln(1 + a) \leq a$.
4. Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3. que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt.$$

   puis que : $\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{-2t}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.
5. On admet que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un réel noté l.

   Établir que : $\frac{1}{2}\ln(2) \leq l \leq \frac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(e^{-2t}\right) dt$. On pourra utiliser le sens de variation de la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(t) = \ln\left(1 + e^{-2t}\right)$.

   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n).
7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   (a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.

   (b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

Sujet de présélection de 2017 - Cameroun

Exercice n°1

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile. Au terme de cette étude, on a constaté que :

— Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule de ce parc,
la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de $0,67$.

— Lorsqu'on choisit dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage,
la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de $0,48$.

— Lorsqu'on choisit dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage,
la probabilité qu'il ne présente pas de défaut d'éclairage est de $0,75$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré et déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage. Traduire le résultat en termes de pourcentage.
2. Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage. Traduire le résultat en termes de pourcentage.

Exercice n°2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ unité graphique : 8 cm.

On désigne par A le point d'affixe -1 et par B le point d'affixe 1.

On appelle Γ l'ensemble des points du plan dsitincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à Γ, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble Δ des points appartenant à Γ tels que
le triangle MNP soit un rectangle en P.
   (a) En utilisant le théorème de Pythagore,
   démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$$|z+1|^2 + |z|^2 = 1.$$

(b) Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

(c) En déduire l'ensemble Δ.

(d) Soit M un point de Γ et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z ($\alpha \in]-\pi, \pi[$).

i. Démontrer que l'ensemble Φ des points M de Γ tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif
est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

ii. Représenter les ensembles Δ et Φ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

iii. Déterminer les affixes des points M de Γ tels que le triangle MNP soit rectangle en P,
l'affixe de P étant un réel strictement positif.

Exercice n°3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0, 1]$.
3. En déduire que si $x \in [0, 1]$ alors $f(x) \in [0, 1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \in [0, 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Problème

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

1. (a) Étudier les variations de f.

   (b) Montrer que la courbe représentative (C) de f a un cercle de symétrie.

   (c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

   (d) Construire (C) dans le plan (P).

   (e) Soit k un réel strictement positif. Calculer l'aire $A(k)$ de la partie A du plan délimité par :
   $A(k) = \left\{ M \in P : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, 0 \leq x \leq k, f(x) \leq y \leq 1 \right\}$.
   $A(k)$ a-t-elle une limite quand k tend vers $+\infty$? Si oui, calculer cette limite.

   (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble J que l'on précisera.

   (b) On note g la bijection réciproque de f, g est-elle dérivable sur J ? Justifier votre réponse.

   (c) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

   (d) En déduire que pour tout x où g est dérivable, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

2. Soit m un réel de l'intervalle J.

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = m$.

   (b) En déduire $g(x)$ pour tout entier élément de J.

   (c) Calculer $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x^2} dx$.

Partie B

Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on pose : $b_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$.

1. Calculer pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$ l'expression $\dfrac{1}{1 - x^2} - b_n(x)$.
2. Démontrer que pour x élément de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$: $0 \leq \dfrac{1}{1 - x^2} - b_n(x) \leq \dfrac{4}{3} x^{2n+2}$.
3. On pose : $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} b_n(x)\, dx$. Démontrer que la suite est convergente. Quelle est sa limite.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2017 - Sénégal

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points.

1. Trouver trois nombres a, b et c consécutifs d'une suite géométrique telle que :

$$a + b + c = 310 \text{ et } b^2 = 10c$$

2. Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et g une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$.

3. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + \sqrt{x-1} - 1}{x}$, $u(x) = \dfrac{(2x+1)^2(x+1)^2}{x^2+x-2}$, $g(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2$ et
$h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{-x-1}}$.

4. Démontrer que si $2x + 4y = 1$ alors, $x^2 + y^2 \geqslant \dfrac{1}{20}$.

5. On considère la suite (u_n) telle que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_0 + 2/3$.

$$\text{Calculer } s_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \text{ en fonction de } n.$$

6. Calculer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1} \cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x^2} - 2\sqrt[5]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

7. Soit $f(x) = x^2$.
   (a) Démontrer que quels que soient les réels a et b on a : $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}[f(a) + f(b)]$.
   (b) On pose $g(x) = f[f(x)]$. Déduire du a) que $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}[g(a) + g(b)]$.

8. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de solutions de l'équation :

$$w^3 - 3ax + 1 = 0$$

9. Soit $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$ et $T_n(x) = 1 + 3x + 6x^2 + ... + \dfrac{n(n-1)x^{n-1}}{2}$ pour $x \in]0, 1[$.

10. Calculer S_n en fonction de n et de x.

11. Trouver une relation entre $S_n'(x)$ dérivée de $S_n(x)$ et $T_n(x)$. En déduire une expression simple de $T_n(x)$ pour $x \in]0, 1[$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)$ pour $0 < x < 1$. On admettra qu'on peut permuter limite et dérivée.

MENSA Academy

12. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x - \mathrm{E}(x)}$; x réel.

    Étudier la fonction f (variations, courbe).

13. Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge vers 0.

14. Étudier le nombre de solutions de l'équation (E) : $x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 8$.

    Puis, encadrer chaque solution par deux entiers consécutifs.

15. Pour chaque entier $k > 0$, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$.

    (a) Étudier les variations des fonctions f_k.

    (b) Démontrer que toutes les courbes C_k des fonctions f_k passent par deux points fixes que vous déterminerez.

16. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$.

    (b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0$.

    Démontrer alors que les dérivées de f d'ordre impair sont nulles en 0.

17. Soit a, b et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + 1}$$

    Déterminer a, b et c pour que la fonction f admette à la fois un extremum en -2 et un extremum, égale à 2 en 0.

18. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie par $f_{a,b}(x) = a\sin(x) + b\sin^3(x)$, où a et b sont deux réels données.

    Calculer les dérivées $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. En déduire l'expression générale des primitives de la fonction $f_{a,b}$.

19. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - |x-a|}{x^2 + ax}$ où f est une fonction définie dans son domaine de définition, avec $a \in \mathbb{R}^*$ fixé.

    Existe-t-il une valeur de a telle que f soit dérivable au point a ?

20. Trouver les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ admet un extremum ; n étant un entier naturel non nul fixé.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{\dfrac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geqslant 0$.

22. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$, et C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère cartésien.

    (a) Montrer que les tangentes à C_λ au point d'abscisse O sont toutes parallèles à une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne.

    (b) Montrer que les tangentes à C_λ au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes en un point A dont on donnera les coordonnées.

Sujet de présélection de 2016 - Cameroun

Exercice n°1

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage,
   si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Calculer $P(X=0)$.

   (c) On se propose de déterminer maintenant $P(X=1)$.

      i. Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

      ii. En remarquant que la seule boule noire peut etre tirée soit au premier, soit au deuxième,
      soit au troisième tirage, calculer $P(X=1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On effectue

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. Soit k un entier compris entre 1 et n. Soient les Ã©vÃ©nements :

N : ‹‹ la $k-ième$ boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ››.

A : ‹‹ on obtient une boule blanche dans chacun des $(k-1)$ premiers tirages et une boule noire au $k-ième$ ››.

B : ‹‹ on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ››.

Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ (probabilité de B sachant A) et $P(N)$.

Exercice n°2

Un ménage consacre 80% de son revenu à la consommation.

Ce ménage, dont le revenu annuel augmente de 3% par an,

décide de diminuer la part de consommation dans son revenu annuel de 2,5% par an.

Au départ, le revenu annuel est $R_0 = 400\,000$ FCFA.

1. (a) Calculer la consommation C_0 au départ ($n = 0$).

   (b) Calculer le revenu R_1 et la consommation C_1 l'année suivante ($n = 1$).

   (c) Calculer le revenu R_2 et la consommation C_2 pour $n = 2$.

   (a) Montrer que, si C_n est la consommation de l'année n, alors $C_n = 0,8 \times 0,975^n \times R_n$ (où R_n est le revenu de l'année n).

   (b) En déduire la consommation C_n en fonction de n.

   (a) Étudier les variations de (C_n).

   (b) Déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Dans le cas où le revenu augmente de 3% et la part de consommation diminue de 3%, étudier les variations de la suite (C_n).

Exercice n°3

Pour tout entier n non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx$.

MENSA Academy

1. (a) Démontrer que pour tout élément x de l'intervalle $[1, e]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} \geq 0.$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_n \geq 0$.
   Justifier que la suite (I_n) est convergente.

   (a) Calculer I_1.
   (b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$I_{n+1} = e - (n+1) I_n.$$
   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4.
   Donner les résultats exacts, exprimés en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $(n+1) I_n \leq e$.
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).
   (c) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$. En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.

1. Étudier le sens des variations de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter le résultat.

   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) Déterminer, sur $]0,+\infty[$, la position de C_f par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$.

   Montrer en particulier que (Δ) coupe C_f en un point A que l'on déterminera.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe C_f où la tangente (T) à C_f est parallèle à (Δ).

   Préciser les coordonnées de B.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α.

   Justifier l'encadrement $0,34 < \alpha < 0,35$.

5. Tracer C_f, (Δ) et (T).

Partie C

On considère la suite numérique (x_n) définie pour tout entier naturel n par : $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$.

1. (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   (b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\int_{x_n}^{x_n+1}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)dx$.

   (a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

   (b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Sujet de présélection de 2015 - Cameroun

Exercice n°1

1. Trois personnes jouent ensemble.

   À la fin de chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Après trois parties où chacun en a perdu une, il reste à chacun 240 francs.

Quels étaient les avoirs initiaux de ces joeurs ?

2. Trois robinets R_1, R_2 et R_3 servent au remplissage d'un bassin. Utilisés simultanément, les robinets R_1 et R_2 remplissent ce bassin en 5 heures ;
les robinets R_2 et R_3 le remplissent en 3 heures 20 minutes ;
les robinets R_1 et R_3 le remplissent en 3 heures 45 minutes.

   (a) En combien de temps le bassin serait-il rempli si les trois robinets fonctionnaient simultanément ?

   (b) Calculer le débit de chacun des trois robinets si la contenance du bassin est 7200 litres.

Exercice n°2

1. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx$.

   En déduire $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1+\cos(x)}dx$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $E = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$.

   (a) Montrer que f est une bijection de E sur un ensemble que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable et calcule $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel x.

   (c) Calculer $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ et en déduire $B = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

Exercice n°3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \ln(n).$$

1. (a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

   (b) Montrer que, pour tout entier n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq v_n \leq 1.$$

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (v_n) converge. On note l sa limite (on ne cherchera pas à calculer l).

   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = xe^x - nx.$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Calculer les limites de g_n aux bornes de son domaine de définition.
2. Déterminer la dérivée de g_n. Dresser le tableau des variations de g_n.
3. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n, et que α_n est positif ou nul.
4. Montrer que $\alpha_n = \ln\left(\dfrac{n}{1+\alpha_n}\right)$, avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.

   (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(x) \leq x - 1$ (1).

   (b) Déduire de (1) le signe de $g_n\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)$.

   (c) Justifier que : $\dfrac{1}{2}\ln(n) \leq \alpha_n$.

   Quelles sont les limites des suites de termes généraux α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$.

B.

1. (a) Déterminer la dérivée de f_n. En déduire les variations de f_n.

   (b) Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

   (c) Montrer que : $f(\alpha_n) = \dfrac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2. Montrer que C_n admet une asymptote D_n que l'on déterminera.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Déterminer les points d'intersection de C_n et de l'axe des abscisses et préciser la position de C_n par rapport à cet axe.
4. Étudier les positions relatives de C_n et C_{n+1}.
5. (a) Montrer que $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$.

   Déterminer les valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut et par excès de α_2.

   En déduire un encadrement de $f_2\left(\alpha_2\right)$.

   (b) Tracer C_1 et C_2 sur un même graphique en mettant en évidence les résultats précédents

   (unité graphique : 10 cm). On précisera les tangentes en O à C_1 et C_2.

Sujet de présélection de 2014 - Cameroun

Exercice n°1

Les nombres réels x, y, z et t vérifient : (1) : $\begin{cases} 2x + y + z - 4t = -2 \\ x - y + z - t = 5 \\ 3 + y - 2z - 2t = -12 \end{cases}$.

1. Déterminer (x, y, z, t) pour que $x^2 + yz$ soit minimal.

   (On pourra d'abord résoudre (1) en considérant t comme paramètre.)
2. Donner la valeur de ce minimum.

Exercice n°2

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires.

On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage.

On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

Partie A

Dans cette partie, on ira au maximum à 4 tirages.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, X sera égale à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après 4 tirages.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0.

2. Calculer les probabilités pour que X soit égale à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

Partie B

Dans cette partie, on procèdera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.

De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première

boule blanche et ici encore X sera nulle si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1. Calculer les probabilités pour que X soit égale à k, k variant de 1 à n.

2. On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

   Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de X. Montrer que $E(X) = \frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right)$.

3. On sait que pour tout réel x différent de 1, on a : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

   (a) En dérivant les deux membres de l'égalité précédente,

   en déduire une autre expresion de : $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

   (b) En déduire que $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Problème

But du problème : étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + e^{-x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

   Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 4x - e^{-x}$.

   (a) Étudier les variations de g.

   (b) Montrer qu'il existe un unique réel $a \in [0, 1[$ tel que $g(a) = 0$.

   (c) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

   (d) Étudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2. Étude et représentation graphique de la fonction f.

   (a) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

   (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 0.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(c) Soit (P) la parabole d'équation $y = 2x^2$.

i. Étudier le signe de $f(x) - 2x^2$ sur $[0, +\infty[$.

ii. Calculer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f(x) - 2x^2$.

iii. Interpréter graphiquement ces résultats.

(d) Représenter dans un repère orthonormal à la parabole (P), la courbe représentative (C) de f

et la tangente à (C) au point d'abscisse 0 (unité graphique : 2 cm).

3. Calcul d'aire. On se propose de déterminer l'aire $A(t)$ de la partie du plan contenant des points $M(x, y)$

tels que : $0 \leq x \leq t$ et $2x^2 \leq y \leq 2x^2 + e^{-x}$, où t est un réel donné.

(a) Calculer $A(t)$ en cm^2.

(b) Quelle est la limite de $A(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

Sujet de présélection de 2014 - Sénégal

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1} - x, \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}, \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right).$$

2. Montrer que pour tout réel x et y non nuls :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geqslant 0$$

3. Soit P et Q deux polynômes.

(a) Montrer que si P et Q sont différents du polynôme nul, alors leur produit $P \times Q$ n'est pas le polynôme nul.

(b) En déduire que si le produit $P \times Q$ est le polynôme nul alors, P ou Q est le polynome nul. Cette propriété est-elle vérifiée par l'ensemble de fonctions numériques ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

4. Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sachant que leur produit est 385.

5. Déterminer suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonction f_α, définie par :
$$f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$$

6. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$.

7. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R} - 0, 1$ par :
$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ et } f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$
Calculer $f_{2014}(2014)$.

8. Simplifier l'expression $B = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

9. Soit φ et h les expressions définies par :
$$\varphi(x) = x - \mathrm{E}(x), \text{ et } h(x) = |2x-1|$$
et soit $f = h \circ \phi$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

   Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, paire et admet 1 pour période. Représenter graphiquement f en repère normé.

10. On considère la suite (U_n) telle que $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_0 = 2/3$.

    On pose $V_n = U_n\sqrt{2} - n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

    (a) Étudier la nature de la suite (V_n) de terme général V_n.

    (b) En déduire U_n en fonction de n et calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

11. Soit la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe de f pour $x \in [-2, 2]$.

12. Résoudre le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} |x^2-1| \leqslant 3 \\ 2 - x < x^2 \end{cases}$

13. Trouver le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie :
$$(1+x^2)f'(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

14. Montrer que pour n non nul, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

15. Montrer que pour n non nul, on a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. En déduire la partie entière du nombre réel $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

16. Déterminer le réel α pour que le polynôme $A(x)=x^4-x+\alpha$ soit divisible par le polynôme $B(x)=x^2-\alpha x+1$.

17. Trouver les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\sin^{2n}(x)-\cos^{2n}(x)$, admet un extremum ; n étant un entier naturel non nul fixé.

18. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n}-2^n$.

19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-2$ par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+x}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

    (a) Déterminer a,b,c pour que (C) ait les propriétés suivantes :

    — (C) passe par le point $A(0;5)$;

    — la tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;

    — la tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

    (b) Étudier les variations de la fonction f ainsi obtenue. Tracer (C).

20. Déterminer le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2-mx+3m+1=0$ ait deux solutions x' et x'', telles que $x'<2<x''$.

Sujet de présélection de 2013 - Cameroun

Exercice n°1

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}dx$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos(x)}dx$.

2. En déduire $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(x)}{1+\cos(x)}dx$. Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan(x)$..

    (a) Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

    (b) Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel x.

    (c) Calculer $A=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ et en déduire $B=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°2

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès,

on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour 1000.

De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5000 personnes le quitte.

En 2005, la population de ce pays était de 75 000 000 d'habitants.

On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note P_n la population en l'année $2005 + n$ exprimée en millions d'habitants.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2. La suite de terme général P_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
2. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
3. Démontrer que la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = P_n + 500\,000$ est géométrique.

   Déterminer sa raison et son premier terme.
4. Exprimer U_n et P_n en fonction de n.
   (a) Combien d'habitants peut-on prévoir pour 2010 ?
   (b) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublée par rapport à l'année 2005 ?

Exercice n°3

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = -|x| + \dfrac{\ln(|x|)}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
   (a) Calculer les limites de f aux bornes de D.
   (b) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet les droites (D) et (D') d'équations respectives

   $y = x$ et $y = -x$ comme asymptotes.
   (c) Étudier la position de (C) par rapport à ces asymptotes.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) (C) coupe la droite (D') d'équation $y = -x$ en deux points.

Soit M celui de ces deux points dont l'abscisse α est positive. Calculer α.

2. Définir la dérivée f' de f. Pour étudier le signe de f', on tracera pour $x > 0$ dans un repère orthonormé,

   les courbes C_h et C_g des fonctions $h : x \longmapsto 1 - x^2$ et $g : x \longmapsto \ln(x)$ respectivement. Pour $x < 0$, on montrera que la fonction $q : x \longmapsto x^2 + 1 - \ln(-x)$ admet un minimum pour une valeur x_0 et on calculera $q(x_0)$.

   Dresser le tableau de variations de f.

3. En prenant $\ln(2) = 0.7$, calculer les valeurs de f en -4, -2, -0.5, 2 et 4.
4. Tracer (C) et ses asymptotes. On prendra pour unité graphique sur les axes 2 cm.
5. Calculer l'aire de l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}.$$

Sujet de présélection de 2013 - Sénégal

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points.

1. Calculer la limite en zéro des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right] \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 1}\left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}\right).$$

   Où $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

3. Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Justifier votre réponse.

4. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ fixés. Calculer suivant les valeurs de a et b : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.
5. (a) Montrer que si, $p < 0$ alors la fonction $f : x \longmapsto x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Calculer le produit $M.m$ en fonction de p et q. En déduire que l'équation :

$x^3 + px + q = 0$ admet trois racines distinctes si, et seulement si $4p^3 + 27p^2 < 0$.

6. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + \sqrt{x + a}} = a$.

7. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R} - 0, 1$ par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ et } f_1\left(f_{n-1}(x)\right).$$

Calculer $f_{2013}(2013)$.

8. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

(a) Montrer que x est solution de (E) si, et seulement si

$$\text{(E')} : \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|u - 2| + |u - 3| = 1$.

Conclure pour l'équation (E).

9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = 0$.

10. Soit un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 0, 1, ..., n$. Montrer que 1 est racine de $B(x) = P(x) - S$ où S est la somme des coefficients du polynôme P.

Soit l'entier N s'écrivant sous la forme $N = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

11. Soit la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$; $x \in \mathbb{R}$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe de f pour $x \in [-2, 2]$.

12. On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} |x - k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x - 4|.$$

Construire les courbes de f et de g dans deux repères différents, en déduire leurs extrémums.

13. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$ est bijective. Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g et définir g'.

14. Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$.

(a) Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de l'équation :

MENSA Academy

$$\text{(E'')} : x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

(b) En posant $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Résoudre l'équation (E'') et en déduire les racines de $P(x)$.

15. On pose $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

(a) Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}, \text{ pour tout } n \text{ non nul.}$$

(b) En déduire une expression simple de U_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n$.

16. Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Où α est un paramètre strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de f.

17. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n, g_n et h_n définies sur $]0, 1[$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k,\ g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2x^k.$$

(a) Exprimer simplement $f_n(x)$ sans le signe $\sum$.

(b) Établir une relation entre $g_n(x)$ et $f'_n(x)$ pour $x \in]0, 1[$. En déduire les expressions simplifiées de $g_n(x)$ et $h_n(x)$ sans le signe $\sum$.

(c) Déterminer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} g_n(x)$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} h_n(x)$.

18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-4} \leqslant 0$.

19. Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f telle que $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

20. On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de raison $r \neq 0$ avec $a_n > 0, \forall n \geqslant 1$. Prouver que :

(a) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

(b) $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1}a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$.

Sujet de présélection de 2012 - Sénégal

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. Étudier la limite en zéro de fonctions définies par :
$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4-x^2},\ g(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1},\ k(x)=\frac{(1-x)^4-1+4x-x^3}{3x^2} \text{ et}$$
$$g(x)=\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation définie par :
$$\frac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(-3x^2-7x+10)}\geqslant 0.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{\dfrac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}}\geqslant 0.$
4. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :
$$f(x)=\frac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x},\ u(x)=\frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4},\ g(x)=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 \text{ et}$$
$$h(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
5. On considère la suite (u_n) telle que :
$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{n}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ et } u_0=2/3.$$
Calculer $s_n=\sum_{i=0}^{n}u_i$ en fonction de n.
6. Montrer que si une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ admet sur ce segment une fonction réciproque, f est monotone sur $[a,b]$.
7. Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=0.$$
Où α est un rationnel strictement positif puis la continuité de la fonction dérivée.
8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-2$ par : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$.
et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.
   (a) Déterminer a,b et c pour que (C) ait les propriétés suivantes :
   — (C) passe par le point $A(0;5)$
   — la tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
   — la tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.
   (b) Étudier les variations de la fonction f ainsi obtenue. Tracer (C).
9. On considère l'expression $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\left[x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$.
   (a) Vérifier que $P_n(x)-xP_{n-1}(x)+\dfrac{1}{4}P_{n-2}(x)=0$ $(n\in\{3,4\})$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) On pose $u = x + \sqrt{x^2-1}$, $v = x - \sqrt{x^2-1}$.

Calculer $\left(u^{n-1} + v^{n-1}\right)(u+v)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$ on a :

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0.$$

10. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies pour tout $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \text{ et } f_n(x) = f_1\left(f_{n-1}(x)\right).$$

Calculer $f_{2021}(2021)$.

11. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{m\sqrt{x^2+3}-2mx}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$

Déterminer m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

12. Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$.

(a) Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de :

$$(\text{E}) : \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.$$

(b) En posant $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Résoudre l'équation (E) et en déduire les racines de $P(x)$.

13. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

14. Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

15. Soit les nombres A et B définis par : $A = \dfrac{1,0000000002}{1,0000000004}$ et $B = \dfrac{0,9999999996}{0,9999999998}$.

En utilisant les fonctions $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$, déterminer le signe de $A - B$.

16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $1 + \dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$.

17. On considère P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et q tels que pour tout x, $P(x)Q(x) = 0$.

(a) Prouver que P admet au moins $n+1$ racines ou que Q admet au moins $q+1$ racines.

(b) Soit $f(x) = x+|x|$ et $g(x) = x-|x|$. $f(x)$ et $g(x)$ sont elles des fonctions polynômes ? Justifier votre réponse.

18. Soit $S_n = x + x(1-x^2) + x(1-x^2)^2 + ... + x(1-x^2)^n$. On pose $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n$.

Préciser l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ainsi définie puis simplifier l'expression de $f(x)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

19. Soit x et y deux réels non nuls. Prouver que : $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 \geqslant 0$.

20. Démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$:

    (a) $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

    (b) $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ est divisible par 11.

Sujet de présélection de 2011 - Cameroun

Problème n°1

Soit (E) un plan, $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé de (E), f l'application de E dans E qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe M' d'affixe $z' = z^2 + iz + 1$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.
2. Soit M un point de (E), de coordonnées x et y et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y', son image par f.

   Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
3. Soit Ω l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$.

   Déterminer une équation cartésienne de Ω.
4. Soit (C) l'image par f de la droite $\left(O,\vec{i}\right)$. Déterminer une équation cartésienne de (C).
5. Montrer que Ω et (C) sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

Problème n°2

1. Soit la fonction f définie sur $I = [1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

   (a) Démontrer que f est déroissante sur I.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

   Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.

   (c) Quel est le sens de variation de cette suite ?

   (d) Quelle est sa limite ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(e) Démontrer que cette suite est bornée.

2. On définit la suite (S_n) dont le terme général est la somme des n premiers termes de la suite (u_n),

   $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

   (a) Démontrer que cette suite est croissante.

   i. Écrire $u_1 + u_2 + u_3$ sans effectuer de calcul.

   ii. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   Calculer $S_{99} = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{99.100}$.

   (b) La suite (S_n) converge vers 1, vrai ou faux ? Justifier.

Problème n°3

1. Soit ABC un triangle de coté de longueur a.

   Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

   $\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

   (a) Prouver que le point B est un point de l'ensemble (Γ).

   (b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix de M.

   (c) Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -4)$ et $(C, 1)$.

   i. Prouver que $GM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

   ii. En déduire la nature de l'ensemble (Γ).

   iii. Tracer l'ensemble (Γ).

2. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

   Soient $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$.

   (a) i. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   ii. Trouver une équation cartésienne du plan (ABC).

   i. Écrire une équation de la sphère (S) de centre 1et de rayon 2.

   ii. Si $K(1, 0, 1)$ et $J(-2, 0, 0)$, trouver $(S) \cap (JK)$.

Sujet de présélection de 2011 - Sénégal

Le sujet comporte vingt questions dont la majorité ont déjà été traitées. Nous présenterons juste cinq questions.

1. Étudier la limite en zéro des fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{x}{1+\sin x}$, $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $k(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $l(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+2}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation définie par : $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{(x^4+5x^2-6)(x^5-4x)} \leqslant 0$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{\dfrac{-2x^2+3x-1}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geqslant 0$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m la courbe C définie par l'équation $y = f(x)$ admet-elle les asymptotes indiques ?
$$f(x) = \frac{mx\left|x^2-1\right|-2x\left|x\right|+1}{x^2\left|x-3\right|-x^3}\text{ ; quatre asymptotes d'équations :}$$
$$x = 0, x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.$$
5. On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de raison r et une suite géométrique $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de raison $q \neq 0$.

   Écrire en fonction de a_0, b_0, r et q l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{b_k}$

Sujet de présélection de 2010 - Cameroun

Exercice n°1

1. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -1, on a l'égalité :
$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{x+1}-\frac{(-x)^n}{x+1}.$$
2. En déduire l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx = \ln(2) - \left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right].$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1]$, on a :
$$-x^n \leq \frac{(-x)^n}{x+1} \leq x^n.$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

4. En déduire les inégalités : $-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1} dx \leq \frac{1}{n+1}$.
5. Quelle est la limite quand n tend vers l'infini de la suite de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} ?$$

Exercice n°2

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z^7 = \overline{z}$.
2. Placer les images des solutions dans un plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
3. Montrer que les solutions non nulles de (E) sont les racines $8^{ièmes}$ de l'unité.

