

TECHNICIEN SUPÉRIEUR DE LA STATISTIQUE

NIVEAU BACCALAURÉAT

Cours
Anciens sujets





TECHNICIEN SUPÉRIEUR DE LA STATISTIQUE

NIVEAU BACCALAURÉAT

+237 655 333 073
+237 671 544 122

Yaoundé

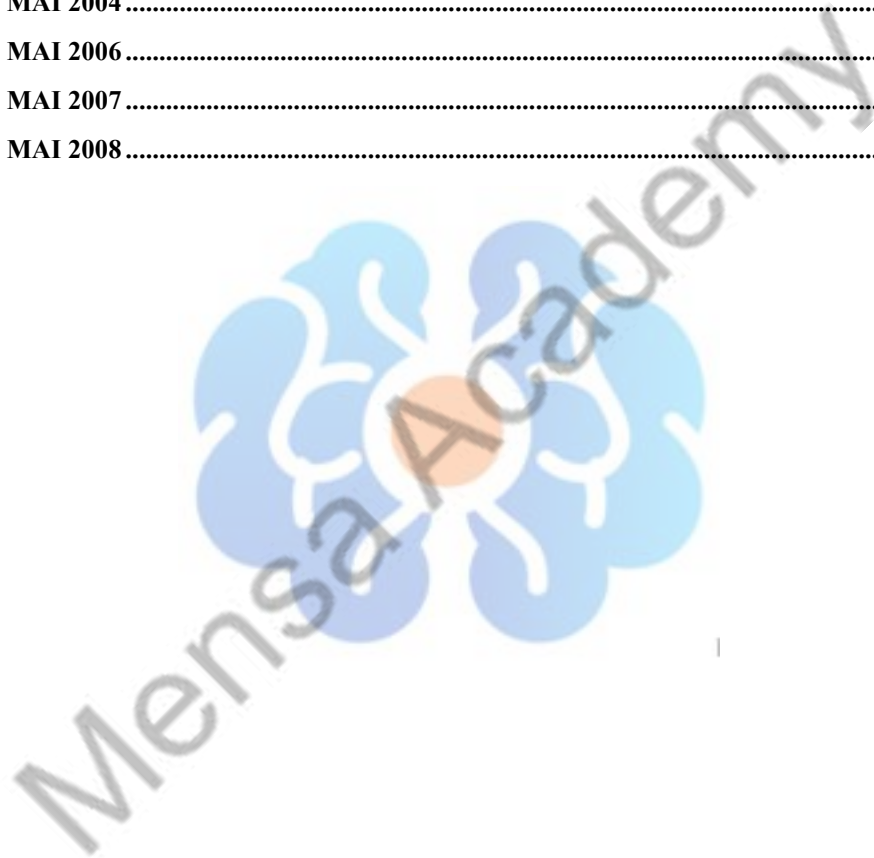
Table des matières

PARTIE I : MATHÉMATIQUES – CONDENSÉS DE COURS	5
Chapitre 1 : Raisonnement Mathématiques	6
Chapitre 2 : Suites réelles	11
Chapitre 3 : Limites	21
Chapitre 4 : Continuité	28
Chapitre 5 : Dérivabilité	34
Chapitre 6 : Fonctions numériques à une variable réelle	41
Chapitre 7 : Nombres complexes	49
Chapitre 8 : les équations différentielles	58
Chapitre 9 : Intégration sur un segment	64
Chapitre 10 : Dénombrement	82
Chapitre 11 : Espaces probabilisés	87
Chapitre 12 : Conditionnement et indépendance	94
Chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes	98
Chapitre 14 : Sommes et Produits	106
Chapitre 15 : Séries	112
Chapitre 16 : Calcul matriciel	117
PARTIE II : CULTURE GÉNÉRALE – CONDENSÉS DE COURS	123
Thème 01 : La démocratie dans le monde d'aujourd'hui	136
01. <i>Sujet proposé</i>	136
a. <i>Problématique proposée</i>	136
b. <i>Conclusion</i>	138
c. <i>Citations utiles</i>	138
Thème 02 : Bonheur et politique	139
02. <i>Sujet proposé</i>	139
a. <i>Problématique proposée</i>	139
b. <i>Conclusion</i>	141
c. <i>Citations utiles</i>	141
Thème 03 : La justice et le droit	143
03. <i>Sujet proposé</i>	143
a. <i>Problématique proposée</i>	143
b. <i>Conclusion</i>	145
c. <i>Citations utiles</i>	145
Thème 04 : Liberté et lien social	146
04. <i>Sujet proposé</i>	146
a. <i>Problématique proposée</i>	146

<i>b. Conclusion.....</i>	148
<i>c. Citations utiles.....</i>	148
Thème 05 : Culture générale et efficacité professionnelle	149
05. <i>Sujet proposé.....</i>	149
<i>a. Problématique proposée.....</i>	149
<i>b. Conclusion.....</i>	151
<i>c. Citations utiles.....</i>	151
Thème 06 : Éducation nationale et chômage.....	151
06. <i>Sujet proposé.....</i>	152
<i>a. Conclusion.....</i>	154
<i>b. Citations utiles.....</i>	154
Thème 07 : La révolution de la communication.....	155
07. <i>Sujet proposé.....</i>	155
<i>a. Problématique proposée.....</i>	155
<i>b. Conclusion.....</i>	156
<i>c. Citations utiles.....</i>	157
Thème 08 : Le retour des inégalités	158
08. <i>Sujet proposé.....</i>	158
<i>a. Problématique proposée.....</i>	158
<i>b. Conclusion.....</i>	159
<i>c. Citations utiles.....</i>	160
Thème 09 : Discrimination et égalité	161
09. <i>Sujet proposé.....</i>	161
<i>a. Problématique proposée.....</i>	161
<i>b. Conclusion.....</i>	162
<i>c. Citations utiles.....</i>	162
Thème 10 : La femme et la fille moderne	164
10. <i>Sujet proposé.....</i>	164
<i>a. Conclusion.....</i>	165
<i>b. Citations utiles.....</i>	166
Thème 11 : La domination masculine	167
11. <i>Sujet proposé.....</i>	167
<i>a. Problématique proposée.....</i>	167
<i>b. Conclusion.....</i>	169
<i>c. Citations utiles.....</i>	169
Thème 12 : la violence et les jeunes.....	171
12. <i>Sujet proposé.....</i>	171
<i>a. Problématique proposée.....</i>	171
<i>b. Conclusion.....</i>	173
<i>c. Citations utiles.....</i>	174
Actualité - Les objectifs de développement durable	175
01. QUESTIONS D'ORDRE GÉNÉRAL.....	175
02. RÉPONSES AUX QUESTIONS POSÉES.....	175
PARTIE II : QUELQUES ANCIENS SUJETS –.....	185
I. CALCUL NUMÉRIQUE.....	186
SESSION DE MAI 2004.....	186
SESSION DE MAI 2006.....	188

SESSION DE MAI 2007	189
SESSION DE MAI 2008	192
SESSION DE MAI 2010	194
SESSION DE MAI 2011	196
SESSION DE NOVEMBRE 2014	198
SESSION DE MAI 2024	200
II. MATHEMATIQUES	201
SESSION DE MAI 2004	201
SESSION DE MAI 2006	203
SESSION DE MAI 2008	205
SESSION DE MAI 2009	207
SESSION DE MAI 2010	208
SESSION DE MAI 2011	211
SESSION DE MAI 2012	215
SESSION DE NOVEMBRE 2014	217
SESSION DE MAI 2015	220
SESSION DE MAI 2016	221
SESSION DE MAI 2017	224
SESSION DE MAI 2018	227
SESSION DE MAI 2019	229
SESSION DE MAI 2024 - TCHAD	232
SESSION DE JUILLET 2025 - TCHAD	235
SESSION DE JUILLET 2025 - CAMEROUN	236
III. ORDRE GENERAL	238
SESSION DE MAI 2004	238
SESSION DE MAI 2007	238
SESSION DE MAI 2008	238
SESSION DE MAI 2012	239
SESSION DE MAI 2016	239
SESSION DE MAI 2017	240
SESSION DE MAI 2018	240
SESSION DE MAI 2025	241
IV. ANGLAIS	241
SESSION DE MAI 2007	241
A) GRAMMAR: (3 MARKS)	241
B) VOCABULARY: (2 MARKS)	242
C) READING COMPREHENSION	242
Questions	243

D) ESSAY WRITING	243
SESSION DE MAI 2008	243
I - GRAMMAR AND VOCABULARY (7 MARKS)	243
A) Grammar: (3 marks)	243
B) Vocabulary: (4 marks)	244
II - READING COMPREHENSION (5 MARKS)	244
TEXT : Life on Mars	244
Questions	245
III - ESSAY (8 MARKS)	245
V. FRANCAIS	246
SESSION DE MAI 2004	246
SESSION DE MAI 2006	247
SESSION DE MAI 2007	248
SESSION DE MAI 2008	249



Partie I : Mathématiques – Condensés de Cours

Chapitre 1 : Raisonnement Mathématiques

I. Les éléments du raisonnement

•• Proposition

Définition 1.1. On appelle proposition toute phrase ψ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x , nous pourrions la noter $\psi(x)$.

Remarque 1.1. On écrira indifféremment " ψ " ou " ψ est vraie"

Exemple 1.1. Pour tout réel x strictement positif, " $\ln(x) > 0$ " est une proposition dépendante de la variable x . Elle est vraie si $x > 0$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. "La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier n .

Exemple 1.3. Pour un lancé, "le numéro sorti est pair" est une proposition.

Exemple 1.4. Pour tout réel x , " $(2x + 1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

•• Quantificateurs

Notation : Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "quel que soit x ..."

Le signe “ $\exists$ ” placé devant une variable x signifie “il existe (au moins) un x ...”

Le signe “ $\exists !$ ” placé devant une variable x signifie “il existe un unique x ...”

“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ” Se lit quel que soit x , $x^2 + 1$ est strictement positif ou pour tout x , $x^2 + 1$ est strictement positif.

“ $\exists ! n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} = 3$ ” Se lit : il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\frac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3 (il s’agit du nombre 2).

Remarque 1.2. Notons que, dans un énoncé, l’expression “il existe un x ” signifiera toujours implicitement qu’il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \psi(x, y))$ est différente de la proposition $(\exists y, \forall x, \psi(x, y))$.

...Connecteurs logiques

Définition 1.2. Soit une proposition P . On appelle non P la proposition contraire de P , qui est vraie lorsque P est fausse, et qui est fausse lorsque P est vraie.

Propriété 1.2. Le contraire de la proposition $(\forall x, P(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non } P(x))$ et inversement.

Exemple 1.5. Pour un dé lancé trois fois, le contraire de « les trois numéros obtenus sont pairs » est « au moins un des numéros obtenus est impair ».

Définition 1.3. Soient P et Q deux propositions. On appelle disjonction de P et Q la proposition $(P \text{ ou } Q)$ ou la notation $(P \vee Q)$, le « ou » étant entendu ici inclusivement (soit P , soit Q , soit les deux).

Exemple 1.6. Pour un dé lancé, on considère P : « le numéro sorti est pair », et Q : « le numéro sorti est supérieur ou égal à 3 ». Alors, $(P \text{ ou } Q)$ est : « le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6 ».

Définition 1.4. Soit P et Q deux propositions. On appelle conjonction de P et Q , la proposition $(P \wedge Q)$ (les deux simultanément).

Exemple 1.7. En reprenant l'exemple 1.6, $(P \text{ et } Q)$ est : « le numéro sorti est 4 ou 6 ».

Définition 1.5. Soit P et Q deux propositions. On dit que P implique Q , et on note $P \Rightarrow Q$, lorsque, si P est vraie, alors Q est vraie (l'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée réciproque de $P \Rightarrow Q$).

Vocabulaire. Lorsque P implique Q , on dit que P est une condition suffisante de Q , et que Q est une condition nécessaire de P .

Exemple 1.8. Pour tout réel x , on a : $(x = e^x) \Rightarrow (x > 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. Soient P et Q deux propositions. On dit que P équivaut à Q , et on note $P \Leftrightarrow Q$, lorsqu'on a, à la fois, $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Vocabulaire. Lorsque P et Q sont équivalentes, on dit que P est vraie si, et seulement si, Q est vraie. On dit aussi que P est une condition nécessaire et suffisante de Q .

Exemple 1.9. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*) \times (\mathbb{R}_+^*), (\ln(a) < \ln(b)) \Leftrightarrow (a < b)$

Exemple 1.10. Pour tout entier n , n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

II. Différents types de raisonnements

•• Démonstration par l'absurde

Théorème 1.1. Quelles que soient les propositions P et Q , pour montrer que P implique Q , on suppose que P est vraie, et on montre qu'il est alors impossible que Q soit fausse.

•• Démonstration par récurrence

▪ Récurrence dite faible

Théorème 1.2. Pour un entier naturel n , considérons une proposition $P(n)$.

Si $P(n_0)$ est vraie et si, pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à n_0 , la proposition $P(n)$ implique la proposition $P(n+1)$, alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à n_0 .

Vocabulaire. La preuve de $P(n_0)$ s'appelle l'initialisation de la récurrence. La vérité de l'implication $(P(n) \text{ est vraie}) \Rightarrow (P(n+1) \text{ est vraie})$ s'appelle l'hérédité de la proposition.

Attention. Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $P(n)$ est vraie pour tout n . C'est pour un entier n fixé que l'on montre que, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.3. La plupart du temps, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$

▪ Récurrence d'ordre p ($p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.3. Pour un entier naturel n , considérons une proposition $P(n)$.

Si les p premières propositions $P(0), P(1), \dots, P(p-1)$ sont vraies et si, pour un entier naturel n fixé de $\mathbb{N}$, les p propositions $P(n), P(n+1), \dots, P(n+p-1)$, alors la proposition $P(n)$ est vraie quel que soit l'entier n .

▪ Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ième}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ième}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.4. Pour un entier naturel n , considérons une proposition $P(n)$.

Si $P(0)$ est vraie et si, pour un entier naturel n fixé, en supposant les propositions $P(k)$ vraies pour tout k de $[0, n]$, on montre que $P(n+1)$ est vraie, alors la proposition $P(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n .

Remarque 1.4. On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de la vérité de $P(n)$ et de $P(n+1)$ pour établir celle de $P(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $P(1)$ de $P(0)$: il faut $P(0)$ et $P(1)$ pour obtenir $P(2)$, puis enclencher la récurrence.

•• Exercices

1. Soit un réel a positif. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$
2. On considère la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$
3. On considère la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$
4. On considère la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ définie par :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n + \mu^n$ où λ et μ sont deux réels tels que $0 < \lambda < \mu$
 Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \mu < 1$.

Chapitre 2 : Suites réelles

I. GÉNÉRALITÉS

1. Définitions

- On appelle suite réelle toute application u d'une partie de $\mathbb{A}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n$$

De manière générale, A est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à un élément p appartenant à $\mathbb{N}$. Dans ce cas, une suite réelle sera notée : $(u_n)_{n \geq p}$. Exemple : $\left(\frac{2}{n^2}\right)_{n \geq 1}$; $(\arctan(n))_{n \geq 0}$. Remarque : Dans ce chapitre, $A = \mathbb{N}$.

- Une propriété P est vérifiée par la suite (u_n) à partir d'un certain rang lorsqu'il existe un entier n_0 tel que P soit vérifiée par tous les u_n tels que $n_0 \leq n$.
- Sens de variation : La suite (u_n) est dite croissante (resp. strictement croissante) lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n < u_{n+1}$) ; décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$) ; constante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ et stationnaire lorsque $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n_0 \leq n$ alors, $u_n = u_{n_0}$ $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n < u_{n+1}$) et enfin, (strictement monotone) monotone lorsqu'elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Remarques pertinentes : (1) Une suite est constante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$; (2) Pour étudier le sens de variation ou la monotonie de (u_n) , on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$. Lorsque, pour tout $n, u_n \neq 0$, et que le ratio $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une forme purement simplifiée alors, on peut écrire $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$. Ainsi, les signes de u_n et de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ permettent de conclure.

- (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
- (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$;
- Une suite bornée est une suite minorée et majorée ;
- (u_n) est bornée ssi il existe un réel M tel que, $\forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq M$.

2. Opérations sur les suites

- (a.) 02 suites (u_n) et (v_n) sont égales lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$; (b.) On appelle somme (resp. produit) de 02 suites (u_n) et (v_n) , la suite de terme général $u_n + v_n$ (resp. $u_n v_n$) ; (c.) On appelle produit de la suite (u_n) par le scalaire β (réel) la suite de terme général βu_n .

3. Suites classiques

(1) Suite arithmétique : $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

(2) Suite géométrique : $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.

(3) Suite arithmético-géométrique : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

- Si $a=1$, (u_n) est une suite arithmétique et donc, $u_n = u_0 + nr$.
- Si $a \neq 1$, pour déterminer u_n en fonction de n , on cherche c tel que $c = ac + b$. La suite (v_n) avec $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a (démonstration évidente).

On en déduit v_n puis u_n en fonction de a, b, n, n_0

$$\text{Ainsi, } u_n = a^n u_0 + b \frac{1-a^n}{1-a}$$

(4) Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Et dans ce cas, pour déterminer u_n en fonction de n , on écrira l'équation caractéristique suivante : $r^2 = ar + b$ (EC) et on calculera ensuite le déterminant.

- Si (EC) possède 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$
- Si (EC) possède une racine réelle r , $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + nB)r^n$.
- Si (EC) possède 2 racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ alors $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$. On pensera à déterminer les réels A et B en résolvant le système obtenu en considérant deux termes de la suite.

Important

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$\begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{si } q \neq 1 \\ 0 & \text{sinon } (q = 1) \end{cases}$$

II. CONVERGENCE D'UNE SUITE RÉELLE**1. Définitions**

- On dit que (u_n) admet pour limite l lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ alors, $|u_n - l| \leq \varepsilon$

Démonstration : de cette définition, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1 \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait : $|u_n - l'| \leq \varepsilon$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq \max(n_0, n_1)$; : $|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq 2\varepsilon$ (vrai $\forall \varepsilon > 0$). On en déduit alors que $l - l' = 0$ et $l = l'$.

- On dit (u_n) est convergente lorsqu'il existe un nombre réel l tel que (u_n) admette une l pour limite.
- l étant unique, on dit que l est la limite de la suite (u_n) et on écrit : $l = \lim (u_n)$ ou $l = \lim u_n$ ou encore $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. (On dira aussi que u_n converge/tend vers l). NB : (1) ne suite non convergente est dite divergente ; (2) Etudier la nature d'une suite, c'est chercher si elle converge ou pas.
- On dira que (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ alors, $u_n \geq A$ (une telle suite est dite divergente). Dans ce cas, on note : $\lim (u_n) = +\infty$ ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Exemple 1 : On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$ où q est un nombre réel indépendant de n . Le lecteur pourra s'inspirer des cas suivants : $q \leq -1, -1 < q < 1, q = 1$ et $q > 1$.



2. Extension aux suites complexes

Ici, $|u_n - l|$ désignera le module du nombre complexe $u_n - l$ ($l \in \mathbb{C}$). Remarque : la définition d'une suite divergente vue précédemment ne s'étend pas aux suites complexes (car, si u_n n'est pas un nombre réel, $u_n \geq A$ ou $u_n \leq A$ n'a aucun sens).

- $\lim(u_n) = a + ib \leftrightarrow \lim(\operatorname{Re}(u_n)) = a$ et $\lim(\operatorname{Im}(u_n)) = b$
- Si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ ($\rho_n \in \mathbb{R}$, $\theta_n \in \mathbb{R}$) alors,
 - $\begin{cases} \lim(\rho_n) = \rho \\ \lim(\theta_n) = \theta \end{cases} \rightarrow \lim(u_n) = \rho e^{i\theta}$
 - $\lim(\rho_n) = 0 \rightarrow \lim(u_n) = 0$
 - $\lim(u_n) = \rho e^{i\theta} \rightarrow \lim(\rho_n) = \rho$
 - **Attention :** $\lim(\rho_n e^{i\theta_n}) = \rho e^{i\theta}$ implique $\lim(\rho_n) = \rho$ mais on n'a pas nécessairement $\lim(\theta_n) = \theta$ (appliquer dans le cas où $u_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$)

Exemple 2 : On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$ où q est un nombre complexe indépendant de n .

3. Convergence des suites extraites

Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ alors, (1) $\lim(u_n) = a$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \lim(u_{kn+p}) = a$; (2) $\lim(u_{2n}) = a$ et $\lim(u_{2n+1}) = a$ alors, $\lim(u_n) = a$. (Pour montrer qu'une suite (u_n) n'a ni limite finie, ni limite infinie, il suffit de montrer que deux suites différentes de la forme (u_{kn+p}) ont des limites différentes.

Exemple 3 : Application avec $u_n = (-1)^n$.

4. Limites et inégalités

- Si $\lim(u_n) = l$ avec $a < l < b$ alors, à partir d'un certain rang, on a : $a \leq u_n \leq b$
(Démonstration : à travers la définition de $\lim(u_n) = l$, pour $\varepsilon = \min(l - a, b - l)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ alors, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Donc, pour $n \geq n_0$, $-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $-(l - a) \leq u_n - l \leq b - l$ et donc, $a \leq u_n \leq b$.

Exemple 4 : Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\frac{n^4 - 36n^3 - 10n + 1}{3n^4 - n^3 + 1} > 0$.

- Si (u_n) est convergente de limite l et si, à partir d'un certain rang, on a : $a \leq u_n \leq b$ alors, $a \leq l \leq b$ (application pour la suite $(\frac{1}{n})$ et puis, conclure).
- Si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et si $\lim(u_n) = l$ et $\lim(v_n) = l'$ alors, $l \leq l'$ (application pour $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ et puis conclure).

5. Opérations sur les limites

Soit $\beta \in \mathbb{R}$,

- Si $\lim(u_n) = l$ alors, $\lim(\beta u_n) = \beta \times l$
- Si $\lim(u_n) = +\infty$ alors, $\lim(\beta u_n) = +\infty$ si $\beta > 0$; $\lim(\beta u_n) = -\infty$ si $\beta < 0$; 0 sinon.
- Si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = l'$ alors, $\lim(u_n + v_n) = l + l'$
- Si $\lim u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si (v_n) est bornée alors, $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$)
- Si $\lim u_n = +\infty$ ($-\infty$) et si $\lim v_n = +\infty$ ($-\infty$) alors, $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ ($-\infty$)
- Si $\lim u_n = 0$ et si (v_n) est bornée alors, $\lim(u_n v_n) = 0$
- Si $\lim u_n = l$ et si $\lim v_n = l'$ alors, $\lim(u_n v_n) = l \times l'$
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = l'$ alors, $\lim(u_n v_n) = +\infty$ si $l' > 0$ et $-\infty$ si $l' < 0$
- Si $\lim u_n = +\infty$ ($-\infty$) et si $\lim v_n = +\infty$ ($-\infty$) alors, $\lim(u_n v_n) = +\infty$ ($-\infty$)
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors, $\lim(u_n v_n) = -\infty$
- Si $\lim u_n = l$ ($l \neq 0$) alors, $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$

- Si $\lim u_n = +\infty$ ($-\infty$) alors, $\lim \frac{1}{u_n} = 0$
- Si $\lim u_n = 0$ et si à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ ($u_n \leq 0$) alors, $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$ ($-\infty$)
- Si $\lim u_n = 0$ et si (u_n) n'a pas ses termes de signe constant à partir d'un certain rang alors, $(\frac{1}{u_n})$ n'a ni limite finie, ni limite infinie.

III. THÉORÈMES DE CONVERGENCE

1. Suites de terme général $f(u_n)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un élément de I ou une extrémité de I et b , un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit (u_n) une suite d'éléments de I .

$$\text{Si } \begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{cases} \text{ alors, } \lim f(u_n) = b$$

2. Utilisation d'inégalités

- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et que $\lim u_n = +\infty$ alors, $\lim v_n = +\infty$
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et que $\lim v_n = -\infty$ alors, $\lim u_n = -\infty$
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite alors, (v_n) converge également vers la même limite (application : limite de (u_n) où $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$ ($n > 0$) ; autre application : montrer que si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$).

Entraînement : Soit x un nombre réel. Notons x_n la valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près autrement dit $x_n = \frac{\text{Ent}(10^n x)}{10^n}$.

3. Suites monotones

- Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors, elle converge et si $\lim u_n = l$, on a n entier naturel, $u_n \leq l$.
 - Si (u_n) est une suite croissante et divergente alors, $\lim u_n = +\infty$
 - Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors, elle converge et si $\lim u_n = l$, on a n entier naturel, $u_n \geq l$.
 - Si (u_n) est une suite décroissante et divergente alors, $\lim u_n = -\infty$
- (Application : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$)

4. Suites adjacentes

(u_n) Et (v_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante et l'autre décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante alors, $u_n \leq v_n$ pour tout n . Ainsi, elles sont convergentes et ont même limite l . On a alors : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_p \leq l \leq v_q$.

IV. COMPARAISON DES SUITES

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'au voisinage de $+\infty$

- (u_n) est dominée par (v_n) s'il existe une suite bornée (a_n) telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n = a_n v_n$. On note : $u_n = O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) s'il existe une suite (b_n) , de limite 0, telle qu'à partir d'un certain rang, $v_n = b_n v_n$. On note : $u_n = o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) s'il existe une suite (c_n) , de limite 1, telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n = c_n v_n$. On note : $u_n \sim v_n$.

Exercice 1

Déterminer la limite de la suite : $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - \sin(k)}{n^2 + k}$ pour tout n .

Exercice 2

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}$. Démontrer que les deux suites sont convergentes et ont la même limite. Démontrer enfin que si $n \geq 50$, $\frac{u_n + v_n}{2}$ est une valeur approchée à moins de 10^{-2} près de $\lim(u_n)$.

Exercice 3

Soit $u_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ ($n > 0$).

- 1) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe n_0 de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- 2) Montrer que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{|u_1| + \dots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
- 3) En déduire qu'il existe n_1 de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |u_n| \leq \varepsilon$ et puis conclure.

Chapitre 3 : Limites

I. DÉFINITIONS

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle et D son domaine de définition.

1. Limite en un point

Soit x_0 un réel. On suppose que f est définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 .

••• **Définition 1** : On dit que f admet une limite l en x_0 si :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

••• **Propriété 1** : Si l existe, l est unique.

On dit alors que l est la limite de f en x_0 ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 .

On note alors : $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

••• **Définition 2** : On dit que f admet une limite quand x tend vers x_0 en étant différent de x_0 si :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Si l existe, l est unique et on note alors : $l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$

••• **Remarque 1** : Si $x_0 \in D$ et si $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, nécessairement $l = f(x_0)$

••• **Remarque 2** : Si $x_0 \in D$, $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \\ l = f(x_0) \end{cases}$

Si $x_0 \notin D$, $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$

•••Exemple : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ donc,

Si $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et vaut 1 et si $a \neq 1$, f n'admet pas de limite en 0.

2. Limite à droite et limite à gauche

Définition 3 :

Soit x_0 un réel et f une fonction définie à droite au voisinage de x_0 . On dit que f admet une limite droite si :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < x - x_0 \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Si l existe, l est unique et on note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

- Soit x_0 un réel et f une fonction définie à gauche au voisinage de x_0 . On dit que f admet une limite droite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < x_0 - x \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Si l existe, l est unique et on note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

•••Remarques :

- Dans la définition 3, on ne se préoccupe pas du fait que f soit définie ou non en x_0 .
- Si f est définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 alors,

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

••• Exemple : $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(x) = e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

f N'a pas de limite quand x tend vers 0 en étant différent de 0, et a fortiori n'a pas de limite quand x tend vers 0.

3. Extensions

Définition 4 : Limite finie en un point

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- On définit de la même manière $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$+\infty$. En remplaçant $|x - x_0| \leq \eta$ respectivement par $0 < |x - x_0| \leq \eta$; $0 < x - x_0 \leq \eta$ et $0 < x_0 - x \leq \eta$

- On obtient également les définitions de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ en remplaçant $f(x) \geq A$ par $f(x) \leq A$.

Définition 5 : Cas où la variable vers $+\infty$ ou $-\infty$

On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$$

On suppose que f est définie au voisinage de $-\infty$

On définit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ en remplaçant

$x \geq B$ Par $x \leq B$.

Remarques :

- L'expression " f " admet une limite en a signifie que f admet une limite finie en a .
- Une fonction peut n'admettre ni limite finie, ni limite infinie en a .

Exemple : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

II. THÉORÈMES SUR LES LIMITES

1. Opérations sur les limites

f	g	αf	$f + g$	fg	$\frac{f}{g}$
l	l'	αl	$l + l'$	ll'	$\frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$ Si $l' = 0$ et $l \neq 0$: $+\infty$ ou $-\infty$ ou ni limite finie ni limite infinie suivant les signes de $f(x)$ et $g(x)$ Indétermination $\frac{0}{0}$ si $l' = l = 0$
l	$+\infty$	αl	$+\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$ Indétermination $0 \times \infty$ si $l = 0$	0

f	g	αf	f + g	fg	$\frac{f}{g}$
$+\infty$	l'	$+\infty$ si $\alpha > 0$ $-\infty$ si $\alpha < 0$ 0 si $\alpha = 0$	$+\infty$	idem	$+\infty$ si $l' > 0$
$+\infty$	$+\infty$	idem	$+\infty$	$+\infty$	Indétermination $\frac{\infty}{\infty}$
$+\infty$	$+\infty$	Idem	∞ $-\infty$	$-\infty$	Idem

2. Limite de fonctions composées

Théorème 1 : a (resp b, c) désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$

$$\begin{cases} \lim_a f = b \\ \lim_b g = c \end{cases} \Rightarrow \lim_a g \circ f = c$$

3. Limites et inégalités

a Désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$

Théorème 2 : Si au voisinage de a , $m \leq f(x) \leq M$ et si $\lim_a f = l$, alors $m \leq l \leq M$

Si $\lim_a f = l$ avec $m \leq l \leq M$, alors au voisinage de a , $m \leq f(x) \leq M$

Théorème 3 : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a .

$$\begin{cases} \lim_a f = l \\ \lim_a g = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$$

$$\lim_a f = +\infty \Rightarrow \lim_a g = +\infty \quad ; \quad \lim_a g = -\infty \Rightarrow \lim_a f = -\infty$$

Théorème 4 : Soient f, g et h trois fonctions telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a .

$$\begin{cases} \lim_a g = l \\ \lim_a h = l \end{cases} \Rightarrow (\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = l)$$

4. Limites d'une fonction monotone sur un intervalle

Théorème 5 : a désigne un réel ou $-\infty$ et b un réel ou $+\infty$

(a) Soit f croissante sur $]a, b[$

- f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point x_0 de $]a, b[$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x)$$

- Si f majorée sur $]a, b[$, f admet une limite à gauche en b . Sinon $\lim_{x \rightarrow b}^< f(x) = +\infty$
- Si f minorée sur $]a, b[$, f admet une limite à droite en a . Sinon $\lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = -\infty$

(b) Soit f décroissante sur $]a, b[$

- f Admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point x_0 de $]a, b[$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x)$$

- Si f majorée sur $]a, b[$, f admet une limite à droite en a . Sinon $\lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = +\infty$
- Si f minorée sur $]a, b[$, f admet une limite à gauche en b . Sinon $\lim_{x \rightarrow b}^< f(x) = -\infty$

Exercices d'application

- 1) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ dans les cas suivants :

$$f(x) = (3 + 2e^{\tan x})^{\pi - 2x}; f(x) = (\tan x)^{\cos x}$$

- 2) $A = \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \right] (x \ln x)^2$; $B = x^{\left(\frac{1}{x^x} \right)}$; $f(x) = \frac{A}{B}$. Etudier la limite de f en $+\infty$

- 3) $f(x) = (2e^{\sin x} - \cos x)^{\cot x}$ (Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$)

- 4) $f(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^x$ n est un entier naturel non nul, les a_i ($i = 1, \dots, n$) sont des réels strictement positifs. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 5) Soient a un réel strictement positif et (n, p) deux entiers naturels non nuls. Calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers a .

$$f(x) = \frac{x^n - a^n}{x^p - a^p}; g(x) = \frac{x-a}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}} \text{ et } h(x) = \frac{x-a}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$$

- 6) $f(x) = \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan x}$ (Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x)$)

Chapitre 4 : Continuité

I. CONTINUITÉ EN UN POINT

1. Premières définitions

Définition 1.1. Soit une fonction f définie sur un voisinage d'un réel x_0 , où x_0 appartient à l'ensemble de définition D_f de f . On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 , cette limite étant nécessairement égale à $f(x_0)$.

- La fonction f est continue à droite en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- La fonction f est continue à gauche en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Remarque 1.1. Pour que f soit continue en x_0 , il est nécessaire que f soit définie en x_0 .

Remarque 1.2. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f \quad |x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Théorème 1.1. Une fonction f définie e x_0 , est continue en x_0 si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en x_0 .

Exemple 1.1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \text{ si } x < 0 \text{ Et } f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \neq f(0), \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f n'est pas continue en 0, mais est continue à droite en 0.

2. Prolongement par continuité

Définition 1.2. Prolongement par continuité. Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 , mais pas en x_0 . Si f admet une limite réelle l en x_0 , alors la fonction g , coïncidant avec f sur D_f , et telle que $g(x_0) = l$, est continue en x_0 .

La fonction g s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

Remarque 1.3. Souvent on prolonge f par continuité en x_0 , en posant tout simplement $f(x_0) = l$ (on confond alors les fonctions f et g).

Exemple 1.2. La fonction f , définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$, est prolongeable par continuité en 0 (à droite) en posant $f(0) = 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

II. CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

1. Généralités

Définition 1.3. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point I .

L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I est noté $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$.

Remarque 1.4. Si I est de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, alors f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$ et continue à droite en a si I contient a , et à gauche en b si I contient b .

Théorème 1.2. Les fonctions polynomiales (en particulier les fonctions constantes), les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales), la fonction valeur absolue, les fonctions logarithme et exponentielle, les fonctions puissances (en particulier la fonction racine carrée), sont continues là où elles sont définies.

Exemple 1.3. Si n est un entier, la fonction partie entière est continue sur tout intervalle $[n, n + 1[$, puisqu'elle est constante égale à n sur cet intervalle.

Exemple 1.4. Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 2x + 1$ si $x \leq 0$ Et $f(x) = 3x - 1$ si $x > 0$. La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car sur chacun de ces intervalles, f est affine. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1 = f(0)$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 1) = -1 \neq f(0)$. La fonction f n'est donc pas continue en 0 et ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors : $f + g$, λf (où λ est un réel quelconque) et fg sont continues sur I .

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Théorème 1.4. Si f est une fonction continue sur l'intervalle I , à valeurs dans l'intervalle J , et si g est continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

2. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.5. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ avec $a < b$. Quel que soit le réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c appartenant à $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque 1.5. Le réel c n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.6. Conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires.

Toute fonction continue qui change de signe sur un intervalle, s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

Théorème 1.7. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

3. Image d'un segment par une fonction continue

Définition 1.4. On appelle segment tout intervalle de $\mathbb{R}$ fermé et borné.

Théorème 1.8. Si une fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque 1.6. Ce théorème énonce que f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Si on note $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, alors on a :

$f([a, b]) = [m, M]$. Ceci a pour conséquence le théorème suivant :

Théorème 1.9. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

4. Théorème de la bijection

Théorème 1.10. Théorème de la bijection

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f définit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, image de I par f .

En outre, la bijection réciproque f^{-1} (bijection de J sur I) est continue sur J , possède sur J le même sens de variation que f , et les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque 1.7. Voici deux conséquences de ce théorème

Quel que soit le réel λ appartenant à J , l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution sur I .

En particulier, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique réel c , strictement compris entre a et b , tel que $f(c) = 0$.

Exercices

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On donne : $f(x) = \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}}$ si $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $f(1) = 2$. Montrer que f n'est pas continue en 1.

3. Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - [x]$

4. Etudier la continuité de f sur $] -1, +\infty[$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} & \text{si } x \in] -1, 0[\cup] 0, +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

5. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ par : $f(2x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante
6. Résoudre $\text{Arsin}(2x) - \text{Arsin}(x\sqrt{3}) = \text{Arsin}(x)$
7. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x) - f(y)| = |x - y|$. Montrer que f est continue, déterminer f .



Chapitre 5 : Dérivabilité

I. DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

1. Premières définitions

Définition 1.1. Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 appartenant à son ensemble de définition. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ appelé taux d'accroissement de f en x_0 , a une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

Dans ce cas, cette limite, que l'on note $f'(x_0)$, est appelée nombre dérivé de f en x_0 .

Remarque 1.1. Si f est dérivable en x_0 , on a, en posant $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 1.2. La fonction f est dite dérivable à droite (ou à gauche) en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite à droite (ou à gauche) en x_0 . Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f à droite (ou à gauche) en x_0 , que l'on note $f'_d(x_0)$ (ou $f'_g(x_0)$).

Remarque 1.2. Si f n'est pas définie à gauche de x_0 , alors la notion de dérivabilité à droite se confond avec celle de dérivabilité tout court (de même en échangeant gauche et droite).

Théorème 1.1. Une fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , et si de plus $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 1.1. La fonction $f: x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$

Remarque 1.3. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 . La réciproque est fausse, comme le montre la fonction valeur absolue, continue en 0, mais pas dérivable en 0.

2. Interprétation graphique

Théorème 1.2. On note (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

Si f est dérivable en x_0 , alors (C_f) admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$, de coefficient directeur égal à $f'(x_0)$. Son équation est donc : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si f n'est pas dérivable en x_0 mais admet une dérivée à gauche (ou à droite) en x_0 , alors on parle de demi tangente (même équation en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_d(x_0)$ (ou $f'_g(x_0)$)).

Si f n'est pas dérivable en x_0 , mais si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ ($+\infty$ ou $-\infty$), alors (C_f) admet une tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$ (ou une demi tangente verticale si la limite n'est infinie qu'à gauche ou à droite)

II. DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE

1. Fonction dérivée

Définition 1.3. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$) lorsque f est dérivable en tout point de $]a, b[$, à droite en a si l'intervalle est fermé en a , et à gauche en b si l'intervalle est fermé en b .

On note $D^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

Définition 1.4. L'ensemble des points en lesquels une fonction f est dérivable est appelé l'ensemble de dérivabilité de f . La fonction qui, à tout réel x de cet ensemble, fait correspondre $f'(x)$ s'appelle fonction dérivée de f (ou plus simplement dérivée de f), et est notée f' .

Théorème 1.3. Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales), les fonctions exponentielle et logarithme, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ (Avec α un réel non entier), sont dérivables là où elles sont définies.

Les fonctions valeur absolue et racine carrée ne sont pas dérivables en 0.