Partie B

À tout réel α, $0 < \alpha < \pi$, on associe le point M d'affixe $Z_M = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ dans P.
Le plan P est muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orienté.

1. Déterminer l'ensemble $\left(E_1\right)$ des points M quand α varie dans $]0, \pi[$.
2. Soit N le point d'affixe $Z_N = 1 + Z_M$. Déterminer l'ensemble $\left(E_2\right)$ des points N quand α varie dans $]0, \pi[$.
3. Mettre sous forme trigonométrique $Z_P = i\frac{1 + Z_M}{1 - Z_M}$.

   Quel est l'ensemble des points P invariants d'affixe Z_P ?

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

   (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $]0, +\infty[$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Sachant que $e^{1.14} \approx 3.127$ et $e^{1.15} \approx 3.158$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. (a) Définir la dérivée f' de f en fonction de g.

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

   (c) Montrer que pour tout réel positif x, on a : $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

   (d) En déduire la limite de f en $+\infty$, interpréter le résultat.

   (e) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

   (f) En utilisant l'encadrement de α, trouvé à la question 2.(b) de la partie A,

   donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   (a) Établir que pour tout réel x appartenant à $[0, +\infty[$: $f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ où $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

   (b) Étudier le sens de variation de u sur $[0, +\infty[$. En déduire le signe de u.

   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

3. Tracer (C) et (T).

Partie C

1. Déterminer une primitive de f sur $[0, +\infty[$ en utilisant l'expression de f établie à la question 1.(c) (partie B).

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, on a : $f(n+1) \leq v_n \leq f(n)$.

   En déduire la monotonie de la suite (v_n) pour $n \geq 2$.

   (b) Déterminer la limite de la suite (v_n).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2010 - Sénégal

1. Étudier les limites suivantes :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}},\ \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x+\sin x}{x} \text{ et } \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right).$$
2. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :
$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } g(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R}-\{-1\}$$
3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes (on laissera les calculs apparents et on précisera l'ensemble sur lequel chaque fonction est dérivable).
$$f(x)=(3x+1)\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right),\ g(x)=2\cos 2x-3\sin 4x+5\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et}$$
$$h(t)=-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t.$$
4. Résoudre les équations :
$$x^3+x^2+x+1=0$$
$$3x^3+x^2+3x+1=0$$
$$x+x^3+x^5+x^7=0.$$
5. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\sqrt{\dfrac{-2x^2+3x-1}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geqslant 0$
6. Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant 1,-3 et -4 pour racines et telle que $P(2)=90$.
7. On définit une suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n-1 \end{cases}$

   La suite (U_n) est-elle géométrique ? arithmétique ?
8. Déterminer un nombre x tel que les trois nombres 25, x, 16 soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.
9. Calculer la valeur exacte de la somme : $S=1-2+4-8+16-32+...+4096$.
10. Calculer la valeur exacte de : $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^2}}+...+\frac{1}{2^{38}}$.
11. Résoudre l'équation : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0$.
12. Déterminer la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n=\dfrac{3\sin n+2\cos n+5n}{n}$.
13. Soit $A(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

    (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $A(n)=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Exprimer, en fonction de n, la somme suivante : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

14. Résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y < 0 \\ 3x + 6y < 1 \end{cases}$

Sujet de présélection de 2009 - Cameroun

Exercice n°1

Dans tout l'exercice, on considère 20 boules indispensables au toucher (10 boules noires et 10 boules blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisira 10 boules au hasard et les met dans l'urne A. On place dix autres dans l'urne B.

   (a) Quelle es la probabilité pour que les urnes ne contiennent que les boules de même couleur ?

   (b) Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires.

2. Soit X un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ noires dans l'urne A et $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B.

   On procède à l'expérience E : On tire au hasard une boule de A et on le met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

   On désigne par M l'évènement : « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'évènement E ».

   (a) Pour cette question (2-a), on prendra $x = 6$. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à $\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right)$.

   (c) Pour quelle valeur de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\bar{M}$?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) Pour quelle valeur de x la probabilité de l'évènement M est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette probabilité ?

On pourra, si on le souhaite, introduire la fonction f, de la variable réelle x, définie sur l'intervalle $[0, 10]$ par : $f(x) = \frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right)$

Exercice n°2

Soit n désignant un entier strictement positif fixé.

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\, dt$. Pour cela, on commence par étudier le signe de $\sin(nt)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

1. Soit un entier k, $k \geqslant 0$ et soit l'intervalle : $j_k = \left[k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}\right]$.
   (a) t désignant un élément de j_k, donner un encadrement du réel nt.
   (b) En déduire que $\sin(nt)$ garde un signe constant quand t décrit j_k.
   Préciser ce signe lorsque $k = 2l$ puis lorsque $k = 2l + 1$ avec $(l \in \mathbb{N})$.
   (c) Calculer l'intégrale $I_k = \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)|\, dt$.
2. Calculer $I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\, dt$.

Problème

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

La fonction d définie sur $]-1, +\infty[$ par : $d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$.

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.

Partie B : Étude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. L'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées premières et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote à la courbe (C). Préciser la position relative de (D) et de (C).
2. On donne :
   (a) Pour $x \in]-1, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Vérifier que : $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$, en déduire le sens de variation de f'.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' (on admettra que $\lim\limits_{-1} f' = \lim\limits_{+\infty} f' = 1$).
3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1, +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0. Dans la suite du problème, on notera α au centième près.
4. On demande :
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C : Prolongement de la fonction f en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour } x > -1 \end{cases}$$

1. On demande :
   (a) Montrer que l'on peut écrire : $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right)$.
   (b) Pour $x \in]-1, +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.
   (c) En déduire que g est dérivable en -1 et préciser sa dérivée $g'(-1)$.
2. Construire (D) et (C'). Préciser les tangentes à (C') aux points d'abscisses -1, α et 0.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2008 - Cameroun

Exercice n°1

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lance, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'un premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier naturel non nul, on considère les évènements suivants :

A_n : " Alice atteint la cible au n^ième^ lancer".

B_n : " Alice rate la cible au n^ième^ lancer.

On note $p_n = p(A_n)$.

Pour les questions 1 et 2, on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{2}{15}p_{n-1} + \dfrac{1}{5}$.

   On pose : $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme u_1 et la raison q.

   (b) Écrire u_1 puis p_n en fonction de n.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(p_n)$.

Exercice n°2

1. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$.
2. En déduire : $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x}dx$.
3. Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.

   (a) Montrer que f est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel x.

   (c) Calculer $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et en déduire $\mathcal{B} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Problème

Soit E un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note id_E l'application identité de E, $\mathrm{D}_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de E. Soit Q l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient : $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

Partie A

1. Montrer que pour tout élément f de Q est bijectif et déterminer f^{-1}.
2. Soit f un élément de Q.
   (a) Montrer que, pour tout réel λ, $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
   (b) En déduire que, pour tout élément $\vec{u}$ non nul de E, $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est une base de E.
   (c) Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Soit σ la symétrie vectorielle de base $\mathrm{D}_{(\vec{i}+f(\vec{i}))}$ et de direction $\mathrm{D}_{(\vec{i}-f(\vec{i}))}$.
   (a) Justifier l'existence de σ.
   (b) Écrire la matrice de σ dans la base $(\vec{i} - f(\vec{i})$.
   (c) Montrer que l'application $f\circ\sigma$ est une symétrie vectorielle dont on donnera les caractéristiques.
   (d) En déduire que f est la composée de deux symétries vectorielles.

Partie B

Soit f_0 un élément donné de Q et F l'ensemble des éléments de Q de la forme $\alpha\mathrm{id}_E + \beta f_0$; α et β étant deux réels.

1. (a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de dimension 2 de $(L(E), +, .)$ dont une base est (id_E, f_0).
   (b) Montrer que $(\mathrm{F}, +, 0)$ est un anneau.
2. Montrer que $h : C \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathrm{C}, +, *)$ sur $(\mathrm{F}, +, 0)$. $z = \alpha + i\beta \longrightarrow \alpha\mathrm{id}_E + \beta f_0$. Quelles propriétés peut-on en déduire concernant l'anneau $(\mathrm{F}, +, 0)$?
3. Calculer $h^{-1}(\mathrm{id}_E)$ et en déduire les couples des réels α et β tels que $(\alpha\mathrm{id}_E + \beta f_0)^4 = \mathrm{id}_E$. Déterminer $F \cap Q$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2008 - Sénégal

Avertissement : le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune étant notée sur un point.

1. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]$.
2. Déterminer suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonction f_α définie par : $f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$ où a est un réel donné strictement positif.
4. Simplifier l'expression $B = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} 2^{3n}3^{-2n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{3k}3^{-2k}$.
6. Déterminer explicitement $f\circ f$ pour la fonction f définie par : $f(x) = 3-x$ si $x \in [0,1[$ et $f(x) = 2-\sqrt{x-1}$ si $x\in[1,3]$.
7. Factoriser le polynôme x^4+x^2+1 en produit de deux trinômes du second degré.
8. Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles la fonction f_α telle que $f_\alpha(x) = \frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$, admet trois extrémums.
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{3x^2-11x+21} \geqslant 2x-3$.
10. Étudier le sens de variation de la suite de terme général $u_n = \frac{2^n}{n^2}$, $n \geqslant 3$.
11. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3ax + 1 = 0$.
12. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$.
13. Trouver le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$ vérifie : $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
14. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.
15. Montrer que pour n non nul, on a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. En déduire la partie entière du nombre réel $A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}$.
16. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

17. Déterminer le réel a pour que le polynôme $A(x) = x^4 - x + a$ soit divisible par le polynôme $B(x) = x^2 - ax + 1$.

18. Trouver les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$, admet un extrémum : n étant un entier naturel non nul fixé.

19. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

20. Déterminer le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ ait deux solutions x' et x'', telles que $x' < 2 < x''$.

Sujet de présélection de 2007 - Cameroun

Exercice n°1

1. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$.
2. En déduire : $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x}dx$.
3. Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.
   (a) Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel x.
   (c) Calculer $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et en déduire $\mathcal{B} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Exercice n°2

(C) désigne l'ensemble des nombres complexes et P un plan euclidien orienté, associé à C, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $2i\sqrt{3}$, $6 + 2i\sqrt{3}$ et $\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Déterminer les éléments de la similitude S définie par S(A) = B et S(B) = C.

2. n étant un entier naturel différent de 0, on considère f_n l'application de P dans P qui au point M d'affixe Z, associe le point M_n d'affixe Z_n tel que $Z_n = \lambda^n z + 2i\sqrt{3}(1-\lambda^n)$ avec $\lambda = \dfrac{i}{i-\sqrt{3}}$.
   (a) Montrer que $S = f_1$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) On pose $z \neq 2i\sqrt{3}$. Pour quelles valeurs de n, $\dfrac{z_n - 2i\sqrt{3}}{z - 2i\sqrt{3}}$ est-il réel ? Que peut-on dire dans ce cas de A, M et M_n ? Quelle est alors la nature de f_n ?

Problème

Le plan P est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Les unités sur les axes : 4cm.

Partie A

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} \quad pour\ x \neq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan P.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Étudier les variations de f.
4. On demande de :
   (a) Déterminer le point d'intersection A de (C) avec $(x'ox)$ et écrire une équation de la tangente (Δ) en A à (C).
   (b) Montrer que (C) admet un point d'inflexion. Placer ce point ainsi que la tangente en ce point à (C).
   (c) Placer aussi les points d'abscisses e^2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et e.
   (d) Tracer soigneusement la courbe (C) et la droite (Δ).

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-1}{1+\ln(x)} \quad \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

On considère (C') sa courbe représentative dans le plan P.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. (a) Montrer que, pour tout réel x positif et différent de e^{-1}, $f(x) - g(x)$ est une constante que l'on déterminera.

   (b) En déduire le tableau de variation de g.

   (c) Écrire une équation de la tangente (Δ') à (C') au point B d'abscisse $x_0 = 1$.

2. Soit M un point de (C) d'abscisse x et un point M' de (C') de même abscisse x.

   (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est constant.

   (b) Par quelle transformation géométrique peut-on passer de (C) à (C') ?

   (c) Tracer (C') ainsi que (Δ').

3. Déterminer l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équation $x = e$ et $x = 1$. En déduire une valeur approchée, en cm^2, à 0,01 près. On donne les valeurs approchées par défaut suivantes :

x	-3	-2	-1	1	x	2	3
e^x	0,04978	0,13533	0,36786	2,71828	$\ln(x)$	0,69314	1,09861

Sujet de présélection de 2006 - Cameroun

Exercice n°1

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux ; leurs faces sont numérotées de 1 à 6, le troisième dé est spécial ; trois de ses sont numérotés 6, les trois autres numérotés 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'évènement : « les deux dés tirés sont normaux » et B l'évènement « Les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. (a) Définir l'évènement contraire de A que l'on notera $\bar{A}$.

   (b) Calculer les probabilités de A et $\bar{A}$.

   (a) Calculer $P(B/A)$ probabilité de B sachant que A est réalisé puis $P(A \cap B)$.

   (b) Calculer $P(B)$

2. Calculer, la probabilité $P(A/B)$ de A sachant que B est réalisé.

MENSA Academy

Exercice n°2

Dans le plan complexe, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, -1 et $-i$. Soit M un point d'affixe Z.

1. Exprimer en fonction de Z le nombre réel $P = MA.MB.MC.MD$.
2. On suppose que $Z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Établir une relation de récurrence entre r et θ, nécessaire et suffisante pour que $P = 1$.
3. Chercher les affixes des points M de l'axe des réels, solutions de $P = 1$.
4. Donner sous la forme trigonométrique les affixes des points M du cercle trigonométrique tels que $P = 1$.

Problème

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonale (unité graphique : 2cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

1. On considère $n = 1$.
   (a) Calculer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?
   (b) Étudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à C_1 en son point d'abscisse 1.
2. On considère $n = 2$.
   (a) Calculer les limites de en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?
   (b) Calculer $f_2'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_2.
3. Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire les positions relatives de C_1 et C_2.
4. Tracer C_1 et C_2.

Partie B

Soit, n étant un entier naturel non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)dx$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. On pose $F(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$, calculer $F'(x)$ et en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$.
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine plan compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
4. En utilisant la question 2 de la partie B, montrer par récurrence que pour entier naturel n non nul, on a : $\dfrac{1}{n!}I_n = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$.
5. (a) En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1; \mathrm{e}]$, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

Sujet de présélection de 2005 - Cameroun

Exercice n°1

Pour tout entier naturel n, on définit les nombres x_n et y_n par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)dt$$

1. Calculer x_0 et x_1.
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont décroissantes et qu'elles convergent avec $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que, pour tout entier n, on a : $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$ et $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

   En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (nx_n) = \cos(1)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (ny_n) = \sin(1)$.

Exercice n°2

Dans l'ensemble M des matrices carrées d'ordre 2, on donne : $A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle régulière ? Quel est alors son inverse A^{-1}.
2. Résoudre dans M l'équation $AX + XA = 2I$, I désignant la matrice unité.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°3

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation suivante :

$$Z^4 - 8Z^3 + (23 - 2zi)Z^2 + (28 + 8i)Z + 12 - 6i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet deux solutions réelles que vous déterminerez.
2. Montrer qu'elle admet deux autres solutions qui vérifient l'équation $Z^2 - 4Z + 4 - 2i = 0$; déterminer ces deux solutions.
3. Dessiner dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les images des quatre sommets de (E), puis montrer que ce sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice n°4

On considère la fonction numérique g définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} g(t) = (1 - e^{-t})\ln(t) \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Pour tout $t \in]0, 1[$ où ln désigne le logarithme népérien.

1. Démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$.
2. Démontrer que g est continue sur $[0, 1]$; et étudier la dérivabilité de g sur $[0, 1]$ et démontrer que pour t de$[0, 1]$ on a : $g'(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}\left[t\ln(t) + e^t - 1\right]$.
3. Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par : $f(t) = t\ln(t) + e^t - 1$.
   (a) Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de f''.
   (b) Montrer que f' s'annule une seule fois sur $[0, 1]$ en un point t_0 (on ne calculera pas t_0).
   (c) En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de f sur $]0, 1]$.
   (d) En déduire que le signe f ne s'annule qu'une seule fois sur $]0, 1]$ en t_1 (on ne calculera pas t_1).
4. Terminer l'étude de la fonction g, tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 6cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 = 0,31$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Sujet de présélection de 2004 - Cameroun

Exercice n°1

Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1. Démontrer que (E) est équivalent au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice n°2

1. Soient les points $A(1;-1;0)$, $B(-1;0;1)$ et les homothéties $h_1\left(A, \frac{1}{2}\right)$; $h_2(B, 2)$ et $h_1(C, -4)$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_3$ et $h_2 \circ h_1$.
2. Soit h l'homothétie de centre $\Omega(0; 1; -1)$ et de rapport -4 la translation de vecteur $U(-2; 1; 1)$.
   (a) Donner la nature de $h \circ t$ et $t \circ h$.
   (b) Donner les expressions analytiques de $h \circ t$ et $t \circ h$.

Exercice n°3

On effectue une enquête auprès des lecteurs de 3 revues a, b et c sur 100 personnes interrogées :

— 55 lisent la revue a, 44 la revue b et 33 la revue c.
— 20 lisent les revues a et b, 15 les revues b et c, 17 les revues a et c.
— 10 lisent les revues a, b et c.

Déterminer le nombre de personnes :

— Qui ne lisent que a et b, que b et c, que a et c.
— Qui ne lisent que a, que b, que c.
— Qui ne lisent aucune des trois revues.

Exercice n°4

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer : $\int_1^x e^t(t-1)dt$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2. (a) Soit Z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on pose $f(x) = z(x)\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que la fonction f est solution de (E) : $y' + y = x - 1$ si et seulement si pour tout réel x, $z'(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1)$.
   (b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions Z vérifiant, pour tout réel x, $z'(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1)$.
3. (a) Déduire de la question précédente les solutions de (E).
   (b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^{1-x}$, (C) définie la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité = 1cm).

1. Étudier le sens des variations de f.
   (a) Montrer que la droite $(D) : y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C).
   (b) Préciser la proposition de (C) par rapport à (D).
2. Tracer avec soin (D) et (C).
3. Calculer en fonction de x_0 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$ $(x_0 > 0)$.

Sujet de présélection de 2003 - Cameroun

Exercice n°1

Définitions

— Une matrice est dite positive ou nulle si tous ses termes sont positifs ou nuls ;
— Une matrice carrée d'ordre n positive A est dite productive s'il existe une matrice colonne positive P de format $(n, 1)$ telle la matrice $P - AP$ soit strictement positive ;
— Sous forme explicite
— On désigne par I la matrice identité.

1. a et b étant deux paramètres réels positifs ou nuls, indiquer dans quel cas la matrice carrée d'ordre 2, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est positive.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2. Soit A une matrice positive. Montrer que A est productive si et seulement si $I - A$ est inversible et d'inverse positive.
3. Montrer que la transposée d'une matrice positive est une matrice positive.
4. On dit qu'une matrice est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Soit A une matrice d'ordre n. Démontrer que : $I - A^m = (I - A)(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{m-1})$.

Montrer qu'une matrice nilpotente positive est positive.

Exercice n°2

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^*$. Étant donné un élément φ de E, on se propose de chercher dans certains cas des éléments f de E qui vérifient la condition :

(C) : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. On suppose que φ est décroissante. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient f_1 et f_2 deux fonctions croissantes de (E) telles que $f_1(1) = f_2(2) = a$ et qui vérifient la condition (C).

1. Montrer que la fonction $g = f_1 - f_2$ est périodique de période 1 et que pour $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x+n) = g(x)$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(x) = \left[f_1(x+n) - f_1(x)\right] - \left[f_2(x+n) - f_2(x)\right]$.
4. Montrer que : $0 \leqslant f_1(x+n) - f_1(x) \leqslant \varphi(n)$ et $0 \leqslant f_2(x+n) - f_2(x) \leqslant \varphi(n)$.
5. En déduire que : $\varphi(n) \leqslant g(x) \leqslant \varphi(n)$ et $g(x) = 0$, pour $x \in \mathbb{R}^*$.
6. Montrer à partir des résultats obtenus précédemment qu'il existe au plus une fonction f appartenant à E, croissante et vérifiant la condition (C) et telle que $f(1) = a$.

   On suppose qu'il existe une fonction croissante f appartenant à E, qui vérifie la condition (E).
7. Montrer que φ est positive.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < k$.
8. Montrer que $f(k+n) - f(n) = \sum_{t=0}^{k-1} \varphi(t+n)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

9. Montrer que $x \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $x < k$, on a : $0 \leqslant \varphi(n) - \varphi(n+x) \leqslant \varphi(n) - \varphi(n+k)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   On suppose : $S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} U_n(x)$, $p \in \mathbb{N}^*$.

10. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $k < p$, on a : $S_p(x) \leqslant \sum_{n=1}^{p} [\varphi(n) - \varphi(n+k)]$.

11. En déduire que $S_p(x) \leqslant \sum_{n=1}^{p} \varphi(n) - \sum_{n=p+1}^{p+k} \varphi(n)$.

12. Montrer alors que la suite de terme général $(S_p(x))$ est convergente.

    On définit un élément f de E en posant pour chaque élément x,

    $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = a - \varphi(x) + \lim_{x \to +\infty} S_p(x)$. Montrer que f est une fonction croissante telle que $f(1) = a$ et qui vérifie (C).

Sujet de présélection de 2002 - Cameroun

Problème n°1

On considère l'ensemble F des fonctions f_a définie par : $f_a(x) = x - a(a \log x - x)$, où a est un réel strictement positif et log désigne le logarithme népérien. Soit (C_a) le graphique de la fonction $y = f_a(x)$ dans un repère orthonormé.

1. Construire la courbe (C_1) correspondant à $a = 1$.
2. Vérifier que toutes les courbes (C_a) passent par le point $A(1; -1)$ et que pour toute valeur de a, elles sont tangentes à la parabole p_a d'équation : $y = -1 + (2a-1)(x-1) - \frac{3}{2}a^2(x-1)^2$.
3. Étudier dans le voisinage de A la position de (C_a) par rapport à p_a suivant les valeurs de a. Indiquer les résultats sur des croquis distincts.

Problème n°2

Dans un repère orthonormé $(x'ox,\ y'oy)$, on considère les deux droites :

$$\begin{cases} (D) : \ 5x + 2y = 0 \\ (\Delta) : \ x + y = 0 \end{cases}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

A tout point M du plan, on associe la droite (m) qui passe par M et admet pour coefficient directeur $-\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$, P et Q étant des points d'intersection de (D) et (Δ) parallèles à $(y'oy)$ qui passent par M.

1. Quel est l'ensemble des points M pour lesquels la droite associée est perpendiculaire à OM ? Vérifier que le point A(5 ; 2) appartient à cet ensemble.
2. On effectue une rotation des axes autour de O qui amène la demi-droite OX à passer par A l'on désigne par $(X'OX, Y'OY)$ le nouveau repère ainsi obtenu. Calculer dans ce nouveau repère le coefficient directeur μ la droite (m) associée au point M(X, Y).
3. (a) Résoudre les équations : $2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log(2)$, $2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log(4)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log(r)$, $r \in \mathbb{N}^*$ ait une solution et qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $r = 1 + \frac{2}{k}$. Résoudre alors l'équation.
4. Soit l'équation à deux inconnues : (E) : $f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log(r)$ où $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que l'équation (E) a les mêmes solutions que l'équation : $(m - s)(n - s) = t(m, n) \in (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, s et t désignent deux rationnels que l'on calculera en fonction de r.
   (b) Résoudre les équations $f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log(2)$ et $f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log(4)$ où $(m, n) \in (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

   NB : Les questions 2, 3 et 4 peuvent être traitées de façon indépendante.

Sujet de présélection de 2001 - Cameroun

Exercice n°1

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Déterminer la primitive H de h sur $]0; +\infty[$ telle que $H(1) = 0$.
2. Étudier les variations et les limites de h et de H en 0 et en $+\infty$.
3. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère (unité= 2cm).
4. Utiliser la courbe représentant h puis discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation : $\ln(x) - mx = 0$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°2

On note (C_m) la courbe représentant $f_m : x \longmapsto \ln(x) - mx$.

1. Donner les variations de f_m suivant les valeurs de m et retrouver les résultats de 1 à 4, de l'exercice 1.
2. On note (Γ) l'ensemble des extremums des courbes (C_m). Donner l'équation de Γ.
3. Démontrer que chaque courbe (C_m), il existe un point M_m et un seul tel que la tangente en M_m à (C_m) passe par 0. Trouver l'ensemble β des points M_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
4. Construire sur un même graphique $\beta, \Gamma, (C_1), (C_{-1})$ et les tangentes (C_1) et (C_{-1}) passant par 0.

Problème

1. On se propose d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = -e^{4t} + t^2 + 2t + 2$.
   (a) Construire le tableau de variation de la fonction g' dérivée de g. En déduire que $g'(t)$ est nul pour deux valeurs α et β de t.
   (b) Montrer que : $-1 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$.
   (c) Vérifier que : $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta^2$.
   (d) Construire le tableau de variation de g et représenter graphiquement cette fonction.
   On prendra : $\alpha = 0,8$ et $\beta = 1,7$.
2. On associe à la fonction g, la fonction ψ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \int_x^{x+2} g(t)dt$.
   (a) Calculer $\psi(x)$.
   (b) Vérifier que : $\psi'(x) = g(x+2) - g(x)$.
3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. A tout élément f de E, on associe la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$.
   On définit une application U de E dans E qui, à tout élément f de E, associe la fonction $\varphi = U(t)$.
   (a) Montrer que U est une application linéaire de E dans E.
   (b) On pose : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ la fonction F dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(c) Soit h la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \cos(\pi t) + \dfrac{1}{2}\cos(2\pi t)$.

— Étudier et représenter graphiquement la fonction h.

— Montrer que : $\displaystyle\int_x^{x+2} h(t)dt = 0$.

— U est-elle injective ?

— Soit $f \in \ker U$. Montrer que f est périodique et de période 2.

Sujet de présélection de 2000 - Cameroun

Exercice n°1

1. Montrer que le point $p(at^2+2a, 2a)$ où $a>0$ se situe sur la parabole $y^2 = 4a(x-2a)$; trouver les équations de la tangente et de la perpendiculaire à cette parabole au point p.

   La perpendiculaire à cette parabole rencontre les axes de coordonnées Q et R.

   Montrer qu'une équation du lieu géométrique du point médian de [QR] est :

$$ay^2 = 2x^3 - 4ax^2$$

2. (a) Calculer les valeurs de λ pour lesquelles un vecteur non nul $\overrightarrow{X}$ peut-être trouvé de sorte que : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} = \lambda \overrightarrow{X}$ et trouver un vecteur d'unité module correspondant à chaque valeur de λ.

   (b) La matrice carrée A est dite orthogonale si sa permutation A' est égale à son inverse. Prouver que det(A)=$\pm$1.

3. La fonction de distribution de probabilité f d'une variable aléatoire continue x est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = bx(x^2 - ax) \ \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant a, \ a > 0 \\ f(x) = 0 \ \text{ si } x \in [0, a] \end{cases}$$

   (a) Déterminer la valeur de b par rapport à a.

   (b) Calculer la moyenne (ou espérance) de la distribution.

   (c) Montrer que sa variance est $\dfrac{a^2}{25}$.