2. Dérivation et opérations

$f(x)$	$f'(x)$	u et v Sont des fonctions dérivables	
a (constante)	0	$(u + v)' = u' + v'$	$(\lambda u)' = \lambda u'$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(uv)' = u'v + uv'$	$(uov)' = v' \times (u'ov)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
a^x ($a > 0$)	$(\ln a)a^x$	$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Théorème 1.4. Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J , et dérivable sur I . Soit y élément de J . Si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, alors f^{-1} est dérivable en y et

On a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Remarque 1.4. Ce théorème permet de retrouver le fait que f et f^{-1} ont les mêmes variations

3. Dérivation et sens de variation

Théorème 1.5.

- Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I
- Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I
- Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I
- Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I
- Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Remarque 1.5. Si, quel que soit le réel x de I , on a : $f'(x) \geq 0$, mais si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I , alors f est strictement croissante sur I (Idem pour la décroissance).

Théorème 1.6. Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I , et x_0 un réel de I . la fonction f admet un extremum local en x_0 , si, et seulement si, $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 .

Remarque 1.6. Si f' passe d'une valeur négative à une valeur positive, l'extremum local est un minimum local, sinon c'est un maximum local.

4. Les inégalités des accroissements finis

Théorème 1.7. Première inégalité des accroissements finis

Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$. S'il existe deux réels m et M tels que, quel que soit le réel x de $]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Théorème 1.8. Deuxième inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . S'il existe un réel k tel que, pour tout réel x de I , on a : $|f'(x)| \leq k$, alors $\forall (a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

III. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

1. Définitions

Définition 1.5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable k fois de suite sur I , ($k \in \mathbb{N}$), on dit que f est de classe D^k sur I et on note $f^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f . On note $D^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I .

On a : $f^{(0)} = f$, et pour tout k entier naturel non nul, $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$

Définition 1.6. Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable k fois sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I , alors f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On note enfin $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I , c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , pour tout entier naturel k .

Théorème 1.9. Les fonctions mentionnées au théorème 1.3. Sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elles sont définies, sauf valeur absolue et racine carrée qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.10. Somme, combinaison linéaire, produit, quotient bien défini, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sont encore des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. On a les mêmes résultats pour la classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 1.11. Théorème de prolongement de la dérivée. Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et on a : $f'(a) = l$

Remarque 1.7. On peut énoncer le même théorème du côté de b .

2. Convexité

Définition 1.7. Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I .

*** On dit que f est convexe sur I lorsque la courbe (C_f) est au – dessus de ses tangentes en chaque point A dont l'abscisse appartient à I .

*** On dit que f est concave sur I , lorsque la courbe (C_f) est en dessous de ses tangentes en chaque point A dont l'abscisse appartient à I .

Remarque 1.8. La définition de la convexité donnée ci – dessus est celle préconisée par le programme dans le cadre des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. En fait, dans le cas général, une fonction f est dite convexe sur un intervalle I , lorsque, pour tout couple (a, b) d'éléments de I , et pour tout réel t de $[0, 1]$, on a : $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$.

Théorème 1.12. Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I . La fonction f est convexe sur I si, et seulement si : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$

Remarque 1.9. Avec la même hypothèse, f est concave sur I si, et seulement si, quel que soit le réel x de I , on a : $f''(x) \leq 0$.

Définition 1.8. Point d'inflexion. Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 de son ensemble de définition. On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) lorsque la courbe change de concavité en ce point (la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave).

Remarque 1.10. Soit une fonction f dérivable en x_0 . La courbe (C_f) présente un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$, si et seulement si, la tangente à (C_f) en ce point traverse (C_f) .

Théorème 1.13. Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et x_0 un élément intérieur à I (c'est-à-dire pas une extrémité).

Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de f , si et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en x_0 .

Exercices à chercher

Exercice 1 : Etudier la dérivabilité des fonctions f suivantes au point x_0

$$\circ \bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x^3| \text{ en } x_0 = 0 \quad \circ \bullet \forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \text{ en } x_0 = 1$$

Exercice 2 : On désigne par n un entier naturel. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\circ \bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^k, k \text{ un entier naturel} \quad \circ \bullet \forall x > -1, f(x) = \ln(1+x)$$

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$\circ \bullet$ Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0, 1]$

$\circ \bullet$ Calculer $f(0)$ et en déduire le minimum de f sur $[0, 1]$

$\circ \bullet$ Montrer que f admet son maximum sur $]0, 1[$ et le déterminer

Exercice 4 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Déterminer les points d'inflexion de la courbe représentative de f .

Exercice 5 : Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f définie par : $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$

Réponse : $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 6 : Déterminer la limite éventuelle de f en 1 de : $f(x) = \frac{(\text{Arctan}x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{\sqrt{x}-1}$

Chapitre 6 : Fonctions numériques à une variable réelle

I. GENERALITES

1. Fonction périodique

Une fonction f est dite périodique si on peut trouver un réel t strictement positif tel que : $\forall x \in D_f, x+t \in D_f$ et $f(x+t) = f(x)$.

Remarque

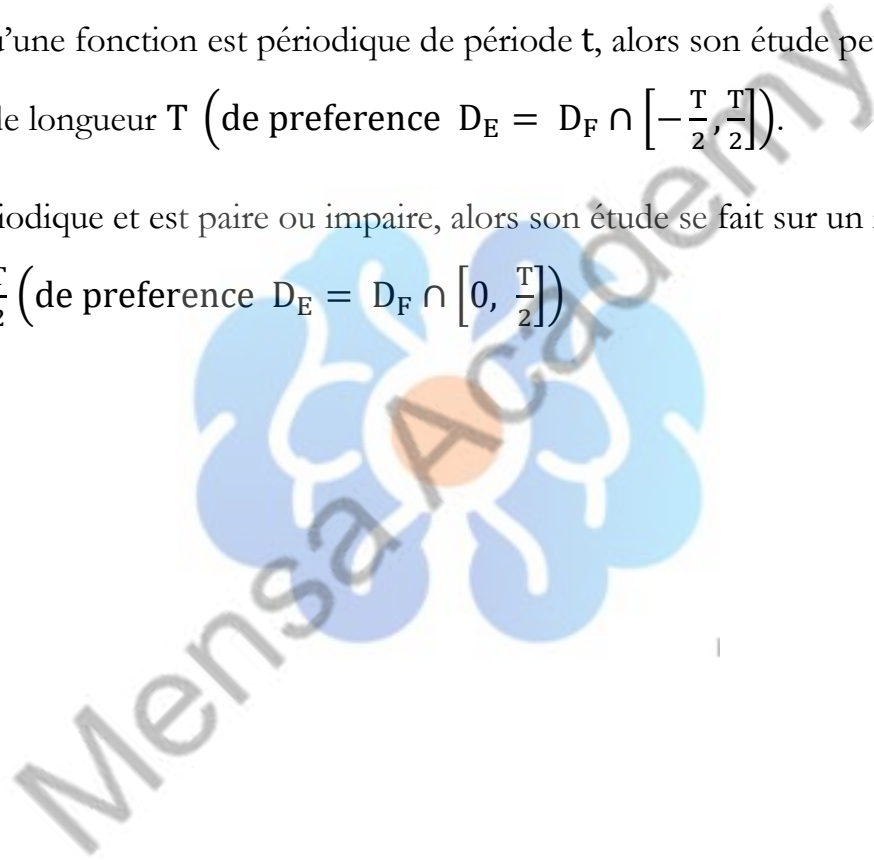
*** La période des fonctions : $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $\frac{2\pi}{a}$

*** La période de la fonction : $x \mapsto \tan(ax + b)$ est $\frac{\pi}{a}$

*** La période des fonctions : $x \mapsto \cos^n x$ et $x \mapsto \sin^n x$ est π si n est pair et 2π si n est impair.

*** Lorsqu'une fonction est périodique de période t , alors son étude peut être faite sur un intervalle de longueur T (de préférence $D_E = D_F \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$).

Si f est périodique et est paire ou impaire, alors son étude se fait sur un intervalle de longueur $\frac{T}{2}$ (de préférence $D_E = D_F \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$).



2. Eléments de symétrie d'une courbe

••• Centre de symétrie

Le point $\omega(a, b)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de la fonction f lorsque l'une des relations suivantes est vraie :

$$\forall x \in D_f, \quad 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b;$$

$$\forall x \in D_f, \quad a - x \in D_f, a + x \in D_f \text{ et } f(a - x) + f(a + x) = 2b;$$

On pose $F(x) = f(a + x) - b$ et on justifie que F est impaire ;

••• Axe de symétrie

Pour justifier que la droite $(D): x = a$ est axe de symétrie à (C_f) , on justifie l'une des relations suivantes :

$$\forall x \in D_f, \quad 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x);$$

$$\forall x \in D_f, \quad a - x \in D_f, a + x \in D_f \text{ et } f(a - x) = f(a + x);$$

On pose $F(x) = f(a + x)$ et on justifie que F est paire ;

3. Limites classiques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \right] = \frac{1}{2}$$

4. Recherche pratique des branches infinies

*** Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à (C_f) .

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à (C_f) .

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = 0$ alors la courbe admet au voisinage de ∞ une branche parabolique de direction (Ox) .

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \infty$ alors la courbe admet au voisinage de ∞ une branche parabolique de direction (Oy)

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = a, (a \neq 0)$, on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) .

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$, alors la courbe admet au voisinage de ∞ une branche parabolique de direction $y = ax$.

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ n'existe pas, la droite $(D): y = ax$ est direction asymptotique.

••• Quelques limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0^-, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$$

Comment lever certaines indéterminations

••• Théorème de l'Hospital (pour lever les formes indéterminées du genre $\frac{0}{0}$)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On cherche à calculer la limite en $x_0 \in I$ de la fonction $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \frac{0}{0}$ (f.i), c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$.

Si la forme indéterminée persiste, on passe aux dérivées secondes, aux dérivées d'ordre 3 et ainsi de suite jusqu'à ce que la forme indéterminée disparaisse. Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \right)$$

••• Lever les formes indéterminées du genre $+\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Soit on utilise une simple factorisation et ensuite on utilise les limites usuelles, soit on utilise l'expression conjuguée si on a à faire à une fraction rationnelle.

••• Lever les formes indéterminées du genre $0 \times \infty$

On peut utiliser un changement de variable de la forme $X = \frac{1}{x}$ et suivant les cas on fait appel à son inspiration.

••• Développements limites de quelques fonctions

Lorsque x tend vers 0, on a :

$$e^x \approx 1 + x; \ln(1 + x) \approx x; \sin x \approx x + \frac{x^3}{3!}; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; (1-x)^\alpha \approx 1 - \alpha x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

••• Position d'une courbe par rapport à ses tangentes

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$:

*** Si $f''(x_0) \geq 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$.

*** Si $f''(x_0) \leq 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$.

*** Si $f''(x_0) = 0$ en changeant de signe, alors $(\mathcal{C}_f)$ change de concavité en $M_0(x_0, y_0)$ et ce point est appelé point d'inflexion.

Note

Les conditions ci-dessus ne sont que suffisantes, pas nécessaires car on peut trouver des fonctions f admettant un point d'inflexion $M_0(x_0, y_0)$ sans que $f''(x_0) = 0$

Pour étudier la position relative d'une courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente (T) en $M_0(x_0, y_0)$ dont l'équation est sous la forme $y = ax + b$, on peut :

•• Étudier le signe de $f(x) - y$;

Si le signe de $f(x) - y$ est difficile à trouver, étudier le signe de $f''(x_0)$.

II. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES ET HYPERBOLIQUES

1. Fonctions trigonométriques

••• Définitions

↻ La fonction cosinus effectue une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Sa bijection réciproque est la fonction $\cos^{-1}$ appelée **arccos** ;

↻ La fonction sinus effectue une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$. Sa bijection réciproque est la fonction $\sin^{-1}$ appelée **arcsin** ;

↻ La fonction tangente effectue une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction $\tan^{-1}$ appelée **arctan** ;

••• Propriétés

$\left(\arccos(u(x))\right)' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	Donc	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\arcsin(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	Donc	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\operatorname{arctan}(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	Donc	$(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2. Fonctions hyperboliques

••• Définitions

On appelle cosinus hyperbolique noté **cosh** ou encore **ch** la fonction définie pour tout

réel x par : $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

On appelle sinus hyperbolique noté **sinh** ou encore **sh** la fonction définie pour tout réel

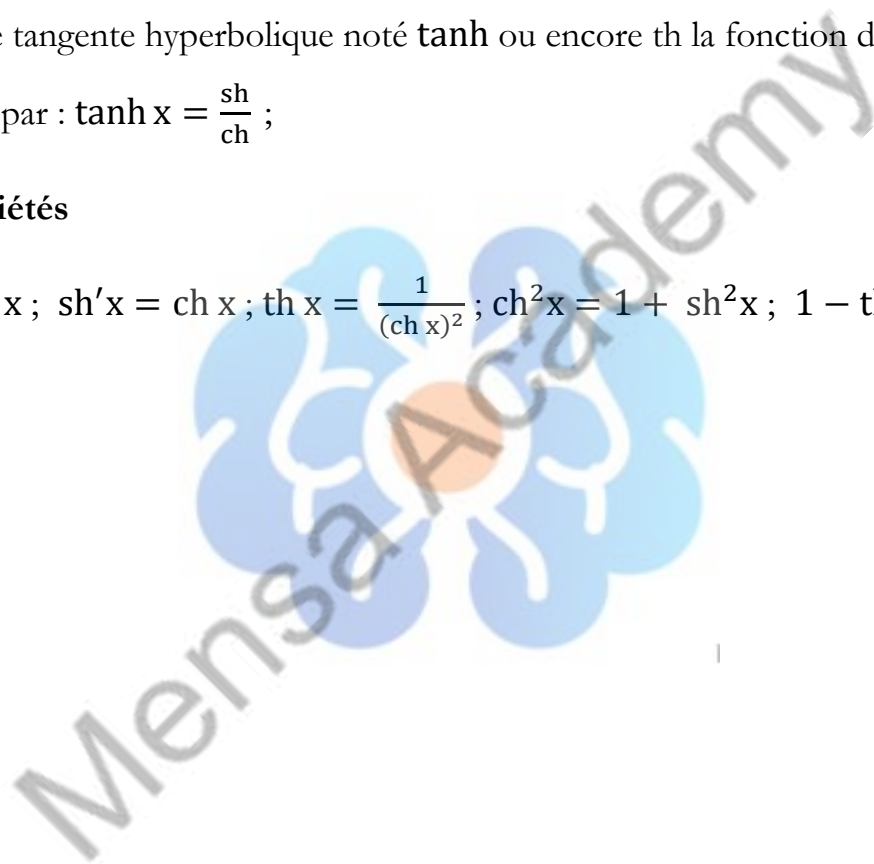
x par : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

On appelle tangente hyperbolique noté **tanh** ou encore **th** la fonction définie pour

tout réel x par : $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$;

••• Propriétés

$\cosh' x = \sinh x$; $\sinh' x = \cosh x$; $\tanh x = \frac{1}{(\cosh x)^2}$; $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$; $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{(\cosh x)^2}$



Chapitre 7 : Nombres complexes

Représentation du Chapitre

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Dans ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, elle en a deux : i et $-i$. La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Les nombres complexes sont aussi très utilisés en géométrie, en particulier pour caractériser les transformations ponctuelles.

I. Rappels

1. Forme algébrique

a. Forme algébrique

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$ où i vérifie l'égalité $i^2 = -1$ avec a et b des réels quelconques.

** Soit $z = a + ib$, alors $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Si $b = 0$, alors z est un réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Si $a = 0$, alors z est imaginaire pure.

** **Egalité** : Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux si $a = a'$ et $b = b'$

b. Représentation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, à tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a, b)$ et réciproquement, à tout point, on peut associer un nombre complexe.

$M(a, b)$ est l'image de $z = a + ib$ et z est l'afixe de $M(a, b)$.

c. Forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, M son image dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

*** Le module de z est le réel positif noté : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, géométriquement, on note $|z| = OM$

*** Un argument de z est le nombre θ défini à $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) près par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\rho} \end{cases}$$

Géométriquement, θ est à $2k\pi$ près de la mesure de l'angle $(\vec{u}, \widehat{OM})$. On note alors :

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Exemples

$$*** z = -3i \quad \left(z = 3i\sin\frac{3\pi}{2} \right) \quad *** z = 1 + i \quad \left(z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \right)$$

2. Opérations

a. Complexe conjugué

Définition : Soit $z = a + ib$, le conjugué de z est noté $\bar{z} = a - ib$.

Géométriquement, l'image M' de $\bar{z}$ est symétrique de l'image M de z par rapport à l'axe (xx') . On a : $|z| = |\bar{z}|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$

Propriétés immédiates

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \text{ et } \bar{\bar{z}} = z$$

b. Addition

$$\begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases} \Rightarrow z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

c. Produit

$$\begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases} \Rightarrow zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme trigonométrique. En effet,

$$\begin{cases} z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ z' = \rho'(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \end{cases} \Rightarrow zz' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$$

Propriétés

$$*** |zz'| = |z| \times |z'| \qquad *** \arg(z + z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

d. Inverse et quotient

$$*** \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0) \qquad *** \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$$

$$*** \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \qquad *** \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$$

e. Puissance

Soit $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $z \neq 0$, en utilisant les propriétés du produit, on montre par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

Propriété

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Exemple

On pose $z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$$z^{20} = (1 - i)^{20} = \sqrt{2}^{20} \cos\left(-20\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-20\frac{\pi}{4}\right) = -10\ 24$$

II. Notation exponentielle

1. Formule de Moivre

En appliquant la formule ci-dessus à un nombre complexe de module 1, $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ on obtient, pour tout entier naturel, la formule de Moivre :

$$((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Par analogie avec les puissances, on pose par définition : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Propriétés

$$*** (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad *** e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad *** \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

2. Notation d'un nombre complexe

Propriété

Tout nombre complexe z non nul de module et d'argument peut s'écrire : $z = \rho e^{i\theta}$

Exemple : $z = \frac{i}{1+i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \text{ D'où : } e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) =$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta). \text{ En additionnant membre à membre, on obtient :}$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \text{ Et en soustrayant, on obtient : } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

$$\text{On retient que : } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

*** **Application :** Linéarisation de sinus et cosinus

$$- \cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-i3\theta}) = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3\cos \theta)$$

$$- \sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{-1}{8i} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}) = \frac{1}{4} (-\sin 3\theta + 3\sin \theta)$$

4. Résolutions dans $\mathbb{C}$ des équations

a. Type $z^2 = a$

** Si $a = 0$, l'équation $z^2 = 0$ admet la solution $z = 0$

** Si $a \neq 0$, on pose : $a = \rho e^{i\theta}$. On cherche z sous forme trigonométrique $z = r e^{i\varphi}$

On a :

$$z^2 = a \Leftrightarrow r^2 e^{i2\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{D'où les solutions : } z_1 = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2})} \text{ et } z_2 = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$$

b. Equation type $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont trois complexes

$$\text{On a : } az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \text{ (forme canonique)}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les deux solutions sont deux nombres complexes conjugués.

*** **Exemple 1 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$, $x^2 - x + 1 = 0$

On a: $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2 \Rightarrow S = \left\{ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$

*** **Exemple 2 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$

$\Delta = 20 + 48i$. Il faut résoudre : $\gamma^2 = 20 + 48i$.

$$\gamma^2 = 20 + 48i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 20 + 48i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ 2xy = 48 \end{cases}$$

On peut combiner la première équation avec $x^2 + y^2 = 52$

On obtient : $\begin{cases} 2x^2 = 72 \\ 2y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow |x| = 6 \text{ et } |y| = 4$

Comme le produit xy est positif et est égal à 24, alors les deux racines complexes qui satisfont Δ sont : $6 + 4i$ et $-6 - 4i$.

On déduit alors : $S = \{ 2 + i; -4 - 3i \}$

Généralisation : On démontre, et nous l'admettrons, que tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines dans distinctes ou confondues.

5. Lignes de niveau

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, la ligne de niveau N_k d'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z) = k$

a. Exemples

*** **Lignes de niveau de $f: z \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ (partie réelle de z)**

$z = x + iy$, $\operatorname{Re}(z) = k \Leftrightarrow x = k$. Il s'agit donc de la droite $x = k$

*** **Lignes de niveau de $f: z \rightarrow \operatorname{Im}(z)$ (partie imaginaire de z)**

$z = x + iy$, $\operatorname{Im}(z) = k \Leftrightarrow y = k$. Il s'agit donc de la droite $y = k$

***** Lignes de niveau de $f: z \rightarrow |z|$ (module de z) ($k > 0$)**

$z = x + iy$, $|z| = k \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2$. Il s'agit donc d'un cercle de centre O et de rayon k .

***** Lignes de niveau de $f: z \rightarrow |z - a|$, $a \in \mathbb{C}$ ($k > 0$)**

$z = x + iy$, $a = \alpha + i\beta$

$|z - a| = k \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$. Il s'agit donc d'un cercle de centre (α, β) et de rayon k .

***** Lignes de niveau de $f: z \rightarrow \arg(z)$ (argument de z)**

$z = x + iy$, $\arg(z) = k \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = k$. Il s'agit donc de la demi-droite d'origine O (exclu) d'angle polaire k .

6. Transformations géométriques

Soit une fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $z' = f(z)$. Soit dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $z' = f(z)$. On définit ainsi dans le plan, la transformation géométrique associée à f , qui à tout point M , fait correspondre le point M' .

a. Transformation type : $f: z \mapsto z + b$, avec ($b = \alpha + i\beta$)

$M(z) \mapsto M'(z')$. $z' = z + b \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b. Transformation type : $f: z \mapsto \bar{z}$

$M(z) \mapsto M'(z')$. $z' = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Il s'agit donc d'une réflexion (symétrie orthogonale d'axe).

c. Transformation type : $f: z \mapsto kz$ (k réel non nul)

$M(z) \mapsto M'(z')$. $z' = kz \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |k||z| \\ \arg(z') = \arg(z) + \arg(k) \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Il s'agit donc d'une homothétie de centre O et de rapport k .

d. Transformation type : $f: z \mapsto e^{i\theta}z$

$M(z) \mapsto M'(z')$. $z' = e^{i\theta}z \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) + \theta[2\pi] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$

Il s'agit donc d'une rotation de centre O d'angle θ

e. Transformation type : $f: z \mapsto az$ ($a = \rho e^{i\theta}$) $a \neq 0$

$M(z) \mapsto M'(z')$. $z' = az \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \rho|z| \\ \arg(z') = \arg(z) + \theta[2\pi] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \rho OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$

Cette transformation géométrique est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle θ et de l'homothétie de centre O et de rapport ρ . Il s'agit donc d'une similitude de centre O , de rapport ρ et d'angle θ .



Chapitre 8 : les équations différentielles

Définition

On appelle équation différentielle (ordinaire) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ une relation de la forme $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ entre une fonction inconnue $y(x)$ et certaines de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n figurant effectivement dans l'équation.

On appelle solution exacte de l'équation ou tout simplement solution toute fonction $\phi : x \rightarrow \phi(x)$ continue et n fois dérivable telle que :

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

I. Equation différentielle du premier ordre

Ce sont des équations de la forme $f(x, y, y') = 0$. Il n'y a pas de méthode générale pour ces équations. Par contre pour certaines familles d'entre elles, il existe des méthodes spécifiques (variables séparables, homogènes, différentielles totales, etc.).

Equation différentielle à variables séparables

Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme $g(y) y' = f(x)$, où g et f sont des fonctions.

$$\text{Dans la pratique, } g(y)y' = f(x) \Leftrightarrow g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow g(y)dy = f(x)dx;$$

$$D'où \int g(y)dy = \int f(x)dx + K$$

$G(y) = F(x) + k$ où G est une primitive de g et F est une primitive de f .

•••Exemple :

$$y' \ln(y) = e^x \Leftrightarrow \ln(y) dy = e^x dx ; \text{ d'où } \int \ln y \, dy = \int e^x \, dx \text{ qui implique que } y \ln(y) - y = e^x + c$$

Equation sous la forme résolue $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On considère que l'équation peut se mettre sous la forme résolue $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

•••Méthode de résolution

On pose $t = \frac{y}{x}$ soit $y = tx$; on a alors $dy = tdx + xdt$, d'où $y'dx = tdx + xdt$ ($dy = y'dx$)

Ainsi, $f\left(\frac{y}{x}\right) dx = tdx + xdt$ c'est à dire $f(t)dx = tdx + xdt$

Et on obtient $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}$ qui es une équation à variables séparables x et t.

•••Exemple

$$3(1 + y^2) = 5y \cos^2(2x) y'$$

$$3(1 + y^2) = 5y \cos^2(2x) \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{5y dy}{3(1+y^2)} = \frac{dx}{\cos^2(2x)}, \text{ d'où } 5 \int \frac{y}{1+y^2} dy =$$

$$3 \int \frac{dx}{\cos^2(2x)}$$

Il vient : $\frac{5}{2} \ln(1 + y^2) = \frac{3}{2} \operatorname{tg}(2x) + K$ qui est l'équation des courbes intégrales.

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 1$$

On pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx$ on a alors la forme: $f(t) = t^2 + t + 1$. L'équation à variables séparables $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}$ nous donne $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t^2} \dots$ d'où $\ln|x| = \text{Arctg}(t) + C$, puis $x = \lambda e^{\text{Arctg } t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ il vient :

$$\text{D'où } y = tx = \lambda \frac{y}{x} e^{\text{Arctg } \frac{y}{x}}$$

Equation se mettant sous la forme $y' + f(x)y = g(x)$

•••Méthode de résolution

On a $y' + f(x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -f(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)dx$

D'où $\int \frac{dy}{y} = - \int f(x)dx$ qui implique $\ln(y) = -F(x) + C$

$$\text{Ainsi, } y = \lambda e^{-F(x)}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc $y_1 = \lambda e^{-F(x)}$ est la solution générale de l'équation sans second membre. Soit $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation avec second membre c'est-à-dire

$$y'_p + f(x)y_p = g(x)$$

Alors $y = y_1 + y_p$ est la solution générale de l'équation avec second membre.

•••Exemple

$x^2 y' + y = e^{\frac{1}{x}}$ D'où $\ln(y) = \frac{1}{x} + C \dots$ donc $y = -\lambda e^{\frac{1}{x}}$; par variation de la constante, on obtient : $y' = \lambda' e^{\frac{1}{x}} - \frac{\lambda}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

On a alors : $x^2 y' + y = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \lambda' x^2 e^{\frac{1}{x}} - \lambda' e^{\frac{1}{x}} + \lambda' e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$ d'où $\lambda' = \frac{1}{x^2}$ et par la suite $\lambda = -\frac{1}{x} + C$

On a donc $y = C e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ $y_1(x) = C e^{\frac{1}{x}}$ $y_p(x) = -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

II. Equation différentielle du second ordre

Il s'agit des équations de la forme $F(x, y, y', y'') = 0$. On dit que l'équation est résolue en y'' si on peut écrire $y'' = f(x, y, y')$ où f est une fonction de 3 variables.

1. Equation différentielle du second ordre se ramenant au premier ordre

Si l'équation est du type $k(x, y', y'') = 0$ (c'est-à-dire y n'apparaissant pas), on pose $z = y'$ et on obtient une équation du type $k(x, z, z') = 0$ qui est du premier ordre en z . Sa résolution nous donne z qui fournit y par intégration.

•••Exemple : intégrer $2y'' + \frac{1}{x}y' = x + 5$

Posons $z = y'$; on obtient $2z' + \frac{1}{x}z = x + 5$ qui équivaut à $2z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow$

$$z = \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}}$$

$$z' = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \right)' = \lambda' \frac{\sqrt{x}}{x} - \lambda \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$2z' + \frac{1}{x}z = x + 5 \Leftrightarrow \lambda' = \frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{5}{2}\sqrt{x}$$

$$\text{D'où } \lambda = \frac{1}{2} \int x\sqrt{x} \, dx + \frac{5}{2} \int \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \frac{5}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Donc } z = \frac{c}{\sqrt{|x|}} + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{x^5}{|x|}} + \frac{5}{3} \sqrt{\frac{x^3}{|x|}}$$

On déduit $y(x)$ en calculant $y(x) = \int z(x) dx$

2. Equations différentielles linéaires du second ordre a coefficients constants

Il s'agit d'une équation de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$, $a \neq 0$ où a , b et c sont des constantes réelles et $f(x)$ donnée. L'équation homogène est $ay'' + by' + cy = 0$. On cherche les solutions de cette équation homogène sous la forme $Y = e^{rx}$ où r est un réel. $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique associée à l'équation homogène.

L'équation homogène admet toujours deux solutions indépendantes y_1 et y_2 . Les solutions sont donc sous la forme $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Soit $\delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (e)

••• Si $\delta > 0$, alors (e) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 . Les solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$, la solution générale de l'équation homogène est donc $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

••• Si $\delta = 0$, alors (e) admet une racine double r . Les deux solutions indépendantes sont $y_1 = e^{rx}$ et $y_2 = x e^x$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$

••• Si $\delta < 0$, alors (e) admet deux racines complexes conjugués $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$. Les deux solutions indépendantes sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$. La solution générale de l'équation homogène est donc : $y(x) = e^{ux}(r_1 \cos(vx) + r_2 \sin(vx))$



Chapitre 9 : Intégration sur un segment

A. Primitives et intégrales

I. Primitives d'une fonction continue

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; F est une primitive de f sur l'intervalle I si et seulement si F est dérivable sur I et $\forall x \in I$

$$F'(x) = f(x)$$

Remarques

** Une primitive F de f sur l'intervalle I est une fonction dérivable et donc continue sur I .

** Une primitive quelconque de f se note $\int f(x)dx$

2. Ensemble des primitives de f sur l'intervalle I

Théorème

** Si f admet une primitive F sur l'intervalle I , f admet une infinité de primitives sur I , et G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + k$

Corollaire

Si f admet une primitive F sur l'intervalle I , alors pour tout réel a de I et tout réel A , il existe une primitive et une seule G de f sur I telle que $G(a) = A$.

Attention

Dans ce paragraphe, I doit impérativement être un intervalle comme le montre l'exemple ci-dessous :

Si f est la fonction constante 1 ($\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$)

Les fonctions F définies par $F(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = x & \text{si } x > 0 \\ G(x) = x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ et cependant, il n'existe pas de constante C telle que $G = F + C$. On notera que si F est une primitive de f sur une réunion d'intervalles disjoints $I_1, I_2, \dots, I_n$.

$$\begin{cases} G(x) = F(x) + k_1 & \text{si } x \in I_1 \\ G(x) = F(x) + k_2 & \text{si } x \in I_2 \\ \vdots \\ G(x) = F(x) + k_n & \text{si } x \in I_n \end{cases}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n$ sont des constantes réelles quelconques.

3. Existence de primitives d'une fonction continue

Théorème

** f continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une infinité de primitives sur I .

*** Exemple de fonction n'admettant pas de primitive

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in [0,1[\cup]1,2] \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

En effet si F est une primitive de f sur $[0,2]$,

$$\begin{cases} F(x) = k_1 & \text{si } x \in [0,1[\\ F(x) = k_2 & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

Et F devant être continue en 1, $k_1 = k_2$ donc F est constante sur $[0,2]$ mais dans ce cas $F' = 0$ sur $[0,2]$ ce qui est contraire à la définition de f .

4. Primitives usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$
a	$at + C$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x = e^{x \ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$1 + \cotan^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cotan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arsin}(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Artan}(x) + C$

II. Intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux

1. Cas d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f admet une infinité de primitives sur I et si F et G sont deux primitives de f sur I , il existe un réel C tel que $\forall x \in I, G(x) = F(x) + C$

On a donc : $\forall (a, b) \in I^2, G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Définition

Le réel $F(b) - F(a)$ (indépendant du choix de la primitive F de f) est appelé intégrale de a à b de f . On le note $[F(x)]_a^b$ ou $\int_a^b f(x)dx$ et on dit que f est intégrable sur le segment $[a, b]$

On a donc :

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b

Exemples

** Exemple 1 : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b kdx = [kx]_a^b = k(b - a)$

** Exemple 2 : $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctan}(x)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Remarques

*** $\int_a^b f(x)dx$ peut aussi être noté $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(u)du$. On dit que x (ou t ou u) est une variable muette.

$$*** \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \int_a^a f(x) dx = 0$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a . La fonction φ définie sur I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque : On évitera d'écrire : $\varphi(x) = \int_a^x f(x) dx$

Exemple : $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

2. Cas d'une fonction continue par morceaux

Rappel

On note f une continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ si et seulement si f est continue en tout point de $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f admet une limite à droite et une limite à gauche.

Donc, si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, il existe une suite finie de points de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ telle que pour tout i de $[0, n-1]$ la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ admette un prolongement par continuité φ_i sur $[x_i, x_{i+1}]$.

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[\varphi_i(x) = f(x), \varphi_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x), \varphi_i(x_{i+1}) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^-} f(x)$$

Définition

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, l'intégrale de a à b de f est par définition :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx$$

Remarque

Si $a > b$, on pose : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Exemple : Fonction en escalier sur $[a, b]$, f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si, il existe une suite finie de point :

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ Telle que $\forall i \in [0, n-1], \exists k_i \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, f(x) = k_i$

Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on a : $\forall i \in [0, n-1]$ et $[x_i, x_{i+1}]$, $\varphi_i(x) = k_i$. Donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(x_{i+1} - x_i)$$

3. Interprétation géométrique

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (Δ) le domaine du plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des x et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire :

$$\Delta = \{M(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

On obtient pour unité d'aire, telle que $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du domaine Δ

III. Propriétés de l'intégrale**1. Relation de Chasles****Propriété**

Si f est continue sur I , alors $\forall (a, b, c) \in I^3$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Démonstration

Si F est une primitive de f sur I :

$F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$. On obtient ainsi le résultat

2. Linéarité de l'intégrale

Propriété

Si f et g sont continues sur I , si α et β sont deux nombres réels alors :

$$\forall (a, b, c) \in I^2, \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Démonstration

Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g) sur I , alors :

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$ Donc $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I . On applique alors la définition de l'intégrale.

Remarque : La relation de Chasles et la linéarité sont valables pour une fonction f continue par morceaux sur I .

3. Positivité de l'intégrale

Propriété

Si f est continue sur I et positive, $(\forall x \in I, f(x) \geq 0)$

Alors, $\forall (a, b) \in I^2,$

$$** \text{ Si } a \leq b, \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad ** \text{ Si } a \geq b, \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

Propriété

Si f est continue positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I , $F' = f \geq 0$ donc F est croissante sur $[a, b]$

On a ainsi : $\forall x \in [a, b], F(a) \leq F(x) \leq F(b)$

Or $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = 0$, D'où $\forall x \in [a, b], F(x) = F(a)$

Et $f = F' = 0$ sur $[a, b]$

Corollaire

Si f est continue positive sur $[a, b]$ et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(x)dx > 0$

Propriété

Si f et g sont continues sur I et vérifient : $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \text{ Si } a \leq b, \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Propriété

Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$), alors :

*** f est bornée sur $[a, b]$ et si $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$

On a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

*** $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

4. Travaux Pratiques - Entraînements

E.1. Nature de la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}$ définie par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} dx$

R.1. Vous trouverez $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$, (u_n) est convergente

E.2. Nature de la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}$ définie par $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{n^2 + x^n} dx$

R.2. Vous trouverez $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$, (u_n) est convergente

IV. Méthode des rectangles – Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une suite de points partageant le segment $[a, b]$ en n intervalles égaux de longueur $\frac{b-a}{n}$

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq j \leq n$$

Graphiquement, il est clair que si f positive sur $[a, b]$, $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_j)$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$.

Théorème

Si f continue sur $[a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$ le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Travaux pratiques

E.1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$

E.2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\beta+\alpha}{\alpha}$ avec $\beta, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

V. Calcul des primitives et intégrales

1. Cas des primitives

Théorème

Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $J = u(I)$

Soit F une primitive de f sur J

Alors $F \circ u$ est une primitive de $(f \circ u)u'$ sur I

On a donc : $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$

Exemples

$$\text{E.1. } \int x \sin(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C \quad \text{Car } x \sin(x^2) = \frac{1}{2} (\sin(x^2)) (x^2)'$$

$$\text{E.2. } \int \frac{6x-3}{(x^2-x+5)^{\frac{5}{2}}} dx = -2(x^2-x+5)^{-\frac{3}{2}} + C \quad \text{Car } \frac{6x-3}{(x^2-x+5)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3(x^2-x+5)'}{(x^2-x+5)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\text{E.3. } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\text{E.4. } \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C$$

$$\text{E.5. } \int \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C$$

2. Cas des intégrales

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle J contenant a et b , soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I contenant α et β tels que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et telle que pour tout x compris entre α et β , $u(x) \in J$. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(x)) u'(x) dx$$

Remarque

Pour calculer $\int_a^b f(t) dt$, on pose $t = u(x)$, dt devient $u'(x) dx$. Les bornes de a et b deviennent $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$.