   (d) Soit deux valeurs indépendantes x_1 et x_2, trouver la probabilité pour que :

   - les deux valeurs se situent entre $a/4$ et $a/3$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

- l'une plus petite que $a/4$ et l'autre plus grande que $a/2$.

Problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x+1)e^{-|x|}$.

1. Étudier cette fonction ; est-elle dérivable en 0 ? Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé ; préciser l'allure de la courbe C au voisinage du point d'abscisse 0.
2. Déterminer une primitive de la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ et Déterminer une primitive de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.
3. Définir la primitive de f qui s'annule en 0.
4. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine compris entre la courbe C l'axe des abscisses $x'x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$, λ étant un réel positif. L'aire $A(\lambda)$ admet-elle une limite finie lorsque λ tend vers ?

   Soit P un plan affine euclidien orienté de repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow P, t \longmapsto f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$; avec :
$$x(t) = \frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ et } y(t) = \frac{1}{2}t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$
5. Cette fonction est-elle définie sur $\mathbb{R}$? Préciser les limites si elles existent de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$ et quand $t \longrightarrow -\infty$.
6. Dans la suite du problème, on se restreint à $t \in \mathbb{R}$ et on considère le mouvement d'un point $M(t)$ définie par : $\overrightarrow{OM}(t) = F(t)$.
   (a) Représenter $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$.
   (b) Quelle est la vitesse du point $M(t)$ à l'instant 0 ? Préciser la tangente à la trajectoire en $M(0)$.
   (c) Quelle est la norme du vecteur vitesse ? Décrire le mouvement de M.
7. Démontrer que les intersections de la trajectoire avec les axes correspondant aux images $M(n)$ des nombres complexes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $z_n = x(n) + iy(n)$. Préciser le module et l'argument de $z(n)$.
8. On considère dans P, les images $M(n)$ des nombres complexes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z(n) = \frac{1}{2^n}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]$. Déduire de la relation précédente, $z(n)$ et $z(n+1)$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

qu'il existe une similitude S telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M(n+1) = S(M(n))$. Donner les éléments caractéristiques de S.

Sujet de présélection de 1999 - Cameroun

Exercice n°1

Soient 3 points non alignés A, B, C d'un plan euclidien P. On pose d(B, C) = a d(C, A) = b ; d (A, B) = c. On désigne par I le milieu [BC]. Quels que soient les points P et Q du plan, on notera PQ la distance de ces points.

1. Établir l'égalité : $b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}$.
2. A tout point M du plan P, on a associe le réel : $\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2$.
3. Soit G le barycentre des points B, C et A affectés respectivement des coefficients 1, 1 et -1. Donner une détermination simple de G et place ce point sur la figure.
4. Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de MG, a, b, c donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour qu'il existe un point M au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$.

Exercice n°2

Soit la famille d'équations : (E_θ) : $z^2 - (1 + i\sin(2\theta))z + \frac{i}{2}\sin(2\theta) = 0$ dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ à tout complexe $z = x + iy$, (x, y) étant un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans P.

1. Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes préciser les cas des racines doubles.
2. Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de P associées aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et Soit $I(\theta)$ le milieu du segment.
   (a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle C que l'on précisera.
   (c) Déterminer lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ soit distinct que la droite contenant ces deux points ait une direction indépendante de θ.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) θ étant donné, on fera la figure avec $\theta = \dfrac{\pi}{6}$; déduire de ce qui précède, une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$. Une figure soignée comportant tous les éléments intéressants de l'exercice.

Problème

Soit f l'application de l'intervalle $I =]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$;

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout t appartenant I tels que : $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

   Calculer $f(x)$.

(2) Étudier les variations de l'application f (en particulier la parité) et construire la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Montrer que f est une bijection de I sur $\mathbb{R}$ en désignant par u un réel strictement positif.

   Résoudre dans I l'équation $f(x) = \log(u)$. (On désigne par $\log(u)$ le logarithme népérien de u).

   Soit r un rationnel strictement supérieur à 1. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, p et q étant deux entiers naturels premiers entre eux. On désigne par l'ensemble des entiers strictement supérieurs à 1.

   (a) Démontrer que p et q ont pour plus grand diviseur commun soit 1 soit 2. Préciser en considérant les parités de p et q dans quelles conditions on obtient chacun de ces deux cas.

   (b) Montrer que l'équation $f\left(\dfrac{1}{m}\right) = \log(r)$, $m \in \mathbb{N}^*$ n'a pas de solution.

1ère Composition de Maths - Sélection 2023

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois, cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°1

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.
2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{x \sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.
3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.
4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.
5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction $f(x) = \tan(x/2)\cos(2x)$, expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.
6. Dériver la fonction définie à la question précédente.
7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B, on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal ou résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1,2,3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?
8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + ... + u_n^2}$ pour $n \geqslant 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?
9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geqslant 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).
10. Résoudre l'équation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

Exercice n°2

Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a, et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x).$$

1. Donner le domaine de définition de f_a, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a, $a \in \mathbb{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.
3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a.

4. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f_a à droite de 0.
5. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f'_a à droite de 0.
6. Écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a.
8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

Exercice n°3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$.
   (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1, -1/2, 0 et 1.
   (d) Tracer la courbe représentative de f.
2. On considère désormais la fonction de la variable réelle $g : x \longmapsto \dfrac{\tan x}{1 + 2\cos x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.
   (c) Étudier les branches infinies de g.
   (d) Calculer la dérivée de g, et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.
   (e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.
   (f) Dresser le tableau de variations de g.
   (g) Donner l'allure de la courbe représentative de g.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice n°4

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.
4. Conclure quant à la convergence de I_n.
5. Montrer que $\ln 2 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx$.
6. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx = 0$.

   et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice n°5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. (a) Montrer que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$ pour $n \geqslant 1$.

   (b) En déduire que $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{2n-2}}{n}}$ et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \tfrac{1}{2}$.

Exercice n°6

On considère l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe tel que $|a| \neq 1$.

MENSA Academy

1. Montrer que l'application f_a donnée par $f_a(z) = \dfrac{z+a}{1+|a|\,z}$ est bien définie pour tout élément z de $\mathbb{U}$.
2. Montrer que, si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z| = \dfrac{1}{z}$.
3. En déduire que si $z \in \mathbb{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbb{U}$.
4. Réciproquement, montrer que tout élément t de $\mathbb{U}$ est l'image par f_a d'un unique élément z de $\mathbb{U}$ que l'on déterminera.
5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et préciser sa bijection réciproque.
6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $a = 2$;
   (b) $a = 2i$;
   (c) $a = 1 + i$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2ème Composition de Maths - Sélection 2023

Exercice n°1

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to \varepsilon} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et la relation d récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice n°2

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-ax}}$, où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Étudier les variations et la convexité de f.
2. Montrer que f admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$.
4. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n°3

Soit $f\ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$.

Soit $F\ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$.

1. Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. La fonction dérivée F' est-elle continue ?
5. Étudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Exercice n°4

1. Dans une tombola de 100 billets, deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'obtenir au moins un billet gagnant ?
2. Dans une autre tombola composée également de 100 billets, sachant que le prix d'un billet est de 1 euro et qu'un billet gagnant rapporte 20 euros, combien faut-il de billets gagnants dans cette loterie pour que l'espérance de gain des joueurs soit la plus proche de zéro ?
3. Dans une troisième tombola contenant 1000 billets, il y a 3 billets gagnants qui rapportent chacun 50 euros et 20 autres billets gagnants qui rapportent chacun 20 euros. Les autres billets sont perdants.

   Sachant que le prix d'achat d'un billet est toujours d'un euro, calculer l'espérance de gain pour cette tombola.

Exercice n°5

Les trois questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} x + y + 1 = -4 \\ (x+2)(y-1) = -45 \end{cases}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(m-3)x^2 - 2mx + 12 \geqslant 0$, où m est un paramètre réel.

Exercice n°6

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

Bon cassage !

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

Chapitre 3

Quelques corrections des sujets de présélection du Cameroun

Correction du sujet de 2025

Exercice 1

1. — **Méthode 1** : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

   Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$. Alors, $Z \in i\mathbb{R}$ signifie que $Z = -\overline{Z}$.

   On a : $\overline{Z} = \overline{\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)} = -\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = -Z$.

   — **Méthode 2** : Il existe évidemment un $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que $z = e^{i\theta}$ puisque $|z| = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= -i \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

   D'où : $\dfrac{z+1}{z-1}$ a une partie réelle nulle.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22

www.mensa-academy.com

Mensa ACADEMY

MENSA Academy

2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

   Il est clair que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\theta k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta)$ (1). Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\theta k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{(i\theta)^k} \\
&= \left(1 + e^{i\theta}\right)^n \\
&= e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}} \qquad (2) \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

   En identifiant (1) à (2), on obtient : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$. On déduit aussi que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$.

3. Soit $w = 1 + i$.

   (a) Les racines carrées de w sous la forme $a + ib$.

   Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = w$.

   Alors, $a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$ et $|z|^2 = |w|$.

   Donc, $a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$ et $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (1) \\ a^2 + b = \sqrt{2} & (2) \\ 2ab = 1 & (3) \end{cases}$$

   (1)+(2) donne $2a^2 = 1+\sqrt{2}$. Par conséquent, $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

   D'un autre côté, (2) − (1) donne $2b^2 = \sqrt{2} - 1$; donc $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ OU $b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

   Comme (3) nous montre que a et b sont de même signe, alors : on retient que :

   $Z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou encore $Z = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Conclusion : les racines de w sont :

$$Z=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } Z=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

(b) Le module et l'argument de w.

$$\begin{aligned} w &= 1+i \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Mais puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On déduit que : $|w|=\sqrt{2}$ et $\arg(w)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(c) D'après l'écriture exponentielle de w, il vient que les racines carrées de w sont sous les forme : $\sqrt{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{2}\right)}}$ avec $k\in\{0,1\}$.

Pour $k=0$, $\sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}}$ est une racine carrée de w.

Puisque $\pi/8\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors la partie réelle et la partie imaginaire de cette racine sont positives.

Par conséquent, on peut écrire que : $Z_1=\sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}}$. Autrement dit :

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

C'est-à-dire : $e^{i\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Par identification, on trouve que : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

4. Calcul des limites de (u_n) et (v_n).

— Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

$u_n>0$ donc, $\ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

La fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$ alors d'après la formule des

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

rectangles,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\ &= [(1+x)\ln(1+x)-x]_0^1 \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 2\ln 2 - 1$. Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n} \\ &= \mathrm{e}^{2\ln 2-1} \\ &= \mathrm{e}^{\ln 4}\times \mathrm{e}^{-1} \\ &= \frac{4}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

La fonction $x \longmapsto x\sin(x)$ est continue sur $[0,1]$ alors, d'après la formule des rectangles, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \displaystyle\int_0^1 x\sin(\pi x)dx$. En procédant par parties, on pose : $u'(x) = \sin(\pi x)$ et $v(x) = x$; u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc, sur $[0,1]$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\pi x)dx &= \left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 + \int_0^1 \cos\pi x dx \\ &= \left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{\pi}$.

5. (a) Démontrons. Fixons $x \in I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. Ainsi, pour $x \in I$, on a vite $f'(x) = 2\cos(x)\times\sin(x)$; d'où $f'(x) \geqslant 0$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Les seules racines de f' sont 0 et $\pi/2$. Par conséquent, f' est positive et admet un nombre fini de racines. Ainsi, f est strictement croissante sur I.

Puisque f est continue et croissante sur I, elle réalise une bijection de I vers $f(I) = [0, 1]$.

Donc, f réalise une bijection réciproque notée f^{-1}.

(b) Par définition, f^{-1} est dérivable sur l'ensemble tel que la dérivée de f ne s'annule pas sur l'image réciproque de cet ensemble.

Or, f' ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, 1[$.

Alors, f^{-1} est dérivable sur $[]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. On a : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$. Or,

$$\begin{aligned} f'\left(f^{-1}(x)\right) &= 2\cos\left(f^{-1}(x)\right) \times \sin\left(f^{-1}(x)\right) \\ &= 2\sqrt{1 - f \circ f^{-1}(x)} \times \sqrt{f \circ f^{-1}(x)} \\ &= 2\sqrt{1 - x} \times \sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x(1 - x)} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$

6. (a) Démonstration de la formule de Leibniz.

Soit I un intervalle et $f, g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère la propriété au rang $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: si f et g sont n fois dérivables sur I et la dérivée n-ième de leur produit est $(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

— Initialisation : Pour $n = 1$, f et g sont une fois dérivable sur I et pour $x \in I$ on a : $(f.g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Donc, $\mathcal{P}(1)$ vraie.

— Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathbb{P}(n)$ soit vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également. On fixe f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables sur I et pour $x \in I$, on a immédiatement : $(f.g)^{(n+1)}(x) = \left((f.g)'(x)\right)^n$.

La fonction f' est n-fois dérivable sur I, et g aussi, donc par hypothèse de récurrence, $f'g$ est n-fois dérivable sur I. Ainsi, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}(f'g)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f')^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)\end{aligned}$$

De même, fg' est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned}(fg')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f)^{(n-k)}(x) g'^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $(fg)'$ est n-fois dérivable sur I donc, fg est $(n+1)$ fois dérivable sur I avec :

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)$$

Après simplifications (faire un changement de variable sur la deuxième somme : $m = k+1$ et puis, regrouper les sommes). On trouve que

$$(f.g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

(b) Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, et pour $x \in I$:

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x) \tag{3.1}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

Posons $f : x \longmapsto x^3$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$. Les fonctions f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz, on a :

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

Il clair de remarque que pour tout k supérieur ou égal à 4, $f^{(4)}(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a :

— $f(x) = x^3$

— $f^{(1)}(x) = 3x^2$

— $f^{(2)}(x) = 6x$

— $f^{(3)}(x) = 6$.

Et pour tout n entier naturel non nul, $g^{(n)} = 2^n \mathrm{e}^{2x}$ (une démonstration de ce résultat par récurrence s'impose). Ainsi,

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= 2^n x^3 \mathrm{e}^{2x} + 3 \times 2^{n-1} \times nx^2 \mathrm{e}^{2x} + 6 \times 2^{n-2} \times C_n^2 x \mathrm{e}^{2x} + 6 \times C_n^3 \times 2^{n-3} \times \mathrm{e}^{2x} \\ &= 2^{n-3}\left(8x^3 + 12nx^2 + 6n(n-1)x + 6C_n^3\right)\mathrm{e}^{2x}, \quad \forall n \geqslant 3 \end{aligned}$$

<u>Exercice 2</u>

Partie A

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \\ &= -\frac{(-x)^{2n} - 1}{-x-1} = \frac{x^{2n} - 1}{x+1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$

2. P_n' est du signe de $x^{2n} - 1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \to x^{2n} - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puisque $2n$ est pair) donc

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

x	0		1		$+\infty$
$x^{2n}-1$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

en $+\infty$ on a : $P_n(x) = -x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{-x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n}\left(-x^{2n-1}+\frac{x^{2-2n}}{2}+\ldots+\frac{-x^{-1}}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) \to +\infty$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$ la suite $\left(P_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. On utilise le théorème de bijection :

P_n est continue et strictement croissante sur $]1,2]$ donc bijective de $]1,2]$ dans $f(]1,2])$.

Or $f(1) < 0 \leq f(2)$ donc $0 \in]f(1), f(2)]$

Et l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1,2]$

Et comme P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, elle n'a pas d'autres solutions sur cet intervalle.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, admet une solution et une seule notée x_n sur $[1, +\infty[$, et $1 < x_n \leqslant 2$.

Partie B

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$. P_n est donc la primitive dont on a besoin pour l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &= \left[P_n(t)\right]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x)\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} = 0$ et par Chasles $\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = 0$ d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt \qquad ((1))$$

3. On étudie les variations de la différen,e : Soit $f(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2} - 1\right)$.

   et pour $n \geq 1$ on aura $2n - 2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$alors $t^{2n-2} \geq 1^{2n-2}$ d'où $f'(t) \geq 0$

   Donc pour $n \geq 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$.

   De plus $f(1) = 0$ donc pour tout $t \in [1, +\infty[$: $f(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}$$

comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croisssantes)

$$\begin{aligned}\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}\,dt = \int_1^{x_n} n(t-1)\,dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n\left(x_n-1\right)^2}{2}\end{aligned}$$

que l'on réintroduit dansl'équation du (1) pour obtenir :

$$\frac{n\left(x_n-1\right)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1 - t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2)$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

d'où finalement :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{n\left(x_n-1\right)^2}{2} \leq \ln(2) \quad \text{d'où} \\
0 &< \left(x_n-1\right)^2 \leqslant \frac{2\ln 2}{n} \quad \text{et} \\
0 &< x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \to 0$ et donc $x_n \to 1$ quand $n \to +\infty$

Exercice 3

D'après l'énoncé, on dispose de 3 boules vertes (V), 4 boules rouges (R) et de 5 boules bleues (B).

Avant de répondre aux questions, il est convenable de définir le protocole : un tirage simultané de deux (02) boules est une disposition non ordonnée et sans possibilité de répétition de 2 boules parmi $3+4+5 = 12$ boules. On rappelle la formule suivante pour un évènement A quelconque : $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ où Card(A) représente le nombre de cas favorables à l'évènement A et Card(Ω) le nombre de cas possibles. Pour déterminer Card(Ω), on a exactement C_{12}^2 cas possibles de tirer deux (02) boules.

1. (a) On a deux méthodes pour traiter cette question.

— **Méthode 1** : Soit E = avoir deux boules de couleurs différentes. Donc, L'évènement $\overline{E}$ = avoir deux boules de mêmes couleurs. Ainsi, $P(E) = 1 - P(\overline{E})$.

Avoir les boules de mêmes couleurs, c'est avoir 2 boules vertes (uniquement) soit C_3^2 manières, ou deux boules rouges soit C_4^2 façons ou enfin 2 boules bleues soit C_5^2 façons. Ainsi,

$$P(E) = 1 - \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{12}^2}$$

— **Méthode 2** : Tirer deux boules vertes (2V), c'est ne tirer que les boules vertes; ce qui implique de ne tirer aucune boule rouge et bleue et on a C_3^2 façons d'avoir deux boules vertes et C_9^0 (il n'est pas nécessaire d'écrire ceci).

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Ainsi, la probabilité demandée est égale à : $P(2V, 0R, 0B) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2}$.

— Tirer deux boules de couleurs différentes, c'est faire face aux cas suivants : (i) tirer une boule verte et une boule rouge et on a $C_3^1 \times C_4^1$ manières de le faire ; (ii) tirer une boule verte et une boule rouge et on a $C_3^1 \times C_5^1$ façons ; (iii) tirer une boule rouge et une boule bleue avec $C_4^1 \times C_5^1$ façons possibles de le faire. En tout, on a $C_3^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1$ façons de tirer deux boules de couleurs différentes. En notant $E =$ avoir deux boules de couleurs différentes, on conclut que :

$$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1}{C_{12}^2}$$

2. (a) Il est clair, après analyse que l'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ainsi,

— $P(X = -2) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66}$.

— $P(X = -1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{12}{66}$.

— $P(X = 0) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \times C_5 \times 1}{C_{12}^2} = \frac{23}{66}$.

— $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_{12}^2} = \frac{15}{66}$.

— $P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$.

On vérifie que la somme des probabilités donne l'unité.

(b) L'espérance mathématique est donnée par la formule : $E(X) = \sum_{i \in \{1,\ldots,5\}} x_i P(X = x_i)$. L'application numérique nous fournit : $E(X) = 11/66$ (ce résultat doit être commenté).

Pour déterminer la variance de X, on utilise la formule : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ où $E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 P(X = x_i)$.

Exercice 4

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

PARTIE I

1. (a) Pour tout $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.

   En 0 : $e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \to 1 = f(0)$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

   (b) Pour $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

   (c) On a le développement limité : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right]}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1\right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{\left(x + x\varepsilon_2(x)\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{\left(1 + \varepsilon_2(x)\right)^2} \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f'(x) \underset{x \to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}}$

   (d) Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \to -\dfrac{1}{2}$ alors f est C^1 en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

2. (a) $u(x) = (1-x)e^x - 1$

   u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Comme on, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

Et pour $x = 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ alors

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$

(c) En $-\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} \to +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{x}{e^x(1-1/e^x)} \to 0$ car $x = o(e^x)$ et

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

(d) En $-\infty$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x-1} \to -1$

et

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x-1} + x \\ &= \frac{xe^x}{e^x-1} \end{aligned}$$

avec $X = -x \to +\infty$ on a $xe^x = -X/e^X \to 0$ car $X = o\left(e^X\right)$ quand $X \to +\infty$

Donc $f(x) + x \to 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty}$

(e) On attende le tracé de

— l'asymptote en $-\infty$,

— l'asymptote horizontale $(y = 0)$ en $+\infty$

— et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$.

PARTIE II

3. 0 n'est pas point fixe puisque $f(0) \neq 0$

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x \iff \frac{x}{e^x-1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$

Conclusion : $\boxed{f \text{ admet un point fixe et un seul, } \alpha = \ln(2)}$

4. (a) Soit $g(x) = e^{2x} - 2x\, e^x - 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

soit $h(x) = e^x - 1 - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h'(x) = e^x - 1$$

On a donc

x	$0 \qquad +\infty$
$h'(x)$	$0 \quad \nearrow +$
$h(x)$	$0 \quad \nearrow + \quad +\infty$

et

x	$0 \qquad +\infty$
$g'(x)$	$0 \quad +$
$g(x)$	$0 \quad \nearrow +$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\,e^x - 1 \geq 0}$

(b) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}}$

(c) Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ et $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$

Et pour $x = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Enfin on a vu que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0.}$

(d) On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

On montre alors, par récurrence, que pour tout n : $u_n \in \mathbb{R}^+$ (la récurrence est ici inutile car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$)

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1$: $u_n = f\left(u_{n-1}\right) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout entier n : u_n et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\left|f\left(u_n\right) - f(\alpha)\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$ et

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|}$

5. On montre alors par récurrence :

Pour $n = 0$: $\left|u_0 - \alpha\right| = \frac{1}{2}|1 - \alpha| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ car $\alpha = \ln(2) \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ alors $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : \left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)}$

6. Et comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \to 0$ et comme $0 \leq \left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$, par encadrement $\left|u_n - \alpha\right| \to 0$ et

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln(2)}$

PARTIE III

7. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.

   On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1.

   et on a :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= 2f(2x) - f(x) \\
&= 2\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\
&= \frac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} \\
&= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} \\
G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

8. (a) Soit $x \geq 0$.On a alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x$: $0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Donc $0 \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt = f(x)(2x - x)$

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leq G(x) \leq x\,f(x).}$

   Et comme $x\,f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}} \to 0$, par encadrement :

   Conclusion : $\boxed{G(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$

   (b) Pour $x \leq 0$ on a $2x \leq x \leq 0$ et pour tout $2x \leq t \leq x$: $f(t) \geq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22
www.mensa-academy.com
Mensa ACADEMY

D'où $\int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt = f(x)(2x-x)$ car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-\infty; 0],\ G(x) \leq x\,f(x).}$

Et comme $x\,f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} \to -\infty$, par majoration,

Conclusion : $\boxed{G(x) \to -\infty \text{ quand } x \to -\infty}$

9. On rassemble tout :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$-$	$+\infty$
$e^{2x}-1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$		$\nearrow +$	
$3-e^x$		$\searrow +$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Correction du sujet de 2024

Exercice 1 :

1. Soit $x \in [0, +\infty[$, montrons que $|\sqrt{2+x} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-2|$.

Considérons la fonction $t \mapsto \sqrt{2+t}$, elle est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est : $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2+t}}$ qui est majorée par $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ car pour tout t dans $[0, +\infty[$, $2\sqrt{2+t} \geq 2\sqrt{2}$. Ainsi,

— Pour $x < 2$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis sur $[x, 2]$, $|\sqrt{2+2} - \sqrt{2+x}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|2-x|$, puis le résultat.

— Pour $x = 2$, on a le résultat.

— Pour $x > 2$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis sur $[2, x]$, $|\sqrt{2+x} - \sqrt{2+2}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-2|$, puis le résultat.

D'où $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, |\sqrt{2+x} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-2|.}$

2.a) Calculons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.\cos x\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$, alors on a : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$ et par suite,

$$I = [e^x.\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.\sin x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.\sin x\,dx$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Posons $\begin{cases} a(x) = e^x \\ b'(x) = \sin x \end{cases}$, alors on a : $\begin{cases} a'(x) = e^x \\ b(x) = -\cos x \end{cases}$ et par suite,

$I = e^{\frac{\pi}{2}} + [e^x.\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.\cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I$; il vient donc que : $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$

D'où $\boxed{I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}}$

b) Déterminons a, b dans $\mathbb{R}$ tels que : $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a}{1-\sin x} + \frac{b}{1+\sin x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a}{1-\sin x} + \frac{b}{1+\sin x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a+b+(a-b)\sin x}{1-\sin^2 x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a+b+(a-b)\sin x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Ainsi, par identification, on a : $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$, puis $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

D'où $\boxed{a = b = \frac{1}{2}}$

c) Déduisons-en la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$.

Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\cos^2 x} \\ &= \cos x \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\sin x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\sin x} \right), \quad \text{d'après ce qui précède} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \right)\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-\sin x) + \ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}{\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} \right] \\ &= \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})\end{aligned}$$

D'où $\boxed{J = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})}$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Calculons $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right); \qquad (\text{avec } f : x \mapsto \ln(1+x))
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= f(1)-f(0)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \ln(2)+\int_0^1 f(x)dx \\
&= \ln(2)+[(x+1)\ln(x+1)-x]_0^1 \\
&= \ln(2)+2\ln(2)-1 \\
&= 3\ln(2)-1
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 8e^{-1}}$

4.a) Soit $z=a+ib$ un nombre complexe. Déterminons le module et l'argument de e^{iz}.

On a :

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= e^{i(a+ib)} \\
&= e^{-b+ia} \\
&= e^{-b}.e^{ia}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\left|e^{iz}\right| = e^{-b} \text{ et } \arg(e^{iz}) = a+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$$\begin{aligned}
\cos z = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2} = 2\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z} = 4\\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 4\left(e^{\mathrm{i}z}\right) + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad e^{\mathrm{i}z} = 2-\sqrt{3} \text{ ou } e^{\mathrm{i}z} = 2+\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{-b} = 2-\sqrt{3}\\ a+2k\pi = 0, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e^{-b} = 2+\sqrt{3}\\ a+2k'\pi = 0, k'\in\mathbb{Z}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -\ln(2-\sqrt{3})\\ a = 2p\pi, p\in\mathbb{Z}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\ln(2+\sqrt{3})\\ a = 2p'\pi, p'\in\mathbb{Z}\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble S des solutions est : $\boxed{S = \left\{2p\pi - \mathrm{i}\ln(2-\sqrt{3}); 2p'\pi - \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}); p, p' \in \mathbb{Z}\right\}}$

5. Déterminons s'il est judicieux d'autoriser la commercialisation du test.

Choisissons dans cette population une personne au hasard et considérons les événements suivants :

M="La personne est malade"

P="La personne est testée positive à la maladie"

On a les données suivantes : $p(M) = \frac{1}{1000}$; $p(P|M) = 0.99$ et $p(P|\overline{M}) = 0,1$

D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned}
p(M|P) &= \frac{p(M)p(P|M)}{p(M)p(P|M)+p(\overline{M})p(P|\overline{M})}\\
&= \frac{\frac{1}{1000}\times 0,99}{\frac{1}{1000}\times 0,99 + (1-0.99)\times 0,1}\\
&= 0,4974
\end{aligned}$$

Ainsi, avec ce test, et en supposant que la personne est testée positive, il y a un peu moins de 50% de chance qu'il soit effectivement malade.