Exemples

E.1. Montrer qu'en posant $t = \sin(x)$, on a: $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$



Applications à connaître

Soit f continue sur un intervalle I contenant a et $-a$

*** Si f est paire sur I , alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

*** Si f est impaire sur I , alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

*** Soit f continue et périodique de période T sur $\mathbb{R}$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

VI. Intégration par parties

1. Cas des primitives

Théorème

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I alors :

$$\forall x \in I, \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Exemples

$$E.1. I = \int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\left(u' = 1 \rightarrow u = x \text{ et } v = \ln(x) \rightarrow v' = \frac{1}{x} \right)$$

$$E.2. \text{ On pose : } J = \int \text{Arctan}(x)dx = x \text{Arctan}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\text{Donc : } J = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\left(u' = 1 \rightarrow u = x \text{ et } v = \text{Arctan}(x) \rightarrow v' = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

2. Cas des intégrales

Théorème

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

VII. Travaux pratiques – Méthodes

E.1. $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$

E.2. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C, a \in \mathbb{R}^*$

E.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{|a|}\right) + C, a \in \mathbb{R}^*$

Exercice à faire : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx, n \in \mathbb{N}$

*** Utiliser une intégration par parties et montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

*** Ensuite, déduire que : $I_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}$

3. Calcul de primitives de fonctions polynomiales en $\sin(x)$ et $\cos(x)$

Ce calcul se ramène à des calculs de primitives de la forme :

$$\int \cos^n(x) \sin^m(x) dx$$

*** Si n (resp. m) est impair, poser $u = \sin(x)$ (resp. $u = \cos(x)$)

On a alors : $\int \cos^{2p+1}(x) \sin^m(x) dx = \int (1-u^2)^p u^m du$

*** Sinon m et n sont pairs, linéariser l'expression.

On pourra utiliser les formules d'Euler :
$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Exemples

$$*** \int \sin^2(x) \cos(x) dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$$

$$*** \int \sin^3(x) = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx = -\cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x) + C$$

4. Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ où P est un polynôme en x

Des intégrations par parties successives prouvent que les primitives de $e^{\alpha x} P(x)$ sont de la forme $e^{\alpha x} Q(x) + C$ avec Q un polynôme de même degré que P tel que : $(e^{\alpha x} Q(x))' = e^{\alpha x} P(x)$

$$\int e^{\alpha x} P(x) dx = e^{\alpha x} Q(x) + C, \quad d^0(P) = d^0(Q)$$

Exemples

$$*** \int e^{2x} (6x^2 + 2x - 4) dx = e^{2x} Q(x) + C, \quad d^0(Q) = 2$$

Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$,

$$(e^{2x} Q(x))' = e^{2x} (2ax^2 + (2b + 2a)x + (2c + b)) = e^{2x} (6x^2 + 2x - 4)$$

Par identification $a = 3, b = -2$ et $c = -1$

$$\text{Donc : } \int e^{2x} (6x^2 + 2x - 4) dx = e^{2x} (3x^2 - 2x - 1) + C$$

$$*** \text{ Montrer que } \int x^n e^x dx = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + C$$

5. Calcul de $\int e^{ax} \cos(ax) dx$ et $\int e^{ax} \sin(ax) dx$

*** Etudier 2 intégrations par parties avec $u(x) = \cos(ax)$ (resp. $u(x) = \sin(ax)$),
 $v'(x) = e^{ax}$

*** Ou savoir que ces deux intégrations donnent comme résultat :

$$\int e^{ax} \cos(ax) dx = e^{ax}(\mu \cos(ax) + \tau \sin(ax)) + C$$

μ et τ Devant vérifier $[e^{ax}(\mu \cos(ax) + \tau \sin(ax))]' = e^{ax} \cos(ax)$

Exemple

$$*** \int e^x \cos(4x) dx = e^x(\mu \cos(4x) + \tau \sin(4x)) + C$$

$$\text{On trouve : } \mu = \frac{1}{17} \text{ et } \tau = \frac{4}{17}$$

$$\text{Don : } \int e^x \cos(4x) dx = \frac{1}{17} e^x (\cos(4x) + 4 \sin(4x)) + C$$

6. Calcul de primitives de fractions rationnelles

$$*** \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$*** \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

$$*** \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$*** \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C$$

Remarques

- (1) $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $x^2 + px + q$ n'ayant pas de racines réelles, alors écrire $x^2 + px + q$ sous forme $u^2 + a^2$, puis utiliser :

$$\int \frac{dx}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Exemple : $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Donc : $\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

- (2) $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$, $x^2 + px + q$ n'ayant pas de racines réelles. Faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur puis séparer en 2 primitives, l'une d'elles se calcule directement, l'autre se calcule comme précédemment.

Exemple : Calculer : $I = \int \frac{-3x+2}{x^2-x+1} dx$

$$I = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx = -\frac{3}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + C$$

Donc : $I = -\frac{3}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

Exemple récapitulatif

On pose $I = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$. Montrer que :

$$I = \frac{3}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(Indication : Utiliser une décomposition du type : $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{(cx+d)}{x^2+x+1}$)

7. Intégrales de WALLIS – Travaux pratiques

*** Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$

($nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $I_n = J_n$) Vous trouverez ces éléments de réponses

Chapitre 10 : Dénombrement

I. Techniques de dénombrement

... Qu'est-ce que dénombrer ?

Le dénombrement est l'art de déterminer le cardinal d'un ensemble fini sans avoir à faire la liste des éléments de cet ensemble.

... Techniques

Propriété 1.1. S'il existe une bijection entre 2 ensembles A et B finis, alors :
 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Propriété 1.2. Passage au complémentaire : si Ω est un ensemble fini et si A est une partie de Ω qui semble difficile à dénombrer, on peut dénombrer $\bar{A}$. On a alors :
 $\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{A})$.

Propriété 1.3. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, alors on a :

$$\text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{card}(A_1) \text{card}(A_2) \dots \text{card}(A_n).$$

Propriété 1.4. Disjonction : le cardinal d'une réunion d'ensembles finis et 2 à 2 disjoints est la somme des cardinaux de chacun de ces ensembles.

Propriété 1.5. Partition : pour dénombrer un ensemble qui semble « grand », on peut en réaliser une partition en n classes, puis dénombrer chaque classe de la partition et, pour finir, ajouter les cardinaux de chaque classe.

Remarque 1.1. Si les n classes ont même cardinal, alors il suffit de multiplier par n le cardinal commun à toutes les classes.

Propriété 1.6. Formule du crible (ou de Poincaré) : Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des ensembles finis, alors on a :

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Remarque 1.2. Cas particulier : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

II. Listes

••• p – listes d'éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble E

Définition 1.1. Une p – liste d'éléments choisis parmi les n éléments de E (avec $n \geq 1$) est un p – uplet $(e_1, \dots, e_p)$ d'élément de E^p .

Propriété 1.7. Une p – liste d'éléments choisis parmi n éléments est assimilée à une application d'un ensemble A à p éléments dans un ensemble B à n éléments.

Théorème 1.1. Il y a n^p listes de p éléments d'un ensemble E de cardinal n et il y a donc n^p applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

••• p – listes d'éléments distincts choisis parmi n

Propriété 1.8. Une p – liste d’éléments distincts choisis parmi n éléments est assimilée à une injection d’un ensemble A à p éléments dans un ensemble B à n éléments.

Théorème 1.2. Si $1 \leq p \leq n$, il y a $n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ Listes de p éléments distincts d’un ensemble E de cardinal n . La dernière expression est aussi valable pour $p = 0$.

Remarque 1.3. Si $p = 0$, il y a une seule 0 – liste d’éléments distincts de E . Si $p > n$, il n’y a aucune p – liste d’éléments distincts choisis parmi n éléments.

••• Permutations

On désigne toujours par n un élément de $\mathbb{N}$ non nul et on considère un ensemble E ayant n éléments.

Définition 1.2. Une permutation de E est une bijection de E dans E .

Propriété 1.9. Une permutation de E (toujours avec $\text{card}(E) = n$) est représentée par une n – liste d’éléments distincts choisis parmi les n éléments de E .

Théorème 1.3. Il y a $n!$ permutations d’ensemble E à n éléments.

III. Combinaisons

••• Nombre de Combinaisons

Définition 1.3. Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments (*avec* $p \leq n$).

Théorème 1.4. Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n *avec* $p \leq n$ est égal à $\binom{n}{p}$ ou C_n^p ce qui se prononce p parmi n . On a :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Théorème 1.6. Le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi égal au nombre de façons de choisir p objets distincts parmi n objets donnés.

Remarque 1.4. Par convention, on pose $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$

Remarque 1.5. Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux (en référence à la formule du binôme de Newton) et sont des entiers naturels.

••• Calcul et propriétés des coefficients binomiaux

Valeurs remarquables. $C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$ Et $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$.

Remarque 1.6. L'expression la plus pratique pour calculer un coefficient binomial lorsque l'on connaît n et p ($1 \leq p \leq n$) est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!}$$

Propriété 1.10. Symétrie : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Propriété 1.11. Formules très pratiques :

$$\forall p \geq 1, pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$$

$$\forall p \geq 2, p(p-1)C_n^p = n(n-1)C_{n-2}^{p-2}$$

Propriété 1.12. Triangle de Pascal

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [1, n]$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Propriété 1.13. Formule de Vandermonde :

$\forall (n_1, n_2, p) \in \mathbb{N}^3$,

$$\sum_{k=0}^p C_{n_1}^k C_{n_2}^{p-k} = C_{n_1+n_2}^p$$

Propriété 1.14. Formule du binôme de Newton

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Avec $a = 1$ et $b = 1$, on a : $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ et on déduit que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n .

Chapitre 11 : Espaces probabilisés

I. Les événements

••• Epreuves aléatoires

Définition 1.1. On appelle épreuve aléatoire (ou expérience aléatoire) une expérience dont les résultats ne dépendent que du hasard.

L'ensemble de tous les résultats possibles, noté Ω , est appelé univers associé à l'expérience. Chaque élément de Ω est un possible : un seul d'entre eux est observé à l'issue de l'épreuve.

Un événement est une partie de Ω .

Exemple 1.1. Lors du lancer d'un dé, on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement « le numéro obtenu est pair » est la partie $\Omega = \{2, 4, 6\}$ de Ω .

Remarque 1.1. Les parties de Ω n'ont pas toutes droit au statut d'événements (notamment lorsque Ω est infini et non dénombrable), et on exige que celles qui seront les événements associés à une certaine expérience aléatoire forment un ensemble, inclus dans $\wp(\Omega)$, appelé tribu, et qui vérifie certaines propriétés de stabilité indispensables.

••• Tribu d'événements

Définition 1.2. On appelle tribu (ou σ – algèbre d'événements) tout sous-ensemble de $\wp(\Omega)$, noté $\mathcal{H}$ et vérifiant :

- (1) $\Omega \in \mathcal{H}$
- (2) Si $A \in \mathcal{H}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{H}$
- (3) Si I désigne une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k \in I}$ est une suite d'événements (éléments de $\mathcal{H}$), alors : $\bigcup_{k \in I} A_k \in \mathcal{H}$ (ce qui signifie que $\bigcup_{k \in I} A_k$ est un événement).

Définition 1.3. Tout élément de la tribu $\mathcal{H}$ est appelé événement.

Définition 1.4. Le couple $(\Omega, \mathcal{H})$ est appelé espace probabilisable.

Cas particulier. Lorsque Ω est fini, il n'y a aucun problème à choisir $\wp(\Omega)$ comme tribu.

Définition 1.5. Ω est appelé l'événement certain, $\emptyset$ est appelé l'événement impossible, $\bar{A}$ est appelé l'événement contraire de A .

Les singletons de Ω (parties à 1 élément) sont appelés événements élémentaires.

Propriété 1.1. $\emptyset \in \mathcal{H}$

Propriété 1.2. Si I désigne une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k \in I}$ est une suite d'événements (éléments de $\mathcal{H}$), alors : $\bigcap_{k \in I} A_k \in \mathcal{H}$ (ce qui signifie que $\bigcap_{k \in I} A_k$ est un événement).

••• Opérations sur les événements

Définition 1.6. L'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés.

Définition 1.7. L'événement $A \cup B$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé.

Définition 1.8. $\bar{A}$ Est l'événement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Remarque 1.3. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ Et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

••• Comparaison des événements

Définition 1.9. $A \subset B$ signifie que A est inclus dans B, c'est-à-dire que la réalisation A implique celle de B.

Définition 1.10. Deux événements A et B sont égaux si $A \subset B$ et $B \subset A$

••• Système complet d'événements

Définition 1.11. Deux événements A et B sont dits incompatibles si :

$A \cap B = \emptyset$. Concrètement, deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Définition 1.12. On appelle système complet d'événements toute partition de Ω .

Définition 1.13. En désignant par I une partie de $\mathbb{N}$, l'ensemble $(A_k, k \in I)$ est un système complet d'événements si :

- (1) $\forall k \in I, A_k \neq \emptyset$
- (2) $\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$
- (3) $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ (les A_k sont deux à deux incompatibles).

II. Espaces probabilisés

•• Probabilité

Définition 1.14. On appelle probabilité définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{H})$, toute application P de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- (1) $\forall A \in \mathcal{H}, P(A) \geq 0$
- (2) $P(\Omega) = 1$
- (3) L'application P est σ -additive, c'est-à-dire que, si I désigne une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k \in I}$ est une suite d'événements 2 à 2 incompatibles, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{k \in I} A_k\right) = \sum_{k \in I} P(A_k)$$

Définition 1.15. Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ est appelé espace probabilisé

Définition 1.16. Un événement A de probabilité égale à 1 est dit « quasi-certain ». On dit aussi qu'il est presque sûr que A se réalise.

Définition 1.17. Un événement A de probabilité nulle est dit « quasi-impossible ». On dit aussi qu'il est presque sûr que A ne se réalise pas.

••• Exemple de probabilité : l'équiprobabilité

Définition 1.18. Lors d'une épreuve aléatoire pour laquelle Ω est fini, on dit que l'on est en situation d'équiprobabilité lorsque les événements élémentaires ont tous la même probabilité.

Exemple 1.3. On lance une pièce équilibrée et on note P_k (respectivement F_k) l'événement « obtenir pile (respectivement face) au $k^{\text{ième}}$ lancer $k \geq 1$

Alors, on a : $P(P_k) = P(F_k) = \frac{1}{2}$

Théorème 1.1. Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

••• Conséquences de la définition d'une probabilité

Propriété 1.3. $P(\emptyset) = 0$

Propriété 1.4. Pour toute famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements 2 à 2 incompatibles, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

Propriété 1.5. Pour tout événement A , on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Propriété 1.6. Pour tout événement A , on a : $0 \leq P(A) \leq 1$

Propriété 1.7. Croissance de la probabilité. On désigne par A et B deux événements : si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

••• Théorèmes de limite monotone

Théorème 1.2. Si (A_n) est une suite croissante d'événements $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Théorème 1.3. Si (A_n) est une suite décroissante d'événements $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Théorème 1.4. Conséquences des deux derniers théorèmes précédents. Si (A_n) est une suite quelconque d'événements, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right), \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

••• Formule du crible (ou formule de Poincaré)

Théorème 1.5. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements quelconques, alors on a :

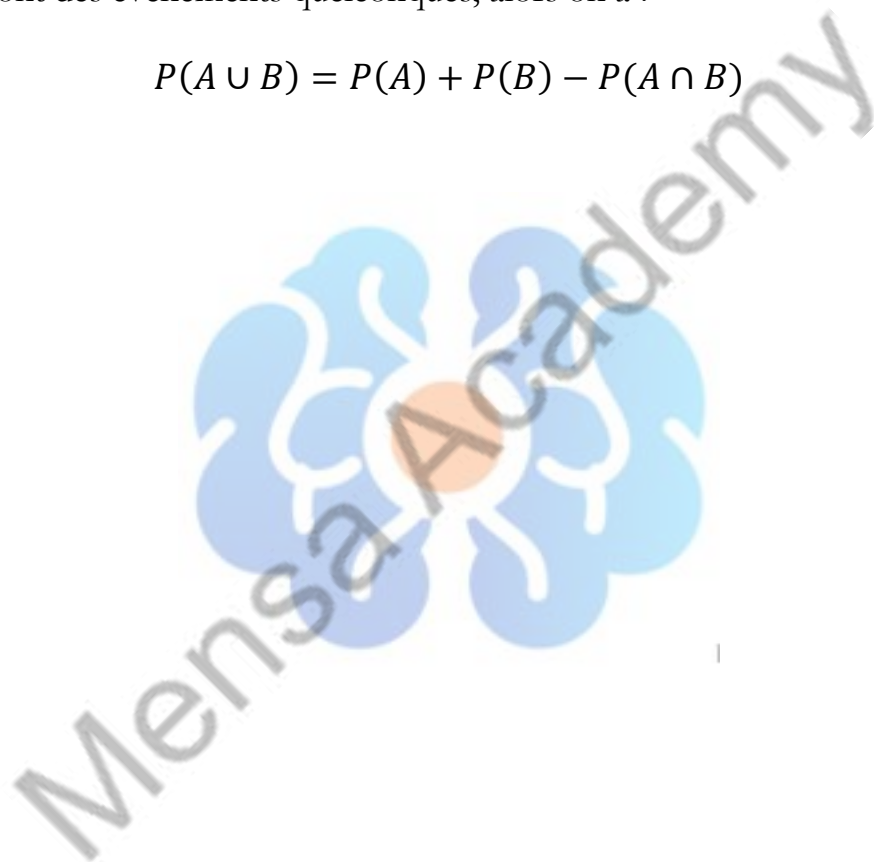
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Remarque 1.6. Très souvent, la probabilité $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ ne dépend pas des indices $i_1, \dots, i_k$ et il suffit pour calculer la somme intérieure, de multiplier la valeur de cette probabilité par le nombre de termes de cette somme, à savoir C_n^k .

Théorème 1.6. Un cas particulier important.

Si A et B sont des événements quelconques, alors on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Chapitre 12 : Conditionnement et indépendance

I. Conditionnement

••• Probabilités conditionnelles

Définition 1.1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, l'événement B étant de probabilité non nulle.

On appelle « probabilité de A sachant que B est réalisé » ou « probabilité de A sachant B », le réel noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque 1.1. Dans la pratique, il est toujours plus simple de déterminer $P_B(A)$ que $P(A \cap B)$. La définition ci-dessus est donc performante quand on l'utilise pour calculer $P(A \cap B)$ sous la forme $P(B)P_B(A)$.

Théorème 1.1. L'application P_B est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{H})$,

Propriétés 1.1. Quelques conséquences à connaître :

$$P_B(\Omega) = 1 ; P_B(\emptyset) = 0 ; P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$

$$P_B(E \cup F) = P_B(E) + P_B(F) - P_B(E \cap F)$$

••• Formule des probabilités composées

Théorème 1.2. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque 1.2. Cette formule est intéressante lorsque l'on a affaire à une (ou des) urne(s) à contenu évolutif (on ne remet pas les boules déjà extraites ou l'on n'en remet que certaines, ou l'on remet les boules extraites accompagnées de boules supplémentaires...).

•• Formule des probabilités totales

Théorème 1.3. Soit I une partie, finie ou non de $\mathbb{N}$.

Si $(A_k, k \in I)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement E , on a :

$$P(E) = \sum_{k \in I} P(E \cap A_k)$$

Théorème 1.4. Conséquence immédiate. Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$. Si $(A_k, k \in I)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement E , on a :

$$P(E) = \sum_{k \in I} P(A_k)P_{A_k}(E)$$

Remarque 1.3. Avec le système complet d'événements $(A, \bar{A})$, la formule des probabilités totales devient : $P(E) = P(A)P_A(E) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(E)$

•• Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

Théorème 1.6. Formule de Bayes généralisée.

Si $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B de probabilité non nulle, on a :

$$P_B(E_i) = \frac{P(E_i)P_{E_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P_{E_k}(B) P(E_k)}$$

II. Indépendance

•• Indépendance de deux événements

Définition 1.2. Soient deux événements A et B définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. On dit que A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Théorème 1.7. Si A est une probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(A)$

Théorème 1.8. Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants, $\bar{A}$ et B sont indépendants, et, pour finir $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

•• Indépendance mutuelle de plusieurs événements

Définition 1.4. Soit I une partie, finie ou non de $\mathbb{N}$ et $(E_k)_{k \in I}$ une famille d'événements définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$.

On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si, pour tout k de $\mathbb{N}$ non nul et pour toute liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'éléments distincts de I , on a :

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) \dots P(E_{i_k})$$

Exemple 1.1. Les événements A, B et C sont mutuellement indépendants si et seulement si :

- (1) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- (2) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$



Chapitre 13: Variables aléatoires discrètes

I. Loi d'une variable aléatoire discrete

•• Première définition

Exemple 1.1. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges (b et r étant dans $\mathbb{N}^*$). On réalise 3 tirages d'une boule en remettant la boule tirée après chaque tirage et on rappelle X le nombre de boules blanches obtenues. On dit que X est une variable aléatoire.

Par exemple, en notant B_k l'événement « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage ». L'événement :

$(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)$ Sera noté $(X = 2)$

Exemple 1.2. Une pièce amène pile avec la probabilité p avec :

$(0 < p < 1)$ Et face avec la probabilité $1 - p$. On lance indéfiniment cette pièce et on appelle Y le numéro du lancer auquel on obtient la première pile. On dit que Y est une aléatoire. Par exemple en notant P_k l'événement « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer », l'événement $\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3$ sera noté $(Y = 3)$.

Définition 1.1. Une variable aléatoire est dite discrète, si son support est fini ou dénombrable, nous pouvons donc avoir deux types de variables aléatoires (discrètes finies comme X , dans le premier exemple) ou (discrètes infinies comme Y , dans le deuxième exemple).

••• Événements liés à une variable aléatoire discrète

Notations

** L'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$ ou $[X = x]$

** L'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ est noté $(X \leq x)$ ou $[X \leq x]$

Exemple 1.3. On lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on appelle S la somme des points portés par les faces supérieures après immobilisation des dés.

* L'événement $(S = 4)$ est l'ensemble $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

* L'événement $(S \leq 4)$ est l'ensemble $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

Définition 1.2. L'ensemble $S = \{(X = x_k, x_k \in X(\omega))\}$ est appelé système d'événements associé à la variable aléatoire discrète X .

••• Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.3. Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X , définie sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, c'est trouver $X(\Omega)$, puis donner, pour tout x_k de $X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x_k)$.

Exemple 1.4. Pour la variable aléatoire S de l'exemple précédent. On a : $S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$ et :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S=k)	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Propriété 1.1. Si X est une variable aléatoire discrète, définie sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, dont le support est $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, on a : $\sum_{k \in I} P(X = x_k) = 1$.

Définition 1.4. Soit une partie I de $\mathbb{N}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ définit la loi de probabilité d'une certaine variable aléatoire X dont le support est I , si : $\forall n \in I, u_n > 0$ et $\sum_{k \in I} u_k = 1$. Si tel est le cas, on a : $\forall n \in I, P(X = n) = u_n$

••• Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.5. Si X est une variable aléatoire discrète, on appelle fonction de répartition de X , la fonction F définie, pour tout réel x , par $F(x) \leq x$.

Propriété 1.2. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X : si des variables aléatoires ont la même fonction de répartition, elles ont la même loi.

Propriété 1.3. La fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrète est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, et admet les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Théorème 1.1. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété précédente (croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$) peut être considérée comme la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X discrète.

Propriété 1.4. Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Si X est une variable aléatoire discrète dont le support est $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, alors sa fonction de répartition est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{k \in I, x_k \leq x} P(X = x_k) = 1$$

Exemple 1.5. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)$$

Propriété 1.5. Soit X une variable aléatoire discrète, de fonction de répartition F , pour tout couple de réels (a, b) tel que $a < b$, on a :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Propriété 1.6. Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs entières (c'est-à-dire que $X(\Omega)$ ne contient que des nombres entiers), et de fonction de répartition F . On a : $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = F(k) - F(k - 1)$.

••• Transformée d'une variable aléatoire discrète

Théorème 1.2. Soit une variable aléatoire discrète X définie sur $(\Omega, \mathcal{H})$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'application Y de Ω dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout ω de Ω , par : $Y(\omega) = g(X(\omega))$, est une variable aléatoire réelle discrète notée $g(X)$.

Remarque 1.2. Soient deux réels a et b et un entier naturel n . Si X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probablisable $(\Omega, \mathcal{H})$, alors :

$X^n, aX + b, e^X, |X|, \dots$ Sont des variables aléatoires discrètes, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{H})$.

II. Moments d'une variable aléatoire discrète

••• Espérance d'une variable aléatoire discrète finie

Définition 1.6. Si X est une variable aléatoire discrète finie, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, et telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$, l'espérance mathématique (ou espérance) de X est le réel $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{k \in I} x_k P(X = x_k)$$

Exemple 1.6. Si, par exemple, $X(\Omega) = \{-3, 2, 4\}$, alors on évite le symbole $\sum$ et on écrit $E(X) = -3P(X = -3) + 2P(X = 2) + 4P(X = 4)$.

Remarque 1.3. L'espérance d'une variable aléatoire discrète finie X est la moyenne des valeurs prises par X , pondérée par les probabilités de chacune de ces valeurs.

Remarque 1.4. Les valeurs discrètes finies ont toujours une espérance.

••• Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie

Définition 1.7. Soit X une variable aléatoire discrète infinie, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit que X admet une espérance si la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ avec $k \in I$ est absolument convergente.

Dans ce cas, l'espérance de X est le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{k \in I} x_k P(X = x_k)$$

Exemple 1.7. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X a une espérance, alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$$

Remarque 1.5. Il existe des variables aléatoires qui n'ont pas d'espérance.

••• Théorème de transfert

Théorème 1.3. Soit une application g de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire discrète X définie sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$ où I est une partie finie ou non de $\mathbb{N}$.

Si $g(X)$ admet une espérance, alors cette espérance vaut :

$$E(g(X)) = \sum_{k \in I} g(x_k)P(X = x_k)$$

Remarque 1.5. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, les notations se simplifient et la condition d'existence de $E(g(X))$ est la convergence absolue de la série de terme général $g(k)P(X = k)$.

Propriété 1.7. Conséquence du théorème de transfert

Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, alors, quels que soient les réels a et b , la variable aléatoire $aX + b$ admet elle aussi une espérance et on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Définition 1.8. Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle.

Propriété 1.8. Si la variable aléatoire X a une espérance, alors $X - E(X)$ est centrée.

••• Variance d'une variable aléatoire

Définition 1.9. Moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$. Si la variable aléatoire X^r possède une espérance, alors le réel $E(X^r)$ est appelé moment d'ordre r de X et on a :

$$E(X^r) = \sum_{k \in I} x_k^r P(X = x_k)$$

Exemple 1.8. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X a un moment d'ordre r , alors :

$$E(X^r) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^r P(X = k) \text{ En particulier : } E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^2 P(X = k)$$

Théorème 1.4. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et soient deux entiers naturels r et r' tels que $r' < r$. Si X a un moment d'ordre r , alors X a un moment d'ordre r' .

Définition 1.10. Moment centré d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)

Si X la variable X^r possède une espérance, alors le réel $E((X - E(X))^r)$ est appelé moment centré d'ordre r de X . On a alors :

$$E((X - E(X))^r) = \sum_{k \in I} (x_k - E(X))^r P(X = x_k)$$

Définition 1.11. Variance d'une variable aléatoire discrète. Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, et admettant un moment d'ordre 2, alors X admet un moment centré d'ordre 2. Ce dernier est appelé la variance de X et est notée $V(X)$. On a donc :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{k \in I} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$$

Remarque 1.6. La variance est un réel positif ou nul.

Remarque 1.7. La variance mesure la dispersion de la variable par rapport à son espérance.

Définition 1.12. Si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, on appelle écart type de X , le réel positif, noté σ_X , défini par : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 1.9. Formule de Koenig-Huygens. Si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriété 1.10. Si a et b sont deux réels et si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, alors la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition 1.13. Une variable aléatoire discrète X ayant une espérance et une variance est dite réduite si sa variance est égale à 1.

Définition 1.14. Une variable aléatoire discrète X ayant une espérance et une variance est dite centrée réduite si : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Propriété 1.11. Si X possède une espérance et une variance non nulle, alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma_X}$ est une variable centrée réduite : c'est la variable centrée réduite associée à X .

Chapitre 14 : Sommes et Produits

I. Sommes de nombres réels

••• Présentation du symbole $\sum$

Notation. Les sommes sont symbolisées par la lettre grecque sigma majuscule.

Pour tout entier naturel n non nul, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des réels, la somme $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ se note symboliquement : $\sum_{k=1}^n x_k$ ou $\sum_{1 \leq k \leq n} x_k$.

Dans la somme ci-dessus, k s'appelle l'indice, 1 et n sont les bornes de la somme.

Plus généralement, quels que soient les entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, on a :

$$x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^n x_k$$

Exemple 2.1. $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Remarque 2.1. L'indice d'une somme est dit muet, ce qui signifie que l'on peut écrire :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j = \dots$$

••• Premières propriétés

Propriété 2.1. Si $p \leq n$, alors la somme $\sum_{k=p}^n x_k$ contient $(n - p + 1)$ termes.

Propriété 2.2. Somme de quelques termes d'une suite constante : $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1)a$$

Propriété 2.3. $\forall n \in \mathbb{N}$, (cas d'une suite réduite à un seul terme).

$$\sum_{k=n}^n x_k = x_n$$

Propriété 2.4. $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq m + 1,$

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^m x_k + \sum_{k=m+1}^n x_k$$

Propriété 2.5. Factorisation par λ qui ne dépend pas de l'indice

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k$$

Propriété 2.6. Découpage d'une somme

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k$$

••• **Changement d'indice**

Propriété 2.7. Cas d'une translation d'indice

Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ et m un entier (positif ou négatif), alors on a :

$$\sum_{k=p}^n x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = k+m$

Exemple 2.2. Changement d'indice pour $j = i + 1$. $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\sum_{i=0}^{2n} \frac{e^j}{(i+1)^2} = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{e^{j-1}}{j^2}$$

Propriété 2.8. Cas d'un retournement de la somme

Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ et m un entier supérieur ou égal à n , alors on a :

$$\sum_{k=p}^n x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = m - k$

Exemple 2.3. Changement d'indice pour $i = n - k$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (k+1)\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$$

Remarque 2.2. Tout autre changement d'indice que ceux indiqués dans les propriétés 2.7 et 2.8 (c'est-à-dire $i = k+m$ ou $i = m - k$) conduit à une catastrophe car il modifie le nombre de termes de la somme et modifie donc la somme.

••• Sommes usuelles

Propriété 2.9. Somme des premières puissances des n premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Propriété 2.10. Somme géométrique

$$\text{On désigne par } q \text{ un réel. } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Remarque 2.3. Plus généralement, lorsque $q \neq 1$, on a : $\forall n \geq p,$

$$\sum_{k=1}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

On peut retenir cette formule en notant que q^p est le premier terme de la somme et $(n - p + 1)$ est le nombre de termes de la somme.

•• « Télescopage » de sommes

Propriété 2.11. Quels que soient les réels $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

Il faut savoir prouver cette propriété et ne pas se contenter de l'apprendre par cœur, car elle prend plusieurs formes, comme par exemple :

$$\sum_{k=1}^n (x_{k-1} - x_k) = x_0 - x_n$$

II. Sommes doubles

•• Sommes doubles

Notation. La somme des nm nombres $(x_{i,j})$, où i parcourt l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et j parcourt l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$ est notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j}$

Remarque 2.4. Si $m = n$, les sommes ci-dessous sont équivalentes

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j} \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{i,j}$$

Exemple 2.4. Avec $n = 3$, on a l'expression :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_{i,j} = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3}$$

Propriété 2.12. Inversion de sommes

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right)$$

Remarque 2.5. Les parenthèses sont inutiles donc :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j}$$

••• Exemples de sommes doubles à indices dépendants

Propriété 2.13. Interversion de sommes à indices dépendants

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_{i,j}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

Propriété 2.14. Quels que soient les n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j}$$

III. Produit de nombres réels

••• Présentation du signe Π

Notation. Soit n un entier naturel non nul, et n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$

Le produit $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ se note symboliquement : $\prod_{k=1}^n x_k$

Définition 2.1. Pour tout entier naturel n , on appelle factorielle de n , et on note $n!$, l'entier naturel défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Définition 2.2. Définition « récursive » de $n!$

$0! = 1$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1)!$

••• Propriétés

Propriété 2.15. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$$

Propriété 2.16. $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq m+1$,

$$\prod_{k=1}^n x_k = \left(\prod_{k=1}^m x_k \right) \times \left(\prod_{k=m+1}^n x_k \right)$$

Propriété 2.17. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n x_k y_k = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n y_k \right)$$

Propriété 2.18. Si aucun des y_k n'est nul, alors :

$$\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^n y_k}$$

Propriété 2.18. Télescopage ($\forall n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_n$ soient non nuls)

$$\prod_{k=0}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$

••• Exercices.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \frac{n(n+3)}{4}$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k(k+3)} \right) = \ln \left(\frac{3n+3}{n+3} \right)$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{7}{2(n+2)}$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Chapitre 15 : Séries

I. DÉFINITIONS

••• **Définition 1.1.** On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où (u_n) est une suite réelle et où la suite (S_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles de la série (ou associée à la série).

Notation. La série de terme général u_n est souvent notée $\sum u_n$. Attention, ceci n'est qu'une notation sans aucun sens « sommatoire » car la somme n'a ni indice, ni bornes !

S'il y a le moindre risque de confusion avec une vraie somme (comme par exemple S_n), il vaut mieux écrire en entier « la série de terme général u_n ».

Remarque 1.1. Il est possible que la suite (u_n) ne soit définie qu'à partir du rang 1, ou même du rang n_0 , il suffit alors de changer la borne inférieure des sommes que l'on rencontre.

II. NATURE D'UNE SÉRIE

••• Séries convergentes, séries divergentes

Définition 1.2. Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge, lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles associée converge. Sinon, on dit que la série diverge.

Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée somme de la série de terme général u_n et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

On a donc : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$

Remarque 1.2. Les séries dont il est facile de trouver la somme sont celles dont le terme général s'écrit sous la forme : $u_n = v_{n+1} - v_n$. En effet, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$. Il ne reste plus qu'à connaître le comportement de la suite (v_n) pour conclure sur la série $\sum u_n$ et réciproquement.

Exemple 1.1. Soit un réel q tel que $|q| < 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$$

Exemple 1.2. Considérons la série $\sum 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n 1 = n + 1. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n 1 = +\infty$$

Donc, la série $\sum 1$ diverge.

Propriété 1.1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors quels que soient les réels a et b , la série $\sum (au_n + bw_n)$ converge. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bw_n) = a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Mise en garde. Il peut se faire que la série $\sum (au_n + bw_n)$ converge, alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ divergent. On ne scinde donc pas la somme d'une série converge en deux sommes de séries sans avoir vérifié au préalable que ces deux séries convergent.

Théorème 1.1. Condition nécessaire de convergence.

- Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge.

Remarque 1.3. Le résultat est facile à établir en remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge, en notant S sa somme, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Remarque 1.4. La réciproque du **théorème 1.1** est fausse : on peut bien avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ sans que la série de terme général u_n converge.

•• Somme partielle d'une série à termes positifs

Propriété 1.2. La suite (S_n) des sommes partielles associée à une série à termes positifs est croissante (car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$)

Si la suite des sommes partielles est majorée alors la série $\sum u_n$ converge

Sinon, la série diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

•• Séries absolument convergentes

Définition 1.3. La série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1.2. Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 1.5. La réciproque est fausse : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Théorème 1.3. Si une série est absolument convergente, alors on ne change ni sa nature, ni sa somme, en changeant l'ordre de sommation de ses termes.

III. SÉRIES USUELLES

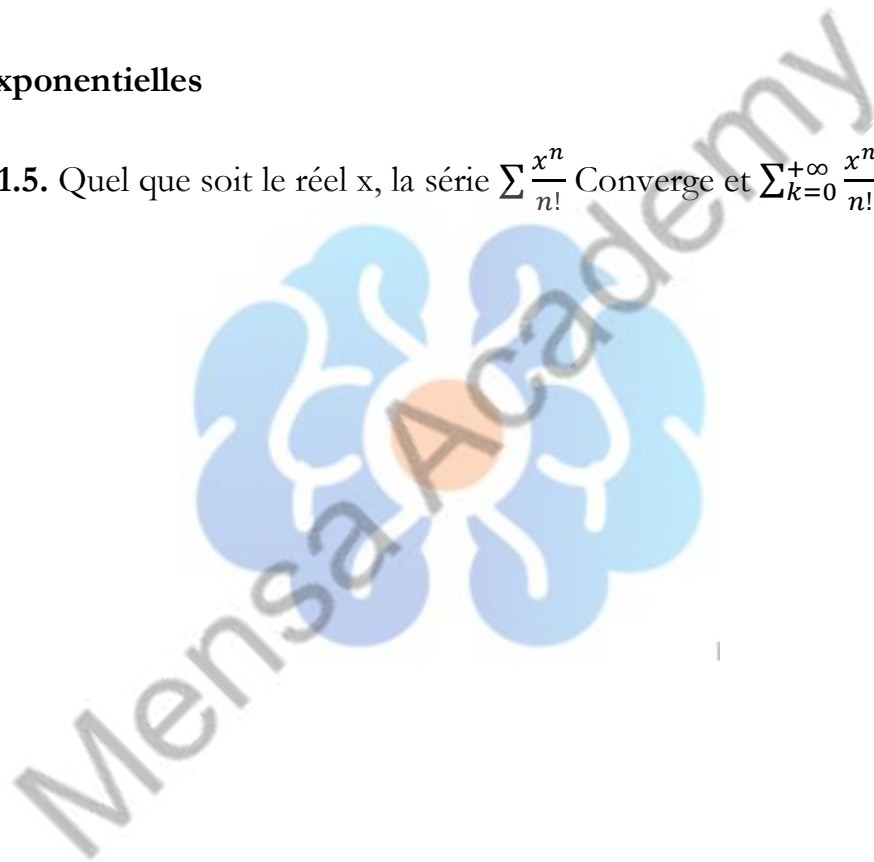
•• Séries géométriques

Théorème 1.4. Les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

- $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ Série dite géométrique simple
- $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ Série dite géométrique dérivée d'ordre 1
- $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ Série dite géométrique dérivée d'ordre 2

••• Séries exponentielles

Théorème 1.5. Quel que soit le réel x , la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ Converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$



Chapitre 16 : Calcul matriciel

Dans ce cours, on note $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n dans $\mathbb{K}$ (i.e. n lignes n colonnes)

Rang d'une matrice, matrices inversibles et opérations sur les matrices

••• Opérations élémentaires sur les matrices

Il existe 3 types de transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul

Addition d'un multiple d'une ligne par une autre ligne.

Echange de deux lignes.

L'on définit de manière analogue les transformations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

••• Définition

Mettre une matrice sous forme échelonnée-ligne revient à y effectuer une succession de transformations élémentaires sur les lignes jusqu'à obtention d'une matrice $A = (a_{ij})$ vérifiant :

S'il y a dans A des lignes nulles, elles apparaissent comme dernières lignes de A .

Si a_{ij} est le premier élément non nul d'une ligne quelconque i de A , alors tous les coefficients de A situés dans le coin inférieur gauche défini par a_{ij} sont nuls. C'est-à-dire que si $r > i$ et $p \leq j$, alors $a_{rp} = 0$.

De manière analogue, on définit la matrice échelonnée-colonne en remplaçant ligne par colonne et coin inférieur gauche par coin supérieur droit. Donc si $r \leq i$ et $p > j$, alors $a_{rp} = 0$.

••• Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles présentes dans une forme échelonnée-ligne de ladite matrice ; c'est aussi le nombre de colonnes non nulles dans une forme échelonnée-colonne de ladite matrice.

••• Matrices inversibles (ou régulière)

Une matrice carrée A d'ordre n (i.e. $A \in M_n(\mathbb{K})$) est dite inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. L'inverse de A est noté A^{-1} .

••• Proposition

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible, alors $(A^{-1})^{-1} = A$

Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

••• Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$; les propositions suivantes sont équivalentes :

A est inversible

Le rang de A est n . (On dit que A est de rang maximal)

••••• Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de A et dire si A est inversible.

••••• Solution

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \leftarrow 4l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow 4l_3 - l_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_3 \leftarrow 3l_3 + l_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rg}(A) = 3$, et par suite, A est inversible.

••••• Calcul du déterminant

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{Et } B = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} = a(ei - fh) -$$

$$d(bi - ch) + g(bf - ec)$$

••• Application

Une matrice est inversible lorsque son déterminant est non nul.

Remarque : $\det(a)\det(a^{-1}) = 1$

Inverse d'une matrice

••• Matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice telle que $ad - bc \neq 0$ alors son déterminant est non nul donc A est inversible. On a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

••• Matrice d'ordre ≥ 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et A_{ij} la matrice obtenue de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Le mineur de l'élément a_{ij} est le déterminant de A_{ij} : $\text{mineur}(a_{ij}) = \det(A_{ij})$.