<u>Donc, il n'est judicieux d'autoriser la commercialisation du test.</u>

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice 2 :

Partie A :

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{ax+b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall x \in D_g$, $g^{(n)}(x) = (-a)^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$

Nous allons procéder par récurrence : Pour cela, soit x dans D_g et notons p_n la propriété définie par : $g^{(n)}(x) = (-a)^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$

— Pour $n = 1$, on a d'une part, $g^{(1)} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ et d'autre part, $g'(x) = \frac{-a}{(ax+b)^2}$. Donc p_1 est vraie.

— Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Supposons que $g^{(n)}(x) = (-a)^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= \frac{d}{dx}(g^{(n)}(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{(-a)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}\right) \\ &= \left(\frac{(-a)^n n!(-(n+1)a(ax+b)^n)}{((ax+b)^{n+1})^2}\right) \\ &= (-a)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(ax+b)^{n+2}} \end{aligned}$$

Donc p_{n+1} est vraie.

— Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, p_n est vraie.

D'où $\boxed{\forall x \in D_g, \forall n \in \mathbb{N}^\star, g^{(n)}(x) = (-a)^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}}$

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Soit un réel x ; cherchons α, β, u, v dans $\mathbb{C}$ tels que $f(x) = \frac{u}{x-\alpha} + \frac{v}{x-\beta}$.

On a :

$$f(x) = \frac{u}{x-\alpha} + \frac{v}{x-\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{(u+v)x - u\beta - v\alpha}{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta}$$

Par identification, on obtient :
$$\begin{cases} u + v = 0 & (1) \\ \alpha + \beta = 0 & (2) \\ \alpha\beta = 1 & (3) \\ u\beta + v\alpha = -1 & (4) \end{cases}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

La résolution de (2) et (3) donne $(\alpha,\beta)=(\mathrm{i},-\mathrm{i})$ ou $(\alpha,\beta)=(-\mathrm{i},\mathrm{i})$.

Pour $(\alpha,\beta)=(\mathrm{i},-\mathrm{i})$, on a de (1) et (4), $(u,v)=(-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{\mathrm{i}}{2})$
Pour $(\alpha,\beta)=(-\mathrm{i},\mathrm{i})$, on a de (1) et (4), $(u,v)=(\frac{\mathrm{i}}{2},-\frac{\mathrm{i}}{2})$.

Finalement, $\boxed{f(x)=\frac{-\frac{\mathrm{i}}{2}}{x-\mathrm{i}}+\frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{x+\mathrm{i}}}$

3. Déduisons-en l'expression de $f^n(x)$.

Soit $x\in D_f$; on a : $f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}.\frac{1}{x+\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}}{2}.\frac{1}{x-\mathrm{i}}$

Donc

$$\begin{aligned}
f^n(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2}.\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}}-\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left((-1)^n\frac{n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}\right)\\
&= (-1)^n n!\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)^{n+1}\right)\\
&= (-1)^n n!\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\left(\frac{x-\mathrm{i}}{x^2+1}\right)^{n+1}-\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}\right)^{n+1}\right)\\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}\frac{\mathrm{i}}{2}\left((x-\mathrm{i})^{n+1}-(x+\mathrm{i})^{n+1}\right)\\
&= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(2\mathrm{i}.Im((x-\mathrm{i})^{n+1})\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x^2+1)^{n+1}}\left(Im((x-\mathrm{i})^{n+1})\right)
\end{aligned}$$

4. Déterminons les solutions de l'équation $f^{(n)}(x)=0$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)=0 &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i})^{n+1}=(x-\mathrm{i})^{n+1}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{n+1}=1 \qquad \text{avec } x\neq \mathrm{i}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)=e^{i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)} \qquad \text{avec } x\neq \mathrm{i} \text{ et } k\in\{0,1,...,n\}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}}{-1+e^{i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}} \qquad \text{avec } k\in\{0,1,...,n\}
\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Ainsi l'ensemble S des solutions de $f^{(n)}(x)=0$ est $S=\left\{\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}}{-1+e^{i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}}, \text{ avec } k\in\{0,1,...,n\}\right\}$

Partie B :

Pour tout $n\geq 2$, soit f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x^2+x-1$.

5. Montrons que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $[0,+\infty[$.

Soit $n\geq 2$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme fonction polynomiale et pour tout x dans $[0,+\infty[$, on a : $f_n'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+...+2x+1$ qui est strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $0\in\left[f_n(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f_(x)\right[=[0,+\infty[$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x)=0$ admet une solution unique dans $[0,+\infty[$

Cette solution est notée a_n

6.a) Soit $n\geq 0$; montrons que $f_{n+1}(a_n)\geq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= a_n^{n+1}+a_n^n+a_n^{n-1}+...+a_n^2+a_n-1\\ &= a_n^{n+1}+f_n(a_n)\\ &= a_n^{n+1}, \text{ car } a_n \text{ solution de } f_n(x)=0\\ &\geq 0, \text{ car } a_n\in[0,+\infty[\end{aligned}$$

b) Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit n dans $\mathbb{N}$. On a d'après ce qui précède, $f_{n+1}(a_n)\geq 0$, donc on peut écrire $f_{n+1}(a_n)\geq f_{n+1}(a_{n+1})$ et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante, on déduit que $a_n\geq a_{n+1}$.

D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduisons-en que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et d'après la question 6.b), elle est décroissante. Donc elle converge.

7. Soit $n\geq 2$. Montrons que $a_n=\dfrac{1+(a_n)^{n+1}}{2}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On a $f_{(}a_n) = 0$. Or

$$\begin{aligned} f_n(a_n) = 0 &\Leftrightarrow a_n^n + a_n^{n-1} + \ldots + a_n^2 + a_n - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_n^n + a_n^{n-1} + \ldots + a_n^2 + a_n + 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_n^k = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-(a_n)^{n+1}}{1-a_n} = 2 \\ &\Leftrightarrow a_n = \frac{1+(a_n)^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{a_n = \frac{1+(a_n)^{n+1}}{2}}$

8. On pose $b_n = (a_n)^{n+1}$

— Calculons la limite de (b_n)

Pour tout $n \geq 2$, nous avons $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 > 0$. Donc on est sûr que $a_n \in]0, 1[$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{n+1} = 0$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$

— Déduisons-en la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$

Pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1+(a_n)^{n+1}}{2}$ et comme $(a_n)^{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}}$

Exercice 3 :

Partie A :

Dans cette livraison, 20% des 50 câbles sont de type C_1, soit 10 et le reste de type C_2, soit 40. Un lot de 04 câbles choisis est une disposition non ordonnée sans répétition de 04 éléments d'un ensemble qui en contient 50 ; il y a donc C_{50}^4 façons de faire un tel choix. Calculons la probabilité des événements suivants :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1. E="Les 4 câbles sont de type de C_1".

$$\begin{aligned} p(E) &= \frac{C_{10}^4}{C_{50}^4} \\ &= \frac{3}{3290} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(E) = \frac{3}{3290}}$

2. F="Un câble est de type C_1 et trois sont de type C_2"

$$\begin{aligned} p(F) &= \frac{C_{10}^1 \times C_{40}^3}{C_{50}^4} \\ &= \frac{988}{2303} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(F) = \frac{988}{2303}}$

3. G="Au moins un câble est du type C_1"

On a : $\overline{G}$="Aucun câble n'est de type C_1"="Les 04 câbles sont de type C_2"

$$\begin{aligned} p(G) &= 1 - p(\overline{G}) \\ &= 1 - \frac{C_{40}^4}{C_{50}^4} \\ &= \frac{13891}{23030} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(G) = \frac{13891}{23030}}$

<u>Partie B :</u>

1. On suppose $n = 4$.

Un câble est soit de type C_1, soit de type C_2. Du coup, le choix d'un câble est une expérience de Bernoulli où nous noterons comme "succès" l'obtention d'un câble de type C_1, et ce avec une probabilité de $0,2$. Ainsi, le nombre X de succès dans un lot de 04 choisies indépendamment les uns des autres suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

a) Calculons $p(X = 2)$.

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= C_4^2 (0,2)^2 (0,4)^4 \\ &= 0,1536 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(X = 2) = 0,1536}$

b) Calculons $p(X \geq 1)$.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X < 1) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - C_4^0 (0,2)^0 (0,8)^4 \\ &= 0,5904 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(X \geq 1) = 0,0.5904}$

c) Calculons $E(X)$.

Comme $X \looparrowright \mathcal{B}(4; 0,2)$, alors $E(X) = 4 \times 0,2 = 0,8$ D'où $\boxed{E(X) = 0,8}$

2. Ici, n est inconnu.

a) Exprimons $p(X \geq 1)$ en fonction de n.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X < 1) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - C_n^0 (0,2)^0 (0,8)^n \\ &= 1 - (0,8)^n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(X \geq 1) = 1 - (0,8)^n}$.

c) Déterminons n pour espérer que $p(X \geq 1) = 0.9$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On a :

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) = 0,9 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n = 0,9 \\ &\Leftrightarrow (0,8)^n = 0,1 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \\ &\Leftrightarrow n \approx 10,32 \end{aligned}$$

Ainsi, il faut réaliser l'expérience au moins 11 fois pour espérer avoir 90% de chance d'obtenir au moins un câble de type C_1.

Exercice 4 :

f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$

Partie A : **Étude de la fonction f**

1. Dressons le tableau de variation de f.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Pour $x \in]0,1]$, $f'(x) \leq 0$ et pour $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc f est décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^>} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^>} (x - \ln(x)) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = +\infty.$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions a et b.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

La fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Elle est continue sur chacun de ces intervalles. Et de plus, $2 \in f(]0,1[)$ et $2 \in f(]1,+\infty[)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet sur chacun de ces intervalles, exactement une solution.

Donc finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions a dans $]0,1[$ et b dans $]1,+\infty[$.

3. Montrons que $b \in [2,4]$.

D'une part, $f(2) = 2-\ln(2) = 2-0,7 = 1.3$ et d'autre part, $f(4) = 4-\ln(4) = 2(2-\ln(2)) = 2,6$. On a alors $2 \in [f(2), f(4)]$ et par conséquent, $\underline{b \in [2,4]}$.

Partie B : **Étude d'une suite**

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.

— Montrons que la suite $(u_n)_n$ est bien définie

Pour cela, on peut juste montrer que ε$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ε.

On a $u_0 = 4 > 2$ et de plus, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2+\ln(u_n) > 2+\ln(2) > 2$.

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ et par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est bien définie.

— Montrons que ε$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b,+\infty[$ε.

Nous avons $u_0 = 4 \geq b$ (d'après la question 3.). Soit n dans $\mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + \ln(u_n) \\ &\geq 2 + \ln(b), \text{ par hypothèse de récurrence et par croissance de } \ln \\ &= b \text{ car } f(b) = b - \ln(b) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b,+\infty[}$.

5.

— Déterminons la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Soit n dans $\mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = 2 + \ln(u_n) - u_n = 2 - f(u_n)$. Or $u_n \geq b$ d'après la question précédente ; donc par croissance de f dans $[b, +\infty[$, on obtient $f(u_n) \geq 2$ et ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, c'est-à-dire que $(u_n)_n$ est décroissante.

— Déduisons-en que $(u_n)_n$ convergente et calculons sa limite.
On a montré que $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par b) ; donc elle converge. Ainsi, il existe un réel l dans $[b, +\infty[$ tel que $u_n \to l$. De la relation $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$, on déduit alors que $l = 2 + \ln(l)$ ou mieux encore, $f(l) = l$ et on sait d'après la partie A que cette équation en l a une solution unique b dans $[b, +\infty[$. D'où $\boxed{u_n \to b}$.

6.a) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrons que $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

La fonction $x \mapsto 2 + \ln(x)$ est bien définie et dérivable sur $[b, u_n]$ et sa fonction dérivé est : $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est majorée sur $[b, u_n]$ par $\frac{1}{2}$. On peut donc déduire d'après l'inégalité des accroissements finis que : $2 + \ln(u_n) - 2 - \ln(b) \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$; et ainsi $\boxed{u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)}$.

b) Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

D'une part, on sait d'après la question 4. que pour tout n, $u_n \geq b$; donc pour tout n, $0 \leq u_n - b$.
D'autre part, notons p_n la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par ε$u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ε

— On d'un côté $u_0 - b = 4 - b$ et de l'autre, $\frac{1}{2^{0-1}} = 2$. On a bien $4 \leq b + 2$. Donc p_0 est vraie.

— Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons p_n vraie et montrons que p_{n+1} l'est aussi.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \text{ d'après la question précédente} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $p_n \Rightarrow p_{n+1}$

— Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Partie C : **Étude d'une fonction définie par une intégrale**

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{2x} \frac{dt}{f(t)}$.

8.

— Montrons que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$

Soit x dans $]0, +\infty[$. D'après le tableau de variation de f, f ne s'annule pas ; donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est bien définie et continue sur $[x, 2x]$ et donc Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

— Soit x dans $]0, +\infty[$. Montrons que $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$.

Notons Ψ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$; alors $\Phi(x) = [\Psi(t)]_x^{2x} = \Psi(2x) - \Psi(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \Psi'(2x) - \Psi'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\
&= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}
\end{aligned}$$

9. Déduisons-en les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

Soit x dans $]0, +\infty[$, $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{f(x)f(2x)}$. La fonction f étant positive, le signe de $\Phi'(x)$ est celui de $\ln(2) - \ln(x)$. Or $\ln(2) - \ln(x) \geq 0$ sur $]0, 2]$ et $\ln(2) - \ln(x) \leq 0$ sur $]2, +\infty[$. Donc Φ est croissante sur $]0, 2]$ et décroissante sur $]2, +\infty[$.

10. Soit x dans $]0, +\infty[$. Montrons $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

D'une part, pour tout t dans $[x, 2x]$, $\frac{1}{f(t)} \geq 0$, donc $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{2x} \frac{dt}{f(t)} \geq 0$. D'autre part, on sait d'après la partie A que f est minorée par 1 ; donc pour tout t dans $[x, 2x]$, $\frac{1}{f(t)} \leq 1$ et par suite, $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{2x} \frac{dt}{f(t)} \leq \int\limits_{x}^{2x} dt = x$. D'où $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x}$

a) Montrons que Φ est prolongeable par continuité en 0.

D'après ce qui précède, $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$; mais $0 \notin D_\Phi$ (Domaine de définition de Φ) ; on conclut donc que Φ est prolongeable par continuité en 0 et $\Phi(0) = 0$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \Phi'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2} \times \frac{2 - x}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}\right] \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{+\infty} \qquad \left(\text{car } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2} \text{ est le nombre dérivé de ln en 2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

11. Traçons l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente en 0.

L'équation de la tangente (T) à la courbe de Φ en 0 est :

$$
\begin{aligned}
(T)\ :\ y &= \Phi'(0)(x - 0) + \Phi(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Le tableau de variation de Φ est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Φ	0	$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	$\ln(2)$

Correction du sujet de 2023

Exercice 1 :

Considérons les événements suivants :

C="L'apprenant pratique un instrument à cordes"

V="L'apprenant pratique un instrument à vent"

On donne $p(C) = 60\%$, $p(V) = 45\%$ et $p(V \cap C) = 10\%$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

1.a) Calculons la probabilité de l'événement : "Cet apprenant au moins un des deux instruments considérés"

Il s'agit de l'événement $V \cup C$. On a :

$$\begin{aligned} p(V \cup C) &= p(V) + p(C) - p(V \cap C) \\ &= 60\% + 45\% - 10\% \\ &= 95\% \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(V \cup C) = 95\%}$

b) Calculons la probabilité de l'événement : "L'apprenant pratique un et un seul des deux instruments".

Il 'agit de l'événement $(V \cup C) \setminus (V \cap C)$. On a :

$$\begin{aligned} p((V \cup C) \setminus (V \cap C)) &= p(V \cup C) - p(V \cap C) \\ &= 95\% - 10\% \\ &= 85\% \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p((V \cup C) \setminus (V \cap C)) = 85\%}$

2. Calculons la probabilité que l'apprenant pratique un instrument V sachant qu'il pratique un instrument C.

Il s'agit de l'événement V/C. On a d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} p(V/C) &= \frac{p(V \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{10\%}{60\%} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{p(V/C) = \frac{1}{6}}$

3. Soit $n \geq 2$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

a) Notons B="Au moins un apprenant pratique un instrument C". On veux calculer $P_n = p(B)$.

Un apprenant choisi au hasard pratique soit un instrument de type C (avec un probabilité de $\frac{3}{5}$) soit ne le pratique pas ; il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli. En choisissant n apprenant, on répète cette épreuve n fois et le nombre d'apprenant pratiquant l'instrument C est une variable aléatoire qui suit une binomiale de paramètre $(n, \frac{3}{5})$. Notons là X. On a alors :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(X \geq 1) \\ &= 1 - p(X < 1) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - C_n^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-0} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{P_n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

b) Déterminons le plus petit n nécessaire pour avoir $P_n \geq 0.999$.

$$\begin{aligned} P_n \geq 0.999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0.999 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0.001 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq \ln(0.001) \\ &\Leftrightarrow n \geq 7.53 \end{aligned}$$

n étant un entier, le plus petit entier vérifiant cette inéquation est 8.

Exercice 2 :

1. Calculons :

— $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) dx \\ &= [x-\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I = \frac{\pi}{2} - 1}$

— Calculons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

Remarquons que pour tout x, on a : $1+\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$. On a alors :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2(\frac{x}{2})} \\ &= \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{J = 1}$

2. Déduisons-en $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} dx$.

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= J - I \\ &= 1 - \frac{\pi}{2} + 1 \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{K = 2 - \frac{\pi}{2}}$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Soit f est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$.

a) Montrons que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est bien définie, continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sa fonction dérivée f' est : $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ qui est une fonction strictement positive, ce qui veut dire que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

On peut ainsi conclure que f admet une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur]-∞, +∞[= $\mathbb{R}$.

b)

— Montrons que f^{-1} est dérivable.

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle ; donc d'après le théorème des fonction réciproques, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Soit x dans $\mathbb{R}$; calculons $(f^{-1})'(x)$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{1 + f^2(f^{-1}(x))} \text{ car } f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f^2(x) \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

c)

— Calculons $A = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \\
&= \int_0^1 (f^{-1})'(x) dx \\
&= \left[f^{-1}(x)\right]_0^1 \\
&= f^{-1}(1) - f^{-1}(0) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{A = \frac{\pi}{4}}$

— Déduisons-en $B = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Remarquons que pour tout x, $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$; donc :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int_0^1 dx - A \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{B = 1 - \frac{\pi}{4}}$

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

a) Démontrons que f est croissante sur I.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x+1$ sont dérivables et ne s'annulent pas sur I, donc f est bien définie et dérivable sur I, et pour tout x dans I, on a :
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x^2)}$. Or $(1+x^2) > x^2$, donc $f'(x) < 0$ et par conséquent, f est strictement décroissante sur I.

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$

a) Déterminons le sens de variation de la suite $(u_n)_n$

Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - f(n) \\ &< 0 \text{ car la fonction } f \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante

b) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} f(n)\\ &= 0\end{aligned}$$

c) Démontrons que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

D'après la question 2.a), la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Donc on a l'inégalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq u_n \leq u_1$, pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire que pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. D'où $(u_n)_n$ est bornée

3. On définit la suite (S_n) dont le terme général est la somme des n premiers termes de la suite (u_n). $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

a) Démontrons que la suite (S_n) est croissante.

Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} - (u_1 + u_2 + ... + u_n)\\ &= u_{n+1}\\ &\geq 0 \text{ (d'après la question 2.c)}\end{aligned}$$

D'où $(S_n)_n$ est croissante.

b) Écrivons l'expression de $u_1 + u_2 + u_3$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + u_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3}{4}}$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

c) Soit $n \geq 1$. Montrons que $S_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S_n = \frac{n}{n+1}}$

Calculons S_99

D'après ce qu'on vient de montrer, $\underline{S_{99} = \frac{99}{100}}$.

d) Il est vrai que la suite $(S_n)_n$ converge vers 1, car $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Exercice 4 :

Pour tout $n > 0$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

Partie A

1. On considère $n = 1$.

a) Calculons les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$ et conclure.

—

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f_1(x) &= \lim_{x\to 0^+} (\ln x) \times \frac{1}{x^2} \\ &= (-\infty) \times (+\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

D'où $\underline{\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = -\infty}$ et par conséquent, $\underline{C_1 \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0}$

—

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f_1(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \\ &= 0 \text{ (car } \forall x > 1, \ln x \leq x^2) \end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ et par conséquent, C_1 admet une asymptot horizontale d'équation $y = 0$.

b) Étudions les variations de f_1 et dressons son tableau de variation.

Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x :\mapsto x^2$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et de plus, $x :\mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc f_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x dans $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Or pour tout x dans $]0, +\infty[$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$. Or $1 - 2\ln(x) > 0$ équivaut à $\ln(x) < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x < e^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, $f_1'(x) > 0$ sur $]0, e^{\frac{1}{2}}[$ et $f_1'(x) \leq 0$ sur $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Conclusion : f_1 est strictement croissante sur $]0, e^{\frac{1}{2}}[$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Tableau de variationd de f_1

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$f_1(e^{\frac{1}{2}})$	$\searrow$	0

Avec $f_1(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{1}{2e}$.

c) Déterminons une équation de la tangente (T) à C_1 en son point d'abscisse 1.

$$\begin{aligned} (T) \quad &: \quad y = f_1'(1)(x-1) + f_1(1) \\ &: \quad y = x - 1 \end{aligned}$$

D'où $(T) : y = x - 1$

2. On considère $n = 2$, alors $f_2 : x \mapsto \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$.

a) Calculons les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$ et conclure.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

—

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f_2(x) &= \lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 \times \frac{1}{x^2}\\ &= (+\infty)\times(+\infty)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\underline{\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty}$ et par conséquent, $\underline{C_2 \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0}$

—

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f_2(x) &= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\\ &= 0 \text{ (car } \forall x > 1, \ln x \leq x)\end{aligned}$$

D'où $\underline{\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = 0}$ et par conséquent, $\underline{C_2 \text{ admet une asymptot horizontale d'équation } y = 0}$.

b) Calculons $f_2'(x)$ et dressons le tableau de variation de f_2.

Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et de plus, sur cet intervalle, $x \mapsto x$ ne s'annule pas. Donc f_2 est dérivable et pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}f_2'(x) &= 2\left(\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2}\right)\times\frac{\ln(x)}{x}\\ &= \frac{2\ln(x)(1-\ln(x))}{x^3}\end{aligned}$$

Pour x dans $]0, +\infty[$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f_2'(x)$ est celui de $\ln(x)(1-\ln(x))$.

<u>Tableau de signe de $\ln(x)(1-\ln(x))$</u>

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)(1-\ln(x))$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Tableau de variations de f_2</u>

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	$f_2(1)$	$\nearrow$	$f_2(e)$	$\searrow$	0

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Avec $f_2(1) = 0$ et $f_2(e) = e^{-2}$.

c) Étudions le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ et déduisons-en les positions relatives de C_1 et C_2.
Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)(1 - \ln(x))}{x^2} \end{aligned}$$

Or pour tout x dans $]0, +\infty[$, $x^2 > 0$; donc le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ est celui de $\ln(x)(1 - \ln(x))$ et nous avons tracé son tableau de signes à la question précédente.

Positions relatives de C_1 et C_2

— Pour tout x dans $]0, 1[\cup]e, +\infty[$, $f_1(x) - f_2(x) < 0$; donc C_1 est en dessous de C_2 sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]e, +\infty[$.

— Pour tout x dans $[1, e]$, $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$; donc C_1 est au dessus de C_2 sur l'intervalle $[1, e]$.

d) Traçons C_1 et C_2.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$

1. On pose $F(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$. Calculons $F'(x)$ et déduisons en I_1.

Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{-\ln(x)}{x^2} \\ &= -f_1(x) \end{aligned}$$

Comme $F'(x) = -f_1(x)$, alors $-F$ est une primitive de f_1 et ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e f_1(x)dx \\ &= -[F(x)]_1^e \\ &= F(1) - F(e) \\ &= 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

D'où $\boxed{I_1 = 1 - 2e^{-1}}$

2. Montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\begin{cases} u(x) = (\ln(x))^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$, alors on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{n+1}{x}(\ln(x))^n \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$. Après quoi on aura :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -\left[\frac{(\ln(x))^{n+1}}{x}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2}dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$

3. Calculons I_2 et déduisons-en l'aire A du domaine plan délimité par C_1, C_2 et les droites d'équation $x = 1, x = e$.

D'une part, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{e} + (1+1)I_1 \\ &= -\frac{1}{e} + 2(1 - 2e^{-1}) \\ &= 2 - 5e^{-1} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_1^e (f_1(x) - f_2(x))dx\right) \text{ Unité d'aire}(UA) \\ &= \left(I_1 - I_2\right)\ UA \\ &= \left(1 - 2e^{-1} - 2 + 5e^{-1}\right)\ UA \\ &= (3e^{-1} - 1)\ UA \end{aligned}$$

Or d'après les données, $UA = 2cm \times 10cm = 20cm^2$, donc $A = 60e^{-1} - 20\ cm^2$

D'où $\boxed{A = 60e^{-1} - 20\ cm^2}$

4. Montrons que pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, on a :

$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Pour n dans $\mathbb{N}^\star$, notons p_n la propriété définie par : $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$

— D'un coté, on a : $\frac{1}{1!}I_1 = I_1$ et de l'autre, on a : $1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right) = 1 - 2e^{-1} = I_1$. Donc p_1 est vraie.

— Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Supposons p_n vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left(-\frac{1}{e} + (n+1)I_n\right) \text{ (d'après la question 2)} \\
&= \left(-\frac{1}{e} + (n+1)n!\left(1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right)\right) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(-\frac{1}{e} + (n+1)!\left(1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right)\right) \\
&= (n+1)!\left(-\frac{1}{e(n+1)!} + \left(1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right)\right) \\
&= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$; c'est-à-dire que p_{n+1} est vraie.

Ainsi, on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, p_n \Rightarrow p_{n+1}$

— D'après le principe du raisonnement par récurrence, p_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.

5. Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Montrons que $0 \leq I_n \leq 1$.

Pour tout x dans $[1, e]$, on a : $0 \leq \ln(x) \leq 1$ et ; donc pour tout x dans $[1, e]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$ et par suite, $0 \leq \int_1^e f_n(x)dx \leq \int_1^e \frac{dx}{x^2} = 1 - e^{-1} \leq 1$.

D'où Pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $0 \leq I_n \leq 1$

6. Déduisons-en $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$.

D'après la question précédente, pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$. Il vient donc de cette relation que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$ (d'après le théorème des gendarmes, puis de la relation obtenue à la question 4., on peut donc écrire : $0 = 1 - \frac{1}{e} \times \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e}$

Correction du sujet de 2022

Exercice 1 :

Partie A :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Soit a un réel. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_1 \times u_2^2 \times u_3^3 \times \ldots \times u_n^n \ (\forall n \geq 1) \end{cases}$$

1. Calculons les quatre premiers termes de la suite.

$*$ $u_1 = a$ (Par construction de la suite)

$*$ $u_2 = u_1 = a$

$*$ $u_3 = u_1 \times u_2^2 = a \times a^2 = a^3$

$*$ $u_4 = u_1 \times u_2^2 \times u_3^3 = a \times a^2 \times (a^3)^3 = a^{12}$

D'où $\boxed{u_1 = a,\ u_2 = a,\ u_3 = a^3,\ u_4 = a^{12}}$

2. Soit $n \geq 2$.

$*$ Calculons u_n en fonction de u_{n-1}.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n-1}} &= \begin{cases} \frac{u_1 \times u_2^2 \times u_3^3 \times \ldots \times u_{n-2}^{n-2} \times u_{n-1}^{n-1}}{u_1 \times u_2^2 \times u_3^3 \times \ldots \times u_{n-2}^{n-2}} & \text{Si } n \geq 3 \\ \frac{u_2}{u_1} & \text{Si } n = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_{n-1}^{n-1} & \text{Si } n \geq 3 \\ 1 & \text{Si } n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\begin{cases} u_2 = u_1 \\ u_n = u_{n-1}^n & \text{Si } n \geq 3 \end{cases}}$

$*$ Calculons u_n en fonction de u_{n-2} (Pour $n \geq 3$).

On a d'après ce qui précède et pour $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1}^n \\ &= \left(u_{n-2}^{n-1}\right)^n \quad \text{D'après l'expression de } u_{n-1} \text{ en fonction de } u_{n-2} \\ &= u_{n-2}^{n(n-1)} \end{aligned}$$

Pour $n = 3$: On a $u_3 = a^2 u_1$

D'où $\boxed{\begin{cases} u_3 = a^2 u_1 \\ u_n = u_{n-2}^{n(n-1)} & \text{Si } n \geq 4 \end{cases}}$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

3. Soit $n \geq 2$. Calculons u_n en fonction de a.

D'après l'expression de u_n en fonction de u_{n-1} et celle de u_n en fonction de u_{n-2}, on peut conjecturer la propriété suivante : ε$\forall n \geq 2,\ u_n = a^{\frac{n!}{2}}$ε que nous allons de ces pas démontrer par récurrence.

∗ Pour $n = 2$, on a d'une part, $u_2 = a$ et d'autre part, $a^{\frac{2!}{2}} = a$. Donc notre propriété est vraie pour $n = 2$.

∗ Soit $n \geq 2$. Supposons que $u_n = a^{\frac{n!}{2}}$ et montrons que $u_{n+1} = a^{\frac{(n+1)!}{2}}$
Puisque $n \geq 2$, alors $n + 1 \geq 3$ et on peut donc écrire : $u_{n+1} = u_n^{n+1}$ (d'après la question précédente) ; en appliquant l'hypothèse, on arrive à : $u_{n+1} = \left(a^{\frac{n!}{2}}\right)^{n+1}$ et par suite $u_{n+1} = a^{\frac{(n+1)!}{2}}$.

∗ Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $u_n = a^{\frac{n!}{2}}$.

4. Étudions suivant les valeurs de a la convergence de la suite (u_n) et calculons sa limite lorsqu'elle converge.

∗ Si $a = 1$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = 1$ et dans ce cas $(u_n)_n$ est une suite constante, donc convergente de limite 1.

∗ Si $a = -1$, alors, comme pour tout $n \geq 4$, $\frac{n!}{2}$ est pair, alors $u_n = 1$ pour tout $n \geq 4$ et donc $(u_n)_n$ est convergente de limite 1.

∗ Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{n!}{2}} = 0$ et donc $(u_n)_n$ converge et a pour limite 0.

∗ Si $|a| > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{n!}{2}} = +\infty$ et donc $(u_n)_n$ diverge.

Partie B :

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{\log_2(\sqrt{(x-1)(x+3)})}{\log_8(3) + \log_8(x+1)} = \log_9(27)$.

Contrainte : Pour tout x solution de cette équation, il est nécessaire d'avoir : $\begin{cases} (x-1)(x+3) > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$,

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

c'est-à-dire $\begin{cases} x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[\\ x \in]-1, +\infty[\end{cases}$, donc finalement $x \in]1, +\infty[$.
Soit donc x dans $]1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\log_2(\sqrt{(x-1)(x+3)})}{\log_8(3)+\log_8(x+1)} = \log_9(27) &\Leftrightarrow \frac{\frac{\ln(\sqrt{(x-1)(x+3)})}{\ln(2)}}{\frac{\ln(3)}{\ln(8)}+\frac{\ln(x+1)}{\ln(8)}} = \frac{\ln(27)}{\ln(9)} \\
&\Leftrightarrow \frac{3\ln(\sqrt{(x-1)(x+3)})}{\ln(3)+\ln(x+1)} = \frac{3\ln(3)}{2\ln(3)} \\
&\Leftrightarrow 2\ln(\sqrt{(x-1)(x+3)}) = \ln(3)+\ln(x+1) \\
&\Leftrightarrow \ln((x-1)(x+3)) = \ln(3(x+1)) \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 3(x+1) \\
&\Leftrightarrow x^2+3x-x-3 = 3x+3 \\
&\Leftrightarrow x^2-x-6 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 3 \text{ (car } x \in]-1, +\infty[)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble S des solutions de cette équation est $S = \{3\}$.

2. $*$ Trouvons les réels a, b et c tels que : $\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{x-1}$.
Commençons par remarquer que : $\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$. On a alors :
$\frac{x^2}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{a(x-1)}{1+x^2} + \frac{b(x-1)}{1+x} + c$; et pour $x = 1$, on a : $c = \frac{1}{4}$
$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{a(x+1)}{1+x^2} + \frac{c(x+1)}{x-1} + b$; et pour $x = -1$, on a : $b = -\frac{1}{4}$
$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{b(1+x^2)}{1+x} + \frac{c(x^2+1)}{x-1} + a$; et pour $x = \mathrm{i}$, on a : $c = \frac{-1}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)} = \frac{1}{2}$
D'où $\boxed{a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}}$

$*$ Calculons $F(x) = \int \frac{x^6}{x^4-1} dx$.

Par division euclidienne de x^6 par x^4-1, on a : $\frac{x^6}{x^4-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^4-1}$ et d'après ce qu'on a trouvé

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

précédemment, on a ensuite : $\frac{x^6}{x^4-1} = x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{x^6}{x^4-1}dx \\
&= \int \left(x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}\right)dx \\
&= \int x^2dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-1) + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + C
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

Exercice 2 :

Partie A :

1. Déterminons le nombre de rencontres à organiser pour respecter ce règlement.

Pour une rencontre, il faut deux équipes différentes (choisies parmi les 20) et chaque équipe joue à la fois sur et en dehors de son terrain, on peut donc considérer qu'un match est un choix ordonné sans répétition de 02 équipes parmi les 20. Ainsi, le nombre de rencontres à organiser est $A_{20}^2 = 380$.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, considérons l'événement : A_n="La personne fume le jour J_n". On donne : $p(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}) = 0,3$ et $p(\overline{A_{n+1}}/A_n) = 0,9$

a) Calculons la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de P_n.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\
&= p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \text{ (D'après la formule des probabilités totales)} \\
&= p(A_n)p(A_{n+1}/A_n) + p(\overline{A_n})p(A_{n+1}/\overline{A_n}) \\
&= p(A_n)(1 - p(\overline{A_{n+1}}/A_n)) + (1 - p(A_n))(1 - p(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n})) \\
&= (1-0,9)P_n + (1-0,3)(1-P_n) \\
&= 0,1P_n + 0,7 - 0,7P_n \\
&= 0,7 - 0,6P_n
\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

b) Déterminons la limite de P_n

Notons $l = \lim_{n\to\infty} P_n$; alors d'après la question précédente, $l = 0,7 - 0,6l$, c'est-à-dire $l = 0,4375$. Et on ne peut affirmer avec certitude si cette personne finira par arrêter de fumer.

Partie B :

On note j le nombre complexe $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrons les propriétés suivantes de j :

$* \; j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$* \; j^3 = 1$

On a : $j^3 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

$* \; 1 + j + j^2 = 0$

D'après ce qui précède, $j^3 = 1$, donc $1 - j^3 = 0$, par suite $(1-j)(1+j+j^2) = 0$. Comme $j \neq 1$, nécessairement, $1 + j + j^2 = 0$.

$* \; -j^2 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

D'après ce qui précède, $1 + j + j^2 = 0$; donc $-j^2 = 1 + j = 1 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3}) = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$

a) Supposons que MNP est équilatéral et montrons que $\begin{cases} m - n = -j^2(p-n) \\ m + nj + pj^2 = 0 \end{cases}$.

Comme MNP est équilatéral, l'image de P par la rotation centrée en N et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est M et ainsi on peut écrire $m - n = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(p-n)$ et ensuite, $\underline{m - n = -j^2(p-n)}$ (d'après la question 1.),puis $m + (-1-j^2)n + j^2p = 0$ et enfin $\underline{m + jn + j^2p}$.

b) Réciproquement, supposons que $m + nj + pj^2 = 0$. Montrons que MNP est équilatéral

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

direct.

Pour cela, il est suffisant de montrer que l'image de P par la rotation centrée en N et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est P. Par hypothèse, $m + nj + pj^2 = 0$; donc $m + (-1 - j^2)n + j^2 p = 0$, c'est-à-dire $m - n + (p - n)j^2 = 0$ ou encore $(m - n) = -j^2(p - n)$, et de là, on conclut que M est l'image de P par la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, MNP est équilatéral direct.

3. Application : Montrons que MNP est équilatéral.
Notons a, b, c, d, e, f, m, n et p les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, M, N et P. D'après la question 2.c), il suffit de montrer que $m+nj+pj^2 = 0$. Puisque les points A, B, C, D, E, F sont tous sur le cercle centré en O, alors $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ et comme par hypothèse $mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}) = \dfrac{\pi}{3}$, alors on peut affirmer que chacun des triangles OAB, OCD et OEF est équilatéral et d'après la question 2.a), on a :
$\begin{cases} b + 0j + aj^2 = 0 & (1) \\ c + dj + 0j^2 = 0 & (2) \\ 0 + ej + fj^2 = 0 & (3) \end{cases}$. M, N, P étant respectivement les milieux de $[BC], [DE], [FA]$, on a : $m = \frac{b+c}{2}$; $n = \frac{d+e}{2}$ et $p = \frac{f+a}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m + nj + pj^2 &= \frac{b+c}{2} + \frac{d+e}{2}j + \frac{f+a}{2}j^2 \\ &= \frac{1}{2}(aj^2 + b + c + dj + ej + fj^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{MNP \text{ est un triangle équilatéral}}$.

Exercice 3 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = 1 - x^2 + \ln(1 - x)$.

1.a) Étudions les variations de f et traçons sa courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Sur $[0, 1[$, $x \mapsto 1 - x > 0$, donc sur cet intervalle, la fonction f est bien définie et est dérivable.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Soit donc x dans $[0,1[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + \frac{-1}{1-x} \\ &= \frac{2x^2-2x-1}{1-x} \end{aligned}$$

Or $x \in [0,1[$, donc $1-x>0$ et ainsi le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2-2x-1$. Mais $2x^2-2x-1 = (x-\frac{1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}) > 0$ (sur $[0,1[$) ; donc $f'(x) > 0$ et par conséquent f est strictement croissante sur $[0,1[$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2+\ln(1-x)) = -\infty$ et $f(0) = 1$. Donc le tableau de variation de f est :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$

b) Montrons que $f(x) = 0$ admet une unique solution positive α et vérifions que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right[$.

D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $[0,1[$; de plus, elle est continue sur cet intervalle et $0 \in f([0,1[) =]-\infty, 1]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0,1[$.

Par ailleurs, $\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} + \ln(\frac{1}{2}) \approx 0,057 \\ f(1-\frac{1}{e}) = 1-(1-\frac{1}{e})^2 + \ln(\frac{1}{e}) \approx 0,40 \end{cases}$. On remarque alors que $0 \in f\left(\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right[\right)$; ainsi, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right[$.

c) Soient p et q les fonctions définies sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$ respectivement par : $\begin{cases} p(x) = |f'(x)| \\ q(x) = |f''(x)| \end{cases}$.

Étudions les variations de p et q et dressons leur tableau de variation.

D'après ce qui précède, $f' < 0$ sur $[0,1[$ et comme $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right] \subset [0,1[$, $f' < 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$ et

MENSA Academy

par conséquent, $p = -f'$ qui est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$ et pour tout x dans $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
p'(x) &= -f''(x) \\
&= -\frac{(4x-2)(1-x)+2x^2-2x-1}{(1-x)^2} \\
&= -\frac{4x-4x^2-2+2x+2x^2-2x-1}{(1-x)^2} \\
&= -\frac{-2x^2+4x-3}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $2x^2-4x+3$ étant négatif, on conclut que $p' > 0$ et donc que <u>p est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$</u>, et par la même occasion, on déduit que $q = f''$ qui aussi est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$. Pour tout x dans $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
q'(x) &= f^{(3)}(x) \\
&= \frac{(4x-4)(x-1)^2-2(x-1)(2x^2-4x+3)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(4x-4)(x-1)-2(2x^2-4x+3)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{4x^2-8x+4-4x^2+8x-6}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

On a $q' > 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$; donc <u>q est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$</u>. Par ailleurs, $p(\frac{1}{2}) = 3$, $p(1-\frac{1}{e}) = 2+e-2e^{-1}$, $q(\frac{1}{2}) = 6$, $q(1-\frac{1}{e}) = 2+e^2$.

<u>Tableau de variation de p</u>

x	$\frac{1}{2}$		$1-\frac{1}{e}$
$p'(x)$		$+$	
p	3	$\nearrow$	$2+e-2e^{-1}$

<u>Tableau de variation de q</u>

x	$\frac{1}{2}$		$1-\frac{1}{e}$
$q'(x)$		$+$	
q	6	$\nearrow$	$2+e^2$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

b) Soient x, y dans $\left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right]$. Déduisons-en que $\dfrac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \dfrac{e^2+2}{3}$.

$$\begin{cases} \text{Comme } x \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right], \text{ alors d'après le tableau de variation de } q,\ q(x) \leq 2+e^2 \\ \text{Comme } y \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right], \text{ alors d'après le tableau de variation de } p,\ q(x) \geq 3 \end{cases}$$

C'est-à-dire $|f''(x)| \leq 2+e^2$ et $\frac{1}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{3}$. Ainsi, on obtient finalement $\dfrac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \dfrac{e^2+2}{3}$.

D'où $\boxed{\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{e}\right],\ \dfrac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \dfrac{e^2+2}{3}}$.

2. Soit $t \in]\alpha, 1[$.

a) Calculons $\int_\alpha^t f(x)dx$.

$$\begin{aligned} \int_\alpha^t f(x)dx &= \int_\alpha^t (1-x^2+\ln(1-x))dx \\ &= \int_\alpha^t (1-x^2)dx + \int_\alpha^t \ln(1-x)dx \end{aligned}$$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(1-x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$; alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x \end{cases}$ et par suite,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^t f(x)dx &= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^t + [x\ln(1-x)]_\alpha^t - \int_\alpha^t \frac{x}{x-1}dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^t + [x\ln(1-x)]_\alpha^t - \int_\alpha^t (1+\frac{-1}{1-x})dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^t + [x\ln(1-x)]_\alpha^t - [x+\ln(1-x)]_\alpha^t \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + (x-1)\ln(1-x)\right]_\alpha^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + (t-1)\ln(1-t) + \frac{1}{3}\alpha^3 - (\alpha-1)\ln(1-\alpha) \end{aligned}$$

Or $f(\alpha) = 0$; donc $1-\alpha^2+\ln(1-\alpha) = 0$ et par suite, $\ln(1-\alpha) = -1+\alpha^2$: ainsi,

$\boxed{\int_\alpha^t f(x)dx = -\frac{1}{3}t^3 + (t-1)\ln(1-t) + \frac{1}{3}\alpha^3 - (\alpha-1)(\alpha^2-1)}$

b) Montrons que $\lim\limits_{t\to 1^-} \int_\alpha^t f(x)dx = P(\alpha)$; où P est un polynôme à déterminer.

On sait que $\lim\limits_{t\to 1^-} -(1-t)\ln(1-t) = 0$; donc $\lim\limits_{t\to 1^-} \int_\alpha^t f(x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha^3 - (\alpha-1)(\alpha^2-1)$ qui est un polynôme.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B :

4. Soient u et v deux réels tels que $u < v$. Soit h une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant $J = [u, v]$. On considère la fonction T définie sur J par $T(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$

a) Soit $a \in J$ et A le point d'abscisse a de la courbe C_h de h. Vérifions que $T(A)$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_h en A avec l'axe des abscisses.

L'équation de la tangente (T) à C_h en A est $(T)\ :\ y = h'(a)(x-a) + h(a)$. L'abscisse de son point de rencontre avec l'axe des abscisses est solution de l'équation $y = 0$. Or :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow h'(a)(x-a) + h(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - a = -\frac{h(a)}{h'(a)} \\ &\Leftrightarrow x = a - \frac{h(a)}{h'(a)} \\ &\Leftrightarrow x = T(a) \end{aligned}$$

D'où $T(a)$ est l'abscisse du point d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses.

b)

$*$ Montrons que T est dérivable dans J et monotone.

Puisque h est définie et deux fois dérivable sur un intervalle contenant J, alors elle est définie et dérivable sur J aussi ; de plus h' ne s'annule pas sur J. Donc T est dérivable sur J et pour tout x dans J, on a :

$$\begin{aligned} T'(x) &= 1 - \frac{h'(x) \times h'(x) - h''(x) \times h(x)}{h'^2(x)} \\ &= \frac{h'^2(x) - h'^2(x) + h(x)h''(x)}{h'^2(x)} \\ &= \frac{h(x)h''(x)}{h'^2(x)} \\ &\geq 0 \text{ (car } h \text{ et } h'' \text{ sont négatives sur } J) \end{aligned}$$

D'où <u>T est croissante sur l'intervalle J.</u>

Par ailleurs, $T(u) = u - \frac{h(u)}{h'(u)} = u$ (car $h(u) = 0$) et $T(v) = v - \frac{h(v)}{h'(v)}$ On a alors :

<u>Tableau de variations de T</u>

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

x	u		v
$T'(x)$		$+$	
T	u	$\nearrow$	$v - \frac{h(v)}{h'(v)}$

Correction du sujet de 2021

Exercice 1

Partie A

1. Etude des limites de f aux bornes de $]-1,+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = (2x - (x+1)\ln(x+1))\dfrac{1}{x+1}$

Comme $\lim\limits_{x\to -1^+}(2x-(x+1)\ln(x+1)) = -2$ et $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1} = -\infty$ il suit par produit de limites que : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x+1} = 2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -\ln(1+x) = -\infty$. On déduit par somme de limites que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

En définitive,

$$\boxed{:\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$$

Commentaire : la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale au graphe de f.

2. Puisqu'elle est obtenue par des opérations usuelles sur des fonctions continues et dérivables sur son domaine de définition, f est continue et dérivable sur son domaine et pour tout réel x élément de ce domaine, on a :

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

On déduit le tableau de variation :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. De plus, $f(1)\times f(5) < 0$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$. Une dichotomie rapide permet de trouver $\alpha \cong 3,9$.

4. Soit x un élément de $]1,+\infty[$. Le signe de $f(x)$ est résumé dans le tableau suivant :

x	-1		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $f(x)$ est négatif sur $]-1;0[\cup]\alpha,+\infty[$, positif sur $]0;\alpha[$ et nulle pour $x = 0$ ou $x = \alpha$.

5. On trouve $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(t)-0}{t-0} = +\infty}$.

Donc g est prolongeable par continuité, mais pas dérivable en zéro.

6. Démonstration :

Pour tout réel positif t, on a : $g'(t) = \dfrac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \times \left(\dfrac{2t}{1+t} - \ln(1+t)\right)$.

D'où $s(t) = \dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$

7.(a) Par croissance comparée, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Commentaire : La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale au graphe de g en $+\infty$.

(b)Tableau de variation de g.

D'après la question 6, pour $t > 0$, $g'(t)$ est du signe de $f(t)$. D'où :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

t	0		α		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)}$	$\searrow$	0

8. Tracé de la courbe représentative de la fonction g.

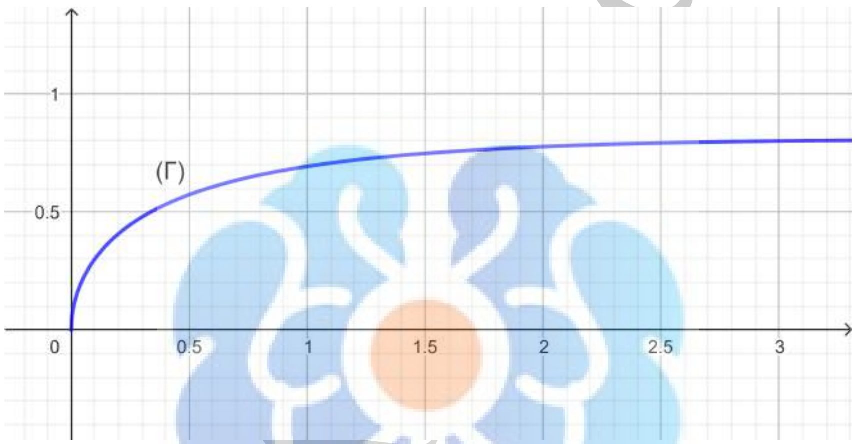


FIGURE 3.1 –

Partie B

9.(a) La fonction g_1 est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = 0$ donc g_1 est dérivable en zéro.

Finalement, g_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$.

(b). Puisque $t \longmapsto \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, alors $x \longmapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. Par la suite, $\varphi(x) = 2g_1(x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\left(\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right) - \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\\ &= g(x)\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

10. Puisque φ est une primitive de g sur $[0,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 g(t)dt \\
&= \varphi(1)-\varphi(0) \\
&= 2\ln(2) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt
\end{aligned}$$

11.(a) Calcul.

$$\begin{aligned}
(h\circ k)(0) &= h(\tan^2(0)) \\
&= h(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $\theta \in I$, $k(\theta) \in [0,+\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned}
(h\circ k)'(\theta) &= k'(\theta)\times(h'\circ k)(\theta) \\
&= 2\tan(\theta)(1+\tan^2(\theta))\times h'(k(\theta)) \\
&= 2\tan(\theta)(1+\tan^2(\theta))\times \frac{2\sqrt{\tan^2(\theta)}}{1+\tan^2(\theta)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(h\circ k)'(\theta) = 4\tan^2(\theta)}$$

(c) Déduction.

Soit $\theta \in I$. On a :

$$\begin{aligned}
(h\circ k)(\theta) &= \int_0^\theta (h\circ k)'(t)dt \\
&= 4\int_0^\theta \tan^2(t)dt \\
&= 4\int_0^\theta (1-\tan^2(t))dt - 4\theta
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{(h\circ k)(\theta) = 4\tan(\theta) - 4\theta}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d). La fonction k est continue de I vers $[0, +\infty[$ et on a $k(0) = 0$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} k(\theta) = +\infty$. D'où $k(I) = [0, +\infty[$.

D'autre part, $k(\frac{\pi}{4}) = 1$

Valeur de $\mathcal{A}$.

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2\ln(2) - h(1) \\ &= 2\ln(2) - h(k(\frac{\pi}{4})) \\ &= 2\ln(2) - (h \circ k)(\frac{\pi}{4}) \\ &= 2\ln(2) - 4 + \pi \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln(2) - 4 + \pi \; u.a}$$

Exercice 2

1. Soit A : "Je ne marque rien".

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_{20}^4}{20^4} = 0,73$

2. Pour tout entier naturel $k \leq 4$, soit A_k : "Obtenir exactement k nombre(s) a parmi les dés lancés".

La variable aléatoire $N_a \rightsquigarrow \mathcal{B}in(4, \frac{1}{20})$. Ainsi $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(N_a = k)$.

On trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{C_4^k 19^{4-k}}{20^4}}$$

3. Soit $a \in \{1, ..., 20\}$, on a : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}er(1 - \left(\frac{19}{20}\right)^3)$.

Par ailleurs,

$$G = \sum_{a=1}^{20} aX_a$$

4. On espère en moyenne :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= \sum_{a=1}^{20} aX_a \\
&= \sum_{a=1}^{20} a\mathbb{E}[X_a] \\
&= \sum_{a=1}^{20} a\mathbb{P}(X_a = 1) \\
&= \sum_{a=1}^{20} a1 - \left(\frac{19}{20}\right)^3 \\
&= 29,95 \quad points
\end{aligned}$$

5. Soit B : "je marque exactement 8 points"

On trouve $\mathbb{P}(B) = \dfrac{4 \times \dfrac{4!}{2!2!} + 1}{A_{20}^4}$

Hint : Quels sont les paires de chiffres dont la somme vaut huit ? Quels est le nombre d'anagrammes du mot AANN ? Ne pas oublier que l'obtention de la combinaison $8-8-8-8$ est un cas favorable !

6. $\square$

Exercice 3

1.(a) Après calcul, on trouve :

$$\boxed{d_2 = 1 \quad d_3 = 2 \quad d_4 = 9 \quad d_5 = 44}$$

(b). Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) : d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on bien $\begin{cases} d_0 = 0 \ et \ d_1 = 0 \\ 0 = 1 \times 1 + (-1)^1 \end{cases}$ Donc $d_1 = (0+1)d_0 + (-1)^{0+1}$. Par conséquent $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
d_{n+2} &= (n+1)(d_{n+1} + d_n) \\
&= (n+1)d_{n+1} + (n+1)d_n \\
&= (n+1)d_{n+1} + d_{n+1} - (-1)^{n+1} \quad (\mathcal{HR}) \\
&= (n+2)d_{n+1} + (-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$ est vraie.

2.(a) Par définition, $I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 e^t dt = e$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}e^t dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1} de^t \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[t^{n+1}e^t\right] - \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (n+1)t^n e^t dt \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{e}{(n+1)!}}$$

(b) Ce résultat se démontre par récurrence sur n.

(c) Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \left|d_n - \frac{n!}{e}\right| &= \frac{I_n}{e} \\ &\leq \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt \quad car\ \forall t \in [0,1],\ e^t \leq e \\ &\leq \frac{1}{n+1} \quad CQFD \end{aligned}$$

(d).Soit $n \geq 2$ un entier naturel.D'après la question qui précède, on a $\left|d_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{2}$. Puisque d_n est un entier naturel alors, il suffit d'arrondir convenablement à la valeur entière la plus proche $\frac{n!}{e}$ pour obtenir la valeur de d_n.

Ainsi, si la partie décimale de $\frac{n!}{e}$ est supérieure à 5, alors $d_n = E\left(\frac{n!}{e}\right) + 1$, sinon $d_n = E\left(\frac{n!}{e}\right)$.

Par exemple, on a : $\frac{5!}{e} \cong 44,15$. On arrondit alors par défaut à la valeur entière la plus proche pour retrouver $d_5 = 44$.

Un autre exemple : on a $\frac{10!}{e} \cong 1334,96$. Dans ce cas, on arrondit par excès pour avoir $d_{10} = 1335$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice 4

Partie 1 : Préliminaires

1.Soient A et A' deux points de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement, distincts de I. Désignons par $\alpha = mes(\widehat{\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA}})$. La transformation $s \circ s'$ est une rotation de centre I et d'angle 2α.

2.(a) Démonstration :

En vertu de la question précédente, on peut écrire :

$$\boxed{r = s_1 \circ s_2 = s_3 \circ s_1 = s_2 \circ s_3}$$

On procède ensuite au calcul :

$$\begin{aligned} r^2(M_1) &= r \circ r(M_1) \\ &= s_2 \circ s_3 \circ s_3 \circ s_1(s_1(M)) \\ &= s_2(M) \quad car\ s_i \circ s_i = \mathcal{I}d \\ &= M_2 \end{aligned}$$

On procède de même pour $r^2(M_2)$.