Le cofacteur de a_{ij} est défini par : $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

La matrice des cofacteurs de A est définie par : $\text{cof}(A) = (\text{cof}(a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$

La transposée de la matrice des cofacteurs de A est appelée comatrice de A :

$$\text{com}(A) = [\text{cof}(A)]^T$$

On a alors la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{com}(A)$$

••••• **Exemple** : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de

A , dire si A est inversible, et si oui, calculer son inverse.

••••• Solution

Déterminant de A

Suivant la 1^{ère} ligne : $\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(1 - 8) + 0 + (-8 + 3) = -19$$

Puisque $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et on a : $A^{-1} = \frac{1}{-19} \text{com}(A)$

$$\text{On a : } \text{cof}(a_{11}) = \text{cof}(2) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\text{cof}(a_{12}) = \text{cof}(0) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{cof}(a_{13}) = \text{cof}(1) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\text{cof}(a_{21}) = \text{cof}(-2) = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{cof}(a_{22}) = \text{cof}(1) = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\text{cof}(a_{23}) = \text{cof}(2) = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{cof}(a_{31}) = \text{cof}(3) = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{cof}(a_{32}) = \text{cof}(4) = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{cof}(a_{33}) = \text{cof}(-1) = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{Donc } \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & -8 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{com}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -6 \\ -5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A) = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -6 \\ -5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

•••Propositions

$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$, A et B étant deux matrices carrées de même ordre.

Si on échange entre elles deux lignes ou deux colonnes de A , alors $\det(A)$ change de signe.

Si l'une des lignes (resp. Colonnes) de A est nulle, ou est une combinaison linéaire des autres lignes (resp. Colonnes), alors $\det(A) = 0$.

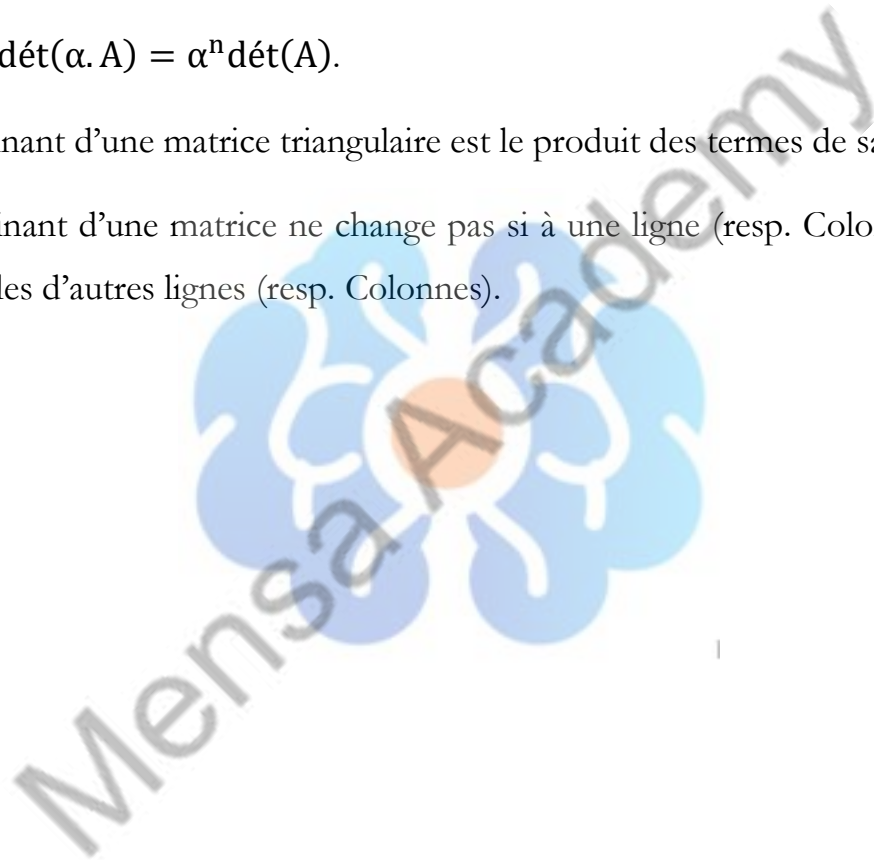
$$\det(A^T) = \det(A)$$

Si C est la matrice obtenue de A en multipliant l'une de ses lignes ou l'une de ses colonnes par un scalaire α , alors $\det(C) = \alpha \cdot \det(A)$. on en déduit que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det(A).$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes de sa diagonale.

Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une ligne (resp. Colonne), on ajoute des multiples d'autres lignes (resp. Colonnes).





Culture générale

« La culture ne sauve rien ni personne, elle ne justifie pas. Mais c'est un produit de l'homme : il s'y projette, s'y reconnaît ; seuls ce miroir critique lui offre son image »

Jean-Paul Sartre.....

Partie II : Culture Générale – Condensés de Cours

Introduction

Les *programmes* des épreuves de culture générale varient dans l'espace et dans le temps. Ils peuvent limiter le champ des révisions au XX^e siècle et à la France, ou bien s'étendre de la préhistoire à nos jours dans un cadre international. Dans tous les cas, l'épreuve de culture générale se veut *interdisciplinaire*. Vous devez aborder un même thème d'un point de vue :

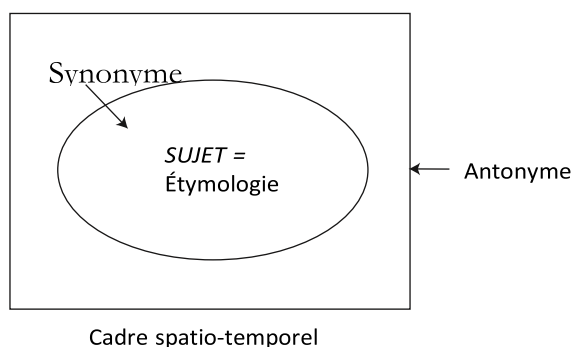
- Culturel,
- Économique,
- Social
- Politique.

Toutefois, « politique » ne signifie pas partisan et vous devez respecter le principe de neutralité. C'est pourquoi votre plan doit permettre de peser le pour et le contre afin de démontrer que vous avez *l'esprit ouvert* tout en terminant dans votre dernière partie sur le point de vue qui pourrait être le vôtre, et avec un effort de réflexion prospective.

Sachez que les comparaisons internationales judicieuses seront toujours les bienvenues au cours de vos développements, de même que toute réflexion sur les perspectives européennes. Voir plus loin nos conseils sur les cadres spatio-temporels.

Le travail des définitions

Votre *introduction* doit immédiatement aborder la définition des mots-clés. C'est pour cela que les dissertations proposées dans le présent volume débutent par la définition des termes choisis par l'auteur. Si un mot vous pose une difficulté et que vous ne connaissez pas sa définition exacte, essayez de l'aborder par le biais des synonymes et antonymes. Ainsi, vous aurez défini le cadre externe de votre dissertation, ou hors sujet.



Cerner la problématique

Méfiez-vous de votre première idée, elle est souvent la bonne. Il se peut que dès la première lecture du sujet vous en ayez saisi la problématique. Le cas échéant, l'examen des relations logiques entre les *mots-clés* vous permettra de formuler la problématique du sujet.

Si malgré cela vous ne parvenez pas à cerner la problématique du sujet, transformez en question le mot ou le groupe de mots qui est soumis à votre analyse.

Par exemple, pour un sujet du type :

« Les relations entre générations » (Troisième Concours de l'ENA session 2004).

Vous pouvez judicieusement transformer cette affirmation en une suite de questions, comme :

- Existe-t-il encore des relations entre les générations ?
- Quels types de relations persistent entre les générations ?
- En quoi les relations intergénérationnelles d'aujourd'hui diffèrent-elles de celles d'hier ?

Pour mémoire

Le sujet du concours externe 1961 portait sur « les conflits de générations dans la France contemporaine ». Imaginez comment le sujet aurait pu être traité à l'époque, et déterminez comment vous le traiteriez aujourd'hui.

L'approche des cadres spatio – temporels du sujet

Le cadre spatial

Même si votre sujet se cantonne à la France, il semble judicieux, ne serait-ce qu'en conclusion et donc en ouverture, d'élargir votre approche à nos voisins européens ou à l'Occident. Inversement, un sujet large, qui spécifie une approche mondiale (« dans le monde », « et à l'étranger »), ne tolérera pas une approche réductrice et nationale.

Le cadre temporel

Bien sûr, les sujets les plus ouverts (« de l'Antiquité à nos jours ») restent les plus périlleux, de bonnes connaissances historiques dans divers domaines s'avérant nécessaires. Cependant, un sujet limité à notre époque ne vous interdit pas des comparaisons avec les époques passées ni la prospective.

Pour reprendre l'exemple précédemment cité : « Les relations entre générations », l'absence de cadre spatio-temporel dans la formulation même du sujet implique une approche internationale et historique. Vous pouvez ainsi utilement remarquer que le XX^e siècle, avec les progrès de la médecine, a permis pour la première fois de l'Histoire à quatre générations de cohabiter. Toutefois, pour des raisons culturelles, le lien social se délite alors que l'individualisme se développe.

Le travail sur les mots clés

En balayant les annales des sujets de culture générale, vous constaterez la permanence de certains thèmes et mots-clés. Pour cela, nous vous proposons 30 fiches qui devraient vous permettre de vous entraîner au mieux à ce type d'épreuve.

Ces mots-clés peuvent se regrouper autour des grands thèmes suivants :

- L'art, la culture, l'architecture,
- Les valeurs, la morale, les religions,
- Les sciences, la recherche, l'éducation, la communication,
- L'État, la nation, la société, la démocratie, le pouvoir, le droit, la justice,

- L'économie, la démographie,
- L'environnement,
- La France, l'Europe, le monde, les relations internationales.

Vous constatez ainsi que le classement peut aller depuis les « grands thèmes classiques » de la culture générale jusqu'aux disciplines les plus récentes, en passant par les grandes notions de la science politique.

Le travail sur un mot clé

Penser aussi à la notion de « mot-carrefour »

Nous serions tentés de dire que la technique vaut autant que le fond.

Vous découvrez votre sujet et avez accordé cinq bonnes minutes à examiner la première impression que vous en retirez. Pendant la demi-heure qui suivra, il vous faudra trouver un minimum de 9 idées confortées par des exemples ou citations, pour composer votre dissertation. En effet, il vous faut :

1. Une définition ou approche historique du mot-clé
2. Un exemple pour introduire la problématique
3. Une idée pour le titre de la partie A
4. Une idée pour le titre de la partie B
5. Une idée pour la première partie du grand A
6. Une idée pour la seconde partie du grand A
7. Une idée pour la première partie du grand B
8. Une idée pour la seconde partie du grand B
9. Une idée pour la conclusion.

Et cela constitue un strict minimum. Aussi, pour démarrer votre recherche, vous pourrez exploiter utilement la méthode de Quintilien, à savoir vous poser les questions suivantes sur le sujet :

Qui ?

Quoi ?

Quand ?

Où ?

Comment ?

Pourquoi ? Et après ?

Ce qui pourrait donner pour le sujet « les relations entre générations », le brouillon suivant :

Qui ? Les adolescents / Les personnes âgées / Les adultes / Les enseignants

Quoi ? L'échange / Le dialogue / L'expérience / La mémoire /

Le maître et l'élève

Quand ? La Préhistoire / L'Antiquité grecque / Le Moyen Âge / Le XIX^e et la Révolution industrielle / De nos jours et l'individualisme

Où ? En Afrique (épreuves initiatiques) / En Asie (confucianisme) / En Occident

Comment ? Les associations / L'école

Pourquoi ? La filiation / L'amitié entre les générations /

La transmission du savoir

Et après ? La désocialisation (absence de relation) : les orphelinats ; les hospices

Pour structurer votre développement, essayez de construire un brouillon comme suit :

IDÉES	FAITS

Reprenons notre exemple de sujet :

Les relations entre générations (Troisième Concours de l'ENA session 2004)

Vous récolterez dans la colonne de gauche les idées qui vous viennent à l'esprit, tandis que celle de droite servira à illustrer ces idées. Par conséquent, dans la colonne intitulée « faits » vous noterez des dates, chiffres, faits historiques, titres d'ouvrages et autres exemples concrets ou citations qui serviront votre démonstration.

IDÉES	FAITS
Les jeunes assistent leurs aînés	Allongement de la durée de la vie XX ^e siècle : Première fois dans l'Histoire de l'Humanité que 4 générations se côtoient
Idée de transmission des mœurs et coutumes	De nos jours : L'initiation en Afrique
	L'éphèbe et l'Éraste dans la Grèce antique
Idée de transmission du savoir, des connaissances	L'École Le maître et l'élève
Le devoir de Mémoire	Primo Levi <u>Si c'est un homme</u> (1947)
Réciprocité : les jeunes aident les plus vieux et les anciens initient la jeunesse	

Fragilité des deux extrêmes, les très jeunes et les très vieux	Les hospices : exemple <u>La Vieille Charité</u> à Marseille (de Pierre Puget) qui accueillait orphelins et adultes
L'âge ne serait pas un facteur discriminant	Séparation des activités (domestiques ou non) par sexe et non par âge
	Été 2003 : la canicule, les personnes âgées victimes de leur isolement

Voici un autre exemple de sujet :

La France dans le monde contemporain.

Appliquons la méthode de Quintilien.

Qui ?

-
- Les Français
 - Les étrangers et leur regard sur la France

Quoi ?

-
- La grandeur de la France
 - L'influence de la France sur la politique internationale
 - Les anciennes colonies, la colonisation
 - La décolonisation, les aides bilatérales

Quand ?

-
- Le siècle des Lumières et le rayonnement de la France
 - La Révolution française

- La place de la France avant la Seconde Guerre mondiale

Où ?

- En Asie
- En Afrique
- En Europe
- La Nouvelle-Calédonie, Kourou, La Réunion

Comment ?

- La francophonie
- Les guerres
- La politique internationale

Pourquoi ?

- Les enjeux économiques
- Les implantations stratégiques sur tous les continents et dans de nombreuses îles

Et après ?

- L'Union européenne, l'avenir de la France

IDÉES	FAITS
L'héritage de la France dans le monde	La francophonie Les Droits de l'Homme
La France dans l'Europe	1947 J. Monnet et R. Schuman
La France et ses anciennes colonies	J. Delors Président de la Commission européenne (1985-1995)
La France dans les institutions internationales	Les aides bilatérales L'ONU. La CEE. La FAO L'Unesco. L'OCDE Le Conseil de l'Atlantique Nord L'OMI L'OIT Le FMI et l'OMC

Après avoir récolté les idées pour ce sujet incontournable, voici un exemple de devoir rédigé.

« *J'aime tout dans la France, excepté ce qu'on est convenu d'appeler l'esprit français* » écrivait Victor Hugo.

C'est vers 481 que Clovis devint roi des Francs saliens de Tournai et en 510 que fut publié le code de lois saliques (règne des Mérovingiens). En 771, l'avènement de Charlemagne fonda la dynastie des Carolingiens. Charlemagne fut proclamé Empereur d'Occident en l'an 800. En 987, Hugues Capet fut élu roi de France et fonda la dynastie

des Capétiens qui perdura jusqu'à la Révolution française (Louis XVI) puis jusqu'à Louis-Philippe (1848) après la Restauration de 1814-1815. Au XIII^e siècle, la langue française devint la langue administrative officielle pour tout le royaume.

La France a été une grande puissance au rayonnement international. Au début du XVII^e siècle, on peut dire qu'elle occupait sur le plan diplomatique la place qu'occupent aujourd'hui les États-Unis. De nos jours, elle n'est plus qu'une puissance moyenne. Comment aujourd'hui la France peut-elle se transfigurer pour redevenir une grande puissance ?

Nous étudierons dans une première partie la place de la France dans l'Europe avant de nous interroger sur son influence dans les autres régions du monde.

La France s'est investie dans la construction européenne. Au moment de la nationalisation du Canal de Suez, en 1957, qui a marqué un net recul ou déclin de la France et de la Grande-Bretagne, la France signa le Traité de Rome. Aussi, on peut percevoir dans son investissement européen, une stratégie géopolitique de redéploiement. Alors qu'elle perdait ses colonies dans les années 1960, la France évolua avec son temps pour passer de l'impérialisme au régionalisme. La Constitution française de 1958 a été conçue de façon à faciliter l'ouverture de la France à de grands ensembles. Ainsi, le titre VI est consacré aux traités et accords internationaux. Le Président de la République négocie et ratifie seul les traités qui, rappelons-le (article 55), ont une autorité supérieure à celle des lois dès leur publication.

La France et particulièrement Jean Monnet ou Robert Schuman (déclaration du 9 mai 1950) ont joué un rôle fondamental dans la construction européenne (traités de 1951 et 1957, CECA, CEE et CEEA). La première présidente élue du Parlement Européen, après l'institution du suffrage universel direct, fut Simone Veil (1979), Jacques Delors fut Président de la Commission européenne pendant dix ans (1985-1995) et Valéry Giscard d'Estaing a présidé la Convention qui a préparé le projet de traité instituant une Constitution pour l'Europe, adopté en Conseil européen le 18 juin 2004. La France n'a donc cessé de s'investir au sein des institutions européennes.

Mais la France est également représentée dans le reste du monde. Elle dispose de représentations au sein de nombreuses organisations internationales. Pour n'en citer que quelques-unes, nous pouvons mentionner l'Organisation des Nations Unies (26 juin 1945 à San Francisco), la FAO (Rome), l'Unesco, l'OCDE (Paris), le Conseil de l'Atlantique nord (Bruxelles), l'OMI (Londres), l'OIT (Genève) et le FMI (Washington). La France a toujours maintenu son indépendance parallèlement à son intégration mondiale. Ainsi, le général de Gaulle permit à la France d'acquérir l'arme nucléaire et donc de sortir du joug américain en quittant l'OTAN en 1966, tout en demeurant membre de l'alliance atlantique. Mais après les deux chocs pétroliers d'abord en 1973 (guerre du Kippour), puis en 1978-1979 (Révolution islamique) et 1980 (guerre Irak-Iran), les turbulences du SMI poussèrent la CEE à créer le SME (1979). La France traversa péniblement ces « trente piteuses » loin derrière le dynamisme de son voisin Allemand avec un mark beaucoup plus fort et stable que le franc.

La France semble de retour sur la scène internationale. Ainsi, le président Jacques Chirac sut affronter la table des négociations du GATT au nom de l'exception culturelle française. En 2002, Dominique de Villepin défendit la résolution 1441 contre l'avis des États-Unis (dossier Irakien) et marqua un retour en force de la diplomatie française au sein de l'ONU. Et le français Pascal Lamy, inspecteur général des Finances, ancien directeur de cabinet de Jacques Delors et ancien Commissaire européen, a été élu à la tête de l'Organisation mondiale du commerce (OMC). Ce retour relatif de la France dans la communauté occidentale et sur le plan mondial semble en premier lieu dicté par la crainte de l'isolement. De plus, après le soubresaut irakien, la France se focalisa de nouveau sur ses vrais enjeux (insuffisance de la croissance économique, taux de chômage élevé). Aussi, Paris s'est-il de nouveau investi dans son premier dossier extérieur à savoir : la reprise de la construction européenne, et son élargissement. C'est sur ces chantiers que la France joue son avenir.

Pour conclure, la France sait s'intégrer dans de grands ensembles politiques ou économiques, sans s'aliéner. Au sein de l'Union, elle mobilisa son allié allemand contre une réforme de la PAC. Prudemment mais avec fermeté, elle maintient ses liens historiques avec

les pays d'Afrique occidentale (intervention pour tenter de maintenir la paix en Côte d'Ivoire en 2004). C'est l'image qu'elle gardera d'elle-même qui transfigurera la France en grande puissance, au lieu de se fondre dans une société mondialiste dominée par le « néolibéralisme » et des intérêts américains ou autres. En agissant en Europe et dans le monde, la France doit garder sa tradition d'humanisme, de justice et de fraternité.



Thème 01 : La démocratie dans le monde d'aujourd'hui

Étymologie/Définition/Histoire

« Une addition d'intérêts particuliers ne donnera jamais pour somme l'intérêt général et, à plus forte raison, la réussite des formations les plus puissantes ne saurait garantir que l'intérêt de tous sera sauvegardé. Cette tâche, c'est à l'État qu'elle incombe. »

Source : Traité de science politique, Georges Burdeau.

Terme d'origine grecque : *demokratia*, *demos* signifiant peuple et *kratos* l'autorité. C'est le gouvernement du peuple par lui-même.

La démocratie comme forme de gouvernement est une invention de Solon à Athènes au V^e siècle avant J.-C. On peut en lire l'éloge dans l'Oraison funèbre de Périclès.

01. Sujet proposé

La démocratie comme *isonomia* (la loi est la même pour tous), *isegoria* (l'égalité participation aux affaires) et *isocratia* (égalité participation au pouvoir) est-elle bien appliquée de nos jours ?

a. Problématique proposée

De nos jours, dans la plupart des pays occidentaux, la démocratie indirecte est pratiquée comme le constatait Francis Fukuyama dans La fin de l'Histoire après la chute de l'empire soviétique en 1991. La loi est la même pour tous et, depuis la Révolution française de 1789, l'ensemble des citoyens participe aux affaires par le biais du vote (vote des femmes accordé en 1917 aux États-Unis, et en 1944 en France).

L'*isocratia* reste ainsi théorique. Les détracteurs de la démocratie directe durant la Grèce antique, tel Platon, se sont appuyés sur une première crise de confiance lors de la condamnation de Socrate à boire la ciguë, infligée par le tribunal du peuple (pour corruption de la jeunesse). Ainsi, la démocratie peut se transformer en dictature. Georges Burdeau montre comment la démocratie, au fil des siècles, est devenue l'arme de l'élite. Ainsi, l'égalité arithmétique des citoyens a été abandonnée au profit de la « nation », corps abstrait et théorique incarné dans les représentants élus par les citoyens. Aujourd'hui, on estime qu'un retour à la démocratie directe ne peut être pratiqué car, si dans l'Antiquité Grecque l'esclavage permettait à l'élite de se consacrer entièrement aux affaires de la cité, aujourd'hui le travailleur manque cruellement de temps. La politique resterait pour cela l'affaire de professionnels.

Malgré tout, quelques expériences de la démocratie directe subsistent notamment en Suisse où la constitution helvétique prévoit l'institution d'un Landsgemeinde (assemblée du peuple) qui se réunit une fois par an pour voter les lois, le budget et désigner les magistrats. Leur travail est préparé par un conseil municipal élu. Autre vestige de la Grèce antique, le tirage au sort demeure pratiqué pour constituer les jurys d'assises en France ou aux États-Unis. L'expérience bonapartiste du référendum s'était transformée en plébiscite. La Constitution de 1958 (modifiée) a cherché à renouveler l'usage du référendum, mais en France son application reste limitée. D'autres procédures existent de par le monde : aux États-Unis notamment, on peut citer la pratique d'un veto (d'initiative) populaire.

Les députés semblent opposés à la pratique de la démocratie directe car, dans ce cas, les représentants du peuple entrent en concurrence avec le peuple lui-même (loi constitutionnelle du 28 mars 2003, article 72-1). Malgré cela, la loi du 6 février 1992 a mis en place un référendum local dans les communes. Par ailleurs, techniquement, il devient de plus en plus facile de voter directement des textes, sans se déplacer, grâce au minitel ou à Internet. Déjà, les feuilles d'imposition peuvent être remplies en toute sécurité « en ligne ». Les défenseurs de la démocratie directe y voient la solution pour que le peuple vote directement les lois. À tout moment, en effet, un citoyen pourra se connecter pour lire et voter un texte.

b. Conclusion

Georges Burdeau a réalisé une analyse incontournable de la démocratie. Par l'éducation, la France a conduit quatre-vingts pour cent d'une génération d'élèves au baccalauréat. L'éducation du peuple favorise la démocratie et fait reculer les dictatures (voir ÉDUCATION).

Bibliographie : Georges BURDEAU, La démocratie, Éditions du Seuil, 1956.

c. Citations utiles

« La démocratie, c'est le gouvernement du peuple, par le peuple, pour le peuple. » Abraham Lincoln.

« Démocratie : L'oppression du peuple par le peuple pour le peuple. » Oscar Wilde. Extrait de Vive la politique.

« Nos démocraties électives ne sont pas, ou de façon inaccomplie, des démocraties représentatives. » Paul Ricoeur. Extrait d'un Entretien avec Daniel Bermond – juin 1998.

« Dans les démocraties, chaque génération est un peuple nouveau. » Alexis de Tocqueville.

« Je suis un de ces démocrates qui croient que le but de la démocratie est de faire accéder chaque homme à la noblesse. » Romain Gary. Extrait de Chien blanc.

Thème 02 : Bonheur et politique

Étymologie/Définition/Histoire

Du latin : bonum augurium, qui signifie « ce qui est de bon augure, de bon présage ».

Par conséquent, pour les anciens, le bonheur arriverait par hasard, selon des circonstances favorables à l'individu et non pas selon la conduite (le mérite, la vertu). Cette perception du bonheur s'oppose à la philosophie asiatique du Tao he Qing de Lao Tseu. Pour ce sage chinois, au contraire, le bonheur se construit pas à pas (« la voie ») grâce à un travail de détachement (« Si tu t'attaches à une chose tu la perds »). En définitive, cette deuxième vision du bonheur se rapproche davantage de « augurium » issu du verbe « augere » (augmenter, accroître) indiquant une progression et une élévation vers le bonheur.

Le bonheur est « une idée neuve en Europe » (Saint-Just, homme de la Révolution).

02. Sujet proposé

La cité peut-elle organiser le bonheur ?

a. Problématique proposée

Le bonheur peut apparaître comme une utopie politique et se définir comme étant « le bien-être, constamment ». Il surviendrait après l'assouvissement de tous les désirs qui, eux-mêmes, tendent à accéder au plaisir. Mais contrairement au plaisir, le bonheur n'est pas un moyen (exemple : on désire l'argent pour le luxe) mais une fin en soi. Ainsi, une fois le désir du bonheur assouvi, l'individu ne voudrait plus rien d'autre. Pour cela, il définit le bonheur comme la satisfaction de toutes nos inclinations : tant en extension (en multiplicité) qu'en intensité (le degré) et qu'en propension (la durée). En cela, le bonheur resterait un idéal de l'imagination.

On ne peut aborder le thème du bonheur sans mentionner l'idéal chrétien. L'enseignement du Christ ne saurait être qualifié de révolution politique car l'annonce du

règne de Dieu coïncide avec la fin du politique. Cependant, cet enseignement implique une révolution sociale. Replacé dans son contexte culturel d'antiquité romaine où priment les valeurs de richesse (autre type de « fortune » ou « augure ») et de pouvoir, le Christ se dresse contre cette civilisation en prônant la pauvreté, le don de soi et le repentir. Le bonheur chrétien concerne la cité céleste (ou la communauté des chrétiens) et l'état de nature humaine avant la chute d'Adam et Ève. Le célèbre passage de l'Évangile « Il faut rendre à César ce qui est à César et à Dieu ce qui est à Dieu » rappelle bien que la félicité chrétienne tient de la vie spirituelle alors que toute activité politique n'a qu'une fin terrestre et n'a aucune valeur devant le jugement de Dieu.

Comment l'Homme peut-il cesser de désirer de manière durable ?

Mais le bonheur peut également être perçu comme le résultat d'une démarche personnelle. De ce point de vue, le bonheur se définit comme une bonne gestion des désirs dès qu'ils s'éveillent en l'Homme. Il ne s'agit pas ici de nier la nature humaine ni ce qui l'anime mais au contraire de la contrôler. Durant l'antiquité grecque, le stoïcisme tenta de concevoir un être humain, fait de chair et de sang, et pourtant sans désir. Pour cela, il opéra une distinction entre le désir et la volonté, définie comme une tendance réfléchie qui conduit vers le bien et la vertu. Par exemple, les stoïciens opposaient le désir de se nourrir (avec la faim comme manifestation) au devoir de se nourrir.

Épicure en particulier opposa le plaisir passager au bonheur durable. Il distingua également le bonheur comme plaisir « catastématique » (c'est-à-dire constitutif) du bonheur comme plaisir « cinétique » (en mouvement, dynamique). Pour Épicure en effet, le bonheur peut être atteint dans la mesure où il s'agit de maîtriser harmonieusement toutes nos facultés.

Par son influence sur le croyant en tant que citoyen, le bonheur chrétien concerne aussi la Cité terrestre (c'est-à-dire l'État). Saint Augustin (345-430) partagea le premier l'humanité en deux Cités, La Cité de Dieu et la Cité terrestre. Bien que non confondues, ces deux cités devaient selon lui vivre harmonieusement dans la mesure où le Chrétien appartenait à la fois à l'une et à l'autre. S'il ne parla pas de bonheur terrestre, Saint Augustin s'en rapprocha en spécifiant que la finalité du pouvoir était le règne de la justice et de la concorde. De nos

jours enfin, la question se pose de savoir si dans une société de consommation, le bonheur est possible. En effet, constamment, l'industrie crée de nouveaux besoins en anticipant ou en provoquant de nouveaux désirs chez le consommateur. Car ce marché du désir frustre le consommateur qui n'a pas les moyens financiers et matériels d'accéder à l'idéal de bonheur affiché, par exemple, dans les publicités. Dans les sociétés occidentales, le bonheur semble rimer avec « fortune » dans le sens de « hasard » d'être bien né (le bon-heur = bon hasard). L'organisation capitaliste des pays occidentaux fait du bonheur non pas une utopie mais l'affaire de quelques-uns.

b. Conclusion

La corruption au sein de la société américaine Enron, l'augmentation des divorces et surtout la banalisation des substances psychédéliques chez les jeunes démontrent la fuite par la verticale d'une population qui n'a pas encore atteint, *hic et nunc* le bonheur.

Bibliographie : H. LABORIT, Éloge de la fuite, Éditions Gallimard, 2001 ; Pascal BRUCKNER, L'Euphorie perpétuelle, Éditions Lgf, 2002.

c. Citations utiles

« Je veux que les Français datent leur bonheur de l'institution des préfets. » Napoléon Bonaparte.

« Rien n'empêche le bonheur comme le souvenir du bonheur. » André Gide. Extrait de L'immoraliste.

« Le bonheur repose sur le malheur, le malheur couve sous le bonheur. Qui connaît leur apogée respective ? » Lao-Tseu.

« Le bonheur, c'est de continuer à désirer ce qu'on possède. » Saint Augustin.

« Le sort de chaque homme est décidé avant lui-même qu'il n'ait vu la lumière de la vie. Bonheur et malheur lui sont prédestinés avant sa naissance. » Raden Adjery Kartini. Extrait de Lettre.

« Bonheur : as-tu réfléchi combien cet horrible mot a fait couler de larmes ? Sans ce mot-là, on dormirait plus tranquille et on vivrait à l'aise. » Gustave Flaubert. Extrait d'une Lettre à Alfred Le Poitevin.



Thème 03 : La justice et le droit

Étymologie/Définitions/Histoire

Du latin *jus* qui signifie le droit ; le gérondif *juris* a donné juriste, spécialiste du droit.

Dieu juge les âmes et la justice terrestre juge les faits.

03. Sujet proposé

Ce n'est pas « justitia » (justice) qui a donné « jus » (le droit) mais « jussum » (le commandement). La justice est une vertu, le droit est une règle. Le droit ne juge que les conduites observables (du latin « directum », en ligne droite) et non pas les intentions subjectives. Le droit se contente ainsi de conduites hypocrites tandis que la justice se rapproche de la morale et réclame une pureté de l'intention.

Peut-on considérer qu'il existe une justice universelle qui pourrait trouver partout des applications juridiques ? Cela revient-il à dire qu'il existe un droit naturel ?

a. Problématique proposée

Le Droit et la Justice ne coïncident pas forcément.

La justice est considérée comme la principale vertu morale de laquelle découlent toutes les autres vertus. Le droit par contre nous indique le cadre légal dans lequel il est permis ou non de faire telle ou telle chose. Durant l'Antiquité, Sophocle dans son Antigone mit en scène la tragique opposition entre la Justice qui relève de l'intime, et le droit. Antigone qui avait violé le décret de Créon en jetant de la terre sur le cadavre de son frère fut condamnée à mort. Plus tard Ulpien expliqua qu'en droit romain, la justice extérieure suffit.

Pour Hobbes comme pour Jean-Jacques Rousseau, il existe bien un droit naturel. Mais personne ne s'accorde sur la réalité de ce droit. Pour le connaître, il faut remonter à l'état de nature de l'Homme, à l'Homme d'avant la civilisation. Mais tandis que pour Hobbes, en ces temps reculés, l'homme était un loup pour l'homme, pour Rousseau, au contraire, l'homme était bon. Ainsi, pour le premier, le droit naturel rejoint la loi du plus fort, tandis que pour l'autre le droit naturel devient un droit des libertés. Pour décrypter un droit naturel et atteindre une justice universelle, inutile, nous dit Nietzsche, de nous baser sur la morale. Dans La généalogie de la morale en effet, le philosophe allemand affirme que la morale est le fruit des hommes faibles, les sous-hommes, qui imposèrent une éthique faite pour briser les surhommes (les artistes, les hommes amoraux).

Lorsque le Droit et la Justice coïncident, ils semblent servir le but kantien.

Mais si le droit des hommes ne peut pas juger les âmes, il juge de plus en plus l'intention des individus.

La religion intériorise les notions de bien et de mal, et remplace le droit. Dans L'exode par exemple, le « tu ne voleras point » remplace notre code de procédure pénale. Les religions et le Christ en particulier insistent sur la justice intérieure et sur le fait que le bon chrétien ne peut pas feindre la bonté. C'est de l'Antiquité grecque que date la mise en place des tribunaux populaires pour mettre fin aux vendettas et aux vengeances personnelles. En France, les assises introduisent dans le jugement des faits, l'« intime conviction » et donc le subjectif.

On a vu récemment se développer la protection des personnes faibles avec « l'abus de confiance » considéré comme une escroquerie morale. On condamnera tout abus de position dominante, comme par exemple celle d'un psychiatre qui utiliserait sa position dominante sur un patient à des fins non médicales. En droit international, la charte des Droits de l'Homme est signée par de plus en plus de pays et l'ONU semble réaliser ce désir d'universalité.

b. Conclusion

Le droit restera toujours plus laxiste que la justice. Il autorise par exemple le mensonge ou l'adultère en dehors des liens du mariage. C'est par l'éducation que la morale doit freiner l'abus en déclenchant le remords. Nous ne sommes pas une société d'anges et nous pouvons croire avec Kant qu'il est possible de faire vivre ensemble une société de démons, par le droit et l'impératif de la loi. Nous passons alors de l'état de nature à l'état de droit.

Bibliographie : Michel FOUCAULT, Surveiller et punir, Gallimard 1975 ; Léo STRAUSS, Droit naturel et Histoire, Éditions Flammarion, 1986.

c. Citations utiles

« La justice sans la force est impuissante, la force sans la justice est tyrannique. » Blaise Pascal. Extrait des Pensées sur la religion.

« La justice française ne peut plus être une justice qui tue. » Robert Badinter. Extrait d'une interview dans Le Monde — 28 août 1981.

« Il est effrayant de penser que cette chose qu'on a en soi, le jugement, n'est pas la justice. Le jugement, c'est le relatif. La justice, c'est l'absolu. » Victor Hugo. Extrait de L'Homme qui rit.

« Il faut de la force assurément pour tenir toujours la balance de la justice droite entre tant de gens qui font leurs efforts pour la faire pencher de leur côté. » Louis XIV. Extrait de ses Mémoires.

« Une injustice commise quelque part est une menace pour la justice dans le monde entier. » Martin Luther King. Extrait de Lettre.

Thème 04 : Liberté et lien social

Étymologie/Définition/Histoire

Du latin liber, qui agit à sa guise.

La liberté se définit négativement par l'absence de contrainte et positivement comme l'état de celui qui fait ce qu'il veut.

04. Sujet proposé

La liberté semble difficile à définir et relever davantage de l'expérience. Il s'agirait d'un « sentiment vif et interne » (Descartes). Est-on vraiment libre à partir du moment où on est au moins deux ?

a. Problématique proposée

Le resserrement du lien social sacrifie un peu de la liberté de chacun.

La liberté se définit à plusieurs niveaux. À son niveau zéro, seul l'homme sain et en bonne santé peut se déclarer libre. En effet, l'homme malade est « prisonnier » de son corps. À un niveau d'explication supérieur, la liberté se définit comme la spontanéité des tendances qui ne rencontrent aucune entrave. Pourtant, nous pouvons spontanément nous laisser aller à des tendances qui nuiront à notre santé, en buvant trop d'alcool par exemple. Aussi, pour Platon, ce n'est pas parce que nous nous laissons aller à nos tendances que nous sommes libres car « nous n'avons pas conscience d'être libre lorsque nous succombons aux passions ». Aussi, pour les philosophes, la liberté s'accompagne-t-elle d'une conscience de cette liberté.

Pour Spinoza en particulier, « l'action libre est celle qui se détermine en faveur du désir raisonnable ». L'action serait libre lorsque la conscience se détermine contre ses désirs. Il faut cependant ici insister sur la vision toute occidentale de la liberté comme résistance à la tentation. En effet, pour le sage taoïste Lao Tseu (VI^e siècle avant notre ère) au contraire, l'Homme ne devient libre qu'isolé et éloigné de tout ce qui le structure artificiellement. Aussi, le sage asiatique ne devient-il libre qu'extirpé de la société. Orient et Occident, par contre, s'accordent pour dire que la société « enferme » l'individu dans un carcan et le prive de choix libérateurs. En fait, on n'est pas libre de ce que l'on fait mais de la manière dont on le fait. Par exemple, aux yeux d'une femme mariée, la femme célibataire peut sembler libre de ses actes. Mais en réalité, si ce célibat n'est pas choisi mais subi, la femme célibataire aura le sentiment d'être enfermée dans une situation qu'elle n'aura pas choisie.

La liberté absolue conduit à l'anarchie.

Comment concilier liberté individuelle et loi sociale ? Pour Platon, la démocratie directe consiste à exprimer sans limite les libertés individuelles. Dans une telle organisation sociale, il n'y a que des individus et donc plus de société possible. Il faut rappeler cependant que Platon reprochait à la démocratie d'avoir condamné à la ciguë son maître Socrate. En fait, l'histoire du droit en Occident correspond à une progression du droit des libertés. Comme par effet de cliquet, depuis les révolutions américaine et française, le peuple a conquis de plus en plus de droits. En France, le droit du travail a donné sécurité (assurance chômage, Sécurité sociale) aux travailleurs et partage du profit (congrés payés en 1936, passage des 39 heures aux trente-cinq heures).