(b). D'après les questions qui précèdent, $0M_1 = OM_2 = OM_3$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}}) = \frac{2\pi}{3}$. Par conséquent $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral.

Partie 2 : Nombres complexes

3. Remarquons tout d'abord que M_1 est l'image de M par rapport à l'axe des abscisses. Donc $M[\bar{z}]$. Ensuite les deux relations de la question 2(b) fournissent $M_2[j^2\bar{z}]$ et $M_3[j^4\bar{z}]$. Comme $j^4 = j$ il vient que...

4. On trouve alors $M_4[-(\bar{z}+1)]$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

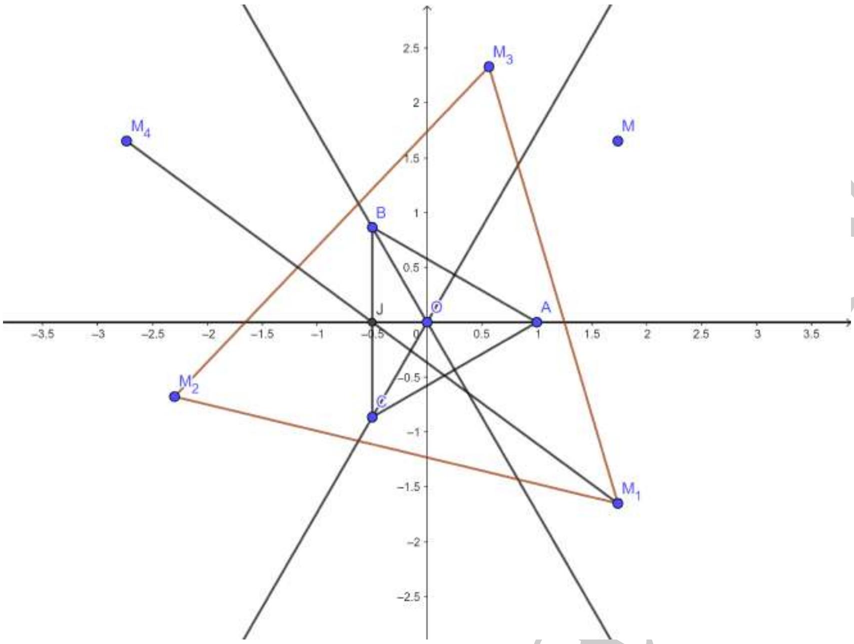


FIGURE 3.2 –

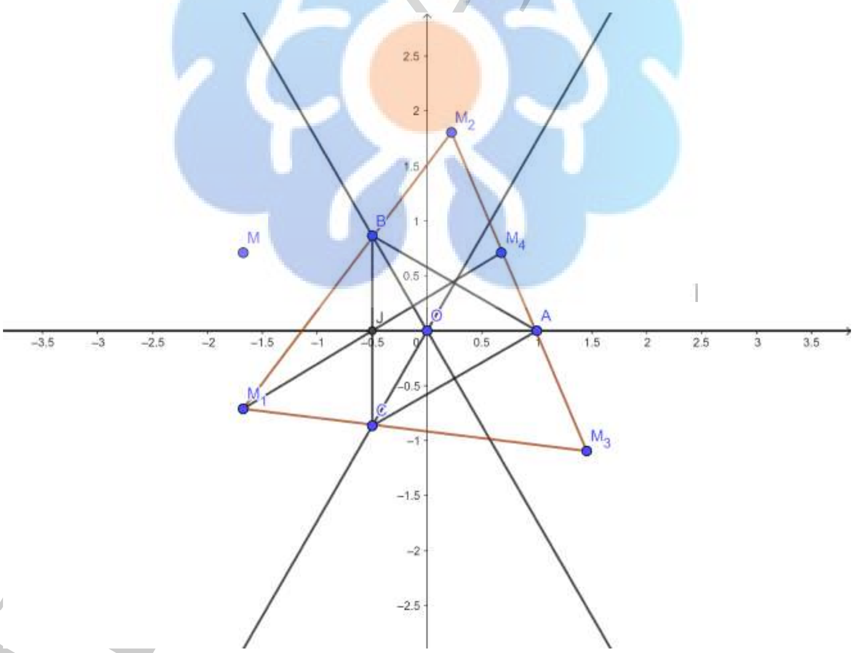


FIGURE 3.3 –

5.(a) Les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si : $\dfrac{j^2\bar{z}+\bar{z}+1}{j^2\bar{z}-j\bar{z}} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire : ... (à développer).

(b) A faire !

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Correction du sujet de 2020

Exercice 1

Partie A

1.Soit $a > 0$. En considérant les fonctions $f : t \longmapsto a\ln(t)$ et $g : t \longmapsto t\ln(a)$ il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\Phi(t) &= \lim_{x\to a}\frac{t-a}{a\ln(t)-t\ln(a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{\dfrac{a\ln(t)-a\ln(a)}{t-a}-\dfrac{t\ln(a)-a\ln(a)}{t-a}}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a\ln(t)-a\ln(a)}{t-a}-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{t\ln(a)-a\ln(a)}{t-a}}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(t)-g(a)}{t-a}}\\
&= \frac{1}{f'(a)-g'(a)}
\end{aligned}$$

En considérant de plus, $h : t \longmapsto t - a - a\ln(\frac{t}{a})$ on écrit :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\Psi(t) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{2}\times\frac{(t\ln(t)-a\ln(a))}{\Phi(t)^2\times\dfrac{(t-a-a\ln(\frac{t}{a}))}{t-a}}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\times\frac{\lim\limits_{x\to a}(t\ln(t)-a\ln(a))}{\lim\limits_{x\to a}\Phi(t)^2\times\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(t)-h(a)}{t-a}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{(f'(a)-g'(a))^2\times(a\ln(a)-a\ln(a))}{h'(a)}
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Phi(t) = \frac{1}{1-ln(a)} \qquad \lim_{x\to a}\Psi(t) = 0}$$

2.Soit a un réel positif et distinct de 1. Une étude rapide permet de montrer que la fonction $a \longmapsto x(a)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Comme y est constante de valeur nulle, on déduit que lorsque a varie, M décrit la droite d'équation $y = 0$ épointée de l'origine.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B

3. Variations de y.

Limites aux bornes de son ensemble de définition.

On a : $\lim_{x\to\infty} y = 0$; $\lim_{x\to 0^-} y = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} y = 0$

Dérivée : pour tout réel non nul x, on a : $y'(x) = -\frac{4x^2-5x+1}{x^5}e^{\frac{x-1}{x}}$

Tableau de variation : aux soins de l'étudiant.

On trouve que y est croissante sur $]-\infty;0[\cup[\frac{1}{4};1]$ et décroissante sur $]0;\frac{1}{4}]\cup[1;+\infty[$.

4. Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned}
\int y dx &= \int \frac{2x-1}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}dx \\
&= 2\int \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx - \int \frac{1}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}dx \\
&= 2e^{1-\frac{1}{x}} - \int \frac{1}{x}\frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx \\
&= 2e^{1-\frac{1}{x}} - \int \frac{1}{x}d\left(e^{1-\frac{1}{x}}\right) \quad (int\dot{-}grationparparties) \\
&= 2e^{1-\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}dx\right) \\
&= \frac{x-1}{x}e^{1-\frac{1}{x}} + k, \quad k\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Et on prend alors :

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

5. Construction de C.

6. Calcul des aires.

Posons $g(x) = f(x)e^{\frac{x-1}{x}}$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= -\int_0^{\frac{1}{2}} y dx \\
&= \lim_{x\to 0^+} g(x) - g(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

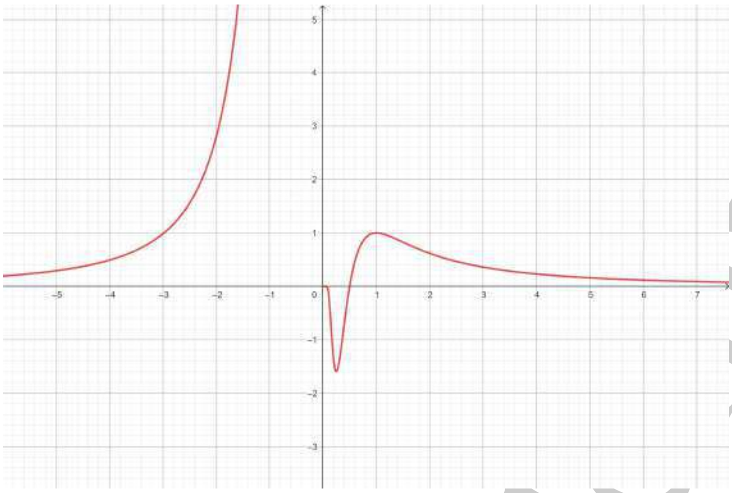


FIGURE 3.4 –

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_1 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} y\,dx \\
&= \mathcal{A}_1 + g(1) - g(\frac{1}{2}) \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} y\,dx \\
&= \mathcal{A}_1 + g(\alpha) - g(\frac{1}{2}) \\
&= 2e^{-1}
\end{aligned}$$

On trouve :

$$\boxed{\mathcal{A}_1 = 0.37\ u.a \quad \mathcal{A}_2 = 0.74\ u.a \quad \mathcal{A}_3 = 0.74 + \frac{\alpha-1}{\alpha} e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\ u.a}$$

Enfin, $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}_3 = 2e^{-1} + e\ u.a}$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

1. Etude rapide de f_n.

On a $f_n'(x) = nx^{n-1} + ... + 1$ et f_n' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a $f_n(0) \times f_n(1) = -1 \times (n-1)$. Par la suite, $f_n(0) \times f_n(1) < 0$. Et

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

on déduit du théorème de la bijection que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

1.(a). On a : $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + \alpha_n$, puisque $\alpha_n \geq 0$, Le résultat suit.

1.(b) D'après la question qui précède, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est croissante, on déduit que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$

D'où $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

1.(c) Comme $(\alpha_n)_n$ est décroissante et minorée par zéro, elle converge.

2. Démonstration. Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

Puisque $f_n(\alpha_n) = 0$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_n^k = 2$$

Donc,

$$\frac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha} = 2 \quad car\ \alpha_n \neq 1$$

D'où

$$\alpha_n = \frac{(\alpha_n)^{n+1}+1}{2} \quad CQFD$$

3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. D'après ce qui précède, on a : $0 < \alpha_n \leq \alpha_2$. Par la suite, $0 < \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1}$. On calcule aisément α_2 et on se rend compte que $0 < \alpha_2 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$ et on déduit du théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$

Par somme de limites, il vient que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice 3

Partie A

1. Soit A :"Les douze groupes inscrits sont tous présents "

En assimilant présentation effective d'un groupe inscrit le jour du départ à une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{8}$. Il vient que la probabilité de A est celle de l'obtention de douze succès au cours de douze répétitions indépendantes de l'épreuve suscitée.

D'où : $\mathbb{P}(A) = C_{12}^{12}(\frac{7}{8})^{12}(\frac{1}{8})^0$ On trouve : $\mathbb{P}(A) \cong 0.201$.

2. $X \rightsquigarrow \mathcal{B}in(p = \mathbb{P}(A), 30)$.

3. $S \rightsquigarrow \mathcal{B}in(\frac{7}{8}, 12)$

Le calcul est alors évident.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

$\mathbb{P}(S = 1) = C_{12}^{1}(\frac{7}{8})^{1}(\frac{1}{8})^{11} \cong \dfrac{1}{1000000000}$ et $\mathbb{E}[S] = 12 \times \frac{7}{8} = 10.5$ crédits.

Partie B

4. Soit A :"Il n'y a pas de désistement"

En raisonnant de manière analogue qu'à la question 1, on trouve :

$$P_{13} = \mathbb{P}(A) = \left(\frac{7}{8}\right)^{13} = 0.18$$

5. $R \rightsquigarrow \mathcal{B}er(P_{13})$ et $\mathbb{E}[R] = P_{13} = 0.18$.

6. Le gain moyen G obtenu par jour désigne ici la moyenne de la somme S, en crédits, perçue par l'association déduite des dépenses journalières éventuelles. D'où :

$$G = \mathbb{E}[S] - 2P_{13}$$

Il est à noter qu'ici, $S \rightsquigarrow \mathcal{B}in(\frac{7}{8}, 13)$. Le résultat est alors évident.

On trouve :

$$G = 11.015$$

7. Suite à la décision du dirigeant, le gain moyen augmente de $\mathbb{E}[S] - G = 0.515$ crédits, cette décision est donc rentable pour l'entreprise.

Problème

Partie A

1. Vérification :

On a :

$$\begin{aligned} j^3 &= (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 \\ &= e^{i\frac{\rho}{2\pi}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} j^2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &= e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \bar{j} \end{aligned}$$

MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1+j+j^2 &= 1+j+\bar{j} \\ &= 1+2\mathfrak{Re}(j) \\ &= 1+2\times -\frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives 1, j et j^2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{j-1}{j-j^2} &= -j^{-1} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc $AB = BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, ABC est un triangle équilatéral.

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + bj + cj^2 = 0$.

(a) Démonstration :

$$\begin{aligned} a+bj+cj^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a+bj-c(1+j) = 0 \quad car\ 1+j+j^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a-c)+(b-c)j = 0 \div CQFD\div \end{aligned}$$

(b) Démontrons que $b = c$.

Supposons le contraire. Alors $b - c \neq 0$. Puis, de la relation de la question (a) Il suit : $j = \frac{a-c}{b-c}$. Puisque $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $j \in \mathbb{R}$. On aboutit alors a $\mathfrak{I}(j) = 0$ et $\mathfrak{I}(j) \neq 0$. Ce qui est contradictoire ! !

D'où $b = c$.

Par la suite, la relation obtenue à la question (a) nous permet d'obtenir $a - c = 0$. D'où $a = b = c$

(c) Déduction. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Supposons que $a = b = c$. En l'occurrence, on obtient $a + bj + cj^2 = a(1 + j + j^2)$. Puisque $1 + j + j^2 = 0$, on déduit que $a + bj + cj^2 = 0$.

($\leftarrow$) Réciproquement, si $a + bj + cj^2 = 0$. alors d'après la question 3, $a = b = c$.

Conclusion : $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \quad (a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie B

4. Démontrons que Z est à valeurs dans $\left\{1, j, j^2\right\}$.

Soit $k \in \{1; ...; 6\}$. D'après le théorème de la division euclidienne, $\exists q, r \in \mathbb{N}, \quad k = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$. Ainsi, $j^k = (j^3)^q \times j^r$. Puis $j^k = j^r$ car $j^3 = 1$. Par conséquent $j^k \in \left\{1, j, j^2\right\}$. D'où Z est à valeurs dans $\left\{1, j, j^2\right\}$. Par la suite, il vient que : $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(F \in \{3, 6\}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(F \in \{1, 4\}) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(Z = j^2) = \mathbb{P}(F \in \{2, 5\}) = \frac{1}{3}$.

D'où $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(Z = j^2) = \frac{1}{3}$.

5.(a) A l'issue de l'expérience, U_n,V_n et W_n correspondent respectivement au nombre de lancers pour lesquels le résultat est un élément de $\{3, 6\}$;$\{1, 4\}$ et $\{2, 5\}$. L'ensemble des résultats possibles ayant entièrement été parcouru, On déduit que la somme de ces variables correspond alors au nombre total de lancers. D'où le résultat.

(b)Soit $n \geq 1$ On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} Z_k \\
&= \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = 1\right\}} Z_k + \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j\right\}} Z_k + \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j^2\right\}} Z_k \\
&= \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = 1\right\}} + \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j\right\}} j + \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j^2\right\}} j^2 \\
&= \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = 1\right\}} + j \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j\right\}} + j^2 \sum_{\left\{k \in \{1,\ldots,n\} \mid Z_k = j^2\right\}} \\
&= U_n + jV_n + j^2 W_n
\end{aligned}$$

(c) On a $S_n = U_n + jV_n + j^2 W_n$ Les variables aléatoires U_n, V_n et W_n sont réelles. Par conséquent, en vertu de la question 3(c) de la partie A, $U_n + jV_n + j^2 W_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.

(d) Supposons que $S_n = 0$ D'après la question qui précède, $U_n = V_n = W_n$. Ainsi, $3U_n = n$, car $U_n + V_n + W_n = n$. D'où n est multiple de 3.

(e) Si n n'est pas multiple de 3, alors, S_n n'est pas nul. Autrement dit l'évènement "$S_n = 0$" est impossible. D'où $p_n = 0$.

Partie C

6. $U_n \rightsquigarrow \mathcal{B}in(\frac{1}{3}; 3m)$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

7. $\mathbb{P}(U_n = m) = C_3^m \dfrac{2^{2m}}{3^{3m}}$

8. Sachant que l'on a m lancers pour lesquels F_k vaut 3 ou 6. Il ne reste plus que 4 faces possibles pour le reste des lancers. Sous cette condition $V_n \twoheadrightarrow \mathcal{B}in(\frac{1}{2}; 2m)$. D'où $\mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m) = C_{2m}^m(\frac{1}{2})^m(\frac{1}{2})^{2m-m}$ $\square$.

9.On a :

$$\begin{aligned} p_{3m} &= p_n \\ &= \mathbb{P}(S_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(U_n = V_n = W_n) \\ &= \mathbb{P}(U_n = V_n = m) \\ &= \mathbb{P}(\{U_n = m\} \cap \{V_n = m\}) \\ &= \mathbb{P}(U_n = m) \times \mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m) \end{aligned}$$

On utilise les résultats des deux questions précédentes pour obtenir le résultat.

Partie D

10. On a : $(3m+2)(3m+1) = 9m(m+1)+2$.

Donc $\dfrac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2} \geq \dfrac{9m(m+1)}{9(m+1)^2} = \dfrac{m}{m+1}$ $\square$

Par la suite $\dfrac{p_{3m}}{p_3} \geq \prod_{k=1}^{m-1} \dfrac{m}{m+1}$. D'où $p_{3m} \geq \dfrac{2}{9m}$.

11.(a) Soit $k \in \{1, ..., 6\}$. Si k est multiple de 3(de la forme $k = 3l$) alors $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p_{3l} = \mathbb{E}[Y_k] = ...$

Sinon $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 0 = \mathbb{E}[Y_k]$. car l'évènement "$S_n = 0$" est impossible ! !

(b) La variable X_n représente le nombre d'expériences pour lesquelles ont a autant de lancers pour chaque valeurs de Z.

L'ensemble des valeurs de X_n est $\{1, ..., Card\ \{k \in \mathbb{N} | 3k \leq n\}\}$

12. Trivial ! ! L'espérance d'une somme c'est la somme des espérances.(Linéarité)

13. On a $\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_n] + p_{n+1}$. Comme $p_{n+1} \geq 0$ il vient que $\mathbb{E}[X_{n+1}] \geq \mathbb{E}[X_n]$. D'où $(\mathbb{E}[X_n])_n$ est croissante.

14. On écrit simplement $\mathbb{E}[X_{6m}] - \mathbb{E}[X_{3m}] = p_{3(m+1)+...+p_{6m}} \geq \dfrac{2}{9(m+1)} + ... + \dfrac{2}{9(2m)}$. Et le résultat suit.

15. Evident ! ! Il suffit de remarquer que :

$$\forall k \in \{m+1, ..., 2m\} \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2m}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Puis,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} \\
&\geq \frac{2m-(m+1)+1}{2m} \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La suite est laissée au lecteur.

16. On procède par récurrence sur m. L'initialisation est laissée au lecteur. L'hérédité se sert de l'inégalité précédente.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{m}{9} = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = +\infty$

Partie E

17. On a : $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$. Comme $Y_{n+1} \geq 0$ le résultat suit.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $q_n \leq 1$, car q_n est une probabilité. Donc $(q_n)_n$ est majorée par 1.

En outre,

$$q_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} > 0) = \mathbb{P}(\big\{\exists k \in \{1, ..., n+1\}, S_k = 0\big\}) \geq \mathbb{P}(\big\{\exists k \in \{1, ..., n\}, S_k = 0\big\}) = q_n$$

.

D'où $(q_n)_n$ est majorée.

19. La suite $(q_n)_n$ est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers q qui vérifie. $\forall n \in \mathbb{N} q_n \leq q \leq 1$.

20. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= \sum_{r=0}^{n} r\left(\mathbb{P}(X_n \geq r) - \mathbb{P}(X_n \geq r+1)\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} r\mathbb{P}(X_n \geq r) - \sum_{r=0}^{n} r\mathbb{P}(X_n \geq r+1) \\
&= \sum_{r=0}^{n} r\mathbb{P}(X_n \geq r) - \sum_{r=1}^{n+1} (r-1)\mathbb{P}(X_n \geq r) \quad (Changement\ de\ variable) \\
&= \sum_{r=0}^{n} r\mathbb{P}(X_n \geq r) - \sum_{r=1}^{n} (r-1)\mathbb{P}(X_n \geq r) \quad (car\ X_n < n+1) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(X_n \geq r)
\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

21. Trivial !

22. Supposons que $q \neq 1$. On a nécessairement $0 \leq q < 1$ en vertu de l'encadrement de la question 19. Ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{q}{1-q} < +\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] \neq +\infty$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] \neq +\infty$. Ce qui est absurde ! D'où $q = 1$.

Correction du sujet de 2019

Exercice 1

1. Calcul.

On a $p_1 = 0,1$ et $p_2 = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6$

$$\boxed{p_1 = 0,1 \text{ et } p_2 = 0,62}$$

2. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(\bar{G}_1 \backslash G_2)$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{G}_1 \backslash G_2) &= \frac{\mathbb{P}(\bar{G}_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bar{G}_1 \cap G_2)}{p_2} \\
&= \frac{\mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2 \backslash G_1)}{p_2} \\
&= \frac{p_1 \times \mathbb{P}(G_2 \backslash \bar{G}_1)}{p_2}
\end{aligned}$$

On trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(\bar{G}_1 \backslash G_2) = 0,13}$$

3. Soit A :"Le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières."

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{A}) &= \mathbb{P}(\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \cap \bar{G}_3) \\
&= 0,9 \times\ 0,4 \times 0,4 \\
&= 0,14
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0,86}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

4. Démonstration.

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathbb{P}(G_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathbb{P}(G_{n+1} \cap \bar{G}_n) \quad (probabilit\dot{-}s\ totales) \\
&= \mathbb{P}(G_n) \times \mathbb{P}(G_{n+1} \backslash G_n) + \mathbb{P}(\bar{G}_n) \times \mathbb{P}(G_{n+1} \backslash \bar{G}_n) \\
&= p_n \times \mathbb{P}(G_{n+1} \backslash G_n) + (1 - p_n) \times \mathbb{P}(G_{n+1} \backslash \bar{G}_n) \\
&= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

5. Détermination de la valeur de α.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= p_{n+1} + \alpha \\
&= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} + \alpha \\
&= \frac{1}{5} (p_n + \alpha) + \frac{4}{5} \alpha + \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{5} v_n + \frac{4}{5} \alpha + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Dès lors, $(v_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ si $\frac{4}{5}\alpha + \frac{3}{5} = 0$.

On trouve ainsi,

$$\boxed{\alpha = -\frac{3}{4}}$$

Puis, $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times v_1$. Donc $p_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{5^{n-1}} \left(p_1 - \frac{3}{4}\right)$.

Enfin,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = -\frac{13}{4 \times 5^n} + \frac{3}{4} \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}}$$

6. Il s'agit de trouver l'entier naturel minimal n tel que : $\left| p_n - \frac{3}{4} \right| \leq 10^{-7}$. C'est-à-dire $\frac{13}{4 \times 5^n} \leq 10^{-7}$... Ou encore $n \geq \dfrac{\ln(10^7 \times \frac{13}{4})}{\ln(5)}$. D'où $\boxed{n = 11}$

Exercice 2

1. Comme R est un élément de $[O, \vec{u})$ alors son affixe est un réel positif de plus, son affixe et celui de z sont de même module par construction. Donc $R[|z|]$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2. Trivial ! !

3. (a) Soit z_0 un réel négatif. Après calcul il vient que $\forall n \geq 1 \quad |z_n| = 0$ Donc $(|z_n|)_n$ est stationnaire à partir de son deuxième rang. Elle converge donc vers $|z_1| = 0$

(b). Soit z_0 un réel positif. Dans ce cas, on démontre (par récurrence) par exemple que $(z_n)_n$ est une suite de réels positifs et décroissante. Il s'agit donc de la suite $(|z_n|)_n$ qui converge vers zéro.

4. Cette démonstration peut se faire par réccurence sur n. Et On déduit alors du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$

Exercice 3

1. On trouve $\boxed{u_1 = 0,37 \quad u_2 = 0,27 \quad u_3 = 0,22}$

(a). Une étude rapide de la fonction donne une dérivée $g'(t) = \dfrac{t(t-1)}{2(t+1)}$ négative sur $[0,1]$. Ainsi, $\forall t \in [0,1] g(t) \leq g(0)$. ie $\ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4} \leq 0$ et le résultat suit.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n} \in [0,1]$ et on déduit de (a) que : $\ln(1+\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n^2}$. Puis,$n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \leq 1 - \dfrac{1}{4n}$. On passe à l'exponentiel et le résultat suit.

2.(a) Soit $n > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n}} \\ &= \frac{(n+1)^n e^{-1}}{n^n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité obtenue précédemment et le résultat suit.

(b). Déduction.

D'après ce qui précède on a : $\forall n \geq 1 \quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\dfrac{1}{4n}}$.

Donc,

$$\forall n \geq 2 \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\dfrac{1}{4k}}$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{u_n}{u_1} \leq e^{-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{4(n-1)}}$$

Finalement,

$$\forall n \geq 2 \quad u_n \leq u_1 \times e^{-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

CQFD ! !

4.(a) Démonstration.

Soit n un entier naturel non nul.

Quel que soit l'entier naturel non nul k inférieur à n, l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $y = 0; x = k; x = k+1$ et la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est inférieure à l'aire du rectangle délimité par les droites $y = 0; x = k; x = k+1;$ *et* $x = \frac{1}{k}$.

On écrit alors :

$$\forall k \in \{1; ...; n-1\} \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \times (k+1-k) = \frac{1}{k}$$

D'où

$$\int_0^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

(b). Trivial ! ! Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Problème

Partie A

1. Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 1}$$

2. Grâce aux limites calculées précédemment, on conclut que f est prolongeable par continuité en zéro.

3. Après calcul, on aboutit à :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(|x+1|)}{x^2} \quad et\ f''(x) = \frac{-\frac{x^2}{(1+x)^2} - \frac{2x}{1+x} + 2\ln(|1+x|)}{x^3}$$

On calcule ensuite : $\lim_{x\to0} f'(x) = \frac{1}{2}$ *et* $\lim_{x\to0} f''(x)$ n'existe pas. (L'usage des développements limités est conseillé)

Donc seule f' est prolongeable par continuité en zéro.