Dans la société anarchiste, chacun trouverait sa place en acceptant de sacrifier un minimum de liberté et en travaillant pour la communauté. Une société libre, cela resterait une société où tout le monde travaillerait. Ici cependant, le travail bien plus qu'une valeur deviendrait l'unique obligation qui pèse sur l'individu pour que tourne le monde, c'est le

prix de sa liberté. D'ailleurs, le libéralisme du XIX^e siècle prônait la subordination des intérêts sociaux aux intérêts particuliers.

b. Conclusion

L'âne de Buridan se laissa dépérir car il ne parvint pas à choisir entre deux types de foin identiques. Ainsi, la liberté se détermine par des choix mais différents l'un de l'autre. S'engager c'est s'affirmer dans le choix des multiples possibles (l'existentialisme de J.-P. Sartre). Chacun à notre niveau, nous pouvons résister aux tendances de notre époque et dire « je » au milieu du « nous ».

Bibliographie : Liberté chérie, Julien Green, Éditions du Seuil, 1989.

c. Citations utiles

« La Liberté, ce n'est pas de pouvoir ce que l'on veut, mais de vouloir ce que l'on peut. » Jean-Paul Sartre.

« Liberté implique responsabilité. C'est là pourquoi la plupart des hommes la redoutent. » Georges Bernard Shaw. Extrait de Maximes pour révolutionnaires.

« Le premier des droits de l'homme c'est la liberté individuelle, la liberté de la propriété, la liberté de la pensée, la liberté du travail. » Jean Jaurès.

« Le dernier mot de la liberté, c'est l'égoïsme. » Gérard de Nerval. Extrait de Paradoxe et vérité.

« Quand la vérité n'est pas libre, la liberté n'est pas vraie. » Jacques Prévert. Extrait de Spectacles.

« L'Homme est condamné à être libre » Jean-Paul Sartre.

Thème 05 : Culture générale et efficacité professionnelle

Étymologie/Définition/Histoire

Du latin : cultus (travail de la terre pour qu'elle produise). Sens premier : agriculture. Sens figuré : évocation de la semence et de la récolte ; la culture générale revêt la forme d'une culture intellectuelle qui se développe et progresse.

05. Sujet proposé

On peut opposer la culture générale à la culture d'entreprise. Est-ce que la culture générale favorise l'efficacité professionnelle ou bien « l'honnête homme » n'a-t-il pas sa place dans le tertiaire ?

a. Problématique proposée

Une certaine tradition a désolidarisé la culture générale du monde professionnel.

Finley Moses a analysé comment, dans la Grèce antique, l'élite économique se distinguait du peuple en ce qu'elle ne travaillait pas. Socrate et Platon consacrèrent l'intégralité de leur temps à la philosophie, sans travailler. L'idée selon laquelle la culture générale est l'apanage d'une élite qui refuse de travailler s'ancre dès l'Antiquité dans une pensée aristocratique. De nos jours par exemple, de nombreux philosophes continuent à refuser la compromission de l'homme cultivé et on peut citer ici Alain : « On ne vit pas le temps où on travaille ». Ne pas vouloir gagner son pain à la sueur de son front peut en revenir à mépriser les classes laborieuses. L'employeur reste le mieux placé pour dire si la culture générale est un outil d'efficacité professionnelle. Or, les entreprises recrutent surtout des bac plus deux et on peut donc en conclure que la culture générale idéale pour une meilleure efficacité au travail est la culture acquise durant le premier cycle du supérieur. À l'inverse, de nombreux docteurs, diplômés de troisième cycle, grossissent les rangs des chômeurs.

De nos jours, contrairement à l'Antiquité, l'activité professionnelle ne s'avère plus avilissante mais au contraire valorisante et intégratrice. Mais le rapport entre travail et culture semble dans une première analyse rester le même, l'intellectuel et le travailleur se rejetant mutuellement.

La culture générale, face au travail flexible, devient un atout et favorise l'efficacité professionnelle.

La Renaissance qui s'intéressa à l'Antiquité donna naissance à de nombreux érudits, inventeurs omniscients. Léonard de Vinci peut ainsi constituer un idéal-type wébérien de ce que fut l'honnête homme. Artiste et scientifique, il se révéla un génie de la mécanique et dessina le premier des plans d'un hélicoptère. De nos jours, la culture d'entreprise a cédé la place à la transversalité des connaissances. Une société doit constamment s'adapter aux exigences du marché et lancer de nouveaux produits. Elle se doit de réagir vite et, pour cela, s'appuyer sur un personnel dynamique et réactif. Le temps n'est plus à la carrière mais à l'emploi. Dans ce contexte général d'interdisciplinarité, la notion de culture générale a elle-même évolué et comprend aujourd'hui l'intelligence pratique autant que théorique. Ainsi, l'atout d'un intérimaire résidera non pas dans sa culture d'entreprise mais dans sa connaissance d'entreprises concurrentes. Il se réadapte constamment à un nouvel environnement et se rapproche en cela des fonctionnaires qui « tournent » soit en France soit dans leur région avant de se stabiliser. Comme le souhaitait Rabelais, notre époque a besoin de têtes bien faites et non pas de têtes bien pleines.

Un autre indicateur réside dans la formation continue. Car, si la formation continue du personnel de la fonction publique comme du secteur privé se développe, c'est bien que leurs employeurs respectifs ont constaté que la formation théorique renforçait leur efficacité professionnelle. Autrement dit, les employeurs, privés et publics, semblent certains d'obtenir un retour sur investissement en formant l'esprit de leurs employés. Au moment de l'épreuve orale de culture générale dans les concours administratifs, le jury va également estimer la résistance au stress du candidat pour savoir s'il paraît apte à diriger une équipe. Ainsi, la culture générale au-delà d'un simple agrégat de savoirs, désigne un esprit libéré par cette dernière.

b. Conclusion

Ainsi, à travers les siècles, la culture générale est passée d'outil de distinction (Pierre BOURDIEU) à outil d'intégration sociale. Aujourd'hui, l'Éducation nationale tente en France de transmettre à chaque enfant le capital culturel de ses aïeux et rend possible une mobilité transgénérationnelle. Mais la primauté du champ économique sur celui de la pensée n'est-elle pas en train de brader notre système éducatif ? (Voir ÉDUCATION)

Bibliographie : Julien Benda, La trahison des clercs, Éditions Grasset, 2003 ; Claude Lévi-Strauss, Structures élémentaires de la parenté, Éditions Mouton, 1967.

c. Citations utiles

« La culture ne s'hérite pas, elle se conquiert. » André Malraux. Extrait de Hommage à la Grèce.

« La culture est ce qui fait d'une journée de travail une journée de vie. » Georges Duhamel.

« La culture n'est pas un luxe, c'est une nécessité. » Gao Xingjian. Extrait de La montagne de l'âme.

« La survie de la langue passe par celle de la Culture qu'elle véhicule. » Jacques Attali. Extrait de La voie humaine.

« La culture est ce qui subsiste quand on a oublié tout ce qu'on avait appris. » Selma Lagerlöf.

On attribue à un responsable fasciste cette phrase : « Quand j'entends le mot culture, je sors mon revolver »

Thème 06 : Éducation nationale et chômage

Étymologie/Définition/Histoire

Du latin : educare (former, instruire).

En France, avant la révolution, les cahiers de doléances faisaient apparaître des demandes en faveur de la gratuité de l'enseignement. D'après l'article 2 de la Constitution de 1958, la France est une République laïque et le Préambule de la Constitution de 1946 précise que l'éducation est gratuite. En France, l'école laïque est la règle, les établissements privés sous contrat l'exception, contrairement au système américain.

06. Sujet proposé

L'Éducation Nationale parvient-elle encore à former les futurs travailleurs ? N'est-elle pas en décalage avec le monde du travail si on considère que de nombreux jeunes diplômés se retrouvent au chômage ?

L'Éducation Nationale peut sembler de prime abord trop concentré sur sa mission de formation au détriment de celle de l'intégration des étudiants dans le monde du travail.

La « galère » est un concept émergent des années 1990. Elle s'applique aux jeunes diplômés qui traversent une période d'inactivité plus ou moins longue avant de démarrer leur carrière. Cela peut s'expliquer par la théorie de l'offre et de la demande. Raymond BOUDON, notamment, démontra qu'il y a de plus en plus de jeunes diplômés du supérieur pour un nombre de postes d'encadrement qui, lui, n'a pas progressé. Raymond BOUDON, dans l'inégalité des chances, insistait sur la nécessité de valoriser ses réseaux d'influences pour, à diplôme égal, trouver un travail. On peut ici parler de népotisme. Pierre BOURDIEU, rejoignit pour sa part son collègue sociologue en distinguant le capital économique du capital culturel (les diplômes) et du capital social (le réseau de relations). Comme BOUDON, Pierre BOURDIEU considère qu'à diplôme égal l'individu qui a hérité de sa famille un réseau de relations influent trouvera beaucoup plus facilement un travail adapté à ses compétences.

L'Éducation nationale remplit une triple mission d'éducation (culturelle), de formation (scolaire) et d'intégration (sociale). À juste titre, l'ensemble des citoyens qui, par le paiement de l'impôt sur le revenu, financent l'Éducation nationale attendent de cette

dernière une rentabilisation des études. Les employeurs reprochent à l'Éducation nationale de leur fournir des étudiants sans expérience professionnelle. Pour y remédier, depuis plusieurs années, la formation en alternance s'est développée. Les étudiants des collèges et lycées, qui ont plus de 14 ans, peuvent à la fois étudier et effectuer des stages voire travailler au sein d'une entreprise. Les CFA par exemple sont des centres de formation sous contrat fournissant des apprentis qui étudient dans des classes de vingt élèves environ et travaillent en entreprise.

Il apparaît toutefois que l'Éducation nationale remplit de façon inégale sa fonction d'intégration professionnelle.

Le taux de chômage varie selon les catégories sociales. Le site Internet de l'INSEE nous permet de recueillir des chiffres fiables à ce sujet. En mars 2002, le taux de chômage des ouvriers était de 11,4 % tandis que celui des cadres et des professions intellectuelles supérieures était de 3,8 %. Déjà, ces quelques chiffres permettent de comprendre l'empressement des classes moyennes à investir dans les études de leurs enfants. On peut en effet constater que le diplôme joue un rôle non négligeable dans l'accès à l'emploi. Plus de 14 % des sans diplôme sont au chômage contre 5,7 % des bac + 3 et plus.

L'Institut d'Études Politiques de Paris admet désormais certains étudiants issus de ZEP sur dossier. Il faut reconnaître à Sciences Po le mérite de résoudre un problème de barrière sociale qui se produit en amont (avant le bac) et qui n'est pas de son fait. Aux États-Unis, le système des « buses » permet d'affecter les élèves des quartiers défavorisés dans des écoles publiques de quartiers chics. Pour la minorité afro-américaine, c'est la propriété qui est la cause de la crise de l'éducation dans certains quartiers réputés difficiles (démographie scolaire en constante augmentation, chômage des parents etc). Les familles aux revenus les plus faibles sont logées et regroupées dans les quartiers où les loyers restent le plus bas. Ainsi, certaines écoles voient leurs classes surchargées d'élèves dont la langue maternelle

n'est pas l'anglais tandis que les quartiers où les loyers sont les plus élevés développent des écoles privées pour l'élite.

a. Conclusion

L'Éducation nationale essaie de résoudre à son échelle un problème qui la dépasse et qui a été analysé en France par Pierre Bourdieu dans Les Héritiers. De nombreux facteurs sont discriminants face à l'emploi : le sexe, l'âge et l'origine sociale notamment. Le portrait-robot du chômeur ou RMIste type est une femme, jeune, peu ou pas qualifiée et issue du milieu ouvrier (voir TRAVAIL).

Bibliographie : Raymond BOUDON, L'inégalité des chances, 1973 ; Pierre BOURDIEU, Les héritiers 1966 et La distinction 1979, Minuit.

b. Citations utiles

« L'éducation est non pas une préparation à la vie, l'éducation est la vie même. » John Dewey.

« L'éducation peut tout : elle fait danser les ours. » Leibniz.

« Le meilleur aboutissement de l'éducation est la tolérance. » Helen Keller.

« Éducation — Ce qui manque à l'ignorant pour reconnaître qu'il ne sait rien. » Albert Brie. Extrait de Le mot du silencieux.

« L'éducation ne se borne pas à l'enfance et à l'adolescence. L'enseignement ne se limite pas à l'école. Toute la vie, notre milieu est notre éducation, et un éducateur à la fois sévère et dangereux. » Paul Valéry. Extrait de Variété III.

Thème 07 : La révolution de la communication

07. Sujet proposé

L'accélération de la vitesse de communication a permis l'augmentation du volume d'informations échangé. L'information s'en trouve-t-elle dénaturée ?

a. Problématique proposée

On assiste à une accélération continue du flux de la communication.

Depuis la tradition biblique (la parole créatrice de Dieu) perdure la transmission orale des nouvelles avec les conteurs, les crieurs publics ou le journal télévisé. L'invention de l'écriture (vers 3000 avant J.-C.) a permis la transmission d'informations plus stables et avec moins d'altération (le « bruit »).

Le XVI^e siècle vit se développer les gazettes alors que le XVIII^e siècle a rationalisé les instruments de communication avec le système métrique, l'heure universelle et surtout le télégraphe.

Avec les Grecs, la parole se démocratisa. Le débat devint public. Les parlements en sont les descendants directs.

L'article 11 de la Déclaration des droits de l'Homme et du Citoyen de 1789 concerne la libre communication et stipule que tout citoyen peut écrire et imprimer librement. C'est la consécration de la liberté de la presse. La loi du 27 août 1986 interdit la prise de contrôle de la presse écrite par une personne morale ou physique. Des situations de monopole existent cependant, par exemple en Italie où Silvio Berlusconi détenait les chaînes privées mais dirigeait aussi, en tant que chef du gouvernement les chaînes publiques jusqu'au printemps 2006. En France, c'est essentiellement la loi du 29 juillet 1881 qui protège la

liberté de la presse. Le Conseil Constitutionnel confirma l'effet cliquet des lois nouvelles qui ne peuvent être que plus favorables aux lois précédentes.

Le débat au centre de la révolution de la communication semble s'opérer entre Internet et le livre.

L'invention du télégraphe permit le développement des relations économiques au-delà des frontières.

Certains craignent qu'Internet ne supplante le livre. Ainsi, Alain Finkielkraut dans L'inquiétante extase démontre que la lecture d'une page sur l'écran nous invite à cliquer sur les liens et à surfer au lieu d'analyser. En fait, Internet s'avère un excellent outil de veille juridique, économique ou politique. Cependant, le livre, outre le fait qu'il vous appartient sous une forme matérielle à la différence d'un site Internet, autorise l'interruption de la lecture, le surlignage et l'interactivité intellectuelle entre l'auteur et son lecteur.

Serge Halimi au cours d'un débat filmé par Pierre Carl dans La sociologie est un sport de combat défend l'écrit contre l'oral. Pour lui, plusieurs années étant nécessaires à un chercheur pour analyser un phénomène, le débat oral devient alors réducteur car l'auteur doit résumer en une minute un nouveau concept qu'il a mis deux ans à mettre au point.

b. Conclusion

L'écriture manuscrite pourrait bien n'être qu'une parenthèse de l'Histoire. Si les populations savent lire, les plus avancées d'entre elles ne communiquent qu'avec un clavier. La tradition épistolaire est devenue électronique et seule l'école persiste à exiger de ses étudiants et élèves l'exercice laborieux de la dictée ou dissertation manuscrite.

c. Citations utiles

« Il ne peut y avoir de totalité de la communication. Or la communication serait la vérité si elle était totale. » Paul Ricœur.

« Dans la communication, le plus compliqué n'est ni le message, ni la technique, mais le récepteur. » Dominique Wolton.

« La communication requiert 25 % du temps du dirigeant. » Chester Barnard.

« L'incommunicabilité ? Ce n'est pas qu'on ne communique pas assez. On communique trop et mal. » Robert Lalonde. Extrait de La belle épouvante.



Thème 08 : Le retour des inégalités

08. Sujet proposé

Francis Fukuyama dans La Fin de l'Histoire considéra que la démocratie avait gagné la planète avec la chute de l'empire soviétique. Les inégalités ont-elles vraiment disparu des démocraties occidentales ?

a. Problématique proposée

En Occident, les inégalités subsistent.

Les penseurs : Jean Bodin prôna l'absolutisme au XVI^e siècle suite aux troubles religieux de cette époque. La théorie du droit divin vint par la suite fortifier celle de la monarchie absolue. Elle signifie que le roi tient directement son pouvoir de Dieu et reste irresponsable devant les hommes. Pour Hobbes, l'état de nature est un état d'anarchie (« l'homme est un loup pour l'homme »). Pour échapper à la guerre, les hommes ont concédé d'eux-mêmes le pouvoir au plus fort.

Les types d'inégalités contemporaines : L'inégalité de revenu se reflète dans les CSP (catégories socioprofessionnelles) et détermine le niveau de vie des ménages. La consommation s'en ressent. Ainsi, les ouvriers ont une norme de consommation caractérisée par une importance relative des dépenses alimentaires (ouvriers : environ 20 % de leur budget consacré à l'alimentation contre 14 % pour les cadres). Les paysans, artisans et commerçants dépensent plus que les autres CSP dans l'équipement du logement. Enfin, les cadres investissent surtout dans la culture et le loisir. L'inégalité sociale a été analysée par Pierre Bourdieu et s'appréhende à travers le réseau des relations, l'éducation et la maîtrise du langage. Pour Pierre Bourdieu, le déterminisme social persiste, c'est-à-dire que la mobilité sociale individuelle reste occasionnelle (les héritiers 1964, la reproduction 1970).

Pourtant, malgré la persistante des inégalités, force est de constater que l'écart entre les classes a diminué.

Saint Thomas d'Aquin (1225-1274) redécouvrit Aristote. L'homme étant un animal social et politique, le but de toute société réside dans le bien commun. Il se prononça comme Aristote en faveur d'un régime mixte combinant monarchie, aristocratie et démocratie, en vue d'une paix sociale. La théorie du droit populaire et du contrat social fut défendue par les monarchomaques puis, au XVI^e siècle par les théoriciens du droit naturel dont le jésuite Suarez (meurt en 1617) qui soutint le droit à la résistance. Rousseau enfin trouva l'égalité dans l'état de nature. Pour lui, l'inégalité est structurelle et engendrée par l'organisation sociale. Il inspira la DDHC¹ de 1789.

L'école devint l'ascenseur social de la France au XX^e siècle. Les classes moyennes ont investi dans le diplôme de leurs enfants. Seulement 13 % des élèves sont sortis sans diplôme en 2003 contre 28 % en 1980. Or, le diplôme protège contre le chômage. Une enquête sur l'emploi de l'INSEE en 2002 a révélé que 3,8 % des cadres étaient au chômage contre 11,4 % des ouvriers.

b. Conclusion

Les avancées démocratiques sont effectives en matière d'égalité de suffrage. Mais on pourrait aussi parler de nouvelles féodalités au vu de l'organisation politique des démocraties occidentales (voir DÉMOCRATIE).

Bibliographie : J.-J. ROUSSEAU, Discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité parmi les hommes, Éditions Nathan 2005.

¹ . Déclaration des droits de l'Homme et du Citoyen

c. Citations utiles

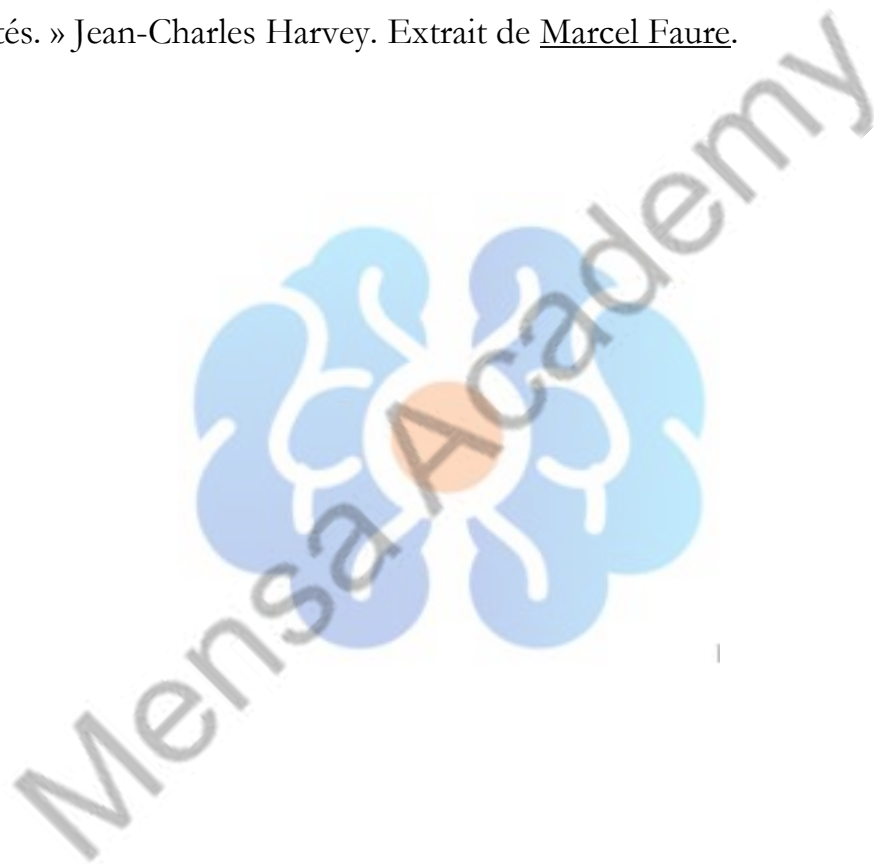
« Il n'y a de société vivante que celle qui est animée par l'inégalité et l'injustice. » Paul Claudel.
Extrait des Conversations dans le Loir-et-Cher.

« La naissance est le lieu de l'inégalité. L'égalité prend sa revanche avec l'approche de la mort.
» Jean d'Ormesson. Extrait de Voyez comme on danse.

« L'égalité des chances, c'est la chance de prouver l'inégalité des talents. » Sir Herbert Samuel.

« L'inégalité, c'est le risque permanent du mépris. » René Lévesque.

« Le socialisme ! Quelle lubie ! La nature s'est chargée de régler son cas en prodiguant partout des inégalités. » Jean-Charles Harvey. Extrait de Marcel Faure.



Thème 09 : Discrimination et égalité

Étymologie/Définition/Histoire

Vient du latin : *discriminare* (séparer), action de distinguer les choses, de les séparer. On aura immédiatement tendance à se remémorer le titre de l'ouvrage de Pierre Bourdieu, De la distinction.

09. Sujet proposé

Peut-il y avoir des discriminations au sein des démocraties ? L'égalité, inscrite au sein de la constitution de 1958, tolère-t-elle les discriminations ? Celle-ci ne transforme-t-elle pas l'égalité en égalitarisme ? Peut-il y avoir une discrimination positive ?

a. Problématique proposée

La discrimination a longtemps été vécue comme négative.

En sociologie, la discrimination désigne la distinction qui peut être faite dans la vie sociale aux dépens d'un certain groupe. Elle se rapproche alors de l'idée de racisme et implique une séparation. Tous les moyens ont été bons dans l'histoire pour séparer des groupes sociaux. Ainsi, des « literacy tests » aux États-Unis ont retiré leur droit de vote de façon détournée aux afro-américains. En Afrique du Sud, le régime de l'Apartheid sépara la population noire de la population blanche, jusqu'à l'arrivée de Nelson Mandela au pouvoir. La discrimination est un concept moderne, apparu avec une société qui met l'égalité au centre de ses valeurs.

La construction de la République française s'est appuyée sur le déni de toute discrimination. L'article 2 de la constitution du 4 octobre 1958 dispose que la République « assure l'égalité de tous... sans distinction d'origine, de race ou de religion ». La pensée des Lumières trouve ici toute son expression. Il n'existe pas de catégorie humaine et, au sein d'une nation, il n'existe que des Français et non pas de « beurs » ou de français « d'origine » algérienne. Aussi, la France pratique-t-elle l'assimilation c'est-à-dire la négation par le groupe national de l'existence d'une partie distincte.

Mais la discrimination peut être synonyme de justice sociale.

Discrimination prend un sens positif en 1961 avec l'avènement de l'« affirmative action » qui instaure un système de quotas de population noire dans les universités et dans les administrations. L'idée est la suivante : puisqu'il existe une inégalité sociale engendrée par la discrimination raciale, ces inégalités doivent être compensées de façon arithmétique. En France ce concept a été adopté de façon avant-gardiste par l'Institut d'Études Politiques de Paris. Sciences Po admet désormais en première année de l'IEP. Des étudiants sur dossier, non pas parce qu'ils appartiennent à une minorité ethnique comme aux États-Unis mais parce qu'ils s'avèrent économiquement défavorisés. L'Institut répare ici les défaillances en amont du système éducatif français.

Les femmes ont également bénéficié d'une discrimination positive. Le raisonnement reste le même que celui tenu pour *l'affirmative action* à savoir que la loi doit réparer arbitrairement l'inégalité numérique entre les hommes et les femmes en politique (loi du 6 juin 2000). Le Conseil constitutionnel ayant invalidé à deux reprises ce projet (Quotas par sexe, CC 1982 et 1999), il fallut au préalable modifier la Constitution de 1958 par la loi constitutionnelle du 8 juillet 1999.

b. Conclusion

Il existe une limite au discours sur la discrimination sociale. Il s'agit de l'élite. Toute société se construit autour d'une élite (sociale, politique, économique) qui, comme l'a démontré P. Bourdieu, organise sa propre reproduction. De ce fait, la discrimination concerne autant la femme, le pauvre que les immigrés. La discrimination se comprend alors comme un système organisé qui sert de ressort aux sociétés y compris aux démocraties occidentales. Qu'en est-il des inégalités envers les femmes ?

c. Citations utiles

« Tant que la philosophie qui maintient une race supérieure et une race inférieure ne sera pas discréditée et abandonnée... il y aura la guerre ! » Haile Selassie. Extrait du Discours

aux Nations Unies. « Les fascistes, au fond, croient toujours à la race de celui qui commande. » André Malraux. Extrait de L'espoir.

« Il a fallu cent ans pour effacer les discriminations les plus criantes entre les hommes et les femmes, mais qu'attend-on pour abroger celles qui restent ? » Benoîte Groult. Extrait de Ainsi soit-elle. « Le plus grand malheur du siècle, c'est la discrimination dont le bonheur fait preuve. » Julien Féret.



Thème 10 : La femme et la fille moderne

Étymologie/Définition/Histoire

L'histoire des femmes apporte un éclairage intéressant aux questions d'actualité. Durant l'antiquité gréco-romaine, les femmes avaient le statut d'esclave. L'intelligence restait l'apanage des hommes tandis que les femmes n'avaient qu'une fonction essentiellement reproductive. Comme le rappelle Michel FOUCAULT dans l'Histoire de la Sexualité, il fallut attendre le christianisme aux alentours du III^e siècle après J.-C. pour que la femme gagne une place privilégiée au sein du couple.

10. Sujet proposé

Le féminisme naquit au XIX^e siècle de la contradiction entre l'idéal révolutionnaire d'égalité et la marginalisation de la femme dans les affaires de la cité. L'égalité homme-femme est-elle réalisée ?

Longtemps, la femme n'a trouvé de légitimité que dans la maternité. Depuis l'Antiquité, la femme est enfermée dans l'enceinte de la cité. Elle est sédentaire et repliée sur le foyer familial tandis que l'homme, chasseur, se tourne vers l'extérieur. L'organisation traditionnelle des sociétés répartit ainsi des rôles selon les sexes. Nous pouvons relever que durant le Moyen Âge, l'obscurantisme a favorisé une « chasse aux sorcières » qui a causé la mort d'environ 5 millions de femmes. Aujourd'hui en Chine, il manque environ 60 millions de femmes à cause de la politique de l'enfant unique (euthanasie, rapt de femmes vietnamiennes dans les zones frontalières).

Dans XY, E. BADINTER tente de démontrer, à la suite de Marguerite Yourcenar, que c'est la poupée qui fait la femme et non l'inverse. Cette thèse est prolongée dans L'amour en plus où l'auteure nie l'idée d'instinct maternel pour y substituer celui du désir de l'enfant. La femme, pas plus que l'homme, n'est destinée à être mère. Elle le désire. Mais le contrôle

de ce désir n'a été rendu possible qu'en 1965, date du vote de la loi autorisant la pilule. La loi Aubry de 2001 a permis l'allongement du délai légal de l'avortement mais le décret d'application n'est entré en vigueur qu'en 2004. Par ailleurs, de nombreuses statistiques, dont celle de l'INSEE (1991) ont démontré la persistance de rôles sexuels et d'une division du travail domestique.

Au fil des siècles, la femme s'est affirmée en tant qu'individu.

C'est le travail qui a émancipé la femme et l'a sortie, au cours de la première guerre mondiale, du foyer. Son rôle économique eut des répercussions sur ses droits politiques. Ainsi, pendant la Première Guerre mondiale, les femmes ayant pris la place des hommes dans les usines et les bureaux réclamèrent le droit de vote. Celui-ci leur fut accordé aux États-Unis en 1920 et en France en 1944.

La pensée contemporaine, à l'aube du XXI^e siècle a remédié à l'inégalité numérique des femmes en politique en modifiant la constitution (loi constitutionnelle du 8 juillet 1999). Le Conseil Constitutionnel, dans sa décision du 30 mai 2000, précise que la parité peut être atteinte soit par des mesures contraignantes soit par des mesures à caractère incitatif. Pour les élections municipales, la parité reste obligatoire (47,5 % de femmes dans les conseils municipaux en 2001) tandis que pour les élections législatives la parité demeure facultative contre paiement de sanctions financières (la proportion des femmes est passée de 10,9 % à seulement 11,78 % soit 68 femmes ont été élues à l'Assemblée Nationale en juin 2002).

a. Conclusion

La femme peut cumuler plusieurs « handicaps ». Ainsi, le profil-type du chômeur est une femme, jeune, non-diplômée.

b. Citations utiles

« Partout dans le monde une femme ne doit pas quitter le lit de son mari même si le mari injurie, frappe et menace la femme. Elle a toujours tort. C'est ça qu'on appelle les droits de la femme. » Ahmadou Kourouma. Extrait d'Allah n'est pas obligé.

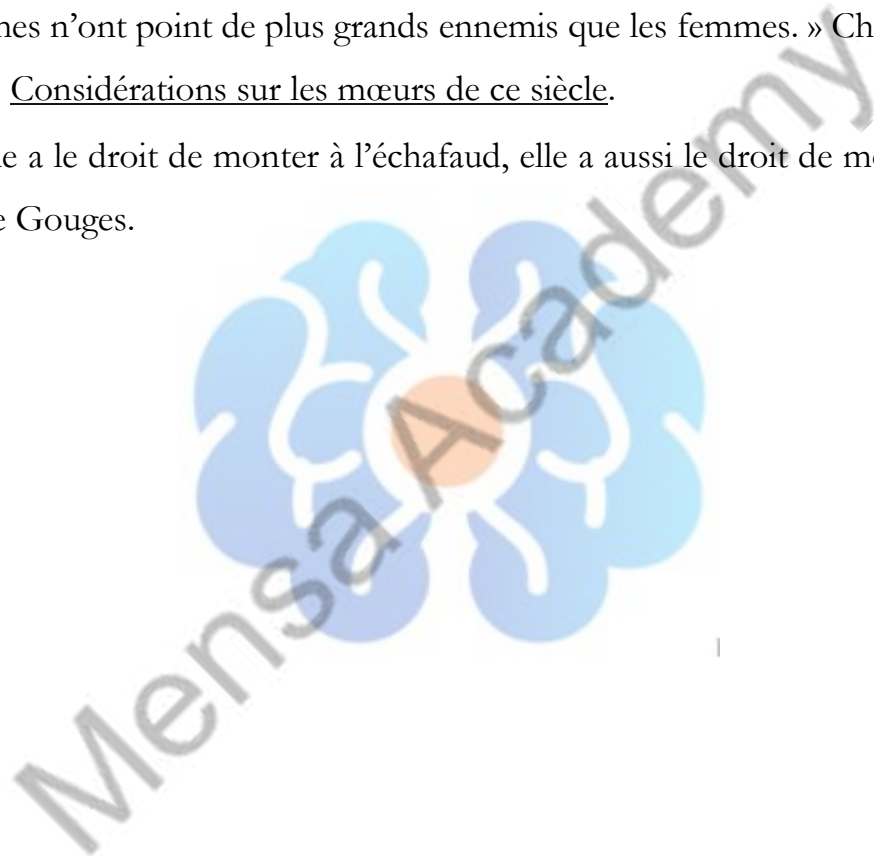
« Les femmes libres ne sont pas des femmes. » Colette.

« Femmes, c'est vous qui tenez entre vos mains le salut du monde. » Léon Tolstoï.

« Reine. Femme par qui le royaume est dirigé quand il y a un roi, et à travers qui il est dirigé quand il n'y en a pas. » Ambrose Bierce. Extrait de Le dictionnaire du Diable.

« Les femmes n'ont point de plus grands ennemis que les femmes. » Charles Pinot Duclos. Extrait des Considérations sur les mœurs de ce siècle.

« La femme a le droit de monter à l'échafaud, elle a aussi le droit de monter à la tribune » Olympe de Gouges.



Thème 11 : La domination masculine

11. Sujet proposé

Durant les premières semaines de son développement, le fœtus a un sexe indifférencié. Un parallèle peut être ainsi fait entre l'androgynie du fœtus durant les premières semaines de son développement et celle des sociétés occidentales modernes où la différence entre les sexes s'atténue. Les hommes et les femmes par exemple s'habillent et se comportent de la même façon par opposition aux sociétés traditionnelles où l'initiation marque définitivement la séparation entre les deux sexes. Qu'en est-il aujourd'hui de la domination masculine ?

a. Problématique proposée

La domination masculine a pu, longtemps, sembler naturelle.

Une brève histoire de la domination masculine peut être énoncée. Au VI^e siècle avant notre ère, les Athéniens donnèrent aux femmes un statut équivalent à celui des esclaves. Michel Foucault, dans le premier volume de son Histoire de la Sexualité, explique qu'il fallut attendre le III^e siècle de notre ère et l'avènement du Christianisme en Occident pour que la femme trouve dans le couple une place égale à celle de l'homme. À la suite de Marguerite Yourcenar, Élisabeth Badinter remarqua cependant que durant les époques guerrières cependant les sociétés patriarcales s'installèrent et les figures masculines devinrent dominantes (la caste des forgerons, le Dieu Zeus). Par contre, les figures féminines furent chargées de valeurs négatives (Ève, les « chasses aux sorcières »). Partout, en Afrique, en Asie et en Occident la femme servit de monnaie d'échange dans des stratégies de mariage. Cette oppression des femmes passa de façon incontournable par le contrôle de leur sexualité (excisions, ceintures de chasteté).

La différence physique entre l'homme et la femme a longtemps justifié une répartition traditionnelle des tâches. En effet, dès l'adolescence, l'homme peut détenir jusqu'à quarante

pour cent de force en plus que la femme. À l'homme le travail pénible, à la femme l'enfantement et la charge d'élever les enfants. Les Athéniens justifiaient l'astreinte des femmes aux tâches ménagères par la croyance en leur infériorité intellectuelle. Cette répartition des tâches n'existe chez aucun autre primate. De nos jours, deux écoles s'opposent sur la faible présence des femmes aux postes de direction dans les entreprises, d'encadrement supérieur ou encore en politique. Les uns estiment que si les femmes n'occupent pas de position dominante dans nos sociétés, c'est qu'elles n'en ont pas les compétences. D'autres, comme le sociologue Pierre Bourdieu, dénoncent des barrières invisibles et culturelles.

La domination masculine semble aujourd'hui plus culturelle que naturelle. La philosophe Élisabeth Badinter, dans L'un est l'autre, relativise cette domination masculine et remet en cause une certaine vision psychanalytique de l'infériorité de la femme. Selon elle, l'homme et la femme ont tout d'abord partagé le pouvoir (époque préhistorique) avant que cette dernière ne soit rabaissée au statut d'objet (Antiquité et Moyen-Âge). Il a existé dans l'histoire de brefs interludes durant lesquels la femme fut l'égale de l'homme. Entre le quatrième et le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, l'humanité paraît avoir connu une époque unique d'égalité entre les sexes (en Crète, en Égypte, en Inde). Notons également que dans le Languedoc, à l'époque des troubadours, l'amour courtois plaça la femme au centre de l'initiative amoureuse, renversant ainsi le rapport homme femme. En littérature, c'est Gustave Flaubert avec Madame Bovary qui s'attarda pour la première fois non pas sur un héros mais une héroïne qui entendait bien prendre son destin en main. La fin de la domination masculine a en définitive véritablement commencé en Occident au XVIII^e siècle avec l'égal accès à l'instruction (Condorcet, Jules Ferry). Il semblerait qu'un mouvement de l'Histoire esquisse désormais la fin de la domination de l'homme au détriment de la femme. En politique, la fin de la domination masculine dut passer par le droit de vote de la femme (début du siècle aux États-Unis, ordonnance du 21 avril 1944 du Général de Gaulle en France). Mais c'est le contrôle de la fécondité qui a marqué le véritable déclin de la domination masculine (1965 en France), achevé par le droit à l'interruption volontaire de grossesse (loi Simone Veil sur l'IVG en 1975 en France).

Des progrès restent cependant à faire. En Irlande du Sud, le droit à l'avortement n'est pas accordé aux jeunes femmes et on dénonce l'exode de nombreuses Françaises en Espagne ou aux Pays-Bas pour avorter au-delà du troisième mois. Au Japon, en 2005, les femmes ont dû être compartimentées dans le métro pour mettre fin aux attouchements sexuels. Au sein de l'Union Européenne, des jeunes filles venues des pays de l'Est, d'Albanie et d'Afrique sont contraintes à l'esclavage sexuel.

b. Conclusion

En lisant l'essai de Jean Baudrillard, De la séduction, on pourrait penser que certains hommes regrettent l'évolution égalitaire des sociétés modernes. En effet, comment attendre d'un homme qu'il tienne une porte à une femme et d'une femme qu'elle conserve sa féminité (en portant des jupes et non pas des pantalons, des chaussures à talons et non pas des tennis) alors qu'en contrepartie l'un et l'autre se réclament égaux. Notre monde moderne serait-il une catastrophe des sens ? Plus tard, dans Les stratégies fatales, Jean Baudrillard dénonça les « objets fatals », pris dans le même sens que les « femmes fatales ». La société des choses, le monde des objets, l'emporte-t-il sur la société du sens ?

c. Citations utiles

« Qui domine les autres est fort. Qui se domine est puissant. » Lao Tseu.

« La violence est une forme de faiblesse. » Dominique Rocheteau.

« La supériorité est toujours odieuse. » Euripide, extrait d'Ion.

« L'homme qui s'adjuge, en vertu de sa supériorité intellectuelle, une plus large part de biens terrestres, perd le droit de maudire l'homme fort qui, aux époques de barbarie, asservissait le faible en vertu de sa supériorité physique. » Louis Blanc, extrait de Organisation du travail.

« Cachez soigneusement votre supériorité de crainte de vous faire des ennemis. » Arthur Schopenhauer.



Thème 12 : la violence et les jeunes

Étymologie/Définition/Histoire

Du latin : *vis* ; la force. La violence implique un rapport de forces avec autrui. Pour Nietzsche, lorsque cette violence est maîtrisée, nous devons parler de puissance (La volonté de puissance).

12. Sujet proposé

Grâce au progrès, les enfants sont mûrs de plus en plus tôt et les filles sont désormais pubères à 10,5 ans. Par contre l'entrée dans la vie active se fait de plus en plus tard alors que nos grands-parents travaillaient dans les mines à l'âge de douze ans. D'un point de vue physique, les enfants sont mûrs plus tôt tandis que d'un point de vue psychologique cette maturité est retardée.

Que doivent faire nos sociétés pour éradiquer la violence chez certains jeunes ?

a. Problématique proposée

Nous analyserons dans un premier temps les causes et les conséquences de la violence.

À de multiples reprises, les bulletins officiels de l'Éducation nationale ont consacré une large place à la violence à l'école. Les manifestations de celles-ci peuvent apparaître dans l'absentéisme des enfants et leur comportement déviant (alcool, drogues, tags et dégradations, insultes). Les enfants ciblés par notre problématique restent les enfants désocialisés. Rappelons que la première désocialisation s'opère dans la famille, par exemple avec des parents violents ou absents. C'est majoritairement le cas des enfants scolarisés dans les écoles publiques du Bronx à New York dont le père est drogué ou en prison ou encore a quitté le domicile conjugal. Puis seulement, se produit une seconde désocialisation à l'école. L'âge est un facteur important dans la fabrication de la violence par les jeunes. Bien que les professeurs des écoles regrettent le comportement de jeunes élèves de CM2 qui copient celui de leurs « grands frères », c'est surtout au moment de l'adolescence que ce comportement se cristallise. En Europe de l'Est, c'est la carence affective qui pousse les adolescents à la déviance. En effet, ces anciens pays communistes n'avaient jamais connu le chômage tandis qu'aujourd'hui les groupes sociaux

sont affectés par le désœuvrement. Pour eux, les autres ne sont que des choses (réification d'autrui).

La violence demeure aux yeux des psychologues un processus archaïque de socialisation. Les sociétés primitives en Afrique, à Tahiti ou en Amazonie continuent les rites initiatiques des jeunes et canalisent cette violence. De nos jours, les rites initiatiques ont disparu en Occident. Le passage à l'âge adulte se fait par la résistance à la douleur (Élisabeth Badinter dans XY cite les exemples des scarifications ou mutilations génitales) et à la peur (masques animés dans la forêt sacrée). Les années 1960 virent en France proliférer les « blousons noirs », équivalents des gangs des ghettos noirs américains, et les « blousons dorés » de certains milieux riches. En 1968, les jeunes universitaires eurent recours à la violence pour exprimer leur besoin de liberté au sein du système scolaire. En 1990, un mouvement inverse fit défiler des lycées dans les rues de Paris pour réclamer plus d'encadrement dans les EPLE pour lutter contre la violence ambiante. La même année, Vaulx-en-Velin révéla le malaise de certaines cités. Les violences au sein des cités françaises en décembre 2005 nous amènent à nous demander si brûler des voitures ou commettre des agressions n'est pas devenu un rite initiatique.

Une comparaison internationale peut aider à dresser un bilan et trouver des solutions à la violence chez certains jeunes.

En Grande-Bretagne, le parti travailliste au pouvoir a décidé d'appliquer la tolérance zéro à l'égard de la violence juvénile. Couvre-feu, interdiction de sortir, retrait des aides sociales aux parents démissionnaires et surtout incarcération des mineurs constituent le panel du « tout répressif » à l'encontre des jeunes délinquants. Aux États-Unis, le système des « buses » a été mis en place pour sortir les enfants des ghettos. Ce système consiste à ne plus affecter les élèves dans une école située près de leur résidence mais à déssectoriser cette affectation. Les « buses » étaient censées permettre le brassage social de la population scolaire dans les établissements publics. L'Allemagne pour sa part a préféré jouer la carte préventive. Des commissaires de police se rendent dans les écoles maternelles et commentent un spectacle de marionnettes mettant en scène des enfants qui se bagarrent avant de redevenir sages.

C'est Manchester qui a relevé le plus d'actes dits d'incivilités soit 700 en quatre ans. Mais derrière ces actes d'incivilités, il est nécessaire de distinguer les actes de déviation réels, comme les saccages gratuits de voitures, des regroupements d'amis assimilés à tort à des gangs. Ainsi, comme pour la loi Sarkozy, on peut reprocher à ce type de législation une grave atteinte à la liberté de réunion et donc aux libertés individuelles. Aux États-Unis, le système des « buses » échoua dans la mesure où les enfants des classes moyennes ne suivent pas leur scolarité dans le public mais dans le privé. La solution britannique pour sa part a l'avantage de travailler sur les limites : ce ne sont plus les enfants qui font la loi. Mais leur incarcération arrête leur développement et fabrique de la fixité. En effet, en prison, ils seront au contact avec de réels criminels auxquels ils s'identifieront à vie. La solution française vise également à couper ces enfants de leurs quartiers mais préfère les centres fermés à la prison. En définitive, ne devrait-on pas réintroduire dans nos sociétés l'initiation des jeunes adultes ? En effet, en Occident, la démocratie a fait reculer l'usage de la force. Mais le succès du saut à l'élastique, qui ne va pas sans rappeler le saut initiatique en Nouvelles-Hébrides, prouve que le jeune occidental a besoin lui aussi d'initiation pour se prouver qu'il est un adulte. En fait, il s'avère nécessaire de perpétrer l'initiation de nos jeunes. Nous pouvons penser ici à Arthur Rimbaud qui, « les poings serrés » se découvrit dans le voyage, se rendant à pied en Italie. En Suède notamment, après l'obtention du baccalauréat, les filles deviennent filles au pair pendant un an et les garçons partent travailler à l'étranger.

b. Conclusion

Mieux vaut interdire qu'empêcher. Interdire c'est structurer et fabriquer de la culture alors qu'empêcher par l'enfermement ne fait que repousser la digression à plus tard. En France, une femme sur dix est victime de violence conjugale et en Inde les femmes stériles sont brûlées par leur belle-famille.

Dans ces conditions, peut-on dire avec Aragon que « la femme est l'avenir de l'Homme »

c. Citations utiles

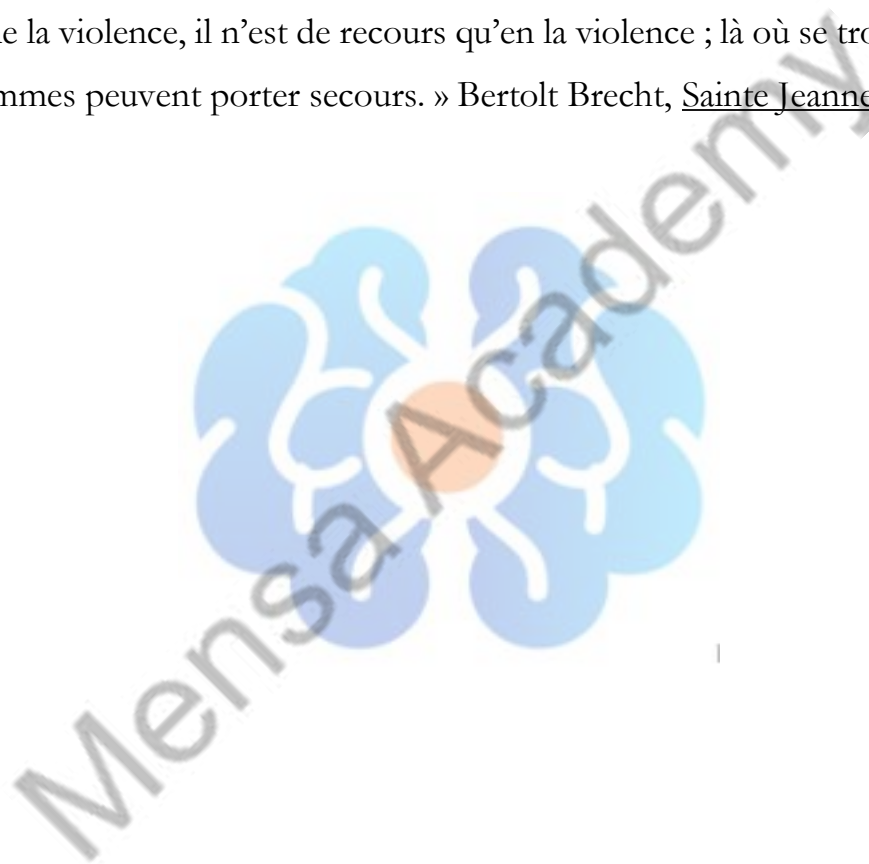
« La violence a coutume d'engendrer la violence. » Eschyle, Agamemnon.

« La religion de la non-violence n'est pas seulement pour les saints, elle est pour le commun des hommes. C'est la loi de notre espèce, comme la violence est la loi de la brute. » Romain Rolland, Mahatma Gandhi.

« L'injustice appelle l'injustice ; la violence engendre la violence. » Henri Lacordaire, Pensées.

« La violence engendre la violence. C'est pourquoi la plupart des révolutions se sont perverties en dictatures. » Vaclav Havel, Méditations d'été.

« Là où règne la violence, il n'est de recours qu'en la violence ; là où se trouvent les hommes, seuls les hommes peuvent porter secours. » Bertolt Brecht, Sainte Jeanne des abattoirs.



Actualité - Les objectifs de développement durable

01. QUESTIONS D'ORDRE GÉNÉRAL

- Q1.** Que sont les objectifs de développement durable (ODD) ?
- Q2.** Où trouver les objectifs de développement durable ?
- Q3.** Pourquoi les objectifs de développement durable sont – ils importants ?
- Q4.** Quelle est la différence entre les ODD et les Objectifs du Millénaire pour le Développement (OMD) ?
- Q5.** Qui sont les principaux acteurs des ODD et quel est leur rôle ?
- Q6.** Comment les nouveaux ODD sont – ils financés ?
- Q7.** Comment mesurer les progrès dans la réalisation des ODD ?
- Q8.** Quel est le rôle du programme VNU dans le processus d'élaboration et de la mise en œuvre des ODD ?
- Q9.** Quelle est la pertinence du volontariat dans le contexte des ODD ?
- Q10.** Quelle activité envisager pour les volontaires ?

02. RÉPONSES AUX QUESTIONS POSÉES

Q1. Que sont les objectifs de développement durable ?

R1. Les 17 objectifs de développement durable (ODD) et les 169 cibles qui y sont associées font partie du Programme de développement durable à l'horizon 2030, qui fixe des orientations aux politiques et aux financements au service du développement pour les 15 prochaines années.

Le Programme de développement durable à l'horizon 2030 est un plan d'action pour **l'humanité**, la **planète** et la **prospérité**, renforçant la **paix** et nécessitant des **partenariats** pour sa mise en œuvre. Ces cinq éléments du développement durable sont intimement liés. Tenant compte des succès comme des insuffisances des objectifs du Millénaire pour le développement (OMD), les ODD mettent l'accent sur de nouveaux domaines tels que l'inégalité économique, l'innovation, le changement climatique, les modes de consommation durable, la paix et la justice, entre autres.

Les ODD sont **universels**, **inclusifs**, et représentent un **engagement ambitieux envers l'humanité et la planète**. L'expression « objectifs mondiaux » pour le développement durable est également utilisée pour faire référence aux ODD.

Q2. Où trouver les objectifs de développement durable ?

R2. La résolution A/RES/70/1 intitulée « Transformer notre monde : le Programme de développement durable à l'horizon 2030 », adoptée par l'Assemblée générale des Nations Unies le 25 septembre 2015, présente une définition complète de chacun des ODD.

Le site internet « 2015 : année d'action mondiale » offre une liste des objectifs sous forme d'icônes sur lesquelles il est possible de cliquer, ainsi que les principaux chiffres se rapportant aux thèmes couverts par chacun des objectifs¹ (voir par exemple la page consacrée à la pauvreté – objectif n°1)

Q3. Pourquoi les objectifs de développement durable sont-ils importants ?

R3. Les ODD représentent un programme **porteur de changement, axé sur l'être humain**, et fondé sur les principes **de transparence, de participation, et d'inclusion**. Les ODD sont importants pour nous tous car il nous incombe à chacun une part de responsabilité pour notre avenir et celui de notre planète. Sans objectifs précis et sans cibles mesurables, et en l'absence d'un ensemble de données nous permettant d'analyser la situation, notamment au niveau local, nous risquons de laisser les plus vulnérables de

côté et de ne pas répondre efficacement aux difficultés qui entravent le développement et fragilisent notre planète. La réalisation des ODD dépendra, entre autres, du degré d'appropriation et de mobilisation des citoyens.

Q4. Quelle est la différence entre les ODD et les OMD ?

R4. Les OMD ont permis de rassembler la planète autour d'un programme commun pour lutter contre l'indignité de la pauvreté. Bien que le nombre de personnes vivant dans l'extrême pauvreté ait diminué de plus de la moitié, pour des millions d'autres, le travail reste inachevé. Le nouveau programme doit approfondir les engagements pris au titre des OMD, par exemple éradiquer la faim, réaliser pleinement l'égalité des sexes, améliorer les services de santé, et permettre à chaque enfant d'aller à l'école, tout en préservant les bénéfices des résultats déjà obtenus.

L'une des principales différences est que le programme est **universel**, c'est-à-dire que tous les pays doivent harmoniser leurs stratégies, et identifier, dans chaque domaine, les lacunes et les moyens d'y remédier. Les ODD sont plus ambitieux et complexes, et ils renforceront les acquis des OMD lorsque ces derniers arriveront à échéance à la fin de l'année 2015. Le programme intègre également des domaines nouveaux par rapport aux OMD, comme par exemple le changement climatique, les modes de consommation durable, l'innovation et l'importance de la paix et de la justice pour tous. Les ODD comptent un plus grand nombre d'objectifs, mais ces derniers se concentrent sur des domaines spécifiques, déterminés sur la base de principes et d'engagements communs. S'appuyant sur les OMD, et sur **une approche axée sur l'égalité et fondée sur les droits à tous les niveaux, le programme 2030 fait rimer développement durable et inclusion et y associe un engagement à ne laisser personne pour compte**. Un cadre de suivi et d'examen solide doit également venir renforcer ce programme.

Q5. Qui sont les principaux acteurs des ODD et quel est leur rôle ?

R5. La responsabilité de la réalisation des ODD incombe en premier lieu aux gouvernements et aux citoyens qu'ils représentent. Les États-membres des Nations Unies sont les signataires du nouveau programme 2030. Ils devront reformuler leurs politiques pour tenir compte du contexte local et ainsi contribuer à la réalisation des objectifs, et mettre en place des mesures incitatives pour encourager les entreprises à prendre les ODD en compte dans leurs décisions.

Les ODD appellent également à la mise en place d'un partenariat mondial. L'harmonisation des priorités nationales et des ODD permet d'identifier en amont l'ensemble des partenaires qui seront nécessaires à l'exécution de ce programme ambitieux, notamment les communautés et les groupes de citoyens. Des acteurs majeurs tels que la société civile, les agences de développement, les grandes entreprises et les communautés partout dans le monde apporteront un appui essentiel aux gouvernements dans la réalisation de ces objectifs. Les associations de volontaires sont explicitement mentionnées en tant que parties prenantes à part entière dans le programme à l'horizon 2030 (cf. le paragraphe 45 de la résolution A/RES/70/1 « Transformer notre monde : le Programme de développement durable à l'horizon 2030 »). Les **Nations Unies** auront également un rôle important à jouer en renforçant la cohérence stratégique et en soutenant les gouvernements dans l'adoption des mesures nécessaires à la réalisation de ces objectifs. La réponse à la question n°8 détaille plus avant le rôle spécifique du programme VNU dans la mise en œuvre des ODD.

Q6. Comment les nouveaux ODD seront-ils financés ?

R6. Toutes les sources de financement – publiques et privées, nationales et internationales – devront être mobilisées, valorisées et maximisées en soutien à l'exécution du nouveau programme. Pour certains objectifs, une évolution des approches et des politiques pourra également permettre d'obtenir des progrès. La réalisation des objectifs n'est pas seulement une question d'aide publique au développement ou d'aide étrangère ; il s'agira également

de prendre des engagements fermes pour lutter contre les flux illicites de capitaux et améliorer la coopération internationale sur les questions de fiscalité, ainsi que de renforcer les capacités en matière de mobilisation des ressources internes. Il sera impossible de se passer de la contribution secteur privé, sur lequel repose la majorité du financement du programme pour l'après-2015, ce qui nécessitera la mise en place de mesures incitatives et de cadres réglementaires encourageant la croissance économique locale et l'entrepreneuriat.

Q7. Comment les progrès vers les ODD seront-ils mesurés ?

R7. Les Nations Unies soutiendront la mise en œuvre du programme au niveau national au travers du système des coordonnateurs résidents. **Le nouveau programme représente toutefois un défi majeur en matière de suivi des résultats pour l'ensemble des pays et des citoyens.** Du fait de la très large portée de celui-ci, et de l'appel à ne laisser personne pour compte, l'organisation des Nations Unies devra modifier la façon dont elle vient en aide aux gouvernements (et aux autres acteurs) pour produire, rendre accessibles et analyser les données. Le système de développement des Nations Unies est pleinement déterminé à renforcer la collecte des données dans les domaines clés et à améliorer la qualité et la disponibilité des données pour la mise en œuvre et le suivi du programme à l'horizon 2030. Les **volontaires** peuvent jouer un rôle dans le renforcement des formes participatives de planification et de suivi et dans l'amélioration de la collecte de données quantitatives et qualitatives, en particulier dans les zones reculées.

Au cours des 15 prochaines années, le Forum politique de haut niveau pour le développement durable (HLPF) examinera les progrès accomplis dans la réalisation des ODD et fournira aux États-membres un leadership politique, des conseils et des recommandations en matière de développement durable. La résolution de l'Assemblée générale portant création du HLPF (A/RES/67/290) mentionne explicitement les **associations de volontaires** en tant que parties prenantes. Par conséquent, ces dernières ont la possibilité de présenter les contributions du volontariat aux ODD lors des réunions

du HLPF, en parallèle des rapports établis par les États membres pour rendre compte des progrès accomplis.

À cet égard, le Plan d'action pour l'intégration du volontariat dans la paix et le développement pour la période 2016-2030 (cf. question 8) recommande de mesurer le volontariat pour a) parvenir à une compréhension globale de l'engagement des populations et de leur bien-être et b) contribuer au suivi des ODD.

Q8. Quel est le rôle du programme VNU dans le processus d'élaboration et de mise en œuvre des ODD ?

R8. Au cours du processus d'élaboration du nouveau programme et de ses objectifs, le programme VNU, en offrant un espace d'expression à l'ensemble des citoyens pour faire part de leurs priorités, a contribué à élargir le dialogue et les consultations lancés par les Nations Unies et à identifier des pistes pour encourager le développement de solutions à l'initiative des communautés. Le programme VNU a également aidé les associations de volontaires à plaider en faveur de la reconnaissance et de l'intégration du volontariat dans le cadre de l'après-2015.

Maintenant que le programme a été approuvé et qu'il entre dans sa phase d'exécution, le programme VNU soutient les initiatives du système des Nations Unies pour la réalisation des objectifs mondiaux en sélectionnant et en formant des volontaires qualifiées et motivés au service des programmes, des projets et des opérations de terrain des Nations Unies en faveur de la paix et du développement partout dans le monde. L'avantage comparatif du programme VNU repose sur sa capacité à atteindre les communautés les plus isolées et à promouvoir des solutions adaptées au contexte local ainsi qu'une évolution des mentalités sur le long terme.

Mandaté par l'Assemblée générale des Nations Unies, le programme VNU a également développé un **Plan d'action** pour l'intégrer le volontariat aux activités axées sur la paix et le développement pour la décennie à venir et au-delà (2016-2030) qui identifie trois objectifs stratégiques :

- Renforcer l'appropriation du programme de développement par la population en appuyant l'engagement civique et en créant un environnement propice à l'action citoyenne ;
- Prendre en compte le volontariat dans les stratégies nationales et mondiales de mise en œuvre du programme de développement pour l'après-2015 ;
- Mesurer le volontariat afin de parvenir à une compréhension globale de l'engagement des populations et de leur bien-être et contribuer au suivi des objectifs de développement durable.

Le Plan d'action fait partie du rapport A/70/118 du Secrétaire général (cf. section IV) relatif aux progrès accomplis dans la reconnaissance, la promotion, la facilitation, la mise en réseau et l'intégration du volontariat dans le monde entier depuis 2012. Le programme VNU facilitera la coordination des efforts entre les différentes parties prenantes afin de mettre en œuvre avec succès ce Plan d'action.

Q9. Quelle est la pertinence du volontariat dans le contexte des ODD ?

R9. Le développement durable ne peut être atteint uniquement au moyen d'actions institutionnelles. Le programme à l'horizon 2030 reconnaît que les moyens d'exécution traditionnels doivent s'accompagner de mécanismes participatifs facilitant la mobilisation populaire et les bénéfices que cette dernière apporte aux autres et à la planète. Les ODD ne pourront être réalisés sans une mobilisation populaire à tous les niveaux, et sans mettre en place de nouveaux partenariats, y compris avec des **associations de volontaires**. Ces dernières peuvent servir de cadre à la mobilisation citoyenne et d'intermédiaire entre les initiatives institutionnelles et les actions de volontariat au niveau local. Il est essentiel de les impliquer dès la phase de planification, lorsque les gouvernements et les institutions alignent leurs stratégies sur les ODD. Le volontariat est porteur de transformation tant pour les volontaires que pour les personnes avec qui ils travaillent.

Le document de politique du programme VNU sur le programme de développement pour l'après-2015 réaffirme que 1. Le volontariat est universel et renforce l'engagement civique, l'inclusion sociale, la solidarité et le sentiment d'appropriation ; et 2. le volontariat doit faire partie d'un nouveau cadre d'évaluation allant au-delà du PIB pour intégrer les progrès en matière de bien-être et de développement durable de l'être humain.

Le rapport de synthèse du Secrétaire général des Nations Unies sur le programme de développement durable pour l'après-2015 (A/69/700) reconnaît le volontariat comme « **un moyen d'action puissant et polyvalent** » dans le cadre des ODD. Il souligne le rôle du volontariat dans la mobilisation du public, la participation de la population à l'élaboration des plans d'action et à la concrétisation des objectifs de développement durable au niveau local en organisant des débats entre les pouvoirs publics et la population afin d'arrêter des mesures concrètes, réalisables à différentes échelles.

En **mobilisant les capacités et en prolongeant la portée des actions**, les volontaires peuvent faciliter et contribuer à la mobilisation populaire en matière de planification, de mise en œuvre et de suivi des ODD, comblant les lacunes en capital social et renforçant la cohésion sociale. Ils peuvent notamment :

- Offrir une expertise technique et renforcer les capacités dans tous les domaines relatifs aux objectifs, comme par exemple la pérennité des moyens d'existence, la santé, l'éducation, l'emploi, l'environnement, les questions relatives au genre ou à la jeunesse
- Offrir des espaces d'action et de dialogue ; aller à la rencontre de la population, notamment des personnes marginalisées ou isolées ; faire entendre la voix des citoyens et intégrer leurs savoirs dans les actions collectives – et contribuer ainsi à ce que nul ne soit laissé pour compte. C'est essentiel pour renforcer l'appropriation des ODD et leur prise en compte au niveau local ;
- Sensibiliser la population ou se faire les champions du changement et inspirer les autres à faire de même, afin d'encourager une évolution durable des mentalités et des comportements ;

- Contribuer à évaluer les progrès accomplis dans la mise en œuvre des ODD en collectant des données, fournissant une expertise et renforçant les formes participatives de planification et de suivi.

Q10. Quelles activités envisager pour les volontaires ?

R10. Le volontariat et les volontaires peuvent contribuer de différentes manières à concrétiser le changement porté par la réalisation des ODD dans chacun des domaines thématiques (objectifs n°1 à 17), en se concentrant sur un ou plusieurs objectifs à la fois. L'objectif n°17 mentionne explicitement les **associations de volontaires** en tant que partenaires d'exécution de l'ensemble des objectifs.

Les **volontaires** peuvent fournir une expertise technique – par exemple dans les domaines de la santé (objectif n°3), de l'éducation (objectif n°4), de l'eau salubre et de l'assainissement (objectif n°6), des énergies renouvelables (objectif n°7) et des écosystèmes durables (objectifs n°13, 14 et 15). Ils peuvent contribuer à renforcer les compétences et les capacités, en particulier des jeunes et des personnes éloignées du marché de l'emploi, améliorant ainsi leur employabilité (objectif n°8 et tous les objectifs).

Les volontaires ont également prouvé qu'ils pouvaient servir, par leurs attitudes, de modèles et de catalyseurs de l'évolution des mentalités – cela s'applique par exemple aux questions relatives à l'égalité des sexes (objectif n°5), à l'eau salubre et à l'assainissement (objectif n°6), aux modes de consommation durables (objectif n°12), à la lutte contre les changements climatiques (objectif n°13), ainsi qu'à la réconciliation et au renforcement de la confiance et des relations en vue de développer le capital social et la cohésion sociale (objectif n°16).

Exemples d'activités pouvant être menées par des volontaires dans le cadre des ODD

Les volontaires peuvent :

- **Faire connaître au grand public** le programme 2030 grâce à des campagnes locales et à des approches innovantes, notamment dans les zones reculées et auprès des populations marginalisées, afin d'encourager l'appropriation des ODD (concerne tous les objectifs) ;
- **Offrir une expertise technique** en complément des services de base indispensables dans les domaines considérés comme « inachevés » par les OMD (objectifs n°1 à 5), lorsqu'ils sont inexistantes ou insuffisants, ainsi que dans d'autres domaines (par exemple pour les objectifs n°6, 7, 13 à 15) ;
- **Servir d'exemple** par leurs attitudes et leurs comportements, renforçant l'effet transformateur du programme, et améliorant la connaissance des ODD au sein de la population et son désir de participer à leur mise en œuvre au niveau local (concerne par exemple les objectifs n°5, 6, 12, 13 et 16) ;
- **Encourager la population** à prendre conscience qu'elle dispose de l'opportunité et des moyens de s'attaquer aux difficultés qu'elle rencontre, et capitaliser sur la mobilisation et les actions collectives dans les phases de planification, de mise en œuvre et de suivi de l'ensemble des objectifs (objectif n°17) ;
- **Renforcer les compétences** dans les différents domaines relevant des objectifs par le transfert des connaissances et de l'expérience, tout en facilitant la diffusion de l'expertise locale (concerne tous les objectifs et notamment l'objectif n°8) ;
- **Recueillir des données**, évaluer les progrès des ODD et mobiliser l'expertise locale au moyen de formes participatives de suivi, d'un contact avec la population locale et de la diffusion d'outils tels que l'enquête MY World 2030 (concerne tous les objectifs et notamment l'objectif n°17).

Dans l'ensemble, en encourageant la mobilisation populaire et l'action collective, **le volontariat** contribue à l'appropriation des solutions de développement, renforce la résilience et la prévention au niveau local – ce qui contribue à la réalisation des objectifs dans leur ensemble.

Les **associations de volontaires** peuvent également jouer un rôle significatif en servant d'intermédiaire entre les stratégies et initiatives gouvernementales et les actions collectives volontaires qui les complètent de manière essentielle (et ce pour chacun des objectifs).

En combinant l'action des volontaires internationaux, nationaux et communautaires, il est possible, par un effet d'entraînement, de multiplier les résultats et d'accroître leur portée, et ce dans chacun des domaines visés par les objectifs.

Partie II : Quelques anciens sujets –

I. CALCUL NUMERIQUE

Session de mai 2004

EXERCICE 1

- 1) Un contrôle a eu lieu dans une classe. On sait que deux tiers au moins des questions de ce contrôle étaient difficiles. Pour chacune de ces questions difficiles, deux tiers au moins des élèves n'ont pas su répondre. On sait aussi que deux tiers au moins des élèves ont bien réussi le contrôle : chacun d'eux a su répondre à deux tiers au moins des questions. Est-ce possible ? Justifier clairement vos réponses.
- 2) La réponse à la question précédente serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par trois quarts ?
- 3) La réponse à la première question serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par sept dixièmes ?

EXERCICE 2

- 1) Démontrer les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Indication : on pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

- 2) On rappelle que pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, établir une relation reliant la quantité C_{n+1}^{p+1} aux quantités C_n^p et C_n^{p+1} .
- 3) Soit a un réel non nul, montrer que les réels $A = (a^2 - 2a - 1)^2$, $B = (a^2 + 1)^2$ et $C = (a^2 + 2a - 1)^2$ sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{-1}{3 + u_n}$$

- 1) Calculer u_2, u_3, u_4 .
- 2) Montrer par récurrence que u_n est minorée par -1 .
- 3) Montrer par récurrence que u_n décroît.
- 4) Calculer sa limite L .
- 5) Tracer les courbes $y = \frac{-1}{3+x}$ et $y = x$; interpréter.

EXERCICE 4

Une entreprise possède 200 points de vente répartis sur les six Etats de la CEMAC. Chaque point de vente a fait connaître son chiffre d'affaires exprimés en millions de francs, pour le mois de décembre 2003. Les chiffres d'affaires fournis sont consignés dans le tableau suivant :

77	129	56	67	78	176	75	101	68	96
89	46	178	125	97	26	50	29	151	141
120	77	33	75	17	113	97	80	144	109
96	60	152	20	84	123	105	57	102	100
61	118	140	95	84	152	101	105	63	95
115	3	104	107	47	83	75	50	119	137
2	46	80	79	120	159	110	108	138	143
93	94	124	99	110	115	139	55	146	72
31	121	109	17	64	136	103	112	149	114
136	144	96	128	86	62	100	105	78	46
50	137	71	107	113	141	42	135	89	38
114	136	115	74	71	114	123	87	124	94
127	34	116	28	107	93	29	113	99	115
113	122	137	111	59	107	78	189	5	114
121	116	68	86	81	124	124	67	93	107
125	123	134	120	49	96	101	99	102	72
79	48	90	140	142	86	72	117	28	16
81	106	125	128	35	82	124	50	77	149
98	103	103	101	97	96	193	152	127	107
109	127	76	97	62	105	50	80	108	62

- 1) Dépouiller les renseignements qui précèdent et présenter les résultats du dépouillement sous forme d'un tableau statistique dans lequel on mettra l'effectif et la fréquence de chaque classe. On retiendra les classes : $[0, 30[$; $[30, 50[$; $[50, 70[$; $[70, 90[$; $[90, 100[$; $[100, 110[$; $[110, 120[$; $[120, 130[$; $[130, 150[$; $[150, 200[$.
- 2) Déterminer le nombre et la fréquence de points de vente dont le chiffre d'affaires est :
 - inférieur à 105 millions de francs ;
 - Supérieur à 60 millions de francs ;
 - Compris entre 35 et 150 millions de francs.

Les unités incluses à l'intérieur d'un intervalle sont supposées se répartir uniformément à l'intérieur de l'intervalle.

Session de mai 2006

EXERCICE 1

Un véhicule coûte 80 millions de francs en 2004. Il se déprécie de 20% par an ; (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an).

- 3) Quelle est sa valeur du véhicule au bout de cinq ans ?
- 4) On suppose que pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 4% par an. Quelle somme d'argent l'entreprise doit-elle prévoir pour remplacer son véhicule neuf ?

EXERCICE 2

Un couple souhaite avoir trois enfants. A chaque naissance, on note G si l'on a un garçon et F si c'est une fille.

En supposant que la probabilité d'avoir un garçon est de 48% et celle d'avoir une fille de 52%.

- 1) Déterminer à partir de l'arbre des probabilités, l'ensemble Ω des résultats possibles et leur probabilité.
- 2) Calculer la probabilité des événements suivants :

A = « obtenir au moins deux filles »

B = « Obtenir un enfant au moins de chaque sexe »

C = « le deuxième enfant est de sexe différent de celui des deux autres »

D = « obtenir au moins deux filles sachant que l'enfant le plus âgé est une fille ».

- 3) On appelle X, la variable aléatoire qui associe le nombre de garçons à chaque résultat :

Donner sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable X

Calculer la moyenne μ et l'écart-type σ de X.

EXERCICE 3

- 1) Montrer que la somme S des n premiers entiers naturels non nuls est $\frac{n(n+1)}{2}$

En déduire la somme des multiples de 3 inférieurs à 2000.

- 2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n (2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

En déduire la valeur de la somme $S = 11^3 + 13^3 + 15^3 + \dots + 19^3$.

- 3) Montrer que la somme S' des premières puissances du réel q avec $q \neq 1$ est $S' = \frac{1-q^n}{1-q}$.

En déduire :

- la somme des puissances de 3 inférieurs à 20.000.
- la limite de la suite $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 4

On dispose de la statistique suivante portant sur les exploitations agricoles d'une certaine région, classées d'après leur superficie.

Superficie en hectares	Nombre d'exploitations
[0, 1[	20
[1, 2[	50
[2, 3[	60
[3, 5[	80
[5, 10[	160
[10, 24[	100
[24, 40[	30

- Après avoir calculé les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants, présenter l'histogramme relatif à cette distribution.
- Présenter, sur un même repère, le polygone cumulatif croissant et polygone cumulatif décroissant.
- Donner les coordonnées du point d'intersection de ces deux polygones. Indiquer la signification de l'abscisse de ce point.
- En admettant que les effectifs propres à une classe se répartissent uniformément à l'intérieur de cette classe, calculer le nombre de ces exploitations dont la superficie est :
 - inférieure à 2,75 hectares ;
 - supérieure à 5,5 hectares ;
 - comprise entre 3,2 et 10,7 hectares.

Session de mai 2007

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$; pour tout entier naturel n .

- 1) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- 3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2

Sauf indication contraire, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Le taux de pénétration du téléphone mobile dans la population française indique le pourcentage de personnes équipées d'un téléphone mobile par rapport à la population totale.

Le tableau ci-dessous donne, entre 1998 et 2004, l'évolution de la population française et du taux de pénétration.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

(Source : site de l'INSEE)

1. (a) Calculer le nombre, en millions, de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 et en 2004.
(b) Entre ces deux années quel est le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration ?
2. Placer dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$: les unités graphiques sont de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées.
3. L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme : $y = a \ln(x) + b$ où a et b sont des réels. On pose pour cela $z = \ln(x)$.

- a) Recopier et compléter le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0						
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

- b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés.
4. En admettant que cet ajustement reste fiable à moyen terme
 - a) Déterminer le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager.
 - b) A partir de quelle année peut-on penser que le taux de pénétration dépassera 85 % ?

EXERCICE 3

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir aux buts (penalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

1.
 - a) Calculer probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs aux buts lors d'un entraînement.
 - b) Préciser les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).
 - c) Calculer l'espérance de X .
2. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs aux buts lorsque $X \geq 8$. Déterminer la probabilité pour un joueur de réussir l'épreuve lors d'un entraînement.
3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement.
On admet que les épreuves de tirs aux buts sont indépendantes les unes des autres.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs aux buts au cours des ces 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.

Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec. Les résultats seront donnés avec 6 chiffres après la virgule.

Calculer pour un joueur :

- a) la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
 - b) la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
 - c) la probabilité d'avoir au moins 1 succès.
4. Calculer le nombre minimal d'entraînement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 4

L'étude d'une population de 100 individus selon deux caractères x et y a donné les résultats suivants :

$x \backslash y$	0	1	2	3	TOTAL
-1			10		16
0		2			21
1		10	20		

2		3			25
TOTAL	5	20	60		

1. Recopier et compléter ce tableau.
2. Calculer pour chaque variable, la moyenne, la variance et l'écart-type.
3. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .

Session de mai 2008

EXERCICE 1

Au 1^{er} janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants. Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1^{er} janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

PARTIE A : étude théorique

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1^{er} janvier de l'année 2005 + n .

Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
 - a) Calculer v_0
 - b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

PARTIE B :

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la partie A.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1^{er} janvier 2020 ?
2. A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

EXERCICE 2

Sauf indication contraire, on arrondira les résultats à l'unité près.

Une machine est achetée 3 000 euros.

Le prix de revente y , exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

A - Ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 euros sur l'axe des ordonnées.
2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite dans le repère précédent.

B - Ajustement non affine

On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

$$z = -0,22x + 8,01$$

1. Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.
2. Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 euros.

C - Comparaison des ajustements

Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 euros. Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse.

EXERCICE 3

Partie A

Une urne contient n boules blanches (n dans $\mathbb{N}$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer 2 boules de même couleur.
 - a) Montrer que :

$$p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.
Un joueur effectue 2 tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les 2 boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 francs. Pour chaque tirage :
 - si les 2 boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 francs ;
 - si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 francs.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des 2 tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 4

On considère la distribution suivante donnant la répartition des chefs d'exploitations agricoles selon l'âge et la surface d'exploitation en hectares (ha).

Surface (ha) \ Age (années)	0 - 10	10 - 30	30 - 50	50 - 100
15 - 25	2	5	1	3
25 - 35	21	18	19	29
35 - 45	40	18	33	59
45 - 55	117	55	67	124
55 - 65	118	70	60	58

1. Quelle est la population étudiée ici ? Quels sont les caractères étudiés ? Préciser leur nature.
2. Combien y a-t-il de chefs d'exploitations ayant moins de 45 ans et dont l'exploitation fait plus de 30 ha de surface ?
3. Sur 100 chefs d'exploitations agricoles, combien exploitent-ils des espaces d'une surface de plus de 50 ha ?
4. Calculer les moyennes marginales.

Session de mai 2010

EXERCICE 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

- 1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{2x^2}$$

En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

- 2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = E(\sqrt{a}) + 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.

- a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leq u_0$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})$$

- c) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{a})$$

- d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des 6 capitales de la Communauté Economique et Monétaire de l'Afrique Centrale (CEMAC).

Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit « BANGUI, YAOUNDE, LIBREVILLE, BRAZAVILLE » diffère du circuit « BRAZAVILLE, LIBREVILLE, YAOUNDE, BANGUI ».

PARTIE A : Dénombrement

- 1) Combien y a-t-il de circuits différents ?
- 2) Combien y a-t-il de circuits qui commencent à LIBREVILLE ?