4. On réécrit :

$$f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(|x+1|)}{x^2(x+1)} \quad et\ f''(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 2(x+1)^2\ln(|x+1|)}{x^3(x+1)^2}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Une étude rapide de $x \longmapsto x-(x+1)\ln|x+1|$ et $x \longmapsto -3x^2-2x+2(x+1)^2\ln|x+1|$ permet de trouver :

$$\boxed{-4,6<\alpha<-4,5 \qquad -7,3<\beta<-7,2}$$

5. Courbe C_f de f.

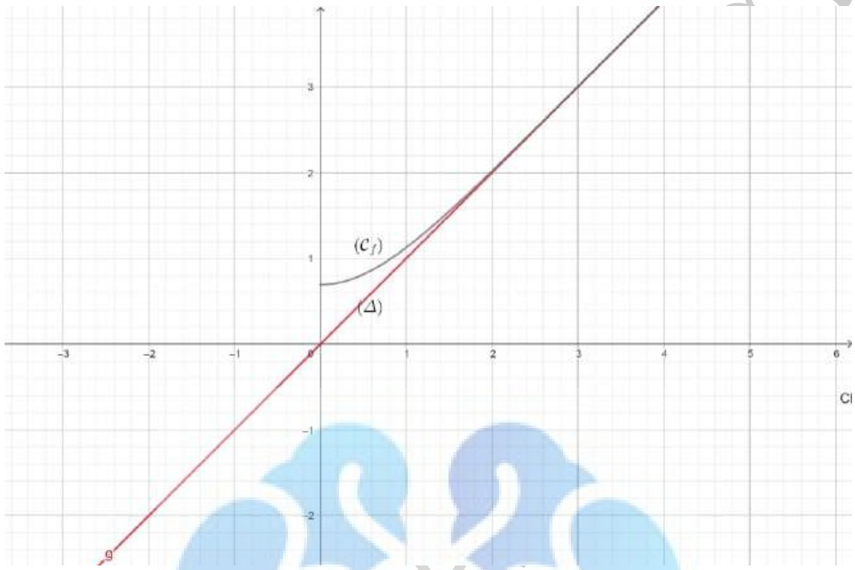


FIGURE 3.5 –

Partie B

6. Les fonctions f et g ont même domaine de définition par définition et pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$. Donc, g' est du signe de f'. Ainsi, g est décroissante sur $]-\infty;\alpha]\cup]-1;+\infty[$ et strictement croissante sur $]\alpha;-1[$.

7. Démonstration.

Soit n un entier naturel non nul. Alors $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \in]-1;+\infty[$ et comme g est décroissante sur cet intervalle, on déduit que : $g(\frac{1}{n}) < g(\frac{1}{n+1})$ et $g(-\frac{1}{n+1}) < g(-\frac{1}{n})$. C'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$ et $v_{n+1} < v_n$. De plus, lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$ tendent vers zéro. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \exp(f(x))$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Il vient que(composition de limites) $\lim\limits_{x\to 0} \exp(f(x)) = e$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

On a montré que $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. D'où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes de limite commune e.

8. Déduction.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. D'après la question précédente, on a : $u_n < e < v_n$. Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ et le résultat suit.

9. Cette double inégalité n'est pas très efficace pour une détermination rapide et précise de e.

En effet, On a $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ car $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3$.

Ainsi, pour obtenir une approximation de e à 10^{-2} près par exemple, il faudrait d'après cette double inégalité calculer u_{100}.

Partie C

10.a

10.b On peut remarquer dans le repère précédent que dans l'intervalle $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ C_f est au dessus du graphe de la droite d'équation $y = 1$ et en dessous de celui de la droite d'équation $y = 1 - x$. Le résultat suit.

11. Encadrement de $\ln(A_n)$.

On réécrit :$\ln(A_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n^2})$. Puis, on utilise la question précédente pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \leq \ln(A_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}\right)$$

On utilise ensuite le théorème de gendarmes pour déduire que $\lim_{n\to+\infty} \ln(A_n) = \frac{1}{2}$. D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \sqrt{e}}$

12.a La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est intégrable sur $[0,1]$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3}$$

12.b

On Procède comme précédemment et on trouve $\boxed{\lim_{n\to+\infty} B_n = e^{\frac{2}{3}}}$.

Correction du sujet de 2018

Exercice 1

Dans toute la suite on considère les évènements :

G_i : "Le i-ème billet acheté est gagnant" pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Partie A :

1. Soit A : "Bodo achète au moins un billet gagnant."

   On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(G_1 \cup G_2)\\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2})\end{aligned}$$

On trouve(en s'aidant d'un arbre de probabilités par exemple) : $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{50}{100} * \frac{49}{99}$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{149}{198} = 0,75}$$

2. Soit B : "Bodo achète au moins un billet gagnant sur les trois jours."

   On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(\bar{A})^3\\ &= 1 - \frac{49}{198}^{3}\end{aligned}$$

   D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0,98}$$

3. Ici, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(G_1 \cup ... \cup G_6)$.

   $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{C_{50}^6}{C_{100}^6} = 1 - \frac{A_{50}^6}{A_{100}^6}$

   D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0,99}$$

Partie B :

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit A : "Bodo achète au moins un billet gagnant."

   On a :

$$\begin{aligned}p_n = \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(G_1 \cup G_2)\\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2})\\ &= 1 - \frac{A_n^2}{A_{2n}^2}\end{aligned}$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

D'ou :

$$p_n = \frac{3n-1}{2(2n-1)}$$

a. Variations de $(p_n)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} - p_n = -\dfrac{1}{2(4n^2-1)}$.

Comme $p_{n+1} - p_n < 0$, la suite $(p_n)_n$ est strictement décroissante.

b. Calcul de limite

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2(2n-1)} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 2

1. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\begin{aligned} Arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \quad &\Leftrightarrow \quad Arg(z') - Arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad Arg(z') + Arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad Arg(z'\bar{z}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(z'\bar{z}) = 0. \end{aligned}$$

2. Les points O, M et M' sont alignés si et seulement si :

$$\begin{aligned} Arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0\,[\pi] \quad &\Leftrightarrow \quad Arg(z'\bar{z}) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{Im}(z'\bar{z}) = 0. \end{aligned}$$

3. Posons $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$. On a : $(z^2-1).\bar{z} = x^3 + xy^2 - x + i(y^3 + x^2y + y)$. D'après la question 1, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathfrak{Re}((z^2-1)\bar{z}) = 0$. C'est-à-dire $x^3 + xy^2 - x = 0$. Autrement dit $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$.

   Ainsi, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux est la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle unité.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $P\left[\dfrac{1}{z^2} - 1\right]$.

a. Montrons que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\overline{(z^2-1)} = -\overline{z^2}\left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)} &= \left(\frac{1}{z^2}-1\right)(\overline{z^2}-1)\\ &= -\overline{z^2}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\frac{1}{\overline{z^2}}-1\right)\\ &= -\overline{z^2}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\\ &= -\overline{z^2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right| \quad CQFD.\end{aligned}$$

b. Posons $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Remarquons qu'en vertu de la question précédente l'on a :$\mathfrak{Im}(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}) = \mathfrak{Im}(-\overline{z^2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|)$. D'après la question 2, les points O, N, et P sont alignés si et seulement si $\mathfrak{Im}(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}) = 0$. Autrement dit, $\mathfrak{Im}(-\overline{z^2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|) = 0$. C'est-à-dire $\mathfrak{Im}(\overline{z^2}) = 0$ car... ie $xy = 0$.

D'où, l'ensemble des points M cherché est la réunion des axes du repère privée de l'origine.

Exercice 3

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Soit C :"Les boules tirées sont de même couleur". On a : $\mathbb{P}(C) = \left(\frac{5}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n$

   On trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

   Soit D : "Obtenir exactement une boule blanche" On a : $\mathbb{P}(D) = C_n^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ On trouve :

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{n}{2^n}}$$

2. soit E : "toutes les boules tirées sont de couleur noire"

   On a : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(D)$. En outre, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{C})$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(D)$. Donc, $\mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2^n}$.

   D'où : $\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{n}{2^n}; \quad \mathbb{P}(A) = 1-\frac{1}{2^{n-1}} \ et \quad \mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}}$

3. Démonstration.

MENSA Academy

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

D'après la question qui précède,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) &\Leftrightarrow \frac{n}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\left(\frac{n+1}{2^n}\right)\\
&\Leftrightarrow \ldots\\
&\Leftrightarrow 2^{n-1}=n+1
\end{aligned}$$

4. Considérons la suite $(u_n)_n$

a. On trouve $\boxed{u_2=-1 \quad u_3=0 \quad et\ u_4=3}$.

b. Démonstration.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On a $u_{n+1}-u_n=2^{n-1}+3>0$. Donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.

5. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$. C'est-à-dire $2^{n-1}=n+1$ (question 3). Ce qui équivaut à $2^{n-1}-(n+1)=0$. Soit $u_n=0$. Or d'après la question qui précède, l'unique valeur n pour laquelle u_n vaut zéro est 3 car $(u_n)_n$ est strictement monotone.

Ainsi, A et B sont indépendants si et seulement si $n=3$.

Problème

Partie A

1) .a On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Par somme de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+e^{-x})=+\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, par composition de limites, il vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+e^{-x})=+\infty$.

b. Démonstration.

Pour tout réel strictement positif x on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(e^x+e^{-x})\\
&= \ln(e^x(1+e^{-2x}))\\
&= \ln(e^x)+\ln(1+e^{-2x})\\
&= x+\ln(1+e^{-2x}) \quad \div CQFD\div
\end{aligned}$$

c. Déduction. Le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x}=0$ permet de conclure.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

d. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ $1 + e^{-2x} > 1$. Donc $\ln(1 + e^{-2x}) > 0$. D'où $f(x) - x > 0$. Par conséquent (C_f) est au dessus de (Δ).

1. Sens de variation de f.

   La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad et\ f'(x) \geq 0$$

f est donc croissante sur son domaine.

Tableau de variation et graphe de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\ln(2)$	$+\infty$

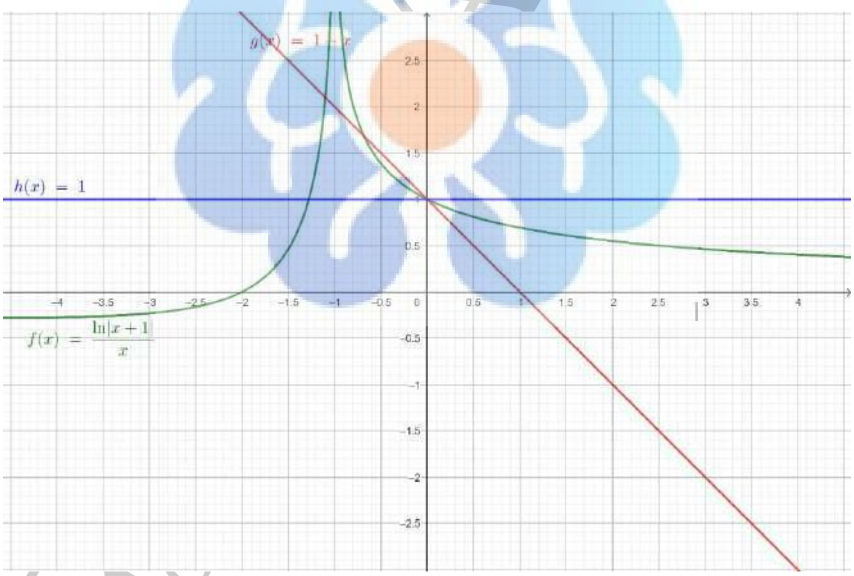


FIGURE 3.6 –

Partie B

1. Soit $x > 0$, $F(x)$ est l'aire exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par (C_f), (Δ),l'axe de ordonnées et la droite passant par $M(x, 0)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

2. F est dérivable sur son domaine d'étude car $t \longmapsto \ln(1+e^{-2t})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est :

$$F'(x) = \ln(1+e^{-2x}) \quad puis\ F'(x) > 0$$

Donc F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3.a Soit $a > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, 1+a]$.
Donc, $\forall t \in [1, 1+a] \quad \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ CQFD.

b. En appliquant l'inégalité des accroissements finis a $t \longmapsto \ln(t)$ dont la dérivée est $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1, 1+a]$, il vient que :
$\forall t \in [1, 1+a], \quad (1+a-1) \times \frac{1}{1+a} \leq \ln(1+a) - \ln(1) \leq (1+a-1) \times 1.$

D'où :

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

4. Soit $x \geq 0$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent en prenant $a = e^{-2t}$. On intègre alors de zéro à x pour avoir :

$$-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1-e^{-2x})$$

5. Trivial !

6.a Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.

On considère pour cela la fonction $h : t \longmapsto \ln(1+e^{-2t})$ qui est décroissante et positive sur l'intervalle $[n, n+1]$ et on déduit :
$h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$ On intègre alors et le résultat suit.

b. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

7.a $S_n = F(n+1)$

b. On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} F(n+1) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = l$ D'où $(S_n)_n$ converge !

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Chapitre 4

MENSA QUIZ

Ce chapitre vous présente quelques petits exercices, des questions assez simples pour vous exercer. Il vous permettra ainsi, de maitriser quelques fondamentaux du cours, des chapitres pertinents pour le concours.

Analyse combinatoire

1. Un questionnaire comporte dix questions, auxquelles on répond par vrai ou faux. Deux feuilles de réponses au questionnaire sont considérées comme différentes si elle diffèrent dans l'une au moins des réponses aux questions. Combien peut-il y avoir de feuilles de réponses différentes ?
2. Soit abc un entier de trois chiffres en base dix, avec $a > c$. On note def l'entier de trois chiffres obtenu par la soustraction $abc - cba$ (même si $d = 0$). Que peut-on dire de $def + fed$?

   Par exemple, pour $abc = 231$, on a : $def = 099$, et $def + fed = 099 + 990 = 1089$).
3. On prend 8 entiers x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, vérifiant $2 \leqslant x_i \leqslant 360$. Que peut-on affirmer ?
4. COEFFICIENTS BINOMIAUX. Quelles sont les formules de récurrence correctes ?
   (a) Pour $n > 0$, et tout entier p, $1 \leqslant p \leqslant n$, $p\binom{n}{p}x^{n-p} = \dfrac{d}{dx}\left[\binom{n}{p-1}x^{n-p+1}\right]$.
   (b) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1; n]$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
   (c) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1; n]$, $\binom{n}{p} = \displaystyle\sum_{i=p-1}^{n-1}\binom{i}{p-1}$.
   (d) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1; n]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Tel. (+237) 655 33 30 73 / 671 54 41 22
www.mensa-academy.com
Mensa ACADEMY

(e) Pour tout entier $n > 0$, et tout entier $p \in [0; n]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-1}$.

5. LES RÈGLES DU POKER. Le poker est un jeu de cartes où chaque joueur reçoit 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes ; ces 5 cartes forment ce qu'on appelle une main, dont la valeur est fonction des cartes qui la constituent. Cette valeur est évaluée en fonction inverse de la probabilité d'obtention de cette main. L'ordre est donc, par valeur croissante :
   (a) plus forte carte,
   (b) une paire (deux cartes de même valeur, et les trois autres de valeurs différentes),
   (c) deux paires,
   (d) brelan (trois cartes de même valeur, et deux autres cartes de valeurs différentes),
   (e) suite (=quinte=straight, cinq cartes dont les valeurs se suivent, mais qui ne sont pas toutes de la même couleur, l'as pouvant être placé avant le 2 ou après le roi).
   (f) flush (couleur, i.e cinq cartes de la même couleur),
   (g) full (un brelan + une paire),
   (h) carré (quatre cartes d'un même niveau),
   (i) straight flush (=quinte flush, cinq cartes de la même couleur, dont les valeurs se suivent),
   (j) royal flush.

   Pourquoi joue-t-on avec 5 cartes, plutôt qu'avec 4, 6, 7 ou 8 ? Les assertions suivantes proposent des explications. Quelles sont-celles qui sont exactes ?

   (a) Avec seulement 4 cartes, les probabilités d'avoir 2 paires, une couleur ou une suite sont trop proches (différence $<2.10^{-4}$),
   (b) Avec 4 cartes, la probabilité d'avoir un full est trop proche de celle d'avoir un carré,
   (c) Avec 6 cartes, la probabilité d'avoir un brelan est supérieure à celle d'avoir 2 paires,
   (d) Avec six cartes, tout comme 7 cartes, la probabilité d'avoir une paire est supérieure à celle de ne rien avoir,
   (e) Avec 7 cartes, la probabilité d'avoir une ou deux paires est supérieure à celle de ne rien avoir.

6. Combien le mot ANAGRAMME en a-t-il ?

7. COMPTAGE DE PAIRES, DE COUPLES ET JEU DE DOMINOS. Deux entiers > 0, n et $p \leqslant n/2$ étant donnés, on considère les nombres $f(n, p)$, $g(n, p)$ et $h(n, p)$ définis par :

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

$f(n,p)$: nombre de façons de prendre p paires deux à deux disjointes, formées chacune de deux objets consécutifs pris dans une liste ordonnée de n objets $x_1, x_2, ..., x_n$ placés le long d'un cercle (x_1 et x_n sont alors consécutifs). Que peut-on dire des nombres $f(n,p)$, $g(n,p)$ et $h(n,p)$?

8. En combien de morceaux n coups de couteaux peuvent-ils couper un gâteau ? (Les coups de couteau sont plans, et l'on s'intéresse au cas $n \geqslant 3$).
9. Un triangle dont les sommets sont numérotés 1,2 et 3 ; autrement dit, on découpe ce triangle en petits triangles en rajoutant des sommets que l'on relie à tous les sommets voisins. On numérote les sommets selon la règle suivante :
   — Un sommet placé sur le coté $[i,j]$ du grand triangle est numéroté i ou j ($i,j \in \{1,2,3\}$).
   — Un sommet placé à l'intérieur du grand triangle est numéroté 1,2 ou 3.
   Combien y a-t-il de petits triangles dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3 ?
10. UN PROBLÈME DE VOISINAGE : On considère un jeu de cartes ne comportant que 2 types de cartes, que nous noterons 1 et 2. On assimile ces cartes à des chiffres, et on modélise une disposition de ces cartes cote à cote sur une table par une séquence (suite finie) formée avec chiffres. Cela étant, si l'on dispose de P1, et de $(N-P)$2, on note $W(N;P,n)$ le nombre de suites que l'on peut former avec ces P et $N-P$ objets de telle sorte qu'il y ait n 2 voisins d'un 1. Par exemple, si $N=5$, si $P=2$, l'arrangement 11222 correspond à $n=1$, tandis que 12221 correspond à $n=2$ (les "voisins" sont soulignés). On note également $W(N;P,n;i)$ le nombre des suites précédentes commençant par un i ($i=1$ ou 2). Quelles sont les formules de récurrence vérifiées par les $W(N;P,n)$ et $W(N;P,n;i)$?
    (a) $W(N;P,n) = W(N;P,n-1;1) + W(N;P,n-1;2)$;
    (b) $W(N;P,n) = W(N;P,n;1) + W(N;P,n;2)$;
    (c) $W(N;P,n,1) = W(N-1;P-1,n;1) + W(N-2;P-1,n;2)$;
    (d) $W(N;P,n,2) = W(N-1;P,n;2) + W(N-1;P,n-1;1)$;
    (e) $W(N;P,n,2) = W(N-1;P,n-2;1) + W(N-2;P,n-1;2)$.

Intégration sur des intervalles compacts

1. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$. Que représente $\displaystyle\int_a^b f$?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

2. EXEMPLES DE FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur leur intervalle de définition (celui qui est indiqué dans la définition de la fonction) ?

   (a) $f_1 :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \ln(x)$.

   (b) $f_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \ln(x)$ si $x > 0$ et $x \mapsto 0$ si $x = 0$.

   (c) $f_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ si $x > 0$ et $x \mapsto 0$ si $x = 0$.

   (d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \mathrm{E}(x)$ (la fonction partie entière).

   (e) $f_5 : [0,100] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \mathrm{E}(x)$ (la fonction partie entière).

3. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX. Quelles sont les affirmations exactes ?

   (a) La somme de deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

   (b) Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

   (c) L'inverse d'une fonction continue par morceaux $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

   (d) Si f est une fonction continue par morceaux $[a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et si g est une fonction continue par morceaux $f([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ alors, $g \circ f$ est une fonction continue par morceaux $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

   (e) Toute fonction monotone sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

4. CALCULS DE PRIMITIVES. Les affirmations suivantes concernent des fonctions dont les primitives sont calculables par diverses méthodes, dont éventuellement l'intégration par parties et le changement de variable. Quelles sont les affirmations exactes ?

   (a) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin 2x}$ est la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x - \cos x$.

   (b) Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2}$ est : $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \dfrac{\arctan x}{x^2} \end{cases}$.

   (c) Une primitive sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}$ est : $\begin{cases}]\mathrm{e}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right| \end{cases}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3 e^{2x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^4 e^{2x}$.

(e) Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est : $x \mapsto \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f$. La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de plus ?

6. Soit f une fonction strictement croissante et continument dérivable sur l'intervalle compact (segment) $[a, b]$. Quelles sont les formules correctes ?
(i) $\displaystyle\int_a^b f = f'(b) - f'(a)$, (ii) $\displaystyle\int_a^b f = bf(b) - af(a) - \int_a^b (x - xf'(x))$
(iii) $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = \frac{1}{\int_a^b f}$, (iv) $\displaystyle\int_a^b = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$, (iv) $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{f} = \int_a^b f$.

7. Soient k et p deux entiers, $k \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$. On stocke dans un ordinateur les réels de $[0; 1]$ écrits en base p, par blocs de k chiffres. A la suite d'une erreur de programmation,, les deux premiers blocs de stockage sont intervertis. Ainsi, un nombre x s'écrivant $x = 0, x_1 x_2 ... x_n$ en base p est envoyé sur le réel s'écrivant (toujours en base p).

   $0, x_{k+1} x_{k+2} ... x_{2k} x_1 x_2 ... x_k x_{2k+1} x_{2k+2} ...$

   On désigne par f la fonction qui, à x associe ce nouveau réel. Quelles sont les propriétés de f ?

(a) f est continue sur $[0; 1]$.

(b) f est monotone par morceaux sur $[0; 1]$.

(c) L'intégrale de f sur $[0; 1]$ existe, et $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{k^p}$.

(d) L'intégrale de f sur $[0; 1]$ existe, et $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Suites numériques

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et $\ell \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

(a) Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

(b) Si $(|u_n|)$ converge vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ ou $-\ell$.

(c) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

(d) Si (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

2. Soit (u_n) une suite réelle. Les énoncés suivants sont-ils exacts ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

(a) Si (u_n) converge, alors elle est monotone.

(b) Si (u_n) diverge, alors elle est monotone.

(c) Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée.

(d) Si (u_n) est croissante majorée, alors elle converge.

(e) Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers moins l'infini.

3. MAIS OU EST LA SUITE ARITHMÉTIQUE ? Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant à la relation : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2}{2}}$. Que peut-on dire d'une telle suite ?

4. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

   et par pour n entier naturel, $u_n = u_{n+1} - u_n$. Que peut-on dire de ces deux suites ?

5. Quelles sont les propriétés de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$?

   Attention : $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} = \binom{n}{k}^{-1} \neq \binom{k}{n}$.

6. Soient k un entier strictement positif et a un réel strictement supérieur à 1. Quel peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{n^k}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

7. On considère la suite (u_n) de points de $\mathbf{Q}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{k!}$. Quelles sont les propriétés de cette suite convergente ?

8. UNE SUITE COMPLEXE. On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right)$. Que peut-on affirmer sur cette suite ?

9. RÉCURRENCE NON LINÉAIRE. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$. Quelles sont les propriétés de cette fonction ?

   (a) La fonction f est croissante sur $[0,1]$.

   (b) L'ensemble des points fixes de f est $\{0,1\}$.

   (c) La suite (u_n) converge vers 0 si $u_0 \neq 1$.

   (d) La suite (u_n) converge vers 1 si $u_0 \neq 0$.

   (e) La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$ si $u_0 \notin \{0,1\}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Fonctions usuelles

1. Si $\log_x(16) = \frac{2}{3}$, que vaut x ?
2. LIMITES ET COMPOSITION DES FONCTIONS. Soient a et b deux réels, f une fonction définie au voisinage de a, g une fonction définie au voisinage de b. Si $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x) = b$ et, si $\lim\limits_{x\to b, x\neq b} g(x) = c$, que peut-on affirmer sur $g\circ f$? On pourra considérer les quatre fonctions : $x \longmapsto x$, $x \longmapsto 0$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x)) = c$.
   (b) $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x))$ existe seulement si g est continue en b.
   (c) $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x))$ existe seulement si f et g sont continues en a et en b.
   (d) Ou bien $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x)) = c$, ou bien $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x)) = g(b)$, ou bien $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x))$ n'existe pas, et les trois cas sont possibles.
   (e) Si $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x))$ existe, alors $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (g\circ f(x)) = g(b)$.
3. FONCTIONS CONVEXES. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Quelles sont les affirmations vraies ?
   (a) La fonction f est strictement convexe ou concave sur $[a, b]$ si et seulement si, l'intersection du graphe de f avec toute droite de $\mathbb{R}^2$ comporte exactement 0, 1 ou 2 points.
   (b) La fonction f est strictement convexe sur $[a, b]$ si et seulement si sa dérivée est strictement croissante.
   (c) La fonction f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tous x et y dans $[a, b]$, on a : $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.
   (d) La fonction f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout entier $p \geqslant 2$, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de points distincts de $[a, b]$, et toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels tels que : $1 < \lambda_i < 1$ et que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a : $f\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$.
   (e) La fonction f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si son hypographe $(= \{(x, y),\ x \in [a, b],\ y \leqslant f(x)\})$ est concave.
4. Quelles sont les propriétés de la fonction f définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$? (Domaine de définition, continuité, dérivabilité, sens de variation etc.)

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

5. On considère la fonction f pour x réelle : $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}}$. Quelles sont les affirmations exactes ?

   (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   (c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

   (d) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

   (e) La fonction $f + \arctan$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]-1, 1[$.

6. SOMMES ET PRODUITS TRIGONOMÉTRIQUES. Quelles sont les formules exactes pour tout entier n strictement positif, et tous réels x, y, z où elles sont définies ?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \cos^n\left(\frac{n\pi}{n}\right) = n.$

   (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n \mathrm{sh}\frac{x}{2^n}}$. Les fonctions ch et sh sont définies par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin(nx)}{2\sin(x)}.$

   (d) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\cos 2^k x}\right) = \frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan\frac{x}{2}}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}\sin(y+kz) = \frac{e^{(n+1)x}\sin(y+(n-1)z) - e^{nx}\sin(y+nz)}{e^{2x} - 2e^x\cos(z) + 1} + \frac{-e^x\sin(y-z) + \sin(y)}{e^{2x} - 2e^x\cos(z) + 1}.$

7. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

   (a) Si I est borné, alors f est bornée et atteint ses bornes sur I.

   (b) Si a et b sont deux éléments de I, et si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ alors, il existe c entre a et b tel que : $f(c) = y$.

   (c) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.

   (d) Si I est fermé, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

   (e) Si I est fermé, alors f atteint ses bornes sur I.

8. On considère une fonction f continue sur un intervalle I. Les propriétés ci-dessous sont-elles exactes ?

   (a) La fonction f est bijective de I sur $f(I)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(b) Si f est bijective, alors f est strictement monotone sur I.

(c) Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective.

(d) La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement si elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$.

(e) Si f^{-1} existe et si f est croissante, alors f^{-1} est décroissante.

9. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit a un point de I. On suppose que $f+g$ n'est pas continue en a. Que peut-on affirmer ?

 (a) Que ni f ni g ne sont continues en a.

 (b) Que f et g sont soit simultanément continues, soit simultanément discontinues en a.

 (c) Que f est discontinue en a ou que g est discontinue en a.

 (d) Que l'on a soit f continue et g discontinue en a, soit g continue et f est discontinue en a.