PARTIE B : Calcul de probabilités

Dans la suite, on propose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

- 1) Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « le circuit commence à LIBREVILLE » (**NB** : le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).
- 2) Si le circuit commence à LIBREVILLE, quelle est la probabilité pour que YAOUNDE et BANGUI fassent partie du circuit ? (**NB** : le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

EXERCICE 3

PARTIE A

On a observé les variables X et Y sur une population de n individus et on a obtenu les résultats $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$. On cherche l'équation de la droite de régression de Y en X notée $Y = aX + b$. Par la méthode dite des moindres carrés ordinaires, les coefficients a et b sont obtenus par la minimisation de la quantité :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i - b)^2$$

- 1) Calculer la dérivée de $S(a, b)$ par rapport à a et la dérivée de $S(a, b)$ par rapport à b .
- 2) La condition nécessaire pour que la fonction $S(a, b)$ atteigne un minimum est que chacune des dérivées précédentes s'annule. Montrer que si $S(a, b)$ atteint son minimum en $(\hat{a}, \hat{b})$, la condition nécessaire implique que :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\text{Et } \hat{b} = \bar{Y} - \hat{a} \bar{X}$$

Où $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ sont des moyennes arithmétiques de X et Y .

On rappelle que cette condition est également suffisante.

PARTIE B

Année : (t)	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
P_t (en millions)	6,65	6,80	6,96	7,13	7,30	7,49	7,68	7,87	8,08	8,29	8,51

Le tableau suivant donne la population de Kangaré entre 1999 et 2009.

- 1) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la droite de régression de P_t sur t ($P_t = at + b$). Quelle prévision peut-on faire de cette population pour l'année 2010 ?
- 2) On postule maintenant que cette population croît selon la relation $P_t = P_0(1 + r)^t$.
En utilisant la fonction Log (ou $\ln$), montrer que cette relation peut s'écrire sous la forme : $Y = aX + b$. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer a et b . En déduire les valeurs de P_0 et r . Quelle valeur prévoit-on alors pour cette population en 2010 ?
- 3) En fait, la population de Kangaré en 2010 est de 8,74 millions. On définit l'erreur de prévision en 2010 comme la différence entre la vraie valeur de la population et la prévision qui en est faite. Un modèle est jugé bon s'il conduit à des erreurs de prévision faibles en valeur absolue, lequel des 2 modèles ci-dessus est-il le meilleur ?

NB : dans tout l'exercice, on adoptera pour les calculs la convention suivante pour t :
1999 ($t = 1$), 2000 ($t = 2$), 2001 ($t = 3$), 2002 ($t = 4$), etc.

Session de mai 2011

EXERCICE 1

Une usine produit chaque mois 200 m^3 de déchets qu'elle stocke, le premier jour du mois suivant, dans une cuve prévue à cet effet. Au cours du stockage, les déchets perdent $\frac{2}{3}$ de leur volume.

L'usine commence le stockage des déchets le 1^{er} février 2011 avec les déchets produit au cours du mois de janvier.

- 1) Quel est le volume de déchets dans la cuve le 1^{er} mars 2011, le 1^{er} avril 2011, le 1^{er} mai 2011 ?
- 2) On note u_n le volume de déchets contenus dans la cuve le premier jour du n^{e} mois du stockage (le premier mois de stockage est le mois de février 2011). Exprimez une relation entre u_{n+1} et u_n .
- 3) On pose, pour tout nombre entier n , $v_n = u_n - 300$. Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- 4) La suite (v_n) est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i}; \quad f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k}).$$

On note $\text{Ker } f$ le noyau de f et $\text{Im } f$ l'image de E par f .

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
2. Démontrez que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$.
3.
 - a) Vérifier la relation $f \circ f = f$.
 - b) Démontrez que $\vec{u} \in \text{Im } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ (on utilisera 3.a).

EXERCICE 3

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soit A une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

- 1) Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 sur $(O, \vec{i})$.
- 2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = b_n - a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme. Exprimer u_n en fonction de n .

- 3) Comparez a_n et b_n . Etudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) . Interprétez géométriquement ces résultats.
- 4) Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- 5) Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_n = a_n + b_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Démontrez que (v_n) est une suite constante.
- b) Déduisez que les segments $[A_n, B_n]$ ont tous même milieu I .
- 6) On reprend les suites (a_n) et (b_n) .
 - a) Justifiez qu'elles sont convergentes.
 - b) Calculez leur limite.
 - c) Interprétez géométriquement le résultat de la question précédente.

EXERCICE 4

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre θ où θ est un réel strictement positif. On rappelle que pour tout $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = \int_0^t \theta e^{-\theta x} dx$$

La fonction R définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

- 1) Démontrez que pour tout $t \geq 0$ on a : $R(t) = e^{-\theta t}$.
- 2) Démontrez que la variable aléatoire X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X > t + \lambda | X > t)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$

PARTIE B : Applications numériques

Dans cette partie, on prend $\theta = 0,00026$.

- 1) Calculez $P(X \leq 1000)$ et $P(X > 1000)$.
- 2) Sachant que l'évènement « $X > 1000$ » est réalisé, calculez la probabilité de l'évènement : « $X > 2000$ ».
- 3) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures,
 - a) Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?
 - b) Pouvait-on prévoir le résultat de la question précédente ?

Session de novembre 2014

EXERCICE 1

La Camerounaise des eaux décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 30 000 FCFA. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année, la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 3000$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par la Camerounaise des eaux à la 2^{ème} et la 3^{ème} année).
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .
3. Un ingénieur compte rester 20 ans dans la Camerounaise des eaux à partir du moment où est versée la prime.
 - a) Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année (c'est-à-dire u_{20}).
 - b) Calculer la somme totale S_{20} des primes touchées sur les 20 années :
(C'est-à-dire $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$).

EXERCICE 2

Craignant une propagation de la maladie à virus Ebola, un service de santé d'une ville de l'Afrique de l'Ouest de 50 000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette maladie dans cette ville pendant 7 semaines. Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7.

On a noté x_i les rangs successifs des semaines et y_i le nombre de consultations correspondant. Les données collectées sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : y_i	540	720	980	1320	1800	2420	3300

1. A partir de ce tableau,
 - a) Tracer le nuage de points correspondant sur votre copie. On prendra 2 cm pour une unité en x et 1 cm pour 200 en y .
 - b) Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi ?
2. Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les $z_i = \ln(y_i)$.
 - a) Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les z_i à 0.01 près. Il n'est pas demandé de tracer le nuage de points correspondant.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$							

- b) On propose que l'équation d'ajustement affine reliant z et x est donnée par l'expression :

$$z_i = 0.3x_i + 6; \quad i = 1, \dots, 7.$$

Déduire y en fonction de x (on donnera le résultat sous forme $y_i = e^{ax_i+b}$, a et b étant deux nombres réels).

3. En utilisant le modèle de la question précédente, trouver par le calcul :
 - a) une estimation du nombre de consultations à la 10^{ème} semaine (arrondir à l'unité).
 - b) la semaine à partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

Session de mai 2024

EXERCICE 1

On cherche à approcher numériquement l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Calculer I_0 .
- 2) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n+1)}$$

- 4) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 2

On considère un dé tétraédrique régulier dont les quatre faces sont numérotées de 0 à 3.

Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros des 3 faces visibles du dé.

- 1) Donner la distribution de probabilité de la variable aléatoire X .
- 2) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X , et la variance $V(X)$ de X .
- 3) Tracer la fonction de répartition de X .
- 4) On jette le dé cinq fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement « $X = 0$ » ?
- 5) Soit n un entier strictement positif. Déterminer n_0 le nombre minimal de lancers du dé, tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 , la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement « $X = 0$ » dépasse 0.99999.

EXERCICE 3

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 400x + 250y = 1550 \\ x + y = 5 \end{cases}$
- 2) M. ONDOUA achète dans un magasin 5 articles parmi lesquels les couteaux de table à 400 F l'unité et les rasoirs à 250 F l'unité. Il dépense en tout 1550 F. Déterminer le nombre de couteaux de table et le nombre de rasoirs qu'il a achetés dans ce magasin.

EXERCICE 4

Une étude a été réalisée auprès de 200 patientes dans le service de gynécologie de clinique « Bonne Guérison » en 2013. Les données obtenues ont permis de construire le tableau suivant :

Classe d'âge (en années)	Pourcentage de patients	Pourcentage cumulé de patients
[15 ; 20[	...	3
[20 ; 25[	...	14
[25 ; 35[	...	...
[35 ; 40[	26	...
[40 ; 50[	...	...
[50 ; 60]	...	...
Total	...	...

Source : Etude Clinique « Bonne Guérison », 2013.

- 1) Sachant que d'une part, les patientes âgées de 25 à moins de 35 ans sont sept fois plus nombreuses que celles qui sont âgées de 50 ans et plus, les patientes âgées de 40 à moins de 50 ans sont quatre fois plus nombreuses que celles qui sont âgées de 50 ans et plus, compléter le tableau ci-dessus.
- 2) Sur 100 patientes interrogées au service de gynécologie de la clinique « Bonne Guérison », combien sont-elles âgées de moins de 35 ans ?
- 3) Combien de patientes sont-elles âgées d'au moins 35 ans au service de gynécologie de la clinique « Bonne Guérison » ?
- 4) Estimer l'âge moyen des patientes du service de gynécologie de la clinique « Bonne Guérison ».

II. MATHÉMATIQUES

Session de mai 2004

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\sqrt{x+24} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 0$.
- 2) $\sqrt{x+24} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = 0$.
- 3) $x - 1 \leq \sqrt{x^3 - 1}$.

EXERCICE 2

Soit, dans $\mathbb{R}$, le polynôme $P(x) = 6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a)$ où a et b sont des nombres réels non nuls.

- 1) Calculer $P(0)$, $P(a)$ et $P(b)$.
- 2) Déterminer le signe de $P(0)$, $P(a)$ et $P(b)$ dans les cas suivants :
 - $\alpha) 0 < a < b$
 - $\beta) a < 0 < b$

- 3) En déduire l'existence dans $\mathbb{R}$, des racines de l'équation $P(x) = 0$ et leurs positions par rapport à a et b dans les cas α et β .

EXERCICE 3

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$.

- 1) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.
- 2) Etudier f et tracer $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) On considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) passant par le point I de coordonnées $(-1, 0)$ et de coefficient directeur a .
 - a) Déterminer l'équation cartésienne de (Δ) .
 - b) On veut déterminer le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Δ) . Montrer que ceci revient à chercher le nombre de racines dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de a , de l'équation :

$$(a-1)x^2 + 4x - (a+4) = 0.$$
 Déterminer ce nombre de points d'intersection.
 - c) Dans le cas où (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en deux points A et B , déterminer les coordonnées du milieu M de $[AB]$ (utiliser l'expression de la somme des racines d'une équation du second degré).
 - d) En éliminant a entre les coordonnées de M , montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ de ces points M est inclus dans la courbe $(\mathcal{C}')$ d'équation $y = x - 1 - \frac{2}{x}$.
 - e) Etudier la fonction $g: x \mapsto x - 1 - \frac{2}{x}$, tracer $(\mathcal{C}')$ et indiquer $\mathcal{M}$.

EXERCICE 4

Soit E_2 un plan vectoriel et f l'endomorphisme de E_2 défini par : $f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j}$.

- 1) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 2) Soit $\vec{v}(x, y)$ un vecteur de E_2 et $\vec{v}'(x', y')$ son image par f . Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- 3) Déterminer le noyau de f . Que peut-on en déduire pour f ?
- 4) Montrer que $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est une base de E_2 et déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette base.
- 5) Soit g l'application linéaire qui à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ fait correspondre le vecteur $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ avec $x_1 = a + ay$ et $y_1 = bx + cy$; a, b et c étant des constantes réelles. On pose $h = g \circ f$.
 - a) Donner la matrice h dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
 - b) Peut-on déterminer a, b et c tels que h soit une homothétie vectorielle ? (On rappelle que h est une homothétie vectorielle lorsqu'il existe un réel k non nul tel que pour tout vecteur $\vec{v}$ de E_2 , $h(\vec{v}) = k\vec{v}$).

Session de mai 2006

EXERCICE 1

- 1) Calculer $(1 + i\sqrt{2})^6$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^6 - 1 = 0$.
- 3) En déduire dans $\mathbb{C}$ les six solutions de l'équation : $z^6 = 23 - 10i\sqrt{2}$ (Les racines seront données sous forme algébrique).

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{C}$, le système d'inconnues x, y, z suivant (S) :
$$\begin{cases} x + y + z = 2i - 1 \\ xy + yz + xz = -2(1 + i) \\ x \cdot y \cdot z = 2 \end{cases}$$

- 1) Soit le polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - 2(1 + i)z - 2$.
Montrer que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ est solution de (S) si et seulement si a, b et c sont racines de P .
- 2)
 - a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle et une seule que l'on déterminera.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et en déduire les solutions du système (S) dans $\mathbb{C}^3$.

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , Id l'application identique de E et θ l'application nulle de E .

Pour tout élément f de E , on pose : $f \circ f = f^2$ et $f + f = 2f$.

On se propose d'étudier les éléments de f de $L(E)$ tels que : $(f - Id)^2 = \theta$ (1)

- 1) Montrer que $(f - Id)^2 = \theta$ équivaut à $2f - f^2 = Id$.
En déduire que si f est solution de (1), alors f est bijectif et préciser f^{-1} .
- 2)
 - a) Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1) ?
 - b) Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E , f et g les endomorphismes de matrices respectives :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que f et g sont solutions de (1).

En déduire qu'il existe un élément h de $L(E)$ tel que $h \neq \theta$ et $h^2 = \theta$.

- 3) Soit f une solution de (1) et k un réel ; démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$ si, et seulement si $k = 1$.
- 4)

- a) Soit h un élément de $L(E)$ différent de θ tel que $h^2 = \theta$. Soit $\vec{u}_0$ un vecteur de E tel que $h(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$.

Montrer que $(h(\vec{u}_0), \vec{u}_0)$ est une base de E . Donner la matrice de h dans cette base.

- b) En déduire que, pour f solution de (1) et $f \neq Id$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

- 1) On considère $n = 1$.
 - a) Calculer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?
 - b) Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variations.
 - c) Déterminer une équation de la tangente à C_1 en son point d'abscisse 1.
- 2) On considère $n = 2$.
 - a) Calculer les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?
 - b) Calculer $f_2'(x)$ et dresser le tableau de variations de f_2 .
- 3) Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire les positions relatives de C_1 et C_2 .
- 4) Tracer C_1 et C_2 .

Partie B

n étant un entier non nul, on pose : $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$.

- 1) On pose $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$; calculer $f'(x)$. En déduire I_1 .
- 2) En utilisant une intégration par intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
- 3) Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine plan compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
- 4) En utilisant la question 2) de la partie B, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

- 5)
 - a) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1, e]$, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leq I_n \leq 1.$$

- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

Session de mai 2008

EXERCICE 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1)

a) Calculer u_2, u_3 et u_4 .b) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

2)

a) Montrer que, pour tout entier k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1$$

3)

a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.b) En déduire le sens de variations de la suite (v_n) .4) Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).Quelle est la limite de la suite (u_n) ?**EXERCICE 2**1) On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.a) Calculer $P(4)$.b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 2 \text{ cm}$.Soient A, B et C les points d'abscisses respectives : $a = 4, b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Placer les points A, B, C sur la figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point $k = -\sqrt{3} + i$.On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\pi/3$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\vec{OB}$.

a) Quelles sont les abscisses respectives de F et de G ?

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

- b) Calculer l'affixe du point H.
Le triangle AGH est-il équilatéral ?

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i}; \quad f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k}).$$

On note $\text{Ker} f$ le noyau de f et $\text{Im} f$ l'image de E par f .

1. Déterminer une base de $\text{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\text{Im} f$.
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker} f$ et d'un vecteur de $\text{Im} f$.
4. Déterminer $f \circ f$ et démontrer que $\vec{u} \in \text{Im} f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$.
5. Donner la matrice M de l'application f relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et calculer M^n , $n \geq 2$.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire g .

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe. En déduire le tableau de variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $g(0) = 0$.
On note α la solution non nulle. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
4. Montrer que la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.
Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$.

5. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) .

Partie C - Calculs d'aire

- Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.
- Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) .
- Soit m un réel strictement supérieur à -1 . On considère le domaine $(\mathcal{D}_m)$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.
 - Calculer l'aire $(\mathcal{A}_m)$ du domaine $(\mathcal{D}_m)$, en unités d'aire.
 - Déterminer la limite de $(\mathcal{A}_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

Session de mai 2009

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- Démontrer que f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.
- Etudier la parité de f .
- Etudier la dérivabilité de f en 0.
- Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

EXERCICE 2

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $g.L^{-1}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle : $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$ où $t \geq 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne.

- Exprimer f en fonction de t et de a .
- On fixe $a = 5$. Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
- Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5 g.L^{-1}$.

EXERCICE 3

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i}; \quad f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k}).$$

On note $\text{Ker } f$ le noyau de f et $\text{Im } f$ l'image de E par f .

4. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
5. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
6. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$.
7.
 - c) Vérifier la relation $f \circ f = f$.
 - d) Démontrer que $\vec{u} \in \text{Im } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ (on utilisera 4.a).

EXERCICE 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
2.
 - a) Calculer les limites de f de $\mathcal{D}$.
 - b) Montrer que la courbe (C) de f admet les droites D et D' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ comme asymptotes.
 - c) Etudier la position de (C) par rapport à ces asymptotes.
 - d) (C) coupe la droite D' d'équation $y = -x$ en deux points. Soit M celui de ces deux points dont l'abscisse α est positive. Calculer α .
3. Définir la dérivée f' de f .
 Pour étudier le signe de f , on tracera, pour $x > 0$, dans un repère orthonormé, les courbes C_h et C_g des fonctions $h: x \mapsto 1 - x^2$ et $g: x \mapsto \ln(x)$. Pour $x < 0$, on montrera que la fonction $q: x \mapsto x^2 + 1 - \ln(-x)$ admet un minimum pour une valeur x_0 et on calculera $q(x_0)$.
 Dresser le tableau de variation de f .
4. En prenant $\ln 2 = 0,7$, calculer les valeurs de f en : $-4, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ et 4 .
5. Tracer (C) et ses asymptotes. On prendra pour unité de longueur sur les axes 2 cm.
6. Calculer l'aire de l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Session de mai 2010

EXERCICE 1

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction G_k par : $G_k(x) = e^{-kx^2}$.

- 1) Etudier la parité de G_k .
- 2) Démontrer que G_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de G_k .
- 3) Calculer G_k'' et résoudre l'équation $G_k''(x) = 0$.
- 4) Tracer les courbes de G_k pour $k = \frac{1}{2}, 1$ et 2 .

- 5) Démontrer que : $h \leq k \Leftrightarrow G_h \geq G_k$ sur $\mathbb{R}$.
- 6) Dans cette question, $k = \frac{1}{2}$. Soit pour α la solution positive de l'équation pour $G_k''(x) = 0$.
 - a) Déterminer une équation de la tangente pour T à la courbe de pour G_k au point d'abscisse pour α .
 - b) Tracer pour T sur le graphique.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$.

- 1) Démontrer que : $f(x) = x \ln(2) - 2 \ln(x)$.
- 2) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
- 3) Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
- 4) A l'aide des questions 2 et 3, précisez le signe de f .
- 5) Déterminez l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $2^n > n^2$.

EXERCICE 3

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(6,0,0)$ et $B(0,6,0)$.

- 1) Déterminer le barycentre G des points O, A et B affectés respectivement des coefficients 1, 2 et 3. Faire une figure.
- 2) Soit $C(0,0,4)$.
 - a) Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par :

$$(\vec{OM} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}) - \vec{MC} = \vec{0}$$
 - b) Donner une équation cartésienne de S .
- 3) Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$. Dessiner cette intersection sur la figure.
- 4) Soit P l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$$

Montrer que : $G \in P$. Déterminer P .

EXERCICE 4

Partie I

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$$

On note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)

- a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 1. Interprétez les résultats.
- b) Vérifier que, pour tout x différent de 1, $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \cdot \frac{x}{2(x-1)}$$

En déduire la limite de f en $-\infty$.

2)

- a) Etudier les variations de f .
- b) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur l'intervalle $] -\infty; 1]$.

Partie II

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$ où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre (E) .

2) On considère les solutions de (E) dont la courbe passe par le point A de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$.

- a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme $(ax + \frac{1}{2})e^{-x}$.

On note alors $h_a(x) = (ax + \frac{1}{2})e^{-x}$ où a est un nombre réel.

- b) Faire l'étude du sens de variation de h_a selon les valeurs de a et montrer que pour tout réel a différent de 0, h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a .
- c) On note C_a la courbe représentative de h_a et S_a le point de C_a correspondant à l'extremum de h_a . Vérifier que pour tout réel a différent de 0, S_a est un point de Γ défini dans la partie I.

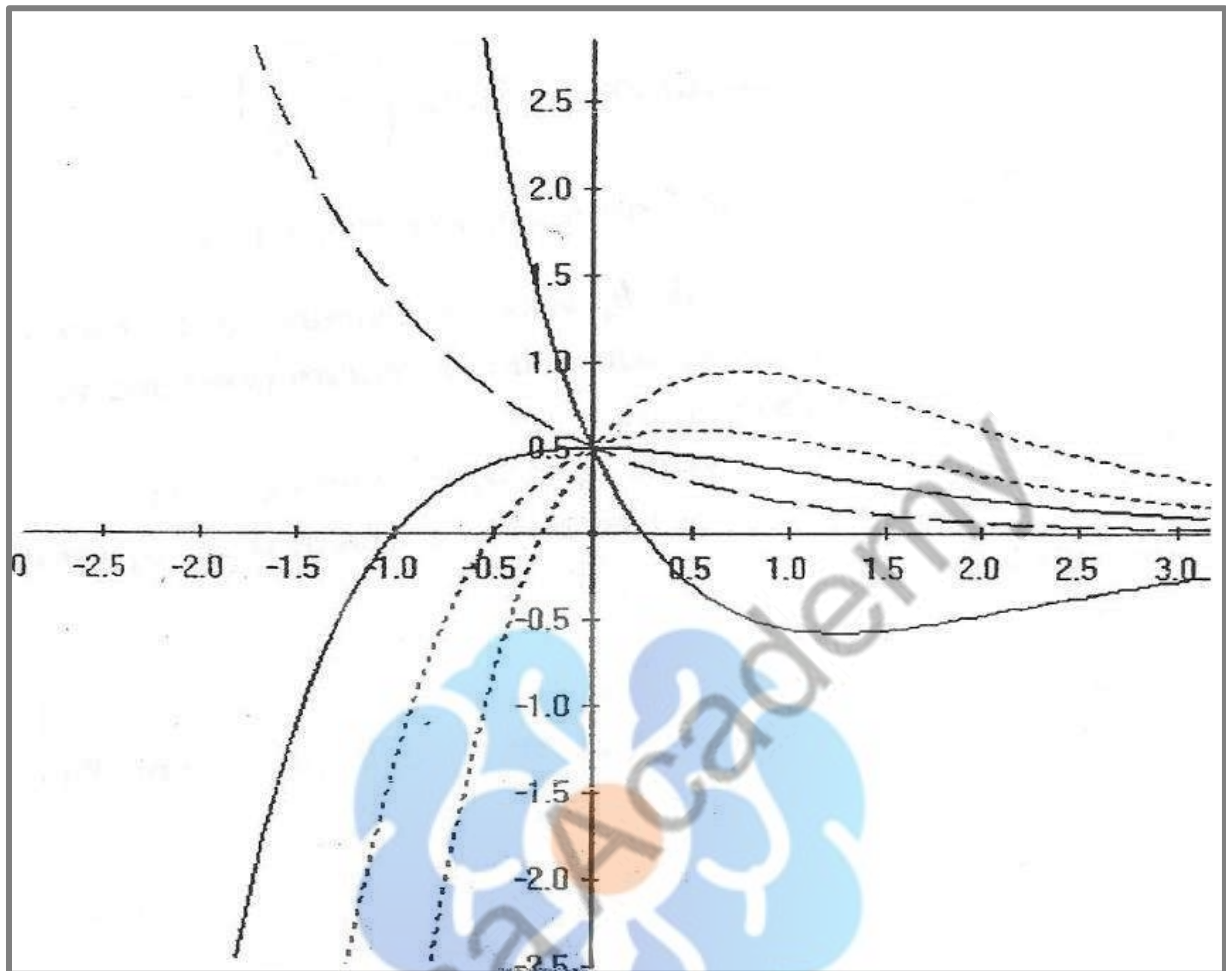
Partie III

Sur la figure ci-dessous jointe en annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes C_a pour cinq valeurs de a : -2 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 2 .

- 1) Sur cette figure, tracer Γ et ses asymptotes.
- 2) Pour chacune des courbes C_a tracées, autres que $C_{1/2}$, déterminer la valeur correspondante de a en indiquant la méthode utilisée.

Partie IV

- 1) Calculer l'aire $A(t)$ de la région du plan limité par la courbe $C_{1/2}$, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel supérieur à -2 (On pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation (E)).
- 2) Quelle est la limite de $A(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

ANNEXE

Session de mai 2011

EXERCICE 1

- 1) Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, définis dans une base orthonormée, par :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} m^2 - 2 \\ 1 \\ m^2 - 2 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ m \\ -1 \end{bmatrix}$$

A quelle condition, sur m , ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

- 2) Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, définis dans une base orthonormée par :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m , l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut-il $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$?

- 3)

a) Soient les matrices $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Calculer le produit $M \times N$.

b) Vérifiez que la matrice $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ est idempotente.

c) Vérifiez que la matrice $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente.

EXERCICE 2

Un site touristique dont le billet d'entrée coûte 4000 FCFA propose deux possibilités de visite, une visite à pied sans frais supplémentaires ou une visite en car avec frais supplémentaires de 3000 FCFA par personne.

Une buvette est installée sur le site. On y vend un seul type de boisson, le vin de palme, au prix de 2000 FCFA la bouteille de 1,5 litres. On suppose qu'à la buvette un touriste achète au plus une boisson.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un visiteur au hasard.

On a établi que :

- 30% des visiteurs visitent le site à pied ;
- 18% des visiteurs à pied achètent une boisson ;
- 80% des visiteurs visitent le site en car et achètent une boisson.

On note :

- C l'évènement : « le touriste visite en car » ;
- B l'évènement : « le touriste achète une boisson ».

1) Reproduisez le tableau 1 ci-contre et complétez-le.

	C	$\bar{C}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			

Tableau 1

2) Donnez l'équivalent ensembliste de l'évènement : « Le touriste visite à pied et achète une boisson ». Calculez la chance de réalisation de cet évènement.

3) Calculez la probabilité que le visiteur fasse la visite à pied sachant qu'il a acheté une boisson.

4) On note d la dépense d'un visiteur.

a) Reproduisez le tableau 2 ci-contre et complétez-le en définissant la loi de probabilité « montant de la dépense par visiteur sur le site ».

Montant de la dépense (en FCFA)	4 000	6 000	7 000	9 000
Probabilité				

Tableau 2

b) Calculez alors la dépense moyenne par visiteur.

EXERCICE 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- ✓ les points $A(1,1,1)$ et $B(3,2,0)$;
- ✓ le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ vecteur normal ;
- ✓ le plan (Q) d'équation $x - y + 2z + 4 = 0$;
- ✓ la sphère (S) de centre le point A et de rayon AB .

- 1) Montrez qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$.
- 2) Déterminez une équation de la sphère (S) .
- 3) Calculez la distance du point A au plan (Q) . Déduisez que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) .
- 4) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
- 5) On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q) , noté C , a pour coordonnées $(0, 2, -1)$.
 - a) Prouvez que les plans (P) et (Q) sont sécants.
 - b) Soit (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q) , montrez qu'une représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
 - c) Est-ce que le point A appartient à la droite (Δ) ?
 - d) On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (Δ) . L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
 Justifiez la réponse.

PROBLEME

On étudie dans ce problème l'évolution d'une population de petits rongeurs.

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$$

- 1) Démontrer que :

$$f(x) = \frac{3}{2 + e^{-\frac{x}{4}}}$$

- 2) Etudiez les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 3) Etudiez les variations de la fonction f .

Partie II

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

- 1) Résolvez l'équation différentielle (E_1) .
 2) Déterminez l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
 3) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

Partie III

En réalité, dans un village au Sud du Cameroun appelé ONDODO on a observé qu'un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans ce village, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

- 1) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction h définie par : $h = \frac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

- 2) Donnez les solutions de l'équation différentielle (E_4) :

$$(E_4) : y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

Déduisez l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

- 3) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$.

Session de mai 2012

EXERCICE 1

ONDOUA débute un jeu de fléchettes. Il effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'il atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'il atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'il a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'il manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer, il a autant de chances d'atteindre que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les événements suivants :

A_n : « ONDOUA atteint la cible au $n^{\text{ème}}$ coup »

B_n : « ONDOUA ratte la cible au $n^{\text{ème}}$ coup ».

On pose $P_n = P(A_n)$, la probabilité de réalisation de l'évènement A_n .

Pour les questions (1) et (2), on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

- 1) Déterminer P_1 et montrer que $P_2 = \frac{4}{15}$
- 2) Montrer que pour tout nombre entier $n \geq 2$, $P_n = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$
- 3) Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = P_n - \frac{3}{13}$
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q .
- 4) Ecrire u_n puis P_n en fonction de n .
- 5) Déterminer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) définie par : $y' - 2y = e^{2x} - 1$ où y désigne une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1) Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).
- 2) Déterminer la solution générale de l'équation (E_0) définie par : $y' - 2y = 0$.
- 3) En déduire la solution générale de (E).
- 4) Vérifier que la solution particulière de (E) qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + \frac{1}{2}$$

- 5) Calculer $\int_0^1 xe^{2x} dx$ et en déduire la valeur exacte de $\int_0^1 f(x) dx$.

EXERCICE 3

- 1) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- b) Prouver que, pour tout entier naturel n , non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$.
En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- c) Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

- 2) On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- a) Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.
- b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

PROBLEME

On désigne par f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{(1 + \ln x)^n}{x}$$

Où n est un entier naturel strictement positif et $\ln$ le logarithme népérien.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 4 cm).

PARTIE I : Etude de la fonction f_1 .

- 1) Etudier la fonction f_1 .
- 2)
- a) Montrer que (C_1) admet un point d'inflexion, et déterminer la tangente à (C_1) en ce point.
- b) Tracer (C_1) .
- c) Déterminer en particulier, le point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses et placer le point d'intersection et le point d'abscisse $x = e$.

PARTIE II : Etude de la fonction f_n , $n > 1$.

- 1)
- a) Etudier, en distinguant les cas n pair et n impair, la limite de f_n à droite de 0.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$ (on pourra poser $x = t^n$). En déduire que la limite de f_n quand x tend vers l'infini est nulle.
- 2) Etudier les variations de f_n . On distinguera deux cas : n pair et n impair.
- 3)

- a) Montrer que les courbes (C_n) sont tangentes en un même point A , à l'axe des abscisses, et passent toutes par un autre point B dont on déterminera les coordonnées.
 - b) En utilisant les résultats obtenus précédemment, dresser les tableaux de variations de f_2 et f_3 .
 - c) Préciser les positions relatives de (C_2) et (C_3) , puis tracer sur un autre graphique que (C_1) , les arcs de (C_2) et (C_3) correspondant à $x \in]0 ; 4]$.
 - d) On déterminera les pentes des tangentes en B à (C_2) et (C_3) , et les points de ces courbes d'abscisse $x = e$.
- 4) Calculer l'aire A_n du domaine du plan défini par : $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f_n(x)$.

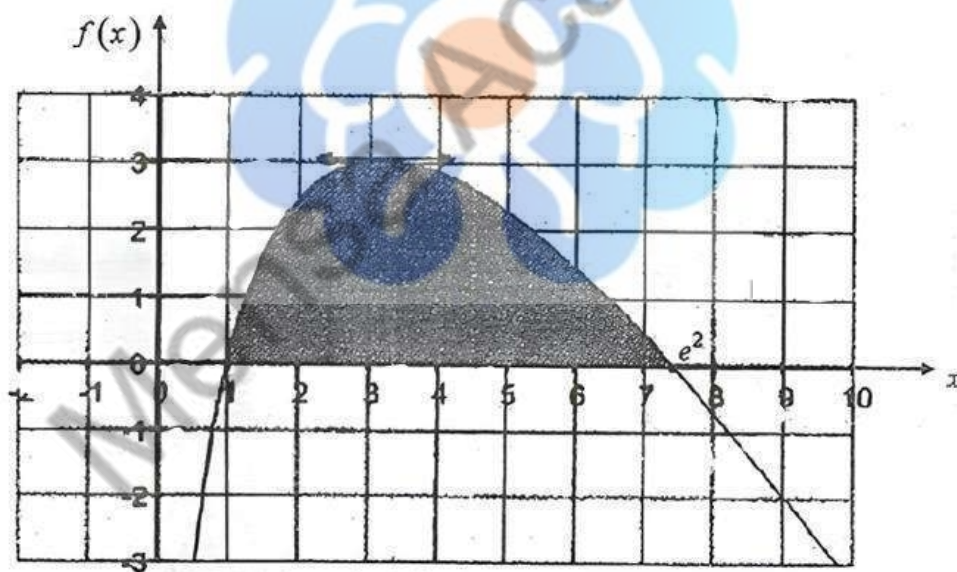
Session de novembre 2014

EXERCICE 1

Dans une entreprise de la ville de YAOUNDE au CAMEROUN, on a modélisé le bénéfice réalisé, en millions de francs CFA, pour la vente de x centaines d'appareils, par la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$f(x) = -2x + (e^2 - 1) \ln(x) + 2$$

La courbe de la fonction f est donnée ci-dessous :



- 1) Vérifier par le calcul que $f(1) = 0$ et $f(e^2) = 0$.
- 2) A l'aide du graphique, déterminer approximativement :
 - a) Le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.
 - b) Les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul.
- 3)
 - a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variations de la fonction f .

- c) En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (*le résultat sera arrondi à l'unité !*).

EXERCICE 2

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

On appelle (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

- 1) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
- 2) Déterminer la limite de la suite (w_n) .
- 3) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- 4) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
- 5) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite que l'on appellera ℓ .
- 6) On appelle (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 - a) Montrer que (t_n) est une suite constante. Déterminer cette constante.
 - b) Déterminer alors la valeur de ℓ .

EXERCICE 3

La population du Gabon en 2010, classée par province, a répondu de la façon suivante à un sondage sur son attitude face à l'introduction de la biométrie pour le scrutin législatif de l'année 2011.

	Pour	Contre	Total
Province de l'estuaire	7,8%	22,2%	30%
Autres provinces	18,2%	51,8%	70%
Total	26%	74%	100%

NB : la somme des proportions est égale à 100.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un individu de cette population.

- 1) Quelle est la probabilité pour que l'individu choisi soit :
 - a) Un ressortissant de la province de l'estuaire ?
 - b) Pour l'introduction de la biométrie ?
 - c) Ressortissant de la province de l'estuaire et est pour l'introduction de la biométrie ?
- 2) Si on sait que l'individu choisi est un ressortissant de la province de l'estuaire, quelle est la probabilité pour qu'il soit pour l'introduction de la biométrie ?
- 3) Si on sait que l'individu choisi est contre l'introduction de la biométrie, quelle est la probabilité qu'il soit un ressortissant des autres provinces ?

- 4) Peut-on dire que les événements « Être un ressortissant de la province de l'estuaire » et « Être pour la biométrie » sont indépendants ?

PROBLEME

Partie I :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$.

- 1) Calculer les limites de f aux bords de son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ℓ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 3) Déterminer l'entier naturel n tel que $\ell \in]n, n+1[$.

Partie II :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
- 3) Montrer que :

$$g\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{1+4\ell}{8\ell^2}.$$

- 4) Dresser le tableau de variations de g .
- 5) Donner les équations des tangentes à la courbe C_g représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{\ell}$.
- 6) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.
- 7) Représenter succinctement C_g et ses tangentes dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III :

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

- 1) En intégrant par parties, calculer $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx$.
- 2) Calculer $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 g(x) dx$.
- 3) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$. Exprimer le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
- 4) Interpréter le résultat de la question précédente.

Session de mai 2015

EXERCICE 1

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

- 1) On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Calculer $P(X = 0)$
On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.
 - c) Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
 - d) En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.
- 2) On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
 - Soit k un entier compris entre 1 et n .
 - Soit N l'évènement : « la k -ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
 - Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une noire au k -ième ».
 - Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ».
 Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ (probabilité de B sachant A) et $P(N)$.

EXERCICE 2

On définit la suite suivante : $u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$

- 1) Calculez u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Déterminez un réel a tel que la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
On pose alors pour tout n entier naturel, $v_n = u_n - 10$.
- 3) a) Calculez v_0 puis donnez l'expression de v_n en fonction de n .
b) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ? Déterminez la limite de la suite (u_n) .
- 4) Pour n entier naturel, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
 - a) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ? Quelle est la limite de la suite (T_n) ?
 - b) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ? Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

EXERCICE 3

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

- 1) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
Placer les points A, B, C, A', B', C' .
- 2) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .
- 3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
Tracer $\mathcal{D}$. Quelle remarque peut-on faire ?
- 4) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f . Montrer que M' appartient à la droite $(\mathcal{D})$.
- 5) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}$.
En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel.
b) En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
- 6) Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à $\mathcal{D}$).
Effectuer la construction sur la figure.

EXERCICE 4

(Problème de 2013)

Session de mai 2016

EXERCICE 1

Partie A

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$ où z est un nombre complexe.

- 1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
- 2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$$
- 3) En déduire les solutions de l'équation (E) .

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, 2 + 3i$ et $2 - 3i$.

- 1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A' , image du point A par la rotation r .
- 2) Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' .

EXERCICE 2

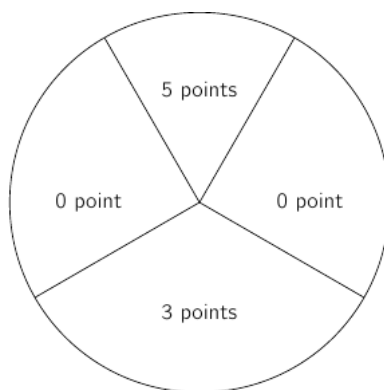
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

- 1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > 0$).
b) Etudier la monotonie de la suite (x_n) .
c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b) Etudier la limite de la suite (x_n) .
- 3) a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.
- 4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$.

EXERCICE 3

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

- 1) Le joueur lance une fléchette.

- On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
- On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
- On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$, déterminer p_0, p_3 et p_5 .

- 2) Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

- On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
- On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
- On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
- On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A .

- a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.

- b) En déduire $p(P)$.

- 3) Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.

Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

- 4) Pour une partie, la mise est fixée à 200 Francs CFA.

Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 500 Francs CFA. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 300 Francs CFA. S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -200, 100 et 300.

- a) Donner la loi de probabilité de X .

- b) Déterminer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 4

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique d définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$.

- 1) Calculer la dérivée d' de d . En déduire les variations de d .
- 2) Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
- 3) Montrer que pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.

Partie II : Etude de la fonction f .

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f respectivement.

- 1) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe C_f .
Préciser la position relative de Δ et de C_f .
- 2) a) Pour tout $x \in] -1 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Vérifier que $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.

En déduire le sens de variation de f' .

- b) Dresser le tableau de variation de f' (on admettra que $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$).

- 3) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $] - 1 ; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
 Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.
- 4) a) Etudier les variations de f .
 b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 c) Dresser le tableau de variations de f .

Partie III : Prolongement de la fonction f en -1 .

On considère la fonction g définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x), \text{ pour } x > -1 \end{cases}$

On appelle C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la partie II.

- 1) a) Pour $x \in] - 1 ; +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$.
 b) En déduire que g est dérivable en -1 et préciser sa dérivée $g'(-1)$.
- 2) Construire Δ et C_g . Préciser les tangentes à C_g aux points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.

Session de mai 2017

EXERCICE 1

Partie A

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

- 1) Etudier les variations de f et g sur $[0; +\infty[$.
 2) En déduire que pour tout $x \geq 0$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Partie B

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

- 3) On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

A l'aide de la partie A, montrer que $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

- 4) Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

- 5) Etude de la convergence de la suite (u_n) .

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
- c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
- Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ell \leq 1$ et en déduire un encadrement de ℓ .

EXERCICE 2

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$.

- 1) Démontrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
- 2)
 - a) Déterminer les nombres réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
 - b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 1 - i$, $z_J = i\sqrt{2}$ et $z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

- 1) Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
- 2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K . Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
- 3) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 4) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D .
 - a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r .
 - b) Soit C l'image du point L par la rotation r . Déterminer l'affixe du point C .
- 5) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T .

1)

a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2) Calculer $P(T)$.

3)

a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X . Comment peut-on interpréter cette espérance ?
2. a) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.
b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux personnes contaminées parmi les 10.

PROBLEME

On désigne la fonction définie pour tout x de l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. a) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I , $f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.
b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f .
2. a) Définir la dérivée f' de f .
b) Etudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de $f'(x)$.
En déduire le sens de variation de la fonction f .
Dresser le tableau de variations de f et démontrer que pour tout x de l'intervalle I , $f(x) > 0$.
3. a) Résoudre, dans l'intervalle I , l'équation $f(x) = \frac{9}{2}$.

b) Dédurre, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points d'intersection A et B , de la courbe C_f et de la droite dont une équation est $y = \frac{9}{2}$ (On notera A le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite).

Partie B

Soit la fonction g définie, pour tout x de l'intervalle I , par : $g(x) = e^x + 1$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note b la fonction définie, pour tout x de l'intervalle I , par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. a) Etudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de $h(x)$; en déduire la position de la courbe C_f , par rapport à la courbe C_g .
b) Résoudre dans l'intervalle I , l'inéquation, d'inconnue x , $h(x) \leq 0,05$.

On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.

Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables.

- c) Tracer, avec soin, les courbes C_f et C_g sur le même graphique.
2. Montrer que, pour tout x de I , $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$. En déduire une fonction primitive de h sur I .
3. Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , à la courbe C_g et les droites d'équations.
Donner une valeur approchée de A à 10^{-2} près.

Session de mai 2018

EXERCICE 1

- 1) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n .
 - a) Calculer u_1, u_2 et u_3 . On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
 - b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par : $w_n = \frac{n}{n+1}$.
 - c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = w_n$.
- 2) Soit v la suite de terme général v_n définie par : $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
 - a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
 - b) Soit S_n la somme définie, pour tout entier naturel n , par : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
Exprimer S_n en fonction de n .
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b .

2% des montres fabriquées présentent le défaut a et 10% le défaut b .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : «la montre tirée présente le défaut a » ;
- B : «la montre tirée présente le défaut b » ;
- C : «la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
- D : «la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

- 1) Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.
- 2) Calculer la probabilité de l'événement D.
- 3) Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b .

On définit l'événement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ». Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 3

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et -2 . A tout point M d'afixe z , z différent de 2, on associe le point N d'afixe $\bar{z}$ et M' d'afixe z' tel que : $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

- 1) Calculer z' et $|\bar{z}'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.
- 2)
 - a) Interpréter géométriquement $|z - 2| = |\bar{z}' - 2|$.
 - b) Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M' .
- 3) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'afixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = B$.
- 4) On note $z_{\overrightarrow{AM}}$ et $z_{\overrightarrow{BM'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
Montrer que, pour tout M distinct de A et n'appartenant pas à Γ , le point $\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
- 5) Un point M distinct de A , n'appartenant pas à Γ , étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M' . On illustrera par une figure.

PROBLEME

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x + 1$.

- 1) Etudier le sens de variation de g .
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27 ; 1,28]$; on note a cette solution.
- 3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] - \infty, 0[$.
Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0; a[$ et $g(x) < 0$ sur $]a; +\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x+1} + 2$.

On désigne C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
- 2)
 - a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote de C_f .
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à (d) .
- 3)
 - a) Exprimer la dérivée de f et étudier son signe.
 - b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(a) = pa + q$.
 - c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4) Tracer la courbe C_f dans le repère avec asymptotes et sa tangente au point a .

Partie C : Encadrements d'aires.

Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on note D_n , l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.

- 1) Faire apparaître D_n sur la figure.
- 2) Démontrer que pour tout x , tel que $x \geq 2$, on a $\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x+1} \leq xe^{-x}$.
- 3) On pose : $I_n = \int_2^n xe^{-x} dx$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .
- 4) Ecrire un encadrement de A_n en fonction de I_n .
- 5) On admet que A_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?
Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

Session de mai 2019

EXERCICE 1

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5}$.

- 1) Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique. Préciser la raison.
- 2) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n . Calculer alors la valeur exacte de u_4 .
- 3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et calculer sa limite.
- 4) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n \leq 0,401$.
- 5) Exprimer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .
- 6) Déterminer la limite de la suite (S_n) . Est-elle convergente ?

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2 cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M , différent du point B, d'affixe z , fait correspondre le point M d'affixe z' , définie par : $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout de cet exercice.

- 1) Déterminer les points invariants de f , c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
- 2)
 - a) Montrer que, pour tout nombre complexe z , différent de -1 , $(z' - 1)(z + 1) = -2$.
 - b) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1 .
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- 3) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
- 4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
 - a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.
 - b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).
 - c) Soit Q le point d'affixe $p = -\bar{p}$, où $\bar{p}$ est le conjugué de p . Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
 - d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .

EXERCICE 3

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Etape 1 : on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .

Etape n ($n \geq 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
- Si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .

On note A_n l'évènement : « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

- 1) Calculer p_2 .
- 2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- 3) Calculer p_3 .
- 4)
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $p_n > 0,25$.
 - b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
 - c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ .
 - d) Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ .

PROBLEME

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$.

- 1) Calculer $g'(x)$ et préciser son signe pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3) Dresser le tableau de variation de g .
- 4) Donner le signe de $g(x)$.

Partie B : Etude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité graphique 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- 5) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
- 6)
 - a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + 2e^x$.
- 7) Dresser le tableau de variation de

8) Tracer $\mathcal{C}$.

9) Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.

En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.

Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.

10) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie B) est solution de (E).

11) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

12) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Session de mai 2024 - Tchad

EXERCICE 1

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

b) En déduire la limite de (u_n) .

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

5) Soit p un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .

b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice, cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

1) a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .

b) Placer les points A, B et C.

- 2) Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M du plan tels que : $|z| = |z - 2|$.

Partie B

On considère l'application qui, à tout point M, différent du point A, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' , définie par : $z' = \frac{-4}{z-2}$.

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = \frac{-4}{z-2}$.
 b) En déduire les points associés aux points B et C.
 c) Déterminer et placer G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
- 2) a) On rappelle que le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie : $|z|^2 = \bar{z}z$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$;
- Pour tout nombre complexe z non nul, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) On suppose que M est un point quelconque de $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble défini à la question 3 de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

On dispose d'un dé cubique parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
- 2) Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
 Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
- 3) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
- 4) À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur,

Quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
 - si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.
- 1) a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
 - 2) Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
 - 3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

EXERCICE 4

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

- 1) Calculer $g'(x)$ et préciser son signe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3) Dresser le tableau de variation de g .
- 4) Donner le signe de $g(x)$.

Partie B : Etude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} \times \ln(1+2e^x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- 5) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
- 6) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
On pourra effectuer le changement de variable : $t = 1 + 2e^x$.
- 7) Dresser le tableau de variation de f .
- 8) Tracer $\mathcal{C}$.
- 9) Soit α un réel strictement positif.
 - a) Vérifier que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.
En déduire la valeur de l'intégrale : $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$
 - b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$
Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- 10) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie B) est solution de (E).

- 11) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- 12) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

Session de juillet 2025 - Tchad

EXERCICE 1

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$.

- 1) Calculer $I + J$.
- 2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.
 - a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
 - b) En déduire $I - J$.
- 3) Calculer I et J .

EXERCICE 2

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation t de P dans P qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x + iy$ tel que : $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

- 1) a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y .
b) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation t .
- 2) Soit la transformation r , qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que :

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} z \right)$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r .

- 3) Soit la transformation $s = r \times t$ qui, au point $M(x; y)$ d'affixe z , associe le point $M_2(x_2; y_2)$ d'affixe z_2 .
 - a) Exprimer z_2 en fonction de z .
 - b) Déterminer les coordonnées de l'image C' du point $C(1, -\sqrt{3})$ par s .
- 4) Soit la droite (D) dont une équation est : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$.
 - a) Montrer que le point C appartient à (D) .
 - b) Soit (D') l'image de (D) par s .
Déterminer le point d'intersection (D) et (D') .

PROBLEME

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B. Le candidat devra traiter les deux parties.

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

- 1) Montrer que f est une fonction impaire et étudier ses variations sur $\mathbb{R}^*$.
- 2) Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
 - a) Déterminer les branches infinies de la courbe C_f de f .
 - b) Etudier les variations de f .
 - c) Tracer la courbe C_f .
- 3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.
 - a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = f(x-1) + 2$.
 - b) En déduire que le point de coordonnées $(1; 2)$ est centre de symétrie de la courbe C_g représentative de g .
- 4) Sans étudier la fonction g , construire C_g dans le même repère. On précisera les asymptotes de la courbe C_g .
- 5) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe C_g , les droites d'équations respectives : $x = 2$; $x = a$ et $y = x + 1$ où a est un réel supérieur à 2.

Partie B

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2e^x + 2x - 2}{e^x}$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé. (Unité sur les axes : 2 cm).

- 1) a) Montrer que l'on peut écrire $h(x)$ sous forme $2 + \varphi(x)$ où φ est une fonction que l'on déterminera.
- b) Montrer que la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.
- c) Etudier les variations de h et calculer $h(0)$.
- 2) a) Montrer que la courbe (Γ) coupe son asymptote en un point I dont on déterminera les coordonnées.
- b) Ecrire une équation de la tangente (T) de (Γ) au point d'abscisse 0.
- 3) Soit (D_m) la courbe d'équation $y = -m$, m étant un réel.
 - a) Tracer (D_1) et (D_2) .
 - b) Discuter suivant les valeurs de m , le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$E_m : (2 + m)e^x + 2x - 2 = 0$$

Session de juillet 2025 - Cameroun

EXERCICE 1

Pour tout nombre naturel n , on définit les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin x \, dx \quad ; \quad J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos x \, dx$$

- 1) Calculer I_0 et J_0 .
- 2) On suppose que $n \geq 1$.
 - a) En intégrant par parties I_n puis J_n , démontrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$
 - b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n .
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

EXERCICE 2

Sur le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

- 1) Placer ces points dans ce plan.
- 2) a) Déterminer le module et un argument de : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$
 b) En déduire la nature du triangle ABC .
 c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et tracer (C).
- 3) On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 a) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z qui vérifient la relation : $2(z + \bar{z}) + \bar{z}z = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon R et tracer (Γ) .
 b) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ) .
- 4) Soit la rotation r de centre A et d'angle $\pi/3$.
 a) Déterminer l'écriture complexe de r .
 b) En déduire les images de A, B et C par r .

EXERCICE 3

Un candidat à un examen doit répondre à un questionnaire comprenant dix questions indépendantes. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Le candidat doit cocher la réponse qu'il juge bonne.

Dans tout l'exercice, on suppose qu'un candidat répond au hasard à toutes les questions.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question.
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'il donne les réponses exactes aux 10 questions ?
- 3) Pour tout entier k compris entre 0 et 10, donner, en fonction de k , la probabilité p_k pour qu'il donne les réponses justes à k questions exactement.
- 4) Donner les valeurs numériques des probabilités p_k pour les entiers k de 0 à 4 à 10^{-4} près.
- 5) Soit k le nombre de réponses exactes données par le candidat. Si $k \leq 4$, le candidat se voit attribuer la note 0. Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la note 0 ?

EXERCICE 4

Cf. Exercice 4 de la session de juin 2024.

III. ORDRE GENERAL

Session de mai 2004

SUJET I

La lutte contre la pauvreté est devenue une grande préoccupation pour les pays africains.
Que pensez-vous qu'on puisse faire pour la réussite de ce programme ?

SUJET II

Montesquieu affirme en son temps qu'« aimer lire, c'est faire échange des heures d'ennui que l'on doit avoir dans une vie contre des heures délicieuses ». Qu'en pensez-vous ? Quelle expérience personnelle faites-vous de la lecture ?

Session de mai 2007

SUJET I

« J'aime l'homme qui chante en travaillant » déclare un sociologue.
Cette pensée peut-elle convenir au travailleur camerounais d'aujourd'hui ?
Vous justifierez votre réponse à l'aide d'arguments pertinents.

SUJET II

A l'aide d'exemples précis et d'arguments pertinents, montrez comment l'homme qui n'accomplit pas son devoir professionnel commet une sorte de vol à l'égard de son pays.

SUJET III

La croissance économique peut-elle réduire la pauvreté en Afrique Sub-saharienne ? Vous justifierez votre réponse à l'aide d'arguments pertinents tirés de l'actualité et de votre culture personnelle.

Session de mai 2008

SUJET I

Balzac dans *Les illusions perdues* affirme : « Le journal au lieu d'être un sacerdoce, est devenu un moyen pour les partis ; de moyen, il s'est fait commerce ; et, comme tous les commerces, il est sans foi, ni loi.

Tout journal est une boutique où l'on vend au public des paroles de la couleur dont il les veut. [...] Un journal n'est plus fait pour éclairer, mais pour flatter les opinions... »

Après avoir clairement établi le rôle de la presse, vous direz si vous êtes aussi sévère que Balzac avec la presse d'aujourd'hui. Justifiez votre point de vue à l'aide d'arguments pertinents.

SUJET II

La misère du continent africain vous semble-t-elle une fatalité ?

Justifiez votre réponse à l'aide d'arguments pertinents.

Session de mai 2012

SUJET 1

Bien des gens disent qu'ils aimeraient apprendre, mais avouent qu'ils sont découragés par la contrainte qu'entraîne en général le moindre apprentissage.

Dans une dissertation rigoureusement menée, vous direz si vous pensez que l'on puisse apprendre sans contrainte.

SUJET 2

Ceux qui vivent dans la misère se considèrent de plus en plus comme des exclus de la société moderne. La misère vous semble-t-elle une fatalité en Afrique ? Comment réagissez-vous face à une telle attitude ?

Vous répondrez à cette question à l'aide d'arguments pertinents et d'exemples concrets tirés de la vie courante.

Session de mai 2016

SUJET 1

Le journaliste Maurice Clément affirme : « La violence est la manifestation d'un état de pauvreté. Par conséquent, pour mettre fin à ce fléau, il faut combattre la misère ».

Commentez et discutez ces propos à l'aide de votre expérience de la vie quotidienne.

SUJET 2

Les biens matériels procurent un certain plaisir sans pour autant répondre à l'insatisfaction permanente de l'homme.

Montrez-le à l'aide des situations concrètes de la vie quotidienne.

Session de mai 2017

SUJET 1

Un observateur contemporain affirme :

« Le stress au travail est devenu un véritable fléau social. De nos jours, ils sont peu nombreux, ceux qui échappent à ce mal aux conséquences souvent fâcheuses ».

Après avoir déterminé les causes de cette calamité, vous direz à l'aide d'arguments pertinents ce que vous préconisez afin de permettre au travailleur d'aujourd'hui d'être plus serein dans l'exercice de son métier.

SUJET 2

Que pensez-vous de ces propos de René Binois :

« [...] Une équipe vaut ce que valent ses membres [...] La cohésion et le rendement d'une équipe sont fonction des individus qui la composent ».

Session de mai 2018

SUJET 1

La pauvreté et le chômage sont des réalités vécues par la totalité des pays d'Afrique, et vont plutôt en s'aggravant qu'en régressant.

Après avoir donné quelques facteurs internes et externes qui contribuent à cette situation à partir d'exemples précis, dites ce qui vous semble judicieux pour changer cet état des choses.

SUJET 2

Un observateur de la société moderne déclare :

« On entend souvent dire que l'eau c'est la vie » pourtant, chaque jour dans le monde, l'eau tue des milliers d'enfants et d'adultes.

En vous servant de votre expérience de la vie courante, et à l'aide d'arguments pertinents, vous direz si vous partagez ce point de vue.

Quelles dispositions pensez-vous que l'on puisse prendre pour que l'eau ne soit pas un danger pour l'être humain ?

Session de mai 2025

SUJET

A cause des occupations de ses différents membres, la communauté familiale est mise en péril.

Après avoir expliqué ces propos, dites quels peuvent être les inconvénients de cette situation et ce qu'il faut faire pour y remédier.

TOPIC

Due to the busy schedules of its various members, the family community is at risk.

After explaining this statement, discuss the potential disadvantages of this situation and what can be done to remedy it.

IV. ANGLAIS

Session de mai 2007

A) Grammar: (3 marks)

a) Complete these sentences with a suitable form of the verb in brackets. (1.5 mark).

- 1) She (buy) a computer if she had had enough money _____.
- 2) He usually (do) his invoices after he (record) the financial transactions _____.
- 3) The business (take over) by a Japanese company last year _____?
- 4) They (sew) the gowns a week ago _____.
- 5) The man who presently (walk) near your house is my uncle. _____.

b) Fill the gap in each sentence using a suitable linking word (1.5 mark).

- 1) They came to the party _____ they had not done their homework.

- 2) We cannot leave the office _____ 3 o'clock _____ we have a lot of work today.
- 3) It rained in the morning; _____ a result, many students came late.
- 4) She has not _____ completed her assignment.
- 5) _____ he was writing, his friend was singing.

B) Vocabulary: (2 marks)

Give the synonyms of the following words and expressions:

To afford

A neighbouring factory

A sugar mill

Economical

To manufacture sugar

A voyage

To process sugar-cane

To be within easy reach

C) Reading Comprehension

Read the following passage and answer the questions that follow it.

Sugar-cane was first brought to the West Indies by the Spaniards and Portuguese: In fact, Columbus took some canes with him on his second voyage in 1493. Sugar-cane probably came originally from the Pacific Islands. In ancient times, the Pacific Islanders were great travellers and took long sea voyages in their big canoes. We think they must have taken canes with them on their voyages to the East Indies and East Asia, for more than 2,000 years ago sugar-cane was being grown in India. Arab travellers brought it to Mediterranean countries, and by the 15th century it was growing in the Canary Islands and on the west coast of Africa. It was still very little known in Britain and Northern Europe.

The Spaniards and Portuguese found that the sugar-cane grew very well in the West Indian islands, and it was principally to work in the sugar-cane plantations that they brought over slaves from Africa. More and more plantations were made in all the larger islands and, especially during the last 100 years, better varieties of sugar-cane have developed.

One very important point in growing sugar-cane is that the juice must be extracted from the cane very soon after it has been cut, or much of the sugar is lost. Therefore there must be sugar factories within easy reach of the plantations. In the old days when transport was slow and difficult, almost every grower manufactured his own sugar in his own little sugar mill and boiling house on the plantation. There are ruins of many of these small sugar mills to be seen around the country, and a few are still working. Now that the transport of canes is easier and cheaper, it is much more economical to have fewer and bigger factories which can afford to buy expensive modern machinery. For these reasons smaller plantations have often been joined together into bigger ones, and big companies able to afford the expense of a big factory have replaced private landowners. There are still, however, many small plantations which grow cane but send it to a neighbouring factory to be processed.

Adapted from A Sugar Plantation in Jamaica by Phyllis Thornton and Moya Cozens.

Questions

1. The first of the three paragraphs above is about: (1 mark)
 - a) The Spanish and Portuguese settlers in the West Indies
 - b) The early history of sugar-cane
 - c) Early trade by sea
 - d) Ancient history in East Asia and the Pacific Islands
2. Give a suitable title to the passage (1 mark)
3. Why do better communications lead to fewer factories for sugar-making? (1 mark)
4. Which one of these answers is true? (1 mark)
 - a) Nearly all plantations are now large ones
 - b) Large plantations tend to split up into smaller ones
 - c) There are more small plantations now than there used to be
 - d) There are many large and many small plantations
5. The last paragraph is about: (1 mark)
 - a) The economics of sugar production
 - b) The effect of sugar plantation size on profitability
 - c) The need for fewer but bigger sugar factories
 - d) The positioning of sugar plantations and sugar factories

D) Essay Writing

Write an essay of 300 words on any one of the following topics:

- a) Is sugar manufactured in your country? What is the contribution of sugar to the economy of your country?
- b) What discovery/innovation/invention of the twentieth or twenty-first century do you consider revolutionary? Why?

Session de mai 2008

I - GRAMMAR AND VOCABULARY (7 marks)

A) Grammar: (3 marks)

Put one of these expressions in each gap: one, some, the other, the others, others, other.

- 1) Some snakes are poisonous and are harmless.
- 2) 21 students are going into town today. is going by taxi, 17 are going by bus and three are walking.
- 3) Have you seen his eyes? eye looks straight at you and looks away to one side.
- 4) Three of the roads are tarred. are not.
- 5) Two students got distinctions. All passed. No failed.
- 6) Look at my bicycle! wheel is buckled and has been stolen.

7) people like football while prefer boxing.

B) Vocabulary: (4 marks)

a) Complete these sentences with a suitable adjective or noun. Use the adjective or noun only once. (2 marks).

- 1) You haven't eaten for six hours, you must be
- 2) You must be after all that running.
- 3) The birds are eating that corn. It must be now.
- 4) Do you mean to say that you calculated that complicated sum in your head? You must be very
- 5) That person has a peculiar look on his face. He doesn't seem quite normal. He must be
- 6) Look at the way that man is driving. He must be
- 7) That man's white hair and wrinkled skin made me think that he must be very
- 8) You aren't going to revise for your exams at all? You must be very

b) Give the opposite of the following words (2 marks).

To agree

To demolish

To strengthen

To lose

To expand

To lower

Success

Acceptance

II - READING COMPREHENSION (5 marks)

Read the following passage and answer the questions that follow it.

TEXT : Life on Mars

If there is life on the planet Mars it will have to stand extreme cold at night. This should not be too difficult for plants. Cold-country plants on earth tolerate arctic conditions for some months each winter, and plants that grow on high mountains in the tropics survive temperatures which frequently fall below freezing point during the night. Large animals on earth try to keep from freezing, but many insects spend the winter in frozen surroundings. Bacteria, protozoa and other small organisms can be kept frozen for many years and thawed out alive and healthy. So life on Mars should not have too much trouble with cold. An obvious way to avoid the short-period cold of the Martian night would be to burrow into the ground as many cold-country animals do on earth.

Another difficulty for life on Mars is scarcity of oxygen and water, but these lacks may not be as

serious as they appear from the human point of view. Perhaps an atmosphere like the earth's is a luxury, not a necessity. Martian plants might have strong impervious skins to keep the moisture in their tissues from evaporating into the thin, dry air. If they need oxygen when the sun is not shining, as the earth's plants do, they may store it as a gas or as some oxygen-rich chemical compound. They would need some way of absorbing a little carbon dioxide, but in other respects they could live for most of the time independently of the atmosphere. In the moist Martian springtime they would absorb enough water to last them until the following year, and during the same season they would probably do most of their growing and reproducing.

Martian animals would have a tougher time, but if there are plants on Mars, there must be animals of some sort. An animal, by the scientist's definition, is an organism that eats plants, using part of the plant's material to build its own body and the rest to burn for energy. We usually think of animals, including men, as preying on plants, but if we choose, we can think of them as the plants' benefactors. If there were no plant-eating animals on earth, not even bacteria, the plants would grow until they had absorbed all the carbon dioxide in the atmosphere. Then they would die.

Questions

- 1) The passage suggests that
 - a) there is life on Mars.
 - b) there is no life on Mars
 - c) there could be life on Mars.
- 2) The passage mentions three things about conditions on Mars that would make life difficult. What are they ?
- 3) How do we know that living creatures could survive the freezing temperatures of Mars ?
- 4) An atmosphere like the earth's is a luxury means that
 - a) it is very nice and enjoyable to have an atmosphere like the earth's.
 - b) it is nice if you have it but you can do without it.
 - c) an atmosphere like the earth's is difficult to get.
 - d) such an atmosphere can be found only on the earth.
- 5) Which three of these things does the writer appear to know for certain to be true of Mars?
 - a) Mars is very cold at night.
 - b) There are plants on Mars.
 - c) There are animals on Mars.
 - d) Oxygen is scarce on Mars.
 - e) It is not dry on Mars all the year round, only for a part of the year.

III - ESSAY (8 marks)

Write an essay of 300 words on any one of the following topics:

- a) Are you for or against the exploration of space? Why or why not?
- b) In your opinion what is the threat to the earth's atmosphere today? What should men do to overcome this threat?

V. FRANCAIS

Session de mai 2004

SUJET I : EXPLOITATION DU TEXTE

Des livres et des bibliothèques

Notre civilisation est une somme de connaissances et de souvenirs accumulés par les générations qui nous ont précédés. Nous ne pouvons participer qu'en prenant contact avec la pensée de ces générations. Le seul moyen de le faire, et de devenir ainsi un homme « cultivé », est la lecture.

Rien ne peut la remplacer. Ni le cours parlé ni l'image projetée n'ont le même pouvoir éducatif. L'image est précieuse pour illustrer un texte écrit : elle ne permet guère la formation des idées générales. Le film comme le discours, s'écoule et disparaît ; il est difficile, voire impossible d'y revenir pour le consulter. Le livre demeure, compagnon de toute notre vie. Montaigne disait que trois commerces lui étaient nécessaires : l'amour, l'amitié, la lecture. Ils sont presque de même nature.

On peut aimer les livres : ils sont toujours des amis fidèles. Je dirai même que je les ai souvent trouvés plus brillants et plus sages que leurs auteurs. Un écrivain met dans ses ouvrages le meilleur de lui-même. Sa conversation, si même elle étincelle, s'enfuit. On peut interroger sans fin le mystère du livre. En outre, cette amitié sera partagée, sans jalousie, par des millions d'êtres en tous pays [...]

Le livre est un moyen de dépassement. Aucun homme n'a assez d'expériences personnelles pour bien comprendre les autres, ni pour bien se comprendre lui-même... les livres nous apprennent que d'autres, plus grands que nous, ont souffert et cherché comme nous. Ils sont des portes ouvertes sur d'autres âmes et d'autres peuples. Grâce à eux, nous pouvons nous évader de notre petit univers personnel, si étroit : grâce à eux, nous échappons à la méditation stérile sur nous-mêmes [...]

André MAUROIS, le courrier de l'UNESCO, Mai 1961.

Questions

I) Compréhension

- 1) Selon l'auteur, que faut-il faire pour devenir un homme cultivé ?
- 2) Pourquoi le livre apparaît-il aux yeux de l'auteur comme étant le seul moyen de culture fiable ?
- 3) Pourquoi selon l'auteur, le discours et l'image n'ont pas la même notoriété que le livre ?
- 4) Pourquoi l'auteur nous conseille-t-il d'aimer les livres ?

II. Connaissance et maniement de la langue

- 1) « Ni le cours parlé ni l'image projetée n'ont le même pouvoir éducatif. L'image est précieuse pour illustrer un texte écrit : elle ne permet guère la formation des idées générales. Le film comme le discours, s'écoule et disparaît... ».
 - a) A quel temps et mode sont conjugués les verbes de ce passage ?

- b) Mettez le même passage à l'imparfait et au futur simple de l'indicatif.
- 2) Donnez :
 - a) le synonyme de guère.
 - b) l'antonyme ou le contraire de stérile.

III. Esprit de synthèse

Résumez les idées essentielles des deux premiers paragraphes en quatre phrases

IV. Expression personnelle

Quels avantages pouvez-vous tirer de la lecture d'un bon livre ? (25 lignes au maximum.)

SUJET II : DISSERTATION

Pensez-vous que le diplôme que vous obtiendrez à la fin de votre formation à l'ISSEA vous permettra de lutter contre le chômage dans votre pays ?

Session de mai 2006

EXPLOITATION DU TEXTE

Dans la ville d'Annecy, la fréquentation du cinéma correspond à peu près à la moyenne française des villes ; environ 75p. cent des habitants vont au cinéma au moins une fois « de temps en temps », dont un tiers une fois (ou plus) par mois.

Pour motiver cette fréquentation, les raisons invoquées par les spectateurs sont d'abord négatives : ils cherchent une libération. Le cinéma n'est qu'un moyen de rompre la monotonie, le train-train, d'oublier la « grisaille », de se changer les idées... Environ 13p. cent des réponses expriment ce genre de raisons.

Ce n'est pas seulement une libération, c'est aussi un passe-temps qu'attendent nos citadins de la participation au spectacle cinématographique. Cette attente est multiple, diverse, comme les fonctions mêmes des activités de loisir. Tout le monde ne se rend pas dans une salle de cinéma comme dans une cathédrale. Pour 23 p. cent des individus, le cinéma est un simple passe-temps dont la signification est probablement assez proche des autres passe-temps.

Le plus grand nombre des individus interrogés (40 p. cent) recherche dans le cinéma une vie imaginaire. Ceux-là donnent un sens plus précis, plus riche à leur participation au spectacle cinématographique. Ils cherchent dans le cinéma le plaisir des situations imaginaires. Ils aspirent à ressentir des émotions et à éprouver des sentiments. Le cinéma met à la portée de tous des possibilités de projection et d'identification. Chacun a le pouvoir de « visualiser » ses rêves. Chacun peut être celui qu'il croit être, celui qu'il n'ose pas être, celui qu'il désire ou veut être ; le cinéma permet à chacun de satisfaire ce double qui fait partie de sa réalité semi-imaginaire. On retrouve, dans notre enquête, les thèmes de l'amour, de l'érotisme, du luxe, de la bagarre, de l'aventure ou du rêve. Mais ce qui frappe, c'est que les suffrages les plus nombreux, un sur cinq, vont aux films gais... « Je ne vais pas voir des films tristes, la vie est assez triste comme ça » ; ou encore « Au cinéma, j'attends de rire, parce qu'on n'a pas souvent l'occasion de rire », dit un artisan ; les cadres et les intellectuels, eux, apprécient surtout Charlot. Ce que Lefèbre appelle l'image inverse de la vie quotidienne est celle qui semble la plus recherchée par ce public.

La fonction du spectacle cinématographique n'est pas uniquement distractive. Environ 24 p. cent des réponses établissent que, pour leurs auteurs, le cinéma est d'abord un moyen d'information : « s'informer », « s'instruire », « réfléchir à des problèmes ».

J. Dumazedier : Vers une civilisation des loisirs

QUESTIONS

Compréhension

Donnez un titre à ce texte et justifiez-le

Quelles sont selon le texte les raisons qui poussent les gens à aller au cinéma ?

En dehors de sa fonction ludique, le spectacle cinématographique a d'autres fonctions, citez-en trois.

Langue

- 1) Expliquez : grisaille, projection, identification, suffrages.
- 2) Donnez les antonymes des mots suivants : imaginaire, rêves, souvent, luxe.
- 3) Soit la phrase : « La fonction du spectacle cinématographique n'est pas uniquement distractive ».
- 4) Mettez cette phrase à la forme emphatique à l'aide du gallicisme, *c'est...qui*, puis d'un pronom personnel.

Esprit de synthèse

Résumez les trois derniers paragraphes du texte en 50 mots avec une marge de tolérance de 5 mots en plus ou en moins.

Expression écrite

On accuse souvent le cinéma d'avoir une influence néfaste sur le comportement des adolescents. Etes- vous de cet avis ? Justifiez votre réponse à l'aide d'arguments pertinents (30 lignes au maximum)

Session de mai 2007

EXPLOITATION DU TEXTE

Le monde a fait un pas historique en reconnaissant que l'investissement de la santé est un facteur déterminant pour le développement. Les programmes de santé publique œuvrent dans l'intérêt de la préservation des forces de travail et se placent aussi en amont de tout développement économique durable. Aussi, investir dans la santé pour assurer le développement et faire reculer la pauvreté est une priorité que le gouvernement du Cameroun a retenue, en solidarité avec l'ensemble de la communauté internationale, en relation avec la Déclaration du Millénaire des Nations-Unies adoptée en septembre 2000 à New-York, et dont les objectifs en matière de santé sont principalement : réduire d'ici 2015 la mortalité à la naissance et celle des enfants de moins de cinq ans de deux tiers par rapport au niveau de 1990 ; réduire la mortalité maternelle de trois quarts ; assurer à l'horizon 2001 l'accès aux services d'hygiène, par les systèmes de santé primaire, à tous les individus en âge de procréer.

La charge de morbidité induite par les pathologies que sont le paludisme, le SIDA, la tuberculose, les maladies infectieuses de l'enfant, les maladies maternelles et périnatales, est considérable. Leur coût est particulièrement lourd, notamment pour le paludisme qui retarde d'environ 1.3% la croissance du PIB par an. Avec la maîtrise des principales causes de décès évitables, conjuguée

au développement des programmes de planification familiale, les familles défavorisées pourraient non seulement vivre de manière plus productive, mais aussi, pourraient choisir d'avoir moins d'enfants ; ce qui leur permettrait d'investir davantage dans l'éducation et la santé de chaque enfant. Les améliorations de santé se traduisent toujours par une intensification de la croissance démographique. Les statistiques récentes montrent qu'une amélioration de 10% de l'espérance de vie à la naissance est associée à une croissance économique d'au moins 0.3 à 0.4% pour l'ensemble d'un groupe social. La plupart des décollages économiques dans l'histoire sont liés au développement des grands programmes de santé publique, de contrôle des maladies infectieuses et d'amélioration de nutrition.

*Extrait du MAGAZINE PROGRAMME du
Salon International de l'Entreprise. Ydé, 2002, pp. 76-77.*

I. Compréhension

- 1)
 - a) Quels sont les objectifs énoncés dans le premier paragraphe du texte ?
 - b) Etes-vous optimiste ou pessimiste par rapport à ces objectifs ? Justifiez votre réponse.
- 2) En quoi réduire le nombre d'enfants est-il bénéfique pour les pauvres ?
- 3) Pourquoi les gouvernements portent-ils un intérêt particulier à la santé ?

II. Maniement de la langue

- 1) Expliquez les mots suivants : morbidité, malnutrition, maladies infectieuses, planification familiale.
- 2) Trouvez deux homonymes de coût.
- 3) « Les améliorations de santé se traduisent toujours par une intensification de la croissance démographique ».
 - a) A quelle forme se trouve cette phrase ?
 - b) Mettez-la à la forme interro-négative.

III. Esprit de synthèse

Le premier paragraphe du texte comporte environ 175 mots, vous les résumerez en 45 mots, avec une marge de tolérance de 5 mots en plus ou en moins. Vous inscrirez à la fin de votre résumé, le nombre de mots utilisés.

IV. Expression écrite

« La plupart des décollages économiques dans l'histoire sont liés au développement de grands programmes de santé publique, le contrôle des maladies infectieuses et d'amélioration de la nutrition. » Quelle est à votre avis la véracité de ces propos ? Justifiez votre réponse à l'aide d'exemples précis tirés de l'actualité et de votre culture personnelle. (40 lignes au maximum).

Session de mai 2008

EXPLOITATION DU TEXTE

C'était, souvenez-vous, le mardi 19 décembre. Soudain, à 8h 27 très exactement, toute la France tombait dans un grand trou noir. Usines stoppées, trains et métros arrêtés, ascenseurs immobilisés, villes bloquées faute de feux de signalisation, l'activité partout brisée net, bref un pays paralysé.

Le grand trou noir du 19 décembre, c'est l'occasion de réfléchir sur la fragilité extrême de notre société. Un pays moderne, évolué, policé, qui tourne rond et où on n'imagine pas un instant que la machine puisse se bloquer, la vie s'arrêter. Et puis voici qu'en un instant l'inconcevable se produit et des menaces élémentaires auxquelles on croyait bien avoir échappé à jamais, le froid, l'immobilité, le danger... reparaissent ou du moins font voir qu'elles ne sont nullement abolies. L'incident n'a duré que quatre heures en moyenne, mais s'il s'était prolongé un jour, ou deux, ou trois... ?

On a vu, dit-on, des paysans privés des trayeuses électriques, s'essayer maladroitement à retrouver les gestes anciens de la traite sur des vaches qui refusaient leur lait. On a cité le cas des poulets de batteries malades faute de ventilation et de chauffage et incapables, avec leurs becs en carton-pâte, de se nourrir de grain. Désarmés devant une cuisinière, un chauffe-eau, un rasoir, une machine à café, à laver, ou à écrire devenus inutilisables, privés de chaleur mais aussi de froid, condamnés à l'escalier, à la marche à pied, à la patience, les hommes et les femmes des villes s'étonnaient en découvrant leur vulnérabilité extrême et se prenaient à douter du grand mythe d'aujourd'hui, ce dieu qu'on nomme progrès.

*Pierre VIANSSON-PONTE,
Le Monde, 24 /25 décembre 1978.*

I. Compréhension

- 1) De quoi s'agit-il dans ce texte ?
- 2) Quelle est l'attitude de l'auteur par rapport à la situation qu'il décrit ?
- 3) Pourquoi tout d'un coup la France se trouve paralysée ? Est-il normal qu'un pays aussi développé subisse un tel préjudice ?
- 4) Faut-il toujours faire confiance à la technologie ?

II. Maniement de la langue

- 1)
 - a) Expliquez : L'inconcevable, abolies.
 - b) Trouvez dans le texte les synonymes des mots suivants : nullement, vulnérabilité.
- 2) « C'était, souvenez-vous, le mardi 19 décembre. Soudain, à 8 h 27 très exactement, toute la France tombait dans un grand trou noir. »
A quels temps et mode se trouve cette phrase ?
Réécrivez-la au présent et au passé composé de l'indicatif.

III. Expression écrite

Le progrès améliore-t-il toujours les conditions de vie de l'homme ? Justifiez votre réponse à l'aide d'exemples concrets.