 (e) Que l'on a soit f continue et g discontinue en a, soit g continue et f discontinue en a.

10. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Qu'affirme le théorème des valeurs intermédiaires ?

 (a) Que si $a, b \in I$, $a < b$, $f([a, b])$ est un intervalle.

 (b) Que si $a, b, c \in I$, $a < b < c$, il existe $y \inf f([a, b])$ tel que $f(b) = y$.

 (c) Que si $a, b \in I$, $a < b$, si $c \in f[f(a); f(b)]$ alors il existe $y \in [a; b]$ tel que $f(y) = c$.

 (d) Que $f(I)$ est un intervalle.

 (e) Que si $a < c < b$ avec $a, b, c \in I$, et si $f(c) = 0$, alors $f(a)f(b) < 0$.

11. FONCTIONS PÉRIODIQUES. On s'intéresse ici aux propriétés collectives des fonctions périodiques. Les fonctions considérées dans cette question sont toutes définies sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

 (a) Si f et g sont deux fonctions périodiques, de périodes respectives λ et μ, $f+g$ est périodique, de période $\lambda\mu$.

 (b) L'ensemble des fonctions périodiques de période λ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

 (c) L'ensemble des fonctions périodiques de période λ est un sous-algèbre de l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) Si f et g sont deux fonctions périodiques, de périodes respectives λ et μ, $f \circ g$ est périodique, de période μ.

(e) Si f est une fonction périodique, de période λ, et si g est une fonction quelconque, $f \circ g$ est périodique, de période λ.

12. Soit f une fonction dérivable sur son ensemble de définition I. Les énoncés suivantes sont-ils vérifiés ?

(a) La fonction f est continue.

(b) Si f est paire, alors f' est paire.

(c) Si f' est impaire, alors f' est paire.

(d) Si f' est positive sur I, alors f est croissante.

(e) Si I est un intervalle, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I.

13. DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Quelles sont les affirmations correctes ?

(a) La fonction f est croissante sur $[a; b]$ seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a; b[$.

(b) La fonction f est croissante sur $[a; b]$ si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a; b[$.

(c) La fonction f est strictement croissante sur $[a; b]$ si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a; b[$.

(d) La fonction f est strictement croissante sur $[a; b]$ si et seulement si elle est strictement croissante sur $]a; b[$.

14. Soient $\in \mathbb{R}$, et f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 7x + a$. Quelles sont les affirmations exactes ?

(a) f est continue et dérivable en x si et seulement si $x \neq \sqrt[5]{7x - a}$.

(b) f s'annule au plus une fois dans $[-1; 1]$.

(c) f' s'annule au moins une fois dans $[-1; 1]$.

(d) Si $|a| > 6$, f ne s'annule pas dans $[-1; 1]$.

(e) Si $|a| \leqslant 6$, f s'annule exactement une fois dans $[-1; 1]$.

Développements limités (Formules de Taylor)

1. DÉVELOPPEMENTS LIMITES USUELS. Quels sont les développements limités corrects ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

(b) $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$.

(c) $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$.

(d) $\sqrt{x} = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2^2} + ... + \dfrac{x^n}{2^{n-1}} + \mathrm{o}(x^n)$.

(e) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + ... + (-1)^r \dfrac{x^{2r}}{2r} + \mathrm{o}(x^{2r})$.

2. FONCTIONS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS. Soit f une fonction $[-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Quelles sont les affirmations correctes ?

   (a) Si f admet un développement limité d'ordre 0 en 0, alors f est continue en 0.

   (b) Si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, alors f est dérivable en 0.

   (c) Si f admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0, alors f est n fois dérivable en 0.

   (d) Si f admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0, alors f est bornée sur $[-1;1]$.

   (e) Si f est définie sur $[-1;+\infty[$, et si $x \longmapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à droite d'ordre 2 en 0, alors (le graphe de) f possède une asymptote en $+\infty$.

3. OPÉRATIONS SUR LES DL. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont l'intérieur contient 0 (autrement dit, deux fonctions définies au voisinage de 0). Que peut-on dire des DL des fonctions que l'on peut construire à partir de f et de g ?

   (a) Si $f+g$ admet un DL d'ordre n en 0, alors f et g admettent aussi un DL d'ordre n en 0.

   (b) Si f et g admettent un DL d'ordre n en 0, $f \circ g$ admet aussi un DL d'ordre n en 0.

   (c) Si f admet un DL d'ordre $n \geqslant 1$ en 0, alors f' admet un DL d'ordre $n-1$ en 0.

   (d) Si f est continue, et f admet un DL d'ordre n en 0, alors toute primitive de f sur I admet un DL d'ordre $n+1$ en 0.

   (e) Si f admet un DL d'ordre $n \geqslant 1$ en 0, et si g admet un DL d'ordre $p \geqslant 1$ en 0, alors $f \times g$ admet un DL d'ordre $n+p$ en 0, obtenu en effectuant le produit des DL de f et g.

4. EXEMPLES DE DL PAR CALCUL DIRECT. Quels DL en 0 sont exactes ?

   (a) $\tan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{45} + \mathrm{o}(x^7)$.

   (b) $\dfrac{1}{1-2x\cos\alpha + x^2} = 1 + (2\cos\alpha)x + (2\cos\alpha + 1) + \mathrm{o}(x^2)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(c) $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4)$.

(d) $\ln^3\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^6}{8} - \dfrac{x^8}{16} + \mathrm{o}(x^8)$.

(e) $\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{40} + \mathrm{o}(x^4)$.

5. ASYMPTOTES. Les graphes des fonctions qui suivent ont-ils bien les asymptotes indiquées ?

(a) $f_1 : x \longmapsto x\left(1 + \dfrac{1}{3}\sin x\right)$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{3}$.

(b) $f_2 : x \longmapsto x\left(1 + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{1}{x}\right)$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{3}$.

(c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x + 4$.

(d) $f_4 : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = 1$.

(e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x$.

6. APPROXIMATION DE LA FONCTION COSINUS. Quelle est la meilleure approximation, au voisinage de 0, de la fonction cosinus par une fonction de la forme :

$$x \longmapsto \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}\ ?$$

(a) Il n'y a pas d'unicité de la réponse.

(b) $x \longmapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

(c) $x \longmapsto \dfrac{1 - \frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{24}}$.

(d) $x \longmapsto \dfrac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 - \frac{1}{12}x^2}$.

(e) $x \longmapsto \dfrac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2}$.

7. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION INCONNUE. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et si :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\exp(\tan^\alpha x) - \exp(x^\alpha)}{x^{\alpha+2}} = 1.$$

Que vaut α ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) Les hypothèses ne permettent pas de répondre à la question.

(b) π.

(c) 3

(d) 4

(e) 5

8. LIMITES. Quelles sont les limites correctes ?

(a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^x-(\sin x)^x-\frac{x^3}{6}}{x^4\ln x}=\dfrac{1}{12}$.

(b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^x-(\sin x)^{\sin x}}{x^3}=-\infty$.

(c) $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(d) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=1$.

(e) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right](x\ln x)^2}{x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}-1}=1$.

9. ENCADREMENT ET DL. Quels sont les encadrements exacts ?

(a) $\forall x\in]-1;0[,\quad \dfrac{1}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(b) $\forall x\in\mathbb{R},\quad \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}<\mathrm{e}^x$.

(c) $\forall x\in\mathbb{N}^*,\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(d) $\forall x\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k!}<\mathrm{e}^{-1}<\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

(e) $\dfrac{1}{3}<\mathrm{e}^{-1}<\dfrac{3}{8}$.

Calculs de probabilités

1. ESPACE PROBABILISÉ. Les espaces suivants peuvent-ils servir d'espace probabilisable pour modéliser le jeu de Loto ?

(a) L'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1,2,...,49\}$.

(b) L'ensemble $\{1,2,...,49\}^6$.

(c) L'ensemble des suites finies à valeurs dans l'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1,2,...,49\}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(d) L'ensemble des parties à 7 éléments de $\{1, 2, ..., 49\}$.

(e) L'ensemble des suites à valeurs dans l'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1, 2, ..., 49\}$.

2. TRIBUS. Soient Ω un ensemble, T une tribu de parties de Ω, et E une partie propre de Ω, c'est-à-dire une partie non vide de Ω différente de Ω. Les familles suivantes de parties de Ω sont-elles des tribus ?

(a) $E \cup T$, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme $E \cup A$, avec $A \in T$.

(b) $E \cap T$, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme $E \cap A$, avec $A \in T$.

(c) T^c, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme A^c, avec $A \in \Omega$.

(d) $\emptyset \cup (E \cap T) \cup (E^c \cup T)$, c'est-à-dire la famille de parties de Ω formée de la partie vide et des parties de Ω de la forme $E \cup A$ ou $E^c \cup A$, avec $A \in T$.

(e) La famille U des parties de Ω formée de la partie vide et des parties de Ω incluant soit E soit E^c.

3. PROBABILITÉS. Les formules suivantes définissent-elles des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$?

(a) Pour tout $n \geqslant e$, $P_1(n) = \dfrac{1}{n \ln n}$.

(b) $P_2(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \longmapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right)$ et pour tout $n \geqslant 1$,
$P_2(n) = \displaystyle\int_{2(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \left(x \longmapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right)$.

(c) Pour tout $n \geqslant 0$, $P_3(n) = p^\alpha \dbinom{-\alpha}{n} (-1)^n (1-p)^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in]0, 1[$ et $\dbinom{-\alpha}{n} = \dfrac{(-\alpha)(-\alpha-1)...(-\alpha-n+1)}{n!}$.

(d) Pour tout $k \leqslant N$, $P_4(k) = \dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ où N, m et n sont des entiers vérifiant $n \leqslant N$ et $m \leqslant N$.

(e) Pour tout $k \leqslant N$, $P_5(k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{(m)_k (N-m)_{n-k}}{(N)_n}$ où N, m et n sont des entiers vérifiant $n \leqslant N$ et $m \leqslant N$.

4. FORMULE DE POINCARÉ. Soient (Ω, A, P) un espace probabilisé, et $E_1, E_2, ..., E_5$ des évènements de cet espace probabilisé. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, on désigne par P_i l'ensemble des parties de $\{1, 2, ..., 5\}$ ayant i éléments, par χ_{E_i} la fonction caractéristique (indicatrice) de E_i, définie par : $\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E_i \\ 0 \text{ si } x \notin E_i \end{cases}$ et par a_i, le réel défini par :
$a_j = \displaystyle\sum_{J \in P_j} P\left(\bigcap_{i \in J} E_i \right)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

On a donc par exemple $a_1 = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_5)$

$a_2 = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + ... + P(E_4 \cap E_5)$

$a_5 = P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_5)$.

Quelles sont les probabilités correctes ?

(a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right) = a_1$.

(b) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \ \mathrm{card}\{i : \omega \in E_i\} = 2\right\}\right) = a_2 - 3a_3 + 6a_4 - 10a_5$.

(c) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \ \mathrm{card}\{i : \omega \in E_i\} = 3\right\}\right) = a_3 - 4a_4 + 10a_5$.

(d) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \ \mathrm{card}\{i : \omega \in E_i\} = 4\right\}\right) = a_4 + 5a_5$.

(e) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \ \mathrm{card}\{i : \omega \in E_i\} = 2\right\}\right) = a_5$.

5. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS. On lance n pièces de monnaie bien équilibrées (la probabilité d'obtenir face vaut 1/2), $n \geqslant 2$. Soit A l'évènement "Toutes les pièces tombent du même coté". Soit B l'évènement "Au plus une pièce donne face". Que peut-on dire de l'indépendance de A et de B ?

   (a) A et B sont toujours dépendants.

   (b) A et B sont toujours indépendants.

   (c) A et B sont sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

   (d) A et B sont indépendants si et seulement si $n \neq 3$.

   (e) A et B sont indépendants si et seulement si $n > 2$.

6. UNE QUESTION CONTROVERSÉE. Un jeu télévisé se déroule de la façon suivante : un candidat est face à trois portes fermées A, B et C. Derrière l'une des trois portes portes se trouve une voiture et derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit d'abord une porte, qui reste fermée. L'animateur du jeu ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre, et demande au candidat s'il désire changer de choix de porte. Le candidat peut alors soit garder la première porte, soit choisir l'autre porte encore fermée. On ouvre alors la porte qu'il a finalement choisie, et il part avec ce qu'il y a derrière.

   On admet qu'au départ, la voiture est placée de manière équiprobable derrière l'une des portes, et que lorsque le candidat a, lors de son premier choix, choisi la porte derrière laquelle se trouve la voiture, le présentateur ouvre avec la même probabilité l'une ou l'autre des deux autres portes.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Le problème est le suivant : quelle stratégie le candidat doit-il adopter pour optimiser ses chances de gagner la voiture ?

(a) Le candidat doit choisir la porte A, et la garder.

(b) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais il doit ensuite modifier son choix.

(c) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais il a ensuite intérêt à ne pas modifier son choix initial.

(d) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, et le fait qu'il change ou non son choix n'a pas d'effet sur ses chances de gagner.

(e) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais la stratégie optimale qu'il doit ensuite adopter est probabiliste : il doit changer son choix initial avec la probabilité 1/3, et le garder avec la probabilité 2/3.

7. TROIS ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS. Trois évènements indépendants A, B et C ont pour probabilités respectives a, b et c. Par ailleurs, on note x la probabilité pour que ni A ni B ni C ne se produise, y la probabilité pour qu'au moins l'un des trois évènements A, B et C ne se produise pas, et enfin z la probabilité pour que C ne se produise sans que ni A ni B ne le fasse. Quelles sont les relations entre a, b, c, x, y et z ?

(a) $x = 1 - abc$.

(b) $y = (1-a)(1-b)(1-c)$.

(c) $z = c(1-a)(1-b)$.

(d) $c = \dfrac{z}{x+z}$.

(e) $b = \dfrac{(1-y)(x+z)}{az}$.

8. CALCULS DE PROBABILITÉS. Soient A, B et C trois évènements d'un espace probabilisé tels que : $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,0,7$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(B \cap C) = 0,3$ et $P(A \cap C) = 0,2$.

Quelles sont les probabilités correctes ?

(a) $P(A^c \cap B \cap C) = 0,2$.

(b) $P((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) = 0,5$.

(c) $P((A \cap B) \mid A) = 0,5$.

(d) $P((A \cap B \cap C) \mid A \cup B \cup C) = 0,1$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(e) $P\left((A \cup B) \mid A\right) = \frac{7}{4}$.

9. PARI. François propose à Patricia le pari suivant : dans ce jeu de 52 cartes, choisis deux niveaux de cartes, par exemple Roi et Dame, puis bats le jeu. Je te te parie qu'en retournant le jeu, on trouvera cote à cote deux cartes appartenant aux deux niveaux que tu auras choisis, par exemple un Roi et une Dame l'une à la suite de l'autre. Que doit-on penser d'un tel pari ?

   (a) François a plus de chances que Patricia de gagner le pari.

   (b) Patricia a plus de chances que François de gagner le pari.

   (c) François et Patricia ont exactement la même probabilité de gagner leur pari.

   (d) On ne peut dire qui a le plus de chances de gagner, car cela dépend du choix que fera Patricia pour les deux niveaux.

   (e) François gagnera forcément, car quels que soient les deux niveaux que choisira Patricia, deux des cartes ayant ces niveaux seront cote à cote.

Variables aléatoires discrètes

1. DÉPENDANCE, INDÉPENDANCE. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $(X;Y)$ prenne les valeurs (-1 ;0), (0 ;-1), (0 ;1) et (1 ;0) avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?

   (a) $XY = 0$.

   (b) $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$.

   (c) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

   (d) $\mathrm{Cov}(X;Y) = 0$.

2. QUI VA COMMENCER ? Pour déterminer qui va jouer en premier, N personnes qui sont assises autour d'une table lancent à tour de rôle un dé. Ce dé, peut-être pipé, a la probabilité p de produire un 6 lorsqu'il est lancé. La personne qui commence le jeu est la première à obtenir un6. On note X la variable aléatoire indiquant la personne qui commence à jouer, sachant que l'on numérote les joueurs de 1 à N, dans l'ordre des lancers, en donnant le 1 à celle qui lance le dé en premier.

   Quelle est la loi de X ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

(a) X suit une loi uniforme, $P(X=k)=\dfrac{1}{N}$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

(b) X suit une loi arithmétique (les probabilités sont en progression arithmétique),

$$P(X=k)=\frac{N+1-k}{N(N+1)},\ 1 \leqslant k \leqslant N.$$

(c) X suit une loi binomiale de paramètres N et p, $P(X=k)=\dbinom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

(d) X suit une loi de Poisson circulaire, $P(X=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-p}p^{k+iN}}{(k+iN)!}$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

(e) X suit une loi géométrique tronquée,

$$P(X=k)=\frac{1}{\sum_{i=0}^{N}p(1-p)^{i-1}}p(1-p)^{k-1}=\frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^N},\ 1 \leqslant k \leqslant N.$$

3. CALCUL DE LOI. On tire deux boules dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). Soient A et B les numéros des boules tirées, $X=\min\{A;B\}$ et $Y=\max\{A;B\}$. Que peut-on dire des lois de X, de Y et de $(X;Y)$?

(a) La variable aléatoire $(X;Y)$ suit une loi uniforme sur $\{1;2;...;n\}^2$.

(b) X suit une loi uniforme sur $\{1;2;...;n-1\}$.

(c) Y suit une loi uniforme sur $\{2;3;...;n\}$.

(d) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $n=2$.

(e) Les variables aléatoires X et Y sont dépendantes quel que soit $n \geqslant 2$.

4. CALCULS DE LOIS. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ i.e $P(X=k)=p(1-p)^k$ si $k \in \mathbb{N}$ et 0 sinon. Quelles sont les lois et probabilités correctes ?

(a) La loi de $Z=\min(X;Y)$ est une loi géométrique de paramètre $1-p$.

(b) La variable aléatoire $T=\max(0;X-Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{p}{2-p}$.

(c) $P(Y \geqslant X)=\dfrac{1}{2-p}$.

(d) La variable aléatoire $U=X+Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p(1-p)$.

(e) Pour tout entier $k>0$, et pour tout entier naturel non nul $q \leqslant k$, on a :

$$P(Y=q|X+Y=k)=\frac{1}{k}.$$

5. LE RÉGISSEUR SURMENÉ. Un régisseur de théâtre surmené place des costumes dans les loges des acteurs. Il place au hasard les n costumes des n acteurs dans les loges ($n>2$),

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026
MENSA Academy

de telle sorte qu'il y ait exactement un costume par loge, et que chacune des $n!$ répartitions possibles ait la même probabilité. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'acteurs trouvant leur costume dans leur loge, et, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, X_k la variable aléatoire valant 1 si l'acteur k trouve son costume dans sa loge, 0 sinon. Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X et X_k ?

(a) Les variables aléatoires (X_k) sont indépendantes.

(b) $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(c) $X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

(d) $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$.

(e) $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = \dfrac{n-1}{n}$.

6. LE RÉGISSEUR SURMENÉ (BIS). Un régisseur de théâtre surmené place des costumes dans les loges des acteurs. Il place au hasard les n costumes des n acteurs dans les loges ($n > 2$), de telle sorte que chacune des n^n répartitions possibles ait la même probabilité. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'acteurs trouvant leur costume dans leur loge, et, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, X_k la variable aléatoire valant 1 si l'acteur k trouve son costume dans sa loge, 0 sinon. Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X et X_k ?

(a) Les variables aléatoires (X_k) sont indépendantes.

(b) $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(c) $X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

(d) $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$.

(e) $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = \dfrac{n-1}{n}$.

7. UNE BONNE ESPÉRANCE. L'expérience est considérée comme un succès lorsque toutes les épreuves ont été un succès. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'il a fallu répéter l'expérience pour arriver à une expérience qui soit un succès. Que peut-on dire ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) La probabilité pour qu'une expérience soit un succès est $\frac{n}{n}$.

(b) X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{k^n}$.

(c) $\mathrm{E}(X) = n^k$.

(d) $\mathrm{E}(X) = k^n$.

(e) La probabilité pour que X soit inférieure à $\mathrm{E}(X)$ ne dépend pas de k.

8. JEU DE RAQUETTES. Dans un jeu ressemblant au tennis, deux joueurs A et B échangent des balles. Gagne le jeu le premier qui gagne trois échanges (pour le tennis, il faut quatre), avec la réserve que si les deux joueurs gagnent chacun deux échanges, le jeu se poursuit jusqu'à ce que l'un des deux joueurs ait remporté deux échanges de plus que l'autre. On échange, et par $f(p)$ la probabilité pour qu'il gagne un jeu. Que peut-on dire de ce jeu ?

(a) La probabilité pour que A gagne le jeu après seulement trois échanges est p^3.

(b) La probabilité pour que A gagne le jeu après quatre échanges est $p^3(1-p)$.

(c) Pour tout $p \in [0; 1]$, on a : $f(p) = p$.

(d) La probabilité pour que A gagne le jeu est égale à la probabilité pour que A gagne un échange i.e $f(p) = p$ si et seulement si $p \in \{0; 1\}$.

(e) La règle du jeu favorise les joueurs faibles : si un joueur a une probabilité $p < \frac{1}{2}$ de gagner un échange, alors sa probabilité de gagner le jeu est supérieure à p.

9. EST-IL RENTABLE DE GROUPER LES TESTS SANGUINS ? C'est la question que se posent les responsables d'un laboratoire d'analyse devant pratiquer un test de dépistage d'un virus sur les N éléments d'une population. Les données sont les suivantes : chaque individu a la probabilité p d'être infecté, et si l'on note X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'individu k est infecté et 0 sinon, les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ sont mutuellement indépendantes. Si le laboratoire ne groupe pas les tests sanguins, il effectue N analyses. S'il groupe les échantillons sanguins par paquets de n, il y a deux cas possibles pour un paquet : ou bien tous les membres de ce paquets de n individus sont séro-négatifs, et alors le test groupé est négatif, ou bien au moins l'un des n membres de ce paquet est séro-positif, et alors le test de tout le groupe est positif ; dans ce cas, le laboratoire analyse individuellement les échantillons sanguins provenant des n individus, et il a alors du effectuer $n+1$ analyses. On suppose pour simplifier que n divise N. Quelles sont les propriétés de cette méthode de groupage sanguin ?

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

(a) La probabilité pour qu'un test groupé sur un échantillon de n personnes soit positif est $(1-p)^n$.

(b) L'espérance du nombre d'analyse à effectuer pour dépister le virus dans les n membres d'un paquet, dans le cas d'un dépistage groupé est : $(n+1)-n(1-p)^n$.

(c) Quelles que soient la probabilité p et la taille N du groupe, la méthode de groupage conduit toujours en moyenne à plus d'analyses que l'analyse systématique.

(d) L'espérance du nombre d'analyses à effectuer est une fonction décroissante du nombre d'individus dans les paquets, de sorte que plus les paquets sont grands, moins il y a d'analyses à effectuer.

(e) Il existe une taille optimale des paquets qui minimise l'espérance du nombre d'analyses à effectuer pour dépister le virus parmi les N personnes de la population.

10. LE MÉTÉOROLOGUE INCOMPÉTENT. Dans un pays pluvieux où la probabilité de pluie durant un jour donné est $p > \frac{1}{2}$, et où les évènements "il pleut durant le jour k" sont mutuellement indépendants, un météorologue totalement incompétent décide de prévoir le temps des n prochains jours au hasard, en prévoyant parmi eux r jours de pluie, de telle sorte que les $\binom{n}{r}$ répartitions possibles de ces r jours aient la même probabilité. On désigne par X_k la variable aléatoire valant 1 si la prévision pour le jour k est correcte et 0 sinon. On désigne également par X la variable aléatoire donnant le nombre de jours pour lesquels la prévision a été correcte. Quelles sont les propriétés de X et des X_k, et le météorologue peut-il optimiser sa prédiction ?

(a) La loi de X_k est donnée par $P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0) = p\frac{r}{n} + (1-p)\frac{n-r}{n}$.

(b) Les X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(c) Le météorologue peut maximiser $\mathrm{E}(X)$ en choisissant r de telle sorte que le rapport $\frac{r}{n}$ soit aussi proche que possible de p.

(d) Le météorologue peut maximiser $\mathrm{E}(X)$ en choisissant $r = n$.

(e) $\mathrm{E}(X)$ ne dépend pas de r.

11. QUESTION SUR DES VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES (CARACTÉRISTIQUES D'UNE LOI). Pour tout $\alpha \in]0;1[$, soit X_α une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_α est définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $F_\alpha(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha \tan x}$. Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X_α ?

(a) La médiane m_α de X_α vaut $\arctan\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

(b) La densité f_α de X_α est définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\cos^2 x} e^{-\alpha \tan x}$.

(c) L'espérance mathématique de X_α vaut $E(X_\alpha) = \int_0^{\pi/2} \left(x \longmapsto e^{-\alpha \tan x}\right)$.

(d) L'espérance mathématique $E(X_\alpha)$ de X_α satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 E(X_\alpha)}{d\alpha^2} = E(X_\alpha).$$

Exercices à faire

Exercice 1

Calculer $\int_0^1 \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{2^k}}\right) dx$.

Exercice 2

1. Montrer que les entiers $x - y$ et $x + y$ sont de même parité.
2. En déduire la résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $x^2 - y^2 = 1969$.

Exercice 3

Sachant que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4

Calculer $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\, dx$.

Exercice 5

Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

MENSA Academy

1. Calculer la limite de u_n quand n tend vers plus l'infini.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 8

Soit f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(0) = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x) \times \cos(x)$. Déterminer la fonction f.

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sqrt{\tan(t)}dt$.

Exercice 10

Calculer la limite de $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers plus l'infini.

Exercice 11

1. Montrer que pour $x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (x+1)\ln(1+x)$.

2. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^n \leqslant \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

Exercice 12

Résoudre : $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24} \\ y^{x+y} = x^6 \end{cases}$

Exercice 13

Dans un groupe de n personnes ($n > 1$), certaines personnes se disent bonjour en se serrant la main. Prouver qu'il existe au moins deux personnes ayant donné le même nombre de poignées de main.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice 14

Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 7 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -3$.
2. Écrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire les solutions du système.

Exercice 15

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,dt$.

Exercice 16

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$.

Exercice 17

Soit (q_n) une suite définie par $q_1 = x$ et pour $n \geqslant 1$, $q_{n+1} = 2q_n^2 - 1$ où $x > 1$. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{1}{q_k}\right)$ tend vers $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ quand n tend vers plus l'infini.

Exercice 18

On donne : $\begin{cases} n, m \in \mathbb{N} \\ f(n+m) = f(n) + f(m) + nm \\ f(4) = 10 \end{cases}$

Calculer $f(2023)$.

Exercice 19

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-\sqrt{\cos(\pi\sqrt{x})}}{x}}.$$

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026

Exercice 20

On pose pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$: $u(n,m) = \dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$.

1. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $u(n+1,m) + u(n,m+1) = 4u(n,m)$.
2. Déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $u(n,m) \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

Exercice 22

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

1. Montrer que si $f(\delta) = f(\beta)$ avec $\delta \neq \beta$ alors, $\dfrac{\delta+\beta}{2}$ est une constante pour tout δ et β.
2. Montrer que $f'\left(\dfrac{\delta+\beta}{2}\right) = 0$.

Exercice 23

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

Exercice 24

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

MENSA ACADEMY *** ÉCOLES DE BOURSE : ESA *** MANUEL D'EXERCICES - SESSION 2026